

Національний технічний університет України  
"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"

Теорія складності

Дослідження  $coNP$ -повної задачі

---

## Задача визначення того, чи даний граф не має циклу Гамільтона

---

ФІ-13 Дідух Максим

Фізико-технічний інститут

Кафедра математичних методів захисту інформації

2022

# Дослідження $coNP$ -повної задачі

7 грудня 2022

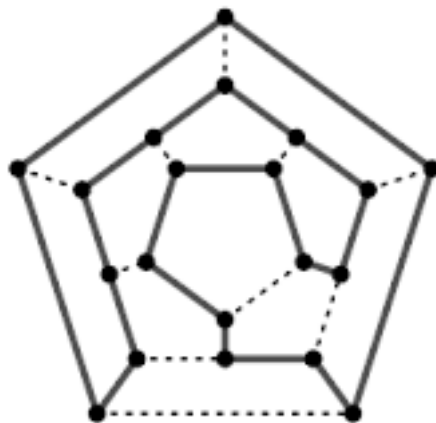
## Зміст

<b>1</b>	Вступ	2
1.1	Постановка задачі . . . . .	2
1.2	Історія виникнення та наявні модифікації . . . . .	2
<b>2</b>	Практичне застосування	2
<b>3</b>	Доведення складності	2
<b>4</b>	Розв'язок	4
4.1	Наявні методи розв'язку . . . . .	4
4.2	Наявні ефективні часткові розв'язки задачі та модифікацій . . . . .	4
<b>5</b>	Список використано літератури	4

# 1 Вступ

Граф  $G$  називається *гамільтоновим*, якщо існує цикл, що містить кожну вершину рівно один раз. Такий цикл носить назву гамільтонового. Також слід зазначити, що існує поняття гамільтоновго шляху (це знадобиться при доведенні складності): граф  $G$  має *гамільтонів шлях* з вершини  $s$  у вершину  $t$ , якщо є маршрут між цими вершинами, який містить усі вершини рівно один раз.

Взагалі, це поняття пішло від Вільям Гамільтон (англ. *William Hamiltonian*), який вигадав не дуже вдалу гру під назвою "ікосіанська гра"(англ. "*icosian game*"), завданням якої був пошук гамільтонового циклу на додекаедричному графі (і можливо на його підграфах).



мал. 1 гамільтоновий цикл на додекаедрі [change resolution](#)

Хоча означення гамільтонового графу дуже схоже з означенням ойлерового графу, виявляється, що ці дві концепції поводяться досить по-різному. Якщо теорема Ойлера дає нам чіткий критерій ойлеровості, то для гамільтонових графів немає аналогічного твердження. Як з'ясувалось, перевірка графу на наявність гамільтонового циклу є  $NP$ -повною задачею.

## 1.1 Постановка задачі

Дано: неорієнтований граф  $G = (V, E)$ , де  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  - множина вершин,  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  - множина ребер. Перевірити, що даний граф не має циклу гамільтона. Цю задачу будемо позначати **NON-HAM-CYCLE**.

## 1.2 Історія виникнення та наявні її модифікації

# 2 Практичне застосування

# 3 Доведення складності

Доведемо, що **NON-HAM-CYCLE** є  $coNP$ -повною. Для цього нам знадобиться довести додаткове твердження.

**Твердження 1:** задача перевірки графа на наявність гамільтонового циклу належить класу  $NP$ -повних задач (далі: **HAM-CYCLE**)

■

Спочатку покажемо, що задача перевірки орієнтованого графу на наявність гамільтоновго шляху з вершини  $s$  у вершину  $t$  (далі **D-HAM-PATH**) є  $NP$ -повною.

### 1. **D-HAM-PATH** є $NP$ -повна?

Нехай  $G$  — орієнтований граф. Ми можемо перевірити чи потенційний шлях  $s \rightarrow \dots \rightarrow t$  є гамільтоновим за поліноміальний час. Тепер спробуємо побудувати поліноміальне зведення  $3SAT \leq_p \text{D-HAM-PATH}$ , щоб закінчити доведення повноти.

[а точно 'множник'?](#)

Нехай  $\phi = \bigwedge_{i=1}^m \phi_i$  має  $n$  змінних і  $m$  множників. Щоб спростити доведення, припустимо, що жоден множник в  $\phi$  не містить змінної  $x_i$  і її заперечення  $\bar{x}_i$ .

1. Спочатку, для кожної змінної  $x_i$ , ми генеруємо  $2m + 1$  вершину з назвою  $v_{i,j}$  і додаємо орієнтовані ребра  $(v_{i,j}, v_{i,j+1})$  і  $(v_{i,j+1}, v_{i,j})$ , для  $0 \leq j \leq 2m$ .
2. Далі ми з'єднуємо вершини, пов'язані з різними змінними, додаючи чотири спрямовані ребра  $(v_{i,0}, v_{i+1,0})$ ,  $(v_{i,0}, v_{i+1,2m+1})$ ,  $(v_{i,2m+1}, v_{i+1,0})$  та  $(v_{i,2m+1}, v_{i+1,2m+1})$ .
3. Далі створюємо вершини під назвою  $c_j$ . Якщо  $x_i$  з'являється у множнику  $\phi_j$  без доповнення, додаємо орієнтовані ребра  $(v_{i,2j-1}, c_j)$  та  $(c_j, v_{i,2j})$ . Інакше, якщо  $x_i$  міститься з доповненням, то додаємо орієнтовані ребра  $(v_{i,2j}, c_j)$  та  $(c_j, v_{i,2j-1})$ .
4. В кінці, ми додаємо дві додаткові вершини  $s$  і  $t$ . Після цього додаємо нові ребра  $(s, v_{1,1})$ ,  $(s, v_{1,2m+1})$ ,  $(v_{n,1}, t)$  та  $(v_{n,2m+1}, t)$ . Граф згенерований  $G_\phi$  (див. рис.2). [add picture number2](#)

Тепер, треба показати, що  $\phi$  задовільна тоді та лише тоді, коли у графі  $G_\phi$  є гамільтонів шлях з  $s$  у  $t$ . Припустимо, що  $\phi$  - задовільна. Тоді ми можемо відвідати кожну вершину починаючи з  $s$  йдучи з  $v_{i,0}$  до  $v_{i,2m+1}$  з ліва на право, якщо  $x_i$  - позитивна, і з  $v_{i,2m+1}$  до  $v_{i,0}$  з права на ліво, якщо  $x_i$  - негативна, і закінчити в  $t$  після відвідування  $v_{n,0}$  або  $v_{n,2m+1}$ . Крім того, кожна 'clause' вершина може бути відвідана, згідно з припущенням, що кожна 'clause'  $\phi_i$  має декілька літерлів  $l_i = x_k$  або  $l_i = \bar{x}_i$ , які є позитивними. Кожна вершина  $c_j$  може бути відвідана використовуючи ребра  $(x_k, 2j-1, c_j)$  або  $(c_j, x_k, 2j)$  у першому випадку, і  $(x_k, 2j, c_j)$  і  $(c_j, x_k, 2j-1)$  у другому випадку, оскільки шлях йде вправо на графі для позитивних змінних, і шлях йде вліво для негативних змінних. Тому  $G_\phi$  має гамільтонів шлях, якщо  $\phi$  задовільна.

І навпаки, припустимо, що  $G_\phi$  має гамільтонів шлях  $(s, t)$ , позначимо його  $P$ . Зазначимо, що  $G_\phi$  без [clause vertices](#) є гамільтоновим, тому нам потрібно показати, що шлях не "заламається" після відвідування [clause vertex](#). Якщо більш формальніше: потрібно показати, що якщо  $P$  відвідує  $v_{i,2j-1}$ ,  $c_j$ ,  $v$  у відповідному порядку, тоді  $v = v_{i,2i}$ . Нехай  $v \neq v_{i,2i}$ . Тоді зазначимо, що єдиними вершинами, які входять в  $v_{i,2j}$  є  $v_{i,2j-1}$ ,  $c_j$ ,  $v_{i,2j+1}$ , а виходять з нього лише  $v_{i,2j-1}$  та  $v_{i,2j+1}$ . Тому  $v_{i,2j}$  має бути відвідана з  $v_{i,2j+1}$ , але тепер шлях замається і не може продовжуватись, оскільки  $v_{i,2j-1}$  вже відвідано. Аналогічний аргумент показує, що  $P$  відвідує  $v_{i,2j}$ ,  $c_j$ ,  $v$  у відповідному порядку, тому  $v = v_{i,2j-1}$ . Отже, гамільтонів шлях в  $G_\phi$  відвідує вершини в порядку від  $x_1$  до  $x_n$ , чергуючи [clause vertices](#) вершини між змінними, пов'язаними з тією самою змінною. Тому, значення змінних  $x_i$  добре визначається, якщо помітити, у якому напрямку шлях йде через вершини  $x_i$  у графі  $G_\phi$ . За побудовою це присвоєння буде задовільняти  $\phi$ , оскільки воно робить літерал у кожній [clause](#) позитивним.

Зведення відбувається за  $O(mn)$  час, який є поліномом довжини вхідних даних.

## 2. HAM-CYCLE $\in NP$ ?

Якщо довільна задача, належить класу  $NP$ , тоді, маючи «сертифікат», який є розв'язком цієї задачі та екземпляр проблеми (граф  $G$  і додатне ціле  $k$ , у цьому випадку), ми зможемо верифікувати (перевірити, чи надане рішення правильне чи ні) сертифікат за поліноміальний час. Сертифікат — це послідовність вершин, що утворюють гамільтонів цикл у графі. Ми можемо верифікувати розв'язок, перевіривши, що всі вершини належать графу, і, що кожна пара вершин, що належать розв'язку — суміжна.

Це можна зробити за поліноміальний час, тобто  $O(V + E)$ , ось псевдокод верифікації сертифікату для графу  $G(V, E)$ :

```
value = 1 fix spacing
```

для кожної пари  $\{u, v\}$  у підмножині  $V$ :

    перевірити, що між цими вершинами є ребро

    якщо ребра немає, то повернути 0 і завершити цикл

якщо `value = 1`:

то повернути 1 (розв'язок коректний)

інакше:

повернути 0 (розв'язок неправильний)

### 3. **HAM-CYCLE** $NP$ -складна?

Щоб довести, що **HAM-CYCLE** є  $NP$ -складною, ми повинні звести добре відому  $NP$ -складну задачу до даної.



## 4 Розв'язок

### 4.1 Наявні методи розв'язку

### 4.2 Наявні ефективні часткові розв'язки задачі та модифікацій

## 5 Список використаної літератури