

Introdução à Neurociência Computacional

Lista de Exercícios 7

Paulo R. Sturion

4 de novembro de 2025

Todos os códigos escritos para produzir os resultados dos exercícios a seguir estão disponíveis de forma clara e organizada no repositório Github:

<https://github.com/prsturion/intro-computational-neuroscience.git>

Questão 1:

(a)

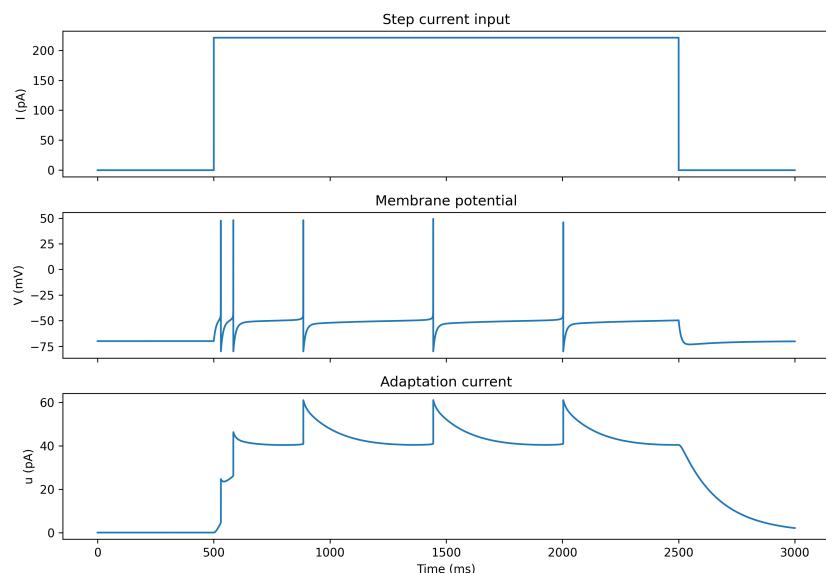


Figura 1: Simulação do modelo AdEx.

(b)

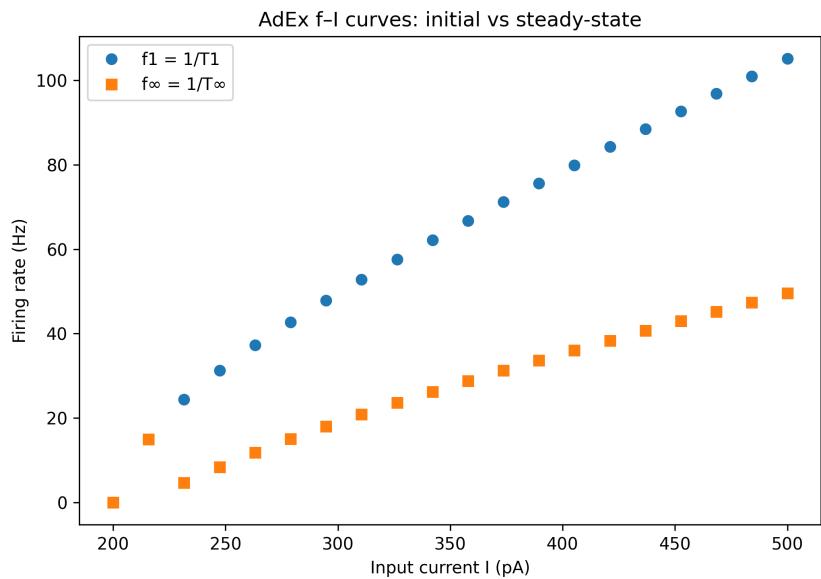


Figura 2: Curvas f-I do modelo AdEx.

Questão 2:

(a)

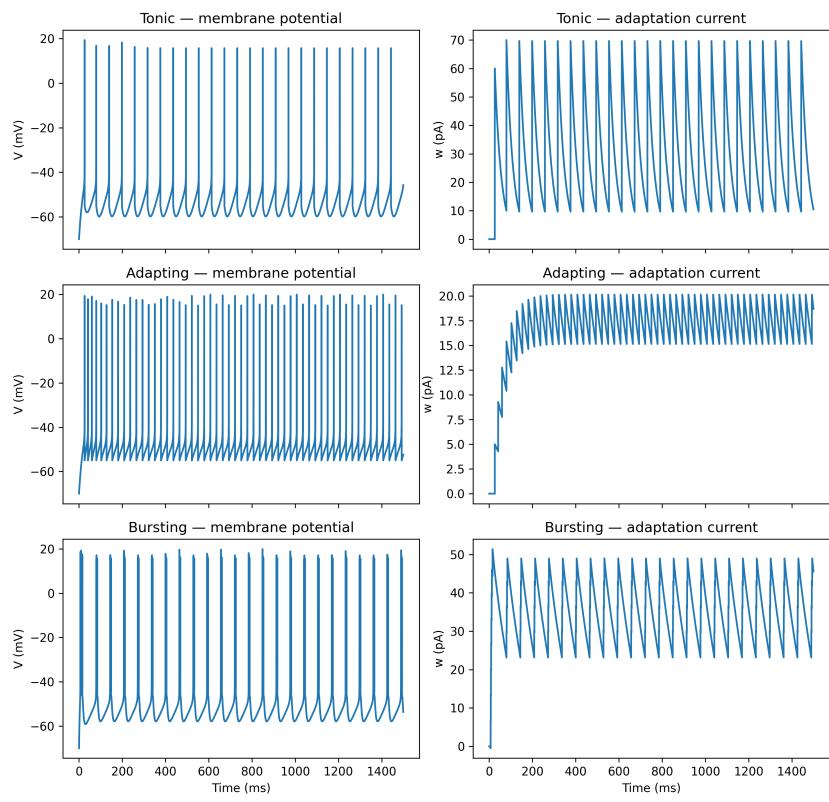


Figura 3: Padrões de disparo do modelo AdEx.

(b)
(i)

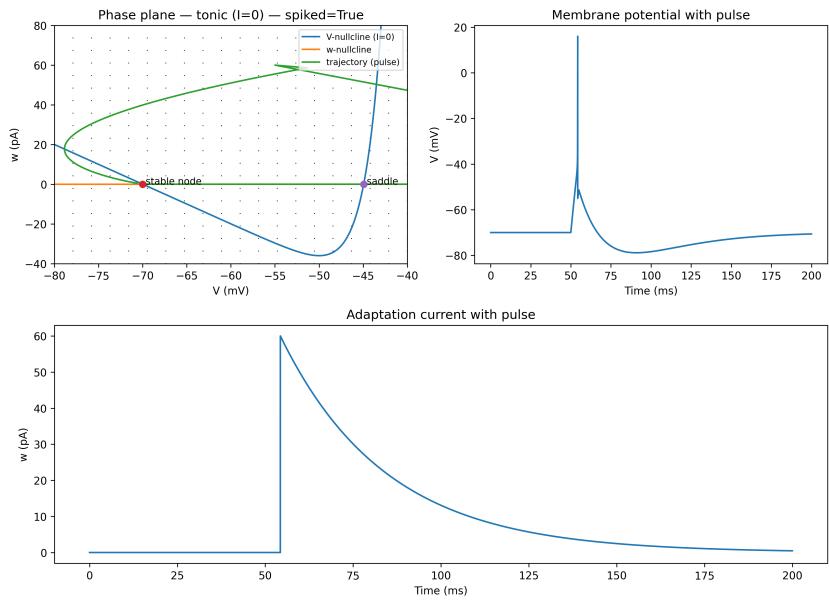


Figura 4: Plano de fase do modelo AdEx.

(ii)

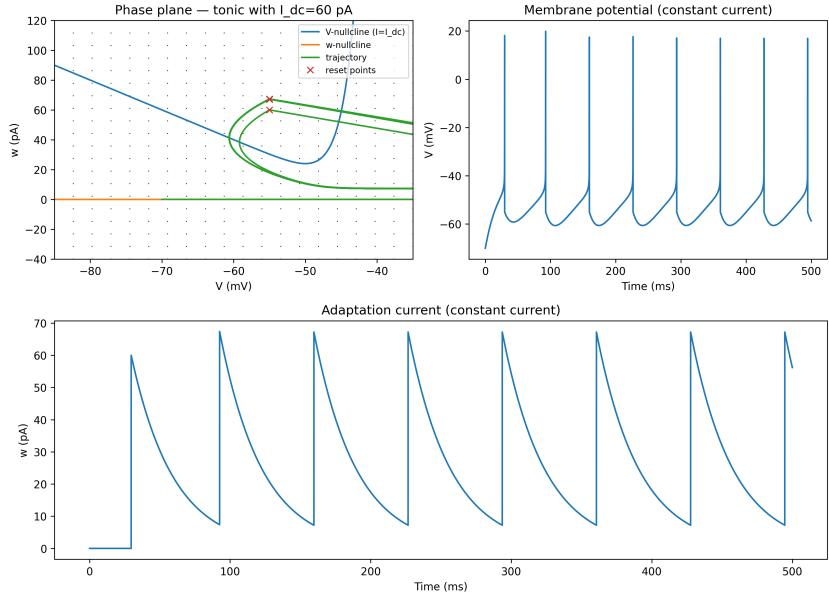


Figura 5: Plano de fase do modelo AdEx com degrau de corrente constante.

(iii)

(i) *Pulso com $I = 0$* . No plano de fase com $I = 0$ as nulclinas são

$$\dot{V} = 0 \Rightarrow w = \frac{E_L - V}{R} + \frac{\Delta_T}{R} e^{(V - V_T)/\Delta_T}, \quad \dot{w} = 0 \Rightarrow w = a(V - E_L).$$

Para o conjunto usado ($a = 0$), a nulclina de w coincide com o eixo $w = 0$. As duas nulclinas se cruzam em dois pontos: um nó estável perto de $V \approx -69$ mV e uma sela perto de $V \approx -45$ mV (ambos em $w = 0$). O pulso curto de corrente desloca o estado para a direita, ultrapassando o limiar exponencial; quando V atinge V_{pico} ocorre o reset $V \rightarrow V_{\text{reset}}$ e $w \rightarrow w + b$. Como $a = 0$, w depois decai exponencialmente a zero. A trajetória no plano de fase sai da vizinhança do nó estável, cruza a separatriz da sela, dispara, sofre o salto de redefinição e retorna ao atrator (nó estável). No tempo, observa-se um único potencial de ação seguido de relaxação de $V(t)$ de volta ao repouso e um dente em $w(t)$ (salto por b seguido de decaimento).

(ii) *Degrau constante $I = I_{\text{dc}}$* . Com corrente constante diferente de zero, a nulclina de V se *eleva* rigidamente:

$$\dot{V} = 0 \Rightarrow w = I_{\text{dc}} + \frac{E_L - V}{R} + \frac{\Delta_T}{R} e^{(V - V_T)/\Delta_T}.$$

Para o valor usado (p. ex. $I_{\text{dc}} = 60\text{--}120\text{pA}$), essa curva fica acima de $w = 0$ na faixa relevante de V e *não* há interseção com a nulclina de w . Logo, não existem pontos fixos: o sistema opera em um ciclo limite produzido pela não linearidade exponencial e pelo mecanismo de reset. No retrato de fase, a órbita gira em torno da região próxima ao “cotovelo” da nulclina de V e, cada vez que atinge V_{pico} , sofre a redefinição $(V, w) \mapsto (V_{\text{reset}}, w + b)$, o que aparece como saltos discretos (marcados) antes de reiniciar a ascensão. No tempo, isso se manifesta como disparos periódicos: $V(t)$ apresenta trens de spikes e $w(t)$ assume uma forma em serra (salta por b a cada spike e decai entre eles).

Síntese. No caso (i), com $I = 0$, o retrato de fase tem nó estável e sela; um pulso suficientemente forte cruza a separatriz, gera um spike único e o sistema retorna ao nó. No caso (ii), o degrau I_{dc} acima do reobase remove os pontos fixos (as nulclinas não se cruzam), e o sistema entra em regime oscilatório sustentado (ciclo limite), produzindo disparos repetidos e um $w(t)$ denteado devido aos saltos $+b$ seguidos de relaxação.

Questão 3:

- (a)
- (i)

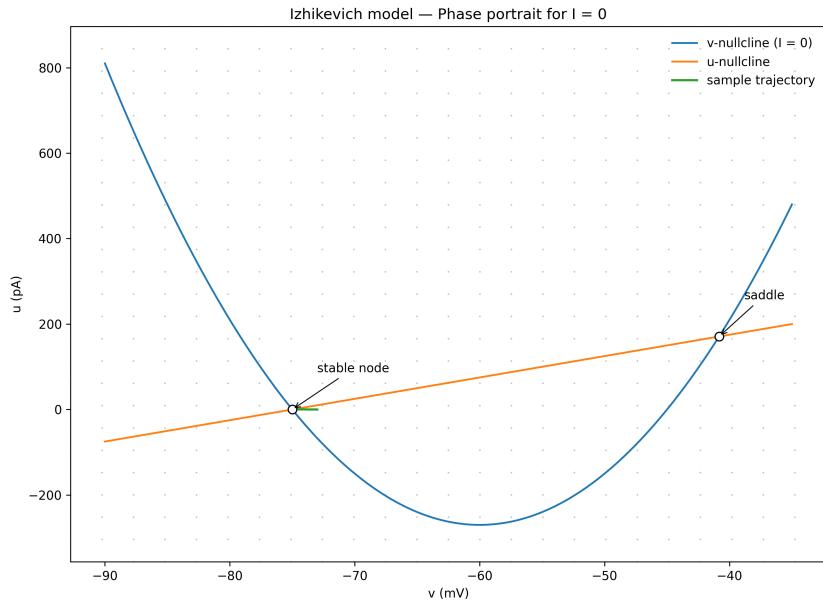


Figura 6: Plano de fase do modelo da Questão 3a.

(ii)

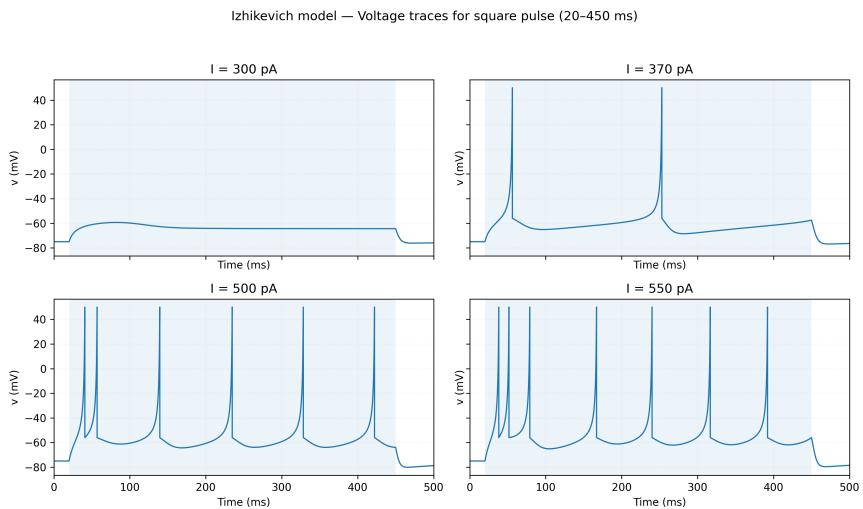


Figura 7: Simulação do modelo da Questão 3a para diferentes degraus de corrente.

(iii)

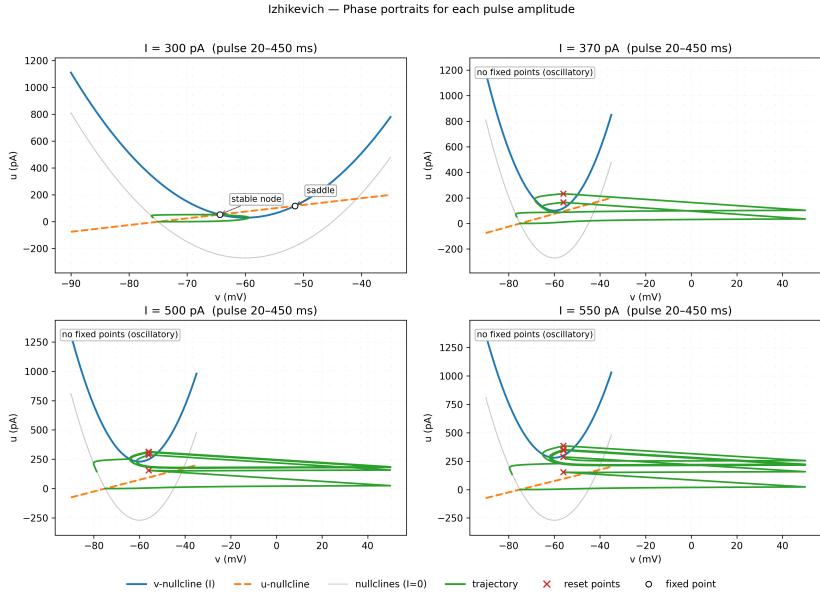


Figura 8: Planos de fase do modelo da Questão 3a para os diferentes degraus de corrente.

(iv)

- $I = 300 \text{ pA}$ (**repouso**). As nulclinas de v e u se cruzam em dois pontos: um *nó estável* (à esquerda) e um *ponto de sela* (à direita). As trajetórias próximas convergem para o nó estável, de modo que, após pequenas perturbações, o sistema retorna ao repouso sem manter oscilações. Não há disparo sustentado.
- $I = 370 \text{ pA}$ (**início de disparos**). A corrente desloca a nulclina de v para cima, eliminando os pontos de equilíbrio reais (as nulclinas deixam de se interceptar). Sem ponto fixo atrator, a dinâmica passa a orbitar um *ciclo-limite*, produzindo disparos periódicos. Este é o limiar dinâmico de excitação: a transição repouso \rightarrow oscilação.
- $I = 500 \text{ e } 550 \text{ pA}$ (**firing tônico**). A ausência de equilíbrio persiste e o ciclo-limite domina a dinâmica. O aumento de I encurta o período e pode ampliar levemente a excursão em v , resultando em maior frequência de disparos enquanto o pulso permanece aplicado.

Síntese. A passagem do regime de repouso para o de disparos ocorre quando o ponto fixo estável desaparece com a sela conforme I cresce, o que é compatível com uma bifurcação do tipo *saddle-node on invariant circle* (SNIC). Geometricamente, isso aparece como (i) interseção das nulclinas com nó estável (sem disparos) para correntes menores e (ii) perda da interseção (sem ponto fixo) e

surgimento de ciclo-limite (disparos sustentados) para correntes acima do limiar.

(b)

(i)

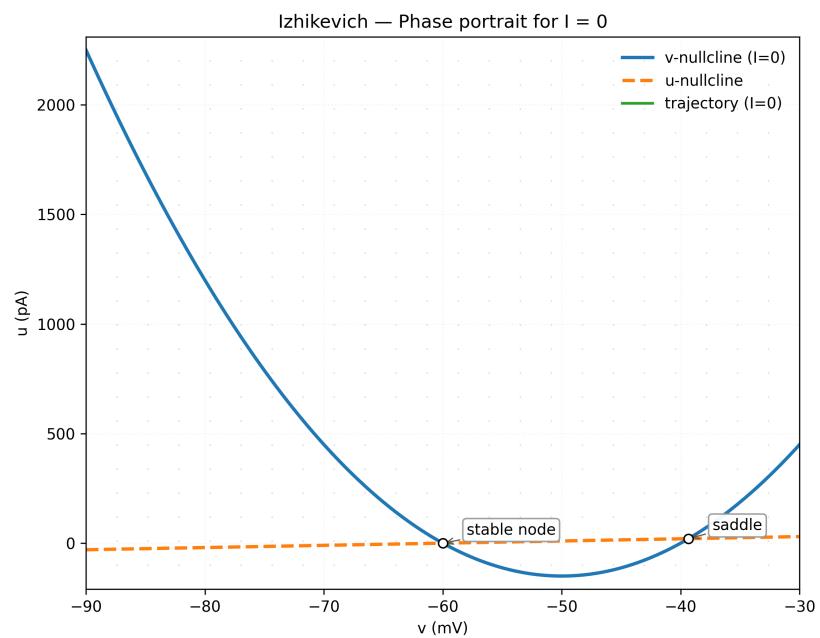


Figura 9: Plano de fase do modelo da Questão 3b.

(ii)

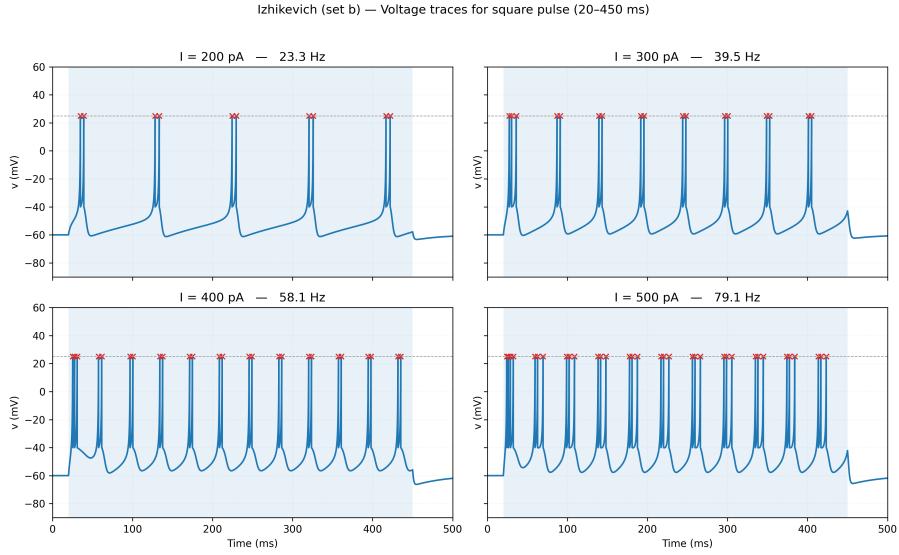


Figura 10: Simulação do modelo da Questão 3b para diferentes degraus de corrente.

(iii)

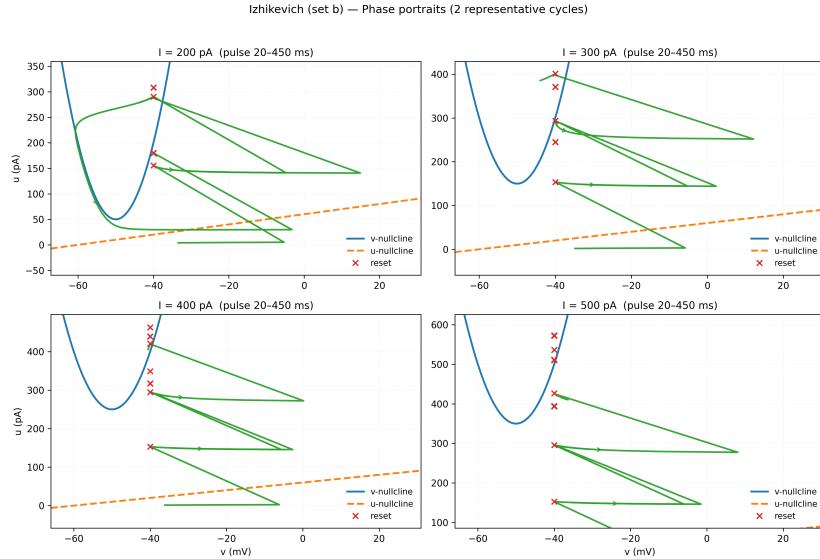


Figura 11: Planos de fase do modelo da Questão 3b para os diferentes degraus de corrente.

(iv)

Observando os retratos de fase obtidos, nota-se que o aumento da corrente de entrada (I) desloca a nulclina de v para cima, alterando o número e a posição

dos pontos fixos do sistema.

Para valores baixos de corrente, como $I = 200\text{ pA}$, ainda existe um ponto fixo estável. Nessa condição, a trajetória tende a retornar ao equilíbrio após pequenas perturbações, não ocorrendo disparos sustentados.

Com o aumento da corrente ($I = 300\text{ pA}$ ou superior), a nulclina de v se eleva o suficiente para eliminar os pontos fixos reais, fazendo com que o sistema entre em um *ciclo limite*. Nessa região, a trajetória no plano de fase torna-se periódica, descrevendo os disparos sucessivos do neurônio.

O ponto de redefinição (*reset*) causa o retorno abrupto de v a valores negativos e o incremento de u , o que representa o efeito da corrente de adaptação. Essa dinâmica caracteriza o comportamento típico de “**tonic spiking**”: abaixo do limiar de corrente, o potencial de membrana é estável; acima dele, surgem oscilações autossustentadas, correspondentes a trens de potenciais de ação com adaptação gradual na frequência.

(c)

(i)

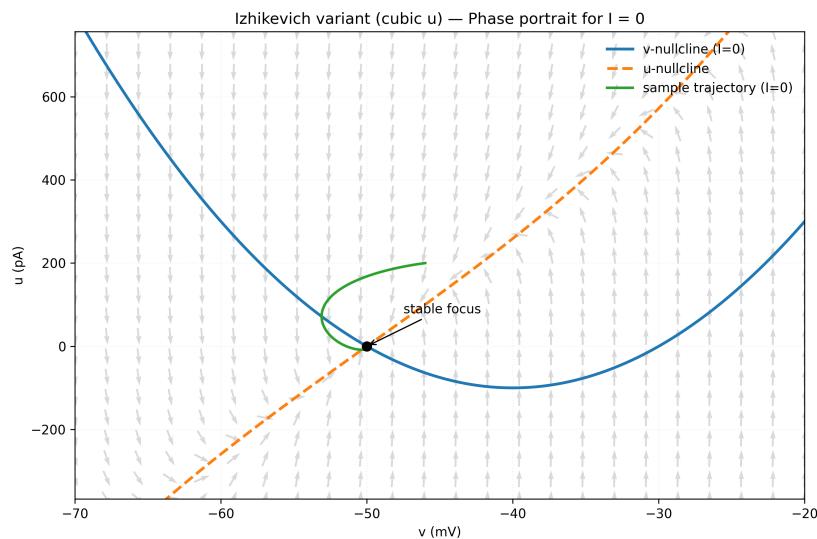


Figura 12: Plano de fase do modelo da Questão 3c.

(ii)

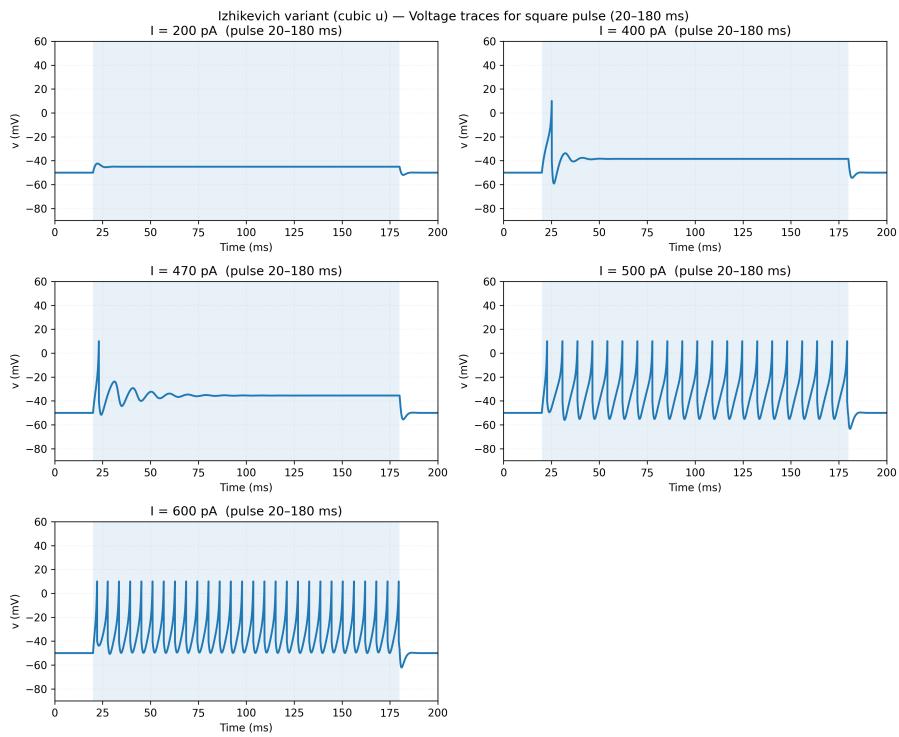


Figura 13: Simulação do modelo da Questão 3c para diferentes degraus de corrente.

(iii)

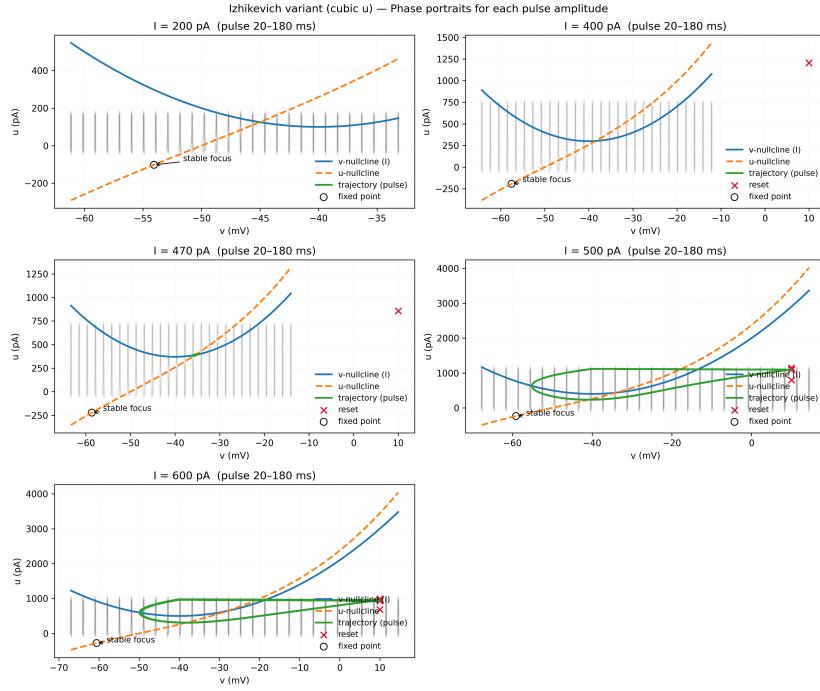


Figura 14: Planos de fase do modelo da Questão 3c para os diferentes degraus de corrente.

(iv)

Para o modelo com termo cúbico em $u(v)$, os retratos de fase mostram uma transição de repouso estável para oscilações sustentadas conforme a corrente I aumenta.

- **Correntes baixas (e.g. $I = 200\text{pA}$):** Existe uma interseção real das nulclinas v e u que gera um *foco estável*. As trajetórias espiralam para esse ponto fixo (traço < 0 , determinante > 0), logo a solução temporal converge para o repouso: sem disparos.
- **Correntes intermediárias (e.g. $I = 400\text{--}470\text{pA}$):** O foco estável aproxima-se da região não linear determinada pela nulclina de v (parábola deslocada por I) e as trajetórias, durante o pulso ($t \in [20, 180]\text{ ms}$), podem cruzar o ramo excitável. Observa-se *disparo transitório* (um ou poucos *spikes*) enquanto o sistema faz uma grande volta no plano (v, u) e depois retorna ao equilíbrio quando o pulso cessa.
- **Correntes altas (e.g. $I \geq 500\text{pA}$):** A interseção das nulclinas desaparece (perda do ponto fixo estável, consistente com uma bifurcação) e surge uma órbita fechada: um *ciclo limite*. No tempo, isso corresponde a *disparos periódicos sustentados* enquanto I permanece ligado. A variável de

adaptação u cresce ao longo dos disparos, modulando o período/amplitude, e após o término do pulso as trajetórias retornam lentamente à vizinhança do antigo repouso.

Em suma: para I pequeno, o sistema fica no ponto fixo (repouso); para I intermediário, há oscilações transitórias induzidas pelo pulso; para I grande, o sistema entra em um ciclo limite e dispara regularmente, o que é exatamente o que se observa nas trajetórias e nulclinas dos retratos de fase.