Інтергал Рімана

Розіб’ємо на частин точками

: Розбиттям називають сукупність .

: Сукупність проміжних точок – множина , де

: Діаметр розбиття -

: Інтегральна сума - для функції , що побудована за розбиттям і сукупністю проміжних точок .

1. : Інтеграл за Ріманом – число називають інтегралом за Ріманом від функції на , якщо .
2. : Необхідна умова інтегровності – Якщо інтегровна за Ріманом, то обмежена на , бо якщо необмежена, то .

Тоді при даному

1. Суми Дарбу.

.

: Верхня сума Дарбу: , , .

*:* Нижня сума Дарбу: , , x .

1. Продовження розбиття.

цього \* сегмента \*, де

*: P* є спільним для ­ і , якщо .

1. : Інтегральні суми Дарбу та продовжені розбиття.

Якщо продовження розбиття, то і .

*:*

*-* деяке розбиття,

де

1. : Нерівність між інтегральними сумами Дарбу.

– розбиття

- спільне розбиття:

1. Інтегровність за Дарбу та її зв’язок з інтегровністю за Ріманом

: Верхній інтеграл Дарбу -

*:* Нижній інтеграл Дарбу -

: Функція називається інтегровною за Дарбу, якщо

: Критерій інтегровності за Дарбу:

є інтегровною за Дарбу .

(Еквівалентності):

Функція інтегровна за Дарбу вона інтегровна за Ріманом і їх інтеграли співпадають.

1. Множини лебегової міри нуль

: Множина має лебегову міру нуль, якщо не більш ніж зліченна кількість.

1. Властивості множин лебегової міри нуль

* Якщо зліченна або скінченна – має міру нуль.
* Якщо – не є множиною міри нуль.
* Незліченна(континуальна) множина теж може мати міру нуль.
* Якщо мають міру нуль, то і має міру нуль.

1. : Критерій Лебега інтегровності за Ріманом.

– обмежена на , тоді Множина точок розриву функції на має міру нуль.

*обмежені*

1. Найпростіші наслідки .

* .
* .
* .
* .

1. : Лінійність інтегралу Рімана.

Якщо , то

: за інтегралом суми.

1. : Адитивність за проміжком інтегрування.
2. : Інтеграл Рімана від нерівних функцій.
3. Наслідки.

* Якщо і .
* Інтеграл Рімана.

:

, то

:

Розглянемо . Тоді .

Тобто

.

* Модуль.

: Якщо , то .

: З пункту 7:

1. : Перша про середнє.

і .

– не змінює знак на

: Будемо вважати, що

Тоді

Отже

1. : Перша про середнє для неперервної функції.

Якщо

1. Інтеграл як функція верхньої межі.

*.*

1. : Неперервність інтегралу як функції верхньої межі.

.

:

Треба довести, що

Оскільки , то має бути обмеженою

1. Диференційовність інтегралу як функції верхньої межі.

: , треба довести, що ця границя існує. Доведемо, що

Зафіксуємо . Оберемо так, що

1. Формула Ньютона-Лейбніца.

Якщо і множина точок розриву не більш ніж зліченна, – будь-яка первісна функції на , тоді справедлива рівність:

1. Інтегрування частинами.
2. : Заміна змінної.
3. Адитивна функція проміжку.
4. : Зв’язок адитивної функції проміжку та інтегралу Рімана.

Якщо і

і адитивна функція проміжку на ,

: Розглянемо розбиття на відрізку .

з чого і слідує шукане твердження.

1. Формула площі криволінійної трапеції.
2. Формула площі криволінійного сектору в полярних координатах.
3. Довжина шляху простої кривої (явно заданої, параметрично заданої).

Параметрично задана: :

Явно задана:

1. Площа фігури, що обмежена параметрично заданою кривою.
2. Об’єм тіла обертання­­

Якщо навколо осі