

# Інтергал Рімана

1.  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

Розіб'ємо  $[a, b]$  на  $n$  частин точками  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

*def*: Розбиттям  $[a, b]$  називають сукупність  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ .

*def*: Сукупність проміжних точок – множина  $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ , де  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ .

*def*: Діаметр розбиття -  $\text{diam}(P) = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$ .

*def*: Інтегральна сума -  $S_p(f, \xi) = \sum_{i=1}^n \Delta x_i f(\xi_i)$  для функції  $f$ , що побудована за розбиття  $P$  і сукупністю проміжних точок  $\xi$ .

2. *def*: Інтеграл за Ріманом – число  $I$  називають інтегралом за Ріманом від функції  $f$  на  $[a, b]$ , якщо  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \text{diam}(P) < \delta \rightarrow \forall \xi |S_p(f, \xi) - I| < \varepsilon$ .

3. *let*: Необхідна умова інтегровності – Якщо  $f$  інтегровна за Ріманом, то  $f$  обмежена на  $[a, b]$ , бо якщо  $f$  необмежена, то  $\forall n \exists y_n: f(y_n) > n$ .

$$y_n \rightarrow y$$

$$\text{Тоді при даному } \xi \ S_p(f, \xi) \rightarrow \infty$$

4. Суми Дарбу.

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}.$$

*def*: Верхня сума Дарбу:  $\overline{S}_p(f) = \sum M_i(x_{i+1} - x_i)$ ,  $M_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$ .

*def*: Нижня сума Дарбу:  $\underline{S}_p(f) = \sum m_i(x_{i+1} - x_i)$ ,  $m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$ .

$$\underline{S}_p(f) \leq S_p(\xi) \leq \overline{S}_p(f)$$

5. Продовження розбиття.

$P$  цього \* сегмента  $[a, b]p^*$ , де  $p^* \supset p$

*def*:  $P$  є спільним для  $P_1$  і  $P_2$ , якщо  $P = P_1 \cup P_2$ .

6. *let*: Інтегральні суми Дарбу та продовжені розбиття.

Якщо  $p^*$  продовження розбиття, то  $\underline{S}_p(f) \leq \underline{S}_{p^*}(f)$  і  $\overline{S}_p(f) \geq \overline{S}_{p^*}(f)$ .

*proof*:

$$\exists p - \text{деяке розбиття}, P_1 = P \cup \{x\}$$

$$\overline{S}_{p_1}(f) = \sum_{k=1}^m M_k \Delta x_k + M_{m+1} \Delta x_m + \sum_{k=m+2}^n m_k \Delta x_k$$

$$\text{де } M_{m+1} \Delta x_m = \sup_{[x_m, x^*]} f(x)(x^* - x_m) + \sup_{[x^*, x_{m+1}]} f(x)(x_{m+1} - x^*)$$

$$A \subset B \Rightarrow \sup_A f \leq \sup_B f$$

$$\sup f(x)(x^* - x_m) + \sup f(x)(x_{m+1} - x^*) \leq M_{m+1}(x_{m+1} - x^*)$$

$$\overline{S_p} \geq \overline{S_{p_1}}$$

7. *lem*: Нерівність між інтегральними сумами Дарбу.

$$\forall p_1, p_2 - \text{розбиття} \Rightarrow \underline{S_{p_1}}(f) \leq \overline{S_{p_2}}(f)$$

*prove*:

*HP*- спільне розбиття:

$$\underline{S_{p_1}}(f) \leq \underline{S_p}(f) \leq \overline{S_p}(f) \leq \overline{S_{p_2}}(f)$$

8. Інтегровність за Дарбу та її зв'язок з інтегровністю за Ріманом

$$\text{def: Верхній інтеграл Дарбу} - \inf \overline{S_p}(f) = \overline{\int f dx}$$

$$\text{def: Нижній інтеграл Дарбу} - \sup \underline{S_p}(f) = \underline{\int f dx}$$

$$\text{def: Функція } f \text{ називається інтегровою за Дарбу, якщо } \overline{\int f dx} = \underline{\int f dx}$$

*theo*: Критерій інтегровності за Дарбу:

$$f \text{ є інтегровою за Дарбу} \stackrel{\text{theo}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \exists p: \left| \overline{S_p}(f) - \underline{S_p}(f) \right| < \varepsilon.$$

*theo*: (Еквівалентності):

Функція інтегровна за Дарбу  $\stackrel{\text{theo}}{\iff}$  вона інтегровна за Ріманом і їх інтеграли співпадають.

9. Множини лебегової міри нуль

*def*: Множина  $A \subset \mathbb{R}$  має лебегову міру нуль, якщо  $\forall \varepsilon > 0 \exists (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2) \dots$  не більш ніж зліченна кількість.

$$1) A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (\alpha_i, \beta_i)$$

$$2) \sum \beta_i - \alpha_i < \varepsilon$$

10. Властивості множин лебегової міри нуль

→ Якщо  $A$  зліченна або скінченна  $\implies A$  – має міру нуль.

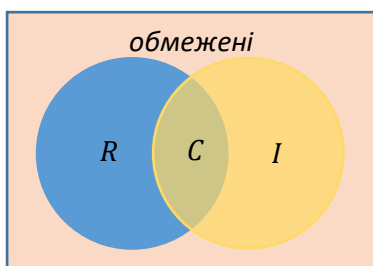
→ Якщо  $\exists (\alpha, \beta) \subset A \implies A$  – не є множиною міри нуль.

→ Незліченна (континуальна) множина теж може мати міру нуль.

→ Якщо  $A_1, A_2, \dots$  мають міру нуль, то і  $\bigcup A_i$  має міру нуль.

11. *theo*: Критерій Лебега інтегровності за Ріманом.

$\chi f$  – обмежена на  $[a, b]$ , тоді  $f \in R([a, b]) \stackrel{theo}{\iff}$  Множина точок розриву функції  $f$  на  $[a, b]$  має міру нуль.



12. Найпростіші наслідки ( $|f|, fg, \alpha f + \beta g$ )

$$\rightarrow f, g \in R([a, b]) \Rightarrow f \cdot g \in R([a, b]).$$

$$\rightarrow f \in R([a, b]) \Rightarrow |f| \in R([a, b]).$$

$$\rightarrow f, g \in R([a, b]) \Rightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \alpha f + \beta g \in R([a, b]).$$

$$\rightarrow f \in R([a, b]), g \in C(E_f) \Rightarrow g(f(x)) \in R([a, b]).$$

13. *theo*: Лінійність інтегралу Рімана

Якщо  $f, g \in R([a, b])$ , то

$$\alpha, \beta: (\alpha f + \beta g) \in R([a, b]) \Rightarrow \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

*prove*: за інтегралом суми.

14. *theo*: Адитивність за проміжком інтегрування

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx, b \in [a, c]$$

15. *theo*: Інтеграл Рімана від нерівних функцій

$$\chi \forall x \in [a, b]: f(x) \leq g(x); f, g \in R([a, b]) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

16. Наслідки

$$\rightarrow \text{Якщо } f \in R([a, b]) \text{ і } \forall x \in [a, b]: f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

$\rightarrow$  Інтеграл Рімана.

$$cons: f \in R([a, b]), \forall x \in [a, b]: f(x) \geq 0$$

$$\exists x_0 \in (a, b): f(x_0) > 0, \text{ то } \int_a^b f(x) dx > 0$$

$$prove: \chi y_0 = f(x_0)$$

$$\text{Розглянемо } \varepsilon = \frac{1}{2} y_0. \text{ Тоді } \exists \delta > 0: \forall x: |x - x_0| < \delta: |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

$$\text{Тобто } -\varepsilon < f(x) - f(x_0) < \varepsilon$$

$$f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon = y_0 - \varepsilon = y_0 - \frac{1}{2} y_0 = \frac{1}{2} y_0.$$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_a^{x_0-\delta} f(x)dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx + \int_{x_0+\delta}^b f(x)dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx \geq \\ &\geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} (y_0 - \varepsilon)dx = 2\delta(y_0 - \varepsilon) > 0\end{aligned}$$

→ Модуль.

cons: Якщо  $f \in R([a, b])$ , то  $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ .

prove: З пункту 7:  $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|, x \in [a, b]$

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

$$-a \leq b \leq a \Rightarrow |b| \leq a$$

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

17. *theo*: Перша про середнє

$\mathcal{N} f, g \in R([a, b])$  і  $|f| < M \quad \forall x \in [a, b]$ .

$g$  – не змінює знак на  $[a, b]$

$$\stackrel{theo}{\implies} \exists c \in (-M, M): \int_a^b f(x)g(x)dx = c \int_a^b g(x)dx$$

prove: Будемо вважати, що  $\forall x \in [a, b]: g(x) \geq 0$

$$\text{Тоді } -Mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$$

$$\text{Отже } -M \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx$$

$$-M \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M, \quad c \in [-M, M]$$

||

c

18. *theo*: Перша про середнє для неперервної функції

Якщо  $f \in C([a, b]) \stackrel{theo}{\implies} \exists \xi \in [a, b]$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$$

19. Інтеграл як функція верхньої межі

$$f \in R([a, b]) \stackrel{def}{\implies} \int_a^t f(x)dx = \phi(t), \quad t \in [a, b], \quad \phi(a) = 0.$$

20. *theo*: Неперервність інтегралу як функції верхньої межі

$$\phi(t) \in C([a, b]).$$

*proove*:  $\forall t_n \rightarrow t \in [a, b]$

Треба довести, що  $\phi(t_n) \rightarrow \phi(t)$

$$\int_a^{t_n} f(x)dx - \int_a^t f(x)dx = \int_t^{t_n} f(x)dx$$

Оскільки  $f \in R([a, b])$ , то  $f$  має бути обмеженою

$$\Rightarrow \exists M: \forall x \in [a, b]: |f(x)| < M$$

$$\left| \int_t^{t_n} f(x)dx \right| \leq \int_t^{t_n} |f(x)|dx \leq \int_t^{t_n} Mdx = M(t_n - t) \rightarrow 0$$

21. Диференційовність інтегралу як функції верхньої межі

$$f \in C(\{x_0\}), x_0 \in [a, b] \xrightarrow{theo} \phi \in D(\{x_0\})$$

*proove*:  $\phi'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{x - x_0}$ , треба довести, що ця границя існує.

$$\boxed{\phi'(x_0) = f(x_0)}$$

$$\text{Доведемо, що } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$$

$$\frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x - x_0} \left( \int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt \right) - f(x_0) =$$

$$= \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t)dt - \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(x_0)dt = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) - f(x_0)dt$$

$$f \in C(\{x_0\}) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0: \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Зафіксуємо  $\varepsilon > 0$ . Оберемо  $x$  так, що  $|x - x_0| < \delta \quad t \in [x_0, x] \Rightarrow t \in (x_0, x_0 + \delta)$

$$\frac{1}{x - x_0} \left| \int_{x_0}^x f(t) - f(x_0)dx \right| \leq \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|dx \leq \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x \varepsilon dx = \varepsilon$$

$$\frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t)dt - f(x_0) \rightarrow 0$$

22. Формула Ньютона-Лейбніца

Якщо  $f \in R([a, b])$  і множина точок розриву не більш ніж зліченна,  $F$  – будь-яка первісна функції  $f$  на  $[a, b]$ , тоді справедлива рівність:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$

23. Інтегрування частинами

$$[a, b] \xrightarrow{fg} \mathbb{R} \quad f, g \in C'([a, b]) \Rightarrow \int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

24. *theo*: Заміна змінної

$$X \left\{ \begin{array}{l} f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ f \in C([a, b]) \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi \in [a, b] \\ \varphi: [\alpha, \beta] \leftrightarrow [a, b] \\ \varphi \in D([a, b]) \\ \varphi' \in R([a, b]) \end{array} \right\} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$$

25. Адитивна функція проміжку

$$\phi: \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall a, b \forall c \in [a, b] \xRightarrow{def} \phi([a, b]) = \phi([a, c]) + \phi([c, b])$$

26. *theo*: Зв'язок адитивної функції проміжку та інтегралу Рімана

$$\left. \begin{array}{l} \text{Якщо } f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ і } f \in R([a, b]) \\ \text{і адитивна функція проміжку } \phi \text{ на } [a, b], \forall \alpha, \beta \in [a, b] \\ \inf_{x \in [a, b]} f(x)(b-a) \leq \phi([\alpha, \beta]) \leq \sup_{x \in [a, b]} f(x)(\beta-\alpha) \end{array} \right| \xRightarrow{theo} \phi([\alpha, \beta]) = \int_\alpha^\beta f(x)dx$$

*prove*: Розглянемо  $\forall$  розбиття  $P$  на відрізки  $[a, b]$ .

$$\forall i = \overline{0, n-1}: \quad \inf_{x_i, x_{i+1}} f(x)(x_{i+1} - x_i) \leq \phi([x_i, x_{i+1}]) \leq \sup_{x_i, x_{i+1}} f(x)(x_{i+1} - x_i)$$

$$\forall p: \quad S_p(f) \text{ і } S_p(f) \rightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ з чого і слідує шукане твердження.}$$

27. Формула площі криволінійної трапеції

$$S = S([a, b]) = \int_a^b f(x)dx$$

28. Формула площі криволінійного сектору в полярних координатах.

$$\phi([\alpha, \beta]) = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$$

29. Довжина шляху простої кривої (явно заданої, параметрично заданої)

$$\text{Параметрично задана: } x = x(t), \quad y = y(t): \quad l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

$$\text{Явно задана: } l = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

30. Площа фігури, що обмежена параметрично заданою кривою

$$S = \int_a^b y'(t)x(t)dt = - \int_a^b y(t)x'(t)dt$$

31. Об'єм тіла обертання

$$V = \int_a^b \pi f^2(x)dx \qquad V = \int_a^b S(x)dx$$

Якщо навколо осі  $Oy$

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$$