

Mathématiques appliquées: des maths en lien avec la société

Modélisation Simulation et Optimisation

Master Calcul Scientifique et Mathématiques de l'Information

CSMI

Pr Christophe Prud'homme

Université de Strasbourg



Plan

Mathématiques appliquées et métiers des maths

Formation et Débouchés

Conclusion

Quelques exemples

Fusion nucléaire

Santé et Biomédical

Champs Magnétiques Intenses

Plan

Mathématiques appliquées et métiers des maths

Formation et Débouchés

Conclusion

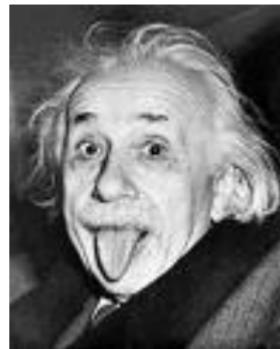
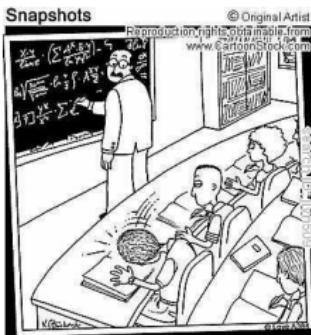
Quelques exemples



Pour commencer...

- ▶ A quoi servent les mathématiques ?
- ▶ Y a-t-il des métiers après des études en mathématiques ?

$$\begin{aligned}
 & V_{\text{cylindre}} = \pi r^2 h = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3 \\
 & F = \sum q_i p_i = \sum_{i=1}^n q_i p_i \\
 & \int x u' dx + t = \frac{d(x)}{dt} = -V(u')^2 \\
 & x = \frac{t}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} = 2x \\
 & \therefore \int \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx = \tan u \\
 & = \int (\alpha(h)) e^{-(h-x-w)} dh \\
 & -\infty \quad E = mc^2
 \end{aligned}$$



Du côté de nos amis américains?

- ▶ Un métier en pleine expansion:
<http://www.bls.gov/ooh/math/mathematicians.htm>
- ▶ Best job en 2014:
<http://www.careercast.com/jobs-rated/best-jobs-2014>



Etude de l'Impact Socio-Economique des Mathématiques en France

"Les Mathématiques, un atout essentiel pour relever les défis de demain : connaissance, innovation, compétitivité."

Etude réalisée pour



Utilisées dans 2,4 millions d'emplois,
soit 9% de l'emploi

285 Mds€ de valeur ajoutée
15% du PIB



5 compétences clés diffusant dans de très nombreux secteurs :

- **Traitements du signal et analyse d'images**
- **Data Mining** (statistiques, analyse de données et apprentissage)
- **MSO** (Modélisation - Simulation - Optimisation)
- **HPC** ("High Performance Computing" ou calcul haute performance)
- **Sécurité des systèmes d'informations et Cryptographie**



Les diplômés en et par les mathématiques sont les plus épargnés par le chômage

"The best job" pour le Wall Street Journal en 2014



4 000 chercheurs et enseignants-chercheurs

60 laboratoires principaux
dont 42 laboratoires de l'INSIMI



La France au 2^{ème} rang mondial
avec 13 médailles Fields

500 docteurs par an



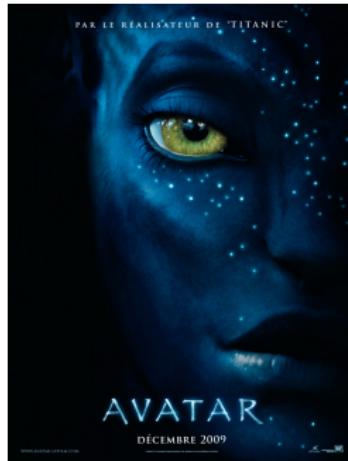
... pour en savoir plus :
(téléchargement, médias)



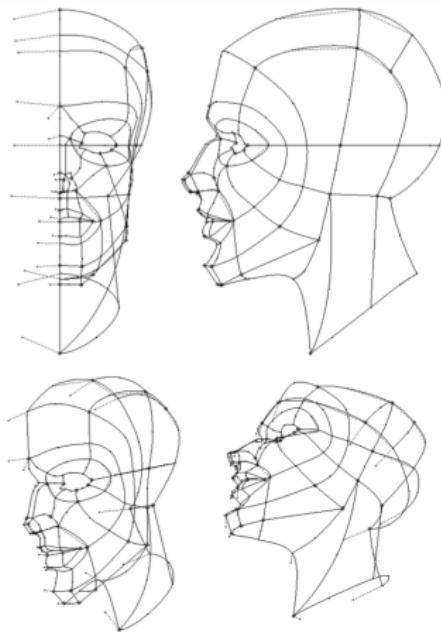
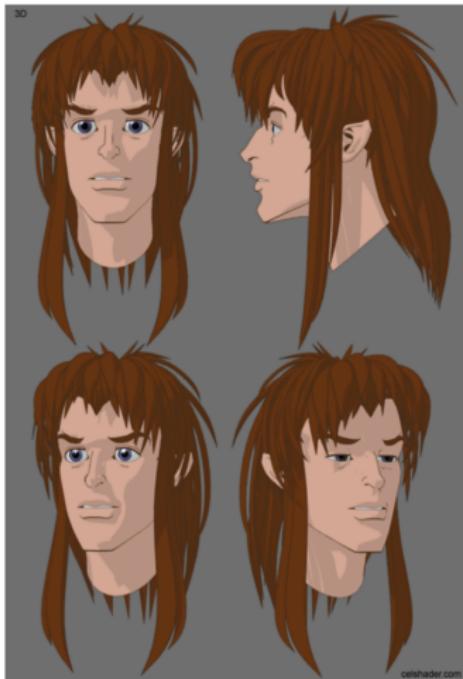
Les mathématiques sont omniprésentes dans notre société



Créer des images...



Créer des images...



Compresser les images et les sons: MP3, MP4, jpeg, mov...

Image originale



Image compressée



Compresser les images et les sons: MP3, MP4, jpeg, mov...

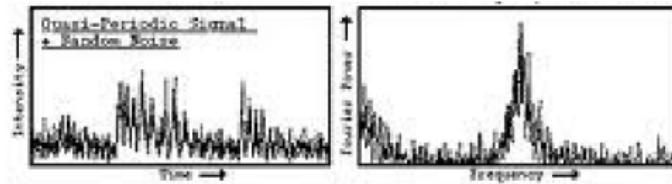
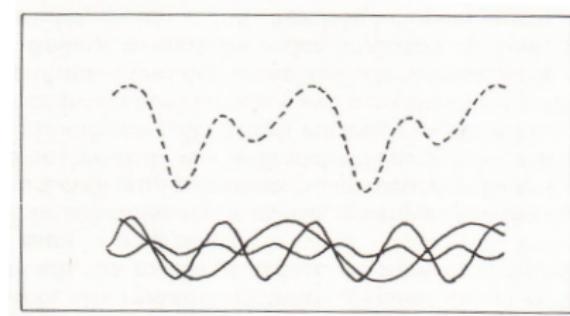
Image originale



Image compressée



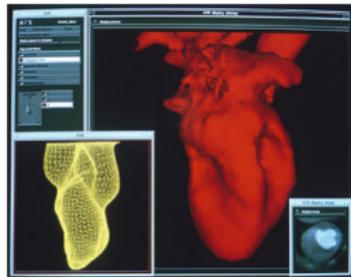
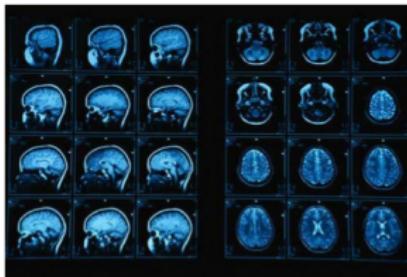
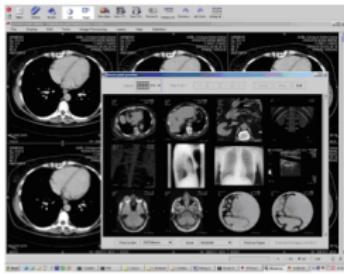
Compresser les images et les sons: MP3, MP4, jpeg, mov...



Imagerie médicale...

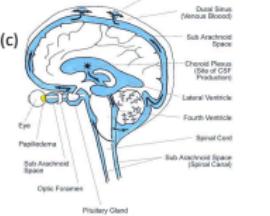
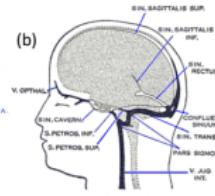
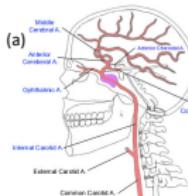
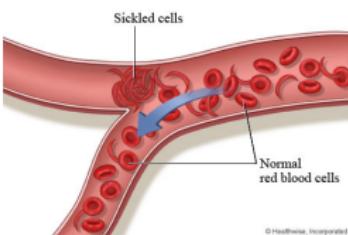
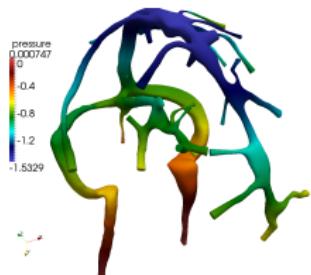
Principe

On soumet le corps à un signal (magnétique, électrique, acoustique, ...), et en fonction de la réponse obtenue, on reconstruit une image de la zone observée (problème inverse).



Santé

Comprendre les mécanismes physiologiques et pathologiques (anévrismes, anémie, atherosclérose, maladies neurodégénératives: Alzheimer...), proposer des outils de diagnostics peu chers et fiables



Statistiques...



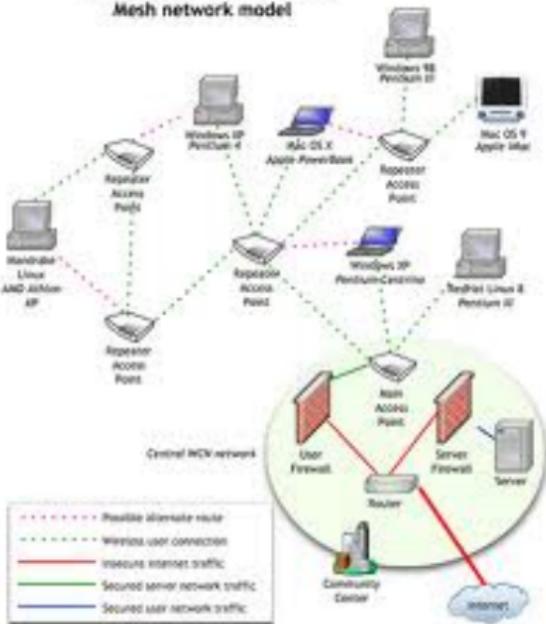
Crypter...



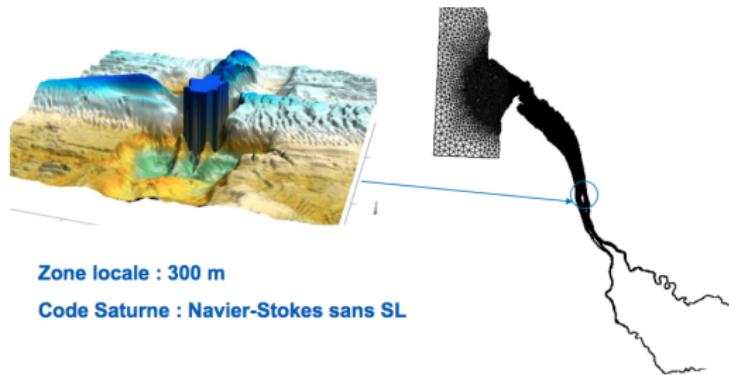
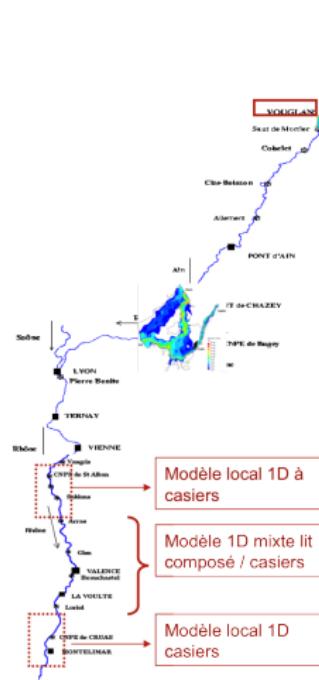
PayPal



Wireless Community Network:
Mesh network model



Modéliser...

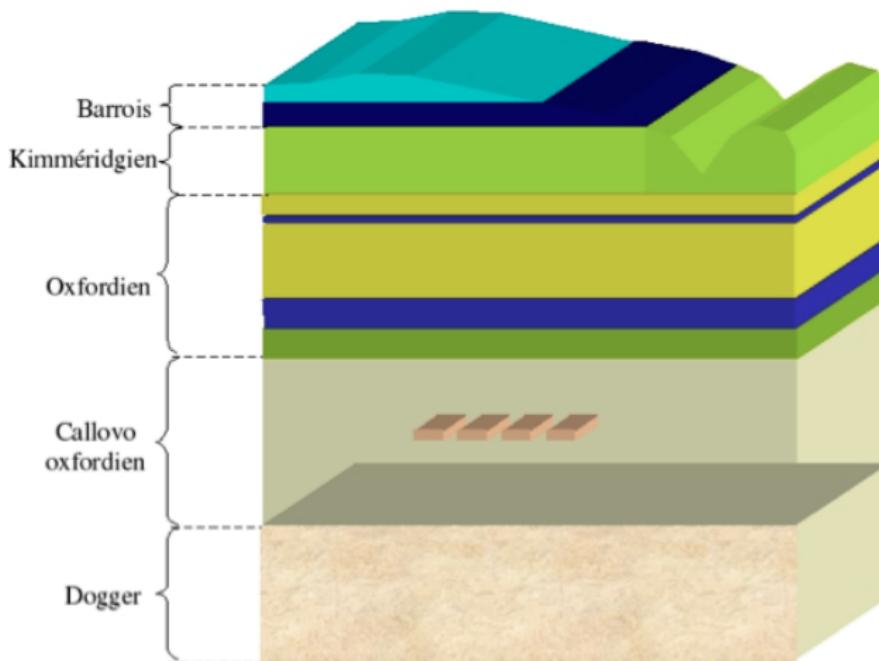


Zone locale : 300 m
Code Saturne : Navier-Stokes sans SL

EDF

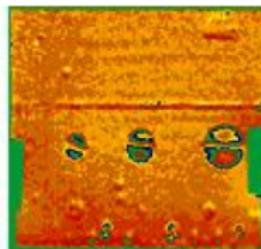
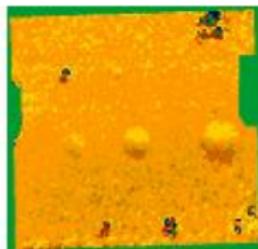
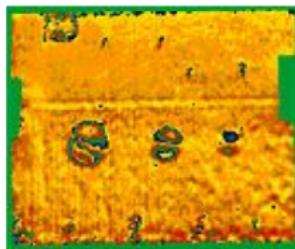
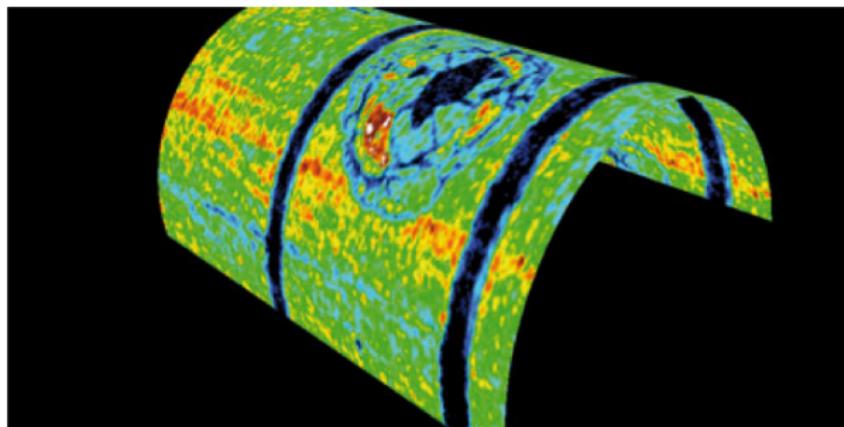
Modéliser...

Stockage de déchets radioactifs → Modélisation des écoulements en milieux poreux autour du site



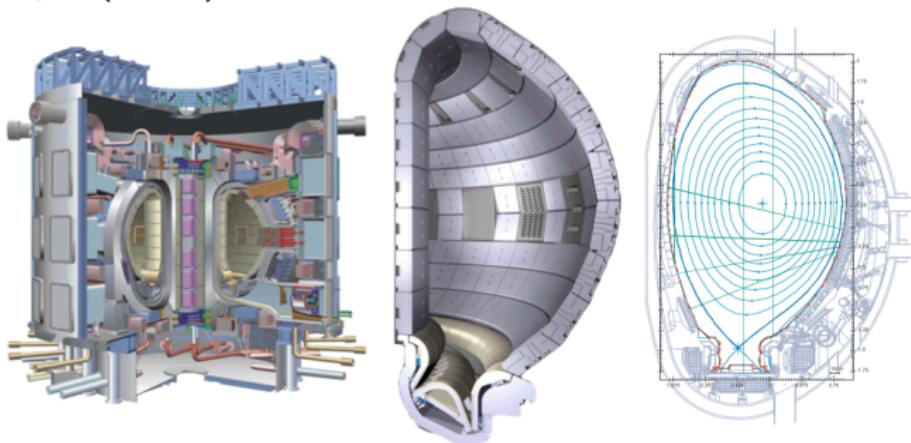
Modéliser...

Contrôle non destructif

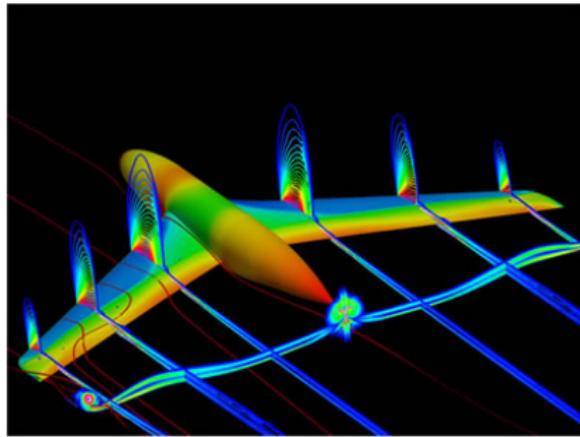
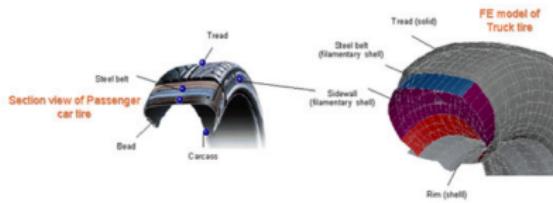
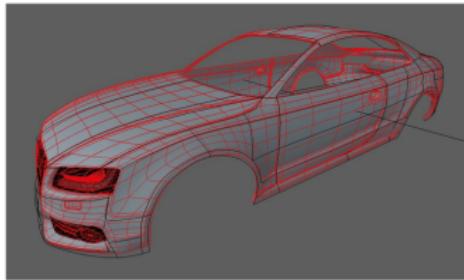


Modéliser...

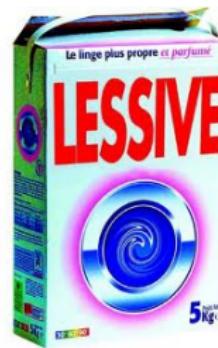
Fusion nucléaire contrôlée : plasma confiné dans la chambre magnétique (ITER)



Modéliser...



Modéliser...



Calculer...

TGCC Curie: 10080 eight-core processors, Intel® Xeon® Next Generation, un total de 80640 cores.



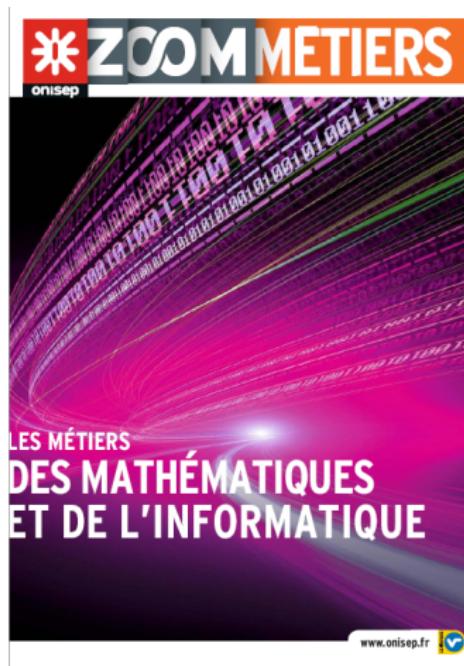
Puissance énergie : 7.5 Mw (\approx ville de 40 000 habitants)

Puissance calcul: 200 Tflops, $200 \cdot 10^{12}$ floating point operations per second

Ce type d'ordinateur est plus difficile à programmer qu'un PC
(surtout si l'on veut que le calcul soit efficace !!).

—→ informatique, algorithmique, optimisation...

Il y a des dizaines de "métiers des maths" (pas seulement prof !)



Quels Métiers pour les matheux?

Plan

Mathématiques appliquées et métiers des maths

Formation et Débouchés

Conclusion

Quelques exemples

CSMI

Un master pour qui ?

Le Master est fait pour les étudiants de Licence désirant faire

- ▶ une carrière d'ingénieur
- ▶ une carrière de chercheur
- ▶ une carrière d'enseignant-chercheur

Objectif

Double compétence en Calcul Scientifique et Mathématiques de l'information

Poursuite d'études

Doctorat en mathématiques appliquées

Pré-requis CSMI

Bonnes bases en analyse, en algèbre et en informatique. Goût pour la programmation, l'algorithmique et les applications des mathématiques.

- ▶ Analyse numérique
- ▶ Programmation & Programmation orienté objet
- ▶ Calcul différentiel et intégral
- ▶ Statistiques

Le parcours ENSIIE dans CSMI

S1

- ▶ Algorithmique
- ▶ Calcul scientifique
- ▶ Calcul parallèle
- ▶ Graphes
- ▶ Modèles aléatoires

S2

- ▶ Fourier et Signal (3)
- ▶ Optimisation (6)
- ▶ EDP (6)

S3

- ▶ Contrôle Optimal
- ▶ Projets

CSMI I

Contenu

Un savant mélange de théorie, numérique et informatique pour affronter les défis d'aujourd'hui et de demain !

Équipes et Structures de recherche associées

Équipe MOCO (IRMA) : Modélisation et Contrôle

Équipe ICPS (ICUBE) : calcul parallèle

Équipe AGA (IRMA) : arithmétique et géométrie algébrique

Cemosis: Centre de Modélisation et Simulation de Strasbourg
(www.cemosis.fr)

CSMI II

Entreprises Partenaires

Axessim, Gazomat, Holo3, Hager, Airbus, EDF, Plastic Omnium, Sigmaphi, Kitware ...

Stages

De nombreux stages à Strasbourg et en France (2 mois en M1, 6 mois en M2 en entreprise et/ou laboratoire de recherche)

Échanges internationaux

Possibilités d'échanges erasmus via le réseau ECMI (European Consortium For Mathematics in Industry) un peu partout en Europe !

www.ecmi-indmath.org/

Informations & Contact

Sites web

- ▶ CSMI: <http://csmi.cemosis.fr>, <http://csmi.math.unistra.fr>
- ▶ [http://mathinfo.unistra.fr/offre-de-formation/
master-mention-mathematiques-et-applications/csmi/](http://mathinfo.unistra.fr/offre-de-formation/master-mention-mathematiques-et-applications/csmi/)
- ▶ Cemosis: <http://www.cemosis.fr/>

Contact

- ▶ Christophe Prud'homme prudhomme@unistra.fr

Plan

Mathématiques appliquées et métiers des maths

Formation et Débouchés

Conclusion

Quelques exemples



Les Mathématiques au cœur de la Modélisation, la Simulation et l'Optimisation

- ▶ Un travail très pluri-disciplinaire (le matheux n'est pas seul)
- ▶ Des maths, souvent récentes, sont sous-jacentes un peu partout (même si on ne les voit pas)
- ▶ De nombreux défis (mathématiques) pour les années à venir

Plan

Mathématiques appliquées et métiers des maths

Formation et Débouchés

Conclusion

Quelques exemples

Fusion nucléaire

Santé et Biomédical

Champs Magnétiques Intenses

Plan

Mathématiques appliquées et métiers des maths

Formation et Débouchés

Conclusion

Quelques exemples

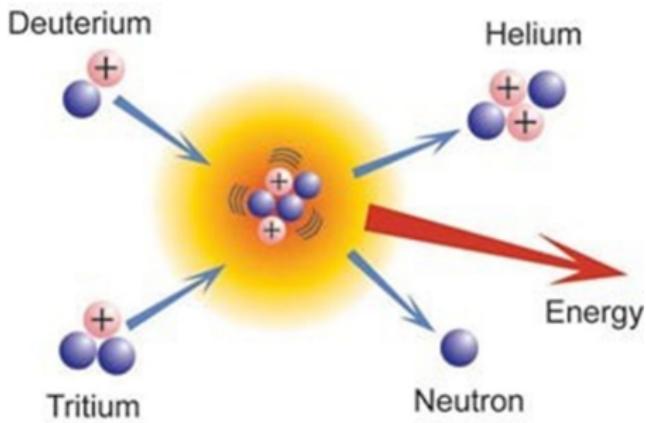
Fusion nucléaire

Santé et Biomédical

Champs Magnétiques Intenses

Fusion nucléaire Magnétique: ITER

- ▶ **Fission nucléaire:** production d'énergie en utilisant la fission d'atomes lourds (uranium) par bombardement de neutrons (nucléaire civil actuel).
- ▶ **Fusion DT:** à de très hautes énergies le deuterium et tritium (hydrogène) fusionnent en dégageant de l'énergie (réaction présente dans les étoiles).
- ▶ **Plasma:** à de très hautes températures la ionisation du gaz donne un plasma (gaz chargé) sensible au champ magnétique et électrique.



Fusion nucléaire Magnétique: ITER

- ▶ **Tokamak:** Chambre toroïdale utilisée pour confiner le plasma avec un champ magnétique.
- ▶ **ITER:** Projet international de réacteur expérimental ayant pour but de valider la fusion comme source d'énergie.
- ▶ **Petit histoire d'ITER:** Projet proposé par R. Reagan et M. Gorbatchev en 1985. Le traité final fut signé en 2006.
- ▶ **ITER en chiffre:** 34 pays (UE, USA, Chine, Russie, Inde, Corée, Japon). Construction: 12 ans et 13 Milliards de coût. Exploitation: 20 ans et 5 Mds.

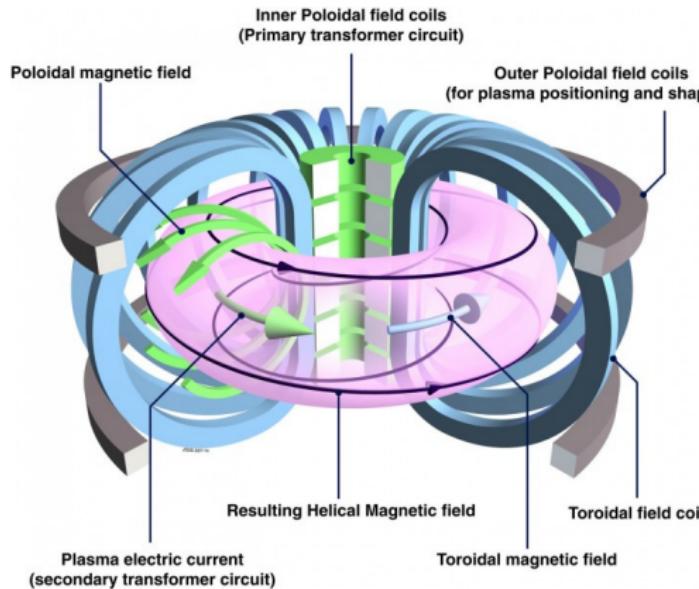


Figure: Tokamak

Fusion Vs Fission nucléaire

Fission Nucléaire:

- ▶ Avantages
 - ▶ Coût compétitif,
 - ▶ Pas d'émission de CO₂.
- ▶ Inconvénients
 - ▶ Combustible (uranium) limité.
 - ▶ Déchets radioactif à grande longue durée de vie (traitement compliqué et coûteux).
 - ▶ Risque d'accident critique (réaction en chaîne etc) type Tchernobyl ou Fukushima.

Fusion Nucléaire

- ▶ Avantages
 - ▶ Enorme réserve de combustible.
 - ▶ Pas d'émission de CO₂.
 - ▶ Peu de déchets et à faible durée de vie.
 - ▶ Pas de risque d'accident critique.
- ▶ Inconvénients
 - ▶ On sait pas maîtriser cette source d'énergie. Confiner un plasma à 100 millions de degrés génère des difficultés énormes.

Modélisation du plasma I

- Premier modèle: **équation de Vlasov-Maxwell** qui décrit l'évolution de la fonction de distribution des particules (description statistique).

Vlasov-Maxwell

On définit $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ la distribution des particules chargées.

$$\begin{cases} \partial_t f + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = Q(f, f) \\ \frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{E} - \nabla \times \mathbf{B} = -\mu_0 \mathbf{J}, \\ \partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \end{cases}$$

avec Q l'opérateur de collision, \mathbf{E} , \mathbf{B} les champs électrique et magnétique et \mathbf{J} le courant.

- Modèle pour les plasmas peu collisionnels (coeur du tokamak).
- Problèmes numériques** : équation 6D et physique multi-échelle ce qui génère d'énorme coût de calcul.
- Recherches**: méthodes numériques précises et moins coûteuses.

Modélisation du plasma II

- ▶ Second modèle: **équation de la MHD** qui décrit l'évolution du plasma à l'aide des quantités macroscopiques.

MHD

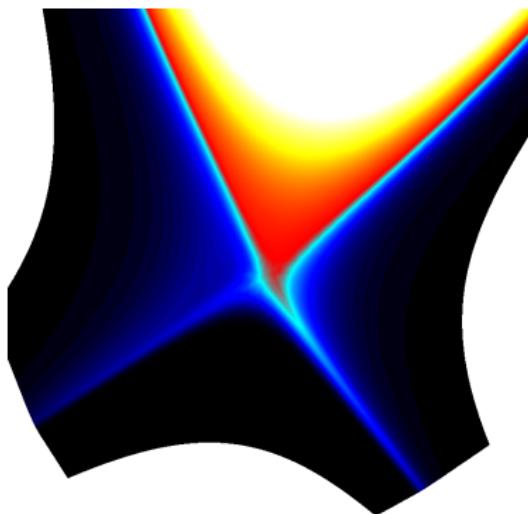
$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \rho \partial_t \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \nu \Delta \mathbf{u} \\ \partial_t p + \mathbf{u} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot (K \nabla T) \\ \partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B} - \eta \mathbf{J}), \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J}. \end{array} \right.$$

avec ρ , \mathbf{u} , T et p la densité, la vitesse, la température et la pression du plasma.

- ▶ Modèle pour les plasmas très collisionnels (bords du tokamak).
- ▶ **Problèmes numériques** : Modèle complexe et physique multi-échelle
- ▶ **Recherches**: méthodes numériques peu coûteuses préservant les propriétés du modèle (exemple: positivité).

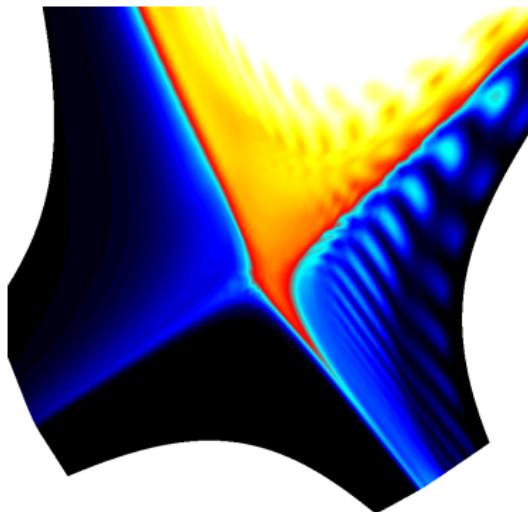
Applications: instabilités de bord

- ▶ Les gradients de pression au bords peuvent occasionner des ruptures de confinement sous forme d'instabilités.
- ▶ Simulation d' ELM's
- ▶ Exemples:
 - ▶ **Disruptions:** Instabilités du plasma brutales pouvant endommager de façon critique le Tokamak.
 - ▶ **Edge localized modes (ELMs):** Instabilités de bord périodiques pouvant endommager le tokamak et générant une perte d'énergie.
- ▶ La simulation numérique permet de comprendre ces instabilités, les estimer et tester des méthodes de contrôle.



Applications: instabilités de bord

- ▶ Les gradients de pression au bords peuvent occasionner des ruptures de confinement sous forme d'instabilités.
- ▶ Simulation d' ELM's
- ▶ Exemples:
 - ▶ **Disruptions:** Instabilités du plasma brutales pouvant endommager de façon critique le Tokamak.
 - ▶ **Edge localized modes (ELMs):** Instabilités de bord périodiques pouvant endommager le tokamak et générant une perte d'énergie.
- ▶ La simulation numérique permet de comprendre ces instabilités, les estimer et tester des méthodes de contrôle.



Plan

Mathématiques appliquées et métiers des maths

Formation et Débouchés

Conclusion

Quelques exemples

Fusion nucléaire

Santé et Biomédical

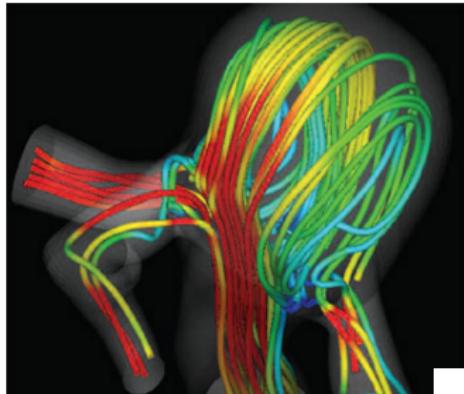
Champs Magnétiques Intenses

Écoulements sanguins

Objectifs: Rhéologie des écoulements sanguins

- ▶ Simuler l'interaction plasma/paroi artérielle
- ▶ Simuler un grand nombre de cellules sanguines (globules rouges)
- ▶ Simuler l'organisation spatio-temporelle de ces entités

Le sang est un fluide complexe



Interaction fluide-structure

- ▶ Modèles :

- ▶ Fluide : Navier-Stokes en domaine mobile

$$\rho_f \frac{\partial \mathbf{u}_f}{\partial t} \Big|_{x^*} + \rho_f (\mathbf{u}_f - \mathbf{w}_f \cdot \nabla) \mathbf{u}_f - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_f = \mathbf{f}_f$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_f = 0$$

avec \mathbf{w}_f la vitesse du maillage, \mathcal{A}_t la carte ALE et $x = \mathcal{A}_t(x^*)$

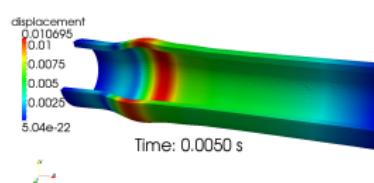
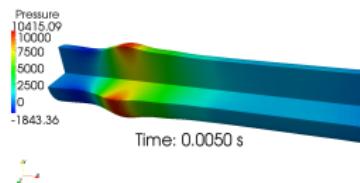
- ▶ Structure : hyper-élastique et compressible dans un cadre lagrangien

$$\rho_s \frac{\partial^2 \boldsymbol{\eta}_s}{\partial t^2} - \nabla \cdot (\mathbf{F}_s \boldsymbol{\Sigma}_s) = \mathbf{f}_s, \quad \boldsymbol{\Sigma}_s = \lambda_s (tr \mathbf{E}_s) \mathbf{I} + 2\mu_s \mathbf{E}_s.$$

- ▶ Couplage : $\mathbf{u}_f = \boldsymbol{\eta}_s$ et $\boldsymbol{\sigma}_f \vec{n}_f + J_{\mathcal{A}} \mathbf{F}_s \boldsymbol{\Sigma}_s \mathbf{F}_{\mathcal{A}} \vec{n}_s = 0$

Propagation d'une onde de pression

- ▶ Tube:



(a) Fluid pressure (disp magnified 10 times)

(b) Structure displacement (disp magnified 10 times)

- ▶ Géométries plus réalistes :



(c) Pression du fluide dans

(d) Pression dans une

Couplage avec des particules

Objectifs

Simuler l'écoulement de particule déformables dans un écoulement fluide

- ▶ Utilisation de méthodes domaines fictifs
- ▶ Principe : on transforme le problème initial en plusieurs sous problèmes

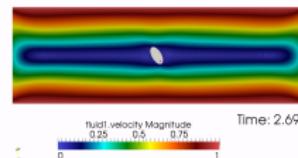
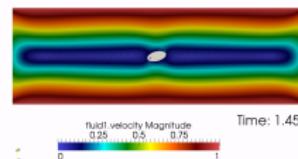
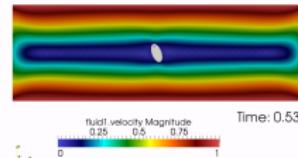
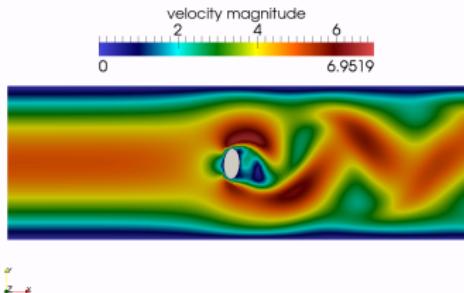


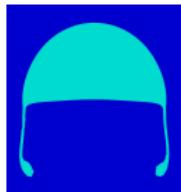
Figure: Déplacement dans un écoulement de cisaillement

Autre stratégie: méthode des ensembles de niveau

Objectifs

Simuler le comportement de membrane élastique dans un fluide

- ▶ Stratégie :
 - ▶ Capturer l'interface par une fonction de niveau ϕ
 - ▶ Projeter les forces interfaciales dans la région t.q. $|\phi| < \varepsilon$
 - ▶ Imposer la contrainte d'inextensibilité



- ▶ Modèle :
 - ▶ Navier Stokes incompressible $\rho(\phi), \mu(\phi), \mathbf{f}(\phi)$
 - ▶ Fonction de niveau ϕ advectée par la vitesse du fluide

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0$$

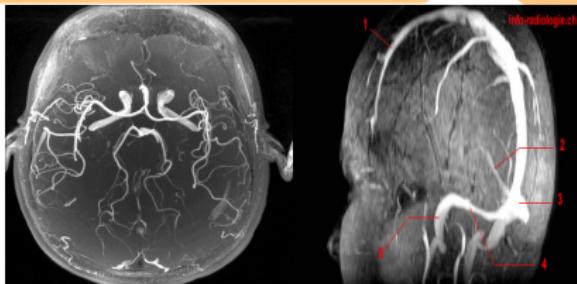
ViVaBrain: The Virtual Vascular Brain

ViVaBrain: ANR MN 2012
(2013-2017)

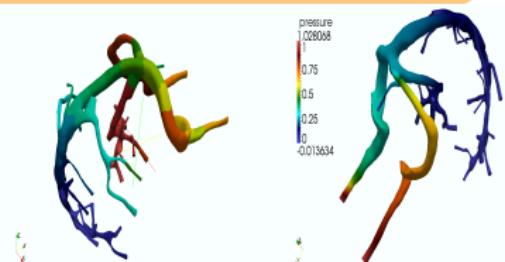
images médicales, génération de maillage, simulations 3D+
simulation dans les systèmes artériels et veineux, IRM virtuelle

Collaboration

- U. Strasbourg, U. Grenoble,
U. Paris Est, U. Reims
Champagne-Ardennes,
Kitware
- Math. Appl., Informatique,
Physique, Médecine



1. Superior sagittal sinus; 2. Right sinus; 3. Confluence of sinuses; 4. Transverse sinus; 5. Sigmoid sinus.



Plan

Mathématiques appliquées et métiers des maths

Formation et Débouchés

Conclusion

Quelques exemples

Fusion nucléaire

Santé et Biomédical

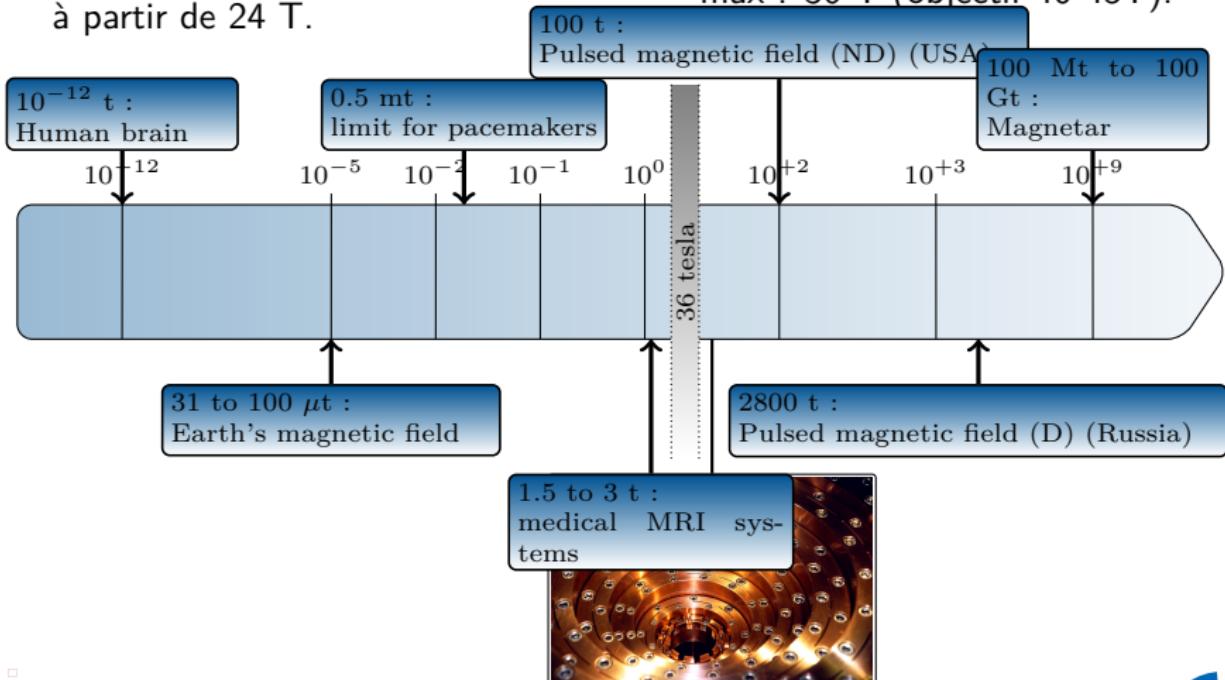
Champs Magnétiques Intenses

Laboratoire National des Champs Magnétiques Intenses

Grand équipement français (CNRS)

- ▶ Champs magnétiques intenses : à partir de 24 T.

- ▶ À Grenoble, champ continu max : 36 T (objectif 40-45T).



Laboratoire National des Champs Magnétiques Intenses

Installation champs pulsés à TOULOUSE : 14 MJ, 24 kV, 1 GW, 80 Tesla



Installation champs continus à GRENOBLE: 24 MW, 36 Tesla



Champs Magnétiques Intenses : à quoi ça sert ?

Reproduire les conditions de zero-gravité

Moteur d'ariane 6 (SNECMA) :

- ▶ Comment se comporte l'hydrogène liquide (carburant) en apesanteur ?
 - ▶ Données d'entrée pour le design du moteur
 - ▶ Moins coûteux qu'une expérience en conditions "réelles"
 - ▶ heure de champ intense ($\approx 1000 \text{ €}$)
 - ▶ vol parabolique ($\approx 100.000 \text{ €}$)
 - ▶ vol dans l'espace ($\approx 10.000.000 \text{ €}$)



0.5W 0.16g



Champs Magnétiques Intenses : à quoi ça sert ?

Etudier les propriétés magnétiques

Optimisation de la capacité des disques durs

- ▶ Capacité dépend des propriétés magnétiques
 - ▶ Revetement des disques : oxyde de fer (magnétique)
 - ▶ Ecriture d'un bit : envoi d'une charge magnétique
 - ▶ Lecture d'un bit : mesure de son champ magnétique



Compréhension/Optimisation des propriétés magnétiques :

Mega-octets (Mo) → Giga-octets (Go) → Tera-octets (To)

Electro-Aimants : à quoi servent les modèles ?

Avant la mise en service : Développement des aimants

- ▶ Augmenter l'intensité du champ magnétique
- ▶ Améliorer sa qualité (homogénéité)

Optimisation ⇒ Modélisation (fine) des electro-aimants

- ▶ Permet de couvrir une large gamme de paramètres
 - ▶ Envisager autant de cas que l'on veut pour trouver le design "optimal"
- ▶ Possibilité de prévoir/anticiper les scénarios "catastrophes"
 - ▶ Et éviter la casse (très couteuse!)

Electro-Aimants : à quoi servent les modèles ?

Après la mise en service : Lors d'un incident

- ▶ Identifier/Comprendre la cause de l'incident
 - ▶ Température trop élevée ? Problème mécanique ?



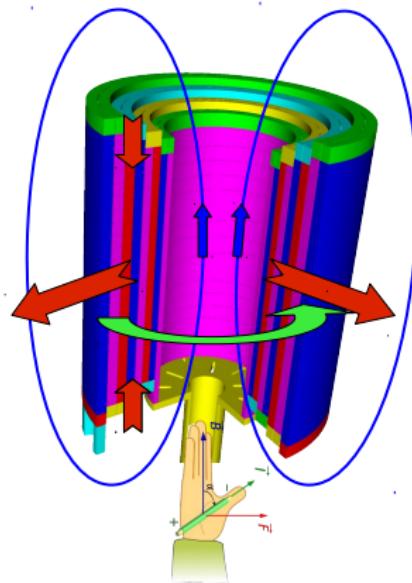
Analyse ⇒ Reproduire l'incident par la simulation

- ▶ Trouver une solution pour éviter que l'incident se reproduise : optimisation avant (re-) mise en service

Electro-Aimants : un problème multi-physique

Simulation des électro-aimants

- ▶ Champs magnétique intense
 - ▶ Densité de courant $j = -\sigma \nabla V$
 - ▶ Electrostatique/Magnétostatique
- ▶ Effet Joule
 - ▶ Dissipation de l'énergie thermique
 - ▶ → Température
- ▶ Refroidissement des électro-aimants
 - ▶ Échanges thermiques entre le conducteur et l'eau
 - ▶ → Thermo-hydraulique
- ▶ Stress mécanique
 - ▶ Forces de Lorentz, Dilatation thermique
 - ▶ → Mécanique - Elasticité



Electro-Aimants : objectifs pour le calcul

Un modèle complet, précis, fiable et rapide

- ▶ Hiérarchie de modèles
- ▶ Réduction de modèles
(simulation temps réel fiable)
- ▶ Optimisation du design des électro-aimants
- ▶ Contrôle des électro-aimants
- ▶ Quantification d'incertitudes :
 - ▶ Analyse de sensibilité
 - ▶ Estimation de quantile
- ▶ Optimisation sous incertitudes

