Отчет по лабораторной работе №4: Интерполирование функции

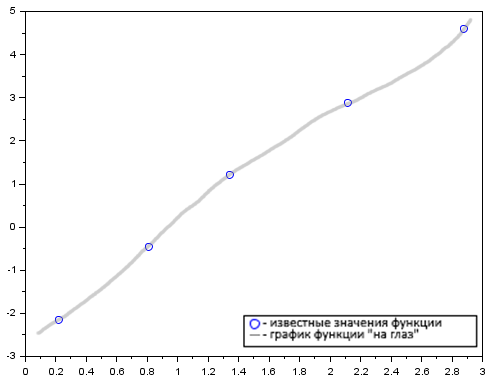
Чигарев Дмитрий 381807-1

1, 2. Графическое исследование

Имеем таблично заданную функцию :

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Изобразим точки на графике:



Для заданной функции ставится задача интерполяции: т.е. определения функции такой что:

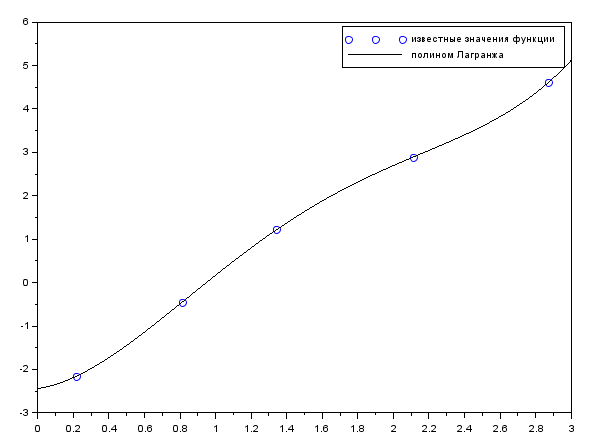
3, 4, 5. Полином Лагранжа

Один из способов интерполирования – построение полинома с натуральными степенями, принимающего заданные значения в узлах интерполяции. Построенная функция будет решать задачу интерполяции, и плюс к этому, будет всюду дифференцируема и непрерывна.

Интерполяционный полином Лагранжа задается следующим образом:

Каждое слагаемое представленной суммы – многочлен степени Соответственно, при наличии узлов интерполяции, на выходе мы получим полином Лагранжа степени .

В таблице имеем 5 интерполяционных узлов, соответственно можем построить полином Лагранжа 4-й степени. Нарисуем график полученной интерполяционной функции:



Выведем её значение в промежуточных точках, значения исходной функции в которых нам заранее не известно:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

В полиноме Лагранжа каждое слагаемое довольно громоздко и зависит от кол-ва узлов интерполяции, соответственно при добавлении ещё одного узла, потребуется пересчёт всех коэффициентов многочлена. Происходит это из-за того, что все слагаемые однотипны и вносят одинаковый вклад в формирование результата. Возникает желание придать формуле более простой вид, который бы в тоже время решал упомянутые проблемы. Великие умы исследовали этот вопрос и пришли к выводу, что эквивалентный Лагранжу полином можно записать в виде формулы Тейлора, а назвать всё это полиномом Ньютона.

6, 7, 8, 9. Полином Ньютона

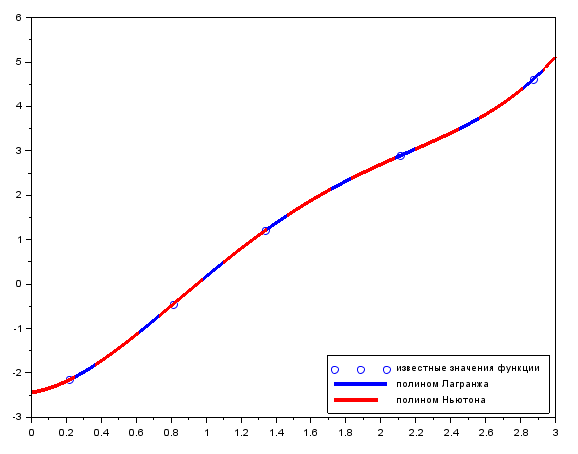
Представим нашу интерполяционную функцию в виде формулы Тейлора:

Из условий интерполяции отыщем коэффициенты

С определенного момента становится заметно, что каждый последующие коэффициент можно выразить через предыдущие, используя понятие раздельной разности:

Тогда окончательной формулой для полинома Ньютона станет:

Из определения видно, что при наличии узлов интерполяции, мы получим многочлен степени . Мы знаем, что интерполяционный многочлен степени обладает свойством единственности. Соответственно, построенные по узлам интерполяции многочлен Лагранжа и Ньютона – это один и тот же многочлен:



|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
| (Лагранж) |  |  |  |  |
| (Ньютон) |  |  |  |  |

Как видно из формулы, при появлении нового узла интерполяции достаточно рассчитать лишь один новый коэффициент:

Плюс к этому, за счет рекуррентного задания коэффициентов через раздельные разности, посчитав последний коэффициент, мы автоматически найдем значения и для всех остальных.

Таблица разделенных разностей для нашего полинома:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

10. Погрешность интерполяционного полинома

Пусть у нас есть интерполяционный полином Ньютона степени для функции , тогда по определению:

Соответственно, погрешность полинома в точке можно оценить как:

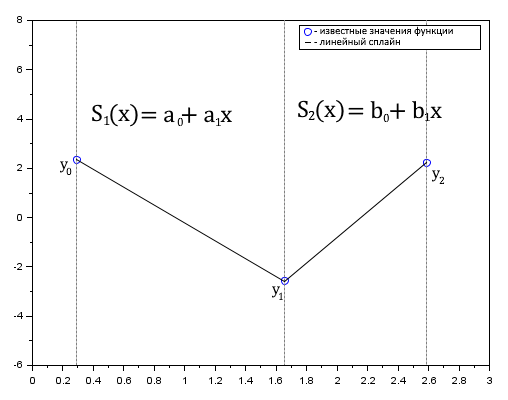
Оценим погрешность нашего полинома в точке :

|  |
| --- |
| >>> err((x(1) + x(2)) / 2, x, y)  0.0395008 |

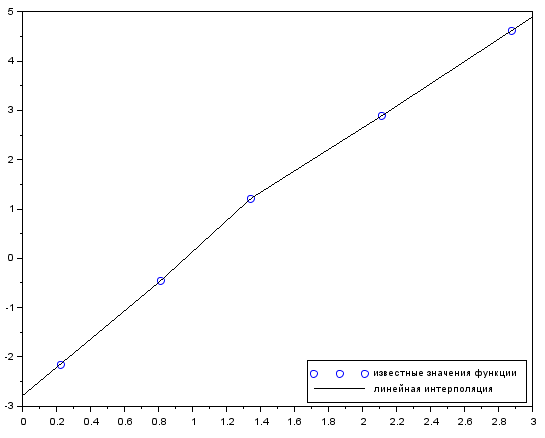
11. Линейный сплайн

Вычисление полиномов больших степеней трудоемко, плюс к этому с увеличением степени начинает возрастать погрешность. В альтернативу построения полиномов для всей области определения, можно разбить отрезок интерполирования на маленькие участки, внутри которых интерполировать функцию полиномами низких степеней. Каждому участку – свой полином.

Полином самой маленькой степени – 1, будет задавать линейную интерполяцию. Допустим у нас есть 3 узла интерполяции, соответственно можем рассмотреть два отрезка, внутри которых зададим интерполяционные полиномы первой степени Коэффициенты этих многочленов вычисляются из стандартных условий интерполяции:



Линейная сплайн интерполяция реализована в SciLab функцией interpln, проинтерполируем с её помощью нашу функцию :



Из очевидных недостатков линейного сплайна – грубость приближение и отсутствие производной в узловых точках. Но эти проблемы решаются путем увеличения степени интерполяционных многочленов, что позволяет вводить дополнительные условия и дает больше рычагов для построения лучшего приближения.

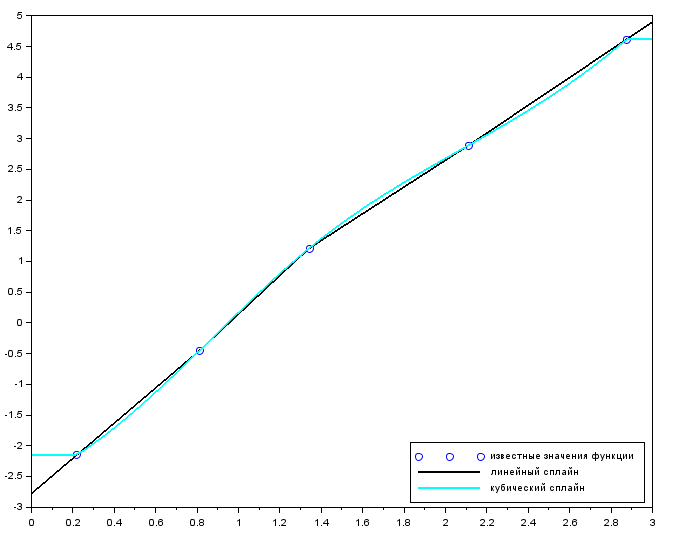
12. Кубический сплайн

Повышение степени многочлена в сплайне до третей, дает возможность наложить ещё 4 дополнительные ограничения на сплайн функции, помимо интерполяционных. Так стандартными дополнительными условиями может стать дважды дифференцируемость функции в узлах интерполяции:

Другие два условия могут варьироваться в зависимости от желаемого поведения сплайна, обычно это одни из следующих:

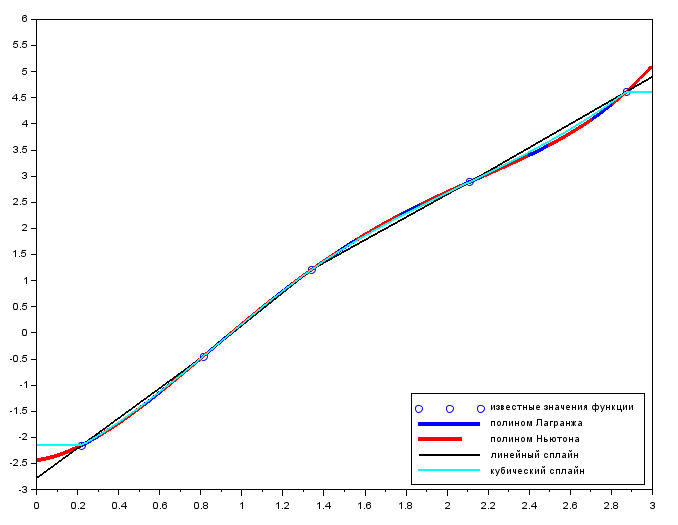
SciLab позволяет строить кубические сплайны через функцию splin, которая также поддерживает разные комбинации упомянутых доп. ограничений. О видах условий и об их влиянии на поведении сплайнов можно почитать в [документации](https://help.scilab.org/docs/6.1.0/en_US/splin.html).

Построим кубический сплайн для нашей функции. В качестве доп. ограничений по умолчанию будет выбраны: трижды дифференцируемость и “натурализация” сплайна.



13. Сравнение методов

Изобразим графики всех построенных интерполяционных функций на одном рисунке:



14. Приложения

1. <https://github.com/proxodilka/numerical-analysis-labs/blob/master/lab4_interpolation/lab4.sce>