Revisão e Notas sobre Vetores

Pedro Rupf Pereira Viana

7 de novembro de 2025

1 Introdução e Objetivos

Trata-se de uma revisão teórica e expositiva sobre vetores e suas definições fundamentais no plano cartesiano, e suas aplicações na matemática, física e na programação.

2 Desenvolvimento

Consideremos o plano cartesiano em um sistema de coordenadas em $\mathbb{R}^2$, formado por um par de retas ortogonais. Fixada uma unidade de comprimento, qualquer ponto P do plano pode ser identificado pelo par ordenado $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, onde a é a abscissa e b é a ordenada.

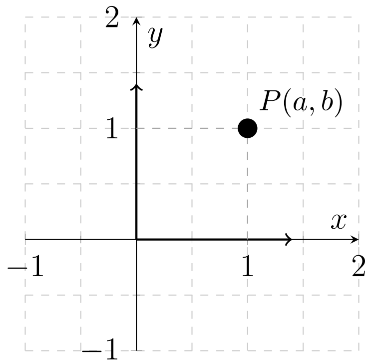

Figura 1: Representação do ponto $P(a, b)$ no primeiro quadrante do plano cartesiano.

Desta forma, dados dois pontos P e Q do plano, adotando $Q(0, 0)$ (isto é, a origem do plano cartesiano), podemos considerar que o segmento de reta $\overrightarrow{QP}$, com ponto inicial Q e ponto final P. Note que embora como conjunto de pontos os segmentos $\overrightarrow{QP}$ e $\overrightarrow{PQ}$ sejam iguais, como segmentos orientados eles são distintos, onde chamamos estes vetores de segmentos opostos.

Passemos a considerar, à partir de agora, apenas segmentos orientados com ponto inicial na origem, denominados *vetores no plano*. É importante notar que vetores no plano são determinados exclusivamente pelo seu ponto final, pois o ponto inicial é fixo na origem. Assim, para cada ponto no plano $P(a, b)$, está associado um único vetor $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$. Usando esta correspondência entre pontos e vetores, podemos representar o vetor $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ pela identificação $\mathbf{v} = (1, 3)$, ou ainda pela notação matriz-coluna $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Observe que, deste modo, à origem do plano, ficará associado um vetor que têm os pontos inicial e final coincidentes com esta. Denominaremos este vetor (que, na verdade, é apenas um ponto) de *vetor nulo*, sendo representado por $(0, 0)$.

O oposto de um vetor $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ é o vetor $\mathbf{w} = \overrightarrow{OQ}$, que possui o mesmo comprimento que $\mathbf{v}$, porém com direção oposta. Em termos de coordenadas, se $\mathbf{v} = (a, b)$, então $\mathbf{w} = (-a, -b)$ e, por essa razão, denota-se que $\mathbf{w} = -\mathbf{v}$.

2.1 Operações com vetores no plano

2.1.1 Multiplicação de um vetor por um número

Multiplicar um vetor $\mathbf{v}$ por um número real $k > 0$ é considerar um novo vetor $k\mathbf{w} = kv$, que possui a mesma direção de $\mathbf{v}$ e têm como comprimento k vezes o comprimento de

$\mathbf{v}$. Se $k < 0$, o vetor $\mathbf{w} = kv$ terá direção oposta à de $\mathbf{v}$ e comprimento $|k|$ vezes o comprimento de $\mathbf{v}$. Se $k = 0$, o vetor resultante $\mathbf{w} = kv$ será o vetor nulo.

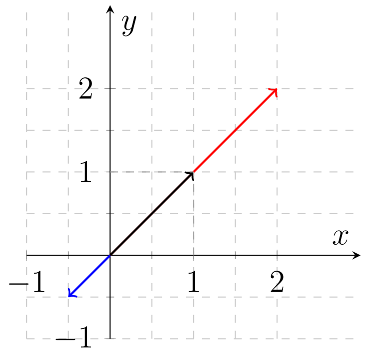

Figura 2: Representação dos vetores $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} = 2\mathbf{v}$, e $\mathbf{t} = -0.5\mathbf{v}$ no plano cartesiano.

2.1.2 Adição de dois vetores

Para introduzir a soma de dois vetores, consideremos um exemplo de duas forças atuando sobre um corpo, representadas pelos vetores $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$, conforme podemos ver na Figura 3 abaixo:

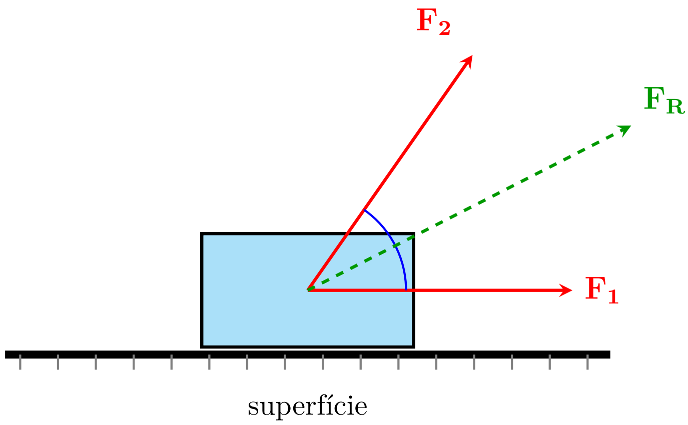

Figura 3: Bloco sobre uma superfície sujeito a duas forças: $\mathbf{F_1}$ paralela ao plano e $\mathbf{F_2}$ formando ângulo $\alpha < 90°$ com $\mathbf{F_1}$. A força resultante $\mathbf{F_R}$ é obtida pela regra do paralelogramo.

Uma força que atua num ponto pode ser representada por um vetor, de comprimento igual à intensidade da força, com a mesma direção e sentido desta força. Supondo agora que as duas forças $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$, representadas na FIgura 3, atuem simultaneamente sobre o corpo apresentado nesta mesma figura. Podemos representar o resultado destas duas forças por uma única força $\mathbf{F_R}$?

Ora, podemos representar que a força resultante $\mathbf{F_R}$ é obtida pelo vetor diagonal do paralelogramo construído a partir dos vetores $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$, chamando esta operação de soma de vetores, onde escrevemos $\mathbf{F_R} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2}$. De acordo com a Figura 4 abaixo, temos que $\vec{R} = \vec{v} + \vec{u}$.

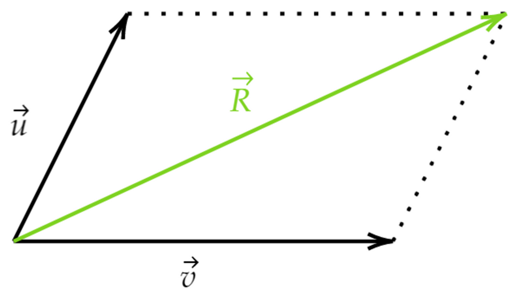

Figura 4: Regra do paralelogramo aplicada à soma de vetores.

2.1.3 Vetores no espaço

Da mesma forma que é definido vetores em um espaço em $\mathbb{R}^2$, podemos definir vetores em um espaço tridimensional, ou seja, em $\mathbb{R}^3$. Neste caso, um ponto P do espaço é identificado por um triplo ordenado (a, b, c), onde temos um sistema de coordenadas formado por três retas ortogonais entre si. Assim, um vetor são dados por um segmento orientado com ponto inicial na origem e ponto final em $P(a, b, c)$, representado por $\mathbf{v} = (a, b, c)$.

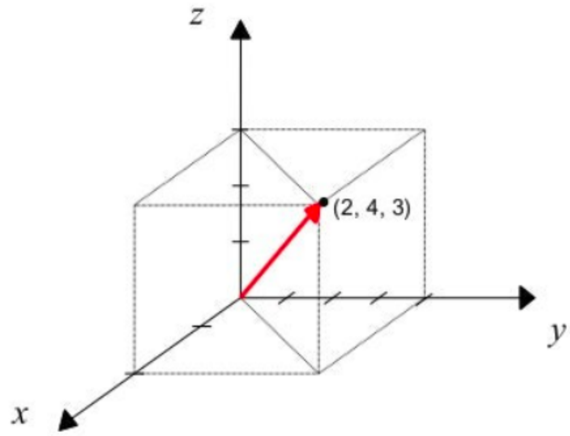

Figura 5: Vetor genérico $\mathbf{v} = (2, 4, 3)$, representado no espaço em $\mathbb{R}^3$.

2.1.4 Operações com vetores no espaço

A soma de dois vetores, e o produto de um vetor por um número real k em $\mathbb{R}^3$ também são da mesma forma que no plano. Isto é, se $\mathbf{u} = (x_1 + x_2 + x_3)$ e $\mathbf{w} = (y_1 + y_2 + y_3)$, então a soma dos vetores é dada por:

$$\mathbf{u} + \mathbf{w} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \tag{2.1}$$

$$k\mathbf{u} = (kx_1, kx_2, kx_3) \tag{2.2}$$

Por exemplo, se $\mathbf{u} = (2, -3, 5)$ e $\mathbf{v} = (1, 2, 0)$, então $\mathbf{u} + \mathbf{w} = (3, -1, 5)$, e $2\mathbf{u} = (4, -6, 10)$.

Como já observamos no caso do plano, estas operações correspondem exatamente às respectivas operações das matrizes linha que representam os vetores, e gozam de uma série de propriedades decorrentes daquelas relativas às operações com números reais.

2.1.5 Propriedades vetoriais

- $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$
- $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$
- Existe $\mathbf{0}\in V$ tal que $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$
- Existe $-\mathbf{u}\in V$ tal que $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$
- $a(\mathbf{u}+\mathbf{v})=a\mathbf{u}+a\mathbf{v}$
- $(a+b)\mathbf{v}=a\mathbf{v}+b\mathbf{v}$
- $(ab)\mathbf{v}=a(b\mathbf{v})$
- $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$

3 Ok...e onde isso se aplica na programação?

Um **vetor** é uma estrutura de dados que armazena uma coleção **ordenada** de elementos do mesmo tipo (ou tipos compatíveis), acessíveis por meio de um **índice numérico**. Em termos matemáticos, um vetor é uma grandeza com magnitude e direção; na programação, ele representa uma **sequência indexada** de valores.

Em linguagens de baixo nível como C ou C++, vetores são implementados como **arrays** estáticos (tamanho fixo na memória). Em C# e em Python, o conceito de vetor é mais flexível e geralmente representado por **Lists** (ou Arrays, no caso do C#), ou também por Lists e pela biblioteca **NumPy** (que oferece verdadeiros arrays n-dimensionais otimizados).

3.1

Cabeçalho 1	Cabeçalho 2	Cabeçalho 3
Valor 1	Valor 2	Valor 3
Valor 4	Valor 5	Valor 6
Valor 7	Valor 8	Valor 9
Valor 10	Valor 11	Valor 12
Valor 13	Valor 14	Valor 15
Valor 16	Valor 17	Valor 18

Tabela 1: Exemplo de Tabela 6x3

```python
vetor_lista = [10, 20, 30, 40, 50]

# Acesso por indice
print(f"Primeiro elemento: {vetor_lista[0]}")
print(f"Ultimo elemento: {vetor_lista[-1]}")

# Modificacao
vetor_lista[2] = 999
print(f"Vetor modificado: {vetor_lista}")

```

```python
# Soma manual
soma = sum(vetor_lista)
print(f"Soma (funcao sum): {soma}")

# Multiplicacao por escalar (list comprehension)
vetor_dobrado = [x * 2 for x in vetor_lista]
print(f"Vetor dobrado: {vetor_dobrado}")
```

Listing 1: Uso de list como vetor em Python