Інтергал Рімана

1. $Ӵ f: [a, b] \to \mathbb{R}$

   Розіб'ємо $[a, b]$ на n частин точками $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

   def: Розбиттям $[a, b]$ називають сукупність $\{x_0,\ x_1, \dots, x_n\}$.

   def: Сукупність проміжних точок – множина $\{\xi_1, \xi_2, \dots\ \xi_n\}$, де $\xi_i\ \in [x_{i-1}, x_i]$.

   def: Діаметр розбиття - $diam(P) = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta \mathrm{x}_i$.

   def: Інтегральна сума - $S_p(f, \xi) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f(\xi)$ для функції f, що побудована за розбиття P і сукупністю проміжних точок ξ.

2. def: Інтеграл за Ріманом – число I нназивають інтегралом за Ріманом від функції f на $[a, b]$, якщо $\forall\ \mathcal{E} > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall P: diam(P) < \ \delta \to\ \forall \xi\ \left|S_p(f, \xi) - I\right| < \ \mathcal{E}$.

3. lem: Необхідна умова інтегровності – Якщо f інтегровна за Ріманом, то f обмежена на $[a, b]$, бо якщо f необмежена, то $\forall n\ \exists\ y_n: f(y_n) > n$.

   $y_n \to y$

   Тоді при даному $\xi\ S_p(f, \xi) \to \infty$

4. Суми Дарбу.

   $f: [a, b] \to\ \mathbb{R}$.

   def: Верхня сума Дарбу: $\overline{S_p}(f) = \sum M_i(x_{i+1} - x_i)$, $M_i = \sup f(x)$, $x \in [x_i, x_{i+1}]$.

   $def:$ Нижня сума Дарбу: $\underline{S_p}(f) = \sum M_i(x_{i+1} - x_i)$, $M_i = \inf f(x)$, x $x\ \in [x_i, x_{i+1}]$.

   $$\underline{S_p}(f) < \ S_p(\xi) < \overline{S_p}(f)$$

5. Продовження розбиття.

   P цього * сегмента $[a, b]p^*$, де $p * \supset p$

   $def:$ P є спільним для P_1 і P_2, якщо $P = \ P_1 \cup P_2$.

6. lem: Інтегральні суми Дарбу та продовжені розбиття.

   Якщо $p *$ продовження розбиття, то $\underline{S_p}(f) \le \underline{S_{p*}}(f)$ і $\overline{S_p}(f) \ge \overline{S_{p*}}(f)$.

   $proove:$

   $Ӵ p$ - деяке розбиття, $P_1 = P \cup \{x\}$

   $$\overline{S_{p_1}}(f) = \sum_{k\,=\,1}^{m} M_k \Delta x_k + M_{m+1} \Delta x_m + \sum_{k\,=\,m+2}^{n} m_k \Delta x_k$$

   де $M_{m+1} \Delta x_m = \sup\limits_{[x_m,\ \ x*]} f(x)(x * - x_m) + \sup\limits_{[x*,\, x_{m+1}]} f(x)(x_{m+1} - x *)$

$$A \subset B \Rightarrow sup_A f \leq sup_B f$$
$$\sup f(x)(x* - x_m) + \sup f(x)(x_{m+1} - x*) \leq M_{m+1}(x_{m+1} - x*)$$
$$\overline{S_p} \geq \overline{S_{p_1}}$$

7. lem: Нерівність між інтегральними сумами Дарбу.

   $\forall\, p_1, p_2$ – розбиття $\Rightarrow \underline{S_{p_1}}(f) \leq \overline{S_{p_2}}(f)$

   $proove$:

   $\exists P$- спільне розбиття:

$$\underline{S_{p_1}}(f) \leq \underline{S_p}(f) \leq \overline{S_p}(f) \leq \overline{S_{p_2}}(f)$$

8. Інтегровність за Дарбу та її зв'язок з інтегровністю за Ріманом

   def: Верхній інтеграл Дарбу - $\inf \overline{S_p}(f) = \overline{\int f dx}$

   def: Нижній інтеграл Дарбу - $\sup \underline{S_p}(f) = \underline{\int f dx}$

   def: Функція f називається інтегровною за Дарбу, якщо$\overline{\int f dx} = \underline{\int f dx}$

   $theo$: Критерій інтегровності за Дарбу:

   f є інтегровною за Дарбу $\overset{theo}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\, \mathcal{E} > 0\ \exists p$: $\left|\overline{S_p}(f) - \underline{S_p}(f)\right| < \mathcal{E}$.

   $theo$: (Еквівалентності):

   Функція інтегровна за Дарбу $\overset{theo}{\Longleftrightarrow}$ вона інтегровна за Ріманом і їх інтеграли співпадають.

9. Множини лебегової міри нуль

   def: Множина $A \subset \mathbb{R}$ має лебегову міру нуль, якщо $\forall \mathcal{E} > 0\ \exists (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2)$ ... не більш ніж злічення кількість.

   1) $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (\alpha_i, \beta_i)$

   2) $\sum \beta_i - \alpha_i < \mathcal{E}$

10. Властивості множин лебегової міри нуль

    $\rightarrow$ Якщо A злічення або скінченна $\Longrightarrow A$ – має міру нуль.

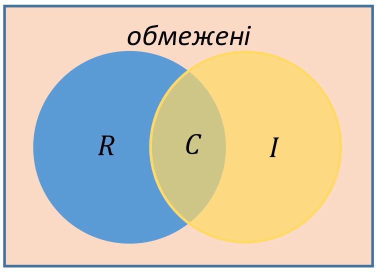
    $\rightarrow$ Якщо $\exists (\alpha, \beta) \subset A \Longrightarrow A$ – не є множиною міри нуль.

    $\rightarrow$ Незліченна(континуальна) множина теж може мати міру нуль.

    $\rightarrow$ Якщо $A_1, A_2, \ldots$ мають міру нуль, то і $\bigcup A_i$ має міру нуль.

11. $theo$: Критерій Лебега інтегровності за Ріманом.

Я f – обмежена на $[a,b]$, тоді $f \in R([a,b]) \overset{theo}{\Longleftrightarrow}$ Множина точок розриву функції f на $[a,b]$ має міру нуль.



12. Найпростіші наслідки ($|f|, fg, \alpha f + \beta g$)

→ $f, g \in R([a,b]) \Longrightarrow f.g \in R([a,b])$.

→ $f \in R([a,b]) \Longrightarrow |f| \in R([a,b])$.

→ $f, g \in R([a,b]) \Longrightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \alpha f + \beta g \in R([a,b])$.

→ $f \in R([a,b]), g \in C\big(E_f\big) \Longrightarrow g\big(f(x)\big) \in R([a,b])$.

13. $theo$: Лінійність інтегралу Рімана

Якщо $f, g \in R([a,b])$, то

$$\alpha, \beta: (\alpha f + \beta g) \in R([a,b]) \Longrightarrow \int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$$

$proove$: за інтегралом суми.

14. $theo$: Адитивність за проміжком інтегрування

$$\int\limits_a^c f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx, b \in [a,c]$$

15. $theo$: Інтеграл Рімана від нерівних функцій

$$Я \ \forall\, x \in [a,b]: f(x) \le g(x);\ f, g \in R([a,b]) \Longrightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx$$

16. Наслідки

→ Якщо $f \in R([a,b])$ і $\forall x \in [a,b]: f(x) \ge 0 \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \ge 0$.

→ Інтеграл Рімана.

$$cons:\ f \in R([a,b]), \forall x \in [a,b]: f(x) \ge 0$$

$$\exists x_0 \in (a,b): f(x_0), \text{ то } \int_a^b f(x)dx \ge 0$$

$$proove:\ Я\, y_0 = f(x_0)$$

Розглянемо $\mathcal{E} = \frac{1}{2}y_0$. Тоді $\exists \delta > 0: \forall x: |x - x_0| < \delta: |f(x) - f(x_0)| < \mathcal{E}$.

Тобто $-\mathcal{E} < f(x) - f(x_0) < \mathcal{E}$

$f(x) \ge f(x_0) - \mathcal{E} = y_0 - \mathcal{E} = y_0 - \frac{1}{2}y_0 = \frac{1}{2}y_0$.

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{x_0-\delta} f(x)dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx + \int_{x_0+\delta}^{b} f(x)dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0-\delta} f(x)dx \geq$$

$$\geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} (y_0 - \mathcal{E})dx = 2\delta(y_0 - \mathcal{E}) > 0$$

$\rightarrow$ Модуль.

$cons$: Якщо $f \in R([a,b])$, то $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

$proove$: З пункту 7: $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|, x \in [a,b]$

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

$$-a \leq b \leq a \Longrightarrow |b| \leq a$$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

17. $theo$: Перша про середнє

$Я f, g \in R([a,b])$ і $|f| < M \quad \forall x \in [a,b]$.

g – не змінює знак на $[a,b]$

$\overset{theo}{\Longrightarrow} \exists c \in (-M, M): \int_a^b f(x)g(x)dx = c\int_a^b g(x)dx$

$proove$: Будемо вважати, що $\forall x \in [a,b]: g(x) \geq 0$

Тоді $-Mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$

Отже $-M\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx$

$$-M \leq \underbrace{\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}}_{= c} \leq M, \qquad c \in [-M, M]$$

18. $theo$: Перша про середнє для неперервної функції

Якщо $f \in C([a,b]) \overset{theo}{\Longrightarrow} \exists \xi \in [a,b]$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

19. Інтеграл як функція верхньої межі

$f \in R([a,b]) \overset{def}{\Longrightarrow} \int_a^t f(x)dx = \phi(t), \;\; t \in [a,b], \;\; \phi(a) = 0.$

20. $theo$: Неперервність інтегралу як функції верхньої межі

$\phi(t) \in C([a,b])$.

$proove$: $\forall t_n \to t \ \in [a,b]$

Треба довести, що $\phi(t_n) \to \phi(t)$

$$\int_a^{t_n} f(x)dx - \int_a^{t} f(x)dx = \int_t^{t_n} f(x)dx$$

Оскільки $f \in R([a,b])$, то f має бути обмеженою

$\Longrightarrow \exists\, M: \forall x \in [a,b]: |f(x)| < M$

$$\left|\int_t^{t_n} f(x)dx\right| \leq \int_t^{t_n} |f(x)|dx \leq \int_t^{t_n} Mdx = M(t_n - t) \to 0$$

21. Диференційовність інтегралу як функції верхньої межі

$f \in C(\{x_0\}), x_0 \in [a,b] \overset{theo}{\Longrightarrow} \phi \ \in D(\{x_0\})$

$proove$: $\phi'(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{x - x_0}$, треба довести, що ця границя існує. $\boxed{\phi'(x_0) = f(x_0)}$

Доведемо, що $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$

$$\frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x - x_0}\left(\int_a^{x} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt\right) - f(x_0) =$$

$$= \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)dt - \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(x_0)dt = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(t) - f(x_0)dt$$

$f \in C(\{x_0\}) \Longrightarrow \ \forall \mathcal{E} > 0: \exists \delta > 0: \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Longrightarrow \ |f(x) - f(x_0)| < \mathcal{E}$

Зафіксуємо $\mathcal{E} > 0$. Оберемо x так, що $|x - x_0| < \delta \quad t \in [x_0, x] \Longrightarrow t \in (x_0,\ x_0 + \delta)$

$$\frac{1}{x - x_0}\left|\int_{x_0}^{x} f(t) - f(x_0)dx\right| \leq \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} |f(t) - f(x_0)|dx \leq \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} \mathcal{E}dx = \mathcal{E}$$

$$\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)dt - f(x_0) \to 0$$

22. Формула Ньютона-Лейбніца

Якщо $f \in R([a,b])$ і множина точок розриву не більш ніж злічення, F – будь-яка первісна функції f на $[a,b]$, тоді справедлива рівність:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$

23. Інтегрування частинами

$$[a,b]\xrightarrow{fg}\mathbb{R} \quad f,g\in C'([a,b]) \Rightarrow \int\limits_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int\limits_a^b f(x)g'(x)dx$$

24. $theo$: Заміна змінної

$$Я\begin{cases} f:[a,b]\to\mathbb{R} \\ f\in C([a,b]) \end{cases}, \quad \begin{cases} \varphi\in[a,b] \\ \varphi:[\alpha,\beta]\leftrightarrow[a,b] \\ \varphi\in D([a,b]) \\ \varphi'\in R([a,b]) \end{cases} \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$$

25. Адитивна функція проміжку

$$\phi:\{[a,b]|\ a,b\ \in\mathbb{R}\}\to\mathbb{R} \qquad \forall a,b\ \forall c\in[a,b] \overset{def}{\Longrightarrow} \phi([a,b] = \phi([a,c]) + \phi([c,b])$$

26. $theo$: Зв'язок адитивної функції проміжку та інтегралу Рімана

Якщо $f:[a,b]\to\ \mathbb{R}$ і $f\in R([a,b])$

і адитивна функція проміжку ϕ на $[a,b]$, $\forall\alpha,\beta\ \in[a,b]$

$\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)(b-a)\le\ \phi([\alpha,\beta])\le \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)(\beta-\alpha)$ $\overset{theo}{\Longrightarrow}$ $\phi([\alpha,\beta]) = \int_\alpha^\beta f(x)dx$

$proove$: Розглянемо $\forall$ розбиття P на відрізку $[a,b]$.

$$\forall i=\overline{0,n-1}: \quad \inf\limits_{x_i\,x_{i+1}} f(x)(x_{i+1}-x_i)\le\ \phi([x_i,x_{i+1}])\le \sup\limits_{x_i\,x_{i+1}} f(x)(x_{i+1}-x_i)$$

$\forall p$: $S_p(f)$ і $S_p(f)\to\ \int_a^b f(x)dx$ з чого і слідує шукане твердження.

27. Формула площі криволінійної трапеції

$$S = S([a,b]) = \int\limits_a^b f(x)dx$$

28. Формула площі криволінійного сектору в полярних координатах.

$$\phi([\alpha,\beta]) = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$$

29. Довжина шляху простої кривої (явно заданої, параметрично заданої)

Параметрично задана: $x=x(t)$, $y=y(t)$: $l = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt$

Явно задана: $l=\ \int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(y'(x))^2}dx$

30. Площа фігури, що обмежена параметрично заданою кривою

$$S = \int\limits_a^b y'(t)x(t)dt = -\int\limits_a^b y(t)x'(t)dt$$

31. Об'єм тіла обертання

$$V = \int\limits_a^b \pi f^2(x)dx \qquad V = \int\limits_a^b S(x)dx$$

Якщо навколо осі Oy

$$V = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$$