Taller 2: Interpolación - Análisis Númerico

Edwin Turizo
Juan Pimienta

Abril 26 2020

1. Interpolación

1.1. Problema 1

Dados los n + 1 puntos distintos (xi, yi) el polinomio interpolante que incluye a todos los puntos es unico

Solución

Este problema se plantea resolver mediante la tecnica de la reducción al absurdo, encontrando a la final una contradicción que se oponga a la proposición original que indica el enunciado.
Supongamos que se tienen n+1 puntos para interpolar un polinomio P(x) que es máximo de grado n que se interpola con los mismos n+1 puntos Q(x)
Luego consideramos un polinomio R(X)=P(X)-Q(X).
Se conocen 3 caracteristicas de R:
. - R(x) es un polinomio también.
. -El máximo grado de R(x) es n debido a que es una resta de polinomios cuyo grado máximo es n
. -Si Q(x) y P(x) pasan or los n+1 puntos, luego . .R(Xi)=P(Xi)-Q(Xi)=Yi-Yi=0. Luego R(x) tiene n+1 raíces.
Luego si R(x) es un polinomio de máximo grado n esto no es posible por lo cual se llega a una contradicción. Lo que quiere decir que P(x) y Q(x) son iguales. Por otro lado si R(x) fuera un polinomio distinto de 0 debería poderse escribir de la siguiente forma:
R(x)=0=P(x)-Q(x) P(X)=Q(X)
Luego Q(x) es un polinomio idéntico a P(x), lo que significa que para un conjunto de n+1 puntos el polinomio interpolante es único.

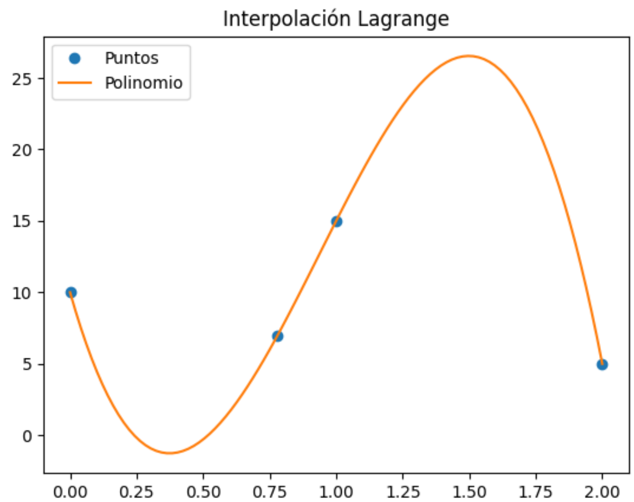
1.2. Problema 2

Construya un polinomio de grado tres que pase por: (0, 10),(1, 15),(2, 5) y que la tangente sea igual a 1 en x0

Solución

```
Polinomio de Lagrange:
-39.1063854178608*x**3 + 109.819156253582*x**2 - 65.7127708357217*x + 10.0
```

Para generar un polinomio de grado 3, es necesario dar 4 puntos. Tres que ya fueron dados, y uno donde x0 sea tangente de 1, el cual tomamos como 0.78
Para ilustrar el polinomio, se muestra la grafica de la interpolación resultante:



1.3. Problema 4

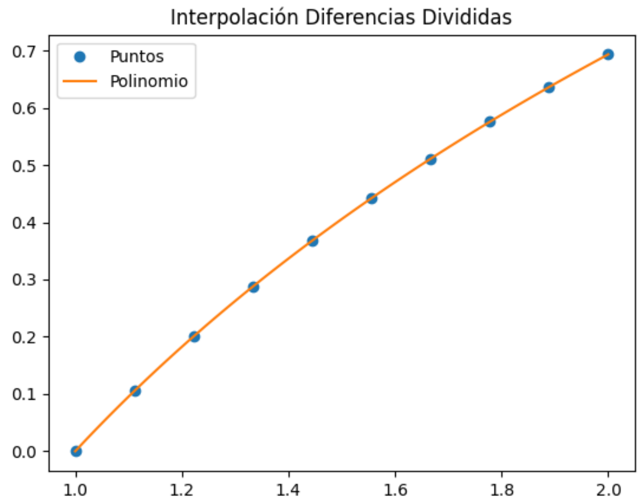
Con la funcion f(x) = lnx construya la interpolacion de diferencias divididas en x0 = 1; x1 = 2 y estime el error en [1, 2]

Solución

Para la solución de este ejercicio, se creo un algoritmo que utilizara la interpolación de diferencias divididas por medio de generación de valores en los intervalos [1,2] que representaran a la función definida como f(x) = lnx

El polinomio generado a partir de este algoritmo es: P(x)=0.00350380934723923 x^9 - 0.0531889659154017 x^8 + 0.362715329810617 x^7 - 1.46539552173515 x^6 + 3.89432645107793 x^5 - 7.1491400033483 x^4 + 9.28295457078808 x^3 - 8.67014850024642 x^2 + 6.26370146794535 x - 2.46932863772394

Como resultado de esta interpolación se genero tambien la siguiente grafica que interpola los puntos seleccionados:



En cuanto a los errores en los valores [1,2] se tienen:

- Valor x=1
  Error Absoluto 4.884981308350689e-15
  Error Relativo 4.884981308350689e-05

- Valor x=2
  Error Absoluto 2.37476704967321e-13
  Error Relativo 3.4260646458300544e-13

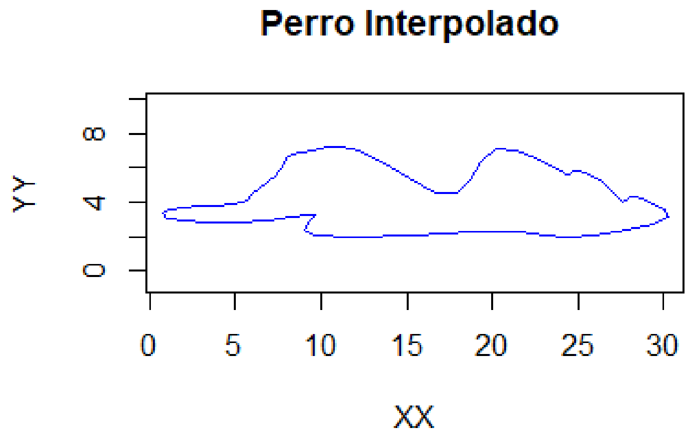
1.4. Problema 5

Utilice la interpolacion de splines cubicos para el problema del perrito

Solución

Para la interpolación del perrito, se creo un codigo en R, que permitiera utilizar splines por medio de las librerias "PolinomFƨ "polinom"

A continuación se muestra la imagen del perrito interpolado con los puntos obtenidos.



1.5. Problema 7

Sea f(x) = ex en el intervalo de [0, 1] utilice el metodo de lagrange y determine el tamaño del paso que me produzca un error por debajo de 10^5 . Es posible utilizar el polinomio de Taylor para interpolar en este caso? Verifique su respuesta
Solución

```
[1] "Lagrange para 1 (valor más alto del vector escojido)"
> print(lagrange(x,y,1))
[1] 2.718282
```

Este ejercicio, tambien se puede realizar por medio del calculo de los polinomios de Taylor, debido a que una de las condiciones que se deben cumplir para obtener el polinomio de Taylor, es que la derivadas en los distintos ordenes, sean iguales a la misma función en algun valor x_0, lo que en este caso si se cumple debido a que la función e^x da como derivadas la misma función.

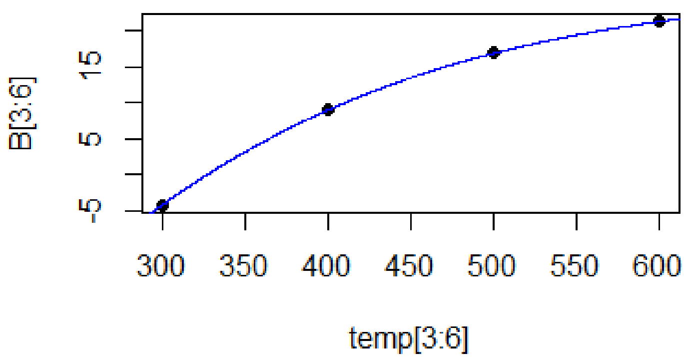
1.6. Problema 8

Considere el comportamiento de gases no ideales se describe a menudo con la ecuacion virial de estado. los siguientes datos para el nitrogeno N
Solución
Para el desarrollo de este ejercicio, se utilizaron 2 codigos, uno implementado en R y otro en python. Esto con el fin de mostrar las comparaciones que se pedian entre los resultados de una interpolación ya definida y otra con una interpolación de lagrange.

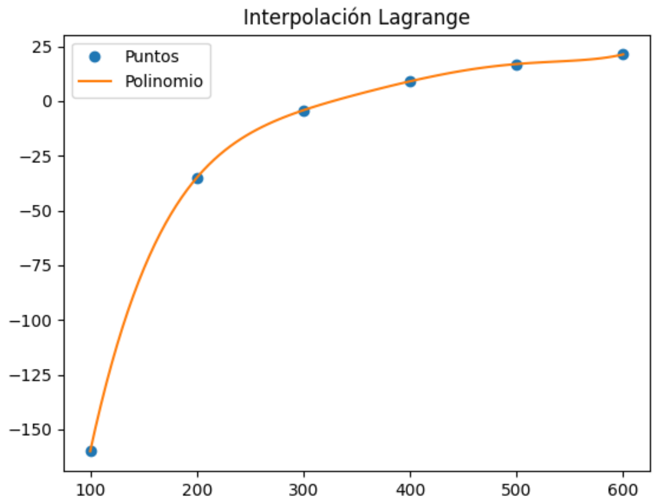
- Determine un polinomio interpolante para este caso
  Solución
  El polinomio obtenido fue uno de grado 3, el cual se muestra a continuación:
  $P(x)= 0.0000003\ x^3 -0.000625\ x^2 + 0.4585\ x -93.6$.
  Para esto se utilizo el codigo implementado en R, que a traves de librerias como "PolinomF", realiza el calculo del polinomio.

- Utilizando el resultado anterior calcule el segundo a 450K.
  Solución
  El segundo coeficiente viral calculado mediante la evaluación de en el valor de 450K por medio del polinomio interpolado, nos da un valor de 13.5 cm^3/mol

- Grafique los puntos y el polinomio que ajusta.
  Solución



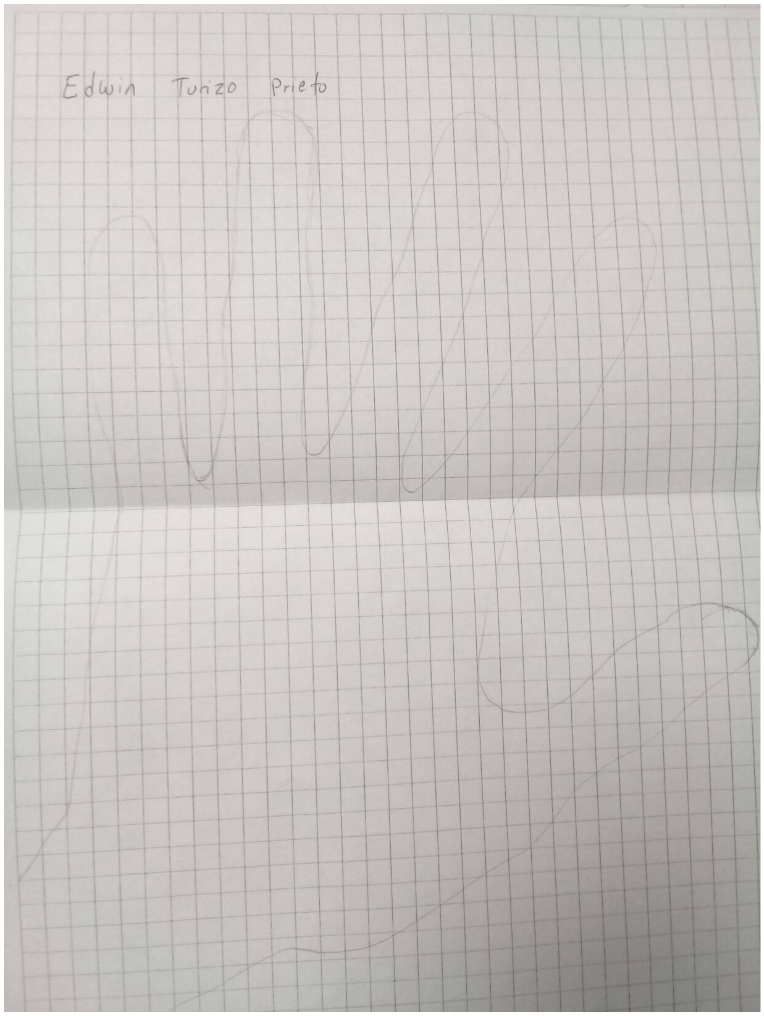
- Utilice la interpolacion de Lagrange y escriba el polinomio interpolante
  Solución
  Mediante el codigo en Python, se pudo obtener el polinomio de lagrange de ese mismo conjunto de datos, obteniendo entonces un polinomio de grado 5, el cual se muestra a continuación:
  P(x)= 4.48333333333333e-11 x^5 - 9.40416666666667e-8 x^4 + 7.76666666666667e-5 x^3 - 0.0318345833333334 x^2 + 6.63535 x - 573.9
  Y evaluando con el valor de 450K en ese mismo polinomio interoolado, nos da un coeficiente Viral de 13.884375000000013 cm^3/mol



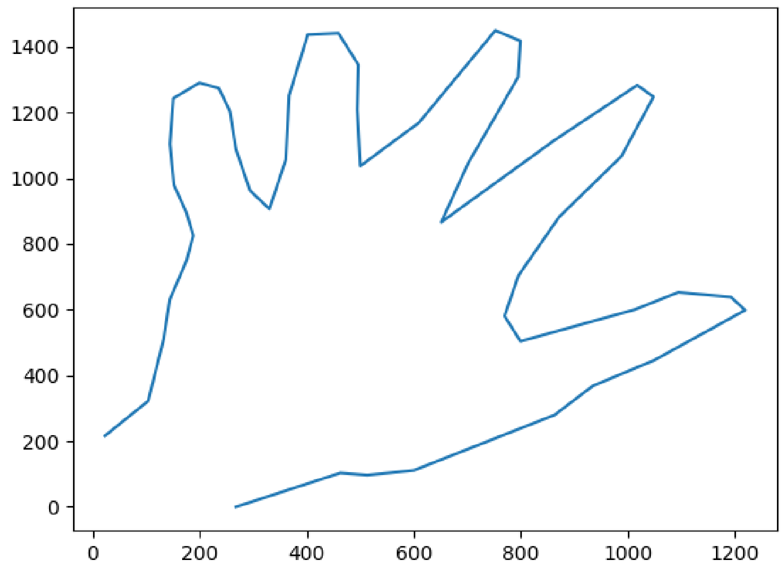
- Compare su resultado con la serie truncada (modelo teorico), cual aproximacion es mejor por que?
  Solución
  Al comparar ambos resultados presentados, se puede decir que el polinomio de lagrange tiene una mayor precisión en cuanto a que presenta un polinomio de mayor grado que la otra interpolación realizada en R. Ademas los coeficientes virales son mucho mas exactos y precisos en el polinomio de lagrange. Teniendo un menor error con respecto al otro polinomio.

2. Interpolación de la mano

Para el desarrollo de la interpolación, se presenta la foto tomada de la representación en hoja de la mano:

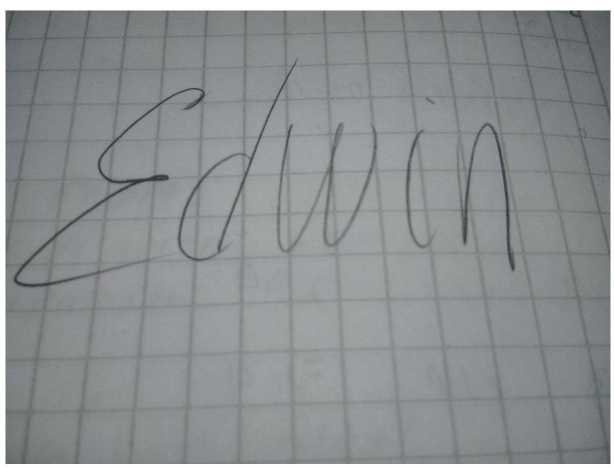


Para la obtención de las coordenadas (x,y), se hizo necesario de una aplicación en html, que mostrará la imagen en una pagina web y en base a la posición del mouse sobre la imagen, mostraba los puntos x,y de la mano.
Una vez obtenidos los puntos necesarios, que en total se consiguieron 49 puntos distintos que fueron necesarios para representar la mano mediante el proceso de interpolación.
Para el metodo de interpolación, se utilizo el lenguaje de programación Python, que provee ciertas funciones y librerias de interpolación, con lo cual se calcularon con los puntos (x,y), los nuevos puntos (x,y) que hacen referencia a los puntos ya interpolados. Finalmente se grafico dichos puntos y se obtuvo la siguiente imagen del resultado de la mano interpolado.



3. Curvas de Bézier

Primera letra del nombre Para el desarrollo de la interpolación, se presenta la foto tomada del nombre plasmado en una hoja:



Para la obtención de las coordenadas (x,y), se hizo necesario de una aplicación en html, que mostrará la imagen en una pagina web y en base a la posición del mouse sobre la imagen, mostraba los puntos x,y de la letra escogida, que en este caso fue la letra E.
Una vez obtenidos los puntos necesarios, que en total se consiguieron 10 puntos distintos que fueron necesarios para representar la mano mediante el proceso de curvas de Bezier.
Para el metodo de interpolación, se utilizo el lenguaje de programación Python, que provee herramientas de graficación y de facil integración con el manejo de arreglos y distitnas funciones que son necesarias para su correcta implementación.

En este caso se utilizo de un codigo que crea toda la estructura en forma de clase para definir las curvas de Bezier, este codigo implementa los distintos metodos de realizar curvas de Bezier ya sea con puntos en 2D o 3D, logrando generar las parametrizaciones e interpolaciones correspondientes para cada caso.
Luego se crea otro archivo Python que llama a las funciones implementadas y las utiliza creando 2 segmentos de curvas en 2D, que posteriormente se unen para formar la letra E