

Quelques détails sur le projet de calcul scientifique. Masters
IMSN, M2R mathématiques appliquées et MSSPI
<http://code.google.com/p/scicomp/>

M. Ismail et C. Prud'homme

4 mars 2008

Toutes les questions doivent être envoyées à `scicomp-dev@googlegroups.com`

Le processus de refroidissement d'un processeur est généralement constitué d'un ventilateur et d'un radiateur (voir figure 1). On se propose de modéliser et de simuler la dissipation de la chaleur dans un élément de radiateur (figure 2).

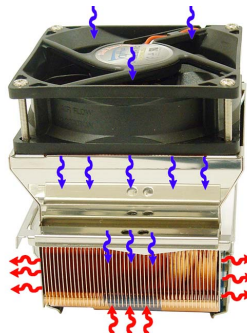


FIG. 1 – Dispositif de refroidissement d'un processeur (Photo PC INpact)

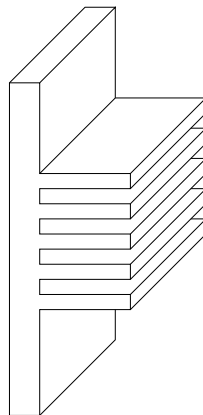


FIG. 2 – Élément de radiateur

Les données du problème sont : la géométrie du dispositif, décrite par la longueur L et la section transversale S , la température T_0 générée par le processeur et la température ambiante T_e . Pour trouver

la distribution de la température T dans l'ailette, nous supposons que la largeur W est grande devant les autres dimensions : $W \gg H$ et $W \gg L$ de sorte que la distribution va être la même dans toute section transversale (x, y) .

Considérons le domaine de calcul défini par la section transversale de l'ailette (figure 3)

$$\Omega = [0, L] \times [-H/2, H/2], \quad \text{avec } \Gamma = \partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4.$$

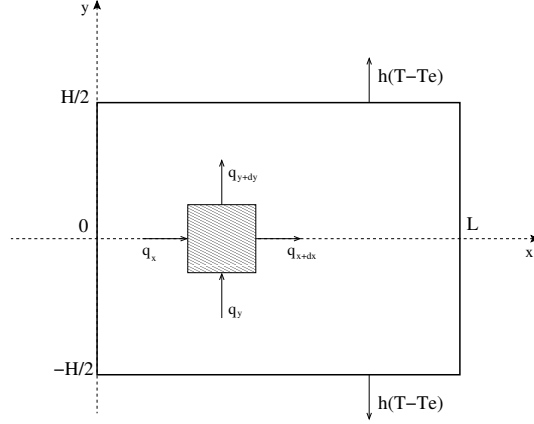


FIG. 3 – Section transversale de l'ailette

L'équation de la chaleur en deux dimensions est déduite en écrivant l'équilibre thermique d'un élément infinitésimal $dx \times dy$ situé à l'intérieur du domaine

$$(q_x - q_{x+dx})dx dz + (q_y - q_{y+dy})dy dz = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz,$$

et en appliquant la loi de Fourier suivant chaque direction. Nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (1)$$

L'équation (1) s'écrit sous une forme plus compacte

$$\nabla \cdot (k \cdot \nabla T) = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (2)$$

Les pertes latérales par convection thermique sont prises en compte au niveau des conditions aux limites qui s'écrivent :

- sur $\Gamma_1 (x = 0)$ la température est imposée : $T = T_0$,
- sur $\Gamma_3 (x = L)$ nous prenons la condition de flux nul : $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$,
- sur $\Gamma_2 (y = \frac{H}{2})$ l'équilibre des flux suivant la direction des y nous donne :

$$-k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=\frac{H}{2}} = h_c (T - T_e),$$

- de même, sur $\Gamma_4 (y = -\frac{H}{2})$ le même équilibre des flux nous donne :

$$-k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=-\frac{H}{2}} = -h_c (T - T_e).$$

L'équation adimensionnalisée correspondante s'écrit :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \nabla \cdot (k \cdot \nabla \theta) = 0,$$

avec les grandeurs sans dimension définies comme :

$$t \leftarrow \frac{t}{t_0}, \quad x \leftarrow \frac{x}{L}, \quad y \leftarrow \frac{y}{L}, \quad \theta \leftarrow \frac{(T - T_e)}{T_e}, \quad k \leftarrow \frac{\kappa t_0}{L^2}.$$

On suppose aussi que la diffusivité thermique κ est constante sur le domaine de calcul et en prenant comme temps de référence $t_0 = \frac{L^2}{\kappa}$, l'équation de la chaleur devient :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta = 0.$$

Nous observons également que le problème est symétrique par rapport à l'axe des abscisses. Ainsi, il suffit de le résoudre sur la moitié du domaine initial en imposant une condition de symétrie pour la frontière ($y = 0$) (figure 4).

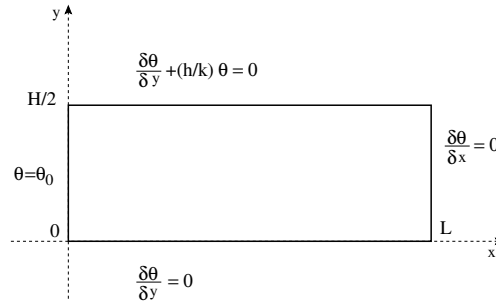


FIG. 4 – Domaine de calcul

Finalement, le modèle retenu pour le calcul de la distribution de température sur l'ailette est défini par : trouver $\theta(x, y, t)$, solution de

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta = 0, \quad \forall (x, y) \in \Omega = [0, 1] \times [0, \frac{H}{2L}], \quad \forall 0 < t < t_{max}, \quad (3)$$

qui satisfait les conditions aux limites (\mathbf{n} désigne le vecteur normal à la frontière $\Gamma = \partial\Omega$, dirigé vers l'extérieur du domaine) :

$$\theta = \theta_D = \frac{T_0 - T_e}{T_e} \quad \text{sur } \Gamma_1(x = 0) \quad (\text{condition de Dirichlet}) \quad (4)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2(y = 0) \quad (\text{condition de Neumann}) \quad (5)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3(x = 1) \quad (\text{condition de Neumann}) \quad (6)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} + c\theta = 0 \quad \text{sur } \Gamma_4(y = \frac{H}{2L}) \quad (\text{condition de Robin}), \quad \text{où } c = \left(\frac{h_c L}{k} \right), \quad (7)$$

et la condition initiale ($t = 0$) :

$$\theta(x, y, 0) = \theta_0(x, y) = 0. \quad (8)$$

1 Discrétisation en temps

Notons $\theta^n(\mathbf{x})$ la valeur de θ calculée au point $\mathbf{x} = (x, y) \in \Omega$ et à l'instant $t^n = n\delta t$. L'équation (3) discrétisée en temps s'écrit :

$$\frac{1}{\delta t}(\theta^{n+1} - \theta^n) - \Delta\theta^{n+1} = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (9)$$

On vérifie facilement que l'équation (9) munie des conditions aux limites (4)-(7) est remplacée par la formulation variationnelle équivalente :

trouver $\theta^{n+1}(\mathbf{x}) \in H^1(\Omega)$, vérifiant $\theta^{n+1}(\mathbf{x}) = \theta_D$, $\forall \mathbf{x} \in \Gamma_D$, et tel que

$$\int_{\Omega} \left[\frac{1}{\delta t}(\theta^{n+1} - \theta^n)v + \nabla\theta^{n+1} \cdot \nabla v \right] d\Omega + \int_{\Gamma_R} c\theta^{n+1}v d\gamma, \quad \forall v \in V(\Omega), \quad (10)$$

où l'on a noté : $\Gamma_1 = \Gamma_D$ (*Dirichlet*), $\Gamma_2 \cup \Gamma_3 = \Gamma_N$ (*Neumann*), $\Gamma_4 = \Gamma_R$ (*Robin*),

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega); \quad \nabla v \in L^2(\Omega)^2\}$$

$$V(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega); \quad v|_{\Gamma_D} = 0\},$$

et $L^2(\Omega)$ l'ensemble de fonctions réelles de carrés intégrables sur Ω .

2 Exemple de discrétisation en espace. Éléments finis $P1$

La première étape consiste à discrétiser l'équation de Poisson avec des conditions de Dirichlet homogènes sur tout le bord Γ . On suppose ainsi que $\Gamma_D = \partial\Omega$ et on s'intéresse au problème suivant : étant donné $f \in L^2(\Omega)$, trouver $u \in H^1(\Omega)$ vérifiant :

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \text{ dans } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (11)$$

La formulation variationnelle associée est donc : trouver $u \in V(\Omega)$ telle que :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v, \quad \forall v \in V(\Omega).$$

Une méthode de Galerkin consiste à choisir une sous-espace de dimension finie de $H^1(\Omega)$ dans lequel on cherchera une approximation de la solution u . En particulier, dans le cadre de la méthode des éléments finis $P1$ conforme, on peut choisir une triangulation \mathcal{T}_h de Ω sur laquelle on construit l'espace des fonctions continues sur Ω et affines sur chaque éléments $K \in \mathcal{T}_h$. On notera cet espace V_h et on définit

$$V_h^0 = \{v \in V_h; \quad v|_{\partial\Omega} = 0\} \subset V(\Omega).$$

Notons N_s le nombre de sommets \mathbf{x}_i de la triangulation \mathcal{T}_h . On vérifie que la famille $(w_j)_{1 \leq j \leq N_s}$ (dite famille de fonctions « chapeaux ») est une base de l'espace vectoriel V_h . Ces fonctions vérifient :

- $\forall j \in \{1, \dots, N_s\}, \quad w_j \in V_h,$
- $w_j(\mathbf{x}_i) = \delta_{ij}.$

D'un point de vue numérique, nous allons considérer d'abord le problème de Neumann (sans les conditions de Dirichlet) que nous modifierons par la suite pour résoudre le problème qui nous intéresse. On cherche donc $u_h \in V_h$ telle que :

$$\forall v_h \in V_h, \quad \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h = \int_{\Omega} f v_h,$$

soit encore

$$\forall 1 \leq i \leq N_s, \quad \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla w_i = \int_{\Omega} f w_i. \quad (12)$$

Comme u_h appartient aussi à V_h , il existe un unique vecteur $(U_j)_{1 \leq j \leq N_s} \in \mathbb{R}^{N_s}$ tel que

$$u_h = \sum_{j=1}^{N_s} U_j w_j.$$

Le système d'équations (12) s'écrit donc :

$$\forall 1 \leq i \leq N_s, \quad \int_{\Omega} \nabla \left(\sum_{j=1}^{N_s} U_j w_j \right) \cdot \nabla w_i = \int_{\Omega} f w_i,$$

soit donc

$$\forall 1 \leq i \leq N_s, \quad \sum_{j=1}^{N_s} \left(\int_{\Omega} \nabla w_j \cdot \nabla w_i \right) U_j = \int_{\Omega} f w_i.$$

En notant $A_{ij} = \int_{\Omega} \nabla w_j \cdot \nabla w_i$ et $B_i = \int_{\Omega} f w_i$, résoudre ce problème revient à résoudre le système linéaire $AU = B$.

3 Implémentation

Pour réaliser ce projet, on propose d'utiliser la librairie `Life`. Le point de départ sera l'exemple `laplacien.cpp` fourni avec le tutoriel (voir `/usr/ljk/share/doc/life` sur `idbull`).

Références

- [1] I. Danaila, F. Hecht and O. Pironneau. *Simulation numérique en C++*. Dunod, Paris, 2003.
- [2] C. Prud'homme. *Life : Overview of a unified C++ implementation of the finite and spectral element methods in 1d, 2d and 3d*. In Workshop On State-Of-The-Art In Scientific And Parallel Computing, Lecture Notes in Computer Science, page 10. Springer-Verlag, 2006.