Отчет по лабораторной работе №4: Интерполирование функции

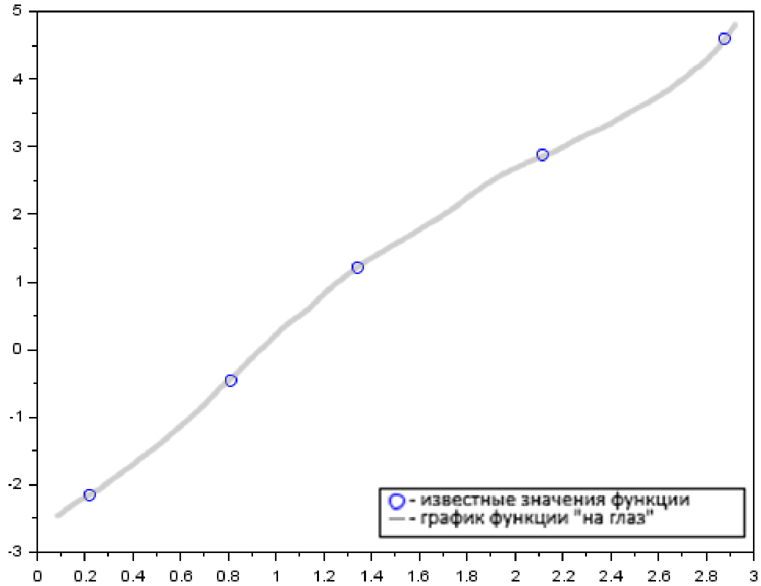
Чигарев Дмитрий 381807-1

1, 2. Графическое исследование

Имеем таблично заданную функцию $y = f(x)$:

x	0.219	0.811	1.341	2.111	2.874
$f(x)$	-2.151	-0.452	1.214	2.891	4.617

Изобразим точки на графике:



Для заданной функции ставится задача интерполяции: т.е. определения функции $L(x)$ такой что:

$$\text{L}: R \to R$$
$$L(x_i) = f(x_i),$$
$$\text{где } x_i - \text{известное значение функции в узлах интерполяции}$$

3, 4, 5. Полином Лагранжа

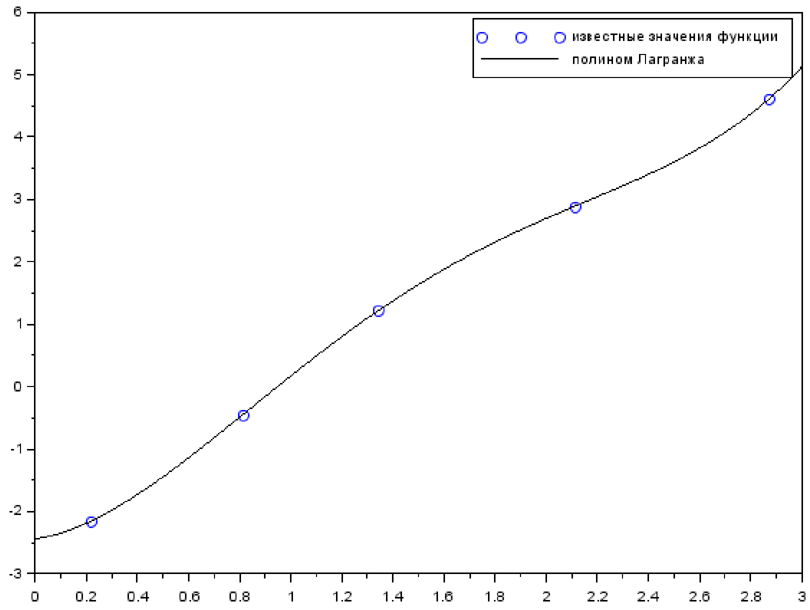
Один из способов интерполирования – построение полинома с натуральными степенями, принимающего заданные значения в узлах интерполяции. Построенная функция будет решать задачу интерполяции, и плюс к этому, будет всюду дифференцируема и непрерывна.

Интерполяционный полином Лагранжа задается следующим образом:

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} f(x_i)$$

Каждое слагаемое представленной суммы – многочлен степени $n - 1$. Соответственно, при наличии n узлов интерполяции, на выходе мы получим полином Лагранжа степени $n - 1$.

В таблице имеем 5 интерполяционных узлов, соответственно можем построить полином Лагранжа 4-й степени. Нарисуем график полученной интерполяционной функции:



Выведем её значение в промежуточных точках, значения исходной функции в которых нам заранее не известно:

x	$x_1 + x_2 = 1.03$	$(x_1 + x_2)\ /\ 2 = 0.515$	$(x_4 + x_5)\ /\ 2 = 2.492$	$(x_1 + x_5)\ /\ 3 = 1.031$
$L(x)$	0.2690216	-1.4000861	3.5848377	0.2722504

В полиноме Лагранжа каждое слагаемое довольно громоздко и зависит от кол-ва узлов интерполяции, соответственно при добавлении ещё одного узла, потребуется пересчёт всех коэффициентов многочлена. Происходит это из-за того, что все слагаемые однотипны и вносят одинаковый вклад в формирование результата. Возникает желание придать формуле более простой вид, который бы в тоже время решал упомянутые проблемы. Великие умы исследовали этот вопрос и пришли к выводу, что эквивалентный Лагранжу полином можно записать в виде формулы Тейлора, а назвать всё это полиномом Ньютона.

6, 7, 8, 9. Полином Ньютона

Представим нашу интерполяционную функцию в виде формулы Тейлора:

$$L(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

Из условий интерполяции отыщем коэффициенты a_i:

$$L(x_0) = a_0 + 0 + \cdots + 0 = y_0 \ \rightarrow a_0 = y_0$$

$$L(x_1) = y_0 + a_1(x_1 - x_0) + 0 \dots + 0 = y_1 \rightarrow a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$L(x_2) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{(x_1 - x_0)}(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) + 0 \dots + 0 = y_2 \rightarrow a_2 = \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

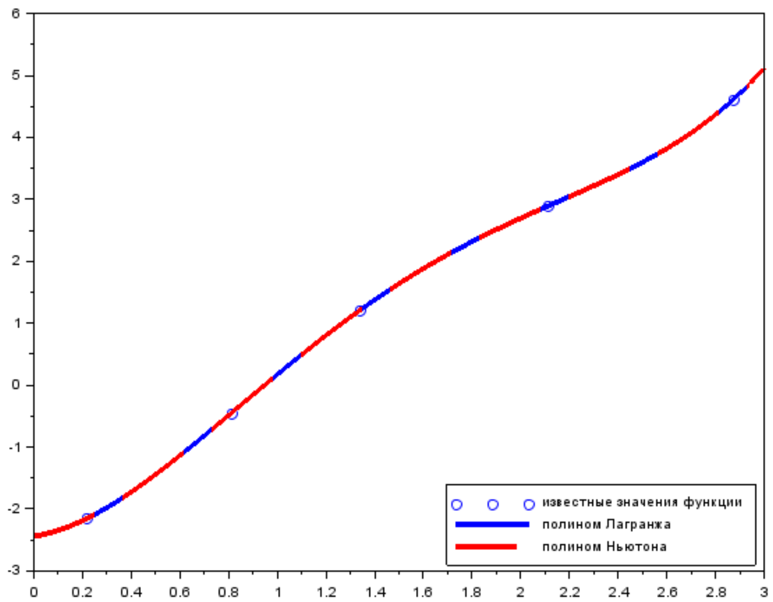
С определенного момента становится заметно, что каждый последующие коэффициент a_i можно выразить через предыдущие, используя понятие раздельной разности:

$$a_0 = d(x_0) = f(x_0)$$
$$a_1 = d(x_0, x_1) = \frac{d(x_1) - d(x_0)}{x_1 - x_0}$$
$$a_2 = d(x_0, x_1, x_2) = \frac{d(x_1, x_2) - d(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}$$
$$\dots$$
$$a_n = d(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{d(x_1, x_2, \dots, x_n) - d(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})}{x_n - x_0}$$

Тогда окончательной формулой для полинома Ньютона станет:

$$L(x) = d(x_0) + d(x_0, x_1)(x - x_0) + d(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots + d(x_0, \dots, x_n)(x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

Из определения видно, что при наличии n узлов интерполяции, мы получим многочлен степени $n - 1$. Мы знаем, что интерполяционный многочлен степени n обладает свойством единственности. Соответственно, построенные по n узлам интерполяции многочлен Лагранжа и Ньютона – это один и тот же многочлен:



x	$x_1 + x_2 = 1.03$	$(x_1 + x_2)\ /\ 2 = 0.515$	$(x_4 + x_5)\ /\ 2 = 2.492$	$(x_1 + x_5)\ /\ 3 = 1.031$
$L(x)$ (Лагранж)	0.2690216	-1.4000861	3.5848377	0.2722504
$L(x)$ (Ньютон)	0.2690216	-1.4000861	3.5848377	0.2722504

Как видно из формулы, при появлении нового узла интерполяции достаточно рассчитать лишь один новый коэффициент:

$$L_{n+1}(x) = L_n(x) + d(x_0, \dots, x_{n+1})(x - x_0) \dots (x - x_n)$$

Плюс к этому, за счет рекуррентного задания коэффициентов через раздельные разности, посчитав последний коэффициент, мы автоматически найдем значения и для всех остальных.

Таблица разделенных разностей для нашего полинома:

x_0	$d(x_0) = -2.151$				
x_1	$d(x_1) = -0.452$	$d(x_0, x_1) = 2.869$			
x_2	$d(x_2) = 1.214$	$d(x_1, x_2) = 3.143$	$d(x_0, x_1, x_2) = 0.243$		
x_3	$d(x_3) = 2.891$	$d(x_2, x_3) = 2.177$	$d(x_1, x_2, x_3) = -0.742$	$d(x_0, x_1, x_2, x_3) = -0.521$	
x_4	$d(x_4) = 4.617$	$d(x_3, x_4) = 2.262$	$d(x_2, x_3, x_4) = 0.054$	$d(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0.386$	$d(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = 0.341$

10. Погрешность интерполяционного полинома

Пусть у нас есть интерполяционный полином Ньютона степени n для функции $f(x)$, тогда по определению:

$$f(x) = L_n(x) + d(x, x_0, \dots x_n)(x - x_0) \dots (x - x_n) \quad | \ x \in R$$

Соответственно, погрешность полинома L_n в точке x можно оценить как:

$$R_n(x) = d(x, x_0, \dots x_n)(x - x_0) \dots (x - x_n) \leq d(x_0, \dots x_n)(x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

Оценим погрешность нашего полинома в точке $(x_1 + x_2) / 2 \ = 0.515$:

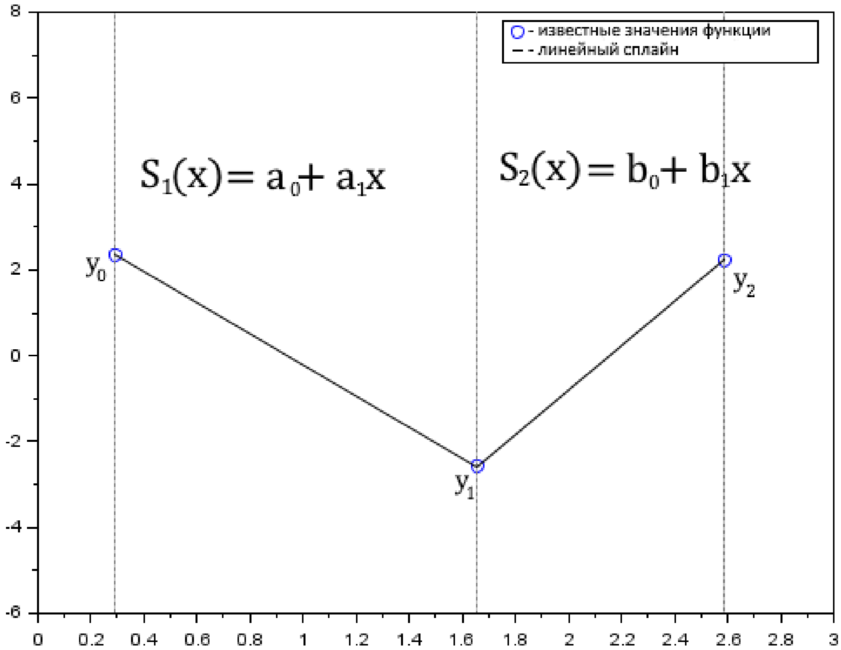
```
>>> err((x(1) + x(2)) / 2, x, y)
0.0395008
```

11. Линейный сплайн

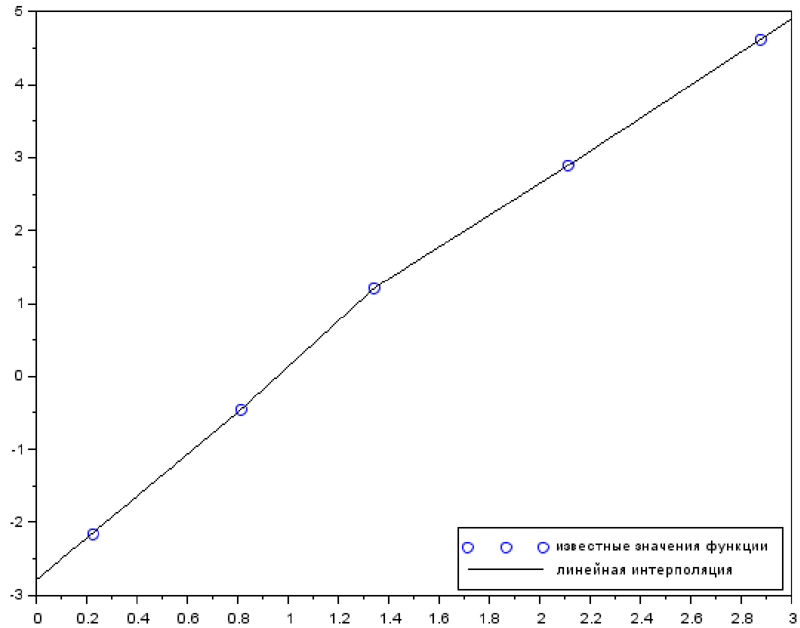
Вычисление полиномов больших степеней трудоемко, плюс к этому с увеличением степени начинает возрастать погрешность. В альтернативу построения полиномов для всей области определения, можно разбить отрезок интерполирования на маленькие участки, внутри которых интерполировать функцию полиномами низких степеней. Каждому участку – свой полином.

Полином самой маленькой степени – 1, будет задавать линейную интерполяцию. Допустим у нас есть 3 узла интерполяции, соответственно можем рассмотреть два отрезка, внутри которых зададим интерполяционные полиномы первой степени $S_1(x)$ и $S_2(x)$. Коэффициенты этих многочленов вычисляются из стандартных условий интерполяции:

$$\begin{cases} S_1(x_0) = a_0 + a_1 x_0 = y_0 \\ S_1(x_1) = a_0 + a_1 x_1 = y_1 \\ S_2(x_1) = b_0 + b_1 x_1 = y_1 \\ S_2(x_2) = b_0 + b_1 x_2 = y_2 \end{cases}$$



Линейная сплайн интерполяция реализована в SciLab функцией interpln, проинтерполируем с её помощью нашу функцию $f(x)$:



Из очевидных недостатков линейного сплайна – грубость приближение и отсутствие производной в узловых точках. Но эти проблемы решаются путем увеличения степени интерполяционных многочленов, что позволяет вводить дополнительные условия и дает больше рычагов для построения лучшего приближения.

12. Кубический сплайн

Повышение степени многочлена в сплайне до третей, дает возможность наложить ещё 4 дополнительные ограничения на сплайн функции, помимо интерполяционных. Так стандартными дополнительными условиями может стать дважды дифференцируемость функции в узлах интерполяции:

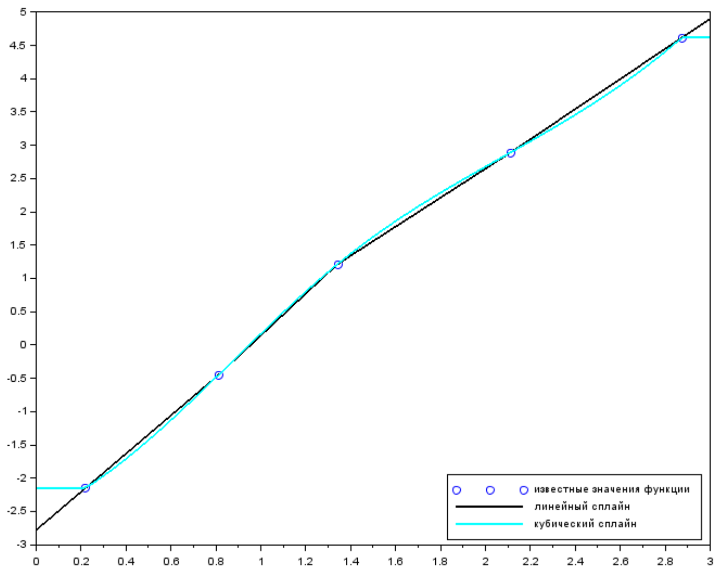
$$\begin{cases} S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1}) \\ S_i''(x_{i+1}) = S_{i+1}''(x_{i+1}) \end{cases}$$

Другие два условия могут варьироваться в зависимости от желаемого поведения сплайна, обычно это одни из следующих:

$$\left[\begin{array}{c} S_i'''(x_{i+1}) = S_{i+1}'''(x_{i+1}) - \text{трижды дифференцируемость} \\ S_1'(x_1) = S_n'(x_n) = 0 - \text{натуральный сплайн} \\ S_i'(x_i) = S_{i+1}'(x_{i+1}) - \text{переодический сплайн} \end{array} \right.$$

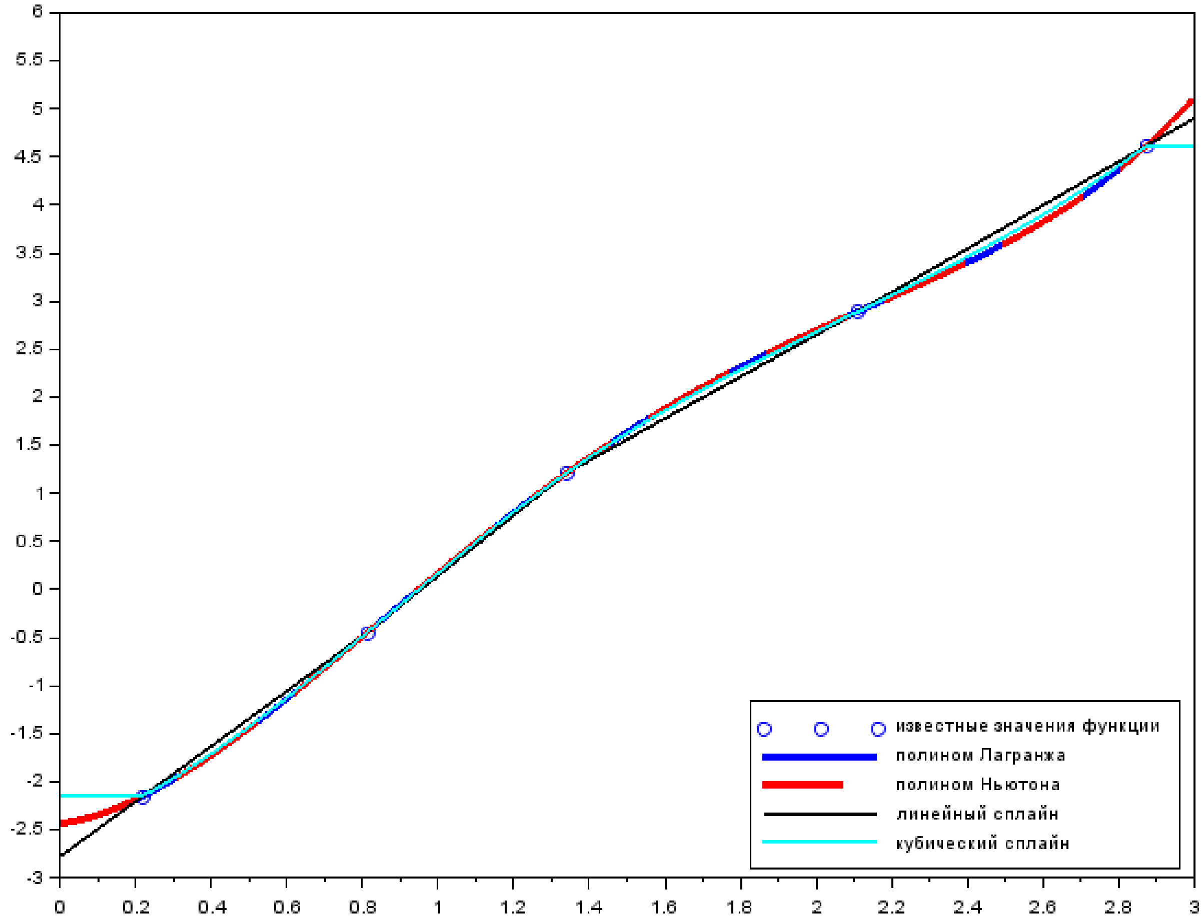
SciLab позволяет строить кубические сплайны через функцию splin, которая также поддерживает разные комбинации упомянутых доп. ограничений. О видах условий и об их влиянии на поведении сплайнов можно почитать в [документации](#).

Построим кубический сплайн для нашей функции. В качестве доп. ограничений по умолчанию будет выбраны: трижды дифференцируемость и “натурализация” сплайна.



13. Сравнение методов

Изобразим графики всех построенных интерполяционных функций на одном рисунке:



14. Приложения

1. https://github.com/proxodilka/numerical-analysis-labs/blob/master/lab4_interpolation/lab4.sce