Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"

Теорія складності

Дослідження $coNP$-повної задачі

Задача визначення того, чи даний граф не має циклу Гамільтона

ФІ-13 Дідух Максим

Фізико-технічний інститут

Кафедра математичних методів захисту інформації

2022

Дослідження $coNP$-повної задачі

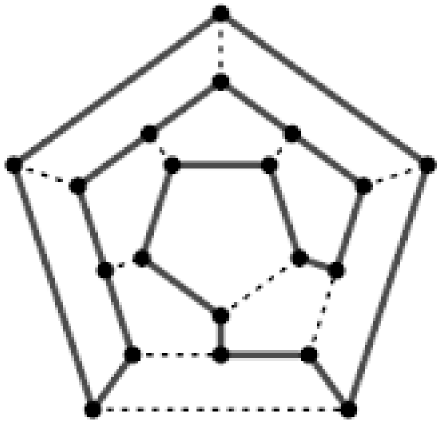
7 грудня 2022

Зміст

1 Вступ

Граф G називається *гамільтоновим*, якщо існує цикл, що містить кожну вершину рівно один раз. Такий цикл носить назву гамільтонового. Також слід зазначити, що існує поняття гамільтоновго шляху (це знадобиться при доведенні складності): граф G має *гамільтонів шлях* з вершини s у вершину t, якщо є марштрут між цими вершинами, який містить усі вершини рівно один раз.

Взагалі, це поняття пішло від Вільям Гамільтон (англ. *William Hamiltonian*), який вигадав не дуже вдалу гру під назвою "ікосіанська гра"(англ. *"icosian game"*), завданням якої був пошук гамільтонового циклу на додекаедричному графі (і можливо на його підграфах).



мал. 1 *гамільтоновий цикл на додекаедрі* change resolution

Хоча означення гамільтонового графу дуже схоже з означенням ойлерового графу, виявляється, що ці дві концепції поводяться досить по-різному. Якщо теорема Ойлера дає нам чіткий критерій ойлеровості, то для гамільтонових графів немає аналогічного твердження. Як з'ясувалось, перевірка графу на наявність гамільтонового циклу є NP-повною задачею.

1.1 Постановка задачі

Дано: неорієнтований граф $G = (V, E)$, де $V = \{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ - множина вершин, $E = \{e_1, e_2, \ldots v_k\}$ - множина ребер. Перевірити, що даний граф не має циклу гамільтона. Цю задачу будемо позначати **NON-HAM-CYCLE** .

1.2 Історія виникнення та наявні її модифікації

2 Практичне застосування

3 Доведення складності

Доведемо, що **NON-HAM-CYCLE** є $coNP$-повною. Для цього нам знадобиться довести додаткове твердження.

Твердження 1: задача перевірки графа на наявність гамільтонового циклу належить класу NP-повних задач (*далі:* **HAM-CYCLE**)

■

Спочатку покажемо, що задача перевірки орієнтованого графу на наявність гамільтоновго шляху з вершини s у вершину t (далі **D-HAM-PATH**) є NP-повною.

1. **D-HAM-PATH** $\in NP$-повна?

Нехай G - орієнтований граф. Ми можемо перевірити чи потенційний шлях $s \to \ldots \to t$ є гамільтоновим за поліноміальний час. Тепер спробуємо побудувати поліноміальне зведення **3SAT** $\leq_p$ **D-HAM-PATH** , щоб закінчити доведення повноти.

а точно 'множник'?

Нехай $\phi = \bigwedge_{i=1}^{m} \phi_i$ має n змінних і m множників. Щоб спростити доведення, припустимо, що жоден множник в ϕ не містить змінної x_i і її заперечення $\bar{x}_i$.

1. Спочатку, для кожної змінної x_i, ми генеруємо $2m + 1$ вершину з назвою $v_{i,j}$ і додаємо орієнтовані ребра ($v_{i,j}$, $v_{i,j+1}$) і ($v_{i,j+1}$, $v_{i,j}$), для $0 \leq j \leq 2m$.
2. Далі ми з'єднуємо вершини, пов'язані з різними змінними, додаючи чотири спрямовані ребра ($v_{i,0}$, $v_{i+1,0}$), ($v_{i,0}$, $v_{i+1,2m+1}$), ($v_{i,2m+1}$, $v_{i+1,0}$), ($v_{i,2m+1}$, $v_{i+1,2m+1}$).
3. Далі створюємо вершини під назвою c_j. Якщо x_i з'являється у множнику ϕ_j без доповнення, додаємо орієнтовані ребра ($v_{i,2j-1}$, c_j) та (c_j, $v_{i,2j}$). Інакше, якщо x_i міститься з доповненням, то додаємо орієнтовані ребра ($v_{i,2j}$, c_j) та (c_j, $v_{i,2j-1}$).
4. В кінці, ми додаємо дві додаткові вершини s і t. Після цього додаємо нові ребра (s, $v_{1,1}$), (s, $v_{1,2m+1}$), ($v_{n,1}$, t) та ($v_{n,2m+1}$, t). Граф згенерований G_ϕ (*див. рис.2*).

2. **HAM-CYCLE** ϵ NP?

Якщо довільна задача, належить класу NP, тоді, маючи «сертифікат», який є розв'язком зієї задачі та екземпляр проблеми (граф G і додатне ціле k, у цьому випадку), ми зможемо верифікувати (перевірити, чи надане рішення правильне чи ні) сертифікат за поліноміальний час. Сертифікат — це послідовність вершин, що утворюють гамільтонів цикл у графі. Ми можемо верифікувати розв'язок, перевіривши, що всі вершини належать графу, і, що кожна пара вершин, що належать розв'язку — суміжна.
Це можна зробити за поліноміальний час, тобто $O(V + E)$, ось псевдокод верифікації сертифікату для графу $G(V, E)$:

```
value = 1

для кожної пари {u, v} у підмножині V‘:

  перевірити, що між цими вершинами є ребро

  якщо ребра немає, то повернути 0 і завершити цикл

якщо value = 1:

  то повернути 1 (розв’язок коректний)

інакше:

  повернути 0 (розв’язок неправильний)
```

2. **HAM-CYCLE** NP-складна?

Щоб довести, що **HAM-CYCLE** є NP-складною, ми повинні звести добре відому NP-складну задачу до даної.

■

4 Розв'язок

4.1 Наявні методи розв'язку

4.2 Наявні ефективні часткові розв'язки задачі та модифікацій

5 Список використаної літератури