Тема 1.1. Подсчёт комбинаторных объектов: перестановки, сочетания и размещения

На этой лекции речь пойдет о подсчёте комбинаторных объектов. Чтобы было понятно, что это такое, сразу начнём с задачи.

> **Трёхзначные числа**
> Сколько существует трёхзначных чисел, в записи которых цифры 1, 2 и 3 встречаются ровно по одному разу?
>
> www.problems.ru, №30328

В этой задаче можно просто перебрать варианты и получить ответ 6 (см. рис. 1).

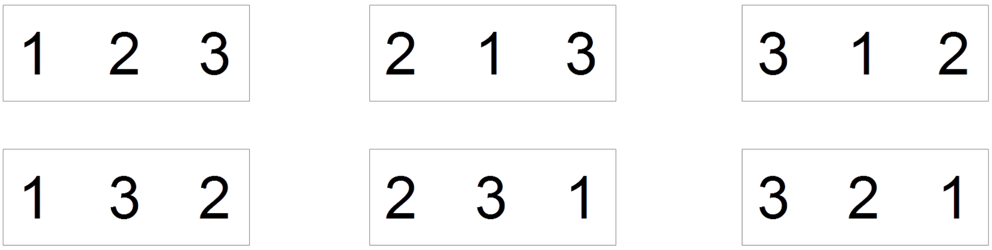

Рис. 1

Тем не менее, если мы хотим строго обосновать ответ, то нужно доказать, что мы перебрали все возможные варианты и других нет. Для этого посмотрим, как эти трёхзначные числа строятся. На первом месте в числе может стоять одна из трёх цифр: 1, 2 или 3. При фиксированной первой цифре, на втором месте может стоять одна из двух оставшихся цифр. Таким образом, числа распадаются на три группы по первой цифре, каждая группа содержит два варианта по второй цифре (см. рис. 2). Поэтому общее количество способов поставить первые две цифры получается как произведение: $3 \cdot 2 = 6$.

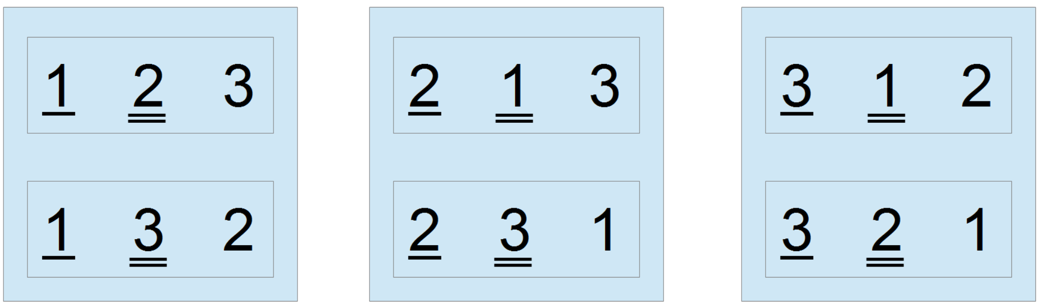

Рис. 2

Заметим, что при фиксированных двух первых цифрах последняя цифра определяется единственным способом. Поэтому ответ на задачу будет $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Это частный случай задачи о подсчёте числа перестановок.

Перестановка из n элементов — это упорядоченный набор чисел от 1 до n.

Приведём несколько примеров перестановок для $n = 5$:

$$(1, 3, 5, 4, 2)$$
$$(2, 3, 1, 5, 4)$$
$$(3, 1, 2, 4, 5)$$

Посчитаем, сколько всего существует различных перестановок из n элементов при заданном n. Будем рассуждать так же, как в задаче про трёхзначные числа. На первом месте в перестановке может стоять один из n элементов, на втором месте — один из оставшихся, т.е. $(n - 1)$ вариант, на третьем — $(n - 2)$ варианта при фиксированных первых двух элементах и т.д. В результате получаем, что количество перестановок из n элементов (обозначим его P_n) вычисляется по формуле

$$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot 2 \cdot 1 = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n.$$

Произведение чисел от 1 до n часто встречается в комбинаторике и обозначается $n!$ (читается «n факториал»). Таким образом, число различных перестановок из n элементов равно $n!$ Например, для $n = 3$ получаем

$$P_3 = 3! = 6.$$

Для $n = 1$ произведение $1!$ состоит из одного сомножителя 1 и равно 1, то есть существует только одна перестановка из одного элемента. Также обычно считают, что $0! = 1$, то есть пустая перестановка из нуля элементов тоже одна. При решении задач всегда имеет смысл обращать внимание на крайние случаи. Мы видим, что здесь в крайних случаях общая формула работает.

Теперь задача поинтереснее.

Людоед 1

У людоеда в подвале томятся 25 пленников. Сколькими способами он может выбрать трёх из них, чтобы съесть по одному на завтрак, на обед и на ужин?

www.problems.ru, №104046

Давайте рассуждать. Выбрать человека на завтрак у нас 25 способов. После этого на обед можно выбрать одного из 24 оставшихся людей, и на ужин — одного из 23 оставшихся. Получаем ответ: $25 \cdot 24 \cdot 23 = 13800$ способов.

Немного изменим вопрос задачи.

Людоед 2
У людоеда в подвале томятся 25 пленников. Сколькими способами людоед может выбрать трёх человек, чтобы отпустить их на свободу?

www.problems.ru, №104046

Теперь порядок людей не важен, поэтому выбирать их по одному, как в прошлой задаче, будет неправильно. Посмотрим на задачу с другой стороны. Предположим, мы выбрали трёх человек, чтобы отпустить их на свободу (пусть это будут люди с номерами, например, $(7, 13, 22)$), а наш людоед передумал и решил их съесть по очереди. Подумаем, сколько существует возможных порядков съесть трёх выбранных людей. Ясно, что это наша первая задача о подсчёте числа перестановок из трёх элементов, оно равно 6. Каждому способу отпустить людей на свободу соответствует 6 способов их съесть (см. рис. 3).

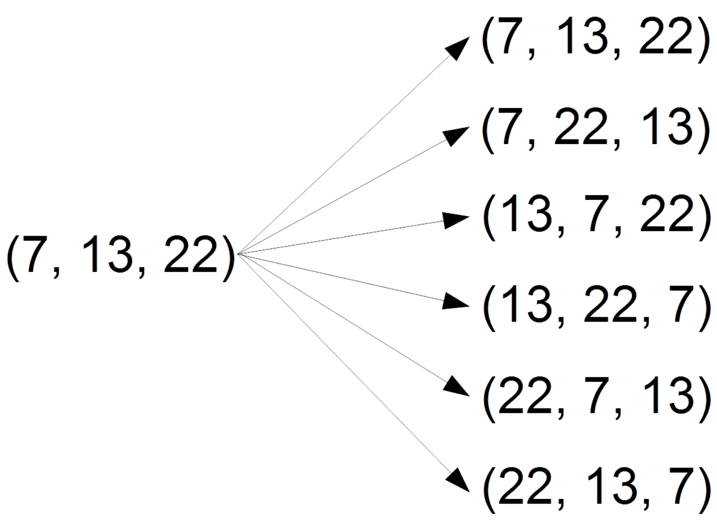

Рис. 3

Пусть x — ответ на задачу «Людоед 1», а y — ответ на задачу «Людоед 2». Тогда $x = 6y$. Мы уже знаем x, поэтому выразим y: $y = \frac{x}{6}$. Получаем ответ $\frac{13800}{6} = 2300$.

Рассмотрим теперь задачу в общем виде.

Людоед 3
У людоеда в подвале n пленников.

1. Сколькими способами он может выбрать k из них, чтобы съесть их по очереди. Порядок важен.

2. Сколькими способами он может выбрать k человек, чтобы

отпустить их на свободу?

Эта задача уже больше похожа на олимпиадную задачу по информатике. Нужен алгоритм, чтобы посчитать ответ для произвольных n и k.

Ответим сначала на первый вопрос. Первого человека можно выбрать n способами, второго — $(n-1)$ способом, и т.д. Получаем произведение

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

Всего в нем должно быть k множителей, поэтому нетрудно понять, что последний будет $(n-k+1)$. Приверим: при $k=3$ будет $n(n-1)(n-2)$. Полученное число называется числом размещений и обозначается A_n^k (читается «A из n по k»):

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

Размещение из n по k — это упорядоченный набор из k различных элементов n-элементного множества.

Как правило, рассматривается множество натуральных чисел от 1 до n. *Упорядоченный* набор означает, что порядок элементов в нем важен. Например, $\langle 1,3,4\rangle$ и $\langle 3,4,1\rangle$ — это разные размещения из 4 по 3, хотя они состоят из одних и тех же элементов. Вопрос задачи «сколькими способами людоед может выбрать k из n человек, чтобы съесть их по порядку» с формальной точки зрения означает «найдите число размещений из n по k».

Формулу для подсчёта размещений можно также записать следующем образом

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Действительно, произведение чисел от 1 до $(n-k)$ в числителе и знаменателе сокращается:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{\cancel{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-k)} \cdot (n-k+1) \cdot \ldots \cdot n}{\cancel{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-k)}} = $$
$$= n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

Заметим, что в этой задаче $k \leqslant n$. Если $k=n$, то получаем

$$A_n^n = \frac{n!}{0!} = n!$$

Это означает, что если людоед планирует есть всех n людей, то количество способов это сделать равно числу перестановок из n элементов.

Чтобы получить ответ на второй вопрос задачи, нужно действовать так же, как в рассмотренном частном случае (задаче «Людоед 2»). А именно, нужно полученный результат A_n^k поделить на количество перестановок из k элементов:

$$\frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k.$$

Это число сочетаний, которое обозначается C_n^k (читается «C из n по k»).

Сочетание из n по k — это k-элементное подмножество n-элементного множества.

Подмножество — неупорядоченный набор. Это означает, что порядок элементов не важен и сочетания, различающиеся только порядком элементов, считаются одинаковыми. Например, сочетания $\{1, 3, 4\}$ и $\{3, 4, 1\}$ совпадают. Поэтому элементы в сочетании обычно записывают в порядке возрастания. В задаче нужно найти количество k-элементных подмножеств множества из n человек, т.е. число сочетаний из n по k.

Тема 1.2. Задачи

Упражнение 1.1
Имеется забор из n досок. Сколькими способами можно его покрасить красками k цветов? Каждую доску нужно красить целиком в один цвет. Каждый цвет разрешается использовать только один раз. Не обязательно использовать все цвета.

Например, при $n = 2$, $k = 3$ все возможные варианты покраски забора представлены на рис. 4.

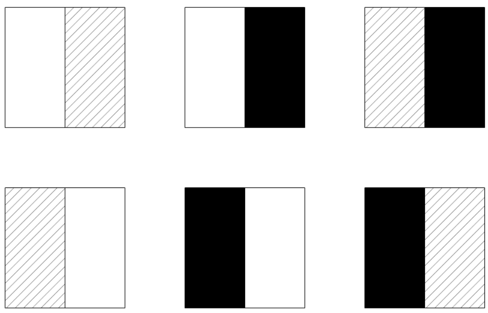

Рис. 4

По рисунку видно, что мы выбираем набор из множества цветов, а не из множества досок. Причем это упорядоченный набор, поэтому речь идет о размещениях.

Ответ на задачу будет A_k^n. Заметим, что задача имеет решение только при $k \geqslant n$. Иначе нам не хватит цветов, чтобы покрасить забор. Теперь немного изменим задачу.

Упражнение 1.2
Имеется забор из n досок. Сколькими способами можно его покрасить красками k цветов? Каждую доску нужно красить целиком в один цвет. Каждый цвет разрешается использовать любое число раз. Не обязательно использовать все цвета. Дайте ответ на задачу при $n = 4$, $k = 3$.

В этой задаче мы имеем размещения с повторениями — каждый цвет может повторяться любое число раз. Первую доску можно покрасить в k возможных цветов, вторую — тоже в k цветов, и т.д. Значит, всего будет k^n способов покрасить забор из n досок.

Упражнение 1.3
Сколькими способами можно выложить в ряд 5 красных, 5 синих и 5 зелёных шаров так, чтобы никакие два синих шара не лежали рядом?

Сначала найдём число способов выложить в ряд 5 красных и 5 зелёных шаров.

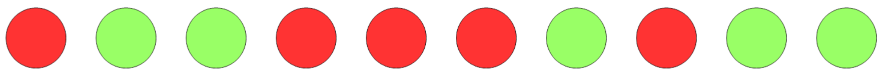

Рис. 5

Нужно выбрать среди 10 позиций 5 позиций для красных шаров, после этого позиции зелёных шаров определятся однозначно. Получится C_{10}^5 способов. Затем нужно добавить синие шары.

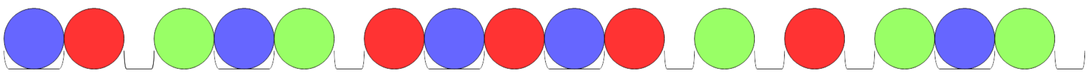

Рис. 6

Их можно размещать в позициях между красными и зелёными шарами, как показано на рис. 6, не более одного синего шара в каждую позицию. Свободных позиций 11, а синих шаров — 5, получаем C_{11}^5 способов. Итоговым ответом будет произведение $C_{10}^5 C_{11}^5$.

Упражнение 1.4
Имеется 10 юношей и 10 девушек. Сколько существует способов объединить их в пары (юноша с девушкой)?

Упражнение 1.5
Сколько существует способов разбить на пары компанию из 20 человек?

Начнём с задачи про юношей и девушек. Пронумеруем и тех, и других числами от 1 до 10. Представим, что юноши стоят в ряд по порядку. и нужно расставить перед ними девушек. Каждый способ будет соответствовать перестановке из 10 элементов. Таким образом, ответ на первую задачу — 10!

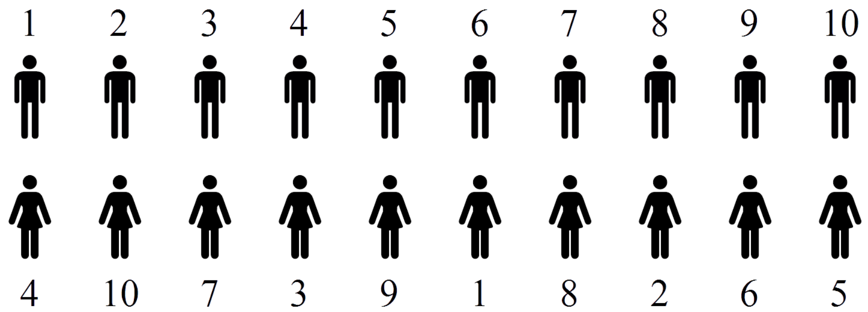

Рис. 7

Перейдём ко второй задаче. Можно попробовать свести её к первой, но есть и более простое решение. Посмотрим на человека с номером 1. Ему в пару можно определить одного из остальных 19.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

Рис. 8

После вычеркивания этих двух людей, посмотрим на человека с наименьшим номером. Ему в пару можно дать одного из 17.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

Рис. 9

Вычеркнем и их и продолжим процесс. У нас получится произведение нечётных чисел: $19 \cdot 17 \cdot 15 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 1$. Такое произведение обозначается 19!!

Упражнение 1.6
Имеется 10 юношей и 10 девушек. Сколько существует способов составить из них компанию, в которую входило бы одинаковое количество юношей и девушек? Пустое множество не считается.

www.problems.ru, №35399

В этой задаче можно перебрать число юношей в компании. Обозначим его через k. Число способов выбрать k юношей из 10 равно C_{10}^k, так же для девушек. Число способов составить компанию из k юношей и k девушек — $(C_{10}^k)^2$. Получаем ответ:

$$(C_{10}^1)^2 + (C_{10}^2)^2 + (C_{10}^3)^2 + \ldots + (C_{10}^{10})^2.$$

Вычисления по этой формуле, особенно вручную, довольно трудоёмки.

У этой задачи существует принципиально другое решение. Составим какую-нибудь компанию из одинакового числа юношей и девушек. Рассмотрим подмножество юношей, которые входят в эту компанию, и девушек, которые не входят в эту компанию. Их всего будет 10. Действительно, будет k юношей и $10 - k$ девушек. Мы установили соответствие между компаниями из одинакового числа юношей и девушек и подмножествами произвольно выбранных 10 человек из 20.

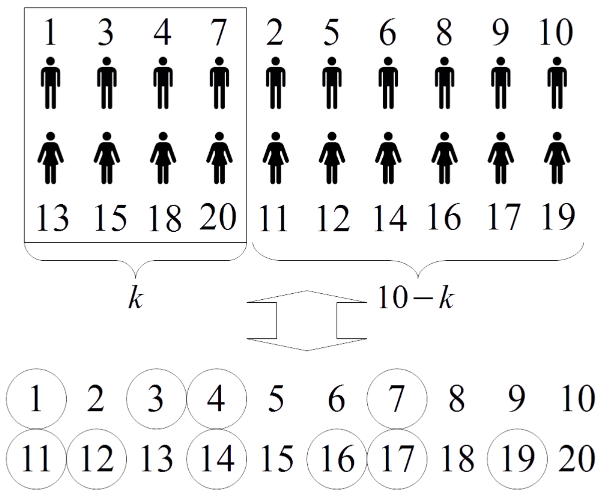

Рис. 10

Нетрудно видеть, что это соответствие — взаимно-однозначное. Каждой компании соответствует одно подмножество, и каждому подмножеству соответствует одна компания. Значит, для подсчета интересующих нас компаний можно просто найти число способов выбрать 10 человек из 20. Оно равно C_{20}^{10}. Нужно вычесть 1, чтобы не считать пустую компанию. Она будет соответствовать подмножеству из одних девушек. Таким образом, ответ: $C_{20}^{10} - 1$.

Метод построения взаимно-однозначного соответствия между комбинаторными объектами бывает очень полезен. Он позволяет свести задачу подсчёта одних комбинаторных объектов к другим, более простым.

Это были задачи на сочетания и размещения. Обсудим теперь, как посчитать сочетания с повторениями.

Сочетание с повторениями — это неупорядоченный набор из k элементов n-элементного множества, причем каждый элемент в наборе может встречаться произвольное число раз.

Примеры сочетаний с повторениями:

$$\{1,1,3,4,4,4\}$$
$$\{1,2,2,5\}$$
$$\{3,3,3,3,4\}$$
$$\{1,2,3,3,4,5,5\}$$

Порядок чисел в сочетании неважен, поэтому обычно используется порядок по возрастанию.

Упражнение 1.7
Найдите число сочетаний с повторениями из 3 по 2.

Выведем общую формулу для числа сочетаний с повторениями из n по k. Мы построим взаимно-однозначное соответствие между ними и обычными сочетаниями.

Рассмотрим последовательность белых и чёрных шаров длины $n+k-1$ в которой ровно $n-1$ шар чёрного цвета (см. рис. 11). Очевидно, число таких последовательностей C_{n+k-1}^{n-1}.

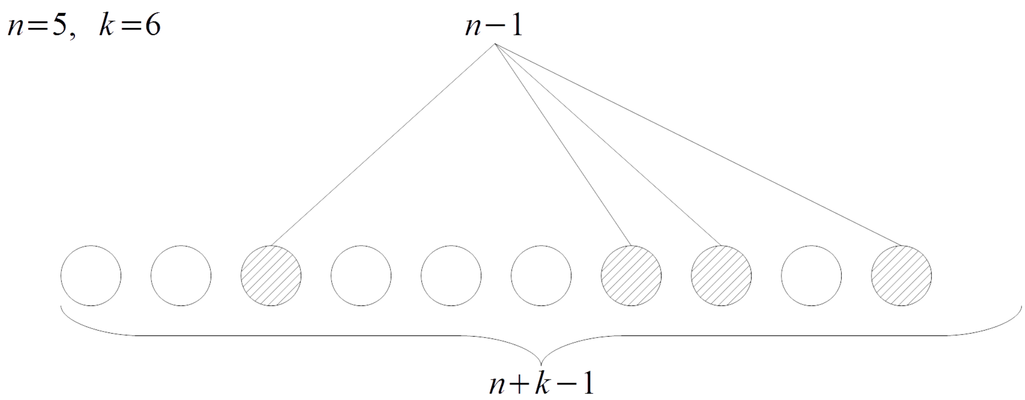

Рис. 11

Заметим, что чёрные шары разбивают белые на n отрезков. Возможно, некоторые из этих отрезков пустые: если два чёрных шара стоят подряд или если чёрный шар стоит в начале или в конце (см. рис. 12). Напишем на шарах первого отрезка число 1, на шарах второго отрезка — число 2, и т.д.

Всего белых шаров k, поэтому мы получим сочетание с повторениями из n по k: $\{1,1,2,2,2,4\}$ для примера на рис. 12. Нетрудно показать, что это соответствие взаимно-однозначное, т.е. по последовательности шаров можно однозначно построить сочетание с повторениями (что мы уже проделали) и, наоборот, по сочетанию с повторениями можно однозначно построить последовательность шаров. Количества этих комбинаторных объектов равны между собой, и мы получили, что число сочетаний с повторениями из n по k равно C_{n+k-1}^{n-1}.

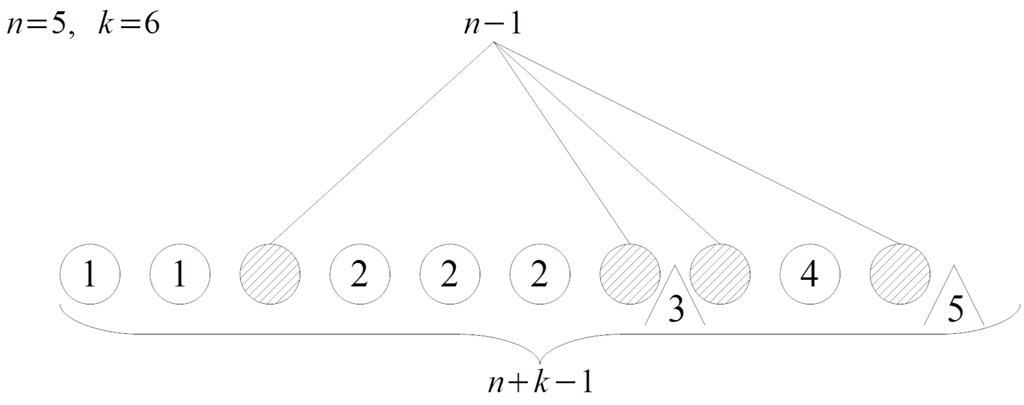

Рис. 12

Тема 1.3. Бином Ньютона

На этой лекции мы более подробно поговорим про количества сочетаний C_n^k. Эти числа еще называются **биномиальными коэффициентами**, потому что они возникают в формуле **бинома Ньютона**:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n a^0 b^n. \quad (1)$$

Формула (1) обобщает хорошо известные школьные формулы для квадрата суммы и куба суммы:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3.$$

И для квадрата, и для куба в правой части получаются суммы, состоящие из произведений чисел a и b в некоторых степенях, причём суммарная степень a и b в каждом слагаемом равна 2 для квадрата и 3 для куба. Аналогичная формула должна быть справедлива и для n-й степени. При возведении в n-ю степень должны получаться произведения степеней a и b и перед ними будут стоять некоторые коэффициенты. В формулах квадрата и куба это числа 1, 2, 1 и 1, 3, 3, 1, соответственно. Оказывается, что для n-й степени это будут в точности количества сочетаний C_n^k. Почему так получается?

Возведение в n-ю степень означает перемножение n одинаковых скобок:

$$\underbrace{(a+b) \cdot (a+b) \cdot (a+b) \cdot \ldots \cdot (a+b)}_{n}$$

Если мы раскроем скобки по обычным правилам, то у нас получится сумма. Каждое слагаемое будет произведением n чисел a и b. Например, мы возьмём a из первой скобки, b из второй скобки, снова b из третьей скобки и т.д. Это будет одно слагаемое. Другие слагаемые строятся по тому же принципу. И так нужно перебрать все варианты. Зададим себе вопрос: сколько слагаемых будет включать k множителей b и $n-k$ множителей a? Это будет количество способов выбрать из n скобок k таких, из которых мы возьмём b. Это количество

— число сочетаний из n по k. Поэтому мы и получаем, что в формуле бинома Ньютона перед $a^{n-k}b^k$ стоит коэффициент C_n^k:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + \boxed{C_n^k a^{n-k} b^k} + \ldots + C_n^n a^0 b^n.$$

Упражнение 1.8
Выведите формулу для $(a+b)^4$. Чему равен коэффициент при ab^3?

Изучим некоторые свойства биномиальных коэффициентов. Первое свойство — это симметричность:

$$C_n^k = C_n^{n-k}. \tag{2}$$

Это свойство легко доказать, если представить биномиальные коэффициенты через факториалы:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Любопытно, что формула (2) имеет и чисто комбинаторную интерпретацию.

Рассмотрим задачу. Сколько существует последовательностей длины n, состоящих из нулей и единиц, содержащих ровно k единиц? Ответ на эту задачу C_n^k — число способов выбрать k позиций среди n, чтобы поставить туда единицы. С другой стороны, число последовательностей, содержащих ровно k единиц, равно числу последовательностей, содержащих ровно $n-k$ нулей. И это число равно C_n^{n-k}.

$$\underbrace{0\,1\,1\,0\,0\,0\,1\,1}_{n} \qquad k \text{ единиц, } n-k \text{ нулей}$$

Рассмотрим другое интересное свойство биномиальных коэффицентов:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

Это свойство тоже можно доказать разными способами. Первый способ — подстановка $a=1$, $b=1$ в бином Ньютона (1):

$$(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n.$$

Второй способ — комбинаторный. Посчитаем число всех возможных последовательностей из 0 и 1 длины n. Это число размещений с повторениями. Как будто мы красим забор из n досок в два цвета. Получается, что всего последовательностей будет 2^n. C_n^k — это количество последовательностей, содержащих k единиц. Если мы просуммируем эти количества по всем k от 0 до n, то как раз получим общее число последовательностей 2^n.

Упражнение 1.9

Вычислите сумму

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1} + (-1)^n C_n^n$$

при $n = 10$.

www.problems.ru, №30712

Докажем ещё одно свойство:

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}. \tag{3}$$

Формулу (3) удобно использовать для вычисления биномиальных коэффициентов. Её можно доказать, представляя биномиальные коэффициенты через факториалы. Попробуйте проделать это самостоятельно. Мы сразу разберём комбинаторное доказательство.

Снова начнём с того, что C_n^k — это число последовательностей нулей и единиц длины n, содержащих k единиц. Последний элемент последовательности может быть равен либо 0, либо 1. Число последовательностей, оканчивающихся на 0, равно C_{n-1}^k, потому что фактически все k единиц стоят в первых $n-1$ позиции.

$$\underbrace{\overbrace{0\quad 1\quad 1\quad 0\quad 0\quad 0\quad 1}^{n-1}\quad \boxed{0}}_{n}$$

Рис. 13

Каждая последовательность, заканчивающаяся на 1, соответствует последовательности длины $n-1$ с $k-1$ единицей. Число таких последовательностей — C_{n-1}^{k-1}.

$$\underbrace{\overbrace{0\quad 0\quad 1\quad 0\quad 0\quad 0\quad 1}^{n-1}\quad \boxed{1}}_{n}$$

Рис. 14

Складывая полученные биномиальные коэффициенты, приходим к формуле (3).

Благодаря этому свойству, биномиальные коэффициенты удобно записывать в следующую таблицу, называемую **треугольником Паскаля** (см. рис. 15).

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & C_0^0 & & & & \\
 & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & \\
 & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & \\
 & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & \\
C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 \\
 & & & & \ldots & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & \ldots & & & &
\end{array}
$$

Рис. 15

Каждый биномиальный коэффициент получается как сумма двух, расположенных над ним. Крайние элементы в строках равны единице.

Треугольник Паскаля удобно использовать для вычисления биномиальных коэффициентов в программе. Формула через факториалы

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

обычно не так удобна. Во-первых, факториалы очень быстро растут. Например,

$$\begin{gathered} 10! = 3628800, \\ 100! \approx 9,3326 \cdot 10^{157}. \end{gathered}$$

Биномиальные коэффициенты, конечно, тоже растут достаточно быстро, но треугольник Паскаля позволяет вычислять их, оперируя меньшими числами. Во-вторых, с помощью треугольника Паскаля можно посчитать сразу всю таблицу C_n^k для n и k, например, до 100.