Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"

Теорія складності

Дослідження $coNP$-повної задачі

Проблема негамільтоновго циклу

ФІ-13 Дідух Максим

Фізико-технічний інститут

Кафедра математичних методів захисту інформації

2022

Дослідження $coNP$-повної задачі

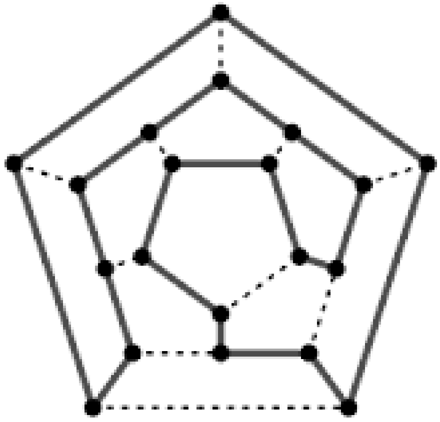
7 грудня 2022

Зміст

1 Вступ

Граф G називається *гамільтоновим*, якщо існує цикл, що містить кожну вершину рівно один раз. Такий цикл носить назву гамільтонового. Також слід зазначити, що існує поняття гамільтоновго шляху (це знадобиться при доведенні складності): граф G має *гамільтонів шлях* з вершини s у вершину t, якщо є марштрут між цими вершинами, який містить усі вершини рівно один раз.

Взагалі, це поняття пішло від Вільям Гамільтон (англ. *William Hamiltonian*), який вигадав не дуже вдалу гру під назвою "ікосіанська гра"(англ. *"icosian game"*), завданням якої був пошук гамільтонового циклу на додекаедричному графі (і можливо на його підграфах).



мал. 1 *гамільтоновий цикл на додекаедрі* change resolution

Хоча означення гамільтонового графу дуже схоже з означенням ойлерового графу, виявляється, що ці дві концепції поводяться досить по-різному. Якщо теорема Ойлера дає нам чіткий критерій ойлеровості, то для гамільтонових графів немає аналогічного твердження. Як з'ясувалось, перевірка графу на наявність гамільтонового циклу є NP-повною задачею.

1.1 Постановка задачі

Дано: неорієнтований граф $G = (V, E)$, де $V = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$ - множина вершин, $E = \{e_1, e_2, \dots v_k\}$ - множина ребер. Перевірити, що даний граф не має циклу гамільтона. Цю задачу будемо позначати **NON-HAM-CYCLE** .

1.2 Історія виникнення та наявні її модифікації

НЕ ПОДОБАЄТЬСЯ

Проблема негамільтонівського циклу, або **NON-HAM-CYCLE** — досить відома задача, яка виникає, коли граф містить цикли, які не містять усіх вершин графа. Вперше була сформульована у 1930 році математиком Карлом Менгером і з тих пір стала важливою областю досліджень у теорії графів.

Початкова мотивація Менгера для введення проблеми полягала в тому, щоб вирішити більш загальну проблему пошуку гамільтонового циклу в графі. Тобто шлях, який відвідує кожнну вершину на графі рівно один раз, перш ніж повернутися до початкової точки. Знайти гамільтонів цикл може бути дуже важко, і Менгер хотів знайти простішу версію проблеми, яка все ще мала цікаві властивості.

Він вигадав ідею негамільтонових циклів, які є циклами, які не містять усіх вузлів на графі. Ці цикли все ще можуть містити деякі з вузлів, але не всі з них. Наприклад, трикутний графік матиме гамільтонів цикл (1-2-3-1), але також і негамільтонів цикл (1-2-1).

Спостереження Менгера відкрили цілу нову область дослідження теорії графів, у якій науковці досліджували властивості, алгоритми та застосування негамільтонових циклів. Однією з головних тем цього дослідження було визначення мінімальної кількості негамільтонових циклів, які можуть існувати в графі. Ця робота призвела до розробки проблеми комівояжера, яка передбачає пошук найкоротшого маршруту між набором міст.

Проблема негамільтонового циклу також використовувалася для моделювання комп'ютерних мереж, генетичних алгоритмів і роботизованої навігації. Проблема продовжує бути активною областю досліджень і продовжує генерувати нові ідеї в теорії графів.

2 Практичне застосування

3 Доведення складності

Доведемо, що **NON-HAM-CYCLE** є $coNP$-повною. Для цього нам знадобиться довести додаткове твердження.

Твердження 1: задача перевірки графа на наявність гамільтонового циклу належить класу NP-повних задач (*далі:* **HAM-CYCLE**)

■

Спочатку покажемо, що задача перевірки орієнтованого графу на наявність гамільтоновго шляху з вершини s у вершину t (далі **D-HAM-PATH**) є NP-повною.

1. **D-HAM-PATH** ϵ NP-повна?

Нехай G — орієнтований граф. Ми можемо перевірити чи потенційний шлях $s \to \ldots \to t$ є гамільтоновим за поліноміальний час. Тепер спробуємо побудувати поліноміальне зведення **3SAT** $\leq_p$ **D-HAM-PATH** , щоб закінчити доведення повноти.

а точно 'множник'?

Нехай $\phi = \bigwedge_{i=1}^{m} \phi_i$ має n змінних і m множників. Щоб спростити доведення, припустимо, що жоден множник в ϕ не містить змінної x_i і її заперечення $\bar{x}_i$.

1. Спочатку, для кожної змінної x_i, ми генеруємо $2m+1$ вершину з назвою $v_{i,j}$ і додаємо орієнтовані ребра $(v_{i,j}, v_{i,j+1})$ і $(v_{i,j+1}, v_{i,j})$, для $0 \leq j \leq 2m$.

2. Далі ми з'єднуємо вершини, пов'язані з різними змінними, додаючи чотири спрямовані ребра $(v_{i,0}, v_{i+1,0})$, $(v_{i,0}, v_{i+1,2m+1})$, $(v_{i,2m+1}, v_{i+1,0})$ та $(v_{i,2m+1}, v_{i+1,2m+1})$.

3. Далі створюємо вершини під назвою c_j. Якщо x_i з'являється у множнику ϕ_j без доповнення, додаємо орієнтовані ребра $(v_{i,2j-1}, c_j)$ та $(c_j, v_{i,2j})$. Інакше, якщо x_i міститься з доповненням, то додаємо орієнтовані ребра $(v_{i,2j}, c_j)$ та $(c_j, v_{i,2j-1})$.

4. В кінці, ми додаємо дві додаткові вершини s і t. Після цього додаємо нові ребра $(s, v_{1,1})$, $(s, v_{1,2m+1})$, $(v_{n,1}, t)$ та $(v_{n,2m+1}, t)$. Граф згенерований G_ϕ (*див. рис.2*). add picture number2

Тепер, треба показати, що ϕ задовільна тоді та лише тоді, коли у графі G_ϕ є гамільтонів шлях з s у t. Припустимо, що ϕ - задовільна. Тоді ми можемо відвідати кожну вершину починаючи з s йдучи з $v_{i,0}$ до $v_{i,2m+1}$ з ліва на право, якщо x_i - позитивна, і з $v_{i,2m+1}$ до $v_{i,0}$ з права на ліво, якщо x_i - негативна, і закінчити в t після відвідування $v_{n,0}$ або $v_{n,2m+1}$. Крім того, кожна 'clause' вершина може бути відвідана, згідно з припущенням, що кожна 'clause' ϕ_i має декілька літерлів $l_i = x_k$ або $l_i = \bar{x}_i$, які є позитивними. Кожна вершина c_j може бути відвідана використовуючи ребра $(x_{k,2j-1}, c_j)$ або $(c_j, x_{k,2j})$ у першому випадку, і $(x_{k,2j}, c_j)$ і $(c_j, x_{k,2j-1})$ у другому випадку, оскільки шлях йде вправо на графі для позитивних змінних, і шлях йде вліво для негативних змінних. Тому G_ϕ має гамільтонів шлях, якщо ϕ задовільна.

І навпаки, припустимо, що G_ϕ має гамільтонів шлях (s, t), позначимо його P. Зазначимо, що G_ϕ без clause vertices є гамільтоновим, тому нам потрібно показати, що шлях не "заламається"після відвідування clause vertex. Якщо більш формальніше: потрібно показати, що якщо P відвідує $v_{i,2j-1}$, c_j, v у відповідному порядку, тоді $v = v_{i,2i}$. Нехай $v \neq v_{i,2i}$. Тоді зазначимо, що єдиними вершинами, які входять в $v_{i,2j}$ є $v_{i,2j-1}$, c_j, $v_{i,2j+1}$, а виходять з нього лише $v_{i,2j-1}$ та $v_{i,2j+1}$. Тому $v_{i,2j}$ має бути відвідана з $v_{i,2j+1}$, але тепер шлях замається і не може продовжуватись, оскільки $v_{i,2j-1}$ вже відвідано. Аналогічний аргумент показує, що P відвідує $v_{i,2j}$, c_j, v у відповідному порядку, тому $v = v_{i,2j-1}$. Отже, гамільтонів шлях в G_ϕ відвідує вершини в порядку від x_1 до x_n, чергуючи clause vertices вершини між змінними , пов'язаними з тією самою змінною. Тому, значення змінних x_i добре визначається, якщо помітити, у якому напрямку шлях йде через вершини x_i у графі G_ϕ. За побудовою це присвоєння буде задовільняти ϕ, оскільки воно робити літерал у кожній clause позитивним. fix brackets bug

Зведення відбувається за $O(mn)$ час, який є поліномом довжини вхідних даних.

2. **HAM-CYCLE** ϵ NP?

Якщо довільна задача, належить класу NP, тоді, маючи «сертифікат», який є розв'язком зіеї задачі та екземпляр проблеми (граф G і додатне ціле k, у цьому випадку), ми зможемо верифікувати (перевірити, чи надане рішення правильне чи ні) сертифікат за поліноміальний час. Сертифікат — це послідовність вершин, що утворюють гамільтонів цикл у графі. Ми можемо верифікувати розв'язок, перевіривши, що всі вершини належать графу, і, що кожна пара вершин, що належать розв'язку — суміжна.

Це можна зробити за поліноміальний час, тобто $O(V + E)$, ось псевдокод верифікації сертифікату для графу $G(V, E)$:

```
value = 1 fix spacing

для кожної пари {u, v} у підмножині V‘:

  перевірити, що між цими вершинами є ребро

  якщо ребра немає, то повернути 0 і завершити цикл

якщо value = 1:

  то повернути 1 (розв'язок коректний)

інакше:

  повернути 0 (розв'язок неправильний)
```

3. **HAM-CYCLE** NP-складна?

Щоб довести, що **HAM-CYCLE** є NP-складною, ми повинні звести вже відому NP-складну задачу до даної. Побудуємо зведення від **D-HAM-PATH** до **HAM-CYCLE** . Кожен екземпляр задачі **D-HAM-PATH** містить граф $G = (V, E)$, який може бути конвертований в задачу **HAM-CYCLE** , яка містить граф $G' = (V', E')$. Граф G‘ будемо будвати таким чином:

1. $V‘ = V \cup \{v_{new}\}$, де v_{new} - це додаткова вершина, яка поєднана ребрами з усіма вершинами графу G. $E_{new} = \{\,(v_{new},\, v_i)\,|\,\forall v_i \,\epsilon\, V\}$ - множина усіх ребер, що поєднують вершину v_{new} з графом G.

2. $E‘ = E \cup E_{new}$

3. Припустимо, що граф G містить гамільтонів шлях P, який починається у випадковій вершині, позначимо її як v_{start} та закінчується у вершині v_{end}. Тепер, оскільки ми поєднали усі вершини з множини V з вершиною v_{new}, ми можемо розширити гамільтонів шлях P о гамільтонового циклу, використовуючи ребра $v_{end}\,v_{new}$ та $v_{new}\,v_{start}$ відповідно. Тепер граф G‘, який містить усі вершини рівно один раз.

4. Ми припускаємо, що граф G‘ містить гамільтонів цикл, який проходить через усі вершини, включаючи v_{new}. Тепер, щоб перетворити цей цикл на гамільтонів шлях, ми видаляємо усі ребра (у циклі), що містять вершину v_{new}. Отриманий шлях буде покривати усі вершини з множини V і будуть робити це рівно один раз. (... рис 3 ...)

Тому ми можемо стверджувати, що граф G' містить гамільтонів цикл, якщо граф G містить гамільтонів шлях. Отже, довільний екземпляр задачі **HAM-CYCLE** зводить до екземпляру задачі **D-HAM-PATH** . З чого можна зробити висновок, що **HAM-CYCLE** є NP-складною.

Підсумовуючи все вище сказане, маємо, що **HAM-CYCLE** належить класу NP і є NP-складною, тому можна зробити висновок, що **HAM-CYCLE** є NP-повною.

■

Тепер, довівши *Твердження 1*, можемо виконати фінальні викладки. Маємо, що **HAM-CYCLE** належить класу NP та **NON-HAM-CYCLE** є доповненням задачі **HAM-CYCLE** , отже задача **NON-HAM-CYCLE** належить класу $coNP$. Також, врахувавши, що **HAM-CYCLE** є NP-повною, можна зробити висновок, що **NON-HAM-CYCLE** є $coNP$-повною.

4 Розв'язок

4.1 Наявні методи розв'язку

4.2 Наявні ефективні часткові розв'язки задачі та модифікацій

5 Список використаної літератури

чи доречно лишати лінки?

Література

[1] Adrian She, *Hamiltonian Path is NP-Complete*, 2020.

[2] джерело 1

[3] джерело 2