Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"

Теорія складності

Дослідження $coNP$-повної задачі

# Задача визначення того, чи даний граф не має циклу Гамільтона

ФІ-13 Дідух Максим

Фізико-технічний інститут

Кафедра математичних методів захисту інформації

2022

Дослідження $coNP$-повної задачі

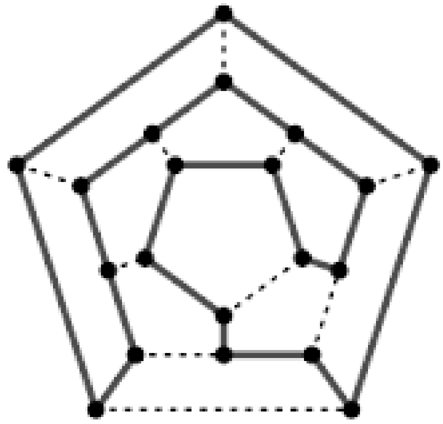
7 грудня 2022

# Зміст

# 1 Вступ

Граф $G$ називається *гамільтоновим*, якщо існує цикл, що містить кожну вершину рівно один раз. Такий цикл носить назву гамільтонового. Також слід зазначити, що існує поняття гамільтоновго шляху (це знадобиться при доведенні складності): граф $G$ має *гамільтонів шлях* з вершини $s$ у вершину $t$, якщо є марштрут між цими вершинами, який містить усі вершини рівно один раз.

Взагалі, це поняття пішло від Вільям Гамільтон (англ. *William Hamiltonian*), який вигадав не дуже вдалу гру під назвою "ікосіанська гра"(англ. *"icosian game"*), завданням якої був пошук гамільтонового циклу на додекаедричному графі (і можливо на його підграфах).



мал. 1 *гамільтоновий цикл на додекаедрі* change resolution

Хоча означення гамільтонового графу дуже схоже з означенням ойлерового графу, виявляється, що ці дві концепції поводяться досить по-різному. Якщо теорема Ойлера дає нам чіткий критерій ойлеровості, то для гамільтонових графів немає аналогічного твердження. Як з'ясувалось, перевірка графу на наявність гамільтонового циклу є $NP$-повною задачею.

## 1.1 Постановка задачі

Дано: неорієнтований граф $G = (V, E)$, де $V = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$ - множина вершин, $E = \{e_1, e_2, \dots v_k\}$ - множина ребер. Перевірити, що даний граф не має циклу гамільтона. Цю задачу будемо позначати **NON-HAM-CYCLE** .

## 1.2 Історія виникнення та наявні її модифікації

# 2 Практичне застосування

# 3 Доведення складності

Доведемо, що **NON-HAM-CYCLE** є $coNP$-повною. Для цього нам знадобиться довести додаткове твердження.

**Твердження 1:** задача перевірки графа на наявність гамільтонового циклу належить класу $NP$-повних задач (*далі:* **HAM-CYCLE** )

■

Спочатку покажемо, що задача перевірки орієнтованого графу на наявність гамільтоновго шляху з вершини $s$ у вершину $t$ (далі **D-HAM-PATH** ) є $NP$-повною.

1. **D-HAM-PATH** $\in NP$-повна?

Нехай $G$ — орієнтований граф. Ми можемо перевірити чи потенційний шлях $s \to \dots \to t$ є гамільтоновим за поліноміальний час. Тепер спробуємо побудувати поліноміальне зведення **3SAT** $\leq_p$ **D-HAM-PATH** , щоб закінчити доведення повноти.

а точно 'множник'?

Нехай $\phi = \bigwedge_{i=1}^{m} \phi_i$ має $n$ змінних і $m$ множників. Щоб спростити доведення, припустимо, що жоден множник в $\phi$ не містить змінної $x_i$ і її заперечення $\bar{x}_i$.

1. Спочатку, для кожної змінної $x_i$, ми генеруємо $2m+1$ вершину з назвою $v_{i,j}$ і додаємо орієнтовані ребра $(v_{i,j}, v_{i,j+1})$ і $(v_{i,j+1}, v_{i,j})$, для $0 \leq j \leq 2m$.

2. Далі ми з'єднуємо вершини, пов'язані з різними змінними, додаючи чотири спрямовані ребра $(v_{i,0}, v_{i+1,0})$, $(v_{i,0}, v_{i+1,2m+1})$, $(v_{i,2m+1}, v_{i+1,0})$ та $(v_{i,2m+1}, v_{i+1,2m+1})$.

3. Далі створюємо вершини під назвою $c_j$. Якщо $x_i$ з'являється у множнику $\phi_j$ без доповнення, додаємо орієнтовані ребра $(v_{i,2j-1}, c_j)$ та $(c_j, v_{i,2j})$. Інакше, якщо $x_i$ міститься з доповненням, то додаємо орієнтовані ребра $(v_{i,2j}, c_j)$ та $(c_j, v_{i,2j-1})$.

4. В кінці, ми додаємо дві додаткові вершини $s$ і $t$. Після цього додаємо нові ребра $(s, v_{1,1})$, $(s, v_{1,2m+1})$, $(v_{n,1}, t)$ та $(v_{n,2m+1}, t)$. Граф згенерований $G_\phi$ (*див. рис.2*). add picture number2

Тепер, треба показати, що $\phi$ задовільна тоді та лише тоді, коли у графі $G_\phi$ є гамільтонів шлях з $s$ у $t$. Припустимо, що $\phi$ - задовільна. Тоді ми можемо відвідати кожну вершину починаючи з $s$ йдучи з $v_{i,0}$ до $v_{i,2m+1}$ з ліва на право, якщо $x_i$ - позитивна, і з $v_{i,2m+1}$ до $v_{i,0}$ з права на ліво, якщо $x_i$ - негативна, і закінчити в $t$ після відвідування $v_{n,0}$ або $v_{n,2m+1}$. Крім того, кожна 'clause' вершина може бути відвідана, згідно з припущенням, що кожна 'clause' $\phi_i$ має декілька літерлів $l_i = x_k$ або $l_i = \bar{x}_i$, які є позитивними. Кожна вершина $c_j$ може бути відвідана використовуючи ребра $(x_{k,2j-1}, c_j)$ або $(c_j, x_{k,2j})$ у першому випадку, і $(x_{k,2j}, c_j)$ і $(c_j, x_{k,2j-1})$ у другому випадку, оскільки шлях йде вправо на графі для позитивних змінних, і шлях йде вліво для негативних змінних. Тому $G_\phi$ має гамільтонів шлях, якщо $\phi$ задовільна.

І навпаки, припустимо, що $G_\phi$ має гамільтонів шлях $(s, t)$, позначимо його $P$. Зазначимо, що $G_\phi$ без clause vertices є гамільтоновим, тому нам потрібно показати, що шлях не "заламається"після відвідування clause vertex. Якщо більш формальніше: потрібно показати, що якщо $P$ відвідує $v_{i,2j-1}$, $c_j$, $v$ у відповідному порядку, тоді $v = v_{i,2i}$. Нехай $v \neq v_{i,2i}$. Тоді зазначимо, що єдиними вершинами, які входять в $v_{i,2j}$ є $v_{i,2j-1}$, $c_j$, $v_{i,2j+1}$, а виходять з нього лише $v_{i,2j-1}$ та $v_{i,2j+1}$. Тому $v_{i,2j}$ має бути відвідана з $v_{i,2j+1}$, але тепер шлях замається і не може продовжуватись, оскільки $v_{i,2j-1}$ вже відвідано. Аналогічний аргумент показує, що $P$ відвідує $v_{i,2j}$, $c_j$, $v$ у відповідному порядку, тому $v = v_{i,2j-1}$. Отже, гамільтонів шлях в $G_\phi$ відвідує вершини в порядку від $x_1$ до $x_n$, чергуючи clause vertices вершини між змінними , пов'язаними з тією самою змінною. Тому, значення змінних $x_i$ добре визначається, якщо помітити, у якому напрямку шлях йде через вершини $x_i$ у графі $G_\phi$. За побудовою це присвоєння буде задовільняти $\phi$, оскільки воно робити літерал у кожній clause позитивним. fix brackets bug

Зведення відбувається за $O(mn)$ час, який є поліномом довжини вхідних даних.

2. **HAM-CYCLE** $\epsilon$ $NP$?

Якщо довільна задача, належить класу $NP$, тоді, маючи «сертифікат», який є розв'язком зієї задачі та екземпляр проблеми (граф $G$ і додатне ціле $k$, у цьому випадку), ми зможемо верифікувати ( перевірити, чи надане рішення правильне чи ні) сертифікат за поліноміальний час. Сертифікат — це послідовність вершин, що утворюють гамільтонів цикл у графі. Ми можемо верифікувати розв'язок, перевіривши, що всі вершини належать графу, і, що кожна пара вершин, що належать розв'язку — суміжна.

Це можна зробити за поліноміальний час, тобто $O(V+E)$, ось псевдокод верифікації сертифікату для графу $G(V,E)$:

`value = 1` fix spacing

`для кожної пари` $\{u, v\}$ `у підмножині` $V$‘:

`перевірити, що між цими вершинами є ребро`

`якщо ребра немає, то повернути` $0$ `і завершити цикл`

```
якщо value = 1:
  то повернути 1 (розв'язок коректний)
інакше:
  повернути 0 (розв'язок неправильний)
```

3. **HAM-CYCLE** $NP$-складна?

Щоб довести, що **HAM-CYCLE** є $NP$-складною, ми повинні звести вже відому $NP$-складну задачу до даної. Побудуємо зведення від **D-HAM-PATH** до **HAM-CYCLE** . Кожен екземпляр задачі **D-HAM-PATH** містить граф $G = (V, E)$, який може бути конвертований в задачу **HAM-CYCLE** , яка містить граф $G' = (V', E')$. Граф $G$‘ будемо будвати таким чином:

1. $V$‘ $= V \cup \{v_{new}\}$, де $v_{new}$ - це додаткова вершина, яка поєднана ребрами з усіма вершинами графу $G$. $E_{new} = \{\, (v_{new},\, v_i) \,|\, \forall v_i \,\epsilon\, V\}$ - множина усіх ребер, що поєднують вершину $v_{new}$ з графом $G$.
2. $E$‘ $= E \cup E_{new}$
3. Припустимо, що граф $G$ містить гамільтонів шлях $P$, який починається у випадковій вершині, позначимо її як $v_{start}$ та закінчується у вершині $v_{end}$. Тепер, оскільки ми поєднали усі вершини з множини $V$ з вершиною $v_{new}$, ми можемо розширити гамільтонів шлях $P$ о гамільтонового циклу, використовуючи ребра $v_{end}\, v_{new}$ та $v_{new}\, v_{start}$ відповідно. Тепер граф $G$‘, який містить усі вершини рівно один раз.
4. Ми припускаємо, що граф $G$‘ містить гамільтонів цикл, який проходить через усі вершини, включаючи $v_{new}$. Тепер, щоб перетворити цей цикл на гамільтонів шлях, ми видаляємо усі ребра (у циклі), що містять вершину $v_{new}$. Отриманий шлях буде покривати усі вершини з множини $V$ і будуть робити це рівно один раз. (... рис 3 ...)

Тому ми можемо стверджувати, що граф $G'$ містить гамільтонів цикл, якщо граф $G$ містить гамільтонів шлях. Отже, довільний екземпляр задачі **HAM-CYCLE** зводить до екземпляру задачі **D-HAM-PATH** . З чого можна зробити висновок, що **HAM-CYCLE** є $NP$-складною.

Підсумовуючи все вище сказане, маємо, що **HAM-CYCLE** належить класу $NP$ і є $NP$-складною, тому можна зробити висновок, що **HAM-CYCLE** є $NP$-повною.

■

Тепер, довівши *Твердження 1*, можемо виконати фінальні викладки. Маємо, що **HAM-CYCLE** належить класу $NP$ та **NON-HAM-CYCLE** є доповненням задачі **HAM-CYCLE** , отже задача **NON-HAM-CYCLE** належить класу $coNP$. Також, врахувавши, що **HAM-CYCLE** є $NP$-повною, можна зробити висновок, що **NON-HAM-CYCLE** є $coNP$-повною.

# 4 Розв'язок

## 4.1 Наявні методи розв'язку

## 4.2 Наявні ефективні часткові розв'язки задачі та модифікацій

# 5 Список використаної літератури