МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

І. І. Голіченко
М. К. Ільєнко
І. М. Савич

ВСТУП ДО ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Підручник

Затверджено Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як підручник для здобувачів ступеня бакалавра
за спеціальністю 111 Математика

Електронне мережне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2022

Рецензенти: *Моклячук М. П.*, д. ф.-м. н., проф.,
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка

Млавецъ Ю. Ю. , к. ф.-м. н., доц.,
Ужгородський національний університет

Відповідальний
редактор *Клесов О. І.,* д. ф.-м. н., проф.
Національний технічний університет України
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Гриф надано Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 6 від 03.10.2022 р.)

У підручнику викладено основи теорії ймовірностей. Він має на меті підготувати здобувачів до класичного курсу теорії ймовірностей. Містить елементи комбінаторики, елементарну теорію ймовірностей, поняття випадкової величини, дискретні випадкові величини та їх характеристики, базові дискретні розподіли, елементи теорії ланцюгів Маркова. Підручник призначений для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю 111 Математика. Він буде також корисним для здобувачів інших спеціальностей, які вивчають курс теорії ймовірностей.

Реєстр. № П 22/23-012. Обсяг 10,5 авт. арк.
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056
https://kpi.ua
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

Зміст

ВСТУП

У підручнику висвітлені початкові теми, необхідні для подальшого опанування та поглибленого вивчення теорії ймовірностей. Він має на меті ознайомити читачів з основними поняттями та принципами ймовірності, навчити простим ефективним методам розв'язання задач та проілюструвати підходи правильного мислення.

Тематичний зміст підручника відповідає навчальній програмі дисципліни "Вступ до теорії ймовірностей", яка викладається на 2-му курсі фізико-математичного факультету КПІ ім. Ігоря Сікорського для здобувачів освітнього рівня "бакалавр" за спеціальністю 111 Математика. У підручнику викладені елементи комбінаторики, основи елементарної теорії ймовірностей, поняття про випадкові величини, дискретні випадкові величини та їх властивості, а також базові дискретні розподіли та їх застосування, елементи теорії ланцюгів Маркова. Зазначені теми викладено досить детально та проілюстровано численними прикладами. Крім студентів-математиків підручник може бути рекомендований для використання також студентам інших спеціальностей, які вивчають теорію ймовірностей, викладачам цієї дисципліни, а також всім, хто нею цікавиться, зокрема, школярам старших класів.

Підручник складається з чотирьох розділів, кожний з яких відповідає основним темам курсу, містить весь необхідний теоретичний матеріал, який супроводжується практичними прикладами. Для забезпечення якісного опрацювання матеріалу в кожному розділі запропоновано перелік задач для самостійного розв'язання.

Перший розділ "Елементи комбінаторики" охоплює основні правила комбінаторики, комбінаторні конфігурації, біном Ньютона, властивості біноміальних коефіцієнтів, формулу включення-виключення та задачу про шляхи в прямокутнику та деякі її застосування.

Другий розділ "Елементарна теорія ймовірностей" включає основні поняття теорії ймовірностей, операції над випадковими подіями, властивості ймовірності, класичну та геометричну ймовірнісні моделі, умовну ймовірність, незалежність випадкових подій, теореми додавання та множення ймовірності, формулу повної ймовірності, формулу Байєса, схему Бернуллі та граничні теореми для неї, поліноміальну формулу.

В третьому розділі “Дискретні випадкові величини та їх характеристики” вводиться поняття випадкової величини та її функції розподілу, розглядаються дискретні випадкові величини та їх числові характеристики, а також поняття генератриси та її застосування. Крім того, значна увага приділяється базовим дискретним розподілам та їх застосуванням. Зокрема, поряд з розподілом Пуассона розглянуто також потік подій Пуассона.

Четвертий розділ “Елементи теорії ланцюгів Маркова” присвячений початковим відомостям теорії ланцюгів Маркова, зокрема вводиться поняття перехідних ймовірностей ланцюга Маркова, матриці перехідних ймовірностей, встановлено формули для знаходження ймовірностей потрапляння та середніх часів потрапляння ланцюга Маркова у підмножину станів, формулюється та доводиться ергодична теорема Маркова. Дано класифікацію станів ланцюга Маркова. Всі теоретичні відомості проілюстровано на важливих прикладах.

Для розуміння матеріалу, викладеного в розділах 1-3, бажано володіти основами математичного аналізу. Для вивчення розділу 4 крім цього знадобляться початкові знання вищої алгебри та теорії графів.

Деякі приклади та задачі, які ввійшли в підручник, давно вже належать до числа класичних. Серед інших є такі, що укладені авторами.

Одразу підкреслимо, що скрізь у підручнику в якості десяткового розділювача використовуватимемо крапку (.). Наприклад, число 0.74 слід читати як *нуль цілих, сімдесят чотири сотих.*

1. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ

В цьому розділі розглянуті основні комбінаторні правила та конфігурації, формула включення-виключення, біном Ньютона та властивості біноміальних коефіцієнтів, а також один відомий підхід до розв'язання значної кількості комбінаторних задач, відомий як задача про шляхи у прямокутнику. Всі ці теми є необхідними для вивчення та глибокого розуміння основ теорії ймовірностей.

1.1. Основні поняття та правила комбінаторики

Означення 1.1. ***Комбінаторика*** – розділ дискретної математики, який вивчає задачі вибору та розташування елементів зазвичай, скінченної множини за заданими правилами. Кожне правило задає спосіб побудови деякої підмножини з елементів вихідної множини. Така підмножина називається *комбінаторною конфігурацією.*

У комбінаторних задачах необхідно підрахувати число можливих конфігурацій, відповісти на питання "скількома способами? ". Наприклад, скількома способами із 10-ти зошитів можна вибрати 2 зошити.

Багато комбінаторних задач можуть бути розв'язані за допомогою наступних правил.

1.1.1. Правило множення

Правило множення або *основний принцип комбінаторики* (ОПК) полягає в наступному. Нехай необхідно виконати одну за одною 2 дії. Першу дію можна виконати n_1 способами, другу, після виконання першої - n_2 способами. Тоді обидві дії, одну за одною, можна виконати

$$n_1 \cdot n_2$$

способами.

Зауважимо, що правило множення діє і у випадку трьох, чотирьох та більше дій.

Приклад 1.1. *Із Києва до Бухареста можна долетіти одним із 7-ми літаків, із Бухареста до Афін – одним із 5-ти літаків. Скількома способами можна долетіти із Києва до Афін через Бухарест?*

Розв'язання.

$$\text{Київ} \xrightarrow{7} \text{Бухарест} \xrightarrow{5} \text{Афіни}$$

Оскільки до Бухареста із Києва можна долетіти на одному із 7-ми літаків, до Афін із Бухареста - одним із 5-ти літаків, то $n_1 = 7$, $n_2 = 5$. Тому за правилом множення (ОПК) кількість способів долетіти із Києва до Афін через Бухарест дорівнює $7 \cdot 5 = 35$. □

Приклад 1.2. *Скільки є трицифрових чисел, у яких*

а) всі цифри різні;

б) кожні дві сусідні цифри різні?

Розв'язання. Для побудови трицифрового числа необхідно заповнити цифрами від 0 до 9 три комірки:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \square & \square & \square \end{array}$$

У випадку а) всі цифри у трицифровому числі мають бути різними. Тобто, якщо у 1-шу комірку обрали одну із дев'яти цифр, а саме "1" або "2", або "3" ..., або "9" ("0" не може стояти на першому місці, бо відповідне число не буде трицифровим), то у 2-гу комірку можна обрати одну із дев'яти цифр - від "0" до "9" за виключенням цифри, обраної в першу комірку. Аналогічно у 3-ю комірку можемо обрати одну із восьми цифр, що залишились не використаними для перших двох комірок. За правилом множення (ОПК) всього трицифрових чисел із всіма різними цифрами буде $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$.

Зауважимо, якщо при заповненні комірок цифрами рухатись справа наліво, то 3-тю комірку можна заповнити одною із десяти цифр, 2-гу комірку - одною із дев'яти цифр, а щодо 1-ої комірки можливо два варіанти. Якщо "0" був у 2-ій або 3-ій комірці, то для 1-ї залишається вісім можливих цифр для заповнення, інакше для 1-ї комірки залишається сім можливих цифр для заповнення. Тому при такому підході задачу не можна розв'язати лише за допомогою ОПК.

У випадку б) дві сусідні цифри мають бути різними. Тобто, якщо у першу комірку обрали одну із дев'яти цифр (не "0"), то у другу комірку можна обрати одну із дев'яти цифр — від "0" до "9" за виключенням цифри, обраної в першу комірку. Тоді у третю комірку можна обрати одну із дев'яти цифр за виключенням цифри, обраної в другу комірку, бо сусідні цифри мають бути різними. За правилом множення (ОПК) всього шуканих чисел буде $9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^3 = 729$. $\square$

Приклад 1.3. *Скільки чотирицифрових чисел можна скласти із непарних цифр? Скільки серед них таких, що діляться на 5?*

Розв'язання. Непарних цифр всього п'ять: 1, 3, 5, 7, 9. За ОПК із них можна скласти всього $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 = 625$ чотирицифрових чисел, бо в кожну із 4-х комірок

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \square & \square & \square & \square \end{array}$$

можна обрати по одній із 5-ти непарних цифр.

Число ділиться на 5, якщо його остання цифра 5 або 0. Оскільки серед непарних цифр немає 0, то у нашому випадку у 4-ій комірці може бути лише цифра 5, а у 1-ій, 2-ій та 3-ій комірках може бути будь-яка із п'яти непарних цифр. Тому за ОПК чотирицифрових чисел, які містять лише непарні цифри і діляться на 5, всього $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 = 125$. $\square$

1.1.2. Правило додавання

Нехай потрібно виконати одну із двох дій. Одну дію можна виконати m_1 способами, іншу – m_2 способами. Тоді одну з двох дій можна виконати $m_1 + m_2$ способами, причому множини способів (для однієї та іншої дій) не перетинаються. В цьому полягає суть комбінаторного *правила додавання.*

Приклад 1.4. *Нехай в урні міститься 3 білі, 4 чорні та 5 червоних куль. Скількома способами можна послідовно витягнути 2 кулі так, щоб перша і тільки перша була білою?*

Розв'язання. При витягуванні двох куль так, щоб перша і тільки перша була білою можливі такі випадки:

За ОПК білу+чорну кулі можна витягти $3 \cdot 4 = 12$ способами. Аналогічно, білу+червону кулі можна витягти $3 \cdot 5 = 15$ способами. За правилом додавання витягти дві кулі так, щоб тільки перша була білою, можна $12 + 15 = 27$ способами. □

1.1.3. Комбінаторні конфігурації

Розглянемо тепер основні комбінаторні конфігурації.

1. Перестановки.
n-елементна множина називається *впорядкованою*, якщо кожному її елементу поставлено у відповідність деяке число від 1 до n, тобто присвоєно номер елемента, причому двом різним елементам відповідають два різні номери.
Означення 1.2. Перестановкою n-елементної множини називається її n-елементна впорядкована підмножина.

Із означення випливає, що вказати перестановку n-елементної множини означає обрати певний порядок цих елементів. Тобто будь-які дві перестановки відрізняються одна від одної порядком своїх елементів.

Приклад 1.5. *Нехай є множина* $\{a, b, c\}$. *Запишемо всі її перестановки:*

$$\{a, b, c\}, \{a, c, b\}, \{b, a, c\}, \{b, c, a\}, \{c, a, b\}, \{c, b, a\}.$$

Всього 6=3! перестановок триелементної множини.

Кількість перестановок n-елементної множини позначається символом P_n і дорівнює

$$\boxed{P_n = n!}. \tag{1.1}$$

Доведення. *Для запису перестановки n-елементної множини потрібно в кожну із n комірок помістити один і тільки один елемент вихідної множини*

$$\overset{1}{\square}\ \overset{2}{\square}\ \ldots\ \overset{n-1}{\square}\ \overset{n}{\square}$$

Оскільки перестановки відрізняються одна від одної порядком своїх елементів, то перший елемент множини ми можемо розмістити в одній із n комірок, другий елемент — в одній із $n-1$ комірці і т.д., n-ий елемент ми можемо розмістити лише в одній останній комірці. За ОПК загальна кількість перестановок дорівнює $n \cdot (n-1) \ldots \cdot 1 = n!$.

Приклад 1.6. *Скільки слів можна утворити, переставляючи букви у слові "БІНОМ"?*

Розв'язання. Слово має 5 різних букв. Переставляючи букви слова "БІНОМ" ми отримаємо перестановки 5-елементної множини. За формулою (1.1) кількість шуканих слів дорівнює $P_5 = 5! = 120$. □

Приклад 1.7. *Скількома способами можна впорядкувати множину $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ так, щоб парні числа стояли на парних місцях?*

Розв'язання. Серед чисел множини є n парних та n непарних чисел. Спочатку розмістимо n парних чисел на n парних місцях. Це можна зробити $n!$ способами. Для непарних чисел залишаються непарні місця. Розмістимо n непарних чисел на n непарних місцях. Це також можна зробити $n!$ способами. Тоді за ОПК маємо $n! \cdot n! = (n!)^2$. □

2. Розміщення з повтореннями

Означення 1.3. Розміщенням з повтореннями із n елементів по k елементів називаються такі впорядковані множини, які містять k елементів, кожен з яких є одним з елементів даної n-елементної множини.

Приклад 1.8. *Нехай є множина $\{1, 2, 3\}$. Запишемо всі розміщення з повтореннями по 2 елементи:*

$$\{1,1\}, \{2,2\}, \{3,3\}, \{1,2\}, \{2,1\}, \{2,3\}, \{3,2\}, \{1,3\}, \{3,1\}.$$

Всього таких розміщень $9 = 3^2$.

Кількість розміщень із повтореннями із n елементів по k позначається символом $\overline{A_n^k}$ і дорівнює

$$\boxed{\overline{A_n^k} = n^k}. \tag{1.2}$$

Доведення. *Для запису розміщення з повтореннями із n елементів по k елементів потрібно в кожну із k комірок помістити один із n елементів, причому ці елементи можуть повторюватись.*

$$\overset{1}{\square}\,\overset{2}{\square}\,\ldots\,\overset{k-1}{\square}\,\overset{k}{\square}$$

Оскільки в кожну комірку ми можемо помістити один із n елементів, то за ОПК загальна кількість розміщень з повтореннями із n елементів по k елементів дорівнює $\underbrace{n \cdot n \ldots \cdot n}_{k} = n^k$.

Приклад 1.9. *У ліфт 9-поверхового будинку на першому поверсі зайшло 5 людей. Скількома способами вони можуть вийти з ліфта починаючи з другого поверху?*

Розв'язання. Кожен із 5-ти пасажирів має вийти на одному із восьми поверхів: з 2-го по 9-ий поверхи. Можливі, наприклад, такі варіанти виходу пасажирів: 2-3-4-5-5, що означає, що на 2-му поверсі вийшов один пасажир, на 3-му — один, на 4-му — один, на 5-му вийшло два пасажири. Тобто n-елементна множина тут $\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Тоді $n = 8, k = 5$. Загальна кількість виходів пасажирів за формулою (1.2) дорівнює $\overline{A_8^5} = 8^5 = 32768$. □

3. Розміщення з n елементів по k

Означення 1.4. Розміщенням з n елементів по k елементів $(k \leq n)$ називають будь-яку впорядковану множину із k елементів, кожен з яких лише один раз вибрано із даної n-елементної множини.

Зауважимо, що у випадку, коли $k = n$, розміщення є перестановкою.

Приклад 1.10. *Маємо множину $\{1,2,3\}$. Запишемо всі розміщення по 2 елементи:*

$$\{1,2\},\{2,1\},\{1,3\},\{3,1\},\{2,3\},\{3,2\}.$$

Всього таких розміщень $6 = 3!$

Кількість розміщень із n елементів по k позначається символом A_n^k і дорівнює

$$\boxed{A_n^k = n(n-1)...(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}}. \tag{1.3}$$

Доведення. *Потрібно скласти всі впорядковані k-елементні підмножини n-елементної множини*

$$\overset{1}{\square}\,\overset{2}{\square}\ \ldots\ \overset{k-1}{\square}\,\overset{k}{\square}$$

На перше місце можна вибрати один із n елементів множини, на друге — один із $(n-1)$ елементів і т.д., на k-те місце можна обрати один із $(n-(k-1))$ елементів. Тоді за ОПК загальна кількість розміщень із n елементів по k дорівнює $A_n^k = n(n-1)...(n-(k-1)) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Приклад 1.11. *Скільки можна скласти 5-цифрових чисел, записаних різними цифрами без "0"?*

Розв'язання. Оскільки цифри 5-цифрового числа мають бути різними без "0", то для побудови числа користуємось цифрами 1, 2, 3, ..., 9 — всього 9 цифр. Тобто $n = 9$. Оскільки число містить 5 цифр, то $k = 5$. Тоді за формулою (1.3) кількість шуканих чисел дорівнює $A_9^5 = \frac{9!}{(9-5)!} = \frac{9!}{4!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5 = 15120$. □

Приклад 1.12. *Скільки всього є 5-цифрових чисел, записаних різними цифрами?*

Розв'язання. Перший спосіб: загальна кількість наборів складених із різних цифр довжини 5 обчислюється за формулою (1.3) і дорівнює $A_{10}^5 = 10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6 = 30240$. Оскільки нас цікавлять 5-цифрові числа, то із порахованих наборів складених із різних цифр довжини 5 необхідно відняти набори, які містять цифру 0 на першому місці. Таких наборів буде $A_9^4 = 3024$. Тому шукана кількість чисел дорівнює $30240 - 3024 = 27216$.

Другий спосіб: аналогічно до прикладу 1.2(а), застосуємо правило множення (ОПК). Будемо будувати 5-цифрове число зліва направо. Тоді першою цифрою можна обрати одну із 9-ти (від 1 до 9), другою цифрою - одну із 9-ти, третьою - одну із 8-ми, четвертою - одну із 7-ми, п'ятою - одну із 6-ти. За правилом множення шукана кількість чисел дорівнює $9\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6 = 27216$. □

4. Сполучення з n елементів по k

Означення 1.5. Сполучення (комбінація) з n елементів по k елементів — це k-елементна підмножина n-елементної множини, $0 \le k \le n$. Порядок елементів підмножини не має значення.

Приклад 1.13. *Маємо множину* $\{1,2,3\}$. *Запишемо всі сполучення по 2 елементи:*

$$\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}.$$

Всього таких сполучень 3.

Позначимо кількість сполучень із n елементів по k символом C_n^k і знайдемо їх кількість. Ми вже знаємо, як обчислюється кількість розміщень з n елементів по k елементів (див. формулу (1.3)). З іншого боку розміщення можна утворити наступним чином: із заданої множини вибираємо k елементів (це C_n^k способів), а потім впорядковуємо вибрані елементи (це $P_k = k!$ способів). Отже, за ОПК $A_n^k = C_n^k \cdot k!$, звідки

$$\boxed{C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}. \tag{1.4}$$

Приклад 1.14. *Вченому пропонують відвідати 9 конференцій та 7 захистів дисертацій у вересні. Скількома способами він може для себе обрати:*

1) 3 конференції;

2) 4 захисти дисертацій;

3) 5 будь-яких запропонованих заходів;

4) 3 конференції та 4 захисти;

5) 3 конфреренції або 4 захисти?

Розв'язання. 1)–2) За формулою (1.4) 3 конференції вчений може обрати $C_9^3 = \dfrac{9!}{3!(9-3)!} = 84$ способами, а 4 захисти $C_7^4 = \dfrac{7!}{4!(7-4)!} = 35$ способами.

У 3) запитують кількість способів обрати 5 будь-яких із заходів. Оскільки заходів всього 9+7=16 і порядок обраних заходів не має значення, то кількість способів обчислюється за формулою (1.4) і дорівнює $C_{16}^5 = \dfrac{16!}{5!(16-5)!} = 4368$.

У 4) між 3-ма конференціями та 4-ма захистами стоїть сполучник "та", що означає, що треба послідовно виконати дві дії. Тому тут застосовуємо ОПК і кількість шуканих способів дорівнює $C_9^3 \cdot C_7^4 = 2940$.

У 5) між 3-ма конференціями та 4-ма захистами стоїть сполучник "або", що означає, що виконується одна з двох дій. Тому тут застосовуємо правило додавання і кількість шуканих способів дорівнює $C_9^3 + C_7^4 = 119$. □

Приклад 1.15. *Скільки існує чотирицифрових чисел, у яких цифри йдуть у порядку спадання?*

Розв'язання. Виберемо 4 різні цифри з множини $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Кількість способів це зробити: $C_{10}^4 = \dfrac{10!}{4!(10-4)!} = 210$. А далі впорядкуємо вибрані цифри у порядку спадання. Це можна зробити єдиним способом. Отже, за ОПК всього таких чисел: $210 \cdot 1 = 210$.

Наприклад, якщо ми вибрали цифри: 2, 8, 0, 3, то єдине число, в якому цифри йдуть у порядку спадання буде 8320. □

5. Перестановки з повтореннями

Означення 1.6. Нехай множина X, що містить n елементів, містить n_1 елементів першого типу, n_2 елементів другого типу, ..., n_k елементів k-го типу $(n_1 + n_2 + \dots + n_k = n)$. **Перестановкою з повтореннями з** n **елементів по** $n_1, n_2, \dots, n_k$ елементів називається будь-яка впорядкована множина всіх елементів X.

Приклад 1.16. *Нехай є множина* $\{a, a, b, b, b\}$. *Запишемо всі перестановки з повтореннями із 5 по 2 та 3 елементи:*

$$\{a,b,a,b,b\}, \{a,b,b,a,b\}, \{a,b,b,b,a\}, \{b,a,b,b,a\}, \{b,a,a,b,b\},$$

$$\{b,a,b,a,b\}, \{b,b,a,b,a\}, \{b,b,b,a,a\}, \{a,a,b,b,b\}, \{b,b,a,a,b\}.$$

Всього таких перестановок з повтореннями 10.

Кількість перестановок з повтореннями з n елементів по $n_1, n_2, \dots, n_k$ позначимо символом $\overline{P}_n^{n_1,\dots,n_k}$ і обчислимо його значення.

Для елементів першого типу оберемо n_1 місць серед можливих n місць — $C_n^{n_1}$ способів, для елементів другого типу оберемо n_2 місць серед можливих $(n-n_1)$ місць, що лишились після обрання місць для елементів першого типу, — $C_{n-n_1}^{n_2}$ способів, і т.д. Для елементів k-го типу оберемо n_k місць серед $(n-n_1-\ldots-n_{k-1})$ місць, що лишились $C_{n-n_1-\ldots-n_{k-1}}^{n_k}$ способами. За ОПК маємо

$$\overline{P_n}^{n_1,\ldots,n_k} = C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot \ldots \cdot C_{n-n_1-\ldots-n_{k-1}}^{n_k} =$$

$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdots \frac{(n-n_1-\ldots-n_{k-1})!}{n_k!(n-(n_1+n_2+\ldots+n_k))!} =$$

$$= \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!} \Rightarrow$$

$$\boxed{\overline{P_n}^{n_1,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}}. \tag{1.5}$$

Приклад 1.17. *Скільки різних слів можна скласти, переставляючи букви у слові "СТАТИСТИКА"?*

Розв'язання. Загальна кількість букв у слові "СТАТИСТИКА" дорівнює 10, тобто $n = 10$. Букв "с" дві, тому $n_1 = 2$, "т" — 3, тому n_2=3, "а" — 2, тому $n_3 = 2$, "и" — 2, тому $n_4 = 2$, "к"—1, тому $n_5 = 1$. Маємо перестановки з повтореннями із 10 по 2,3,2,2,1. За формулою (1.5) кількість різних слів дорівнює $\overline{P_{10}}^{2,3,2,2,1} = \dfrac{10!}{2!3!2!2!1!} = 75600$. □

6. Сполучення з повтореннями

Нехай є множина X, яка містить n різних елементів.

Означення 1.7. Підмножина множини X, яка налічує k елементів (невпорядкована вибірка k елементів із множини X), в якій обрані елементи можуть повторюватися, називається **сполученням (комбінацією) з повтореннями** з n елементів по k.

Приклад 1.18. *Нехай є множина* $X = \{a, b, c, d\}$. *Запишемо всі сполучення з повтореннями по 2 елементи:*

$$\{a,a\},\ \{b,b\},\ \{c,c\},\ \{d,d\},\ \{a,b\},\ \{a,c\},\ \{a,d\},\ \{b,c\},\ \{b,d\},\ \{c,d\}.$$

Всього таких сполучень 10.

Кількість сполучень з повтореннями з n елементів по k позначатимемо символом $\overline{C}_n^k$ і обчислимо їх кількість.

Сполучення з повтореннями з n елементів по k елементів можна записати, користуючись тільки цифрами 0 і 1. Це можна зробити так: спочатку запишемо стільки одиниць, скільки елементів першого типу входить у комбінацію, потім напишемо нуль, після нього напишемо стільки одиниць, скільки елементів другого типу входить у комбінацію, потім знову нуль і т.д., тобто нуль ставиться між двома групами одиниць елементів двох різних типів. Якщо елементи якого-небудь типу відсутні в комбінації, то пишемо підряд два нулі. Зрозуміло, що в кожному записі буде рівно $(n-1)$ нулів та k одиниць. Наприклад, якщо розглядаються комбінації з чотирьох елементів a, b, c, d по 6, то запис (100110111) відповідає такій комбінації $\{a, c, c, d, d, d\}$, а запис (110111001) зображує таку комбінацію $\{a, a, b, b, b, d\}$. Отже, встановлено взаємно однозначну відповідність між сполученнями з повтореннями та впорядкованими множинами з $(n-1)$ нулів та k одиниць. Тому кількість усіх сполучень з повтореннями з n елементів по k елементів дорівнює кількості різних способів упорядкувати $(n+k-1)$-елементну множину, що містить $(n-1)$ нулів та k одиниць, тобто кількості перестановок з повтореннями з $(n+k-1)$ по $(n-1)$ та k одиниць, тобто

$$\boxed{\overline{C}_n^k = \overline{P}_{k+n-1}^{k,n-1} = \frac{(k+n-1)!}{(n-1)!k!} = C_{k+n-1}^k}. \tag{1.6}$$

Приклад 1.19. *В магазині є шість різних видів зошитів. Скільки можна скласти різних наборів по 3 зошити?*

Розв'язання. Множина зошитів містить 6 різних видів. Зошити в наборі із трьох можуть повторюватися. Отже, необхідно обчислити кількість сполучень з повтореннями із $n = 6$ по $k = 3$. Тому за формулою (1.6) шукана кількість наборів

$$\overline{C}_6^3 = C_{6+3-1}^3 = C_8^3 = \frac{8!}{3!5!} = 56.$$

□

Приклад 1.20. *Скільки є чотиризначних чисел, у яких кожна наступна цифра не менша від попередньої?*

Розв'язання. Спочатку зауважимо, що число, яке задовольняє умові, не може містити цифру 0, оскільки не може починатися з 0, а всі інші цифри не менші за першу. Отже, такі числа складаються із 9-ти цифр, тобто множина, з якої ми обираємо цифри числа — це множина $\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$.

Виберемо із цієї множини 4 цифри з повтореннями. Це можна зробити $\overline{C}_9^4 = 495$ способами. А сформувати число з вибраних цифр, в якому кожна наступна не менша за попередню, можна єдиним чином! Отже, за основним правилом комбінаторики, всього шуканих чисел 495. □

Приклад 1.21 (Задача про цілочисельні розв'язки). *Знайти кількість розв'язків рівняння $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$ у цілих невід'ємних числах, де n — ціле невід'ємне число.*

Розв'язання. Узявши такі невід'ємні числа $x_1, x_2, \ldots, x_k$, що $x_1+x_2+\ldots+x_k = n$, можна одержати сполучення з повтореннями з k елементів по n, а саме: елементів першого типу x_1, елементів другого типу — x_2, і так далі, елементів k-го типу — x_k. І навпаки: якщо є сполучення з повтореннями з k елементів по n, то кількості елементів кожного типу задовольняють задане рівняння. Отже, кількість шуканих розв'язків

$$\overline{C}_k^n = C_{k+n-1}^n.$$

Скажімо рівняння $x_1 + x_2 + x_3 = 13$ має $\overline{C}_3^{13} = C_{3+13-1}^{13} = C_{15}^{13} = 105$ цілочисельних невід'ємних розв'язків. □

Задачі для самостійного розв'язання до 1.1

1. Скільки дільників має число: а) 675; б) 1080; в) 4900 ?

2. Відомий канонічний розклад числа $a = 2^m p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_s^{k_s}$, де p_1, p_2, ..., p_s — прості числа. Скільки парних дільників має число a?

3. Скільки є чотирицифрових кодів ("0" може стояти на 1-му місці), запис яких містить

   а) не містить цифри "7";

   б) одну чи більше цифру "7"?

4. Скільки є п'ятизначних чисел, у яких цифри йдуть у порядку спадання? у порядку зростання?

5. В лотереї 30 білетів, серед яких 5 виграшних. Скільки існує способів вибрати 7 білетів з принаймні 1-м виграшним?

6. Скільки є десятизначних чисел, сума цифр яких не перевищує 87?

7. Скільки бітових рядків можна утворити з шести "1" та восьми "0"?

8. Скільки різних «слів» можна скласти з літер слова "Mississippi" ?

9. Скількома способами можна 6 людей розсадити в ряд? Скільки при цьому способів, за яких Офелія та Гамлет сидітимуть поруч?

10. Розв'язати попередню задачу у випадку, коли люди сідають за круглий стіл. (Будемо ототожнювати 2 "розсадки", які переходять одна в одну при повороті стола, тобто важливий порядок людей у розсадці, а не їх положення відносно предметів у кімнаті).

11. Скільки є чотиризначних кодів, у яких:

    а) остання цифра – парна;

    б) всі цифри парні;

    в) рівно одна цифра парна;

    г) хоча б одна цифра парна;

    д) є хоча б 2 однакові цифри;

    е) є хоча б 2 різні цифри;

    є) є рівно 3 однакові цифри;

    ж) є рівно дві пари однакових цифр;

    з) цифри йдуть у порядку спадання;

    і) цифри утворюють паліндром, тобто число виду $abba$?

12. Повідомлення домовлено кодувати послідовностями п'яти голосних (а, о, у, е, и) та п'яти приголосних (б, в, г, д, ж) букв. Кожна буква в повідомленні має зустрічатися один раз.

а) Скільки всього різних повідомлень можна передати за цією системою?

б) Скільки можна передати тих повідомлень, у яких коди містять спочатку 5 голосних, а потім 5 приголосних?

в) Скільки є тих кодів, у яких приголосні і голосні чергуються через одну?

г) Скільки є тих, у яких голосні стоять суцільною групою?

д) Скільки кодів починаються голосною?

е) Скільки кодів починаються голосною, а закінчуються приголосною?

є) Скільки кодів починаються і закінчуються приголосними?

ж) Скільки є кодів, у яких букви «а» і «о» стоять поряд?

з) Скільки кодів, у яких між «а» і «о» стоять дві букви?

і) Скільки є кодів, що починаються трьома голосними буквами, відразу після яких іде приголосна?

13. 5 авторів мають написати підручник, що складається з 14 глав. Два автори напишуть по 2 глави, два інших – по 3 глави, і ще один – 4 глави. Скількома способами можна розподілити глави між авторами?

14. Колоду з 36 карт роздано порівну чотирьом гравцям. Скільки є способів роздачі, за яких хтось одержить 2 чи більше тузів?

15. З колоди 36 карт вибирають 4 карти. Скільки є способів, при яких серед них:

а) є рівно одна пікова карта;

б) є хоча б одна бубнова карта;

в) хоча б одна масть зустрічається більше ніж 1 раз;

г) є рівно 2 валети і 1 туз;

д) є тільки 2 масті;

е) є дами, але немає валетів;

є) є 3 тузи та 2 червоні карти?

16. Знайдіть суму цифр всіх тризначних чисел, складених з цифр 2, 7, 8 без їх повторення.

17. 9 туристів вирішили розподілитися на 3 групи по 3 особи. Одна група має йти в ліс по дрова, друга – в село по молоко, а третя – готувати вечерю. Скількома способами вони можуть це зробити?

18. Скільки різних наборів з п'яти тістечок можна скласти, якщо в кондитерській є три види тістечок?

19. Знайти кількість розв'язків рівняння $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$ у цілих невід'ємних числах.

20. Тролейбусний квиток (6 цифр) вважають надзвичайно щасливим, якщо 3 останні його цифри є перестановкою трьох перших цифр. Скільки є таких квитків?

21.* Скільки є чотиризначних чисел, у яких кожна наступна цифра така сама або більше на 1 від попередньої?

22.* Скільки є п'ятизначних чисел, у яких кожна наступна цифра не менша від попередньої?

1.2. Формула включення-виключення

Формула включення-виключення дає відповідь на запитання: скільки елементів міститься у об'єднанні множин.

1.2.1. Формула включення-виключення для 2-х множин

Розглянемо спочатку випадок двох множин. Нехай A, B — дві скінченні множини, $A \subset X$, $B \subset X$, де X — деяка універсальна множина. Позначимо через $N(A)$ кількість елементів у A, через $N(B)$ — у B. Тоді кількість елементів у об'єднанні множин A та B обчислюється за формулою

$$\boxed{N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B).} \tag{1.7}$$

Доведення. *Скористаємося такою властивістю операцій над множинами:* $A \cup B = \Big(A \setminus (A \cap B)\Big) \cup \Big(A \cap B\Big) \cup \Big(B \setminus (A \cap B)\Big)$, *причому всі три множини попарно не перетинаються. Крім того,* $(A \cap B) \subset A$ *і* $(A \cap B) \subset B$. *Тоді*

$$N(A \cup B) = N\Big(A \setminus (A \cap B)\Big) + N\Big(A \cap B\Big) + N\Big(B \setminus (A \cap B)\Big) =$$

$$= N(A) - N(A \cap B) + N(A \cap B) + N(B) - N(A \cap B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B),$$

що й треба було довести.

Наочно доведення формули (1.7) *легко проілюструвати за допомогою діаграми Ейлера-Вена (див. рис. 1.1).*

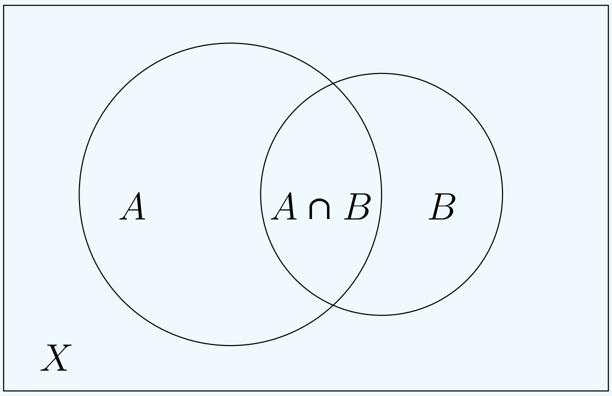

Рис. 1.1. Кількість елементів в об'єднанні множин

Оскільки обчислюючи кількість елементів у об'єднанні A *та* B *двічі рахується кількість елементів у їх перетині* $N(A \cap B)$, *то у* (1.7) *один раз віднімається* $N(A \cap B)$.

1.2.2. Загальна формула включення-виключення

Нехай $A_1, A_2..., A_m \subset X$ – скінченні підмножини X. Тоді кількість елементів у об'єднанні множин $A_1, A_2..., A_m$ обчислюється за формулою

$$N(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} N(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le m} N(A_i \cap A_j) +$$

$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le m} N(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{m-1} N(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m)$$

$$= N(A_1) + N(A_2) + \ldots + N(A_m) -$$

$$-N(A_1 \cap A_2) - N(A_1 \cap A_3) - \ldots - N(A_{m-1} \cap A_m) +$$

$$+N(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + N(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \ldots + N(A_{m-2} \cap A_{m-1} \cap A_m) + \ldots$$

$$+(-1)^{m-1} N(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m).$$

Доведення проводиться методом математичної індукції. Пропонуємо читачеві провести його самостійно.

Приклад 1.22. *У групі 30 студентів, кожен з яких вивчає англійську або німецьку мову. Відомо, що 27 з них вивчають англійську мову, 6 — німецьку мову. Скільки студентів вивчають обидві мови?*

Розв'язання. Визначимо множини

$$A = \{\text{студенти, що вивчають англійську мову}\},$$

$$B = \{\text{студенти, що вивчають німецьку мову}\},$$

$$A \cap B = \{\text{студенти, що вивчають обидві мови}\},$$

$$A \cup B = \{\text{студенти, що вивчають хоча б одну мову}\}.$$

За умовою задачі $N(A) = 27, N(B) = 6, N(A \cup B) = 30$. Тоді кількість студентів, що вивчають і англійську, і німецьку мови, за формулою (1.7) дорівнює

$$N(A \cap B) = 27 + 6 - 30 = 3.$$

□

Приклад 1.23. *Шестеро людей чекають на потяг на кінцевій зупинці. Потяг складається з 4-х вагонів. Скільки є способів розташування людей по вагонах, за яких в кожному вагоні буде принаймні одна людина?*

Розв'язання. Зауважимо, що всі можливі розташування людей по вагонах — це розміщення з повтореннями з 4-х (вагонів) по 6, тобто це набори з шести впорядкованих цифр, кожна з яких обирається серед номерів вагонів — 1, 2, 3 ,4. Наприклад, набір $\{1,4,4,3,2,1\}$ відповідає такій розсадці: перша людина зайшла у вагон №1, друга людина — у вагон №4, третя людина — у вагон №4, четверта людина — у вагон №3, п'ята — у вагон №2, а шоста — у вагон №1. Тому всього способів розподілити людей по вагонах: $\overline{A}_4^6 = 4^6$.

Обчислимо кількість способів розташування людей, за яких принаймні один вагон порожній. Для цього позначимо через A_k всі можливі впорядковані набори із шести цифр, які не містять цифру k, $k = 1,2,3,4$. Наприклад, набір $\{1,4,1,2,2,1\}$ означає, що вагон №3 ніхто не зайняв, він порожній. Коротко, запишемо так

$$A_k = \{\text{вагон №}k \ \text{ порожній}\}.$$

Тоді, наприклад, $N(A_k)$ означає кількість способів розташування людей, за яких k-й вагон порожній, а $N(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$ означає кількість способів розташування, за яких принаймні один вагон порожній. Останнє число і треба знайти. За формулою включення-виключення:

$$N(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = N(A_1) + N(A_2) + N(A_3) + N(A_4) -$$
$$- \sum_{1 \le i < j \le 4} N(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le 4} N(A_i \cap A_j \cap A_k) -$$
$$- N(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4).$$

Очевидно,

$$N(A_k) = 3^6, \quad k = 1,2,3,4,$$

оскільки в цьому випадку всі люди розташовуються по трьох вагонах, але не у вагоні №k (при цьому не виключено, що, наприклад, всі зайшли в один і той самий вагон). Очевидно також, що

$$N(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 0,$$

бо всі вагони не можуть бути порожніми одночасно. Крім того, для будь-яких $1 \le i < j \le 4$ маємо

$$N(A_i \cap A_j) = N\{i\text{-й} \ \text{ та } \ j\text{-й вагони порожні}\} = 2^6,$$

оскільки кожен з шести пасажирів може обрати лише один з двох вагонів (крім вагонів №i та №j). Аналогічно, для будь-яких $1 \le i < j < k \le 4$,

$$N(A_i \cap A_j \cap A_k) = N\{i\text{-й},\ \ j\text{-й та}\ \ k\text{-й вагони порожні}\} = 1^6 = 1.$$

Дійсно, в останньому випадку всі єдиним чином обирають один і той самий вагон. Отже,

$$N(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = 4 \cdot 3^6 - C_4^2 \cdot 2^6 + C_4^3 \cdot 1^6 - 0 =$$
$$= 4 \cdot 3^6 - 6 \cdot 2^6 + 4 = 2536.$$

Остаточно, кількість способів розташувати людей так, щоб в кожному вагоні був принаймні один пасажир:

$$4^6 - 2536 = 1560 \ \text{ способів.}$$

$\square$

Задачі для самостійного розв'язання до 1.2

1. Скільки чисел від 1 до 2022 не ділиться ані на 3, ані на 7?
2. Скільки чисел від 1 до 999 не ділиться ані на 5, ані на 7, ані на 11?
3. Семеро людей чекають на потяг метро (5 вагонів) на кінцевій зупинці. Скільки існує способів розміщення людей по вагонах, при яких не залишиться порожніх вагонів (хоча б по одній людині зайде в кожен вагон)?
4. В спортивному класі навчаються 24 учні. Кожен з них займається принаймні одним видом спорту — баскетболом або волейболом. Разом баскетболом та волейболом займаються 12 учнів. Скільки учнів практикують тільки волейбол, якщо їх в 3 рази більше ніж тих, хто займається тільки баскетболом?
5. В групі туристів 17 осіб володіють англійською мовою, 14 — китайською, 20 — арабською, 19 — польською. При цьому 34 туристи володіють рівно однією мовою, інші – рівно двома мовами. Скільки туристів в групі?

6. В групі з 30 осіб кожний вивчає іноземну мову. При цьому 20 осіб вивчають хінді, 15 — урду, 10 — суахілі, і, крім того, по 8 осіб вивчають 2 мови одночасно (хінді та урду – 8 осіб, хінді та суахілі — 8 осіб, урду та суахілі — 8 осіб). Скільки осіб вивчають всі 3 мови?

7. В групі з 40 туристів, з них 20 володіють англійською, 15 — французькою, 11 — іспанською, і, крім того, англійською і французькою — 7 осіб, англійською та іспанською — 5 осіб, французькою та іспанською — 3 туристи, і одразу трьома мовами — 2 туристи. Скільки туристів не володіють жодною з цих мов?

8. В групі дитячого садка перебуває 5 дітей. Їхній верхній одяг зберігається в одному місці. Діти не пам'ятають, як виглядає їхній одяг, і нова вихователька теж. Збираючись на прогулянку, діти вдягають куртки навмання. Скільки способів вдягнутися є для цієї групи, при яких принаймні одна дитина вдягне свою куртку?

9. Скільки існує послідовностей довжини n, що складаються лише з цифр "0", "1" та "2", причому кожна цифра зустрічається принаймні один раз?

10. Скільки існує способів розподілити n різних кульок по m різних ящиках ($n \geq m$) так, щоб жодний ящик не залишився порожнім?

1.3. Біном Ньютона та біноміальні коефіцієнти

Нагадаємо та доведемо відому нам з курсу математичного аналізу формулу бінома Ньютона.

1.3.1. Біном Ньютона

Означення 1.8. Для будь-якого натурального n справедлива формула

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^k\, b^{n-k}, \tag{1.8}$$

де C_n^k називаються біноміальними коефіцієнтами. Формула (1.8) називається **біномом Ньютона.**

Доведення. *Є декілька доведень формули (1.8). Наведемо спочатку комбінаторне доведення цієї формули. Розпишемо вираз $(a+b)^n$ у вигляді добутку*

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)...(a+b)}_{n} = ... + C_n^k a^k b^{n-k} + ...$$

При множенні з кожної з n дужок треба вибрати один з двох доданків — або a або b. Таким чином, при розкритті всіх дужок утворяться доданки виду $a^k b^{n-k}$ (сумарний степінь кожного доданку рівний n), $0 \le k \le n$. Причому доданок вигляду $a^k b^{n-k}$ зустрічається в сумі C_n^k разів, бо з k дужок вибираємо a, а з інших $(n-k)$ дужок вибираємо b. Таким чином,

$$(a+b)^n = C_n^0 a^0 b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} + C_n^2 a^2 b^{n-2} + \ldots + C_n^{n-1} a^{n-1} b^1 + C_n^n a^n b^0 =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^k\, b^{n-k},$$

що й треба було довести.

Другий спосіб доведення — за допомогою метода математичної індукції (ММІ).
1) перевіримо базу індукції: $n=1 \Rightarrow (a+b)^1 = \sum_{k=0}^{1} C_1^k a^k b^{n-k} = a^1 b^0 + a^0 b^1 = a+b$, вірно.
2) припущення індукції: припустимо, що при $n=k$ виконується

$$(a+b)^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i\, a^i\, b^{k-i}.$$

3) доведемо на основі припущення 2), що виконується рівність

$$(a+b)^{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} C_{k+1}^{i}\, a^{i}\, b^{k+1-i}.$$

Отже,

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^{k} = (a+b)\sum_{i=0}^{k} C_{k}^{i}\, a^{i}\, b^{k-i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} C_{k}^{i}\, a^{i+1}\, b^{k-i} + \sum_{i=0}^{k} C_{k}^{i}\, a^{i}\, b^{k+1-i} =$$

$$= C_k^0 ab^k + C_k^1 a^2 b^{k-1} + C_k^2 a^3 b^{k-2} + \ldots + C_k^{k-2} a^{k-1} b^2 + C_k^{k-1} a^k b^{k-k+1} + C_k^k a^{k+1} b^0 +$$
$$+ C_k^0 b^{k+1} + C_k^1 ab^k + C_k^2 a^2 b^{k-1} + \ldots + C_k^{k-1} a^{k-1} b^{k+1-k+1} + C_k^k a^k b^1 =$$
$$= C_k^k a^{k+1} + (C_k^{k-1} + C_k^k) a^k b + (C_k^{k-2} + C_k^{k-1}) a^{k-1} b^2 + \ldots +$$
$$+ (C_k^1 + C_k^2) a^2 b^{k-1} + (C_k^0 + C_k^1) ab^k + C_k^0 b^{k+1} =$$

|використовуємо властивості 1 та 3 біноміальних коефіцієнтів |

$$= C_{k+1}^{k+1} a^{k+1} + C_{k+1}^{k} a^k b + C_{k+1}^{k-1} a^{k-1} b^2 + \ldots + C_{k+1}^{2} a^2 b^{k-1} + C_{k+1}^{1} ab^k + C_{k+1}^{0} b^{k+1} =$$
$$= \sum_{i=0}^{k+1} C_{k+1}^{i} a^{i} b^{k+1-i}.$$

Таким чином, за ММІ рівність (1.8) *виконується для довільного натурального n.*

Задача 1.1. *Нехай множина X містить n елементів. Знайти кількість підмножин X.*

Розв'язання. Порахуємо всі можливі підмножини. Кількість підмножин, які містять

- нуль елементів множини X, дорівнює C_n^0,
- по одному елементу множини X, дорівнює $n = C_n^1$,
- по два елементи множини X, дорівнює C_n^2,

- ...
- всі n елементів множини X, дорівнює C_n^n.

Таким чином, загальна кількість підмножин множини X дорівнює

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n.$$

Тому множину всіх підмножин скінченної множини X часто позначають так: 2^X.

Інше просте комбінаторне розв'язання цієї задачі полягає в тому, що кожний елемент множини X може входити в вибрану підмножину або ні. Оскільки різних елементів n штук і для кожного є 2 можливості, то кількість підмножин дорівнює кількості розміщень з повтореннями з 2 по n, тобто $\overline{A_2^n} = 2^n$.

$\square$

Приклад 1.24. *Розкрити вираз* $(2x-3y)^4$.

Розв'язання.

$$(2x-3y)^4 = \sum_{k=0}^{4} C_4^k (2x)^k (-3y)^{4-k} =$$

$$= C_4^0(2x)^0(-3y)^4 + C_4^1(2x)^1(-3y)^3 + C_4^2(2x)^2(-3y)^2 +$$
$$+ C_4^3(2x)^3(-3y)^1 + C_4^4(2x)^4(-3y)^0 =$$
$$= 81y^4 - 4\cdot 2\cdot 27xy^3 + 6\cdot 4\cdot 9x^2y^2 - 4\cdot 8\cdot 3x^3y + 16x^4 =$$
$$= 81y^4 - 216xy^3 + 216x^2y^2 - 96x^3y + 16x^4.$$

$\square$

1.3.2. Властивості біноміальних коефіцієнтів

Розглянемо основні властивості біноміальних коефіцієнтів та доведемо ті, які не є очевидними.

1. $C_n^0 = C_n^n = 1$;

2. $C_n^k = C_n^{n-k}$;

3. $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$ (тотожність Паскаля);

   Доведення.

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k}\right) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k.$$

4. $C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}$.

   Доведення. *Безпосередньо,*

$$C_n^k = \frac{n(n-1)!}{k(k-1)!(n-1-(k-1))!} = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}.$$

5. $C_n^k = \overline{P}_n^{k,n-k}$.

6. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

   Доведення. *Випливає з* (1.8), *якщо покласти* $a = b = 1$.

7. $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$.

   Доведення. *Випливає з* (1.8), *якщо покласти* $a = 1$, $b = -1$.

8. Сума коефіцієнтів парних доданків розкладу дорівнює сумі коефіцієнтів непарних доданків розкладу, тобто

$$C_n^0 + C_n^2 + \ldots + C_n^{2m} + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + \ldots + C_n^{2m+1} + \ldots = 2^{n-1}.$$

   Доведення. *Безпосередньо випливає з властивості 7, якщо залишити парні доданки з однієї сторони рівності, а непарні перенести в іншу сторону.*

9. $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n.$

Доведення. *Наведемо комбінаторне доведення цієї рівності. Нехай є $2n$ людей, серед яких порівну чоловіків і жінок. Права частина рівності — C_{2n}^n означає, що ми вибираємо n людей з усієї сукупності $2n$. З іншого боку, потрібні n людей можна вибрати наступним чином:*

0 чоловіків + n жінок (за ОПК: $C_n^0 \cdot C_n^n$ способів)

<u>або</u>

1 чоловік + $(n-1)$ жінок (за ОПК: $C_n^1 \cdot C_n^{n-1}$ способів)

<u>або</u>

2 чоловіки + $(n-2)$ жінок (за ОПК: $C_n^2 \cdot C_n^{n-2}$ способів)

<u>або</u> ...

n чоловік + 0 жінок (за ОПК: $C_n^n \cdot C_n^0$ способів).

Нарешті, за властивістю 2 та правилом додавання, ті самі n людей можна обрати $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2$ способами.

10. Для фіксованого n послідовність $\{a_k = C_n^k, \quad k = 0, \ldots, n\}$ досягає максимуму у

$$\begin{cases} \text{точці } \dfrac{n}{2}, & \text{якщо } n \text{ - парне,} \\ \text{точках } \dfrac{n-1}{2} \text{ та } \dfrac{n+1}{2}, & \text{якщо } n \text{ - непарне.} \end{cases}$$

Доведення. *Розглянемо відношення*

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{C_n^k}{C_n^{k-1}} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \cdot \frac{(n-k+1)!(k-1)!}{n!} =$$

$$= \frac{n-k+1}{k} = \frac{n+1}{k} - 1.$$

Тоді якщо $\frac{n+1}{k} - 1 > 1$, тобто $\frac{n+1}{2} > k$, то $a_k > a_{k-1}$, тобто послідовність (a_k) зростає. А якщо $\frac{n+1}{k} - 1 < 1$, тобто $\frac{n+1}{2} < k$, то

$a_k < a_{k-1}$, тобто послідовність (a_k) спадає. Тобто, послідовність (C_n^k) зростає до певного значення k_0 і спадає після k_0. Знайдемо k_0 з умови:

$$\begin{cases} C_n^{k_0-1} \le C_n^{k_0}, \\ C_n^{k_0+1} \le C_n^{k_0}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k_0+1)!(k_0-1)!} \le \dfrac{n!}{(n-k_0)!k_0!}, \\[2ex] \dfrac{n!}{(n-k_0-1)!(k_0+1)!} \le \dfrac{n!}{(n-k_0)!k_0!}, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} \dfrac{k_0}{n-k_0+1} \le 1, \\[2ex] \dfrac{n-k_0}{k_0+1} \le 1, \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \dfrac{n-1}{2} \le k_0 \le \dfrac{n+1}{2}. \right.$$

Тому,

1) якщо n — парне, тобто $n = 2m$, то $\frac{2m-1}{2} \le k_0 \le \frac{2m+1}{2}$, а отже, максимальне C_n^k досягається при $k = m$ і дорівнює C_{2m}^m;

2) якщо n — непарне, тобто $n = 2m+1$, то максимальне C_n^k досягається у двох точках $k = m$ та $k = m+1$, і рівне відповідно $C_{2m+1}^m = C_{2m+1}^{m+1}$.

Зауважимо, що в літературі (див., наприклад, [2; 12; 17]) можна знайти більше цікавих властивостей біноміальних коефіцієнтів та задач на цю тему.

Наочно біноміальні коефіцієнти зручно представити у вигляді трикутника, який називається **трикутник Паскаля** (див. рис. 1.2).

Трикутник Паскаля дозволяє швидко обчислити коефіцієнти в розкладі бінома Ньютона (принаймні для $n < 10$), а також наочно проілюструвати деякі властивості. Наприклад, властивість 2: коефіцієнти доданків рівновіддалених від початку ($k = 0$) і кінця ($k = n$) розкладу, рівні між собою. Властивість 3: сума двох сусідніх біноміальних коефіцієнтів у рядку n дорівнює коефіцієнту, який стоїть у рядку $n+1$ між двома першими коефіцієнтами.

$$
\begin{array}{lc}
(n=0) & 1 \\
(n=1) & 1 \quad 1 \\
(n=2) & 1 \quad 2 \quad 1 \\
(n=3) & 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
(n=4) & 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
(n=5) & 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
(n=6) & 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
 & \ldots
\end{array}
$$

Рис. 1.2. Трикутник Паскаля

1.3.3. Задача про шляхи у прямокутнику та деякі її застосування

Наступна задача є потужнім інструментом для розв'язання багатьох інших комбінаторних задач.

Розглянемо прямокутну сітку $m \times n$ квадратів. Рухаючись за один крок тільки на 1 клітину вздовж сітки потрібно з точки $(0,0)$ потрапити у точку (m,n). Скільки існує найкоротших шляхів? (під найкоротшим розуміємо шлях, при якому не здійснюється повернення назад)

Розв'язання. Для того, щоб потрапити із точки $(0,0)$ у точку (m,n) найкоротшим шляхом, потрібно зробити m кроків вправо та n кроків вгору. Всього буде зроблено $m+n$ кроків (див. рис. 1.3). Обравши n вертикальних відрізків із $m+n$ відрізків, ми повністю обираємо шлях, а їх можна обрати C_{m+n}^{n} способами. Аналогічно із вибором горизонтальних m відрізків, які можна обрати C_{m+n}^{m} способами. Отже, відповідь до задачі: $C_{m+n}^{n} = C_{m+n}^{m}$ – число найкоротших доріг із точки $(0,0)$ у точку (m,n).

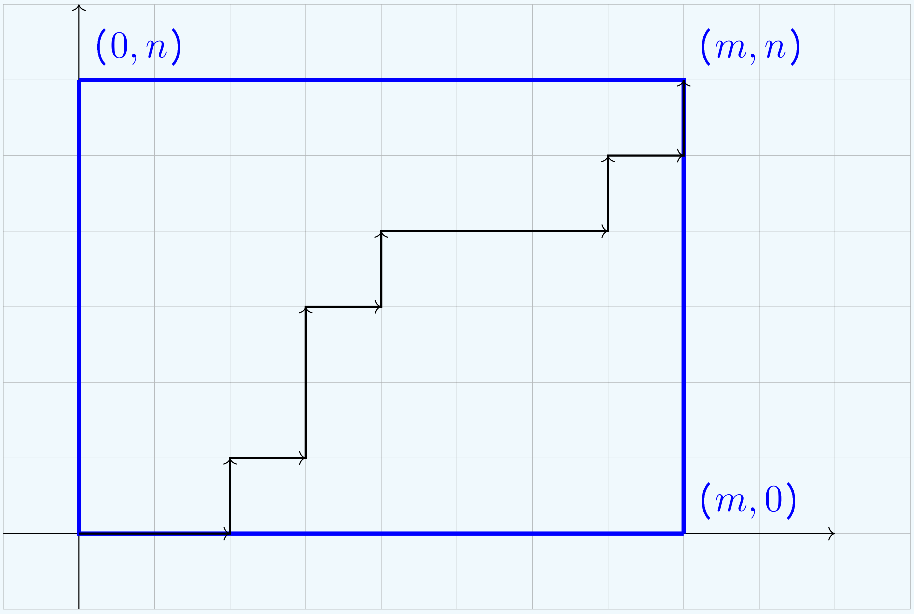

Рис. 1.3. Приклад шляху з точки $(0, 0)$ у точку (m, n)

□

Задача 1.2. *Довести властивість* 9. *біноміальних коефіцієнтів за допомогою задачі про шляхи.*

Розв'язання. Нехай $m = n$, тобто маємо квадрат. Тоді кількість всіх шляхів з точки $(0, 0)$ у точку (n, n) дорівнює C_{2n}^{n}. З іншого боку, порахуємо всі шляхи виходячи із наступного міркування. Будь-який шлях перетинає діагональ AC в одній з точок: $(0, n)$ або $(1, n-1)$ або $(2, n-2)$ або ... $(n, 0)$, причому до діагоналі треба зробити саме n кроків. Таким чином, розбиваємо кожний шлях на дві частини — до діагоналі та після діагоналі (див. рис. 1.4). Ми вже побачили, що будь-який шлях однозначно визначається лише фіксацією кроків "вправо" або лише фіксацією кроків "вгору". Домовимось, наприклад, фіксувати кроки "вгору".

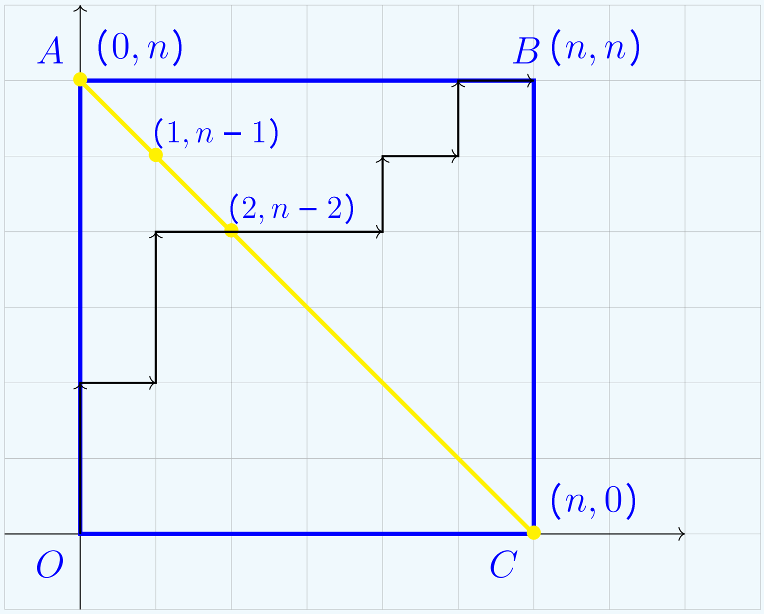

Рис. 1.4. Ілюстрація до задачі 1.2.

Отже,

- якщо шлях проходить через точку $(0,n)$, це означає, що з перших n кроків ми всі n зробили вгору (це C_n^n способів), а далі, від діагоналі, ми робимо всі n кроків вправо, тобто 0 кроків вгору (це C_n^0 способів). Тому, за ОПК $C_n^n \cdot C_n^0 = \left(C_n^0\right)^2$.

- якщо шлях проходить через точку $(1,n-1)$, це означає, що з перших n кроків ми $(n-1)$ кроків зробили вгору (це C_n^{n-1} способів), а далі, від діагоналі ми робимо лише 1 крок вгору (це C_n^1 способів). Тому, $C_n^{n-1} \cdot C_n^1 = \left(C_n^1\right)^2$.

- якщо шлях проходить через точку $(2,n-2)$, це означає, що з перших n кроків ми $(n-2)$ кроків зробили вгору (це C_n^{n-2} способів), а далі, від діагоналі ми робимо лише 2 кроки вгору (це C_n^2 способів). Тому, $C_n^{n-2} \cdot C_n^2 = \left(C_n^2\right)^2$.

- ...

- якщо шлях проходить через точку $(n,0)$, це означає, що з перших n кроків ми 0 кроків зробили вгору (це C_n^0 способів), а далі, від діагоналі, ми робимо всі n кроків вгору (це C_n^n способів). Тому, за ОПК $C_n^0 \cdot C_n^n = \left(C_n^n\right)^2$.

Оскільки між всіма цими можливостями стоїть сполучник “або”, то за правилом додавання, кількість всіх шляхів дорівнює $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2$. $\square$

Задача 1.3. *Скільки існує піддіагональних шляхів в задачі “про шляхи”, за умови, що $m = n$, тобто таких шляхів, що проходять через точки $\{(i,j) \in \mathbb{Z}_+^2 : \quad 0 \le j \le i \le n\}$?*

Розв'язання. Проведемо пряму $y = x + 1$. Очевидно, піддіагональні шляхи — це ті, які не перетинають цю пряму і не дотикаються до неї. Отже, це такі шляхи, які не виходять за межі трикутника OBC.

Решта шляхів або перетинає пряму $y = x + 1$ або дотикається до неї (див. рис. 1.5), тобто має з цією прямою принаймні одну спільну точку. Порахуємо їх.

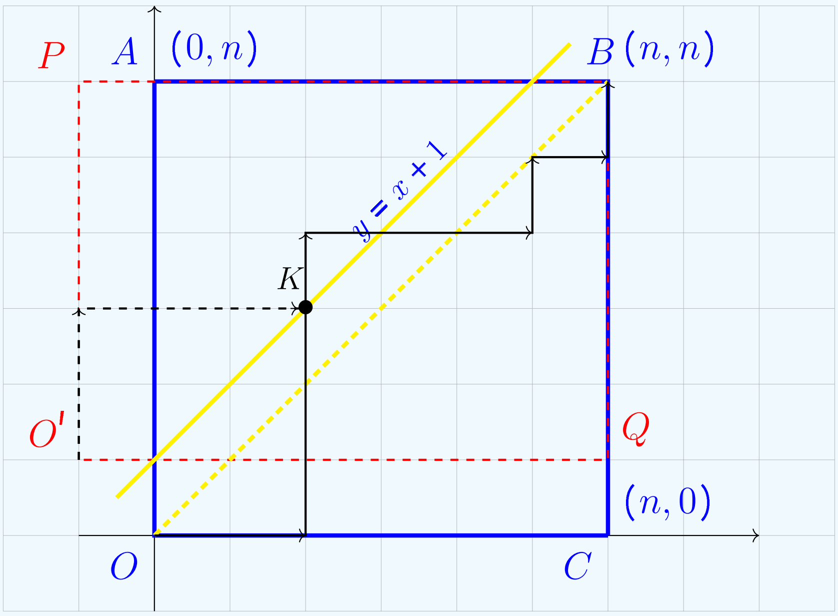

Рис. 1.5. Ілюстрація до задачі 1.3.

Нехай O' — дзеркальне відображення точки O відносно прямої $y = x + 1$, тобто $O'(-1,1)$. Поряд із квадратом $OABC$ розглянемо прямокутник $O'PBQ$ розміром $(n+1) \times (n-1)$. Візьмемо довільний шлях, який має спільну точку з прямою $y = x + 1$. Нехай K— перша така точка на прямій $y = x + 1$. Віддзеркалимо початкову частину шляху від точки O до точки K відносно прямої $y = x + 1$. Отримаємо шлях від O' до B, прокладений в прямокутнику $O'PBQ$. Таким чином, можна встановити взаємно однозначну відповідність: кожному шляху, що має спільну точку з прямою $y = x+1$ поставимо поставимо у відповідність шлях в прямокутнику. Таких шляхів всього C_{2n}^{n+1}. Тому, кількість піддіагональних шляхів:

$$C_{2n}^{n} - C_{2n}^{n+1} = \frac{(2n)!}{(n+1)(n!)^2} = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}.$$

Отже, піддіагональні шляху складають лише $\frac{1}{n+1}$-у частину від кількості всіх шляхів. $\square$

Числа

$$C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}, \quad n \geq 0,$$

називають **числами Каталана**[1].

$$C_0 = 1, \quad C_1 = 1, \quad C_2 = 2, \quad C_3 = 5, \quad C_4 = 14, \quad C_5 = 42, \ldots$$

Зауважимо також, що числа Каталана задовольняють рекурентне співвідношення:

$$C_0 = 1, \quad C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}, \quad n \geq 1.$$

Числа Каталана зустрічаються у багатьох задачах комбінаторики. Їх можна означити декількома еквівалентними способами. Розглянемо ще одну інтерпретацію чисел Каталана.

Повернемось до задачі 1.3 про піддіагональні шляхи. Будемо описувати шлях з точки $(0,0)$ в точку (n,n) наступним чином: кожному кроку "вправо" поставимо у відповідність $(+1)$, а кожному кроку "вгору" — (-1). Таким чином, кожному шляху взаємно однозначно відповідає набір з $2n$ "+" та "–" одиниць. Наприклад, розглянемо квадрат 3×3 та певний шлях: "вправо" → "вгору" → "вгору" → "вправо" → "вправо" → "вгору" (див. рис. 1.6).

[1] Ежен Шарль Каталан (1814-1894) – бельгійський математик, один з найкращих геометрів XIX сторіччя.

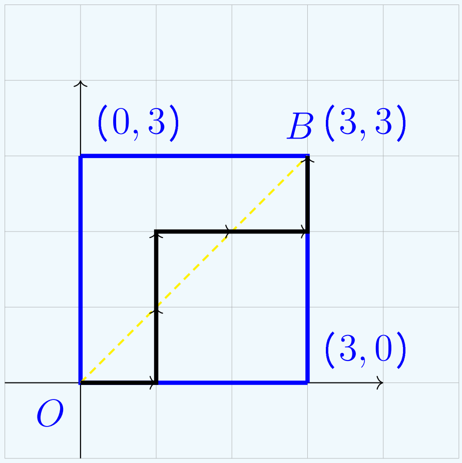

Рис. 1.6. Приклад шляху в квадраті

Шляху, зображеному на рис. 1.6 відповідає така послідовність: $1, -1, -1, 1, 1, -1$.

Числа Каталана описують кількість піддіагональних шляхів у квадраті $n \times n$. Тому нас цікавить: яку характеристику мають піддіагональні шляхи в термінах послідовностей з “+” та “–” одиниць?

Щоб дістатись діагоналі OB треба зробити “вправо” стільки ж кроків скільки і “вгору”. А щоб не перетнути діагональ OB, на кожному етапі шляху не можна зробити більше кроків “вгору” ніж “вправо”. Це означає, що в послідовності “+” та “–” одиниць, яка описує шлях, кількість $(+1)$ має бути не менша за кількість (-1) на будь-якому етапі шляху. Іншими словами, кожна часткова сума піддіагонального шляху є невід’ємною.

Таким чином, числа Каталана — це кількість послідовностей з “+” та “–” одиниць таких, що кожна часткова сума є невід’ємною.

Нарешті зауважимо, що наведеними застосуваннями не вичерпуються всі можливості задачі про шляхи та інтерпретації чисел Каталана. Більше задач та прикладів на цю тему можна знайти, наприклад, у книзі [2].

Задачі для самостійного розв’язання до 1.3

1. Розкласти за формулою бінома Ньютона: $(2x - 5y)^6$.

2. Спростити: $\dfrac{C_{123}^{64}}{C_{123}^{59}} + \dfrac{C_{27}^{11}}{C_{27}^{16}}$.

3. У розкладі бінома $\left(\sqrt[3]{a} - \sqrt{a^{-1}}\right)^{15}$ визначити член, що не залежить від a.

4. Скільки раціональних членів міститься у розкладі $\left(\sqrt[4]{3} - \sqrt{2}\right)^{100}$?

5. Вираз $(4x-3)^{72}$ розклали за формулою бінома Ньютона. Не проводячи цю процедуру, знайти суму всіх коефіцієнтів розкладу.

6. Знайдіть останню цифру числа $C_{26}^0 + C_{26}^1 + C_{26}^2 + \ldots + C_{26}^{26}$.

7. Голосування за 2-х кандидатів на посаду здійснюється натисканням однієї з 2-х кнопок. Скільки може бути різних перебігів голосування, якщо за одного кандидата мають намір голосувати m виборців, а за іншого — n виборців?

8. Довести рівність: $1 \cdot C_n^1 + 2 \cdot C_n^2 + 3 \cdot C_n^3 + \ldots n \cdot C_n^n = n \cdot 2^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

9. Довести рівність Вандермонда:
$$\sum_{k=0}^{r} C_m^k C_n^{r-k} = C_{m+n}^r, \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad r \le m+n.$$

10. Для $n \in \mathbb{N}$ обчислити суми:

    а) $C_1^1 + C_2^1 + C_3^1 + \ldots + C_n^1$; б) $C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \ldots + C_n^2$;

    та довести загальну рівність: $\sum_{i=k}^{n} C_i^k = C_{n+1}^{k+1}$, $1 \le k \le n$.

11. Обчислити суму: $\frac{1}{2}C_n^1 - \frac{1}{3}C_n^2 + \frac{1}{4}C_n^3 - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}C_n^n$.

12. Чергу в театральну касу зайняли $2n$ людей, з яких n осіб мають по одній купюрі номіналом 50 грн. інші — по одній купюрі номіналом 100 грн. Білет на виставу коштує 50 грн. і при відкритті касир не має грошей для здачі. Яка ймовірність того, що ніхто з бажаючих потрапити на виставу не чекатиме на здачу?

13.* Спробуйте розв'язати задачу 12 за припущення, що на початку роботи касир має k купюр номіналом 50 грн. $(0 \le k < n)$. Як зміниться розв'язання задачі, якщо при цьому в черзі стоїть m осіб з купюрою у 50 грн. та n осіб з купюрою у 100 грн. $(n - m \le k < n)$?

2. ЕЛЕМЕНТАРНА ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Теорія ймовірностей — це розділ математики, який вивчає закономірності масових випадкових явищ. Під масовими випадковими явищами будемо розуміти такі явища, які можуть відбуватися при неодноразовому відтворенні по-різному.

Виникнення теорії ймовірностей як науки відносять до XVII сторіччя, коли відбувалися перші спроби математично проаналізувати азартні ігри, зокрема гру у кістки. Перші наукові праці в галузі теорії ймовірностей належать Б. Паскалю[1], П. Ферма[2], Х. Гюйґенсу[3]. Створення теорії ймовірностей пов'язано також з іменами багатьох відомих математиків, серед яких Я. Бернуллі, А. Муавр, П. Лаплас, П.Л. Чебишов, А.М. Ляпунов, А.М. Колмогоров, А.А. Марков та інші.

В цьому розділі ми познайомимось з фундаментальними поняттями та законами елементарної теорії ймовірностей. Зокрема, сформулюємо поняття ймовірності в термінах системи аксіом Колмогорова, доведемо властивості ймовірності; розглянемо класичну та геометричну моделі ймовірності; введемо поняття умовної ймовірності; розглянемо поняття незалежних подій; запишемо теореми додаваня та множення ймовірностей, формулу повної ймовірності та формулу Байєса, і, нарешті, розглянемо схеми незалежних випробувнь — схему Бернуллі та поліноміальну схему, а також встановимо граничні результати для схеми Бернуллі.

2.1. Основні поняття теорії ймовірностей

Зосередимось на початковій термінології теорії ймовірностей.

[1] Блез Паскаль (1623-1662) — французький філософ, письменник, фізик, математик. Один із засновників математичного аналізу, теорії ймовірностей та проективної геометрії.

[2] П'єр Ферма (1601-1665) — французький математик, засновник аналітичної геометрії і теорії чисел.

[3] Христиан Гюйґенс (1629-1695) — нідерландський фізик, механік, математик і астроном, винахідник, автор хвильової теорії світла та праць з оптики і теорії імовірностей.

2.1.1. Початкові означення

Означення 2.1. Стохастичний експеримент — будь-який експеримент, який можна неодноразово повторювати за деяких незмінних умов і результат якого не можна передбачити заздалегідь.

Означення 2.2. Елементарні події — найменші єдино можливі результати стохастичного експерименту, які виключають один одного. Позначаються: ω.

Означення 2.3. Простір елементарних подій — сукупність всіх елементарних подій даного стохастичного експерименту. Позначається: Ω.

В результаті проведення стохастичного експерименту відбувається одна і лише одна елементарна подія $\omega \in \Omega$.

Приклад 2.1. *Підкидаємо монету 1 раз. Оскільки при підкиданні монети ми заздалегідь не знаємо якою стороною (гербом або решкою) вона впаде, то маємо стохастичний експеримент. Простір елементарних подій* $\Omega = \{\Gamma, P\}$, *відповідно,* $\omega_1 = \{\Gamma\}$, $\omega_2 = \{P\}$ *— елементарні події даного стохастичного експерименту.*

Приклад 2.2. *Підкидають 2 монети. Знову маємо стохастичний експеримент, бо заздалегідь не відомо якою стороною впаде кожна монета. Простір елементарних подій*

$$\Omega = \{\Gamma P, P\Gamma, PP, \Gamma\Gamma\}.$$

Відповідно, $\omega_1 = \{\Gamma P\}$, $\omega_2 = \{P\Gamma\}$, $\omega_3 = \{PP\}$, $\omega_4 = \{\Gamma\Gamma\}$ *— елементарні події.*

Приклад 2.3. *Розглянемо стохастичний експеримент, який полягає у підкиданні гральної кістки 1 раз. В цьому випадку простір елементарних подій*

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Відповідно, $\omega_i = \{i\}$, $i = 1, 2, ..., 6$, *— елементарні події.*

Приклад 2.4. *Підкидають монету до першої появи герба. Простір елементарних подій*

$$\Omega = \{Г,\ РГ,\ РРГ,\ РРРГ,\ РРРРГ,\ ...\}.$$

Відповідно, $\omega_i = \{\underbrace{Р...Р}_{i-1}Г\}$, $i = 1, 2, ...,$ *— елементарні події.*

Приклад 2.5. *Навмання кидають точку на відрізок* $[0; 1]$*. Простір елементарних подій в цій задачі*

$$\Omega = [0; 1].$$

Відповідно, ω *— довільне число з відрізка* $[0; 1]$ *буде елементарною подією.*

Зауваження 2.1. Із наведених прикладів випливає, що простір елементарних подій Ω може бути скінченним (приклади 2.1-2.3), зліченним (приклад 2.4), і навіть незліченним (приклад 2.5).

Означення 2.4. Випадкова подія — будь-який результат стохастичного експерименту.

Випадкові події позначають великими латинськими літерами: $A, B, C...$

Приклад 2.6. *Підкидаємо 2 монети. Розглянемо наступні випадкові події:*

$A = \{$*випало 2 герби*$\} = \{ГГ\}$,
$B = \{$*випало не менше одного герба*$\} = \{ГР,\ РГ,\ ГГ\}$.
$C = \{$*випала рівно одна решка*$\} = \{ГР,\ РГ\}$.

Означення 2.5. Випадкова подія називається **достовірною** (вірогідною), якщо вона завжди відбувається у стохастичному експерименті.

Означення 2.6. Випадкова подія називається **неможливою**, якщо вона ніколи не відбувається у стохастичному експерименті.

Приклад 2.7. *Підкидають гральну кістку. Розглянемо наступні випадкові події:*

A={випала "5"}={"5"},
B={випало парне число} = {"2", "4", "6"},
C={випала грань з числом "7"},
D={випало ціле число} = {"1" , "2" , "3" , "4" , "5" , "6"}.
Тут подія C є неможливою, а подія D — достовірною.

Кожна випадкова подія А інтерпретується як підмножина простору елементарних подій Ω. Випадкова подія А відбулась, якщо відбулась будь-яка елементарна подія $\omega \in A$. Неможливу подію доцільно позначити через $\varnothing$, вірогідну — через Ω (бо ця подія містить всі елементарні події). *Отже, всі операції над множинами можна перенести на операції над подіями.*

2.1.2. Операції над подіями

Розглянемо основні операції над подіями у цьому підрозділі.

1. Включення $A \subset B$ означає, що подія B відбувається, якщо відбувається подія A (див. рис.2.1).

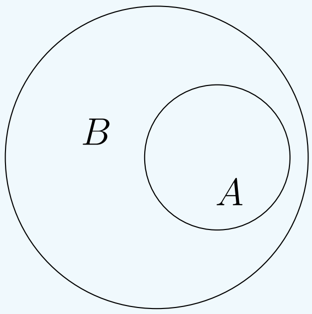

Рис. 2.1. Включення множини А в множину В

Приклад 2.8. *Із колоди в 52 карти навмання вибрали карту. Нехай*
A={вибрали карту пікової масті},
B={вибрали карту чорної масті}.
Очевидно, що $A \subset B$.

2. Об'єднання подій A і B або **сума** подій (позначається $A \cup B$ або $A + B$) — це подія, яка відбувається, якщо відбувається хоча б одна з подій: A або B, або і A і B (див. рис.2.2).

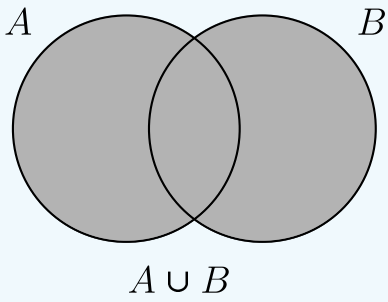

Рис. 2.2. Об'єднання подій

Об'єднувати можна нескінченну кількість подій: $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Приклад 2.9. *Гральну кістку підкидаємо один раз. Розглянемо випадкові події*

A={*випаде парна кількість очок*},

B={*випаде "5"*}.

Тоді $A \cup B$ = {*"2" , "4" , "5" , "6"* }.

3. Перетин подій A і B або **добуток** подій (позначається $A \cap B$ або AB) — це подія, яка відбувається, якщо відбувається і A, і B одночасно (див. рис. 2.3).

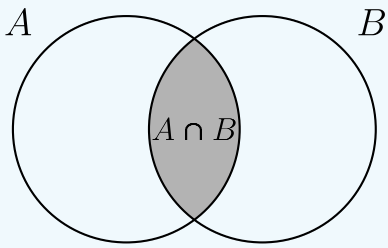

Рис. 2.3. Перетин подій

Перетинати можна нескінченну кількість подій: $\cap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Приклад 2.10. *Гральну кістку підкидаємо один раз. Розглянемо випадкові події*

A={*випало число очок кратне 3*} = {*"3", "6"*},

B={*випало "6"*},

C={*випало "2"*}.

Тоді $A \cap B$ = {*"6"*}, $A \cap C = \varnothing$, $B \cap C = \varnothing$.

Означення 2.7. Випадкові події A і B називається **несумісними**, якщо вони не можуть відбутися одночасно в стохастичному експерименті, тобто $A \cap B = \varnothing$.

Означення 2.8. Кажуть, що випадкові події $A_1, A_2, ..., A_n$ утворюють **повну групу подій**, якщо:

1) $A_i \cap A_j = \varnothing$, $\forall i \neq j$, тобто **події попарно несумісні**;
2) $\cup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

Приклад 2.11. *Виконується два постріли в мішень. Розглянемо випадкові події*

A={*одне влучення в мішень*},
B={*2 влучення в мішень*},
C={*жодного влучення в мішень*}.

Тоді події A, B, C *утворюють повну групу подій. Дійсно, пункт* 1) *означення* 2.8 *виконується:* $A \cap B = \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$, $B \cap C = \varnothing$. *Пункт* 2) *означення теж виконується, оскільки подіями* A, B, C *вичерпуються всі можливі результати експерименту.*

4. Протилежна до A подія (позначається $\overline{A}$) — це подія, яка відбувається тоді, коли не відбувається A (див. рис. 2.4).

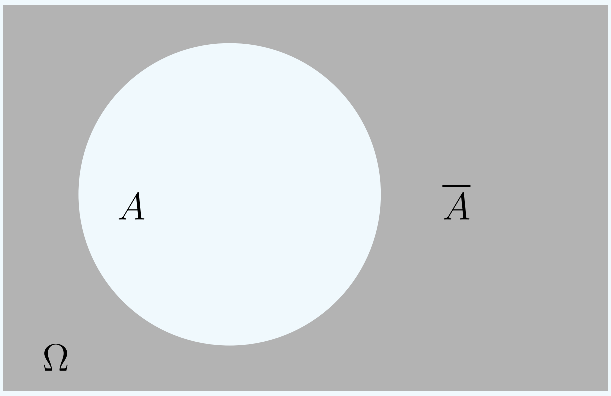

Рис. 2.4. Протилежна подія

Зауваження 2.2. Події A та $\overline{A}$ утворюють повну групу подій, оскільки $A \cap \overline{A} = \varnothing, A \cup \overline{A} = \Omega$.

Приклад 2.12. *Із колоди 36 карт обирають одну карту. Розглянемо випадкову подію* $A = \{$*обрали туз*$\}$. *Тоді* $\overline{A} = \{$*обрали не туз*$\}$.

5. Різниця подій A та B (позначається $A \setminus B$) — це подія, яка відбувається тоді, коли відбувається A і не відбувається B (див. рис. 2.5).

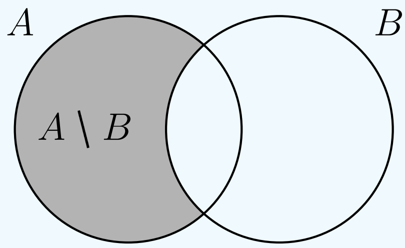

Рис. 2.5. Різниця подій

Приклад 2.13. *Гральну кістку підкидаємо один раз. Розглянемо випадкові події*

A=\{*випало число очок більше за "2"*\} = \{"3", "4", "5", "6"\},

B=\{*випало число очок кратне 3*\}.

Тоді $A \setminus B$ = \{"4", "5"\}.

Зауваження 2.3. Всі властивості над множинами зберігаються для операцій над подіями. Наприклад,

- $\Omega \setminus A = \overline{A}$;
- $A \setminus B = A \cap \overline{B} = A \setminus (A \cap B)$;
- $A \cap A = A$, $A \cup A = A$;
- $A \cup \Omega = \Omega$, $A \cap \Omega = A$;
- комутативність:

$$A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A;$$

- асоціативність:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$$

- дистрибутивність:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

- правила де Моргана:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \text{ та } \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Нарешті, відмітимо, що у [3] можна знайти детальну порівняльну аналогію між операціями над множинами та відповідними операціями над випадковими подіями і їх трактування.

Задачі для самостійного розв'язання до 2.1.1-2.1.2

1. Підкидають 2 гральні кістки. Запишіть простір елементарних подій.

   Нехай
   $$A = \{\text{випало число очок менше за “3”}\},$$
   $$B = \{\text{випало непарне число очок}\}.$$
   Опишіть події $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$.

2. Нехай
   $$A_i = \{i\text{-й магазин мережі працює}\},\ \ i = 1, 2, 3.$$
   Записати наступні події:

   а) всі магазини мережі працюють;

   б) жоден магазин не працює;

   в) принаймні один магазин працює;

   г) лише один магазин працює;

   д) лише 3-й магазин працює;

   е) не більше 2-х магазинів мережі працюють.

2.1.3. Статистична ймовірність

Перш ніж сформулювати строге означення ймовірності, розглянемо суто "практичне" означення. Нехай за деяких незмінних умов проводиться серія з n випробувань, в кожному з яких деяка подія A може відбутися або ні. Припустимо, що ми провели n (досить велику кількість) стохастичних експериментів, в результаті чого подія A відбулась k разів. Тоді число

$$\frac{k}{n} \text{ – } \textbf{відносна частота} \text{ появи події } A.$$

Тривалі спостереження за появою чи не появою події A при дотриманні одного і того самого комплексу умов показують, що відносна частота для досить великих n є майже однаковою.

Наприклад, багатьма вченими проводилися серії експериментів з підкидання монети. В літературі відомі наступні спостереження:

Таблиця 2.1

Прізвище	*Кількість підкидань n*	*Частота випадінні герба*
Ж. Бюффон	4040	0.5069
Де Морган	4092	0.5005
В. С. Джевонс	20480	0.5068
В. Романовський	80640	0.4923
К. Пірсон	24000	0.5005
В. Феллер	10000	0.4979

Таким чином, при досить великій кількості підкидань, частота появи досить близька до $\frac{1}{2}$.

Я. Бернуллі в своєму творі "Мистецтво припущень" пише: "Якщо хтось розглядав би погоду за велику кількість років, що минули, і відзначав, скільки разів вона була ясною або дощовою, або хтось дуже часто спостерігав би гру двох і відзначав, скільки разів той або інший є переможцем, то цим відкрив би співвідношення, в якому ймовірно знаходяться кількість випадків, коли та ж сама подія за обставин, подібних до колишніх, в майбутньому може статися чи не статися. Цей експериментальний спосіб визначення числа випадків за спостереженнями не є новим і незвичайним ... і його всі постійно дотримуються у повсякденній практиці.”

Означення 2.9. Статистичною ймовірністю випадкової події A називається число $\mathbb{P}(A)$, що дорівнює відносній частоті появи події A при проведенні серії із n експериментів, тобто

$$\mathbb{P}(A) = \frac{k}{n}.$$

Безпосередньо з означення впливають такі властивості статистичної ймовірності:

1) $0 \le \mathbb{P}(A) \le 1$;

2) $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;

3) для A і B таких,що $A \cap B = \varnothing$, виконується $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Статистичний спосіб визначення ймовірності, який спирається на справжній дослід, досить повно інтуїтивно виявляє зміст поняття ймовірності. Зрозуміло, що чим більше n, тим точніше буде визначено ймовірність. Але звернемо увагу також на те, що чисельник дробу — k насправді також залежить від n: $k = k(n)$. Деякі вчені були прихильниками того, щоб емпіричне визначення ймовірності, тобто $\mathbb{P}(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{k(n)}{n}$, вважати основним означенням ймовірності. Але на практиці неможливо забезпечити умову $n \to \infty$. Крім того, недоліком статистичного означення ймовірності є неоднозначність. У випадку з підкиданням монети в якості ймовірності можна прийняти не лише число 0.5, але і 0.49 або 0.51.

2.1.4. Поняття про алгебру та σ-алгебру подій. Означення ймовірності

Для того, щоб підійти до формального означення ймовірності, дамо декілька важливих означень.

Означення 2.10. Непорожня система підмножин $\mathcal{F}$ множини Ω називається **алгеброю** множин (подій), якщо вона містить вірогідну подію, а також замкнена відносно операцій об’єднання і доповнення, тобто:

A1. $\Omega \in \mathcal{F}$;

A2. $\forall A \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$;
A3. $\forall A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$.

Якщо система підмножин $\mathcal{F}$ має нескінченну кількість подій, то замкненість операції об'єднання узагальнюється так: для будь-якої послідовності подій $A_1, A_2, ..., A_n, ... \in \mathcal{F}$ виконується

$$\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

У цьому випадку система підмножин $\mathcal{F}$ називається ***σ*-алгеброю** подій.

Приклад 2.14. *Алгебру подій утворює система множин* $\mathcal{F} = \{\Omega, \varnothing\}$. *Дійсно, виконуються аксіоми* A1-A3 *означення* 2.10. *Така алгебра (або σ-алгебра) називається тривіальною або виродженою.*

Приклад 2.15. *Для будь-якої події A розглянемо систему множин* $\mathcal{F} = \{\Omega, \varnothing, A, \overline{A}\}$. *Легко перевірити, що* $\mathcal{F}$ *є алгеброю.*

Більш детально з поняттями алгебри та σ-алгебри можна познайомитись у курсі теорії міри та функціонального аналізу (див., наприклад, [1]).

Означення 2.11. Простір елементарних подій Ω, на якому введена σ-алгебра подій $\mathcal{F}$ називається **вимірним простором** і позначається $(\Omega, \mathcal{F})$.

Означення 2.12. Нехай $(\Omega, \mathcal{F})$ – вимірний простір стохастичного експерименту, тобто виконуються умови A1-A3. Поставимо кожній події $A \in \mathcal{F}$ у відповідність число $\mathbb{P}(A)$ таке, що виконуються властивості

P1. (невід'ємність) $\forall A \in \mathcal{F}$: $\mathbb{P}(A) \geq 0$,
P2. (нормованість) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
P3. (σ-адитивність) $\forall A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$, таких, що $A_i \cap A_j = \varnothing, \forall i \neq j$, виконується

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Задане так число $\mathbb{P}(A)$ називається **ймовірністю події** A.

Кажуть, що умови A1 – A3, P1 – P3 складають систему аксіом теорії ймовірностей або систему аксіом Колмогорова[1].

Трійка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ називається **ймовірнісним простором**.

Якщо обійти поняття σ-алгебри, то *"спрощене означення"* ймовірності можна сформулювати так: кожній події A ставимо у відповідність число $\mathbb{P}(A)$ таке, що виконуються умови P1–P3. Це число $\mathbb{P}(A)$ будемо називати ймовірністю події A. Але спробуємо пояснити, навіщо вводиться така структура множин як σ-алгебра $\mathcal{F}$.

З інтуїтивної точки зору випадкова подія — це будь-який факт, який може реалізуватися або не реалізуватися в результаті стохастичного експерименту. Скажемо, у прикладах пунктів 2.1–2.2 ми побачили, що наведені події легко записати як підмножини простору елементарних подій, а тому природно було б визначити випадкову подію як довільну підмножину простору Ω.

У ситуації скінченного або зліченого Ω це не викликає жодних суперечностей — для випадкової події $A = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ ми можемо визначити її ймовірність як суму ймовірностей всіх елементарних подій, що входять до її складу: $\mathbb{P}(A) = \sum_i \mathbb{P}\{\omega_i\}$. Якщо ж простір Ω є незліченим, то така сума може містити незлічену кількість доданків, а отже й не мати жодного сенсу. Тому в цьому випадку можна очікувати на появу парадоксів, у яких спроба оголосити будь-яку підмножину простору Ω випадковою подією та приписати їй якусь імовірність неодмінно закінчуватиметься внутрішніми суперечностями. Продемонструємо такий парадокс на класичному прикладі, який належить Джузеппе Віталі[2].

[1]Андрій Миколайович Колмогоров (1903-1987) — російський математик, один із творців теорії ймовірностей та теорії випадкових процесів. В його книзі "Основні поняття теорії ймовірностей" (1936) викладена аксіоматика теорії ймовірностей, яка заклала міцний фундамент для величезної будівлі накопичених за майже 300 років закономірностей та задач, та об'єднала їх у окрему математичну науку.

[2]Джузеппе Віталі (1875–1932) – італійський математик, відомий своїми роботами в галузі математичного аналізу. Він є автором першого прикладу множини невимірної за Лебегом (див. курс функціонального аналізу та теорії міри, наприклад, [1]). Ми наводимо його ідею з ймовірнісною інтерпретацією.

Приклад Віталі

На колі $\mathcal{C}$ одиничної довжини введемо одновимірну систему координат. А саме, зафіксуємо довільну точку O кола (наприклад, його "північний полюс"), припишемо їй координату 0, а кожній іншій точці $X \in \mathcal{C}$ надамо координату $x \in (0,1)$, де x — відстань між O та X уздовж кола $\mathcal{C}$ в напрямку проти годинникової стрілки. В такий спосіб ми встановили взаємно однозначну відповідність між колом $\mathcal{C}$ та проміжком $[0,1)$. Надалі ми завжди будемо асоціювати число $x \in [0,1)$ з точкою $X \in \mathcal{C}$, а операції додавання та віднімання розуміти за модулем 1: $\frac{5}{7} + \frac{4}{9} = \frac{73}{63} \bmod 1 = \frac{10}{63}$. Також будемо однаково позначати множину $A \subset \mathcal{C}$ та випадкову подію, яка полягає в потраплянні точки до цієї множини.

Розглянемо стохастичний експеримент, що полягає у випадковому киданні матеріальної точки на коло $\mathcal{C}$. Припустимо, що нам вдалося приписати *кожній* множині $A \subset \mathcal{C}$ імовірність $\mathbb{P}(A)$ таким чином, що $\mathbb{P}(A+x) = \mathbb{P}(A)$ для будь-якого $x \in [0,1)$. Остання умова означає "рівномірність" кидання, тобто ймовірність потрапляння точки у множину A інваріантна відносно поворотів цієї множини. Побудуємо таку множину $E \subset \mathcal{C}$, що будь-яке припущення про значення ймовірності $\mathbb{P}(E)$ призводитиме до суперечності.

Введемо на колі $\mathcal{C}$ $\big($або, що рівносильно, на проміжку $[0,1)\big)$ таке відношення: $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$, де $\mathbb{Q}$ — множина раціональних чисел. Легко перевірити, що це відношення є відношенням еквівалентності. Відомо, що в цьому випадку коло $\mathcal{C}$ можна подати у вигляді об'єднання (незліченого числа!) класів еквівалентності $\mathcal{A}_\alpha$: $\mathcal{C} = \bigcup_\alpha \mathcal{A}_\alpha$, де множини $\mathcal{A}_\alpha$ попарно не перетинаються. Нагадаємо, що за означенням класів еквівалентності $x \in \mathcal{A}_\alpha$ тоді й тільки тоді, коли $x \sim \alpha$, тобто $x - \alpha \in \mathbb{Q}$. Отже, клас $\mathcal{A}_0$ містить раціональні числа: $\mathcal{A}_0 = \mathbb{Q} \cap [0,1)$, клас $\mathcal{A}_{\frac{e}{\pi}}$ містить числа, що після віднімання $\frac{e}{\pi}$ стають раціональними: $\mathcal{A}_{\frac{e}{\pi}} = \left\{x \in [0,1) \colon x - \frac{e}{\pi} \in \mathbb{Q}\right\}$ тощо.

Розглянемо тепер множину E, яка містить *рівно по одному представнику* з кожного класу еквівалентності, та покажемо, що E і буде тією самою множиною, якій не вдасться приписати жодної ймовірності $\mathbb{P}(E)$. Для кожного раціонального $r \in \mathbb{Q} \cap [0,1)$ позначимо через E_r множину, одержану поворотом E: $E_r = E + r$. Зауважимо, що множини E_r при різних r попарно не перетинаються та покривають усе коло $\mathcal{C}$:

$$E_{r_1} \cap E_{r_2} = \varnothing, \qquad r_1 \neq r_2, \tag{2.1}$$

$$\bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1)} E_r = \mathcal{C}. \tag{2.2}$$

Для доведення (2.1) припустимо, що існує $x \in E_{r_1} \cap E_{r_2}$. Тоді за означенням E_r маємо $x - r_1 \in E$ та $x - r_2 \in E$. Але різниця $(x - r_1) - (x - r_2) = r_2 - r_1$ є раціональним числом, і тому числа $x - r_1$ та $x - r_2$ належать деякому спільному класу еквівалентності, а отже й не можуть *обидва* лежати у множині E, яка містить лише по *одному* представнику з кожного класу. Щоб довести (2.2), розглянемо будь-яке число $x \in \mathcal{C}$ і позначимо через $\mathcal{A}_\alpha$ клас еквівалентності, якому воно належить. Тут через α позначено той самий елемент цього класу, який потрапив у множину представників E. Тоді за означенням класу $x \sim \alpha$, тобто $x - \alpha = r \in \mathbb{Q} \cap [0,1)$. Отже, $x = \alpha + r \in E + r = E_r$.

Оскільки множини E_r утворюються поворотом E, всі вони мають однакові ймовірності $\mathbb{P}(E)$. Тому з (2.1), (2.2) та аксіоми P3 маємо:

$$\sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1)} \mathbb{P}(E) = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1)} \mathbb{P}(E_r) = \mathbb{P}(\mathcal{C}) = 1. \tag{2.3}$$

При $\mathbb{P}(E) = 0$ (2.3) перетворюється на $0 = 1$, а при $\mathbb{P}(E) > 0$ — на $\infty = 1$. Це показує, що ймовірності $\mathbb{P}(E)$ неможливо приписати жодного значення.

Отже, якщо Ω – скінчений або злічений простір елементарних подій, то $\mathcal{F} = 2^\Omega$, тобто множина всіх підмножин Ω. Якщо ж Ω – незлічений, то слід подбати про те, щоб ймовірності подій, які ми збираємось обчислювати, існували. За це і відповідає така структура як σ-алгебра $\mathcal{F}$, тобто аксіоми A1–A3.

Задачі для самостійного розв'язання до 2.1

1. Довести, що σ-алгебра $\mathcal{F}$ має наступні властивості:

   а) $\varnothing \in \mathcal{F}$;

   б) якщо $A, B \in \mathcal{F}$, то $A \cap B \in \mathcal{F}$;

в) якщо $A, B \in \mathcal{F}$, то $A \setminus B \in \mathcal{F}$;

г) якщо $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, то $\cap_{i=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

2. Нехай $\mathcal{F}_1$ та $\mathcal{F}_2$ — дві σ-алгебри. Покажіть, що $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ теж є σ-алгеброю.

3. Нехай $\mathcal{F}_1$ та $\mathcal{F}_2$ — дві σ-алгебри. Чи завжди $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ теж є σ-алгеброю?

4. Нехай $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$ та

$$\mathcal{F}_1 = \{\varnothing, \{a\}, \{b, c, d, e\}, \Omega\},$$

$$\mathcal{F}_2 = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c, d, e\}, \{a, c, d, e\}, \{b, c, d, e\}, \Omega\}.$$

Перевірте, чи є $\mathcal{F}_1$ та $\mathcal{F}_2$ σ-алгебрами.

2.2. Властивості ймовірності

В цьому підрозділі сформулюємо і доведемо властивості ймовірності.

1. $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$, тобто ймовірність неможливої події дорівнює 0.

Доведення. *Оскільки*

$$\varnothing = \cup_{i=1}^{\infty} \varnothing, \quad \varnothing \cap \varnothing = \varnothing,$$

то за σ-адитивністю ймовірності $\mathbb{P}(\varnothing) = \mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} \varnothing) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\varnothing)$. *Отриманий числовий ряд є збіжним тоді і тільки тоді, коли* $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

2. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$, якщо $A \cap B = \varnothing$.

Доведення.

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cup B \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \ldots \cup \varnothing) =$$

$$=\Big|\textit{за аксіомою } \mathrm{P3} \textit{ про } \sigma\textit{-адитивніть}\Big|=$$

$$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(\varnothing) + \mathbb{P}(\varnothing) + ... + \mathbb{P}(\varnothing) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B),$$

оскільки $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

3. Якщо $A \subset B$, то $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

   Доведення. *Оскільки* $B = A \cup (B \setminus A)$, *то*

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup (B \setminus A)) = \Big|\textit{за властивістю } 2\Big| =$$

$$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \geq \mathbb{P}(A),$$

   оскільки $\mathbb{P}(B \setminus A) \geq 0$.

4. Якщо $A \subset B$, то $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$.

   Доведення. *Доведення безпосередньо випливає із доведення властивості* 3*:*

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A).$$

5. $\forall A \in \mathcal{F}$ виконується $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.

   Доведення. *Ліва частина нерівності випливає із аксіоми* P1. *Права частина нерівності випливає із властивості* 3, *оскільки для будь-якого* $A \subset \Omega$ *виконується* $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(\Omega) = 1$.

6. Нехай $A_1, A_2, ..., A_n$ – повна група подій. Тоді $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) = 1$.

   Доведення. *Використовуючи означення повної групи подій та адитивність ймовірності (властивість* 2*), отримаємо*

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

7. $\forall A \in \mathcal{F}$ виконується $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Доведення. *Оскільки* $A \cup \overline{A} = \Omega$ *та* $A \cap \overline{A} = \varnothing$, *то*

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup \overline{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) \Rightarrow \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A).$$

8. $\forall A, B \in \mathcal{F}$ справедлива ймовірнісна формула включення-виключення:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Доведення. *Запишемо подію* $A \cup B$ *як об'єднання несумісних подій* $A \cup B = A \cup (B \backslash (A \cap B))$. *Дійсно,* $A \cap (B \backslash (A \cap B)) = \varnothing$ *та* $(A \cap B) \subset B$. *Тоді за властивостями 2 та 4 ймовірності мають місце наступні рівності*

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cup (B \backslash (A \cap B))) =$$
$$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \backslash (A \cap B)) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

9. $\forall A, B, C \in \mathcal{F}$,

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) -$$
$$- \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(C \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).$$

Доведення. *Доведення аналогічне доведенню властивості 8, якщо записати подію* $A \cup B \cup C$ *як об'єднання несумісних подій наступним чином:* $A \cup B \cup C = A \cup (B \backslash (A \cap B)) \cup (C \backslash ((A \cup B) \cap C)))$.

10. Загальна формула включення-виключення: $\forall A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{F}$,

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{n} A_i) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) -$$
$$- ... + (-1)^{n-1} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n).$$

Доведення. *Доведення можна провести методом математичної індукції.*

11. ***Теорема неперервності ймовірності.***

Нехай $\left(A_n\right)$ – послідовність подій із $\mathcal{F}$.

1) Якщо $A_1 \subset A_2 \subset ...$, тобто послідовність подій A_n зростає $\Big($позначатимемо: $(A_n)_{n\geq 1} \nearrow \Big)$, то

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

2) Якщо $A_1 \supset A_2 \supset ...$, тобто послідовність подій A_n спадає $\Big($позначатимемо: $(A_n)_{n\geq 1} \searrow \Big)$, то

$$\mathbb{P}(\cap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Доведення. 1) *Покладемо* $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$, $B_3 = A_3 \setminus A_2$, $\ldots$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$, $\ldots$. *Тоді* B_i, $i \geq 1$, *— попарно несумісні події та*

$$\cup_{i=1}^{\infty} B_i = \cup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Отже,

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} B_i) =$$

$$= \Big| \textit{за аксіомою } \mathrm{P3} \textit{ про } \sigma\textit{-адитивніть } \Big| =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\cup_{i=1}^{n} B_i) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

2) *Оскільки* $A_1 \supset A_2 \supset ...$, *то* $\overline{A_1} \subset \overline{A_2} \subset ...$, *тобто* $(\overline{A_i})_{i\geq 1} \nearrow$. *Згідно з твердженням* 1) *цієї теореми*

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\overline{A_n}) = 1 - \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

З іншого боку,

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}) = \mathbb{P}(\overline{\cap_{i=1}^{\infty} A_i}) = 1 - \mathbb{P}(\cap_{i=1}^{\infty} A_i).$$

Отже, $\mathbb{P}(\cap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$, *що й треба було довести.*

12. ***Теорема напівадитивності ймовірності.***

$\forall A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{F}$, справедливе співвідношення

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{n} A_i) \le \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

Доведення. *Покладемо* $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$, $B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$, $\ldots$, $B_n = A_n \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1})$. *Тоді* $B_i, i = 1, ..., n$, *— попарно несумісні події та* $\cup_{i=1}^{n} B_i = \cup_{i=1}^{n} A_i$. *Тому*

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \mathbb{P}(\cup_{i=1}^{n} B_i) =$$

$$= \left| \text{за властивістю } 2 \right| = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i) \le \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i),$$

бо $\mathbb{P}(B_i) \le \mathbb{P}(A_i)$, *оскільки* $B_i \subset A_i, i = 1, ..., n$.

Приклад 2.16. *Про ймовірності подій A та B відомо, що* $\mathbb{P}(A) = 3/4$, $\mathbb{P}(B) = 1/3$. *Які значення може приймати ймовірність* $\mathbb{P}(A \cap B)$*?*

Розв'язання. Оскільки $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$, та $\mathbb{P}(A) \ge \mathbb{P}(B)$, то максимальне значення ймовірність перетину набуватиме, якщо $B \subseteq A$, тобто якщо $A \cap B = B$. В цьому випадку $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/3$.

З іншого боку, за властивостями 8 та 5 відповідно,

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) \ge$$

$$\ge \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1 = 3/4 + 1/3 - 1 = 1/12.$$

Отже, $1/12 \le \mathbb{P}(A \cap B) \le 1/3$. □

2.3. Ймовірнісні моделі

В цьому підрозділі розглянемо дві моделі ймовірності — класичну ймовірність та геометричну ймовірність.

2.3.1. Класична ймовірність

Нехай $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ – **скінченний** простір елементарних подій, причому **всі елементарні події є рівноможливими**, тобто

$$\mathbb{P}(\omega_i) = p, \forall i = 1, 2, ..., n.$$

Тоді

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = n \cdot p \Rightarrow p = \frac{1}{n}.$$

Нехай $A = \{\omega_{k_1}, \omega_{k_2}, ..., \omega_{k_m}\}$ – деяка випадкова подія. Тоді

$$\mathbb{P}(A) = m \cdot p = \frac{m}{n}.$$

Приходимо до означення.

Означення 2.13. За сформульованих умов, ймовірність, що обчислюється за формулою

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{m}{n}},$$

називається **класичною ймовірністю** події A. Тут $N(\Omega) = n$ — загальна кількість елементарних подій, $N(A) = m$ — кількість елементарних подій, що сприяють появі події A.

Легко перевірити, що так введене поняття ймовірності задовольняє всім аксіомам Колмогорова.

Приклад 2.17. *В урні містяться 12 білих та 8 чорних кульок. Яка ймовірність того, що навмання вийнята куля буде білою?*

Розв'язання. Очевидно, $N(\Omega) = 20$, оскільки загальна кількість способів витягнути одну кулю із урни із 20-ма кулями дорівнює 20. Нехай

$$A = \{\text{вийнята куля біла}\}.$$

Кількість елементарних подій ω, що сприяють появі події A дорівнює 12, $N(A) = 12$. Тоді за формулою класичної ймовірності

$$\mathbb{P}(A) = \frac{12}{20} = 0.6.$$

□

Приклад 2.18. *У групі 15 студентів, серед яких 7 відмінників. Навмання обирають 6 студентів. Яка ймовірність того, що серед обраних студентів буде 4 відмінники?*

Розв'язання. Оскільки порядок у групі обраних не має значення, то загальна кількість елементарних подій — це комбінації із 15 студентів по 6, тобто $N(\Omega) = C_{15}^{6}$.

Позначимо $A = \{$серед 6-ти студентів буде 4 відмінники$\}$. Тоді кількість елементарних подій, що сприяють появі події A, дорівнює $N(A) = C_7^4 \cdot C_8^2$. Дійсно, для того, щоб у групі із 6-ти студентів було 4 відмінники спочатку обираємо чотирьох відмінників із семи C_7^4 способами, а потім із восьми "невідмінників" обираємо два студенти C_8^2 способами. Тоді за формулою класичної ймовірності

$$\mathbb{P}(A) = \frac{C_7^4 \cdot C_8^2}{C_{15}^6} = \frac{28}{143}.$$

□

Приклад 2.19 ("Задача про необачну секретарку")**.** *Секретарка мала відправити n листів n адресатам. Вона довільним чином розподілила листи по конвертах (переплутала листи і адресатів). Яка ймовірність того, що принаймні один лист потрапить до свого адресата?*

Розв'язання. Загальна кількість елементарних подій (кількість способів розподілити листи по конвертах)

$$N(\Omega) = n!,$$

що відповідає кількості перестановок з n елементів.

Введемо події:

$$A_i = \{i\text{-ий лист потрапив до свого адресата}\}, i = 1, 2, ..., n,$$

$$A = \{\text{принаймні один лист потрапить до свого адресата}\}.$$

Тоді

$$A = \cup_{i=1}^{n} A_i,$$

і знайдемо ймовірність $\mathbb{P}(A)$. Застосуємо загальну формулу "включення-виключення" (властивість 10 ймовірності) для ймовірності:

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{1\le i<j<k\le n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) -$$

$$-\ldots + (-1)^{n-1}\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n).$$

Тут $\mathbb{P}(A_i) = \dfrac{(n-1)!}{n!}$, $\forall i = \overline{1,n}$, де у знаменнику $n!$ — загальна кількість способів відправити n листів n адресатам, у чисельнику $(n-1)!$ — кількість способів відправити n листів так, щоб саме i-ий лист потрапив до свого адресата (при цьому не виключається можливість, що якісь інші листи теж надійшли за адресою). Таких доданків у сумі C_n^1 штук. Тоді

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) = C_n^1 \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{n\cdot(n-1)!}{n!}.$$

Далі, $A_i \cap A_j$={i-ий та j-ий листи потрапили до своїх адресатів}. Тоді $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \dfrac{(n-2)!}{n!}$, де у знаменнику $n!$ — загальна кількість способів відправити n листів n адресатам, у чисельнику $(n-2)!$ — кількість способів відправити n листів так, що б саме i-ий та j-ий листи потрапили до своїх адресатів (знову не виключається можливість, що якісь інші листи теж надійшли за адресою). Всього таких доданків у формулі C_n^2 (вибираємо з n два листи, які потраплять до своїх адресатів). Тоді

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = C_n^2 \frac{(n-2)!}{n!}.$$

Аналогічно,

$$\sum_{1\le i<j<k\le n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) = C_n^3 \frac{(n-3)!}{n!},$$

$$\ldots$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = C_n^n \frac{1}{n!} = \frac{1}{n!}.$$

Остання ймовірність – це ймовірність того, що всі листи потраплять до своїх адресатів. Таким чином,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n(n-1)!}{n!} - C_n^2\frac{(n-2)!}{n!} + C_n^3\frac{(n-3)!}{n!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!} =$$

$$= \frac{1}{n!}\left(n! - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \ldots + (-1)^{n-1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}.$$

Цікаво, що $\mathbb{P}(A) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 - \frac{1}{e}$. $\square$

Теорія ймовірностей насичена парадоксами[1], оскільки деякі речі здаються більшості з нас такими, що суперечать нашим уявленням. Розглянемо один з них.

Парадокс днів народження

Будемо вважати рік невисокосним. Якщо зібрати разом не більше ніж 365 осіб, можливо, що вони всі народилися в різні дні року. Якщо зібрати 366 осіб, то за принципом Діріхле знайдуться принаймні дві людини, які мають спільний день народження. Якщо ж поставити питання: скільки людей треба зібрати, щоб з ймовірністю 0.99 принаймні два з них мали спільний день народження, то виявляється, що достатньо всього 57 осіб! Несподіваним здається також і те, що в будь-якій групі з 23 людей ймовірність того, що дні народження принаймні двох із них збігаються, вже більше ніж 0.5.

Спробуємо розібратись. Нехай n — кількість осіб в групі, вибраних навмання. Введемо подію:

$$A = \{\text{принаймні дві людини народились в один день року}\}.$$

$$\overline{A} = \{\text{всі члени групи народились в різні дні року}\}.$$

[1] Більше цікавих парадоксів можна знайти, наприклад, в [13].

Тоді
$$\mathbb{P}(\overline{A}) = \frac{365 \cdot (365-1) \cdot (365-2) \cdot \ldots \cdot (365-n+1)}{365^n}.$$
Розв'язати нерівність $\mathbb{P}(A) > 0.5$ відносно n можна чисельно. Але ми застосуємо елементарні наближення. Для цього перепишемо отриманий вираз наступним чином:
$$\mathbb{P}(\overline{A}) = \left(1 - \frac{1}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{365}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{365}\right),$$
і згадаємо, що для маленьких x справедливе наближення: $1-x \sim e^{-x}$. Тому
$$\mathbb{P}(\overline{A}) \approx e^{-\frac{1}{365}} \cdot e^{-\frac{2}{365}} \cdot e^{-\frac{3}{365}} \cdot \ldots \cdot e^{-\frac{n-1}{365}} = e^{-\frac{1+2+3+\ldots+(n-1)}{365}} =$$
$$= e^{-\frac{n\cdot(n-1)}{2\cdot 365}} \approx e^{-\frac{n^2}{730}}.$$
Розглянемо друге питання наведеного парадоксу: скільки людей достатньо для того, щоб з ймовірністю не менше 0.5 принаймні двоє мали один і той самий день народження?

Отже, нехай $\mathbb{P}(A) > 0.5$, тобто $\mathbb{P}(\overline{A}) < 0.5$. Розв'язуючи нерівність
$$e^{-\frac{n^2}{730}} < 0.5$$
відносно n, отримаємо $n > 22.49$. Отже, дійсно, починаючи з групи кількістю 23 людини, ймовірність, що принаймні двоє народились в один день, більша за 0.5.

Випадок $\mathbb{P}(A) > 0.99$ пропонуємо читачеві перевірити самостійно.

Задачі для самостійного розв'язання до 2.3.1

1. Підкидають 2 гральні кістки. Записати простір елементарних подій, визначити ймовірність того, що

   а) Сума очок, що випали, не перевищує 9;

   б) Добуток очок, що випали, не перевищує 9;

   в) Добуток очок націло ділиться на 6.

2. Підкидають 6 гральних кісток. Обчислити ймовірність того, що сума очок дорівнює 7.

3. Код містить 6 цифр від 0 до 9. Яка ймовірність того, що в ньому є рівно дві двійки та рівно три трійки?

4. 20 осіб, серед яких є Саша і Маша сідають в один ряд в кінотеатрі. Яка ймовірність того, що між Сашею та Машею сидітиме не менше двох осіб?

5. В шафі 10 пар взуття. Дитина випадковим чином дістає з шафи 8 черевиків. Яка ймовірність того, що серед них є рівно 2 пари?

6. (Задача Шевальє де Мере)[1]. Яка подія більш ймовірна: одержати принаймні один раз "1" при підкиданні чотирьох гральних кісток, чи при 24-х підкиданнях двох гральних кісток одержати принаймні один раз дві "1"?

7. З колоди з 36 карт двом гравцям роздано по п'ять карт. Яка ймовірність того, що в одного з них пікових карт в два рази більше, ніж у іншого?

8. З колоди в 36 карт дістають 9 карт — по три для Саші, Маші та Леопольда. Яка ймовірність того, що

   а) у жодного з гравців не має тузів;

   б) у кожного з гравців рівно по одному тузу;

   в) обидва чорні тузи в одного з гравців?

9. 10 осіб чекають на потяг метро (5 вагонів). Знайти ймовірності наступних подій:

   а) всі зайшли в один і той самий вагон;

[1] Задача також відома під назвою "Парадокс Шевальє де Мере", оскільки на перший погляд її результат здається несподіваним. Ця задача та задача "про розподіл ставки у грі в карти та кістки" належить пристрасному гравцю шевальє де Мере, який сформулював її вже знаменитому в той час французькому математику Б. Паскалю. Останній в свою чергу в 1654 р. почав листування з цього приводу з іншим відомим французьким математиком того часу П. Ферма. Тим самим вони удвох встановили деякі початкові положення теорії ймовірностей.

б) всі опинились у вагоні №1;

в) дві людини зайшли у вагон №3, інші — у вагон №5;

г) розподілилися порівну між 1-м і 5-м вагонами;

д) в кожен вагон зайшла принаймні одна людина.

10. 10 людей, серед яких Сашко та Марійка, довільним чином займають місця за круглим столом. Яка ймовірність, що Сашко та Марійка сидітимуть поруч?

11. 5 чоловіків та 5 жінок займають місця вздовж двох протилежних сторін прямокутного стола (по 5 з кожної сторони). Яка ймовірність того, що навпроти якогось чоловіка сидітиме чоловік?

12. В урні 40 мишей. Ймовірність того, що при вилученні 2-х мишей з урни обидві будуть білими, дорівнює 7/60. Скільки в урні білих мишей?

13. Яке найменше число разів треба підкинути 2 гральні кістки, щоб з ймовірністю не менше 0.99 хоча б один раз отримати 12 очок?

14. В прикладі 2.19 знайдіть ймовірність того, що рівно k, $1 \le k \le n$, листів потраплять у свої конверти.

2.3.2. Геометрична ймовірність

Розглянемо наступну задачу.

Задача 2.1. *На відрізок довжини l довільним чином кидають точку (тобто обирають точку). Нехай A – подія, що полягає в тому, що точка потрапляє всередину відрізка довжини $l(A)$. Як визначити $\mathbb{P}(A)$?*

Розв'язання. Тут $\Omega = [0; l]$. Логічно припустити, що $\mathbb{P}(A) = k \cdot l(A)$, де k - коефіцієнт пропорційності.

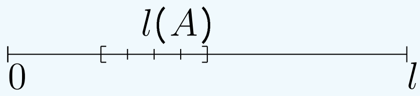

Рис. 2.6. Ілюстрація до задачі 2.1.

Якщо $A = \Omega$, то

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = k \cdot l(\Omega) = k \cdot l \Rightarrow k = \frac{1}{l}.$$

Отже,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{l} \cdot l(A) = \frac{l(A)}{l(\Omega)}.$$

□

Аналогічним чином можна підійти до задачі про потрапляння точки в область на площині, в просторі тощо.

Нехай простір елементарних подій Ω інтерпретується як область на числовій осі (площині, просторі), яка має довжину (площу, об'єм). Нехай $\mathcal{F}$ — σ-алгебра подій — всіх підмножин Ω, які мають довжину (площу, об'єм), тобто є вимірними (термінологія теорії міри).

Означення 2.14. Ймовірність події $A \in \mathcal{F}$, яка обчислюється за формулою

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}},$$

називається **геометричною ймовірністю** події A. Кажуть, що μ — геометрична "міра" множини (в залежності від задачі це може бути довжина, площа, об'єм).

Легко переконатися, що модель геометричної ймовірності також вкладається в аксіоматику Колмогорова (виконуються аксіоми А1-А3, Р1-Р3).

Приклад 2.20. *Точку навмання кинули на відрізок* $[0; 1]$. *Яка ймовірність того, що вона буде віддалена від лівого кінця відрізку принаймні в 2 рази більше, ніж від правого кінця відрізку?*

Розв'язання. Запишемо простір елементарних подій $\Omega = [0; 1]$. Очевидно, $l(\Omega) = 1$.

Нехай навмання кинута точка на відрізок [0;1] має координату x. Відстань від цієї точки до лівого кінця відрізка [0;1] дорівнює $l_{Л} = x$, а до правого кінця $l_{П} = 1 - x$. Для того, щоб точка була віддалена від лівого кінця відрізку принаймні в 2 рази більше, ніж від правого кінця відрізку необхідно, щоб

$$l_{Л} \geq 2l_{П} \quad \Rightarrow \quad x \geq 2(1-x) \quad \Rightarrow \quad x \geq 2/3.$$

Тобто точка має потрапити у відрізок $[2/3; 1] = A$ (див. рис. 2.7).

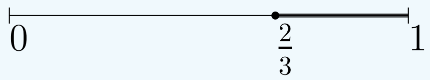

Рис. 2.7. Ілюстрація до прикладу 2.19.

Тоді $l(A) = 1/3$ і за формулою геометричної ймовірності

$$\mathbb{P}(A) = \frac{l(A)}{l(\Omega)} = \frac{1/3}{1} = \frac{1}{3}.$$

□

Приклад 2.21 (“Задача про зустріч”)**.** *Саша і Маша домовились зустрітись між 11:00 та 12:00, але не визначили певний час. Кожен з них приходить незалежно один від одного в цей проміжок часу і чекає на іншого 15 хвилин. Знайти ймовірність того, що Саша і Маша зустрінуться.*

Розв’язання. Нехай x – час приходу Саші, y – час приходу Маші. Запишемо простір елементарних подій

$$\Omega = \Big\{(x; y) : x \in [0; 60],\ y \in [0, 60]\Big\},$$

тобто множина точок квадрата, які зображають час приходу Саші та Маші. Оскільки елементи Ω — точки площини, то геометричною “мірою” площини буде площа і $S(\Omega) = 60^2 = 3600$.

Подія A={Саша і Маша зустрінуться} відбудеться, якщо $|x - y| \leq 15$, тобто

$$A = \Big\{(x; y) : \ |x - y| \leq 15\Big\}.$$

Дійсно, якщо Саша прийшов раніше ($x \le y$), то вони зустрінуться, якщо Маша прийде не пізніше ніж Саша + 15 хвилин, тобто $y \le x+15$. І навпаки, якщо Маша прийшла раніше ($y \le x$), то вони зустрінуться, якщо Саша прийде не пізніше ніж Маша + 15 хвилин, тобто $x \le y + 15$.

Зобразимо на площині (рис. 2.7) області, що відповідають Ω та A. Для побудови множини A перепишемо нерівність $|x - y| \le 15$ у вигляді $x - 15 \le y \le x + 15$.

Залишається обчислити міру (площу) області, що відповідає події A:

$$S(A) = 60^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 45^2 = 1575.$$

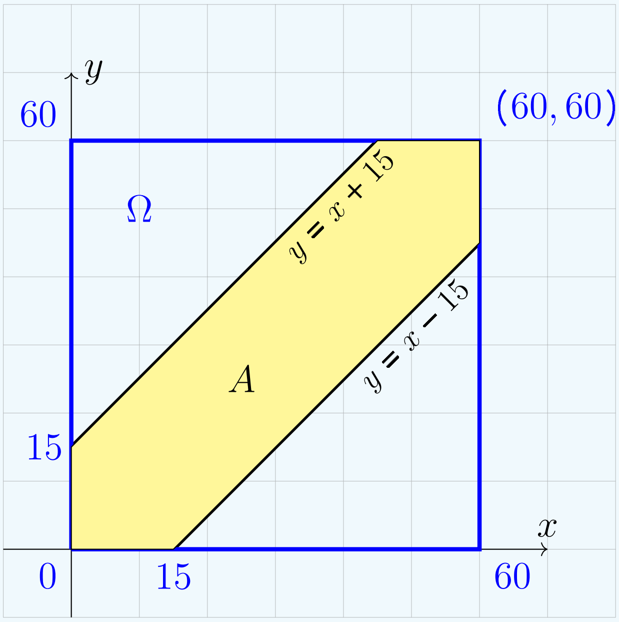

Рис. 2.7. Геометрична ілюстрація до задачі про зустріч

За геометричним означенням ймовірності

$$\mathbb{P}(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{1575}{3600} = \frac{7}{16} \approx 0.4375.$$

$\square$

Задача Бюффона[1]

Нехай на площину, розділену паралельними прямими, відстань між якими $2a$, навмання кидають голку довжиною $2l$, $(l \le a)$. Знайти ймовірність того, що голка перетне яку-небудь із паралельних прямих.

Розв'язання. Нехай x — відстань від середини голки до найближчої прямої, φ — кут між голкою та цією прямою. Простір елементраних подій:

$$\Omega = \left\{(x;\varphi) : 0 \le x \le a,\ 0 \le \varphi \le \pi\right\}.$$

Випадкова подія

$$A = \{\text{голка перетне якусь з прямих}\} = \{x \le l\sin\varphi\}.$$

На рисунку 2.8 зображені два випадки: голка перетинає одну з прямих та голка не перетинає жодної прямої.

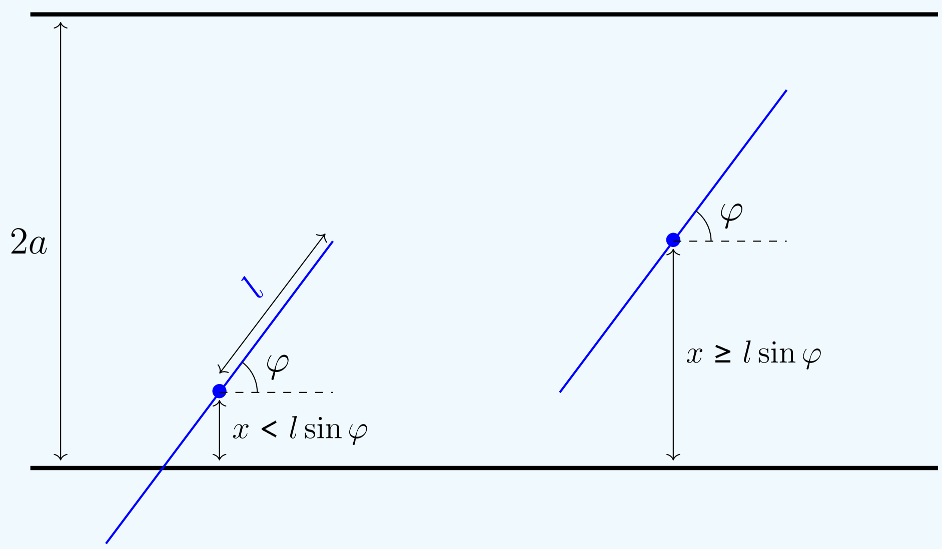

Рис. 2.8. Голка Бюффона

Точки площини, які задовольняють нерівність $x \le l\sin\varphi$, задають подію A (див. рис. 2.9).

[1]Жорж-Луї Леклерк граф де Бюффон (1707-1788) – французький натураліст, біолог, математик, геолог, письменник і перекладач, член Паризької академії наук. Основна праця Бюффона — "Histoire naturelle" ("Природнича історія") в 36 томах.

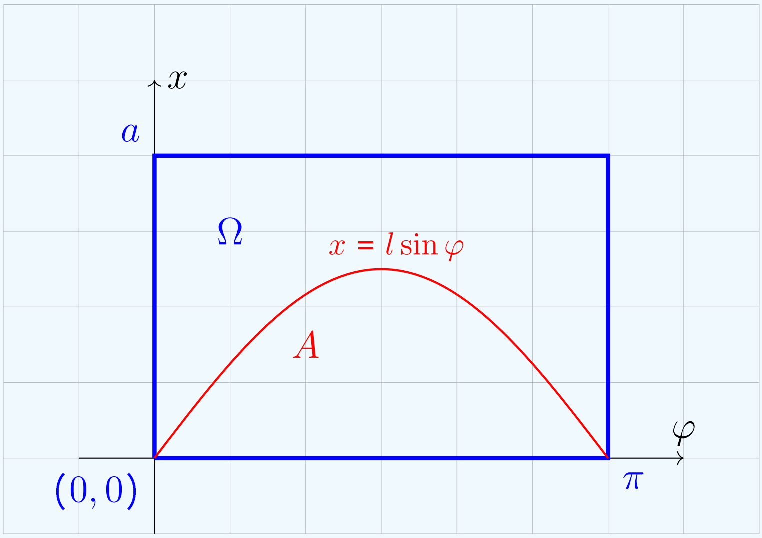

Рис. 2.9. Геометрична інтерпретація в задачі про голку Бюффона

Оскільки Ω – підмножина $\mathbb{R}^2$, вибір робиться навмання, то за означенням геометричної ймовірності

$$\mathbb{P}(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{\int_0^\pi l \sin \varphi d\varphi}{\pi a} = \frac{2l}{\pi a}.$$

$\square$

Задача Бюффона дає можливість експериментальним шляхом наближено обчислити π: припустимо, що голка кидається n разів, із яких m разів перетинає якусь пряму. Статистична ймовірність події A дорівнює $\frac{m}{n}$. Тому $\mathbb{P}(A) = \frac{m}{n} \approx \frac{2l}{\pi a}$. З останнього співвідношення

$$\pi \approx \frac{2ln}{ma}.$$

Деякі вчені дійсно проводили кількісні підкидання голки, щоб експериментальним чином обчислити число π. Наприклад, Вольф (1850 р.) підкидав 5000 разів голку довжини $l = 0.8a$. При цьому голка перетнула якусь із прямих $m = 2532$ разів. Таким чином, він отримав $\pi \approx 3.1596$. У сучасній науці вважається, що задача про голку Бюффона була одним з перших в історії застосувань т.з. методів Монте-Карло[1].

[1]Методи Монте-Карло (за назвою міста Монте-Карло) — це група стохастичних (ймовірнісних) методів, які застосовуються для розв'язання детермінованих задач.

Парадокс Бертрана [2]

У колі радіуса R обирається довільна хорда. Знайти ймовірність того, що її довжина більша від довжини сторони правильного вписаного в це коло трикутника.

Розв'язання 1. Нас цікавить ймовірність випадкової події:

A={довжина хорди більша за довжину сторони правильного трикутника}.

Зафіксуємо один діаметр і розглядаємо всі перпендикулярні до нього хорди. Серед них обирається довільна хорда. Положення кожної хорди однозначно визначається своєю серединою. Тому простір елементарних подій Ω — множина всіх середин всіх можливих хорд. За міру візьмемо довжину, тоді $\mu(\Omega) = 2R$.

Зауважимо, що сторона правильного трикутника, вписаного в коло радіуса R, дорівнює $\sqrt{3}R$.

Із геометричної інтерпретації (див. рис. 2.10) випливає, що подія A виконується, якщо центр хорди попаде на відрізок на діаметрі, симетричний відносно центру O, і довжина цього відрізка дорівнює R. Отже, $\mu(A) = R$.

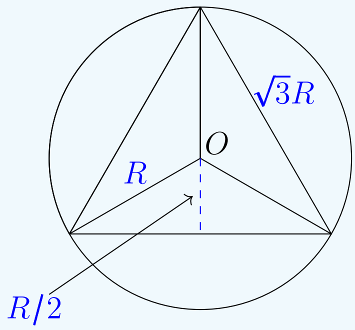

Рис. 2.10. Парадокс Бертрана: розв'язання 1

Тоді за означенням геометричної ймовірності

$$\mathbb{P}(A) = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}.$$

[2] Жозеф Луї Франсуа Бертран (1822-1900) – французький математик, який працював в галузі теорії чисел, диференціальної геометрії, теорії ймовірності та термодинаміки. Був супротивником введення поняття геометричної ймовірності, що аргументував на прикладі цієї задачі.

Розв'язання 2. Знову розглянемо коло радіуса R та розглянемо всі хорди із одним фіксованим кінцем. Нехай φ — кут, який утворює хорда з дотичною, проведеною до кола в точці фіксованого кінця. Зрозуміло, що довільна хорда утворює з дотичною кут $\varphi \in [0, \pi]$, отже

$$\Omega = \{\varphi : 0 \leq \varphi \leq \pi\}.$$

Випадкова подія A відбудеться, якщо кут φ між хордою і дотичною буде в межах від $\frac{\pi}{3}$ до $\frac{2\pi}{3}$, бо саме за цих значень кута довжина хорди більша за довжину сторони правильного трикутника, яка рівна $R\sqrt{3}$ (див. рис. 2.11).

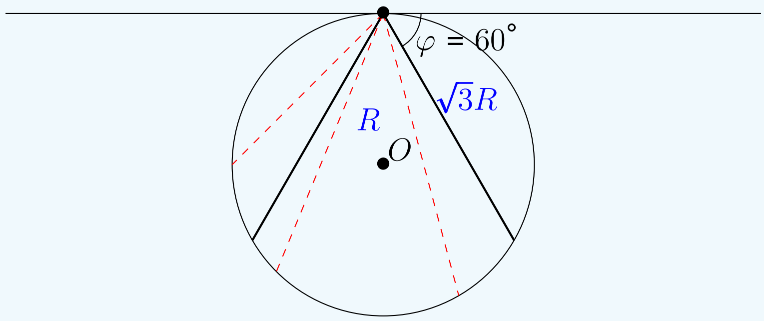

Рис. 2.11. Парадокс Бертрана: розв'язання 2

Тому

$$A = \left\{\varphi : \frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{3}\right\}.$$

За міру візьмемо довжину, тоді $\mu(\Omega) = \pi$, $\mu(A) = \frac{\pi}{3}$. За означенням геометричної ймовірності

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\pi/3}{\pi} = \frac{1}{3}.$$

Розв'язання 3. Нехай є коло радіуса R з центром в початку координат O. Розглянемо всі хорди кола. Кожній з них взаємно однозначно ставиться у відповідність її середина — точка $(x; y)$. Тоді

$$\Omega = \left\{(x; y) : x^2 + y^2 \leq R^2\right\}.$$

Випадкову подію A задовольняють ті хорди, відстань від середин яких до центру кола менша за $R/2$ (див. рис. 2.12, а також рис. 2.10).

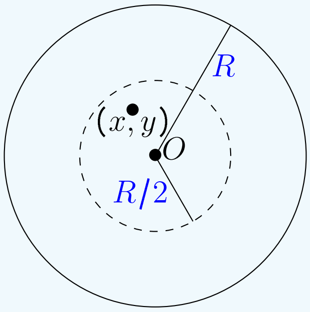

Рис. 2.12. Парадокс Бертрана: розв'язання 3

Тому

$$A = \left\{(x;y) : x^2 + y^2 \le (R/2)^2\right\}.$$

За міру візьмемо площу, тоді $\mu(\Omega) = \pi R^2$, $\mu(A) = \dfrac{\pi R^2}{4}$, а отже,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\pi R^2/4}{\pi R^2} = \frac{1}{4}.$$

Таким чином, ми отримали три різні відповіді до однієї задачі. В чому полягає проблема? — У різних трактуваннях поняття "довільна (випадкова) хорда". Дійсно, а що саме розуміти під "випадковою хордою"? Приклад Бертрана показує, що в задачах на геометричну ймовірність треба акуратно підходити до трактування самої задачі.

Задачі для самостійного розв'язання до 2.3.2

1. Точку навмання кинули на відрізок $[0;1]$. Яка ймовірність того, що вона буде віддалена від лівого кінця відрізка принаймні в 2 рази більше ніж від правого?

2. На відрізку $[0;3]$ навмання вибирають два числа x та y. Знайти ймовірність того, що ці числа задовольняють нерівність: $x^2 \le 3y \le 3x$.

3. Випадковим чином вибирають два числа з відрізка $[1;3]$. Знайти ймовірність того, що їх сума більша за їх добуток.

4. Випадковим чином вибирають три числа з відрізка $[0;1]$. Знайти ймовірність того, що їх сума більше 1.

5. Випадковим чином вибирається три числа з відрізка $[-1;2]$. Знайти ймовірність того, що сума їх квадратів більша їх суми.

6. На площині провели пряму $y = kx + b$, де коефіцієнти k і b вибрані навмання з інтервалу $(0,1)$. Яка ймовірність того, що площа трикутника, утвореного цією прямою та осями координат, не перевищує 1?

7. На двох концентричних колах радіусів 1 і 2 довільним чином вибрали по точці. Яка ймовірність того, що відстань між ними перевищує $\sqrt{3}$?

8. На колі навмання вибрали дві точки та провели в них дотичні. Яка ймовірність того, що точка перетину дотичних віддалена від центра кола більше ніж на 2 радіуса?

9. Коефіцієнти a та b рівняння $x^2 + ax + b = 0$ навмання вибирають з відрізків $[-2;1]$ та $[0;2]$ відповідно. Яка ймовірність того, що корені x_1 та x_2 цього рівняння задовольняють умові $|x_1 - x_2| < 1$?

10. Точка $(a;c)$ вибирається з квадрата $[-2;2]\times[-2;2]$. Яка ймовірність того, що корені рівняння $ax^2 + x + c = 0$:

    а) дійсні?

    б) додатні?

11. Коефіцієнти p та q квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$ вибирають навмання з інтервалів $(0;1)$ та $(-1;0)$ відповідно. Яка ймовірність того, що корені x_1 та x_2 будуть дійсними, причому виконуватиметься нерівність $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 1$?

12. Числа a та b навмання вибрано з відрізка $(0;1)$. Яка ймовірність того, що $ax^2 + x + b > 0$ для будь-якого дійсного x?

13. Вальдемар приходить на зустріч в довільний момент часу між 10^{00} та 11^{00}, а Леопольд – між 11^{00} та 12^{00}. Яка ймовірність того, що Вальдемар буде чекати на Леопольда не більше 20 хвилин?

14. Саша і Маша домовилися, що зустрінуться у бібліотеці, але не призначили певний час. Саша збирається відвідати бібліотеку між 10^{00} та 11^{00} і пробуде там 15 хвилин; Маша прийде до бібліотеки між 10^{30} та 12^{00} і пробуде там 10 хвилин. Яка ймовірність того, що вони зустрінуться в бібліотеці і що це відбудеться саме між 10^{40} і 10^{50} ?

15. На сторонах AB та AD одиничного квадрата $ABCD$ навмання взято точки P та Q. Яка ймовірність того, що площа трикутника PQC більше за $1/3$?

16. Є решітка з радіусом прута a. Відстань між прутиками дорівнює l. Зверху на решітку кидають кульку радіуса r. Знайти ймовірність того, що при падінні кулька зачепить прут решітки.

17. Висота і радіус циліндра дорівнюють 1. На верхньому та нижньому колах навмання вибрали по точці. Яка ймовірність того, що відстань між ними більше ніж $\sqrt{2}$?

18. Прут довжиною l навмання розламують у двох точках. Знайти ймовірність того, що з отриманих частин можна скласти трикутник.

19. Випадковим чином вибирають три точки на відрізку $[0; l]$. Знайти ймовірність того, що з відрізків, рівних відстані від точки 0 до вибраних точок, можна скласти трикутник.

20. На колі навмання відмітили три точки — A, B, C. Яка ймовірність того, що трикутник ABC:

    а) гострокутний;

    б) має тупий кут;

    в) є прямокутним;

    г) є рівнобедреним;

    д) є правильним?

21. На трьох ребрах кубу, які виходять із спільної вершини, навмання вибрано по точці. Яка ймовірність того, що сума квадратів сторін

утвореного ними трикутника буде більше квадрату довжини ребра куба?

22. На двох протилежних паралельних ребрах одиничного кубу навмання вибрано по точці. Яка ймовірність того, що відстань між ними буде більше 1.5?

2.4. Умовна ймовірність

Спочатку розглянемо таку задачу.

Приклад 2.22. *Відомо, що в сім'ї дві дитини і принаймні один з них хлопчик. Яка ймовірність того, що в сім'ї два хлопчики?*

Розв'язання. Введемо події

$$A = \{\text{в сім'ї два хлопчики}\} = \{xx\},$$

$$B = \{\text{в сім'ї принаймні один хлопчик}\} = \{xx, x\partial, \partial x\}.$$

Подія B описує всі можливі елементарні події задачі, тобто фактично є новим простором елементарних подій. Отже, серед всіх можливих елементарних подій: $\{xx, x\partial, \partial x\}$ нас цікавить лише подія $\{xx\}$=$\{$обидва хлопчики$\}$. Таким чином, з 3-х можливих варіантів ми вибираємо єдиний, який забезпечує виконання події A, а отже, ймовірність того, що в сім'ї два хлопчики дорівнює $\frac{1}{3}$.

$\square$

Підкреслимо, що якби в задачі не було додаткової умови (принаймні один хлопчик), то простір елементарних подій мав би вигляд

$$\Omega = \{xx, x\partial, \partial x, \partial\partial\},$$

а відповідна ймовірність дорівнювала б $\frac{1}{4}$. Таким чином, додаткова інформація збільшує ймовірність події.

Що ми зробили при розв'язанні задачі? — Ми розглянули лише ті ω, які сприяють здійсненню умови — події B, і серед них вибрали ті, які сприяють події A (бо B вже відбулась!). Таку ймовірність називають **умовною** і позначають

$$\mathbb{P}(A|B) - \text{“ймовірність події } A \text{ за умови } B\text{”}.$$

У схемі класичної ймовірності

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{N(A \cap B)}{N(B)}, \tag{2.4}$$

або

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}}{\frac{N(B)}{N(\Omega)}} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}, \ \mathbb{P}(B) \neq 0.$$

Остаточно, якщо $\mathbb{P}(B) \neq 0$, отримали формулу умовної ймовірності

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}}.$$

Приклад 2.23. *У сім'ї 5 дітей. Принаймні двоє з них дівчинки. Яка ймовірніcь того, що старший хлопчик?*

Розв'язання. Простір елементарних подій Ω — всі можливі набори по 5 з хлопчиків і дівчат. За ОПК: $N(\Omega) = 2^5 = 32$, бо на кожному з 5-и місць можливі 2 випадки — “x” або “∂”. Інший спосіб обчислити $N(\Omega)$: якщо в сім'ї всі хлопці або всі дівчата — таких варіантів по одному; якщо у сім'ї 4 хлопці і одна дічинка, то таких комбінацій існує C_5^4 штук (вибираємо 4 місця для хлопчиків або одне з 5-и місць для дівчинки); аналогічно у випадку 4-х дівчат і одного хлопця; якщо у сім'ї 3 хлопця та 2 дівчинки, то таких комбінацій C_5^3 штук; аналогічно у випадку 3-х дівчат і 2-х хлопців. Тоді за правилом додавання маємо

$$N(\Omega) = 1 + 1 + 2C_5^4 + 2C_5^3 = 32.$$

Тепер введемо події:

$$A = \{\text{старший} - \text{хлопчик}\},$$

$$B = \{\text{в сім'ї принаймні дві дівчинки}\} - \text{умова.}$$

Потрібно знайти ймовірність події A за умови, що відбулась подія B, тобто потрібно знайти умовну ймовірність $\mathbb{P}(A|B)$.

Запишемо подію $A \cap B$:

$$A \cap B = \{\text{у сім'ї принаймні 2 дівчинки та старший – хлопчик}\} =$$

$$= \{\textit{хххдд, ххдхд, ххддх, хдххд, хдхдх,}$$

$$\textit{хддхх, хддхх, хдддх, хддхд, хдхдд, ххддд, хдддд}\ \}.$$

$$\Rightarrow N(A \cap B) = 11.$$

Для обчислення $N(B)$ розглянемо протилежну до B подію:

$$\overline{B} = \{\text{у сім'ї 0 або 1 дівчинка}\} =$$

$$= \{\textit{ххххх, хххxд, хххдх, ххдхх, хдххх, дхххх}\}.$$

Тоді

$$N(\overline{B}) = 6, \text{ і } N(B) = N(\Omega) - N(\overline{B}) = 2^5 - 6 = 26.$$

Нарешті, за формулою (2.4) шукана ймовірність:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{11}{26}.$$

□

Приклад 2.24. *Підкидають три симетричні гральні кубики. Знайти ймовірність того, що хоча б на одному кубику випаде 1, якщо відомо, що на трьох випали різні грані.*

Розв'язання.Кубики вважаємо розрізненими. З умови задачі відомо, що на трьох кубиках випали різні грані. Це вказує на додаткову інформацію. Тому введемо події:

$$B = \{\text{на трьох випали різні грані}\},$$

$$A = \{\text{хоча б на одному кубику випала "1"}\}.$$

Треба знайти ймовірність події A за умови B, тобто $\mathbb{P}(A|B)$. Очевидно,

$$N(B) = A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4.$$

Оскільки

$$A \cap B = \{\text{випала “1” та інші різні грані на інших двох кубиках}\}.$$

Тоді,

$$N(A \cap B) = C_3^1 \cdot 5 \cdot 4 = 3 \cdot 5 \cdot 4.$$

За формулою (2.4),

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{C_3^1 \cdot 5 \cdot 4}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{2}.$$

□

2.5. Незалежні події

Інтуїтивно поняття незалежності можна проілюструвати наступним чином: подія A не залежить від події B, якщо $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$. Тоді

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A) \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Дамо формальне означення.

Означення 2.15. Події A та B називаються **незалежними**, якщо

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Сформулюємо і доведемо **властивості** незалежних подій:

1. Якщо події A та B — несумісні, то A та B є незалежними тоді і тільки тоді, коли $\mathbb{P}(A) = 0$ або $\mathbb{P}(B) = 0$.

Доведення. *Необхідність. Нехай A та B — незалежні. Тоді за означенням* $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$*, але* $A\cap B = \varnothing$*, тому* $\mathbb{P}(A\cap B) = 0$*. Звідси маємо, що або* $\mathbb{P}(A) = 0$*, або* $\mathbb{P}(B) = 0$*.*

Достатність. Нехай $\mathbb{P}(A) = 0$ *або* $\mathbb{P}(B) = 0$*. Тоді* $\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B) = 0$*. Оскільки A та B — несумісні, то* $\mathbb{P}(A\cap B) = 0$*. Отже, 0=0. Тобто виконується рівність* $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$*. Тому за означенням події A та B є незалежними.*

Зауваження 2.4. В деякій мірі несумісність та незалежність — протилежні поняття. Якщо дві події несумісні, то це в деякій мірі є проявом залежності — одна із подій виключає іншу.

2. Якщо події A та B — незалежні, тоді є нзалежними події A та $\overline{B}$, $\overline{A}$ та B, $\overline{A}$ та $\overline{B}$.

Доведення. *Проведемо доведення для A та* $\overline{B}$*.*

$$\mathbb{P}(A\cap\overline{B}) = \mathbb{P}(A\setminus(A\cap B)) = |\textit{властивість 4 ймовірності}\ | =$$

$$= \mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)(1-\mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B}).$$

Тому за означенням A та $\overline{B}$ *— незалежні.*

Приклад 2.25. *Монету послідовно підкидають два рази. Нехай*

$$A = \{\textit{випала принаймні одна решка}\},$$

$$B = \{\textit{випав герб на першій монеті}\}.$$

Чи є події A, B *незалежними?*

Розв'язання. Простір елементарних подій

$$\Omega = \{\text{“РР”, “ГГ”, “ГР”, “РГ”}\}.$$

Ймовірності подій A, B, та $A\cap B$ відповідно дорівнюють

$$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{4},\quad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2},\quad \mathbb{P}(A\cap B) = \frac{1}{4}.$$

Порівняємо:

$$\mathbb{P}(A\cap B) = \frac{1}{4} \neq \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{8} = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B).$$

Отже, події A та B не є незалежними. □

2.5.1. Попарна незалежність і незалежність у сукупності

Означення 2.16. Події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називаються **попарно незалежними**, якщо для будь-яких $1 \le k < j \le n$

$$\mathbb{P}(A_j \cap A_k) = \mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}(A_k).$$

Означення 2.17. Події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називаються **незалежними у сукупності**, якщо для будь-якого $1 \le k \le n$ та для будь-яких $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2})\ldots\mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Пояснимо означення 2.16 та 2.17 на прикладі трьох подій. Нехай A, B, C — деякі події. Якщо виконуються три наступні рівності

$$1)\, \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B),$$

$$2)\, \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C),$$

$$3)\, \mathbb{P}(C \cap B) = \mathbb{P}(C) \cdot \mathbb{P}(B),$$

то події A, B, C є попарно незалежними. Якщо разом із рівностями 1)-3) виконується рівність

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C),$$

то A, B, C — незалежні у сукупності.

Наведені міркування підтверджують, що **з незалежності у сукупності випливає попарна незалежність**. Розглянемо приклад, який належить С.Н. Бернштейну[1].

[1]Сергій Натанович Бернштейн (1880-1968) — радянський математик; член академії наук УРСР, академії наук СРСР, Паризької академії наук, професор Харківського університету, засновник наукової школи, засновник і директор Українського інституту математичних наук у Харкові. Автор понад 250 праць українською, німецькою, французькою мовами з теорії диференціальних рівнянь, теорії наближення функцій та теорії ймовірностей.

Приклад 2.26 (Приклад Бернштейна). *На площину кидають тетраедр, три грані якого пофарбовано у червоний, зелений, блакитний кольори, відповідно, а на четверту нанесено всі три кольори.*

Нехай A, B, C — події, які означають, що при киданні тетраедра випала грань, на якій присутній червоний, зелений, блакитний колір, відповідно. Чи є події A, B, C незалежним: а) попарно, б) у сукупності?

Розв'язання. Простір елементарних подій

$$\Omega = \{\text{ч, з, б, чзб}\}.$$

Ймовірності подій A, B, C однакові:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

бо кожний колір присутній на двох гранях із 4-х. Ймовірності попарних перетинів всіх подій

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(C \cap A) = \frac{1}{4},$$

оскільки два кольори випадуть в одному із 4-х випадків. Звідси випливає, що події A, B, C є попарно незалежними за означенням, оскільки

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Ймовірність перетину всіх трьох подій

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4},$$

бо всі три кольори випадуть лише в одному із 4-х випадків. Таким чином,

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \frac{1}{8},$$

що означає, що незалежності в сукупності немає. □

2.6. Теореми додавання і множення ймовірностей

До теорем додавання та множення в теорії ймовірностей відносять факти, пов'язані з обчисленням ймовірностей об'єднання декількох подій (в тому числі для попарно несумісних подій) та перетину декількох подій (в тому числі для незалежних у сукупності подій). Деякі з формул додавання та множення ймовірностей нам вже зустрічалися. Підсумуємо та доповнимо перелік формул додавання та множення ймовірності у вигляді таблиці.

Таблиця 2.2

Додавання	**Множення**
1) A, B – несумісні $\Rightarrow$ $\mathbb{P}(A \bigcup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$	**1)** A, B – незалежні $\Rightarrow$ $\mathbb{P}(A \bigcap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$
2) A, B – довільні $\Rightarrow$ $\mathbb{P}(A \bigcup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \bigcap B)$	**2)** A, B – довільні $\Rightarrow$ $\mathbb{P}(A \bigcap B) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A \vert B)$
3) $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ – попарно несумісні $\Rightarrow$ σ-адитивність: $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$	**3)** $A_1, A_2, ..., A_n$ – незалежні у сукупності $\Rightarrow$ $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$
4) $A_1, A_2, ..., A_n$ – довільні $\Rightarrow$ $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) =$ $= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} \mathbb{P}(A_i \bigcap A_j) +$ $+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} \mathbb{P}(A_i \bigcap A_j \bigcap A_k) -$ $- ... + (-1)^{n-1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$.	**4)** $A_1, A_2, ..., A_n$ – довільні $\Rightarrow$ $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 \vert A_1) \cdot$ $\cdot \mathbb{P}(A_3 \vert A_1 \bigcap A_2) \cdot ... \cdot \mathbb{P}\left(A_n \vert \bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right)$.
5) $A_1, A_2, ..., A_n$ – незалежні у сукупності $\Rightarrow$ $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\overline{A_i})$.	

Зауважимо, що як в першому так і в другому стовпцях таблиці формули 1) та 2) є частинними випадками формул 3) та 4) відповідно.

Доведемо формулу 4) множення ймовірності за допомогою методу математичної індукції. Отже,

1) база: $n = 2 \Rightarrow \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1)$ – виконується.

2) припустимо, що при $n = k$ виконується рівність:

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\Big) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_k| \cap_{i=1}^{k-1} A_i).$$

3) доведемо, що для $n = k + 1$ виконується рівність

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{k+1} A_i\Big) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_{k+1}| \cap_{i=1}^{k} A_i).$$

Дійсно,

$$\mathbb{P}\Big(\big(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\big) \cap A_{k+1}\Big) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\Big) \cdot \mathbb{P}\Big(A_{k+1}| \cap_{i=1}^{k} A_i\Big) =$$

$$= |\text{припущення індукції}| =$$

$$\mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_k|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{k-1}) \cdot \mathbb{P}(A_{k+1}| \cap_{i=1}^{k} A_i),$$

що й треба було довести.

Доведемо також формулу 5) таблиці:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right) =$$

$$\Big|\text{незалежність в сукупності } \overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_n}\Big| = 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\overline{A_i}),$$

що й треба було довести.

Приклад 2.27. *У електричній схемі, зображеній на рисунку 2.13, елементи 1, 2, 3, 4 працюють незалежно один від одного.*

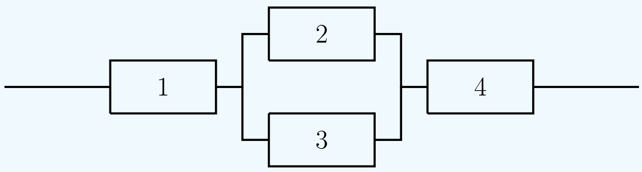

Рис. 2.13. Електрична схема

Ймовірності безвідмовної роботи елементів за період $[0, T]$ *складають 0.6; 0.8; 0.7; 0.9 відповідно. Знайти надійність схеми за період* $[0, T]$ *(надійність — ймовірність того, що схема працюватиме).*

Розв'язання. Нехай

$$A_i = \{\text{елемент } i \text{ працює }\},\ i = 1, 2, 3, 4.$$

Тоді випадкова подія

$$\{\text{схема працює}\} = A_1 \cap (A_2 \cup A_3) \cap A_4.$$

Враховуючи, що елементи працюють не залежно один від одного та застосовуючи теореми додавання та множення, маємо

$$\mathbb{P}\big(A_1 \cap (A_2 \cup A_3) \cap A_4\big) = \mathbb{P}(A_1)\Big(\mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)\Big)\mathbb{P}(A_4) =$$
$$= 0.6 \cdot (0.8 + 0.7 - 0.8 \cdot 0.7) \cdot 0.9 = 0.5076.$$

□

Приклад 2.28. *Дехто забув останню цифру номеру телефону і набирає її навмання. Знайти ймовірність того, що доведеться телефонувати не більше ніж на три номери.*

Розв'язання. Нехай

$$A = \{\text{доведеться телефонувати не більше ніж на три номери}\}.$$

Введемо події

$$A_i = \{\text{цифру не вгадано на } i\text{-му кроці }\},\ i = 1, 2, \ldots 9.$$

Тоді

$$\overline{A} = \{\text{доведеться телефонувати більше ніж на три номери}\} = A_1 \cap A_2 \cap A_3.$$

За формулою множення 4):

$$\mathbb{P}\big(A_1 \cap A_2 \cap A_3\big) = \mathbb{P}\big(A_1\big)\mathbb{P}\big(A_2 | A_1\big)\mathbb{P}\big(A_3 | A_1 \cap A_2\big) =$$
$$= \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} = 0.3.$$

□

Приклад 2.29. *Саша і Маша грають у гру: по черзі підкидають симетричну монету за схемою*

$$\text{СММСММСММ...}$$

Виграє той, в кого першим випаде герб.
(а) Які ймовірності виграшу Саші та Маші?
(б) Якою має бути ймовірність випадіння герба, щоб гра була справедливою?

Розв'язання. (а) Запишемо випадкову подію {виграє Саша} через послідовності випадань герба та решки:

$$\{\text{виграє Саша}\} = \{\text{Г}, \text{РРРГ}, \underbrace{\text{РР...Р}}_{6}\text{Г}, \underbrace{\text{РР...Р}}_{9}\text{Г}, ...\},$$

тоді ймовірність виграшу Саші дорівнює

$$\mathbb{P}\big(\{\text{виграє Саша}\}\big) = \mathbb{P}(\text{Г}) + \mathbb{P}(\text{РРРГ}) + \mathbb{P}(\underbrace{\text{РР...Р}}_{6}\text{Г}) + \mathbb{P}(\underbrace{\text{РР...Р}}_{9}\text{Г}) + ... =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2^6}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2^9}\cdot\frac{1}{2} + ... = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^9} + ...\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{8}} = \frac{4}{7}.$$

Відповідно

$$\mathbb{P}(\{\text{виграє Маша}\}) = 1 - \mathbb{P}(\{\text{виграє Саша}\}) = \frac{3}{7}.$$

Отже, гра не є справедливою.

(б) Нехай ймовірність випадіння герба дорівнює p. Гра буде справедливою, якщо

$$\mathbb{P}(\{\text{виграє Маша}\}) = \mathbb{P}(\{\text{Виграє Саша}\}) = \frac{1}{2}.$$

Оскільки

$$\mathbb{P}\big(\{\text{виграє Саша}\}\big) = p + (1-p)^3 p + (1-p)^6 p + (1-p)^9 p + ... =$$

$$= \frac{p}{1-(1-p)^3},$$

то отримаємо рівняння

$$\frac{p}{1-(1-p)^3} = \frac{1}{2},$$

звідки

$$2p = 1-(1-p)^3.$$

Коренями останнього рівняння є

$$p_1 = 0, \quad p_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \quad p_3 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Оскільки при $p_1 = 0$ задача змісту не має, а $p_3 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2.6 > 1$ — не підходить, то $p_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0.38$ — шукана відповідь.

Отже, гра за вказаними правилами буде справедливою, якщо вона буде здійснюватися монетою, у якої ймовірність випадіння герба $p = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. $\square$

Задачі для самостійного розв'язання до 2.4-2.6

1. З колоди 36 карт навмання вибирають 6 карт. Відомо, що серед них є пікові. Яка ймовірність того, що є також рівно 2 червоних карти?

2. Код містить шість цифр, кожна від 0 до 9. Відомо, що в ньому є принаймні дві однакові цифри. Яка ймовірність того, що їх рівно дві?

3. Підкинули 6 монет. Відомо, що гербів випало більше ніж решок. Яка ймовірність того, що на першій випав герб, а на п'ятій – решка?

4. З колоди 36 карт навмання вибирають 4 карти. Відомо, що серед них є принаймні один валет. Яка ймовірність того, що є також 2 червоних дами?

5. З колоди в 52 карти одну за одною виймають 5 карт. Дві перші карти виявилися піками. Яка ймовірність того, що 3 останні карти – теж піки?

6. Всередині одиничного квадрата рівно ймовірно обирається точка. Нехай (X, Y) — координати цієї точки. Знайти

   а) $\mathbb{P}\{X > 0.5 | X + Y > 0.5\}$;

   б) $\mathbb{P}\{X + Y > 0.5 | X > 0.5\}$;

   в) $\mathbb{P}\{XY < 1/3 | X + Y > 2/3\}$.

7. Одночасно підкидають 2 монети до першої появи 2-х гербів. Відомо, що це сталося не пізніше 8-го підкидання. Яка ймовірність того, що знадобилася парна кількість підкидань?

8. Про події A і B відомо, що вони незалежні. Яка ймовірність того, що здійсниться подія A, але не здійсниться подія B, якщо $\mathbb{P}(A) = 0.3$, а $\mathbb{P}(B) = 0.5$?

9. Чи є події A і B незалежними, якщо

$$\mathbb{P}(A) = 0.2, \quad \mathbb{P}(B) = 0.6, \quad \mathbb{P}(A \cup B) = 0.7?$$

10. В сім'ї 2 дитини. Якою має бути ймовірність народження хлопчика, щоб події $A = \{$діти одностатеві$\}$ та $B = \{$старший - хлопчик$\}$ були незалежними?

11. Чи існує таке $p \in (0; 1)$, що при двократному підкиданні монети з ймовірністю випадіння герба p події $A = \{$випаде принаймні один герб$\}$ та $B = \{$випаде принаймні одна решка$\}$ є незалежними?

12. Студенти виконують контрольну роботу в класі програмного навчання. Робота складається з трьох задач. Для отримання позитивної оцінки потрібно розв'язати не менше ніж дві задачі. Для кожної задачі зашифровано 4 різних відповіді, з яких тільки одна правильна. Студент вибирає відповіді навмання. Яка ймовірність, що він одержить позитивну оцінку?

13. Ймовірність того, що в ціль влучено з одного пострілу першим стрільцем, дорівнює 0.6, а другим – 0.8. Перший зробив 2, другий – 3 постріли. Визначити ймовірність того, що в ціль не було влучено жодного разу.

14. Робітник слідкує за роботою трьох верстатів, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що за зміну перший верстат вийде з ладу складає 0.1, другий — 0.2, і третій — 0.15. Знайти ймовірності того, що а) тільки один верстат вийде з ладу, б) хоча б один верстат вийде з ладу, в) тільки третій верстат вийде з ладу.

15. Саша, Маша, лось по черзі підкидають гральну кістку. Виграє той, в кого першим випаде число очок не менше за 5. Знайти ймовірність того, що виграє лось.

16. За один крок підкидають 2 гральні кістки і роблять це, поки одночасно не з'явиться "1" і "6". Відомо, що для цього знадобилося парне число кидків. Яка ймовірність того, що знадобилося рівно 4 підкидання?

17. За одиницю часу амеба вмирає з ймовірністю 0.25, виживає з ймовірністю 0.25, ділиться навпіл з ймовірністю 0.5. Знайти ймовірність того, що через дві одиниці часу буде 0, 1, 2, 3, 4 амеби.

18. Стрілець робить три постріли по мішені. З імовірністю 0.375 рівно два з них є успішними. Яка ймовірність влучення при одному пострілі?

19. Комісія на екзамені з Теорії ймовірностей складається з 3-х викладачів. Два перших викладачі приймають рішення про відрахування студента з ймовірністю p, а третій діє наступним чином: якщо перші два прийняли однакові рішення, він приєднується до них, якщо ж рішення перших двох викладачів різні, він підкидає монету: "герб" — відрахувати, "решка" — ні. Остаточне рішення приймається більшістю голосів. Яка ймовірність того, що студента відрахують?

20. У електричній схемі на рисунку 2.14 елементи 1, 2, 3, 4 працюють незалежно один від одного.

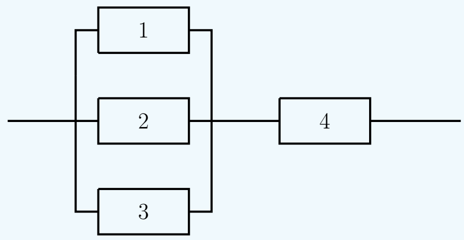

Рис. 2.14. Електрична схема

Ймовірності безвідмовної роботи елементів за період $[0, T]$ складають 0.8; 0.6; 0.9; 0.5 відповідно. Знайти надійність схеми за період $[0, T]$.

21. У електричних схемах (а) та (б) на рисунку 2.15 елементи 1, 2, 3 працюють незалежно один від одного.

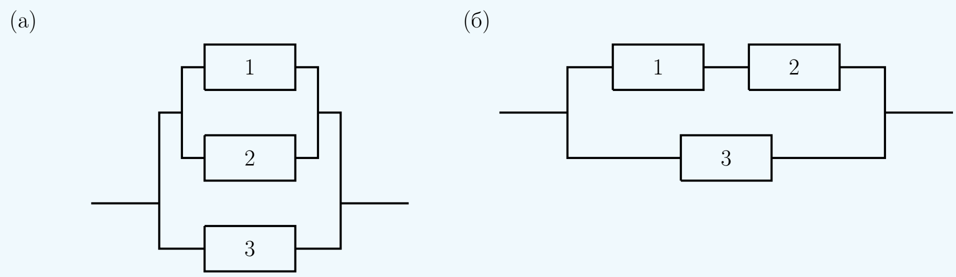

Рис. 2.15. Електричні схеми

Ймовірності безвідмовної роботи елементів за період $[0, T]$ складають 0.8; 0.6; 0.7 відповідно. Знайдіть надійності схем (а) та (б) за період $[0, T]$.

2.7. Формула повної ймовірності

Розглянемо деякий двохетапний стохастичний експеримент (наприклад, послідовний вибір двох тузів без повернення). Фіксуючи результат першого етапу, ми не отримаємо елементарну подію, оскільки наразі невідомий результат другого етапу. Одночасно події, що пов'язані з результатами першого етапу, мають всі характерні властивості елементарних подій: вони попарно несумісні та в об'єднанні складають весь простір Ω.

Нехай $\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}$ — ймовірнісний простір. Нехай також A – деяка подія із σ-алгебри $\mathcal{F}$ та $H_1, H_2, ..., H_n$ – повна група подій. Тоді

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(H_k)\mathbb{P}(A|H_k)} \tag{2.5}$$

називається **формулою повної ймовірності**.

Доведення. *Оскільки* $H_1, H_2, ..., H_n$ *– повна група подій, то* $H_1 \cup H_2 \cup ...H_n = \Omega$.

Подію A можна записати так:

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} H_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n}(A \cap H_i).$$

Тоді за властивістю адитивності ймовірності та теоремою множення:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}(A \cap H_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(A|H_i),$$

що й треба було довести.

У формулі (2.6) події $H_1, H_2, ..., H_n$ зазвичай називають *гіпотезами*, вони вичерпують всі можливі припущення (гіпотези) щодо результатів першого етапу досліду, подія A – один із можливих результатів другого етапу.

Приклад 2.30. *У магазині представлені мобільні телефони від 3-х виробників. Відомо, що 1-ий виробник має 5% бракованих виробів, 2-ий – 7% бракованих виробів, 3-ій – 20%. При цьому 1-ий виробник постачає мобільні телефони у кількості 50% загального асортименту, 2-ий – 30%, 3-ій –20%. Людина придбала в магазині мобільний телефон. Яка ймовірність того, що він бракований?*

Розв'язання. Вибір бракованого телефону можна розбити на 2 етапи: спочатку обираємо виробника, потім – купуємо телефон. Тоді маємо наступні гіпотези

$$H_1 = \{\text{телефон від 1-го виробника}\}, \quad \mathbb{P}(H_1) = 0.5,$$

$$H_2 = \{\text{телефон від 2-го виробника}\}, \quad \mathbb{P}(H_2) = 0.3,$$

$$H_3 = \{\text{телефон від 3-го виробника}\}, \quad \mathbb{P}(H_3) = 0.2,$$

H_1, H_2, H_3 – повна група подій, $\sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(H_i) = 1$.

Нехай

$$A = \{\text{телефон бракований}\}.$$

Тоді за формулою повної ймовірності

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{3} \mathbb{P}(H_k)\mathbb{P}(A|H_k).$$

Умовні ймовірності події A за умови кожної з гіпотез відповідно дорівнюють

$$\mathbb{P}(A|H_1) = 0.05, \quad \mathbb{P}(A|H_2) = 0.07, \quad \mathbb{P}(A|H_3) = 0.2.$$

Тоді

$$\mathbb{P}(A) = 0.5 \cdot 0.05 + 0.3 \cdot 0.07 + 0.2 \cdot 0.2 = 0.086.$$

□

Приклад 2.31. *Є n екзаменаційних білетів, серед яких, як вважають студенти, є k "щасливих" білетів ($k \le n$). У кого більше шансів витягти "щасливий" білет — у того, хто тягне білет першим, чи у того, хто тягне другим?*

Розв'язання. Запишемо випадкову подію

$$A_i = \{i - \text{ий студент витягнув "щасливий" білет}\}.$$

Тоді ймовірність витягти "щасливий" білет для першого студента рівна:

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{k}{n}.$$

Ймовірність витягти "щасливий" білет другим студентом залежить від того, чи був чи не був вийнятий першим студентом "щасливий" білет. Тому повною групою подій буде $\{A_1, \overline{A_1}\}$, причому

$$\mathbb{P}(\overline{A_1}) = 1 - \frac{k}{n}.$$

Тоді за формулою повної ймовірності

$$\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1) + \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}(A_2|\overline{A_1}),$$

де

$$\mathbb{P}(A_2|A_1) = \frac{k-1}{n-1}, \quad \mathbb{P}(A_2|\overline{A_1}) = \frac{k}{n-1} \Rightarrow$$

$$\mathbb{P}(A_2) = \frac{k}{n} \cdot \frac{k-1}{n-1} + \left(1 - \frac{k}{n}\right) \cdot \frac{k}{n-1} = \frac{k}{n}.$$

Таким чином, ймовірності рівні. □

Задача 2.2. *В Прикладі 2.31 знайдіть ймовірність витягнути "щасливий" білет для третього студента та переконайтесь, що вона теж дорівнює* $\frac{k}{n}$.

Приклад 2.32. *Відомо, що 5% чоловіків та 0.25% жінок страждають на дальтонізм. Навмання обрали людину. Яка ймовірність того, що вона - дальтонік? Вважати, що чоловіків та жінок порівну.*

Розв'язання. Маємо наступні гіпотези

$$H_1 = \{\text{жінка}\}, \quad \mathbb{P}(H_1) = 0.5,$$

$$H_2 = \{\text{чоловік}\}, \quad \mathbb{P}(H_2) = 0.5.$$

Нехай

$$A = \{\text{обрана людина виявилася дальтоніком}\}.$$

Умовні ймовірності події A за умови кожної з гіпотез відповідно рівні

$$\mathbb{P}(A|H_1) = 0.0025, \quad \mathbb{P}(A|H_2) = 0.05.$$

Тоді за формулою повної ймовірності:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(A|H_1) + \mathbb{P}(H_2)\mathbb{P}(A|H_2) = 0.02625.$$

□

Приклад 2.33 (Задача про двох гравців). *Саша та Маша грають у таку азартну гру: по черзі підкидають симетричну монету. В кожному раунді обов'язково виграє один з них: якщо випадає герб, Маша віддає Саші 1 грн., якщо решка, Саша віддає Маші 1 грн. Гра продовжується поки в когось не закінчаться гроші. На початку гри у Саші було a грн., у Маші — b грн. Яка ймовірність, що збанкрутує Саша? Маша?*

Розв'язання. Розглянемо гру Саші і припустимо, що гра триває вже деякий час і у Саші на цей момент часу наявно x грн. Позначимо через $p(x)$ — ймовірність збанкрутувати, маючи x грн. Підкреслимо, що ця сама ймовірність є ймовірністю виграшу Маші, коли у Саші x грн.

Поставимо питання: що могло трапитись на попередньому кроці гри, якщо у Саші зараз x грн.? Очевидно, є два варіанти: або на попередньому кроці Саша мав $x-1$ грн. і виграв, або він мав $x+1$ грн. і програв останній раунд. Оскільки і виграти і програти Саша може з ймовірністю $1/2$, то за формулою повної ймовірності:

$$p(x) = \mathbb{P}\{\text{у Саші стало } x \text{ грн.} \big| \text{Саша виграв}\} \cdot \mathbb{P}\{\text{виграв}\} +$$

$$+\mathbb{P}\{\text{у Саші стало } x \text{ грн.} \big| \text{Саша програв}\} \cdot \mathbb{P}\{\text{програв}\} =$$

$$= p(x-1) \cdot \frac{1}{2} + p(x+1) \cdot \frac{1}{2}.$$

Отримали рекурентне співвідношення:

$$p(x) = \frac{p(x-1) + p(x+1)}{2},$$

причому $p(0) = 1$, $p(a+b) = 0$.

Рекурентне співвідношення задає арифметичну прогресію. Тому різниця прогресії:

$$d = \frac{p(a+b) - p(0)}{a+b} = \frac{0-1}{a+b} = -\frac{1}{a+b},$$

і загальний член прогресії

$$p(x) = p(0) + xd = 1 - \frac{x}{a+b}.$$

Отже, оскільки на початку гри Саша мав a грн., а Маша b грн., то відповідно

$$\mathbb{P}\{\text{виграв Саша}\} = \frac{a}{a+b}, \quad \mathbb{P}\{\text{виграла Маша}\} = \frac{b}{a+b},$$

та

$$\mathbb{P}\{\text{програв Саша}\} = \frac{b}{a+b}, \quad \mathbb{P}\{\text{програла Маша}\} = \frac{a}{a+b},$$

звідки бачимо, що шанси виграти тим більші, чим більшу частку капіталу має гравець відносно до спільного капіталу гри. □

2.8. Формула Байєса

Нехай $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ – ймовірнісний простір, $A \in \mathfrak{F}$ – випадкова подія, $H_1, H_2, ..., H_n$ – повна група подій. Формула Байєса[1] дає можливість переоцінити ймовірності гіпотез $H_1, H_2, ..., H_n$ після того, як експеримент проведено і відомо, що подія A відбулась.

Повернемось до Прикладу 2.32 про дальтоніків. Початково ймовірності обрати жінку або чоловіка (гіпотези H_1, H_2) рівні по 0.5. Припустимо, що обрали людину, яка виявилася дальтоніком (подія A відбулась), але нам не повідомили стать людини. Ми хотіли б знати: яка ймовірність того, що обраний — це чоловік? Очевидно, ми припустимо, що скоріше за все це дійсно чоловік, бо дальтоніків серед чоловіків набагато більше ніж серед жінок. Отже, інформація про подію, що відбулась, впливає на ймовірності гіпотез H_1, H_2.

Нехай відомі **апріорні** (до проведення експерименту) ймовірності гіпотез $\mathbb{P}(H_i), i = \overline{1,n}$. Нехай в результаті проведення експерименту відбулась подія A. Її поява впливає на ймовірності гіпотез $H_1, H_2, ..., H_n$. **Апостеріорні** (післядослідні) ймовірності гіпотез позначаються $\mathbb{P}(H_i|A)$, $\overline{1,n}$, та обчислюються за **формулою Байєса**:

$$\boxed{\mathbb{P}(H_i|A) = \frac{\mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(A|H_i)}{\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(H_k)\mathbb{P}(A|H_k)}}, \quad i = \overline{1,n}.$$

[1] Томас Байєс (1702-1761) – англійський математик і пресвітеріанський священик, член Лондонського королівського товариства.

Доведення. *Справедливість формули Байєса випливає з означенням умовної ймовірності, формули множення та формулою повної ймовірності:*

$$\mathbb{P}(H_i|A) = \frac{\mathbb{P}(H_i \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(A|H_i)}{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(H_k)\mathbb{P}(A|H_k)}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Проілюструємо застосування формули Байєса на прикладі про дальтоніків.

Приклад 2.34. *Нехай в Прикладі 2.32 відбулась подія* $A = \{$*обрана людина виявилася дальтоніком*$\}$. *Яка ймовірність того, що обраний — чоловік?*

Розв'язання. Необхідно знайти ймовірність $\mathbb{P}(H_2|A)$. Оскільки $\mathbb{P}(A|H_1) = 0.0025$, $\mathbb{P}(A|H_2) = 0.05$, то за формулою Байєса

$$\mathbb{P}(H_2|A) = \frac{\mathbb{P}(H_2)\mathbb{P}(A|H_2)}{\mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(A|H_1) + \mathbb{P}(H_2)\mathbb{P}(A|H_2)} = \frac{0.5 \cdot 0.05}{0.02625} = 0.95.$$

Відповідно, $\mathbb{P}(H_1|A) = 0.05$. Звернемо увагу на те, на скільки апостеріорні ймовірності гіпотез відрізняються від апріорних, які були рівні 0.5. □

Парадокс Монті Голла[1]

Задача формулюється як опис гіпотетичної гри, заснованої на американському телешоу «Let's Make a Deal». Ця задача названа на честь ведучого цієї передачі Монті Голла. Полягає вона в наступному: є 3 двері, за одними з яких знаходиться авто, а за двома іншими — по козі. Вам пропонують обрати двері. Наприклад, ви обираєте двері № 1. Після цього ведучий, який знає, де авто, відкриває якісь двері (одні з тих, що не вибрані), за якими коза. Наприклад, він відкриває двері № 3, за ними коза (рис. 2.16). Після цього він пропонує Вам змінити вибір. ***Питання****: чи збільшаться Ваші шанси на виграш автомобіля, якщо Ви змінете вибір?*

[1] див. також https://uk.wikipedia.org/wiki/

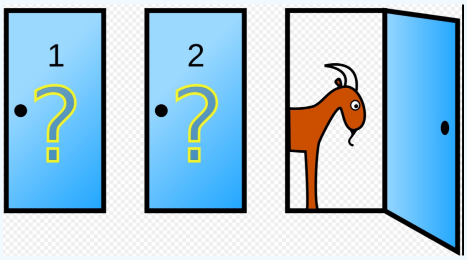

Рис. 2.16. Парадокс Монті Голла

Умови гри наступні:

- авто рівноймовірно розташоване за одними із дверей;
- ведучий у будь-якому випадку має відкрити двері з козою, але не ті, які обрано, і запропонувати змінити вибір;
- якщо у ведучого є вибір, які двері відкривати, від обирає будь-які з них з однаковою ймовірністю.

Попередньо здається, що після відкриття якихось дверей з козою, шанси на виграш авто складають 0.5 і змінювати вибір не має сенсу. Перевіримо це. Введемо 3 гіпотези

$$H_i = \{\text{авто за } i\text{-ми дверима}\}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \mathbb{P}(H_i) = \frac{1}{3}.$$

Розглянемо подію

$$A = \{\text{ведучий відкрив 3-ті двері}\} = \{\text{ведучий відкрив двері, за якими коза}\}.$$

Обчислимо ймовірності того, що за дверима №1 та №2 знаходиться авто за умови, що відкрито двері №3. Застосуємо формулу Байєса

$$\mathbb{P}(H_i|A) = \frac{\mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(A|H_i)}{\sum_{k=1}^{3} \mathbb{P}(H_k)\mathbb{P}(A|H_k)}, \quad i = 1, 2.$$

Зауважимо, що

$$\mathbb{P}(A|H_1) = \frac{1}{2},$$

оскільки авто знаходиться за дверима №1, а отже за умовами гри ведучий відкриє двері №2 або двері №3 з ймовірністю 0.5. Крім того,

$$\mathbb{P}(A|H_2) = 1,$$

оскільки, якщо авто знаходиться за дверима №2, а вибрано двері №1, ведучий вимушений відкрити двері №3. І очевидно,

$$\mathbb{P}(A|H_3) = 0,$$

оскільки якщо авто за дверима №3, кози там бути не може.

Тоді

$$\mathbb{P}(H_1|A) = \frac{\mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(A|H_1)}{\sum_{k=1}^{3}\mathbb{P}(H_k)\mathbb{P}(A|H_k)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot 0} = \frac{1}{3},$$

$$\mathbb{P}(H_2|A) = \frac{\mathbb{P}(H_2)\mathbb{P}(A|H_2)}{\sum_{k=1}^{3}\mathbb{P}(H_k)\mathbb{P}(A|H_k)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot 0} = \frac{2}{3}.$$

Таким чином, зміна вибору буде правильною стратегією, оскільки шанси збільшуються в 2 рази при зміні вибору.

Задачі для самостійного розв'язання до 2.7-2.8

1. Зі скриньки, що містить 20 білих і 10 чорних кульок, одна кулька невідомого кольору загублена. Яка ймовірність навмання вийняти зі скриньки білу кульку?

2. В першому кошику було 5 білих та 7 чорних кульок, в другому — 8 білих та 10 чорних кульок. З першого кошика в другий переклали 2 кульки невідомого кольору. Після цього з другого кошика дістають кульку. Яка ймовірність того, що вона біла?

3. Пасажир може звернутися за квитком в одну з трьох кас. Ймовірність звернення в кожну касу залежить від її місцеположення. Ці ймовірності співвідносяться як 1:7:2. Ймовірність того, що до моменту звернення в касі всі квитки будуть продані, дорівнює для першої каси 0.2, для другої – 0.1, для третьої – 0.15.

а) Яка ймовірність, що пасажир купить квиток?

б) Пасажир пішов в одну з кас і купив квиток. Яка ймовірність, що він купив його в другій касі?

4. Істота, яка страждає на дисоціативний розлад особистості, приходить до тиру. Якщо в цей день вона вважає себе спортсменом, ймовірність влучення в мішень при одному пострілі дорівнює 0.7, якщо домогосподаркою – 0.5, а якщо Наполеоном – 0.9. Істота робить 4 постріли.

   а) Яка ймовірність того, що вдалих і невдалих пострілів виявилося порівну?

   б) Якщо відомо, що вдалих і невдалих пострілів виявилося порівну, яка ймовірність того, що сьогодні істота вважає себе Наполеоном?

5. Лось може знаходитися в одному з двох районів Києва, причому в 1-му районі з ймовірністю 0.8, а в другому з ймовірністю 0.2. На його пошуки виділено 10 чоловіків з національної поліції. Якщо поліцейський шукає лося в тому районі, де лось дійсно знаходиться, то ймовірність знайти лося дорівнює 0.6. Як кількісно розподілити поліцейських по районах так, щоб ймовірність знайти лося була максимальною?

6. Підкинули гральну кістку, а потім з колоди 36 карт дістали стільки карт, скільки випало очок. Серед карт, що дістали, було виявлено принаймні 1 туз. Яка ймовірність того, що випала непарна кількість очок?

7. У кошику є 6 кульок. Кількість золотих серед них є рівноможливою від 0 до 6. Навмання дістали та розпилили 2 кульки, з яких 1 виявилася золотою. Яка ймовірність того, що в кошику ще рівно 2 золоті кульки?

8. Студент відповідає на тестові питання з 4-ма варіантами відповіді. Припустимо, що ймовірність того, що студент знає відповідь на питання – 0.8, а те, що він вгадує – 0.2. Якщо студент вгадує відповідь, він вибирає будь-яку з 4-х запропонованих з рівною ймовірністю. Студент

відповів на питання правильно. Яка ймовірність того, що він дійсно знав відповідь?

9. Монету спочатку підкинули тричі, а потім ще стільки, скільки випало гербів за перші три рази. Загальна кількість гербів виявилася рівною 4. Яка ймовірність того, що монету підкидали всього 6 разів?

10. Два мисливці поцілили в одну качку. Перший мисливець влучає з ймовірністю 0.4, другий — з ймовірністю 0.6. В качку влучила одна куля. Яка ймовірність того, що качка була вбита першим мисливцем?

11. Василь один раз підкидає монету. Якщо випав герб, він далі підкидає три гральні кістки, а якщо решка, то чотири. Відомо, що випало рівно дві «6». Яка ймовірність того, що результатом підкидання монети був герб?

12. У електричній схемі на рисунку 2.17 елементи 1, 2, 3, 4 працюють незалежно один від одного.

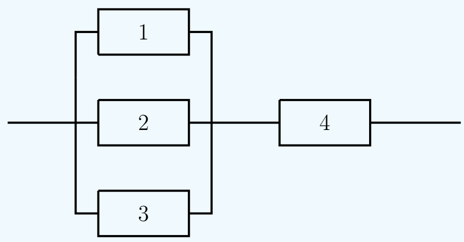

Рис. 2.17. Електрична схема

Ймовірності безвідмовної роботи елементів за період $[0, T]$ складають 0.8; 0.6; 0.9; 0.5 відповідно. Якщо відомо, що схема працювала впродовж періоду $[0, T]$, яка ймовірність, що працював елемент №1?

13. Особа A каже правду у 3-х випадках з 5-ти, особа B каже правду у 4-х випадках з 5-ти. З кошика, в якому було 10 різнокольорових кульок, в тому числі одна біла, дістали кульку. A та B подивились на неї і сказали, що кулька біла. Яка ймовірність того, що вони сказали правду?

14. Ймовірність, що в родині k дітей, дорівнює p_k, і задається наступним чином: $p_0 = p_1 = a$, $p_k = (1-2a)2^{-(k-1)}$, $k \geq 2$, де $0 < a < 1$. Відомо, що в родині рівно два хлопці. Знайдіть ймовірності наступних подій:

   а) у родині лише двоє дітей;

   б) у родині ще рівно 2 дівчинки.

   Вважати ймовірності народження хлопчика та дівчинки однаковим і рівними 0.5.

2.9. Схема Бернуллі

Розглянемо найпростішу схему n незалежних випробувань. Нехай у кожному із n незалежних випробувань може бути лише 2 результати: відбувається подія A із ймовірністю p, або відбувається подія $\overline{A}$ з ймовірністю $q = 1 - p$. Така схема незалежних випробувань називається **схемою Бернуллі** [1].

Будемо називати появу події A *"успіхом"*, появу $\overline{A}$ – *"невдачею"*. Знайдемо ймовірність того, що в серії із n випробувань подія A з'явилась рівно m разів. Позначимо цю ймовірність $\mathbb{P}_n(m)$.

Теорема 2.1.

$$\mathbb{P}_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}, \; m = 0, 1, ..., n.$$

Доведення. *Розглянемо спочатку такий результат серії n незалежних випробувань: подія A з'явилась m разів у перших m випробуваннях і не з'явилась $(n-m)$ разів у наступних $(n-m)$ випробуваннях, тобто*

$$\underbrace{A, A, ..., A}_{m}, \underbrace{\overline{A}, \overline{A}, ..., \overline{A}}_{n-m}.$$

За теоремою множення ймовірність такої події рівна $p^m q^{n-m}$.

[1] Схему Бернуллі названо на честь Якоба Бернуллі (1654-1605) — старшого із знаменитої династії швейцарських науковців Бернуллі.

Ймовірність появи події A знову m разів, але в іншому порядку, наприклад, $\overline{A}, \underbrace{A, ..., A}_{m}, \underbrace{\overline{A}, \overline{A}, ..., \overline{A}}_{n-m-1}$, буде тою самою: $p^m q^{n-m}$.

Число таких складних подій дорівнює кількості способів вибрати m місць для події A, тобто кількості комбінацій із n по m: C_n^m.

Оскільки всі такі складні події несумісні, то за теоремою про додавання ймовірностей ймовірність $\mathbb{P}_n(m)$ дорівнює сумі ймовірностей всіх можливих складних подій:

$$\mathbb{P}_n(m) = \underbrace{p^m q^{n-m} + ... + p^m q^{n-m}}_{C_n^m} = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m},\ m = 0, 1, ..., n.$$

Приклад 2.35. *Монету підкидають 10 разів. Яка ймовірність того, що герб випаде рівно 7 разів?*

Розв'язання. Багаторазові підкидання монети — це серія незалежних випробувань, причому "успіх"$=\{\Gamma\}$ з ймовірністю $p = \frac{1}{2}$. Отже, маємо схему Бернуллі із $n = 10$, $p = q = \frac{1}{2}$, $m = 7$. За теоремою 1

$$\mathbb{P}_{10}(7) = C_{10}^7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10-7} = \frac{120}{2^{10}} \approx 0.12.$$

□

Приклад 2.36. *Спортсмен 5 разів стріляє по мішені. Ймовірність влучання в мішень при одному пострілі рівна 0.4. Для отримання заліку треба влучити в мішень не менше 3-х разів. Яка ймовірність отримання заліку?*

Розв'язання. Нехай випадкова подія $A = \{$залік отримано$\}$. За теоремою додавання ймовірностей для несумісних подій

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_5(3) + \mathbb{P}_5(4) + \mathbb{P}_5(5) =$$

$$= C_5^3 \cdot (0.4)^3 \cdot (0.6)^2 + C_5^4 \cdot (0.4)^4 \cdot (0.6)^1 + C_5^5 \cdot (0.4)^5 = 0.317.$$

□

Розглянемо класичний приклад теорії ймовірностей, відомий під назвою "випадкове блукання". Він є надзвичайно важливим та має безліч різних узагальнень та застосувань у сучасній науці.

Приклад 2.37 (Випадкове блукання на прямій). *Кіт блукає по цілих точках числової осі. А саме, нехай в початковий момент часу кіт знаходиться в точці* 0. *В кожній точці він підкидає симетричну монету і якщо випадає герб, робить крок на одиницю праворуч, а якщо випадає решка, робить крок на одиницю ліворуч. Іншими словами, стартувавши з точки* 0, *в кожній точці з ймовірністю* $\frac{1}{2}$ *кіт йде праворуч або ліворуч (рис. 2.18).*

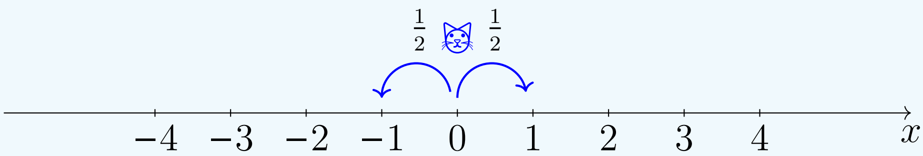

Рис. 2.18. Випадкове блукання на прямій

(а) Яка ймовірність, що за n *кроків кіт опиниться в точці з координатою* k*?*
(б) Яка ймовірність, що за $2n$ *кроків кіт повернеться в точку* 0*?*
(в) Якщо відомо, що на $2n$*-у кроці кіт повернувся в точку* 0, *яка ймовірність, що він блукав лише по правій півосі?*

Розв'язання. (а) Припустимо для визначеності, що $k > 0$. Введемо подію

$$A = \{\text{За } n \text{ кроків кіт опинився в точці з координатою } k\}.$$

Для того, щоб за n кроків опинитися в точці з координатою k, коту необхідно зробити на k кроків праворуч більше ніж ліворуч. Тому, якщо x — кількість кроків, які кіт зробив праворуч, то $(n - x)$ — кількість кроків, які він зробив ліворуч. Тоді отримаємо рівняння

$$x - (n - x) = k, \quad \text{звідки} \quad x = \frac{n+k}{2}.$$

Отже, $(n + k)$ має бути парним числом, інакше подія A є неможливою. Нарешті, $\frac{n+k}{2}$ кроків праворуч можна інтерпретувати як $\frac{n+k}{2}$ успіхів у схемі Бернуллі з n експериментів. Тоді

$$\mathbb{P}(A) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } (n+k) - \text{ непарне,} \\ C_n^{\frac{n+k}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n, & \text{якщо } (n+k) - \text{ парне.} \end{cases}$$

(б) Нехай

$$B = \{\text{за } 2n \text{ кроків кіт повернеться в } 0\}.$$

Для того, щоб опинитись в точці 0 після $2n$ кроків кіт повинен зробити порівну кроків ліворуч та праворуч. Тоді, ймовірність того, що з $2n$ кроків кіт зробить n кроків праворуч, дорівнює ймовірності, що в схемі Бернуллі буде рівно n "успіхів" з $2n$ випробувань. Отже,

$$\mathbb{P}(B) = C_{2n}^{n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{(n+1)C_n}{4^n},$$

де $C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}$ — числа Каталана (див. підрозділ 1.3.3).

Цікаво також встановити асимптотику $\mathbb{P}(B)$. Використаємо формулу Стірлінга: $n! \sim e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}$, $n \to \infty$. Тоді

$$C_{2n}^{n} \sim 2^{2n} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}, \quad n \to \infty,$$

а отже, для великих n

$$\mathbb{P}(B) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Зробимо також зауваження, що випадкове блукання на прямій можна інтерпретувати в термінах послідовностей "$+$" та "$-$" одиниць, або в термінах шляхів в прямокутнику. Дійсно, поставимо у відповідність кожному кроку направо $+1$, а кожному кроку наліво (-1). Отже, блуканню кота за n кроків можна взаємно однозначно поставити у відповідність послідовність, що складається з "$+$" та "$-$" одиниць довжиною n. Використаємо цю ідею для розв'язання задачі (в).

(в) Нехай подія

$$C = \{\text{Кіт блукав лише по правій півосі}\}.$$

Необхідно знайти $\mathbb{P}(C|B)$. За формулою умовної ймовірності

$$\mathbb{P}(C|B) = \frac{\mathbb{P}(C \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Обчислимо окремо $\mathbb{P}(C \cap B)$. Нехай шлях кота описується послідовністю $2n$ "$+$" та "$-$" одиниць. Для того, щоб кіт вийшов із точки 0 праворуч і ніколи не зайшов на від'ємну частину півосі (при цьому він може повертатися в точку 0 декілька разів), необхідно, щоб першою цифрою в послідовності була 1, і далі щоб "−" одиниць на кожному етапі було не більше ніж "+" одиниць, що їм передують. Іншими словами, кожна часткова сума "+" та "−" одиниць, що описують блукання, має бути невід'ємною. Кількість таких блукань дорівнює n - му числу Каталана C_n (див. підрозділ 1.3.3). Таким чином,

$$\mathbb{P}(C \cap B) = C_n \left(\frac{1}{2}\right)^{2n},$$

і

$$\mathbb{P}(C|B) = \frac{C_n \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}{\frac{(n+1)C_n}{4^n}} = \frac{1}{n+1}.$$

Ми розглянули задачу для правої півосі. Оскільки те саме відноситься і до лівої півосі, то ймовірність того, що кіт блукатиме по одній з півосей (не перетинаючи точку 0), дорівнює $\frac{2}{n+1}$. □

Слід зауважити, що для випадкового блукання ставиться багато інших цікавих задач (див., наприклад, [19; 23; 21; 22]).

Задача 2.3. *Розв'яжіть задачу в Прикладі 2.37 за припущення, що кіт має несиметричну монету, у якої ймовірність випадіння герба дорівнює $p \in [0,1]$, а ймовірність випадіння решки дорівнює $q = 1 - p$.*

2.9.1. Найбільш імовірна кількість успіхів у схемі Бернуллі

Число m_0, при якому $\mathbb{P}_n(m)$ набуває найбільшого значення, називається **найбільш імовірною кількістю "успіхів" у схемі Бернуллі**. Знайдемо m_0 з умови:

$$\begin{cases} \mathbb{P}_n(m_0 - 1) \le \mathbb{P}_n(m_0), \\ \mathbb{P}_n(m_0 + 1) \le \mathbb{P}_n(m_0). \end{cases}$$

Дійсно,

$$\begin{cases} C_n^{m_0-1} p^{m_0-1} q^{n-m_0+1} \le C_n^{m_0} p^{m_0} q^{n-m_0}, \\ \\ C_n^{m_0+1} p^{m_0+1} q^{n-m_0-1} \le C_n^{m_0} p^{m_0} q^{n-m_0}, \end{cases} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-m_0+1)!(m_0-1)!} \cdot p^{m_0-1} q^{n-m_0+1} \le \dfrac{n!}{(n-m_0)!m_0!} \cdot p^{m_0} q^{n-m_0}, \\ \dfrac{n!}{(n-m_0-1)!(m_0+1)!} \cdot p^{m_0+1} q^{n-m_0-1} \le \dfrac{n!}{(n-m_0)!m_0!} \cdot p^{m_0} q^{n-m_0}, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{q}{n-m_0+1} \le \dfrac{p}{m_0}, \\ \dfrac{p}{m_0+1} \le \dfrac{q}{n-m_0}, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} qm_0 \le p(n+1) - pm_0, \\ pn - pm_0 \le qm_0 + q, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} m_0 \le p\dfrac{n+1}{q+p}, \\ m_0 \ge \dfrac{q-pn}{-(p+q)}, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} m_0 \le pn + p, \\ m_0 \ge pn - q. \end{cases}$$

Отже,

$$\boxed{np - q \le m_0 \le np + p}. \tag{2.6}$$

Зауважимо, що оскільки різниця між правою та лівою частинами нерівності (2.6) дорівнює одиниці, то можливі 2 випадки:

$$\left[\begin{array}{l} m_0 = [np+p], \text{ якщо } (np+p) \notin \mathbb{Z}, \\ m_0^{(1)} = np - q, \quad \text{та} \quad m_0^{(2)} = pn + p, \text{ якщо } (np+p) \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Приклад 2.38. *Відомо, що зі 100 зерен певного сорту сходить 70. Знайти найімовірніше число зерен, які зійдуть, якщо в партії 240 зерен.*

Розв'язання. "Успіх"=\{зерно зійшло\}, $p = 0.7$. Зерна сходять незалежно одне від одного, а отже, маємо схему Бернуллі із $n = 240$.

За нерівністю (2.6),

$$240 \cdot 0.7 - 0.3 \le m_0 \le 240 \cdot 0.7 + 0.7,$$

звідки

$$m_0 = [pn + p] = [168.7] = 168.$$

Таким чином, із партії в 240 зерен найімовірніше зійдуть 168. $\square$

Задачі для самостійного розв'язання до 2.9

1. Яка ймовірність того, що при підкиданні 10 монет гербів випаде більше ніж решок?

2. За один крок жук пересувається на відстань одиничної довжини вправо або вліво з однаковою ймовірністю. Спочатку жук знаходиться у початку координат. Яка ймовірність того, що після 100 кроків він опиниться в точці з координатою 15? з координатою 18?

3. Правильну монету підкидають 13 разів. Знайти ймовірність того, що результат буде наступним: Г Г * * * * & & & Г Р # #, причому серед * * * * — принаймні 2 решки, серед & & & — рівно 2 герби, а # # – що завгодно.

4. Ймовірність настання події A в одному випробуванні дорівнює 0.1. Яку мінімальну кількість експериментів необхідно провести, щоб з ймовірністю не менше 0.95 подія A відбулася принаймні 1 раз?

5. Якою має бути найменша ймовірність виграшу на один білет лотереї, щоб з ймовірністю не менше 0.99 серед 10 куплених білетів був принаймні один виграшний?

6. 10 людей отримали листи електронною поштою. Кожен з них може або відповісти на лист або ні. За умовами, що вказані в листі, якщо автор листів отримає від адресатів рівно 3 відповіді, він виплачує кожному по 10000 грн. Як поводити себе адресатам, щоб максимізувати ймовірність виграшу (якщо вони не можуть спілкуватися)? Яка при цьому ймовірність виграшу?

7. Ймовірність запізнитися на лекцію для кожного студента дорівнює 0.1. Знайти найбільш ймовірне число студентів, що запізняться на лекцію, якщо на потоці 100 студентів.

8. Визначити число n незалежних випробувань, які треба здійснити щоб, найімовірніше число появи події A було рівне 20, якщо ймовірність появи події A при одному випробуванні дорівнює 0.8?

9. Проводять незалежні випробування за схемою Бернуллі з Ймовірністю "успіху" в одному випробуванні p. Знайти ймовірність того, що рівно k успіхів в n випробуваннях з'являться один за одним, $k \le n$.

2.10. Поліноміальна схема

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — ймовірнісний простір, $A_1, A_2, ..., A_k$ — повна група подій. Нехай проводиться n незалежних випробувань, в результаті кожного з яких може відбутися одна із подій: A_1 або A_2 або ... або A_k з ймовірністю $p_1, p_2, ..., p_k$ відповідно, причому $p_1 + p_2 + ... + p_k = 1$. Така схема незалежних випробувань є узагальненням схеми Бернуллі і називається **поліноміальною схемою**.

Знайдемо ймовірність того, що у n незалежних випробуваннях подія A_1 з'явилась рівно m_1 разів, подія A_2 — рівно m_2 разів, ..., подія A_k — рівно m_k разів, $m_1 + m_2 + ... + m_k = n$. Позначатимемо цю ймовірність $\mathbb{P}_n(m_1, m_2, ..., m_k)$.

Теорема 2.2.

$$\mathbb{P}_n(m_1, m_2, ..., m_k) = \frac{n!}{m_1! m_2! ... m_k!} \cdot p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} ... \cdot p_k^{m_k}. \tag{2.7}$$

Доведення. *Розглянемо спочатку один з можливих результатів серії n незалежних випробувань:*

$$\underbrace{A_1, A_1, ...A_1}_{m_1}, \underbrace{A_2, A_2, ...A_2}_{m_2}, ..., \underbrace{A_k, A_k, ...A_k}_{m_k}$$

Ймовірність такої події за теоремою множення рівна $p_1^{m_1} p_2^{m_2} ... p_k^{m_k}$, оскільки всі випробування незалежні між собою.

Тепер знайдемо всі можливі розташування подій A_1, A_2, …, A_k у схемі із n незалежних випробувань, де подія A_1 повторюється m_1 разів, подія A_2 — m_2 разів, …, подія A_k — m_k разів. Кожне із таких розташувань буде перестановкою з повтореннями із n по m_1, m_2, …, m_k елементів. Їх кількість дорівнює $\dfrac{n!}{m_1!m_2!...m_k!}$. Тоді

$$\mathbb{P}_n(m_1, m_2, ..., m_k) = \frac{n!}{m_1!m_2!...m_k!} \cdot p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{m_k}.$$

Приклад 2.39. *В урні 5 білих, 8 чорних, 7 синіх куль. З урни навмання 10 разів виймають по одній кулі, кожен раз повертаючи її до урни. Знайти ймовірність того, що серед 10 вийнятих куль було рівно 3 білі, 2 чорні та 5 синіх куль.*

Розв'язання*.* В кожному випробуванні можлива одна з подій:

$$A_1 = \{\text{вийнято білу кулю}\}, \quad p_1 = \mathbb{P}(A_1) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4},$$

$$A_2 = \{\text{вийнято чорну кулю}\}, \quad p_2 = \mathbb{P}(A_2) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5},$$

$$A_3 = \{\text{вийнято синю кулю}\}, \quad p_3 = \mathbb{P}(A_3) = \frac{7}{20}.$$

За умовою відбувається 10 незалежних випробувань, отже, $n = 10$. За формулою (2.7):

$$\mathbb{P}_{10}(3, 2, 5) = \frac{10!}{3!2!5!} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{7}{20}\right)^5 \approx 0.033.$$

□

Приклад 2.40. *У лотереї крупний виграш з'являється з ймовірністю 0.01, малий виграш – з ймовірністю 0.2. Куплено 5 білетів. Яка ймовірність того, що буде виграно один крупний та 2 малі виграші?*

Розв'язання*.* Розглянемо події

$$A_1 = \{\text{виграно крупний виграш}\}, \quad p_1 = \mathbb{P}(A_1) = 0.01,$$

$$A_2 = \{\text{виграно малий виграш}\}, \quad p_2 = \mathbb{P}(A_2) = 0.2,$$
$$A_3 = \{\text{не виграно нічого}\}, \quad p_3 = \mathbb{P}(A_3) = 1 - 0.01 - 0.2 = 0.79.$$

За умовою купують 5 білетів, отже, $n = 5$. Оскільки питають про ймовірність одного крупного і двох малих виграшів, то білетів, які нічого не виграли лишається $5 - 1 - 2 = 2$. Тоді за формулою (2.7):

$$\mathbb{P}_5(1, 2, 2) = \frac{5!}{1!2!2!} (0.01)^1 (0.2)^2 (0.79)^2 \approx 0.0075.$$

□

Задачі для самостійного розв'язання до 2.10

1. На кожний лотерейний білет з ймовірністю 0.19 може випасти крупний виграш, з ймовірністю 0.11 – малий, з ймовірністю 0.7 – білет залишається без виграшу. Куплено 20 білетів. Знайти ймовірність отримати 2 крупних та 4 малих виграші.

2. Мішень має форму круга радіусом 30 см, в середині якого проведені два концентричні з ним кола радіусами 10 та 20 см. За влучення в центральний круг гравець отримує 15 очок, за влучення у середнє кільце – 10 очок, і за влучення у зовнішнє кільце – 5 очок. Вважаючи, що гравець обов'язково влучає в мішень, знайти ймовірність того, що

   а) за два постріли він отримає в сумі 15 очок;

   б) за три постріли він отримає в сумі 30 очок.

3. Яка ймовірність того, що при підкиданні дев'яти гральних кісток "1", "2" та "3" випадуть по одному разу, а "4", "5" та "6" — по два рази?

4. Студенти складають іспит з деякої дисципліни. Ймовірність отримати оцінку "5" для кожного студента дорівнює 0.1, оцінку "4" — 0.2, оцінку "3" — 0.3, і оцінку "2" — 0.4. Яка ймовірність того, що з 18 студентів, які допущені до іспиту оцінку "5" отримають рівно 3 студенти, оцінку "4" — рівно 4 студенти, оцінку "3" — рівно 6 студентів, а всі інші — оцінку "2"? Яка ймовірність того, що задовільних та незадовільних оцінок буде порівну?

2.11. Граничні теореми для схеми Бернуллі

Повернемось до схеми Бернуллі та розглянемо приклад.

Приклад 2.41. *Апаратура складається із 10 000 елементів, кожен з яких може не залежно від іншого вийти з ладу за час T з ймовірністю $5 \cdot 10^{-4}$. Знайти ймовірність того, що за час T вийдуть з ладу рівно 3 елементи.*

Розв'язання. В даній задачі "успіх"={елемент вийшов з ладу}. Елементи працюють незалежно один від одного. Тому, маємо схему Бернуллі із $n = 10000$ та $p = 5 \cdot 10^{-4}$.

1) Знайдемо ймовірність того, що перестануть працювати рівно 3 елементи:

$$\mathbb{P}_{10000}(3) = C^3_{10000}(5 \cdot 10^{-4})^3(1 - 5 \cdot 10^{-4})^{9997} = ?$$

Зверніть увагу на те, що труднощі в цій задачі виникають саме при обчисленні відповіді!!! □

Зазвичай складнощі з підрахунками біноміальних ймовірностей $\mathbb{P}_n(m)$ виникають, коли n досить велике ($n \geq 100$), а p досить "маленьке" (скажімо, $p \leq 0.01$). Особливо це було проблемою до винайдення людством потужних комп'ютерів. Це спонукало шукати наближені шляхи обчислення величин $\mathbb{P}_n(m)$, $m = 0, 1, \ldots, n$. Розглянемо основні з них: асимпототичну формулу Пуассона[1], та теореми Муавра[2]-Лапласа[3]. Розглянемо їх поступово.

2.11.1. Асимптотична формула Пуассона

Нехай задано нескінченну серію схем Бернуллі:
1 схема: $n = 1$, ймовірність "успіху" в одному випробуванні p_1;
2 схема: $n = 2$, ймовірність "успіху" в одному випробуванні p_2;

[1] Сімеон-Дені Пуассон (1781-1840) – французький фізик і математик, член Паризької академії наук (1812), почесний член Петербурзької академії наук (1826).

[2] Абрахам де Муавр (1667-1754) – англійський математик французького походження. Член Лондонського королівського товариства з 1697 року, Паризької (1754) та Берлінської (1735) академій наук.

[3] П'єр-Сімон Лаплас (1749-1827) – французький математик і астроном; відомий своїми працями в галузі диференціальних рівнянь, один із засновників теорії ймовірностей.

3 схема: $n = 3$, ймовірність "успіху" в одному випробуванні p_3;

$\ldots$

n схема: n випробувань, ймовірність "успіху" в одному випробуванні p_n.

Теорема 2.3. *Якщо існує таке $a > 0$, що $\lim\limits_{n\to\infty} np_n = a$, то*

$$\mathbb{P}_n(m) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{a^m}{m!}e^{-a}, \quad m = 0, 1, \ldots$$

Доведення. *Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} np_n = a$, то $p_n = \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Тоді для кожного фіксованого $m = 0, 1, \ldots,$*

$$\mathbb{P}_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m}$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}\left(\frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m \left(1 - \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n-m} =$$

$$= \underbrace{\frac{n}{n}}_{\to 1}\underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\to 1}\cdots\underbrace{\frac{n-m+1}{n}}_{\to 1}\frac{(a+o(1))^m}{m!}\cdot$$

$$\cdot\underbrace{\left(1 - \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n}_{\to e^{-a}}\underbrace{\left(1 - \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-m}}_{\to 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{a^m}{m!}e^{-a},$$

що й треба було довести.

Зауважимо, що на практиці використовують формулу Пуассона у такому вигляді:

$$\boxed{\mathbb{P}_n(m) \approx \frac{a^m \cdot e^{-a}}{m!}}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots., \tag{2.8}$$

де $a = np$. Її застосовують, коли ймовірність успіху p досить мала, тобто коли успіх є рідкою подією, а кількість випробувань n — велика. Емпірично встановлено, що при $np \leq 10$ асимптотична формула (2.8) дає досить точний результат.

Приклад 2.42. *В умовах прикладу 2.41 знайти ймовірності подій:*
1) за час T вийдуть з ладу рівно 3 елементи;

2) за час T вийде з ладу принаймні 1 елемент;
3) за час T вийдуть з ладу не більше 3-х елементів.

Розв'язання. 1) За формулою (2.8):

$$\mathbb{P}_{10000}(3) = \frac{5^3 e^{-5}}{3!} \approx 0.14.$$

2) Ймовірність, що з ладу вийде принаймні 1 елемент:

$$\mathbb{P}_{10000}(m \geq 1) = 1 - \mathbb{P}_{10000}(0) = 1 - \frac{5^0 e^{-5}}{0!} \approx 0.993.$$

3) Ймовірність, що з ладу вийдуть не більше 3-х елементів:

$$\mathbb{P}(m \leq 3) = \mathbb{P}_{10000}(0) + \mathbb{P}_{10000}(1) + \mathbb{P}_{10000}(2) + \mathbb{P}_{10000}(3) =$$
$$= \frac{5^0 e^{-5}}{0!} + \frac{5^1 e^{-5}}{1!} + \frac{5^2 e^{-5}}{2!} + \frac{5^3 e^{-5}}{3!} \approx 0.2646.$$

□

Приклад 2.43. *Словник має 1 500 сторінок. Ймовірність друкарської помилки на сторінці дорівнює 0.001. Знайти ймовірність того, що в словнику:*
1) буде рівно 3 помилки;
2) не буде жодної помилки;
3) буде хоча б одна помилка.

Розв'язання. Визначимо "успіх" як подію

$$A = \{\text{помилка на сторінці}\}, \quad p = 0.001.$$

Загальна кількість випробувань $n = 1500$, тоді $np = 1.5 < 10$. За формулою (2.8) отримаємо

1) $\mathbb{P}_{1500}(3) \approx \dfrac{(1.5)^3 e^{-1.5}}{3!} = 0.126,$

2) $\mathbb{P}_{1500}(0) \approx \dfrac{(1.5)^0 e^{-1.5}}{0!} = 0.223,$

3) $\mathbb{P}_{1500}(m \geq 1) = 1 - \mathbb{P}_{1500}(0) \approx 0.777.$ □

2.11.2. Теореми Муавра-Лапласа

Ще один спосіб досить точно наближено обчислити біноміальні ймовірності $\mathbb{P}_n(m)$ дає наступна теорема.

Теорема 2.4 (Локальна теорема Муавра-Лапласа)**.** *Нехай ймовірність успіху в схемі Бернуллі* $0 < p < 1$*. Тоді рівномірно по всім* m *таким, що* $|m - np| = o(npq)^{2/3}$,

$$\mathbb{P}_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{-\frac{(m-np)^2}{2npq}\right\},$$

тобто

$$\sup_{m\colon |m-np|\le\psi(n)} \left| \frac{\mathbb{P}_n(m)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{-\frac{(m-np)^2}{2npq}\right\}} - 1 \right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

де $\psi(n)$ *— будь-яка невід'ємна функція така, що* $\psi(n) = o(npq)^{2/3}$.

Доведення. *Застосуємо формулу Стірлінга:* $n! \sim e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}$, $n \to \infty$*. А саме, замінюватимемо*

$$n! = e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}\big(1 + R(n)\big),$$

де $R(n) \to 0$ *при* $n \to \infty$*, тобто* $R(n)$ *— деяка нескінченно мала функція при* $n \to \infty$.

Перетворимо спочатку за допомогою формули Стірлінга біноміальний коефіцієнт:

$$C_n^m = \frac{n!}{k!(n-m)!} =$$

$$= \frac{e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}\big(1 + R(n)\big)}{e^{-m} m^m \sqrt{2\pi m}\big(1 + R(m)\big) \cdot e^{-(n-m)} (n-m)^{n-m} \sqrt{2\pi(n-m)}\big(1 + R(n-m)\big)}$$

$$= \frac{1 + R(n)}{\big(1 + R(m)\big)\big(1 + R(n-m)\big)} \cdot \frac{n^n \sqrt{n}}{\sqrt{2\pi m(n-m)} \cdot m^m (n-m)^{n-m}} =$$

$$= \big(1 + \varepsilon(n, m, n-m)\big) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi n \cdot \frac{m}{n}\left(1 - \frac{m}{n}\right)\left(1 - \frac{m}{n}\right)^{n-m}\left(\frac{m}{n}\right)^m}},$$

де $\Big(1+\varepsilon(n,m,n-m)\Big) = \frac{1+R(n)}{\big(1+R(m)\big)\big(1+R(n-m)\big)}$, *причому* $\varepsilon(n,m,n-m) \to 0$ *при* $n\to\infty$, $m\to\infty$, $(n-m)\to\infty$.

Покладемо $\hat{p} = \frac{m}{n}$, *та розглянемо біноміальну ймовірність:*

$$\mathbb{P}_n(m) = \frac{1+\varepsilon(n,m,n-m)}{\sqrt{2\pi n\cdot\frac{m}{n}\Big(1-\frac{m}{n}\Big)}}\cdot\frac{p^m q^{n-m}}{\Big(\frac{m}{n}\Big)^m\Big(1-\frac{m}{n}\Big)^{n-m}} =$$

$$= \frac{1+\varepsilon(n,m,n-m)}{\sqrt{2\pi n\cdot\hat{p}\Big(1-\hat{p}\Big)}}\cdot\Big(\frac{p}{\hat{p}}\Big)^m\cdot\Big(\frac{1-p}{1-\hat{p}}\Big)^{n-m} =$$

$$= \frac{1+\varepsilon(n,m,n-m)}{\sqrt{2\pi n\cdot\hat{p}\Big(1-\hat{p}\Big)}}\cdot\exp\Big\{\ln\Big(\Big(\frac{p}{\hat{p}}\Big)^m\cdot\Big(\frac{1-p}{1-\hat{p}}\Big)^{n-m}\Big)\Big\} =$$

$$= \frac{1+\varepsilon(n,m,n-m)}{\sqrt{2\pi n\cdot\hat{p}\Big(1-\hat{p}\Big)}}\cdot\exp\Big\{-n\Big(\hat{p}\ln\frac{\hat{p}}{p}+(1-\hat{p})\ln\frac{1-\hat{p}}{1-p}\Big)\Big\} =$$

$$= \frac{1+\varepsilon(n,m,n-m)}{\sqrt{2\pi n\cdot\hat{p}\Big(1-\hat{p}\Big)}}\cdot e^{-nH(\hat{p})},$$

де $H(x) = x\ln\dfrac{x}{p}+(1-x)\ln\dfrac{1-x}{1-p}$.

Зауважимо, що $H(p)=0$. *Крім того,*

$$H'(x) = \ln\frac{x}{p}+\ln\frac{1-x}{1-p}, \quad \textit{звідки} \quad H'(p)=0,$$

$$H''(x) = \frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}, \quad \textit{звідки} \quad H''(p)=\frac{1}{p}+\frac{1}{1-p}\neq 0.$$

За формулою Тейлора

$$H(\hat{p}) = H(p+(\hat{p}-p)) = H(p)+\frac{H'(p)}{1!}(\hat{p}-p)+\frac{H''(p)}{2!}(\hat{p}-p)^2+O(|\hat{p}-p|^3) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p}\Big)(\hat{p}-p)^2 + O(|\hat{p}-p|^3).$$

Далі,

$$-nH(\hat{p}) = \frac{1}{2}\Big(\frac{-n}{p} + \frac{-n}{1-p}\Big)(\hat{p}-p)^2 - nO(|\hat{p}-p|^3) =$$

$$= \frac{-n}{2pq}(\hat{p}-p)^2 - nO(|\hat{p}-p|^3).$$

Нарешті повернемось до оцінки $\mathbb{P}_n(m)$. *Враховуючи міркування проведені вище, отримаємо:*

$$\mathbb{P}_n(m) = \frac{1+\varepsilon(n,m,n-m)}{\sqrt{2\pi n \cdot \hat{p}\Big(1-\hat{p}\Big)}} \cdot e^{-nH(\hat{p})} =$$

$$= \frac{1+\varepsilon(n,m,n-m)}{\sqrt{2\pi npq \cdot \frac{\hat{p}}{p}\frac{\left(1-\hat{p}\right)}{q}}} \cdot e^{\frac{-n}{2pq}\left(\frac{m}{n}-p\right)^2 - nO(|\hat{p}-p|^3)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot e^{\frac{-(m-np)^2}{2npq}} \cdot \Big(1+\varepsilon(n,m,n-m)\Big)\sqrt{\frac{p(1-p)}{\hat{p}(1-\hat{p})}} e^{-nO(|\hat{p}-p|^3)}.$$

Зауважимо, що при $n \to \infty$, $m \to \infty$ *та* $(n-m) \to \infty$,

$$\Big(1+\varepsilon(n,m,n-m)\Big) \to 1,$$

крім того, $\hat{p} - p = \frac{m}{n} - p = \frac{m-np}{n} = \frac{o(npq)^{2/3}}{n} \to 0$, *а отже,*

$$\sqrt{\frac{p(1-p)}{\hat{p}(1-\hat{p})}} \to 1.$$

Нарешті, $-nO(|\hat{p}-p|^3) = -nO(\left|\frac{m-np}{n}\right|^3) = -nO(\frac{|o(npq)^{2/3}|^3}{n^3}) \to 0$, *а тому* $e^{-nO(|\hat{p}-p|^3)} \to 1$.

Остаточно,

$$\mathbb{P}_n(m) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot e^{\frac{-(m-np)^2}{2npq}},$$

що й треба було довести.

Зауваження 2.5. Якщо покласти в теоремі 2.4

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}, \quad \text{звідки} \quad m = np + x\sqrt{npq},$$

то результат теореми 2.4 можна записати дещо в іншій формі. А саме, для всіх $x \in \mathbb{R}$ таких, що $x = o(npq)^{1/6}$, а $np + x\sqrt{npq}$ — цілі числа з множини $\{0, 1, \ldots, n\}$, справедливе наближення:

$$P_n(np + x\sqrt{npq}) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-x^2/2},$$

тобто при $n \to \infty$,

$$\sup_{x:\,|x| \le \psi(n)} \left| \frac{P_n(np + x\sqrt{npq})}{\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-x^2/2}} \right| \to 0,$$

де $\psi(n) = o(npq)^{1/6}$.

Зауваження 2.6. Локальну формулу Муавра-Лапласа в літературі також записують наступним чином:

$$\mathbb{P}_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right), \tag{2.9}$$

де

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \; x \in \mathbb{R},$$

— *локальна функція Гауса*[1]. Графік функції $\varphi(x)$ зображений на рисунку 2.19. Зауважимо також, що функція $\varphi(x)$ є парною, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$, та при $x \ge 4$ можна вважати, що $\varphi(x) = 0$.

[1] Карл Фрідріх Гаус (1777–1855) – німецький математик, астроном, геодезист та фізик. Вважається одним з найвидатніших математиків всіх часів, "королем математиків". Локальна функція Гауса насправді є щільністю нормального (гауссівського) розподілу, який є одним з найбільш важливих неперервних розподілів теорії ймовірностей.

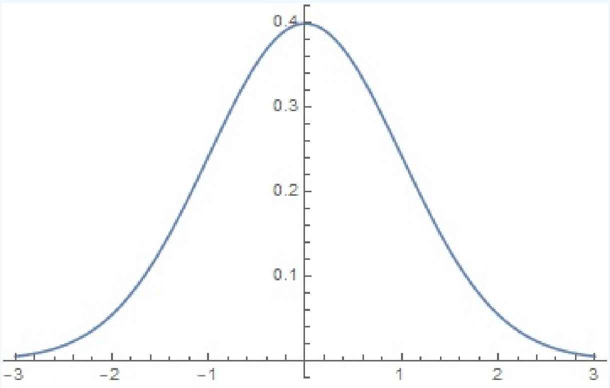

Рис. 2.19. Графік локальної функції Гауса

На практиці формулу (2.9) застосовують, коли $npq > 10$.

Приклад 2.44. *Ймовірність того, що при автоматичній штамповці виробів окремий виріб виявиться бракованим дорівнює 0.05. Яка ймовірність того, що в партії із 1000 виробів буде рівно 49 бракованих?*

Розв'язання. Визначимо "успіх" як

$$A = \{\text{виріб бракований}\}, \quad p = \mathbb{P}(A) = 0.05.$$

Тоді $q = 1 - 0.05 = 0.95$, $n = 1000, m = 49$. Обчислимо

$$npq = 1000 \cdot 0.05 \cdot 0.95 = 47.5 > 10,$$

отже застосуємо формулу (2.9):

$$\mathbb{P}_{1000}(49) = \frac{1}{\sqrt{47,5}}\varphi\left(\frac{49-50}{\sqrt{47,5}}\right).$$

$$\frac{49-50}{\sqrt{47.5}} \approx -0.145 \quad \Rightarrow \quad \varphi(-0.145) = \varphi(0.145) = 0.3945 \quad \Rightarrow$$

$$\mathbb{P}_{1000}(49) = \frac{1}{6.89} \cdot 0.3945 = 0.057.$$

$\square$

У тих випадках, коли потрібно обчислити ймовірність того, що кількість "успіхів" належить інтервалу $(m_1, m_2]$, використовують інтегральну теорему Муавра-Лапласа.

Теорема 2.5 (Інтегральна теорема Муавра-Лапласа)**.** *Нехай ймовірність успіху в схемі Бернуллі* $0 < p < 1$. *Тоді*

$$\sup_{-\infty \le a < b \le \infty} \left| \mathbb{P}\left\{ a < \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \le b \right\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

або для будь-яких $-\infty \le m_1 < m_2 \le \infty$,

$$\mathbb{P}_n(m_1 < m \le m_2) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi_0\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi_0\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

де

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt,\ x \in \mathbb{R} - \textit{інтегральна функція Лапласа.}$$

Перш ніж перейти до доведення теореми, зауважимо, що функція Φ_0 є непарною, тобто $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$, та при $x \ge 5$ можна вважати $\Phi_0(x) = 0.5$. Графік функції $\Phi_0(x)$ зображений на рисунку 2.20.

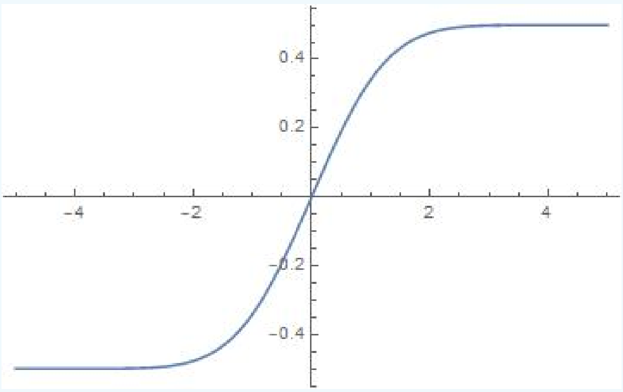

Рис. 2.20. Графік функції Лапласа

Значення функції Φ_0 затабульовані (таблицю значень функції Лапласа можна знайти в багатьох підручниках, наприклад, див. [16], або в мережі інтернет https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/fitki/4tichinska_teoriya_jmovirnostej/da.htm).

Доведення. *Ідея доведення спирається на результат локальної теореми та полягає в наступному. Якщо в зауваженні 2.5 покласти* $t_m = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$ *та* $\Delta t_m = t_{m+1} - t_m = \frac{1}{\sqrt{npq}}$, *то*

$$\mathbb{P}\Big\{\frac{m-np}{\sqrt{npq}} = t_m\Big\} \approx \frac{\Delta t_m}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t_m^2}{2}}, \quad t_m = o(npq)^{1/6}.$$

Тоді для довільних $-\infty < a \le b < \infty$

$$\sum_{a<t_m\le b} \mathbb{P}\Big\{\frac{m-np}{\sqrt{npq}} = t_m\Big\} \approx \sum_{a<t_m\le b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t_m^2}{2}} \Delta t_m$$

і оскільки $\Delta t_m = \frac{1}{\sqrt{npq}} \to 0$, $n \to \infty$, *то остання сума нагадує інтегральну для функції* $\varphi(x)$ *на відрізку* $[a,b]$. *А тому слід очікувати, що при переході до границі*

$$\mathbb{P}\Big\{a < \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \le b\Big\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx = \Phi_0(b) - \Phi_0(a),$$

$-\infty < a \le b < \infty$. *Реалізуємо цю ідею строго математично.*

Нехай для $-\infty < a \le b < \infty$

$$P_n(a,b] = \sum_{a<x\le b} P_n\big(np + x\sqrt{npq}\big),$$

де сума береться по всім x, *для яких* $\big(np + x\sqrt{npq}\big)$ *— цілі числа.*

З локальної теореми випливає, що для всіх t_m, *які визначаються з рівності* $m = np + t_m\sqrt{npq}$, *та задовольняють умові* $|t_m| \le T < \infty$,

$$P_n\big(np + t_m\sqrt{npq}\big) = \frac{\Delta t_m}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t_m^2}{2}} \Big(1 + \varepsilon(t_m, n)\Big),$$

де $\sup\limits_{|t_m|\le T} |\varepsilon(t_m,n)| \longrightarrow 0$, $n \to \infty$. *Тоді для фіксованих* a *та* b *таких, що* $-T \le a \le b \le T$, *де* $T < \infty$, *справедлива рівність:*

$$\sum_{a<t_m\le b} P_n\big(np + t_m\sqrt{npq}\big) = \sum_{a<t_m\le b} \frac{\Delta t_m}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t_m^2}{2}} \Big(1 + \varepsilon(t_m, n)\Big) =$$

$$= \sum_{a<t_m\le b} \frac{\Delta t_m}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t_m^2}{2}} + \sum_{a<t_m\le b} \varepsilon(t_m,n) \frac{\Delta t_m}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t_m^2}{2}}.$$

Позначимо

$$R_n^{(1)}(a,b) = \sum_{a<t_m\le b} \frac{\Delta t_m}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t_m^2}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

$$R_n^{(2)}(a,b) = \sum_{a<t_m\le b} \varepsilon(t_m,n) \frac{\Delta t_m}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t_m^2}{2}}.$$

Очевидно, з властивостей інтегральних сум випливає, що

$$\sup_{-T\le a\le b\le T} \left| R_n^{(1)}(a,b) \right| \to 0, \quad n\to\infty.$$

Покажемо, що і

$$\sup_{-T\le a\le b\le T} \left| R_n^{(2)}(a,b) \right| \to 0, \quad n\to\infty.$$

Дійсно,

$$\sup_{-T\le a\le b\le T} \left| R_n^{(2)}(a,b) \right| \le \sup_{|t_m|\le T} |\varepsilon(t_m,n)| \cdot \sum_{|t_m|\le T} \frac{\Delta t_m}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t_m^2}{2}} \le$$

$$\le \sup_{|t_m|\le T} |\varepsilon(t_m,n)| \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^{T} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \sup_{-T\le a\le b\le T} \left| R_n^{(1)}(a,b) \right| \right] \le$$

$$\le \sup_{|t_m|\le T} |\varepsilon(t_m,n)| \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \sup_{-T\le a\le b\le T} \left| R_n^{(1)}(a,b) \right| \right) =$$

$$\le \sup_{|t_m|\le T} |\varepsilon(t_m,n)| \cdot \left(1 + \sup_{-T\le a\le b\le T} \left| R_n^{(1)}(a,b) \right| \right) \longrightarrow 0, \quad n\to\infty.$$

Отже,

$$\sup_{-T\le a\le b\le T} \left| P_n(a;b] - \left(\Phi_0(b) - \Phi_0(a)\right) \right| \longrightarrow 0, \quad n\to\infty. \qquad (2.10)$$

Залишається довести, що цей результат справедливий не тільки для скінчених T, а і для $T=\infty$. Оскільки

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^{T} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1,$$

то існує $T = T(\varepsilon)$ таке, що

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^{T} e^{-\frac{x^2}{2}} dx > 1 - \frac{\varepsilon}{4}.$$

Крім того, з (2.10) *випливає, що існує такий номер N, що для всіх $n > N$ та $T = T(\varepsilon)$,*

$$\sup_{-T \le a \le b \le T} \Big| P_n(a; b] - \big(\Phi_0(b) - \Phi_0(a)\big) \Big| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

З наведених міркувань випливає, що

$$P_n(-T, T] > 1 - \frac{\varepsilon}{2},$$

і, відповідно

$$P_n(-\infty, -T] + P_n(T, \infty) \le \frac{\varepsilon}{2},$$

де $P_n(-\infty, -T] = \lim\limits_{s \to -\infty} P_n(s, -T]$ та $P_n(T, \infty) = \lim\limits_{s \to +\infty} P_n(T, s]$.

Таким чином, для будь-яких $-\infty \le -T \le a \le b \le T \le +\infty$, виконується

$$\left| P_n(a, b] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right| \le \left| P_n(-T, T] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^{T} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right| +$$

$$+ \left| P_n(a, -T] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{-T} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right| + \left| P_n(T, b] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_T^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right| \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{4} + P_n(-\infty, -T] + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-T} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + P_n(T, \infty) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_T^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} = \varepsilon.$$

Нарешті, враховуючи (2.10),

$$\sup_{-\infty \le a \le b \le \infty} \Big| P_n(a; b] - \big(\Phi_0(b) - \Phi_0(a)\big) \Big| \longrightarrow 0, \quad n \to \infty.$$

Теорему 2.5 *повністю доведено.*

Зауваження 2.7. При розв'язанні задач інтегральну формулу Муавра-Лапласа використовуватимемо у наступному вигляді:

$$\mathbb{P}_n(m_1 < m \le m_2) \approx \Phi_0\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi_0\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right), \tag{2.11}$$

де $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, $x \in \mathbb{R}$. Як і локальна формула Муавра-Лапласа вона дає досить точне наближення, якщо $npq > 10$.

Приклад 2.45. *Гральну кістку підкинули 12 000 разів. Яка ймовірність того, що "6" випаде від 1 801 до 2 100 разів?*

Розв'язання. Визначимо "успіх" як подію

$$A = \{\text{випаде "6"}\}, \quad p = \mathbb{P}(A) = \frac{1}{6}.$$

Тоді $q = \frac{5}{6}$, $n = 12000$, $m_1 = 1800$, $m_2 = 2100$. Отже,

$$np = 2000, \ \sqrt{npq} = 40.82.$$

Застосуємо формулу (2.11):

$$\mathbb{P}_{12000}(1800 < m \le 2100) = \Phi_0\left(\frac{2100 - 2000}{40.82}\right) - \Phi_0\left(\frac{1800 - 2000}{40.82}\right) =$$

$$= \Phi_0(2.449) - \Phi_0(-4.898) = \Phi_0(2.449) + \Phi_0(4.898) =$$

$$= 0.49286 + 0.499999 \approx 0.993.$$

□

Задачі для самостійного розв'язання до 2.11

1. Маша стріляє в мишу 500 разів. Ймовірність влучення з одного пострілу становить 0.01. Яка ймовірність того, що Маша влучить у мишу від 3 до 7 разів?

2. В деякій групі людей, дальтоніків налічується 1%. Знайти ймовірність, що серед 100 навмання вибраних з цієї групи осіб,

   а) дальтоніків не виявиться;

   б) дальтоніків буде не менше двох.

3. Для просування своєї продукції на ринок фірма розповсюджує рекламу по почтових скриньках житлових будинків. Попередній досвід свідчить про те, що в середньому в одному випадку на кожні 200 рекламних листівок відбувається замовлення товару. Знайти ймовірність того, що після розміщення 1000 рекламних листівок надійде:

   а) рівно 4 замовлення;

   б) хоча б 1 замовлення.

4. Стрілець робить 100 пострілів по мішені. Ймовірність влучення при одному пострілі дорівнює 0.7. Знайти ймовірність того, що він влучив:

   а) рівно 69 разів;

   б) від 67 до 72 разів.

5. Книга налічує 500 сторінок. Відомо, що в книзі 50 друкарських помилок. Яка ймовірність, що на довільно обраній сторінці буде не менше двох друкарських помилок?

6. Відомо, що ймовірність народження хлопчика становить приблизно 0.515. Яка ймовірність того, що серед 10 000 новонароджених хлопчиків буде менше ніж дівчаток?

7. Згідно зі статистичними даними 87% всіх новонароджених доживають до 50 років. Знайти ймовірність того, що з 1000 новонароджених до 50 років доживуть не менше 950.

8. В країні нараховується 10 000 000 виборців, з яких 5 050 000 є прихильниками "Партії вільних анархістів", а решта — "Партії радикальних феміністів". Випадковим чином обирають 20 000 виборців, які голосують на виборах президента. Визначити ймовірність того, що президентом буде обрано радикального фемініста.

9. Гральну кістку підкинули 3 000 разів. Яка ймовірність того, що сумарна кількість випадань "5" та "6" буде між 901 та 1 100?

10. Знайти ймовірність того, що серед 10000 навмання записаних цифр цира 7 з'явиться не більше ніж 968 разів?

11. В деякому населеному пункті 3000 виборців. Відомо, що в середньому участь у виборах приймають 60% виборців. Яка ймовірність того, що на найближчі вибори прийде не менше 62% всіх виборців населеного пункту?

12. Симетричну монету підкинули 1000 разів. Для якого k з ймовірністю 0.5 кількість гербів, що випали, лежить між 490 та k включно?

13. Театр вміщує 1000 глядачів і має 2 входи. Біля кожного входу є свій гардероб. Скільки місць має бути в кожному гардеробі, щоб в середньому у 99 випадках зі 100 всі глядачі змогли роздягнутися в гардеробі того входу, через який вони ввійшли? Розв'язати задачу за умови, що

    а) глядачі приходять поодинці та рівноймовірно обирають один з двох входів;

    б) глядачі приходять парами та рівноймовірно обирають один з двох входів.

14. Цех заводу виготовляє певні вироби. За одну зміну виготовляють 10 тис. виробів. Імовірність того, що окремий виріб має дефект, дорівнює 0.05. Продукцію контролюють відразу після виготовлення, причому дефектні вироби вилучають та відправляють на склад. Встановити, на яку кількість дефектних виробів має бути розрахований склад, щоб з імовірністю, яка дорівнює 0.99, він не був переповненим після однієї зміни?

15. Петро працює у страховій компанії. Його досвід показує, що для певного виду страхових послуг ймовірність настання страхового випадку дорівнює 0.008. На початку року було оформлено 10 тис. страхових полісів зі страховим внеском 1 тис. грн. на рік. У страховому випадку

компанія зобов'язується зробити виплату 100 тис. грн. Яка ймовірність того, що до кінця року

а) компанія зазнає збитків?

б) прибуток компанії буде більше за 3 млн. грн.?

в) прибуток компанії буде менше за 1 млн. грн.?

3. ДИСКРЕТНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ ТА ЇХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

В цьому розділі вводиться одне з фундаментальних понять теорії ймовірностей — поняття випадкової величини. Разом з ним розглянуто означення та властивості функції розподілу випадкової величини, дискретні випадкові величини та їх числові характеристики. Наведено канонічні дискретні розподіли такі як біноміальний, рівномірний, геометричний, від'ємний біноміальний, гіпергеометричний, а також розподіл Пуассона та потік подій Пуассона.

3.1. Поняття випадкової величини

Неформально під *випадковою величиною* розуміють будь-який числовий результат стохастичного експерименту.

Розглянемо такий приклад. Монету підкидають 2 рази. Який можливий числовий результат експерименту? Іншими словами: яке питання можна поставити тому, хто проводить експеримент, щоб відповідь була числом?

Нехай питання наступне: "Скільки випало гербів?"

Простір елементарних подій такого експерименту:

$$\Omega = \{\text{ГГ, ГР, РГ, РР}\}$$

В залежності від результату експерименту кількість гербів, що випали, буде різною. Позначимо через ξ — кількість гербів, що випали. Тоді для ω_1 ="ГГ" маємо $\xi(\omega_1) = 2$, для ω_2 ="ГР" маємо $\xi(\omega_2) = 1$, для ω_3 ="РГ" маємо $\xi(\omega_3) = 1$, для ω_4 ="РР" маємо $\xi(\omega_4) = 0$ (див. рис. 3.1).

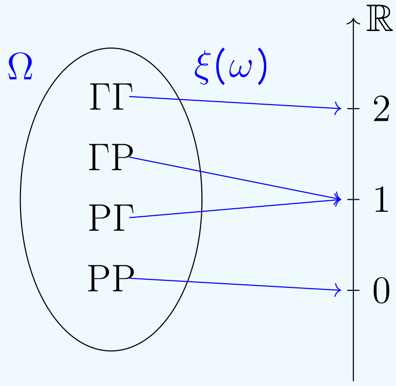

Рис. 3.1. Випадкова величина – це функція із Ω у $\mathbb{R}$

Отже, з прикладу бачимо, що ξ — це функція, що діє із Ω у $\mathbb{R}$. Дамо формальне означення випадкової величини.

3.1.1. Означення випадкової величини

Нехай $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ — ймовірнісний простір стохастичного експерименту.
Означення 3.1. Випадковою величиною ξ називається функція

$$\xi : \Omega \to \mathbb{R},$$

така, що випадкова подія $\{\omega : \xi(\omega) \leq x\} \in \mathfrak{F}$.

Випадкові величини (в.в.) позначають малими грецькими літерами $\xi, \eta, \theta, \psi, \ldots$ або великими латинськими літерами $X, Y, Z, \ldots$. Значення, які вони приймають, як правило, позначають малими літерами $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$

Зауваження 3.1. Умова $\{\omega : \xi(\omega) \leq x\} \in \mathfrak{F}$ в означенні 3.1 означає, що подія $\{\xi(\omega) \leq x\}, \forall \omega \in \Omega$ має належати σ - алгебрі $\mathfrak{F}$. Такі події називаються *вимірними* відносно σ - алгебри $\mathfrak{F}$. Для чого ця умова? Для того, щоб можна було обчислювати ймовірності подій $\{\xi(\omega) \leq x\}$. Отже, виникають ймовірності подій $\{\omega : \xi(\omega) \leq x\}$.

3.1.2. Функція розподілу випадкової величини та її властивості

Означення 3.2. Функція

$$F_\xi(x) = \mathbb{P}(\xi \le x)$$

називається **функцією розподілу** в.в. ξ.

Функція розподілу $F_\xi(x)$ є основною характеристикою в.в. ξ, оскільки існує завжди і визначає всі властивості в.в. ξ.

Приклад 3.1. *Монету підкидають 2 рази, ξ – кількість гербів. Побудуємо функцію розподілу в.в. ξ.*

Розв'язання. В.в. ξ приймає значення 0, 1, 2. Тоді

- якщо $x < 0$, то $F_\xi(x) = \mathbb{P}(\xi \le x) = 0$,
- якщо $0 \le x < 1$, то
$$F_\xi(x) = \mathbb{P}(\xi \le x) = \mathbb{P}(\xi = 0) = \frac{1}{4},$$
- якщо $1 \le x < 2$, то
$$F_\xi(x) = \mathbb{P}(\xi \le x) = \mathbb{P}(\xi = 0) + \mathbb{P}(\xi = 1) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4},$$
- якщо $x \ge 2$, то
$$F_\xi(x) = \mathbb{P}(\xi \le x) = \mathbb{P}(\xi = 0) + \mathbb{P}(\xi = 1) + \mathbb{P}(\xi = 2) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1,$$

Таким чином,

$$F_\xi(x) = \mathbb{P}(\xi \le x) = \begin{cases} 0,\ x < 0, \\ 0.25,\ 0 \le x < 1, \\ 0.75,\ 1 \le x < 2, \\ 1,\ x \ge 2. \end{cases}$$

Графік функції розподілу зображено на рисунку 3.2.

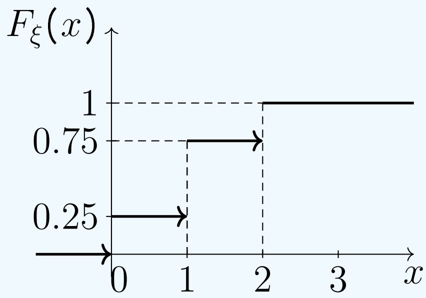

Рис. 3.2. Графік функції розподілу для ξ із прикладу 3.1.

$\square$

В наведеному прикладі функція розподілу має наступні властивості:
1) функція $F_\xi(x)$ східчастого вигляду:
2) монотонно неспадна;
3) неперервна справа: $\exists \lim\limits_{y \to x+} F_\xi(y) = F_\xi(x), \forall x$;
4) $F_\xi(-\infty) = 0$, $F_\xi(+\infty) = 1$.
Які з них виконуються для всіх функцій розподілу?

Властивості функції розподілу

1. $\forall x \in \mathbb{R} : 0 \le F_\xi(x) \le 1$.

Ця властивість випливає безпосередньо із означення функції розподілу.

2. $F_\xi(x)$ - монотонно неспадна, тобто $\forall x \le y$: $F_\xi(x) \le F_\xi(y)$.

Доведення.

$$F_\xi(y) = \mathbb{P}(\xi \le y) = \mathbb{P}(\{\xi \le x\} \cup \{x < \xi \le y\}) =$$

$$\mathbb{P}(\xi \le x) + \mathbb{P}(x < \xi \le y) \ge \mathbb{P}(\xi \le x) = F_\xi(x).$$

3. $\forall x \le y : \mathbb{P}(x < \xi \le y) = F_\xi(y) - F_\xi(x)$.

Доведення. *Дійсно, із Доведення властивості 2 маємо*

$$\mathbb{P}(x < \xi \le y) = \mathbb{P}(\xi \le y) - \mathbb{P}(\xi \le x) = F_\xi(y) - F_\xi(x).$$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F_\xi(x) = 1$.

Доведення. *Сформулюємо та доведемо допоміжне* ***твердження****:*

$$\lim_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to-\infty} F_\xi(n) = 0,\ n \in \mathbb{Z}.$$

($\Rightarrow$) очевидно, оскільки множина цілих чисел є підмножиною множини дійних.

($\Leftarrow$)в силу монотонності функції розподілу:

$$\forall x \le n : F_\xi(x) \le F_\xi(n).$$

Перейдемо до границь при $x \to -\infty$ та $n \to -\infty$:

$$0 \le \lim_{x\to-\infty} F_\xi(x) \le \lim_{n\to-\infty} F_\xi(n) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0.$$

Отже, якщо доведемо рівність границі 0 по цілим $n \to -\infty$, то доведемо доведемо по всім дійсним $x \to -\infty$.

Введемо події $A_n = \{\xi \le -n\}$, $n \ge 1$. Ця послдовність є спадною і $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \varnothing$. За теоремою неперервності ймовірності для спадної послідовності подій (A_n):

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n),$$

звідки

$$0 = \mathbb{P}(\varnothing) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\xi \le -n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} F_\xi(-n) = \lim_{n\to-\infty} F_\xi(n),$$

а отже, в силу наведених вище міркувань,

$$\lim_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0.$$

Доведемо тепер, що $\lim\limits_{x\to+\infty} F_\xi(x) = 1$. Останнє співвідношення в силу неспадності функції $F_\xi(x)$ еквівалентно тому, що $\lim\limits_{n\to+\infty} F_\xi(n) = 1$.

Отже, по аналогії до попереднього випадку, розглянемо події $A_n = \{\xi \le n\}$, $n \ge 1$. *Ця послідовність подійє зростаючою та* $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \Omega$. *Тому за теоремою неперервності ймовірності для зростаючої послідовності:*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n),$$

звідки

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\xi \le n) = \lim_{n\to+\infty} F_\xi(n).$$

Таким чином,

$$\lim_{x\to+\infty} F_\xi(x) = 1.$$

5. $F_\xi(x)$ – неперервна справа, тобто $\forall x$ існує $\lim\limits_{y\to x+} F_\xi(y) = F_\xi(x)$.

Доведення. *Будемо наближатись до* x *справа по послідовності* $y_n = x + \frac{1}{n}, n \ge 1$, *і доведемо, що*

$$\lim_{n\to\infty} F_\xi\left(x + \frac{1}{n}\right) = F_\xi(x).$$

Покладемо $A_n = \{\xi \le x + \frac{1}{n}\}$, $n \ge 1$. *Маємо* $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$, *тобто послідовність* (A_n) *— спадна. За теоремою неперервності ймовірності,*

$$F_\xi(x) = \mathbb{P}(\xi \le x) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\xi \le x + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} F_\xi\left(x + \frac{1}{n}\right).$$

Нарешті, оскільки $F_\xi(x)$ *— монотонна, то неперервність справа справедлива для всіх* $x \in \mathbb{R}$.

Зауваження 3.2. $F_\xi(x)$ виявилась неперервною справа. Чому доведення не проходить для неперервності зліва? Спробуємо повторити міркування.

Будемо наближатись до x зліва по послідовності $y_n = x - \frac{1}{n}$, $n \geq 1$. Розглянемо події $A_n = \{\xi \leq x - \frac{1}{n}\}$, $n \geq 1$. Тоді $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$, тобто послідовність (A_n) — зростаюча. Тоді за теоремою про неперервність ймовірності:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Але з одного боку,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\xi \leq x - \frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} F_\xi\Big(x - \frac{1}{n}\Big),$$

а з іншого боку

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{\xi < x\}.$$

І ми отримали, що

$$\mathbb{P}(\xi < x) = \lim_{n\to\infty} F_\xi\Big(x - \frac{1}{n}\Big),$$

де $\mathbb{P}(\xi < x)$ не є функцією розподілу! Отже, дійсно, функція розподілу може не бути неперервною зліва.

Але з наведених міркувань випливає інша властивість.

6. $\mathbb{P}(\xi < x) = \lim\limits_{y\to x-} F_\xi(y)$.

Означення 3.3. Стрибком функції розподілу $F(x)$ у точці x називається величина

$$\Delta_F(x) = F(x) - F(x-0).$$

7. $\Delta_F(x) = \mathbb{P}(\xi = x)$.

8. Якщо $F_\xi(x)$ неперервна, то $\mathbb{P}(\xi = x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, тобто ймовірність того, що ξ приймає конкретне значення дорівнює 0.

Зауваження 3.3. В літературі часто можна знайти таке означення функції розподілу:

$$F_\xi(x) = \mathbb{P}(\xi < x).$$

В цьому випадку властивості 1–4, 8 зберігаються, але функція розподілу буде неперервною зліва. При цьому стрибком функції слід називати величину $\Delta_F(x) = F(x+0) - F(x)$, і тоді властивість 7 теж справедлива. Ми надалі будемо дотримуватися означення, яке частіше зустрічається в західній літературі (див., наприклад, [20; 23]) та яке ми дали в означенні 3.2, тобто

$$F_\xi(x) = \mathbb{P}(\xi \le x).$$

3.2. Дискретні випадкові величини

Означення 3.4. Випадкова величина називається **дискретною**, якщо множина її значень скінченна або зліченна.

Зручною характеристикою дискретної в.в. є **ряд її розподілу**:

ξ	x_1	x_2	...	x_n	(...)
$\mathbb{P}$	p_1	p_2	...	p_n	(...)

де перший рядок містить всі можливі значення в.в. ξ (зазвичай у порядку їх зростання), а другий рядок — відповідні цим значенням ймовірності: $p_i = \mathbb{P}(\xi = x_i)$.

Оскільки у ряд розподілу записують всі можливі значення в.в. та події $\{\xi = x_i\}$, $i \ge 1$, утворюють повну групу подій, то

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Якщо випадкова величина набуває скінченну кількість значень, тобто представлена рядом розподілу

ξ	x_1	x_2	...	x_n
$\mathbb{P}$	p_1	p_2	...	p_n

,

то її функція розподілу набуває також скінченну кількість значень і має наступний вигляд:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, \; x < x_1, \\ p_1, \; x_1 \le x < x_2, \\ p_1 + p_2, \; x_2 \le x < x_3, \\ p_1 + p_2 + p_3, \; x_3 \le x < x_4, \\ \ldots \\ 1, \; x \ge x_n. \end{cases}$$

Приклад 3.2. *В коробці знаходяться 2 білих та 4 чорних миші. З коробки виймають по одній миші*
(а) без повернення,
(б) повертаючи кожен раз мишу до коробки.
Нехай ξ — номер кроку, на якому вперше витягнули білу мишу. Для (а) та (б) скласти ряди розподілу. В постановці (а) записати функцію розподілу та побудувати її графік.

Розв'язання. (а) Білу мишу вперше можна вийняти на 1, 2, 3, 4, 5-му кроках. Знайдемо ймовірності кожної з цих подій.

$$\mathbb{P}(\xi = 1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

$$\mathbb{P}(\xi = 2) = \mathbb{P}(\text{чб}) = \mathbb{P}(\text{ч})\mathbb{P}(\text{б}|\text{ч}) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15},$$

$$\mathbb{P}(\xi = 3) = \mathbb{P}(\text{ччб}) = \mathbb{P}(\text{ч})\mathbb{P}(\text{ч}|\text{ч})\mathbb{P}(\text{б}|\text{чч}) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{5},$$

$$\mathbb{P}(\xi = 4) = \mathbb{P}(\text{чччб}) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{15},$$

$$\mathbb{P}(\xi = 5) = \mathbb{P}(\text{ччччб}) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{1}{15}.$$

Тоді ряд розподілу має вигляд

ξ	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

Перевірка: $\frac{1}{3}+\frac{4}{15}+\frac{1}{5}+\frac{2}{15}+\frac{1}{15}=1$.

Побудуємо функцію розподілу $F_\xi(x)$:

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0,\ x<1,\\ \frac{1}{3},\ 1\le x<2,\\ \frac{1}{3}+\frac{4}{15}=\frac{9}{15},\ 2\le x<3,\\ \frac{1}{3}+\frac{4}{15}+\frac{1}{5}=\frac{12}{15},\ 3\le x<4,\\ \frac{1}{3}+\frac{4}{15}+\frac{1}{5}+\frac{2}{15}=\frac{14}{15},\ 4\le x<5,\\ 1,\ x\ge 5.\end{cases}$$

Графік функції розподілу зображено на рисунку 3.3.

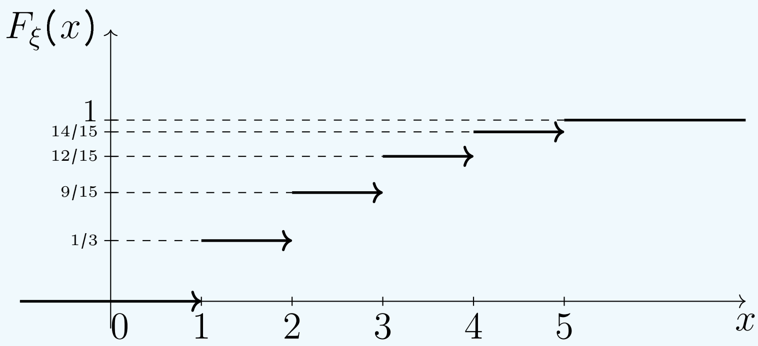

Рис. 3.3. Графік функції розподілу для ξ із прикладу 3.2 (а).

(б) У випадку виймання мишей з поверненням множина значень в.в. ξ буде зліченною, тобто можливі значення ξ: 1, 2, 3, ..., n, ... Обчислимо ймовірності цих подій.

$$\mathbb{P}(\xi=1)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},$$

$$\mathbb{P}(\xi=2)=\mathbb{P}(\text{чб})=\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3},$$

$$\mathbb{P}(\xi=3)=\mathbb{P}(\text{ччб})=\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2,$$

$$\mathbb{P}(\xi=4)=\mathbb{P}(\text{чччб})=\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3,$$

$$\ldots$$

$$\mathbb{P}(\xi = n) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

Тоді ряд розподілу має вигляд

ξ	1	2	3	$\ldots$	n	$\ldots$
$\mathbb{P}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$	$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$	$\ldots$	$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$	$\ldots$

Перевірка: $\frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \ldots\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-2/3} = 1.$ □

Приклад 3.3. *Нехай в деякому експерименті деяка подія A відбувається з ймовірністю p і не відбувається з ймовірністю $q = 1 - p$. Позначимо ε таку випадкову величину:*

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, \textit{якщо подія } A \textit{ відбулась}, \\ 0, \textit{якщо подія } A \textit{ не відбулась}. \end{cases}$$

Така випадкова величина називається індикатрною. Ряд розподілу індикаторної величини:

ε	0	1
$\mathbb{P}$	q	p

3.3. Числові характеристики дискретної випадкової величини

Ряд розподілу повністю характеризує випадкову величину. Однак, при розв'язанні багатьох практичних задач досить знати лише деякі числові параметри, що характеризують окремі суттєві властивості розподілу в.в. Такі числа заведено називати *числовими характеристиками* в.в. Розглянемо основні з них.

3.3.1. Математичне сподівання

Розглянемо спочатку такий приклад. Нехай в.в. ξ приймає 2 можливі значення a та b з однаковими ймовірностями, рівними $\frac{1}{2}$. Тоді ряд її розподілу буде мати вигляд

ξ	a	b
$\mathbb{P}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Що правильно називати середнім значенням такої в.в.? Інтуїтивно, зрозуміло, що середнім значенням буде

$$\frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = ap_1 + bp_2,$$

де $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$.

Означення 3.5. Математичним сподіванням дискретної в.в. ξ, яка має ряд розподілу

ξ	x_1	x_2	...	x_n	(...)
$\mathbb{P}$	p_1	p_2	...	p_n	(...)

,

називається число

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i.$$

Математичне сподівання описує середнє значення в.в. В літературі можна також знайти позначення: $\mathbb{M}\xi, \mathbb{M}(\xi), \mathbb{M}[\xi]$.

Зауваження 3.4. Якщо множина значень в.в. ξ скінченна, то математичне сподівання існує завжди. Якщо ж множина значень в.в. ξ злічена, то ряд $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ може розбігатись, тоді математичне сподівання в.в. не існує.

Насправді для існування математичного сподівання вимагається більш жорстка умова — абсолютна збіжність ряду $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$. Навіщо?

Нагадаємо, що умовно збіжні ряди мають таку властивість: переставляючи члени ряду можна отримати будь-яку наперед задану суму ряду (теорема Рімана). Тому в термінах математичного сподівання це означало б, що математичне сподівання в.в. змінювалося б відповідно до перестановки значень в.в. у ряді розподілу. Такого не має бути.

Отже, $\mathbb{E}\xi$ існує, якщо ряд $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ збігається абсолютно.

Приклад 3.4. *В прикладі 3.2 знайти* $\mathbb{E}\xi$*.*

Розв'язання. (а) Оскільки ряд розподілу ξ вже складено:

ξ	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

то

$$\mathbb{E}\xi = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{4}{15} + 3 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{2}{15} + 5 \cdot \frac{1}{15} = 2\frac{1}{3}.$$

(б) Повернемось і в цьому випадку до ряду розподілу:

ξ	1	2	3	...	n	...
$\mathbb{P}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$	$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$	...	$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$	...

Тоді

$$\mathbb{E}\xi = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \ldots + n \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \ldots + n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \ldots\right).$$

Щоб знайти суму виписаного ряду, згадаємо властивості степеневих рядів. Розглянемо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (x^k)' = \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k\right)' = (x + x^2 + x^3 + \ldots)' =$$

$$= \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1.$$

Підставляючи у знайдену суму $x = 2/3$, отримаємо

$$\mathbb{E}\xi = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1-2/3)^2} = 3.$$

Це означає, що в середньому першу білу мишу дістануть на 3-му кроці.

□

Властивості математичного сподівання

1. *$\mathbb{E}c = c$, де c — константа.*

Доведення. *Константу можна розглядати як в.в. з рядом розподілу:*

ξ	c
$\mathbb{P}$	1

Тому $\mathbb{E}c = c \cdot 1 = c$.

2. *$\mathbb{E}(c\xi) = c\mathbb{E}\xi$, якщо $\mathbb{E}\xi$ існує.*

Доведення. *Для дискретної в.в. з рядом розподілу:*

ξ	x_1	x_2	...	x_n	(...)
$\mathbb{P}$	p_1	p_2	...	p_n	(...)

маємо

$$\mathbb{E}(c\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} c x_k p_k = c \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k = c\mathbb{E}\xi.$$

3. *$\mathbb{E}(\xi + \eta) = \mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta$, якщо $\mathbb{E}\xi$ та $\mathbb{E}\eta$ існують.*

Доведення.

$$\mathbb{E}(\xi + \eta) = \sum_{z:\, \exists i,j: x_i + y_j = z} z \cdot \mathbb{P}(x_i + y_j = z) = \sum_{z:\, \exists i,j: x_i + y_j = z} z \cdot \mathbb{P}(\xi = x_i, \eta = y_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (x_i + y_j) \cdot \mathbb{P}(\xi = x_i, \eta = y_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_i \cdot \mathbb{P}(\xi = x_i, \eta = y_j) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} y_j \cdot \mathbb{P}(\xi = x_i, \eta = y_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} x_i \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(\xi = x_i, \eta = y_j)}_{\mathbb{P}(\xi = x_i)} + \sum_{j=1}^{\infty} y_j \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\xi = x_i, \eta = y_j)}_{\mathbb{P}(\eta = y_j)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} x_i \mathbb{P}(\xi = x_i) + \sum_{j=1}^{\infty} y_j \mathbb{P}(\eta = y_j) = \mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta.$$

4. *Якщо* $\xi \geq 0$, *то* $\mathbb{E}\xi \geq 0$, *якщо* $\mathbb{E}\xi$ *існує.*

Доведення. *Дійсно,* $\xi \geq 0$ *означає, що* $x_i \geq 0$, $i \geq 1$. *Отже,* $\mathbb{E}\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \geq 0$.

5. *Якщо* $\xi \leq \eta$, *то* $\mathbb{E}\xi \leq \mathbb{E}\eta$, *за умови, що* $\mathbb{E}\xi$ *та* $\mathbb{E}\eta$ *існують.*

Доведення. *Безпосередньо випливає з властивостей 2–4.*

Означення 3.6. Випадкові величини ξ та η називаються **незалежними**, якщо незалежними є будь-які події, пов'язані з ними, тобто якщо події $\{\xi = x_i\}$ та $\{\eta = y_j\}$ незалежні для всіх i, j.

6. *Якщо* ξ, η *– незалежні в.в., існують* $\mathbb{E}\xi$ *та* $\mathbb{E}\eta$, *то*

$$\mathbb{E}(\xi \cdot \eta) = \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta.$$

Доведення.

$$\mathbb{E}(\xi \cdot \eta) = \sum_{z:\, \exists i,j: x_i \cdot y_j = z} z \cdot \mathbb{P}(\xi = x_i, \eta = y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_i \cdot y_j \cdot \mathbb{P}(\xi = x_i, \eta = y_j) =$$

$$= |\xi, \eta - \textit{незалежні}| = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_i \cdot y_j \cdot \mathbb{P}(\xi = x_i)\mathbb{P}(\eta = y_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} x_i \mathbb{P}(\xi = x_i) \cdot \sum_{j=1}^{\infty} y_j \mathbb{P}(\eta = y_j) = \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta.$$

7. $|\mathbb{E}\xi| \leq \mathbb{E}|\xi|$, *якщо* $\mathbb{E}|\xi|$ *існує.*

Доведення. *Оскільки,*

$$-|\xi| \leq \xi \leq |\xi|,$$

то згідно з властивістю 5,

$$-\mathbb{E}|\xi| \leq \mathbb{E}\xi \leq \mathbb{E}|\xi|,$$

звідки

$$|\mathbb{E}\xi| \leq \mathbb{E}|\xi|.$$

8. *Для індикаторної в.в. з рядом розподілу*

ε	0	1
$\mathbb{P}$	q	p

справедливо

$$\mathbb{E}\varepsilon = p,$$

тобто математичне сподівання дорівнює ймовірності "успіху".

Приклад 3.5. *Саша, Маша та Леопольд роблять по одному пострілу у ведмедя. Саша влучає із ймовірністю 0.5, Саша – 0.6, Леопольд – 0.9. Знайти середню кількість влучень.*

Розв'язання. <u>1 спосіб.</u> Нехай ξ - кількість влучень після 3-х пострілів. Тоді в.в. ξ може набувати значення : 0, 1, 2, 3. Знайдемо ймовірності кожного із значень.

$$\mathbb{P}(\xi = 0) = \mathbb{P}(\overline{C} \cap \overline{M} \cap \overline{L}) =$$

$$= \mathbb{P}(\overline{C})\mathbb{P}(\overline{M})\mathbb{P}(\overline{L}) = (1 - 0.5)(1 - 0.6)(1 - 0.9) = 0.02,$$

$$\mathbb{P}(\xi = 1) = \mathbb{P}((\overline{C} \cap \overline{M} \cap L) \cup (C \cap \overline{M} \cap \overline{L}) \cup (\overline{C} \cap M \cap \overline{L})) =$$

$$= (1-0.5)\cdot(1-0.6)\cdot 0.9 + 0.5(1-0.6)(1-0.9) + (1-0.5)\cdot 0.6(1-0.9) = 0.23,$$

$$\mathbb{P}(\xi = 2) = \mathbb{P}((\overline{C} \cap M \cap L) \cup (C \cap \overline{M} \cap L) \cup (C \cap M \cap \overline{L})) =$$

$$= (1 - 0.5) \cdot 0.6 \cdot 0.9 + 0.5(1 - 0.6)0.9 + 0.5 \cdot 0.6(1 - 0.9) = 0.48,$$

$$\mathbb{P}(\xi = 3) = \mathbb{P}(C \cap M \cap L) = 0.5 \cdot 0.6 \cdot 0.9 = 0.27$$

Тоді ряд розподілу в.в. має вигляд

ξ	0	1	2	3
$\mathbb{P}$	0.02	0.23	0.48	0.27

Отже, за означенням,

$$\mathbb{E}\xi = 0 \cdot 0.02 + 1 \cdot 0.23 + 2 \cdot 0.48 + 3 \cdot 0.27 = 2.$$

2 спосіб. *Індикаторний метод.* Введемо 3 індикаторні в.в.

$$\varepsilon_1 = \begin{cases} 1, \text{якщо Саша влучив,} \\ 0, \text{якщо Саша не влучив.} \end{cases}$$

$$\varepsilon_2 = \begin{cases} 1, \text{якщо Маша влучила,} \\ 0, \text{якщо Маша не влучила.} \end{cases}$$

$$\varepsilon_3 = \begin{cases} 1, \text{якщо Леопольд влучив,} \\ 0, \text{якщо Леопольд не влучив.} \end{cases}$$

Тоді $\xi = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, і за властивістю 3 маємо $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\varepsilon_1 + \mathbb{E}\varepsilon_2 + \mathbb{E}\varepsilon_3$. Оскільки (див. властивість 8)

$$\mathbb{E}\varepsilon_1 = 0.5, \quad \mathbb{E}\varepsilon_2 = 0.6, \quad \mathbb{E}\varepsilon_3 = 0.9,$$

то

$$\mathbb{E}\xi = 0.5 + 0.6 + 0.9 = 2.$$

□

Індикаторний метод в деяких задачах є надзвичайно ефективним. Розглянемо ще один приклад.

Приклад 3.6. *n подружніх пар займають місця в ряд довільним чином. Скільки в середньому подружніх пар сидітимуть поруч (чоловік та дружина на сусідніх місцях)?*

Розв'язання. Нехай ξ — в.в., що означає кількість подружніх пар, які сидять поруч.

Введемо для $k = \overline{1,n}$ індикаторні в.в.

$$\varepsilon_k = \begin{cases} 1, \text{якщо } k\text{-та пара разом}, \\ 0, \text{якщо ні}. \end{cases}$$

Тоді

$$\xi = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n,$$

і за властивістю 3 маємо

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\varepsilon_k = n \cdot \mathbb{E}\varepsilon_1,$$

оскільки величини ε_k, $k = \overline{1,n}$, однаково розподілені. В свою чергу, $\mathbb{E}\varepsilon_1 = p_1$, де p_1 — ймовірність того, що 1-а пара сидить разом. З класичної ймовірності легко знайти, що

$$p_1 = \frac{2 \cdot (2n-1)!}{(2n)!} = \frac{1}{n}.$$

Таким чином,

$$\mathbb{E}\xi = n \cdot \frac{1}{n} = 1,$$

тобто в середньому одна пара опиниться поруч в незалежності від кількості пар n. □

Приклад 3.7. *Нехай в.в. ξ набуває тільки цілі невід'ємні значення. Довести, що*

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\xi \geq n).$$

Розв'язання. Дійсно,

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{P}(\xi = n) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(\xi = n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\xi \geq k),$$

що й треба було довести. □

Петербурзький парадокс[1]

Нехай гра полягає в наступному: підкидають монету до першої появи герба. Якщо герб з'явився на k-му місці, банк виплачує гравцю 2^k грн. Таким чином, з кожним наступним підкиданням виграш подвоюється. Зрозуміло, що гравець завжди отримає додатний виграш. Отже, постає питання: який внесок має зробити гравець за право грати, щоб гра була справедливою? Справедливість гри розуміється у класичному сенсі: математичне сподівання виграшу дорівнює 0.

Нехай в.в. ξ — середній збиток банку. Тоді досить легко скласти розподіл ξ:

ξ	2	2^2	2^3	$\ldots$	2^k	$\ldots$
$\mathbb{P}$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\ldots$	$\left(\frac{1}{2}\right)^k$	$\ldots$

Обчислимо середній збиток банку:

$$\mathbb{E}\xi = 2^1 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^2} + 2^3 \cdot \frac{1}{2^3} + \ldots = 1 + 1 + 1 + \ldots + \ldots = \infty.$$

Таким чином, щоб гра була справедливою, необхідно зробити нескінченний внесок.

3.3.2. Дисперсія та середньоквадратичне відхилення

Означення 3.7. Дисперсією випадкової величини ξ називається число

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2.$$

[1]Вперше дещо в іншій інтерпретації Петербурзьку гру запропонував в 1713 р. Нікола Бернуллі, племінник Якоба Бернуллі. Згодом Даніїл Бернуллі, брат Ніколо, розв'язав задачу та показав, що внесок має бути нескінченним. Результат здавався зовсім несподіваним, що спонукало Ж. Бюффона проводити кількісні експерименти з підкидання монети та вираховувати середній виграш. Бюффон описав ці спостереження в розділі XVIII книги "Histoire naturelle" під назвою "Есе з моральної арифметики" (1777). Підкидання монети, описане Ж. Бюффоном вважається першим задокументованим статистичним експериментом.

Дисперсія описує квадрат розсіювання значень в.в. навколо її математичного сподівання. Оскільки

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\Big(\xi^2 - 2\xi\mathbb{E}\xi + (\mathbb{E}\xi)^2\Big) = \mathbb{E}\xi^2 - 2\mathbb{E}\xi\mathbb{E}\xi + (\mathbb{E}\xi)^2 =$$

$$= \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2,$$

то маємо ще одну формулу для обчислення дисперсії:

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2.$$

Відповідно для дискретної в.в. дисперсія обчислюється за формулою:

$$\mathbb{D}\xi = \sum_{i=0}^{\infty} x_i^2 p_i - \left(\sum_{i=0}^{\infty} x_i p_i\right)^2.$$

Властивості дисперсії

1. $\mathbb{D}\xi \geq 0$.

Доведення. *Випливає безпосередньо з означення дисперсії та властивості 4 математичного сподівання.*

2. $\mathbb{D}c = 0$.

Доведення. *Дійсно, згідно з властивістю 1 математичного сподівання,*

$$\mathbb{D}c = \mathbb{E}c^2 - (\mathbb{E}c)^2 = c^2 - c^2 = 0.$$

3. $\mathbb{D}\xi = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\xi = const$ з ймовірністю 1.

Доведення. *Достатність випливає з властивості 2. Доведемо необхідність. Нехай* $\mathbb{D}\xi = 0$. *Це означає, що* $\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 = 0$, *але* $(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 \geq 0$, *і* $(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 = 0$ *тільки, коли* $\xi = \mathbb{E}\xi$ *з ймовірністю 1, тобто для всіх* $\omega \in \Omega$. *Таким чином,* $\xi = \mathbb{E}\xi = const$ *з ймовірністю 1.*

4. $\mathbb{D}(c\xi) = c^2\mathbb{D}\xi$, де $c = const$.

Доведення. *Дійсно,*

$$\mathbb{D}(c\xi) = \mathbb{E}(c\xi)^2 - \big(\mathbb{E}(c\xi)\big)^2 = \mathbb{E}\big(c^2\xi^2\big) - \big(\mathbb{E}(c\xi)\big)^2 = c^2\mathbb{E}\xi^2 - c^2(\mathbb{E}\xi)^2 =$$

$$= c^2\big(\mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2\big) = c^2\mathbb{D}\xi.$$

5. Якщо ξ, η – незалежні в.в., існують $\mathbb{D}\xi$, $\mathbb{D}\eta$, то

$$\mathbb{D}(\xi + \eta) = \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}\eta.$$

Доведення. *Скориставшись властивостями математичного сподівання, отримаємо*

$$\mathbb{D}(\xi + \eta) = \mathbb{E}(\xi + \eta)^2 - (\mathbb{E}(\xi + \eta))^2 = \mathbb{E}(\xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2) - (\mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta)^2 =$$

$$= \mathbb{E}\xi^2 + 2\mathbb{E}(\xi\eta) + \mathbb{E}\eta^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 - 2\mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta - (\mathbb{E}\eta)^2 =$$

$$= \big|\xi, \eta - \textit{незалежні} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta\,\big| =$$

$$= (\mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2) + (\mathbb{E}\eta^2 - (\mathbb{E}\eta)^2) + 2\mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta - 2\mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta = \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}\eta.$$

6. Якщо ξ, η – незалежні в.в., існують $\mathbb{D}\xi$, $\mathbb{D}\eta$, то

$$\mathbb{D}(\xi - \eta) = \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}\eta.$$

Доведення. *Використаємо вже доведені властивості дисперсії:*

$$\mathbb{D}(\xi - \eta) = \mathbb{D}(\xi + (-\eta)) = \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}(-\eta) = \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}\eta.$$

7. $\mathbb{D}(\xi + c) = \mathbb{D}\xi$, $c = const$.

Доведення. *За означенням*

$$\mathbb{D}(\xi + c) = \mathbb{E}\big(\xi + c - \mathbb{E}(\xi + c)\big)^2 = \mathbb{E}(\xi + c - \mathbb{E}\xi - c)^2 = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 = \mathbb{D}\xi.$$

Приклад 3.8. *Нехай в.в. ξ задана рядом розподілу*

ξ	-1	0	1	2
$\mathbb{P}$	0.1	0.3	0.2	0.4

Знайти її дисперсію.

Розв'язання. Знайдемо математичне сподівання:

$$\mathbb{E}\xi = -1 \cdot 0.1 + 0 + 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.4 = 0.9.$$

Тоді дисперсія дорівнює

$$\mathbb{D}\xi = (-1)^2 \cdot 0.1 + 0 + (1)^2 \cdot 0.2 + (2)^2 \cdot 0.4 - (\mathbb{E}\xi)^2 = 1.09.$$

□

Приклад 3.9. *Нехай ξ, η — незалежні в.в., причому $\mathbb{E}\xi = 2$, $\mathbb{E}\eta = -3$, $\mathbb{D}\xi = 2$, $\mathbb{D}\eta = 9$. Знайти $\mathbb{E}\theta$, $\mathbb{D}\theta$, якщо $\theta = 5\xi - 3\eta + 2$.*

Розв'язання. За лінійністю математичного сподівання

$$\mathbb{E}\theta = \mathbb{E}(5\xi - 3\eta + 2) = \mathbb{E}(5\xi) - \mathbb{E}(3\eta) + \mathbb{E}(2) =$$

$$= 5\mathbb{E}\xi - 3\mathbb{E}\eta + 2 = 5 \cdot 2 - 3 \cdot (-3) + 2 = 21.$$

Використовуючи властивості дисперсії, маємо

$$\mathbb{D}\theta = \mathbb{D}(5\xi - 3\eta + 2) = \mathbb{D}(5\xi - 3\eta) = \mathbb{D}(5\xi) + \mathbb{D}(-3\eta) =$$

$$= 25\mathbb{D}\xi + 9\mathbb{D}\eta = 25 \cdot 2 + 9 \cdot 9 = 131.$$

□

Дисперсія в.в. має розмірність квадрату в.в. ξ , що не зручно при порівнянні двох в.в. Тому використовують іншу числову характеристику – середньоквадратичне відхилення в.в.

Означення 3.8. Величина $\sigma_\xi = \sqrt{\mathbb{D}\xi}$ називається **середньоквадратичним відхиленням** випадкової величини ξ.

Середньоквадратичне відхилення має розмірність в.в., для якої воно обчислюється.

3.3.3. Початкові, центральні та факторіальні моменти

Математичне сподівання та дисперсія є частинними випадками наступних більш загальних понять — моментів в.в..

Означення 3.9. Початковим моментом порядку k в.в. ξ називається число

$$m_k(\xi) = \mathbb{E}\xi^k.$$

Наприклад, $m_1(\xi) = \mathbb{E}\xi$ – початковий момент першого порядку.

Означення 3.10. Центральним моментом порядку k в.в. ξ називається число

$$\mu_k(\xi) = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^k.$$

Наприклад, $\mu_1(\xi) = 0$, а $\mu_2(\xi) = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 = \mathbb{D}\xi$ – центральний момент порядку 2.

Означення 3.11. Факторіальним моментом порядку k випадкової величини ξ називається число

$$f_k(\xi) = \mathbb{E}\Big(\xi(\xi-1)...(\xi-k+1)\Big).$$

Отже, для $k = 1$ та $k = 2$ маємо відповідно такі моменти:

	m_k	μ_k	f_k
$k = 1$	$\mathbb{E}\xi$	0	$\mathbb{E}\xi$
$k = 2$	$\mathbb{E}\xi^2$	$\mathbb{D}\xi$	$\mathbb{E}\xi^2 - \mathbb{E}\xi$

Зокрема, з цього випливає, що

$$\mathbb{D}\xi = f_2 + f_1 - f_1^2.$$

Задачі для самостійного розв'язання до 3.1-3.3

1. Випадкова величина ξ задає кількість нулів в автомобільному номері з 4-х цифр. Скласти ряд розподілу ξ, записати функцію розподілу, побудувати її графік. Знайти $\mathbb{E}\xi$, $\mathbb{D}\xi$, σ_ξ, $\mathbb{E}(4-3\xi)$, $\mathbb{D}(5\xi+2)$, а також $\mathbb{P}\{\frac{1}{\pi} \le \xi \le \pi\}$.

2. По лосю було випущено 3 балістичні ракети. Перша влучає з ймовірністю 0.2, друга — з ймовірністю 0.3, третя — з ймовірністю 0.5. Випадкова величина ξ описує кількість ракет, що влучили в тварину. Скласти ряд розподілу ξ, записати функцію розподілу, побудувати її графік. Знайти $\mathbb{E}\xi$, $\mathbb{D}\xi$, σ_ξ та $\mathbb{P}\{3\xi - \xi^2 \ge 2\}$.

3. З п'яти карток, занумерованих числами від 1 до 5, одночасно дістали 3 картки. Нехай ξ — найменший витягнутий номер. Скласти ряд розподілу ξ, записати функцію розподілу, побудувати її графік. Знайти $\mathbb{E}\xi$, $\mathbb{D}\xi$, σ_ξ та $\mathbb{P}\{\xi^2 - 6\xi + 8 \le 0\}$.

4. Снайпер стріляє в мішень до першого влучення. Ймовірність влучення при одному пострілі дорівнює 0.2. Нехай ξ — номер пострілу, на якому він влучив (вперше). Скласти ряд розподілу ξ, знайти $\mathbb{E}\xi$ та ймовірність, що це станеться не раніше 6-го пострілу.

5. В ящику лежать 2 білі та 2 чорні кульки. Гравець дістає кульки не повертаючи їх назад у ящик. Нехай ξ — номер кроку, на якому гравець дістав останню чорну кульку. Скласти ряд розподілу ξ, записати функцію розподілу, побудувати її графік. Знайти $\mathbb{E}\xi$, $\mathbb{D}\xi$, σ_ξ та $\mathbb{P}\{5\xi - \xi^2 \ge 6\}$.

6. В ящику лежать 4 білі та 2 чорні кульки. Гравець дістає кульку три рази, кожного разу повертаючи її назад у ящик. Нехай ξ — номер кроку, на якому гравець дістав першу білу кульку. Якщо протягом трьох спроб гравець не дістав білу кульку, покладемо $\xi = 0$. Скласти ряд розподілу ξ, записати функцію розподілу, побудувати її графік. Знайти $\mathbb{E}\xi$, $\mathbb{D}\xi$, σ_ξ та $\mathbb{P}\{\xi$ ділиться на $2\}$.

7. З ящика, в якому лежать 3 білі та 4 чорні кульки, навмання дістають 5 куль та продають по 1 грн. за білу та по 3 грн. за чорну. Нехай в.в. ξ — прибуток від продажу. Скласти ряд розподілу ξ, записати функцію розподілу, побудувати її графік. Знайти $\mathbb{E}\xi$, $\mathbb{D}\xi$, σ_ξ та $\mathbb{P}\{\xi$ ділиться на $3\}$.

8. Нехай в.в. ξ набуває натуральних значень з ймовірностями

$$p_k = \mathbb{P}\{\xi = k\} = -\frac{(1-p)^k}{k(\ln p)}, \quad k \in \mathbb{N},$$

де $0 < p < 1$. Перевірте, що це дійсно розподіл. Знайдіть $\mathbb{E}\xi$ та $\mathbb{D}\xi$, якщо вони існують.

9. Монету підкидають 501 раз. Знайти середнє число серій з 2-х гербів підряд.

10. Гральну кістку підкидають 600 разів. Скільки в середньому разів зустрічається серія з трьох “6” підряд?

11. З n подружніх пар ($2n$ осіб) випадковим чином вибирають $2m$ осіб ($m \le n$). Скільки в середньому подружніх пар (чоловік+дружина) буде обрано?

12. Нехай в.в. ξ набуває тільки цілі невід’ємні значення. Довести, що

$$\mathbb{E}\xi^2 = \sum_{j=1}^{\infty}(2j-1)\mathbb{P}(\xi \ge j).$$

3.4. Поняття генератриси та її властивості

Пошук найважливіших числових характеристик дискретних в.в. із цілими невід’ємними значеннями зручно виконувати за допомогою *генератриси.*

Нехай дискретна в.в. ξ має ряд розподілу

ξ	0	1	...	n	...
$\mathbb{P}$	p_0	p_1	...	p_n	...

де $p_i = \mathbb{P}(\xi = i), i = 0, 1, 2, ...$

Означення 3.12. Генератрисою дискретної в.в. ξ називається функція

$$G_\xi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k.$$

Ймовірнісний зміст генератриси: $G_\xi(z) = \mathbb{E} z^\xi$.

Сформулюємо та доведемо

Основні властивості генератриси

1. $G_\xi(z)$ визначена принаймні для $z \in [0, 1]$.
2. $G_\xi(z)$ неперервна функція.
3. $G_\xi(1) = 1$.
4. $G_\xi(z)$ неспадна функція.
5. $G_\xi(z)$ нестрого угнута функція.
6. $G_\xi^{(m)}(1) = \mathbb{E}\big(\xi(\xi - 1) \cdot ... \cdot (\xi - m + 1)\big) = f_m(\xi)$.
7. $p_0 = \mathbb{P}(\xi = 0) = G_\xi(0), \quad p_n = \mathbb{P}(\xi = n) = \dfrac{G_\xi^{(n)}(0)}{n!}, n \geq 1$.

Доведення. 1. *Дійсно, для* $z \in [0, 1]$,

$$0 \leq G_\xi(z) \leq \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$$

2. $G_\xi(z)$ *неперервною функцією як сума степеневого ряду, який є збіжним принаймні для* $z \in [0, 1]$.

3. $G_\xi(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$.

4. *Оскільки*

$$G'_\xi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k z^k \geq 0, \quad z \in [0,1],$$

то для $z \in [0,1]$ *є неспадною.*

5. *Аналогічно,*

$$G''_\xi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) p_k z^k \geq 0, \quad z \in [0,1],$$

то для $z \in [0,1]$ *є нестрого угнутою.*

6. *Справедливість цієї властивості випливає із ланцюжка рівностей:*

$$G_\xi^{(m)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot k(k-1) \cdot \ldots \cdot (k-m+1) z^{k-m},$$

$$G_\xi^{(m)}(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot k(k-1) \cdot \ldots \cdot (k-m+1) =$$

$$= \mathbb{E}\big(\xi(\xi-1) \cdot \ldots \cdot (\xi-m+1)\big) = f_m(\xi).$$

7. *Порівняємо ряд Маклорена функції* $G_\xi(z)$*:*

$$G_\xi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{G_\xi^{(k)}(0)}{k!} z^k,$$

з означенням генератриси:

$$G_\xi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k.$$

Бачимо, що

$$p_0 = G_\xi(0), \quad p_k = \frac{G_\xi^{(k)}(0)}{k!}.$$

Зауваження 3.5. З властивості 6 генератриси випливає важливий для нас наслідок. А саме, за допомогою генератриси можна обчислювати моменти та числові характеристики випадкової величини, яка набуває цілих невід'ємних значень. Оскільки $G'_\xi(1) = f_1(\xi) = \mathbb{E}(\xi)$ та $G''_\xi(1) = f_2(\xi)$, то

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = (\mathbb{E}\xi^2 - \mathbb{E}\xi) + \mathbb{E}\xi - (\mathbb{E}\xi)^2 =$$

$$= f_2(\xi) + f_1(\xi) - f_1^2(\xi) = G''_\xi(1) + G'_\xi(1) - (G'_\xi(1))^2.$$

Отже,

$$\boxed{\mathbb{E}(\xi) = G'_\xi(1),}$$

$$\boxed{\mathbb{D}\xi = G''_\xi(1) + G'_\xi(1) - (G'_\xi(1))^2.}$$

Приклад 3.10. *Нехай ξ задана рядом розподілу:*

ξ	0	1	2	3
$\mathbb{P}$	0.1	0.3	0.2	0.4

Запишіть генератрису ξ, знайдіть $\mathbb{E}\xi$, $\mathbb{D}\xi$.

Розв'язання. За означенням генератриси:

$$G_\xi(z) = \sum_{k=0}^{3} p_k z^k = 0.1 + 0.3z + 0.2z^2 + 0.4z^3.$$

Тоді математичне сподівання

$$\mathbb{E}\xi = G'_\xi(1) = (0.3 + 0.4z + 1.2z^2)\big|_{z=1} = 1.9.$$

Якби ми обчислювали $\mathbb{E}\xi$ за означенням, то

$$\mathbb{E}\xi = 0 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.4 = 1.9.$$

Знайдемо дисперсію за допомогою генератриси:

$$\mathbb{D}\xi = G''_\xi(1) + G'_\xi(1) - \left(G'_\xi(1)\right)^2 = \left(0.4 + 2.4z\right)\big|_{z=1} + 1.9 - 1.9^2 =$$

$$= 2.8 + 1.9 - 1.9^2 = 1.09.$$

Порівняємо з відповіддю, яка отримується при обчисленні дисперсії за означенням:

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 =$$
$$= (0)^2 \cdot 0.1 + (1)^2 \cdot 0.3 + (2)^2 \cdot 0.2 + 3^2 \cdot 0.4 - (1.9)^2 = 1.09.$$

□

Приклад 3.11. *Гральну кістку підкидають до першої появи "6". Нехай в.в. ξ – кількість підкидань кістки (до першої появи "6"). Складіть ряд розподілу ξ, запишіть генератрису ξ, знайдіть $\mathbb{E}\xi$, $\mathbb{D}\xi$.*

Розв'язання. Можливі значення в.в. ξ: 1, 2, 3, ... Знайдемо ймовірності кожного із значень.

$$p_1 = \mathbb{P}(\xi = 1) = \mathbb{P}(6) = \frac{1}{6},$$
$$p_2 = \mathbb{P}(\xi = 2) = \mathbb{P}(\overline{6}6) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6},$$
$$p_3 = \mathbb{P}(\xi = 3) = \mathbb{P}(\overline{6}\overline{6}6) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6},$$
$$\cdots$$
$$p_n = \mathbb{P}(\xi = n) = \mathbb{P}(\underbrace{\overline{6}...\overline{6}}_{n-1}6) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}.$$
$$\cdots$$

Тоді ряд розподілу в.в. має вигляд

ξ	1	2	3	...	n	...
$\mathbb{P}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}$	...	$\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}$	...

Запишемо генератрису в.в. ξ:

$$G_\xi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} z^k = \frac{z}{6}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{5}{6}z\right)^{k-1} =$$

$$= \frac{z}{6}\left(1 + \frac{5z}{6} + \left(\frac{5z}{6}\right)^2 + ... + \left(\frac{5z}{6}\right)^n + ...\right) = \frac{z}{6} \cdot \frac{1}{1 - \frac{5z}{6}} = \frac{z}{6 - 5z},$$

за умови, що $\left|\frac{5z}{6}\right| < 1$.

Далі,

$$G'_\xi(z) = \left(\frac{z}{6-5z}\right)' = \frac{(6-5z) - z\cdot(-5)}{(6-5z)^2} = \frac{6}{(6-5z)^2}.$$

Тоді

$$\mathbb{E}(\xi) = G'_\xi(1) = \frac{6}{(6-5)^2} = 6.$$

Крім того,

$$G''_\xi(z) = \left(\frac{6}{(6-5z)^2}\right)' = \frac{60}{(6-5z)^3},$$

а отже,

$$\mathbb{D}(\xi) = \frac{60}{(6-5)^3} + 6 - 6^2 = 30.$$

$\square$

Задачі для самостійного розв'язання до 3.4

1. Нехай ξ задана рядом розподілу:

ξ	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}$	0.1	0.15	0.25	0.3	0.2

   Запишіть генератрису ξ, знайдіть $\mathbb{E}\xi$, $\mathbb{D}\xi$.

2. Гральну кістку підкидають допоки накопичена сума очок не перевищить 2. Нехай ξ — число підкидань. Записати генератрису в.в. ξ, знайти за її допомогою $\mathbb{E}\xi$, $\mathbb{D}\xi$.

3. Записати генеретрису в задачі 3 на стор. 151 та знайти за її допомогою $\mathbb{E}\xi$, $\mathbb{D}\xi$.

4. Записати генеретрису в задачі 7 на стор. 152 та знайти за її допомогою $\mathbb{E}\xi$, $\mathbb{D}\xi$.

5. Довести рівність із задачі 12 на стор. 152 за допомогою властивостей генератриси.

6. Нехай в.в. ξ приймає цілі невід'ємні значення та має генератрису

$$G_\xi(z) = 1 + \frac{1-z}{z}\ln(1-z).$$

   а) Встановіть, чи існує математичне сподівання $\mathbb{E}\xi$, та у разі існування, знайдіть його.

   б) Знайдіть $\mathbb{P}(X = k)$ для всіх $k = 0, 1, 2, \ldots$

3.5. Базові дискретні розподіли

Розглянемо декілька основних (канонічних) дискретних розподілів та знайдемо їх характеристики.

3.5.1. Розподіл Бернуллі

Нехай проводиться одиничний експеримент, в результаті якого певна подія може відбутися з ймовірність p або не відбутися з ймовірністю $q = 1 - p$.

Розглянемо в.в.

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, \text{якщо ця подія відбулась,} \\ 0, \text{якщо ця подія не відбулась.} \end{cases}$$

Ряд розподілу ε має вигляд

ε	0	1
$\mathbb{P}$	q	p

де p – параметр розподілу, $q = 1 - p$. Ми вже знаємо, що така випадкова в.в. називається індикаторною. Ще кажуть, що в.в. **розподілена за законом Бернуллі** або **бернуллівська в.в.**

Числові характеристики ε:

$$\mathbb{E}\varepsilon = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p,$$

$$\mathbb{D}\varepsilon = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = 1^2 \cdot p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

3.5.2. Біноміальний розподіл

Кажуть, що дискретна в.в. ξ має **біноміальний розподіл**, якщо ξ описує кількість "успіхів" у схемі Бернуллі із n незалежними випробуваннями та ймовірністю "успіху" в одному випробуванні p.

Позначення:

$$\xi \sim Bin(n, p),$$

причому $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0, 1]$ — параметри розподілу. Зауважимо також, що $Bin(1, p)$ — це розподіл Бернуллі.

Ми знаємо, що ймовірність того, що в серії із n випробувань "успіх" відбудеться рівно k разів, обчислюється за формулою:

$$p_k = \mathbb{P}(\xi = k) = \mathbb{P}_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k},\ k = 0, 1, ..., n.$$

Тоді ряд розподілу в.в. ξ має вигляд

ξ	0	1	2	...	k	...	n
$\mathbb{P}$	q^n	npq^{n-1}	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	p^n

Перевіримо, що $\sum_{k=0}^{n} p_k = 1$. Дійсно,

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1.$$

Знайдемо числові характеристики ξ декількома способами.

<u>1 спосіб.</u>

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k p^k q^{n-k} = \left| p, q - \text{незалежні змінні} \right| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \cdot C_n^k (kp^k) q^{n-k} = p \cdot \sum_{k=1}^{n} \cdot C_n^k (kp^{k-1}) q^{n-k} = p \cdot \sum_{k=1}^{n} \cdot C_n^k (p^k)' q^{n-k} =$$

$$= p \frac{\partial}{\partial p} \left(\sum_{k=1}^{n} \cdot C_n^k p^k q^{n-k} \right) =$$

$$= p \frac{\partial}{\partial p} \Big((p+q)^n - q^n \Big) = p \cdot \Big(n(p+q)^{n-1} - 0 \Big) = np.$$

<u>2 спосіб.</u> Запишемо ξ у вигляді суми в.в. із розподілом Бернуллі

$$\xi = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n,$$

де

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, \text{якщо на і-му кроці успіх,} \\ 0, \text{якщо на і-му кроці невдача,} \quad i = \overline{1, n} \end{cases}$$

Оскільки $\mathbb{E}\varepsilon_i = p$, $\mathbb{D}\varepsilon_i = pq$, і для всіх $i = \overline{1, n}$ величини ε_i — незалежні, то

$$\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\varepsilon_1 + \mathbb{E}\varepsilon_2 + \ldots + \mathbb{E}\varepsilon_n = n\mathbb{E}\varepsilon_1 = np,$$

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{D}\Big(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{D}\varepsilon_i = npq.$$

<u>3 спосіб.</u> Запишемо генератрису для в.в. ξ:

$$G_\xi(z) = \sum_{k=0}^{n} p_k z^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (pz)^k q^{n-k} = (pz+q)^n.$$

Тоді

$$\mathbb{E}\xi = G'_\xi(1) = n(pz+q)^{n-1} p \Big|_{z=1} = np,$$

$$\mathbb{D}\xi = G''_\xi(1) + G'_\xi(1) - \big(G'_\xi(1) \big)^2 =$$

$$= n(n-1)p^2 (pz+q)^{n-2} \Big|_{z=1} + np - (np)^2 =$$

$$= n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p) = npq.$$

Отже, для $\xi \sim Bin(n, p)$,

$$\boxed{\mathbb{E}\xi = np,\ D\xi = npq.}$$

Приклад 3.12. *По мішені виконують 4 незалежні постріли з ймовірністю влучення при одному пострілі 0.8. Знайти закон розподілу в.в. ξ – кількість влучень в мішень. Знайти середню кількість влучень.*

Розв'язання. Можливі значення в.в. ξ: 0, 1, 2, 3, 4. Оскільки постріли незалежні між собою, то маємо схему Бернуллі із $n = 4$, $p = 0.8$. Тобто $\xi \sim Bin(4; 0.8)$. Ряд розподілу ξ має вигляд

ξ	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}$	0.0016	0.0256	0.1536	0.4096	0.4096

оскільки

$$\mathbb{P}(\xi = 0) = C_4^0 \cdot 0.2^4 = 0.0016,$$

$$\mathbb{P}(\xi = 1) = C_4^1 \cdot 0.8 \cdot 0.2^3 = 0.0256,$$

$$\mathbb{P}(\xi = 2) = C_4^2 \cdot 0.8^2 \cdot 0.2^2 = 0.1536,$$

$$\mathbb{P}(\xi = 3) = C_4^3 \cdot 0.8^3 \cdot 0.2 = 0.4096,$$

$$\mathbb{P}(\xi = n) = C_4^4 \cdot 0.8^4 = 0.4096.$$

Середня кількість влучень при 4-х пострілах:

$$\mathbb{E}\xi = np = 4 \cdot 0.8 = 3.2$$

$\square$

Приклад 3.13. *Припустимо, що ймовірність зловити воротарем пенальті* $= 1/6$. *Яка ймовірність того, що воротар зловить хоча б один із 5-ти пенальті? Знайти найбільш ймовірну кількість спійманих м'ячів та відповідну ймовірність.*

Розв'язання. Нехай ξ – кількість взятих пенальті. Очевидно, $\xi \sim Bin(5, \frac{1}{6})$.

Можливі значення ξ; 0, 1, 2, 3, 4, 5. Розподіл ξ задається рівністю

$$\mathbb{P}(\xi = k) = C_5^k p^k q^{5-k}, \quad k = 0, 1, ..., 5.$$

Ймовірність того, що воротар зловить хоча б один м'яч із 5-ти

$$\mathbb{P}(\xi \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(\xi = 0) = 1 - (1-p)^5 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5.$$

Нагадаємо, що найбільш імовірне число успіхів m_0 у n незалежних випробуваннях схеми Бернуллі визначається із нерівності

$$np - q \le m_0 \le np + p.$$

Тому

$$0 \le m_0 \le 1.$$

При цьому

$$\mathbb{P}(\xi = 0) = \mathbb{P}(\xi = 1) = \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0.4019.$$

□

Приклад 3.14. *Емма стріляє в мішень. В середньому виявилось 360 влучень та середньоквадратичне відхилення* $\sigma_\xi = 12$*. Скільки всього пострілів зробила Емма і чому дорівнює ймовірність влучення p при одному пострілі?*

Розв'язання*.* Нехай в.в. ξ – кількість влучень у мішень, p – ймовірність влучити при одному пострілі, n – кількість пострілів. Тоді в.в. $\xi \sim Bin(n,p)$ із $\mathbb{E}\xi = 360$ та $\mathbb{D}\xi = \sigma_\xi^2 = 144$. Отже, маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} np = 360, \\ npq = 144, \\ p + q = 1, \end{cases}$$

звідки знаходимо, що $p = 0.6$, $q = 0.4$, $n = 600$. □

3.5.3. Дискретний рівномірний розподіл

Кажуть, що в.в. ξ розподілена за **дискретним рівномірним законом**, якщо вона може приймати будь-яке із n різних значень k_1, k_2, …, k_n з рівними ймовірностями (тобто з ймовірностями $\frac{1}{n}$). Будемо позначати:

$$\xi \sim U(k_1, k_2, \ldots, k_n),$$

де k_1, k_2, $\ldots$, k_n $\in$ $\mathbb{R}$, — параметри. Іноколи кажуть, що множина $\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$ є носієм розподілу. Легко записати ряд розподілу:

ξ	k_1	k_2	$\ldots$	k_n
$\mathbb{P}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\ldots$	$\frac{1}{n}$

Також легко безпосередньо обчислити характеристики розподілу:

$$\mathbb{E}\xi = \frac{k_1 + k_2 + \ldots + k_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} k_j,$$

$$\mathbb{D}\xi = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} k_j^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} k_j\right)^2.$$

Якщо носій розподілу — це множина $\{1, 2, \ldots, n\}$, то рівномірний розподіл характеризується лише одним параметром — $n \in \mathbb{N}$. Будемо коротко позначати $\xi \sim U(n)$. В цьому випадку:

$$\mathbb{E}\xi = \frac{n+1}{2},$$

$$\mathbb{D}\xi = \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

Приклад 3.15. *Гральну кістку підкидають один раз. Нехай в.в. ξ — кількість очок, що випали. Обчислити математичне сподівання та дисперсію ξ.*

Розв'язання. Очевидно, $\xi \sim U(6)$. Тому

$$\mathbb{E}\xi = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2}, \quad \mathbb{D}\xi = \frac{6^2 - 1}{12} = \frac{35}{12}.$$

□

3.5.4. Геометричний розподіл

Кажуть, що в.в. ξ розподілена за **геометричним законом**, якщо вона описує кількість невдач до появи першого успіху у нескінченній схемі незалежних випробувань (нескінченній схемі Бернуллі) з ймовірністю успіху в одному випробуванні p.

Позначення:

$$\xi \sim Geom^{(1)}(p),$$

де p —параметр розподілу.

Оскільки

$$p_k = \mathbb{P}(\xi = k) = \mathbb{P}(\underbrace{\text{нн...н}}_{k}\text{у}) = pq^k, \quad k \geq 0,$$

то ряд розподілу в.в. ξ має вигляд

ξ	0	1	2	...	n	...
$\mathbb{P}$	p	pq	pq^2	...	pq^n	...

Зробимо перевірку:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = p + pq + pq^2 + ... + pq^n + ... =$$

$$= p(1 + q + q^2 + ... + q^n + ...) = p\frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$$

Запишемо генератрису в.в. ξ:

$$G_\xi(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(pq^k)z^k = p\sum_{k=0}^{\infty}(qz)^k = p\frac{1}{1-qz},$$

звідки

$$G_\xi(z) = \frac{p}{1-qz}.$$

Знайдемо числові характеристики в.в. ξ за допомогою генератриси

$$\mathbb{E}\xi = G'_\xi(1) = \left(\frac{p}{1-qz}\right)'\Big|_{z=1} = \frac{pq}{(1-qz)^2}\Big|_{z=1} = \frac{q}{p},$$

$$\mathbb{D}\xi = G''_\xi(1) + G'_\xi(1) - (G'_\xi(1))^2 = \left(\frac{pq}{(1-qz)^2}\right)'\Big|_{z=1} + \frac{q}{p} - \left(\frac{q}{p}\right)^2 =$$
$$= \frac{2pq^2}{(1-qz)^3}\Big|_{z=1} + \frac{q}{p} - \left(\frac{q}{p}\right)^2 = \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p} - \left(\frac{q}{p}\right)^2 =$$
$$= \frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p} = \frac{q}{p}\frac{(q+p)}{p} = \frac{q}{p^2}.$$

Отже, для $\xi \sim Geom^{(1)}(p)$,

$$\boxed{\mathbb{E}\xi = \frac{q}{p}, \quad \mathbb{D}\xi = \frac{q}{p^2}.}$$

Геометричний розподіл ще можна ввести так. Нехай в.в. η описує номер першого "успіху" у нескінченній схемі незалежних випробувань з ймовірністю успіху в одному випробуванні p. В цьому випадку будемо позначати

$$\eta \sim Geom^{(2)}(p),$$

де p — параметр розподілу.

Зауважимо, що розподілу $Geom^{(1)}$ та $Geom^{(2)}$ пов'язані співвідношенням:

$$\eta = \xi + 1.$$

Тому $\mathbb{P}(\eta = k) = pq^{k-1}$, $k \geq 1$, і ряд розподілу в.в. η має вигляд

η	1	2	$\ldots$	n	$\ldots$
$\mathbb{P}$	p	pq	$\ldots$	pq^{n-1}	$\ldots$

Запишемо генератрису в.в. η:

$$G_\eta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1}z^k = \frac{p}{q}\sum_{k=1}^{\infty}(qz)^k = \frac{p}{q}\frac{zq}{1-qz} = \frac{pz}{1-qz}.$$

Тоді за співвідношеннями між генератрисою та математичним сподіванням та дисперсією

$$\mathbb{E}\eta = G'_\eta(1) = \left(\frac{pz}{1-qz}\right)'\Big|_{z=1} = \frac{p(1-zq)+pqz}{(1-qz)^2}\Big|_{z=1} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p},$$

$$\mathbb{D}\eta = G''_\eta(1) + G'_\eta(1) - (G'_\eta(1))^2 = \left(\frac{p}{(1-zq)^2}\right)'\Big|_{z=1} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} =$$
$$= \frac{2pq}{(1-qz)^3}\Big|_{z=1} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2pq}{(1-q)^3} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2q-q}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Отже, для $\eta \sim Geom^{(2)}(p)$,

$$\boxed{\mathbb{E}\eta = \frac{1}{p}, \quad \mathbb{D}\eta = \frac{q}{p^2}.}$$

До речі, знайти математичне сподівання і дисперсію можна було скориставшись знайденими числовими характеристиками для $\xi \sim Geom^{(1)}(p)$:

$$\mathbb{E}\eta = \mathbb{E}(\xi + 1) = \mathbb{E}\xi + 1 = \frac{q}{p} + 1 = \frac{1}{p},$$
$$\mathbb{D}\eta = \mathbb{D}(\xi + 1) = \mathbb{D}\xi = \frac{q}{p^2}.$$

Приклад 3.16. *Для пошуку корабля, який зазнав аварії, здійснює польоти рятувальний літак. Ймовірність виявити корабель за один політ дорівнює 0.4. Нехай ξ — кількість невдалих пошукових польотів літака. Скласти ряд розподілу ξ, знайти середню кількість польотів літака. Знайти ймовірність того, що корабель знайдуть при 3-му польоті.*

Розв'язання. Оскільки "успіх" — це знайти корабель за один політ, то $p = 0.4$ і в.в. $\xi \sim Geom^{(1)}(0.4)$. Тоді, ряд розподілу ξ має вигляд

ξ	0	1	2	...	n	...
$\mathbb{P}$	0.4	$0.6 \cdot 0.4$	$(0.6)^2 \cdot 0.4$	...	$(0.6)^n \cdot 0.4$	...

Середня кількість невдалих польотів літака:

$$\mathbb{E}\xi = \frac{q}{p} = \frac{0.6}{0.4} = 1.5,$$

а отже, всього польотів в середньому буде 2.5.

Ймовірність того, що при 3-му польоті пощастить виявити корабель дорівнює

$$\mathbb{P}(\xi = 2) = 0.6^2 \cdot 0.4 = 0.144.$$

□

Приклад 3.17. *Із двох гармат почергово ведеться стрільба по цілі до першого влучення однією із гармат. Ймовірність влучити при одному пострілі для першої гармати дорівнює 0.3, для другої — 0.7. Стрільбу починає перша пушка. Скласти закони розподілу в.в. величин ξ та η, які описують кількість пострілів 1-ї та 2-ї гармати відповідно. Скільки в середньому пострілів зробить кожна з гармат?*

Розв'язання. Нехай випадкові події A_i та B_i — влучення в ціль першою та другою гарматою при i-му пострілі відповідно.

Знайдемо ряд розподілу в.в. ξ. Перша гармата зробить всього один постріл, тобто $\xi = 1$, якщо вона влучить в ціль при першому пострілі або вона промахнеться і друга гармата влучить при першому пострілі. Отже,

$$\mathbb{P}(\xi = 1) = \mathbb{P}(A_1 \cup \overline{A_1}B_1) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(\overline{A_1}B_1) =$$

$$= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}(B_1) = 0.3 + 0.7 \cdot 0.7 = 0.79.$$

Перша гармата стрілятиме 2 рази, тобто $\xi = 2$, якщо обидві гармати при першому пострілі промахнуться, а при другому — або перша гармата влучить в ціль або вона промахнеться і влучить друга гармата. Тому

$$\mathbb{P}(\xi = 2) = \mathbb{P}(\overline{A_1B_1}A_2 \cup \overline{A_1B_1A_2}B_2) =$$

$$= 0.7 \cdot 0,3 \cdot 0.3 + 0.7 \cdot 0.3 \cdot 0.7 \cdot 0.7 = 0.21(0.3 + 0.49) = 0.21 \cdot 0.79.$$

Аналогічно,

$$\mathbb{P}(\xi = k) = 0.79 \cdot (0.21)^{k-1}.$$

Шуканий закон розподілу в.в. ξ має вигляд

ξ	1	2	3	...	k	...
$\mathbb{P}$	0.79	$0.79 \cdot 0.21$	$0.79 \cdot (0.21)^2$	...	$0.79 \cdot (0.21)^{k-1}$	...

Отже, $\xi \sim Geom^{(2)}(0.79)$ і $\mathbb{E}\xi = 1/0.79 \approx 1.27$.

Знайдемо ряд розподілу в.в. η. Якщо перша гармата при першому пострілі влучить в ціль, то стрільба з другої гармати не відбудеться, отже

$$\mathbb{P}(\eta = 0) = \mathbb{P}(A_1) = 0.3.$$

Друга гармата стрілятиме один раз, якщо при першому пострілі вона влучить в ціль або якщо вона промахнеться, але перша гармата влучить при другому пострілі. Отже,

$$\mathbb{P}(\eta = 1) = \mathbb{P}(\overline{A_1}B_1 \cup \overline{A_1 B_1}A_2) =$$

$$= 0.7 \cdot 0.7 + 0.7 \cdot 0.3 \cdot 0.3 = 0.21(0.3 + 0.49) = 0.553.$$

Аналогічно, ймовірність того, що друга гармата стрілятиме двічі:

$$\mathbb{P}(\eta = 2) = \mathbb{P}(\overline{A_1 B_1 A_2}B_1 \cup \overline{A_1 B_1 A_2 B_2}A_3) =$$

$$= 0.7 \cdot 0.3 \cdot 0.7 \cdot 0.7 + 0.7 \cdot 0.3 \cdot 0.7 \cdot 0.3 \cdot 0.3 = 0.21 \cdot 0.553.$$

Аналогічно отримаємо

$$\mathbb{P}(\eta = k) = 0.553 \cdot (0.21)^{k-1}, \quad k \geq 1.$$

Таким чином, шуканий закон розподілу в.в. η має вигляд

η	0	1	2	...	k	...
$\mathbb{P}$	0.3	0.553	$0.553 \cdot (0.21)$	...	$0.553 \cdot (0.21)^{k-1}$	...

Зауважимо, що цей розподіл не є геометричним. Знайдемо математичне сподівання η безпосередньо.

$$\mathbb{E}\eta = 0 \cdot 0.3 + \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot 0.553 \cdot (0.21)^{k-1} = 0.553\Big(\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}\Big)\Big|_{x=0.21} =$$

$$= 0.553\Big(\sum_{k=1}^{\infty} x^k\Big)'\Big|_{x=0.21} = 0.553\Big(\frac{x}{1-x}\Big)'\Big|_{x=0.21} =$$

$$= \frac{0.553}{(1-x)^2}\Big|_{x=0.21} = \frac{70}{79} \approx 0.89.$$

$\square$

Приклад 3.18 (Задача про “кіндерсюрпризи”). *Нехай в кіндерсюрпризах є n різних видів призів. Василь хоче зібрати всю колекцію призів. Скільки в середньому яєць йому доведеться купити?*

Розв’язання. Нехай τ — кількість яєць, які треба купити, щоб зібрати колекцію із усіх n призів. Отже, потрібно знайти $\mathbb{E}\tau$.

Позначимо через τ_1 кількість яєць, які треба купити, щоб отримати перший в колекції приз. Зрозуміло, що τ_1 — не випадкова величина і $\tau_1 = 1$.

Позначимо через τ_2 — кількість кіндерів, які треба купити після першого призу, щоб здобути другий в колекції приз. Тут “успіх” — це отримати іграшку, якої ще немає, “невдача” — отримати ту саму іграшку. Отже,

$$\tau_2 \sim Geom^{(2)}\Big(\frac{n-1}{n}\Big).$$

Аналогічно, нехай τ_3 — кількість кіндерів, які треба купити після другої в колекції іграшки, щоб здобути третю, відмінну від попередніх. Тоді

$$\tau_3 \sim Geom^{(2)}\Big(\frac{n-2}{n}\Big).$$

$$\dots$$

Нехай τ_n — кількість яєць, які треба купити після $(n-1)$-го в колекції призу, щоб отримати останній n-ий в колекції приз. Тому

$$\tau_n \sim Geom^{(2)}\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

Тоді

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n,$$

звідки

$$\mathbb{E}\tau = 1 + \mathbb{E}\tau_2 + \ldots + \mathbb{E}\tau_n =$$

$$= \frac{n}{n} + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \ldots + \frac{n}{1} = n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right).$$

Оскільки $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \ln n + \gamma$, де $\gamma \approx 0.5772\ldots$ — константа Ейлера-Маскероні, то при $n \to \infty$,

$$\mathbb{E}\tau = n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \sim n(\ln n + \gamma).$$

□

Властивості геометричного розподілу

1. Відсутність післядії. Для будь-яких $n, k \geq 0$ справджується рівність

$$\mathbb{P}\Big(\xi \geq n + k \Big| \xi \geq n\Big) = \mathbb{P}\Big(\xi \geq k\Big).$$

Доведення. *Нехай, наприклад,* $\xi \sim Geom^{(1)}(p)$. *Оскільки*

$$\mathbb{P}(\xi \geq n) = pq^n + pq^{n+1} + \ldots = p(q^n + q^{n+1} + \ldots) = p\frac{q^n}{1-q} = q^n,$$

то

$$\mathbb{P}\Big(\xi \geq n + k \Big| \xi \geq n\Big) = \frac{\mathbb{P}\Big(\{\xi \geq n + k\} \cap \{\xi \geq n\}\Big)}{\mathbb{P}(\xi \geq n)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\xi \geq n + k)}{\mathbb{P}(\xi \geq n)} = \frac{q^{n+k}}{q^n} = q^k = \mathbb{P}(\xi \geq k),$$

що й треба було довести.

Властивість післядії означає, що якщо ξ – тривалість деякого процесу, то цей процес не пам'ятає свого минулого. Наприклад, монета підкидається до випадіння першого герба. Настає момент часу n. В цей момент приходить Петро і бачить, що експеримент ще триває. Він розуміє, що гербів ще не було. Його цікавить скільки часу ще не буде гербів, а саме яка ймовірність того, що принаймні k разів не буде жодного герба? Відповідь: ця ймовірність є такою, якби з приходом Петра експеримент тільки почався.

Насправді ця властивість серед дискретних розподілів однозначно визначає геометричний розподіл. Тобто, якщо маємо дискретний розподіл із властивістю 1 (відсутність післядії), то це обов'язково якийсь геометричний розподіл із параметром $p \in (0, 1)$.

Дійсно, позначимо через $F_k = \mathbb{P}(\xi \geq k)$, $k \geq 0$. Тоді властивість 1 можна записати так:

$$\frac{F_{n+k}}{F_n} = F_k \quad \Leftrightarrow \quad F_{n+k} = F_k \cdot F_n \Rightarrow F_n = (F_1)^n.$$

Покладемо $F_1 = q$. Тоді $F_n = q^n$, тобто $\mathbb{P}(\xi \geq n) = q^n$. Звідси маємо, що $\xi \sim Geom^{(1)}(1-q)$.

У випадку $q = 1$, $F_n = 1$, для всіх $n \geq 0$, що неможливо. У випадку $q = 0$ маємо $F_0 = p = 1 - q = 1$, а $F_k = 0 = \mathbb{P}(\xi \geq k)$, для всіх $k \geq 1$, а отже, властивість післядії не має сенсу.

2. Стійкість відносно мінімуму. Якщо $\xi_k \sim Geom(p_k)$, $k = \overline{1,n}$, — незалежні в.в., то

$$\eta = \min\{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\} \sim Geom(1 - q_1 q_2 \cdot ... \cdot q_n).$$

Доведення. *Дійсно,*

$$\mathbb{P}\Big(\min\{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\} \geq m \Big) =$$

$$= \mathbb{P}\Big(\{\xi_1 \geq m\} \cap \{\xi_2 \geq m\} \cap ... \cap \{\xi_n \geq m\} \Big) = |\, \xi_i --- \textit{незалежні} \,| =$$

$$= \mathbb{P}(\xi_1 \geq m)\mathbb{P}(\xi_2 \geq m) \cdot ... \cdot \mathbb{P}(\xi_n \geq m) = q_1^m \cdot q_2^m \cdot ... \cdot q_n^m = (q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_n)^m.$$

Отже, $\eta = \min\{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\} \sim Geom^{(1)}(1 - q_1 q_2 \cdot ... \cdot q_n)$.

Пояснимо властивість 2. Припустимо, що Петро спостерігає 2 експерименти: 1-й полягає в тому, що кожну хвилину один раз підкидають монету, 2-й полягає в тому, що кожну хвилину підкидають гральну кістку. Перший експеримент триватиме до першої появи герба, другий — до першої появи "6". Петро вирішив дочекатися завершення одного з експериментів і піти. Чи зможе він в середньому піти раніше, ніж якби він спостерігав лише один з двох експериментів? Відповідь: так, причому, оскільки ймовірності "успіхів" відповідно дорівнюють $p_1 = 1/2$ та $p_2 = 1/6$, то ймовірність успіху в об'єднаному експерименті "монета-кістка" буде $p = 1 - 1/2 \cdot 5/6 = 7/12$. Якщо позначити η — в.в., яка дорівнює номеру зупинки об'єднаного експерименту "монета-кістка" (тобто, як тільки випав перший герб або перша "6", підкидання перериваємо), то $\eta \sim Geom(7/12)$. Отже, в середньому Петро зможе піти на $\frac{12}{7}$ хвилині. Якщо б Петро чекав лише на першу появу герба, то в середньому він пішов би на 2-й хвилині, а якщо б він чекав лише на першу появу "6", то в середньому — на 6-й хвилині.

3.5.5. Негативний біноміальний розподіл

Нехай $r \in \mathbb{N}$. Кажуть, що в.в. ξ має **негативний біноміальний розподіл**, якщо вона описує кількість "невдач" у нескінченній схемі Бернуллі до появи r-го "успіху" з ймовірністю успіху в одному випробуванні p. Будемо позначати

$$\xi \sim NegBin(r,p),$$

де $p \in [0,1]$ та $r \in \mathbb{N}$ — параметри розподілу. Зауважимо одразу, що $NegBin(1,p) = Geom^{(1)}(p)$. Таким чином, негативний біноміальний розподіл є узагальненням геометричного розподілу.

Ряд розподілу ξ має вигляд

ξ	0	1	2	...
$\mathbb{P}$	p_0	p_1	p_2	...

,

де

$$p_k = \mathbb{P}(\xi = k) = C_{r-1+k}^k \cdot p^{r-1} \cdot q^k \cdot p = C_{r-1+k}^k \cdot p^r q^k.$$

Або можна переписати

$$p_k = C_{r-1+k}^k \cdot p^r q^k = \frac{(r-1+k)!}{k!(r-1)!} \cdot p^r q^k = \frac{r(r+1)....(r-1+k)}{k!} \cdot p^r q^k =$$

$$= \frac{(-1)^k(-r)(-r-1)....(-r+1-k)}{k!} \cdot p^r q^k =$$

$$= (-1)^k \frac{(-r)!}{k!(-r-k)!} \cdot p^r \cdot q^k = (-1)^k C_{-r}^k \cdot p^r q^k,$$

де $C_{-r}^k = \frac{(-r)!}{k!(-r-k)!}$ – негативний біноміальний коефіцієнт. Останній запис дещо пояснює назву цього розподілу.

Перевіримо, що $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} C_{r-1+k}^k \cdot p^r q^k = p^r \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(-r)(-r-1)....(-r+1-k)}{k!} \cdot q^k =$$

$$= p^r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-r)(-r-1)....(-r+1-k)}{k!} \cdot (-q)^k = p^r (1+(-q))^{-r} = 1,$$

де в передостанній рівності ми скористалися відомим рядом Маклорена для функції $(1+x)^{\alpha}$.

Запишемо генератрису в.в. ξ двома способами.

<u>1 спосіб.</u>

$$G_{\xi}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k z^k=\sum_{k=0}^{\infty}C_{r-1+k}^{k}\cdot p^r\cdot(qz)^k=$$

$$=p^r\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-r)(-r-1)....(-r+1-k)}{k!}\cdot(-qz)^k=p^r(1-qz)^{-r}=\left(\frac{p}{1-qz}\right)^r.$$

<u>2 спосіб.</u> Скористаємося другим означенням генератриси:

$$G_{\xi}(z)=\mathbb{E}z^{\xi},$$

де ξ — кількість невдач до r-го успіху.

Введемо в.в. ε_k — кількість невдач між $(k-1)$-м та k -м успіхами, $k=\overline{1,r}$.

Тоді, очевидно, $\xi=\sum_{k=1}^{r}\varepsilon_k$. Оскільки ε_k, $k=\overline{1,r}$, — незалежні, то

$$G_{\xi}(z)=\mathbb{E}z^{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_r}=\mathbb{E}z^{\varepsilon_1}\cdot z^{\varepsilon_2}\cdot\ldots z^{\varepsilon_r}=$$

$$=\mathbb{E}z^{\varepsilon_1}\cdot\mathbb{E}z^{\varepsilon_2}\cdot\ldots\cdot\mathbb{E}z^{\varepsilon_r}.$$

Але, $\varepsilon_k\sim Geom^{(1)}(p)$, а тому $G_{\varepsilon_i}(z)=\frac{p}{1-qz}$. Нарешті,

$$G_{\xi}(z)=\left(\frac{p}{1-qz}\right)^r.$$

Другий спосіб знаходження генератриси дає можливість також одразу знайти числові характеристики в.в. ξ:

$$\mathbb{E}\xi=\sum_{i=1}^{r}\mathbb{E}\varepsilon_i=\frac{qr}{p},$$

$$\mathbb{D}\xi=\sum_{i=1}^{r}\mathbb{D}\varepsilon_i=\frac{qr}{p^2}.$$

Приклад 3.19. *Дівчинка Емма вирішила збирати гроші на нову іграшку. Вона виробляє вдома смачні цукерки та пропонує їх на продаж у сусідніх будинках. Досвід Емми свідчить, що ймовірність продати цукерку для кожної квартири становить 0.4 в незалежності від інших обставин, причому кожна квартира купує не більше однієї цукерки. Сьогодні вона приготувала 10 цукерок. Знайти:*
1) ймовірність того, що останню (десяту) цукерку вона продасть у 28-ій за рахунком квартирі;
2) середню кількість квартир, які відмовлять дівчині;
3) середню кількість квартир, яку їй доведеться обійти.

Розв'язання. Нехай ξ — кількість квартир, які не куплять цукерку. Очевидно, $\xi \sim NegBin(10; 0.4)$.

1) Якщо 10-у цукерку продано у 28-ій квартирі, то кількість невдач рівна $k = 28 - 10 = 18$. Тоді

$$\mathbb{P}(\xi = 18) = C_{10+18-1}^{18} \cdot (0.4)^{10} \cdot (0.6)^{18} = .$$

2) Середня кількість квартир, які не куплять цукерку:

$$\mathbb{E}\xi = \frac{q \cdot r}{p} = \frac{0.6 \cdot 10}{0.4} = 15.$$

3) Нехай η — кількість квартир, які Еммі доведеться обійти. Очевидно, $\eta = \xi + 10$. Тому

$$\mathbb{E}\eta = \mathbb{E}(\xi + 10) = \mathbb{E}\xi + 10 = 15 + 10 = 25,$$

тобто дівчина в середньому обійде 25 квартир поки не продасть всі цукерки.
□

3.5.6. Гіпергеометричний розподіл

Нехай є скінченна сукупність, яка складається з N елементів. Припустимо, що n із них мають потрібну нам властивість, $n \leq N$. Випадковим чином із загальної сукупності вибирається група з m елементів. Кажуть, що випадкова величина ξ розподілена за **гіпергеометричним законом**, якщо вона описує кількість вибраних елементів, які мають потрібну властивість.

Будемо позначати:

$$\xi \sim HGeom(N, n, m),$$

де $N \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ —параметри розподілу, $m \le N$.

Наприклад, нехай у скрині є N кульок, серед яких n кульок білі, інші — чорні. Навмання зі скрині дістають m кульок. Тоді ξ — кількість білих серед них. Надалі будемо трактувати розподіл у термінах білих та чорних кульок.

Спочатку зауважимо, що ми не можемо вибрати більше білих кульок ніж їх є, тобто більше ніж n, та одночасно не можемо вибрати їх більше ніж ми беремо всього кульок, тобто m. Тому $k \le \min\{n, m\}$. З іншого боку, якщо $m \ge N - n$, тобто кількість кульок, які ми беремо, більша за наявну кількість чорних кульок, то ми вимушені взяти принаймні $\big(m - (N - n)\big)$ білих кульок. Отже, $k \ge \max\{0, m + n - N\}$.

Тепер знайдемо ймовірності обрати рівно k білих кульок: $\mathbb{P}(\xi = k)$. Всього можливих наборів, що складаються з m елементів, є C_N^m. З них таких наборів, що мають рівно k білих кульок, є $C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}$. Отже, за формулою класичної ймовірності

$$p_k = \mathbb{P}(\xi = k) = \frac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m},$$

де $\max\{0, m+n-N\} \le k \le \min\{n, m\}$. Тому ряд розподілу в.в. ξ має вигляд

ξ	$k_1 = \max\{0, m + n - N\}$	$\dots$	k	$\dots$	$k_2 = \min\{n, m\}$
$\mathbb{P}$		$\dots$	$\frac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}$	$\dots$	$\frac{C_{\max\{n,m\}}^{k2}}{C_N^{k2}}$

Знайдемо математичне сподівання в.в. ξ. Оскільки безпосередньо обчислювати математичне сподівання тут досить складно, застосуємо індикаторний метод. Для цього будемо вважати, що всі кульки викладено в ряд, причому спочатку n білих:

$$\underbrace{\text{бб...б}}_{n}\underbrace{\text{чч...ч}}_{N-n}.$$

Ми вибираємо із скрині навмання всього m кульок. Для $j = \overline{1,m}$, вийнята на j-му кроці кулька або вийнята з першої ("білої") групи, або з другої ("чорної") групи. Тому, введемо в.в.

$$\varepsilon_j = \begin{cases} 1, & j - \text{та за порядком кулька біла,} \\ 0, & \text{ця кулька чорна.} \end{cases}$$

Тоді $\xi = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j$, а тому

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{j=1}^{m} \mathbb{E}\varepsilon_j = \sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}(\text{кулька біла}) =$$

$$= m \cdot \mathbb{P}(\text{дістати білу кульку}) = m \cdot \frac{n}{N}.$$

Отже, для $\xi \sim HGeom(N, n, m)$,

$$\boxed{\mathbb{E}\xi = \frac{mn}{N}.}$$

Приклад 3.20. *Виготовлено 15 виробів, з яких 4 мають дефект. Відділ контролю не знає про кількість дефектних виробів і вибирає для перевірки якості продукції 7 виробів навмання. Скласти ряд розподілу в.в. ξ — кількості дефектних виробів серед вибраних. Скільки в середньому дефектних деталей зустрінеться серед вибраних?*

Розв'язання. В даній задачі наявність дефекту – це як раз властивість, яка нас цікавить. Отже, $\xi \sim HGeom(15, 4, 7)$.

Очевидно, що ξ може приймати значення 0, 1, 2, 3, 4. Відповідні ймовірності:

$$\mathbb{P}(\xi = 0) = \frac{C_4^0 \cdot C_{15-4}^{7-0}}{C_{15}^7} = \frac{2}{39}, \quad \mathbb{P}(\xi = 1) = \frac{C_4^1 \cdot C_{15-4}^{7-1}}{C_{15}^7} = \frac{56}{195},$$

$$\mathbb{P}(\xi = 2) = \frac{C_4^2 \cdot C_{15-4}^{7-2}}{C_{15}^7} = \frac{28}{65}, \quad \mathbb{P}(\xi = 3) = \frac{C_4^3 \cdot C_{15-4}^{7-3}}{C_{15}^7} = \frac{8}{39},$$

$$\mathbb{P}(\xi = 4) = \frac{C_4^4 \cdot C_{15-4}^{7-4}}{C_{15}^7} = \frac{1}{39}.$$

Отже, ряд розподілу:

ξ	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}$	$\frac{2}{39}$	$\frac{56}{195}$	$\frac{28}{65}$	$\frac{8}{39}$	$\frac{1}{39}$

Нарешті середня кількість дефектних деталей буде

$$\mathbb{E}\xi = \frac{4 \cdot 7}{15} = \frac{28}{15}.$$

$\square$

3.5.7. Розподіл Пуассона

В.в. ξ має **розподіл Пуассона** із параметром λ, якщо вона набуває значень 0, 1, 2,.... та відповідні ймовірності виражаються формулою Пуассона

$$p_k = \mathbb{P}(\xi = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \lambda > 0, \quad k \geq 0.$$

Позначатимемо

$$\xi \sim Pois(\lambda),$$

де λ — параметр.

Розподіл Пуассона є граничним для біноміального при $n \to \infty$, $p \to 0$ так, що $np \to \lambda$.

Розподіл Пуассона показує кількість подій, які відбуваються у випадкові моменти часу на фіксованому проміжку часу. Наприклад, кількість викликів у Call-центр за одиницю часу T, кількість страхових випадків за одиницю часу T, число друкарських помилок у книзі із великою кількістю сторінок, кількість бракованих деталей у великій партії товару тощо.

Ряд розподілу в.в. ξ має вигляд

ξ	0	1	2	...	n	...
$\mathbb{P}$	$e^{-\lambda}$	$\frac{e^{-\lambda}\lambda}{1!}$	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!}$	...	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$	...

Перевіримо, що $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$. Дійсно,

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$$

Знайдемо генератрису в.в. $\xi \sim Pois(\lambda)$.

$$G_\xi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} z^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda z} = e^{\lambda(z-1)}.$$

Знайдемо числові характеристики в.в. ξ.

$$\mathbb{E}\xi = G'_\xi(1) = e^{\lambda(z-1)}\lambda|_{z=1} = \lambda,$$

$$\mathbb{D}\xi = G''_\xi(1) + G'_\xi(1) - (G'_\xi(1))^2 =$$
$$= \lambda^2 e^{\lambda(z-1)}|_{z=1} + \lambda - \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Отже, для $\xi \sim Pois(\lambda)$:

$$\boxed{\mathbb{E}\xi = \mathbb{D}\xi = \lambda}.$$

Звідси випливає, що параметр λ — це середня кількість однотипних подій, що відбуваються незалежно на фіксованому проміжку часу.

Розподіл Пуассона грає важливу роль у теорії випадкових процесів, теорії масового обслуговування, теорії надійності. Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 3.21. *За одну годину на станцію швидкої допомоги надходить у середньому 10 викликів. Знайти ймовірність того, що за 10 хвилин надійде принаймні 2 виклики.*

Розв'язання. Нехай ξ — кількість викликів за 10 хвилин. Тоді $\xi \sim Pois(\lambda)$.

За умовою у середньому надходить 10 викликів за годину. Це означає, що за 10 хвилин в середньому надійде у 6 раз менше викликів, тобто $\frac{10}{6} = \frac{5}{3}$. Отже, $\lambda = \frac{5}{3}$.

Обчислимо ймовірність того, що за 10 хвилин надійде принаймні 2 виклики:

$$\mathbb{P}(\xi \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(\xi = 0) - \mathbb{P}(\xi = 1) =$$
$$= 1 - \frac{e^{-5/3}\left(\frac{5}{3}\right)^0}{0!} - \frac{e^{-5/3}\left(\frac{5}{3}\right)^1}{1!} = 0.496.$$

□

Приклад 3.22. *Ймовірність виграшу за одним лотерейним білетом дорівнює* $p = 0.01$. *Скільки потрібно купити білетів, щоб виграти хоча б по одному з них з ймовірністю не менше 0.95?*

Розв'язання. Ймовірність виграшу за одним білетом мала, а число білетів, які треба купити, очевидно, велике. Тому випадкова кількість білетів має наближено розподіл Пуассона.

Позначимо

$$A = \{\text{хоча б один білет – виграшний}\}.$$

Тоді

$$\overline{A} = \{\text{жоден із придбаних білетів не є виграшним}\},$$

і

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}_n(0) = 1 - e^{-\lambda}.$$

За умовою $\mathbb{P}(A) \geq 0.95$, звідки

$$1 - e^{-\lambda} \geq 0.95 \quad \Rightarrow \quad e^{-\lambda} \leq 0.05.$$

Розв'язуючи нерівність, отримаємо, що

$$\lambda \geq 3 \quad \Rightarrow \quad n \geq \frac{3}{p} = \frac{3}{0.01} = 300,$$

тобто треба купити не менше 300 білетів, щоб виграти хоча б по одному з них з ймовірністю 0.95. □

Приклад 3.23. *Нехай* $\xi_1 \sim Pois(\lambda_1)$, $\xi_2 \sim Pois(\lambda_2)$, ξ_1, ξ_2 *незалежні в.в. Довести, що*

$$\xi_1 + \xi_2 \sim Pois(\lambda_1 + \lambda_2).$$

Розв'язання. <u>1 спосіб.</u>

$$\mathbb{P}\{\xi_1 + \xi_2 = k\} = \sum_{l=0}^{k} \mathbb{P}\big(\{\xi_1 = l\} \cap \{\xi_2 = k - l\}\big) = \big|\xi_1, \xi_2 - \text{незалежні}\big| =$$

$$= \sum_{l=0}^{k} \mathbb{P}\{\xi_1 = l\}\mathbb{P}\{\xi_2 = k - l\} =$$

$$= \sum_{l=0}^{k} \frac{e^{-\lambda_1}(\lambda_1)^l}{l!} \cdot \frac{e^{-\lambda_2}(\lambda_2)^{(k-l)}}{(k-l)!} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{l=0}^{k} \frac{(\lambda_1)^l(\lambda_2)^{(k-l)}}{l!(k-l)!} =$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \sum_{l=0}^{k} C_n^k (\lambda_1)^l (\lambda_2)^{(k-l)} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}(\lambda_1+\lambda_2)^k,$$

звідки випливає, що

$$\xi_1 + \xi_2 \sim Pois(\lambda_1 + \lambda_2).$$

2 спосіб. Запишемо генератрису суми:

$$G_{\xi_1+\xi_2}(z) = \mathbb{E}z^{\xi_1+\xi_2} = \left|\xi_1, \xi_2 - \text{незалежні}\right| = \mathbb{E}z^{\xi_1} \cdot \mathbb{E}z^{\xi_2} =$$

$$= G_{\xi_1}(z) G_{\xi_2}(z) = e^{\lambda_1(z-1)} e^{\lambda_2(z-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(z-1)},$$

звідки

$$\xi_1 + \xi_2 \sim Pois(\lambda_1 + \lambda_2),$$

що й треба було довести. □

Останній приклад показує, що сума незалежних пуассонівських в.в. є знову пуассонівською в.в. з параметром, який є сумою відповідних параметрів. Запам'ятаємо цей факт.

Приклад 3.24. *В деякій країні хлопчик підробляє тим, що купує і продає газети. Він купує газети по 4 центи за штуку, продає — по 7 центів за штуку. При цьому, непродані газети не можна повернути, тобто на них він отримає збиток. Кількість проданих в день газет — це в.в., розподілена за законом Пуассона із середнім 50. Скільки газет має купувати хлопець, щоб максимізувати свій щоденний прибуток?*

Розв'язання. Нехай ξ — кількість проданих в день газет. За умовою ξ $Pois(50)$. Нехай N — кількість газет, які йому слід купувати в день. Знайдемо середній прибуток хлопця за 1 день. Зрозуміло, що прибуток — це функція від N, позначимо її $f(N)$. Оскільки він витрачає кожен день $4N$ центів, а заробляє або $7N$ центів (якщо продав всі N куплених газет) або 7ξ центів (якщо продав ξ газет і $\xi < N$), то

$$f(N) = -4N + 7\mathbb{E}\min\{\xi, N\} =$$

$$= -4N + 7\Big(\sum_{k=0}^{N} k \cdot \mathbb{P}\{\xi = k\} + N \cdot \mathbb{P}\{\xi \geq N+1\}\Big) =$$

$$= -4N + 7\Big(\sum_{k=0}^{N} k \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} + N \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\Big).$$

Тепер треба знайти таке максимальне N, щоб функція $f(N)$ набувала максимального значення при натуральному N. Для цього розглянемо вираз $f(N)-f(N-1)$ та будемо шукати таке найбільше N, щоб $f(N)-f(N-1) > 0$. Отже, після спрощення:

$$f(N) - f(N-1) = -4 + 7\sum_{k=N}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} =$$

$$= -4 + 7\Big(1 - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\Big) = 3 - 7\sum_{k=0}^{N-1} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} > 0,$$

звідки отримали умову:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} < \frac{3}{7}.$$

Можна підібрати, що найбільше натуральне N, яке задовольняє цій нерівності, дорівнює 49. Отже, хлопчику слід кожен день купувати по 49 газет.

□

Задачі для самостійного розв'язання до 3.5

1. 4 літаки незалежно один від одного скидають по одній бомбі в наземну ціль. Ймовірність влучення для кожного літака становить 0.6. Нехай ξ кількість влучень. Скласти ряд розподілу ξ, побудувати функцію розподілу, знайти числові характеристики ξ та ймовірність того, що влучень буде не менше двох, але не більше трьох.

2. Ілля Муромець на коні мандрує руськими дорогами. Під'їхавши до каменю і прочитавши напис на ньому, він може з однаковими ймовірностями повернути праворуч, ліворуч, або поїхати прямо. На шляху йому зустрілося 300 каменів, в результаті чого він вимушений був

змінювати напрям руху ξ разів. Знайти математичне сподівання та дисперсію ξ.

3. Несиметричну монету підкидають деяку кількість разів. Нехай випадкова величина ξ описує кількість решок, що випали. Відомо, що $\mathbb{E}\xi = 240$, $\sigma_\xi = 12$. Знайти кількість підкидань, ймовірність випадіння решки при одному підкиданні та $\mathbb{P}\{\xi = 200\}$.

4. Емма вважає, що ймовірність знайти ідеального чоловіка становить 0.05. Скільком в середньому чоловікам вона відмовить, поки не знайде ідеального.

5. Пушкін та Дантес стріляють один в одного по черзі поки хтось не влучить. Пушкін починає першим. Ймовірність влучити при одному пострілі для Пушкіна складає 0.4, а для Дантеса — 0.7. Нехай ξ кількість пострілів Пушкіна. Побудувати ряд розподілу ξ, знайти її математичне сподівання та дисперсію.

6. Василь захотів знайти людину, яка народилась в тому ж місяці, що і сам Василь. Скільки в середньому людей йому доведеться опитати? Яка ймовірність, що він зупиниться не раніше ніж на 7-ій людині?

7. З колоди 36 карт навмання виймають по одній карті, повертаючи кожен раз карту до колоди. Експеримент продовжують до появи першої пікової дами. На якому в середньому кроці це станеться? Знайти ймовірність того, що це станеться не раніше ніж на 30-му кроці.

8. З колоди 36 карт навмання виймають по одній карті, повертаючи кожен раз карту до колоди. Експеримент продовжують до появи третьої пікової дами. На якому в середньому кроці це станеться? Яка ймовірність, що втретє пікову даму дістануть саме на 100-у кроці?

9. Директор банку Аполлон Васильович після роботи заходить до казино і не виходить звідти, поки не виграє 3 рази у рулетку (36 чисел + "0"). В кожному раунді він ставить по 1 грн. на свої улюблені числа: "13", "17", "0". Виграшем вважається випадіння одного з цих чисел. Знайти ймовірність того, що гра завершиться тоді, коли він програє

рівно 90 грн. (тобто зробить сумарно ставки на 90 грн.). Скільки в середньому раундів він буде грати?

10. Леопольд приходить в тир та не виходить звідти, поки не влучить в мішень 10 разів. Ймовірність влучення при одному пострілі дорівнює 0.25. Скільки в середньому він зробить промахів? Скільки в середньому разів він буде стріляти. Яка ймовірність того, що останнє (десяте) влучення припаде на 37-й постріл?

11. На вузол зв'язку надходять у середньому 120 повідомлень за годину. Кількість повідомлень є випадкова величина, яка розподілена за законом Пуассона. Знайти ймовірності того, що протягом хвилини на вузол зв'язку надійшло:

    а) не більше одного повідомлення;

    б) рівно три повідомлення;

    в) не менше п'яти повідомлень.

12. На станцію швидкої допомоги надходить в середньому 30 викликів за годину. Знайти ймовірність того, що за 20 хвилин:

    а) надійде рівно 5 викликів;

    б) від 4-х до 10-ти викликів;

    в) не менше 15 викликів.

13. В деяку службу таксі надходить в середньому 10 замовлень на годину. На скільки секунд може вийти диспетчер, щоб не пропустити жодного замовлення з ймовірністю 0,9?

14. Оля та Юля постійно пишуть повідомлення Маші (у випадкові моменти часу). Оля відправляє Маші в середньому 5 повідомлень за годину, Юля – в середньому 2. Яка ймовірність того, що Маша за наступну годину отримає рівно 7 повідомлень?

15. Незалежні випадкові величини ξ_1 та ξ_2 розподілені за законом Пуассона з параметрами 1 та 2 відповідно. Знайти $\mathbb{P}\{\xi_1 + 2\xi_2 = 4\}$.

16. Незалежні випадкові величини ξ_1, ξ_2, ξ_3 розподілені за законом Пуассона з параметрами 1, 2 та 3 відповідно. Знайти $\mathbb{P}\{\xi_1 + 2\xi_2 + 2\xi_3 = 4\}$.

17. Нехай $\xi_k \sim Pois(k)$, $k = \overline{1,10}$ — незалежні в.в. Знайти ймовірність того, що середнє арифметичне цих величин дорівнює 1.

18. Незалежні випадкові величини ξ_1, ξ_2, ξ_3 розподілені за законами $Geom^{(1)}(\frac{1}{7})$, $Geom^{(2)}(\frac{3}{7})$ та $Pois(\frac{5}{7})$ відповідно. Знайти

$$\mathbb{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \xi_3\}.$$

3.6. Потік подій Пуассона

Нехай у випадкові моменти часу відбуваються однотипні події. Наприклад,

- надходять дзвінки на службу швидкої допомоги;
- відбувається ДТП на деякій частині автостради;
- до страхової компанії надходить інформація про страховий випадок.

Схематично позначатимемо події крапочками на числовій осі (рис. 3.4).

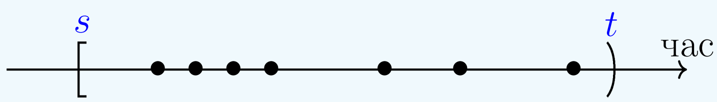

Рис. 3.4. Потік подій

Таку схему будемо називати потоком подій. Накладемо на потік подій деякі природні умови, тобто такі, які на практиці виконуються точно або наближено.

Нехай $N(s,t)$ — кількість подій, що відбулася на проміжку часу $[s,t)$. Зрозуміло, що $N(s,t)$ — це випадкова величина. Припустимо, що ця величина задовольняє наступні умови:

1) *Стаціонарність*:

$$N(s+h,t+h) \overset{d}{=} N(s,t), \quad \forall h > 0, \quad \forall s < t,$$

де $\overset{d}{=}$ означає рівність за розподілом. Ця властивість означає, що ймовірнісні характеристики потоку подій не змінюються з часом.

2) *Відсутність післядії*: для будь-яких $s_1 \le t_1 \le s_2 \le t_2 \le \ldots \le s_n \le t_n$ випадкові величини $N(s_1,t_1)$, $N(s_2,t_2)$, ... , $N(s_n,t_n)$ є незалежними у сукупності.

Ця властивість означає, що кількість подій, що відбулися на одному часовому проміжку, ніяк не впливає на кількість подій на іншому часовому проміжку, якщо проміжки не перетинаються.

3) *Ординарність*:

$$\mathbb{P}\{N(s,s+h) \ge 2\} = o(h), \quad h \to 0.$$

Ця властивість означає, що дві випадкові події не можуть відбуватися у один і той самий момент часу.

Згадавши наші приклади, робимо висновок, що всі три властивості є досить розумними.

Означення 3.13. Потік подій, який задовольняє властивості 1)–3), називається потоком Пуассона.

Теорема 3.1. *Нехай є непорожній потік подій Пуассона. Тоді існує $\lambda > 0$ таке, що для будь-яких $s < t$,*

$$N(s,t) \sim Pois(\lambda(t-s)),$$

тобто випадкова величина $N(s,t)$ є пуассонівською з параметром $\lambda(t-s)$.

Величина λ називається *інтенсивністю* потоку Пуассона.

Доведення. *Треба довести, що*

$$\mathbb{P}\{N(s,t) = k\} = \frac{e^{-\lambda(t-s)}(\lambda(t-s))^k}{k!}, \quad \forall s < t, \quad \forall k = 0,1,2,\ldots$$

Але, в силу властивості 1) достатньо довести, що

$$\mathbb{P}\{N(0,h)=k\}=\frac{e^{-\lambda h}(\lambda h)^k}{k!},\quad \forall h>0.$$

Розіб'ємо доведення на 4 кроки.

1 крок. *Розглянемо ймовірність*

$$p_0(h)=\mathbb{P}\{N(0,h)=0\}.$$

Тоді для будь-якого $n\in\mathbb{N}$,

$$p_0(nh)=\mathbb{P}\{N(0,nh)=0\}=$$

$$=\mathbb{P}\Big\{\Big(N(0,h)=0\Big)\cap\Big(N(h,2h)=0\Big)\cap\ldots\cap\Big(N((n-1)h,nh)=0\Big)\Big\}=$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}\Big\{N((k-1)h,kh)=0\Big\}=\Big(\mathbb{P}\{N(0,h)=0\}\Big)^n=\Big(p_0(h)\Big)^n.$$

Нехай $p=p_0(1)=\mathbb{P}\{N(0,1)=0\}$. Тоді для будь-якого $n\in\mathbb{N}$ маємо $\mathbb{P}\{N(0,n)=0\}=p^n$.

Встановимо аналогічне співвідношення для проміжку виду $\Big(0,\frac{1}{n}\Big]$. Дійсно, з попереднього випливає, що

$$\Big(\mathbb{P}\Big\{N\Big(0,\frac{1}{n}\Big)=0\Big\}\Big)^n=p.$$

Звідси

$$\mathbb{P}\Big\{N\Big(0,\frac{1}{n}\Big)=0\Big\}=p^{\frac{1}{n}}.$$

В свою чергу з останнього випливає, що аналогічна рівність виконується і для раціональних h, тобто

$$\mathbb{P}\Big\{N\Big(0,\frac{m}{n}\Big)=0\Big\}=p^{\frac{m}{n}},\quad m\in\mathbb{Z},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Нарешті, розглянемо довільне h. Виберемо 2 послідовності раціональних чисел $(h_n^-,n\geq1)$ та $(h_n^+,n\geq1)$, які збігаються до h зліва та справа відповідно, тобто $h_n^-\uparrow h$ та $h_n^-\downarrow h$. Тоді

$$p^{h_n^-}=\mathbb{P}\{N(0,h_n^-)=0\}\geq\mathbb{P}\{N(0,h)=0\}\geq\mathbb{P}\{N(0,h_n^+)=0\}=p^{h_n^+}$$

Але, $p^{h_n^-} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} p^h$ *та* $p^{h_n^+} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} p^h$*, а отже, за лемою про три послідовності*

$$\mathbb{P}\{N(0,h)=0\}=p^h,$$

оскільки величина $\mathbb{P}\{N(0,h)=0\}$ *взагалі від* n *не залежить.*

Таким чином, на першому кроці ми показали, що $\mathbb{P}\{N(0,h)=0\}=p^h$ *для будь-якого* $h>0$*.*

2 крок*. З'ясуємо, чи може бути* $p=0$ *або* $p=1$*?*

Якщо $p=1$*, то* $\mathbb{P}\{N(0,1)=0\}=1$*, що означає, що потік подій є порожнім. Це протирічить умові теореми.*

Припустимо, що $p=0$*. Це означає, що на довільному як завгодно маленькому проміжку часу відбувається принаймні 1 подія. Поділимо цей проміжок часу навпіл. Тоді на кожній половині відбувається також принаймні 1 подія, а значить, на цілому проміжку — принаймні 2 події. Математично це означає, що*

$$\mathbb{P}\{N(s,s+h)\geq 2\}=1,$$

що суперечить умові 3) означення потоку Пуассона.

Позначимо через $\lambda=-\ln p>0$*. Звідси* $p=e^{-\lambda}$*. Тому*

$$\mathbb{P}\{N(0,h)=0\}=p^h=e^{-\lambda h},$$

тобто ми довели теорему для $k=0$*.*

Зауважимо також, що

$$\mathbb{P}\{N(0,h)=0\}=e^{-\lambda h}=1-\lambda h+o(h),$$

звідки

$$\mathbb{P}\{N(0,h)=1\}=1-\mathbb{P}\{N(0,h)=0\}-\mathbb{P}\{N(0,h)\geq 2\}=$$

$$=1-1+\lambda h-o(h)-o(h)=\lambda h+o(h),\quad h\to 0.$$

3 крок*. Розглянемо довільне* h *і довільне* $\varepsilon>0$*. Позначимо*

$$p_k(h)=\mathbb{P}\{N(0,h)=k\}.$$

При цьому, з попереднього кроку

$$p_0(h) = e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + o(h), \quad p_1(h) = \lambda h + o(h), \quad h \to 0.$$

Далі

$$p_k(h+\varepsilon) = \mathbb{P}\Big\{N(0,h+\varepsilon) = k\Big\} = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}\Big\{\Big(N(0,h) = i\Big) \cap \Big(N(h,h+\varepsilon) = k-i\Big)\Big\} =$$

$$\sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}\Big\{\Big(N(0,h) = i\Big)\Big\} \cdot \mathbb{P}\Big\{\Big(N(0,\varepsilon) = k-i\Big)\Big\} =$$

$$= \Big(p_0(h)p_k(\varepsilon) + p_1(h)p_{k-1}(\varepsilon) + \ldots + p_{k-2}(h)p_2(\varepsilon)\Big) + p_{k-1}(h)p_1(\varepsilon) + p_k(h)p_0(\varepsilon),$$

де в останній сумі вираз у великих дужках — це ймовірність того, що на проміжку довжини ε відбудеться не менше 2-х подій, а отже, за властивістю 3) це $o(\varepsilon)$. Враховуючи ці міркування, будемо мати

$$p_k(h+\varepsilon) = o(\varepsilon) + p_{k-1}(h)p_1(\varepsilon) + p_k(h)p_0(\varepsilon) =$$

$$= o(\varepsilon) + p_{k-1}(h)(\lambda\varepsilon + o(\varepsilon)) + p_k(h)(1 - \lambda\varepsilon + o(\varepsilon)),$$

тобто

$$p_k(h+\varepsilon) - p_k(h) = -\lambda\varepsilon p_k(h) + o(\varepsilon)p_k(h) + p_{k-1}(h)\lambda\varepsilon + o(\varepsilon)p_{k-1}(h) + o(\varepsilon).$$

Тому

$$\frac{p_k(h+\varepsilon) - p_k(h)}{\varepsilon} = -\lambda p_k(h) + \lambda p_{k-1}(h) + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon},$$

і спрямовуючи ε до 0, будемо мати систему диференціальних рівнянь:

$$p_k'(h) = -\lambda p_k(h) + \lambda p_{k-1}(h), \quad k \geq 1.$$

***4 крок**. На цьому кроці знайдемо розв'язок системи рівнянь з початковими умовами:*

$$\begin{cases} p_k'(h) = -\lambda p_k(h) + \lambda p_{k-1}(h), \quad k \geq 1, \\ p_0(h) = e^{-\lambda h}, \quad p_k(0) = 0, \quad k \geq 1. \end{cases} \tag{3.1}$$

Будемо шукати розв'язки системи (3.1) *у вигляді:*

$$p_k(h) = e^{-\lambda h} v_k(h) \quad k \geq 1.$$

Тоді

$$p_k'(h) = -\lambda e^{-\lambda h} v_k(h) + e^{-\lambda h} v_k'(h)$$

і рівняння системи (3.1) *перетвориться на наступне:*

$$v_k'(h) = \lambda v_{k-1}(h), \quad k \geq 1.$$

Отже, отримали систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} v_1'(h) = \lambda v_0(h), \\ v_2'(h) = \lambda v_1(h), \\ \ldots \end{cases}$$

Але, з початкових умов випливає, що $v_0(h)e^{-\lambda h} = e^{-\lambda h}$*, тобто* $v_0(h) = 1$*, і* $e^{-\lambda h} v_k(0) = 0$*, тобто* $v_k(0) = 0$*,* $k \geq 1$*.*

Розв'язуючи послідовно кожне рівняння системи, починаючи з першого, та враховуючи відповідні початкові умови, знайдемо всі невідомі функції $v_k(h)$*,* $k \geq 1$*:*

$$v_1'(h) = \lambda \cdot 1, \quad \Longrightarrow v_1(h) = \lambda h + C_1, \quad \Longrightarrow v_1(h) = \lambda h;$$

$$v_2'(h) = \lambda \cdot \lambda h, \quad \Longrightarrow v_2(h) = \frac{\lambda^2 h^2}{2} + C_2, \quad \Longrightarrow v_2(h) = \frac{\lambda^2 h^2}{2};$$

$$v_3'(h) = \lambda \cdot \frac{\lambda^2 h^2}{2}, \quad \Longrightarrow v_3(h) = \frac{\lambda^3 h^3}{3!} + C_3, \quad \Longrightarrow v_3(h) = \frac{\lambda^3 h^3}{3!};$$

$$\ldots$$

$$v_k(h) = \frac{\lambda^k h^k}{k!}, \quad k \geq 1.$$

Нарешті,

$$p_k(h) = \frac{e^{-\lambda h} (\lambda h)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Теорему повністю доведено.

Зауваження 3.6. Як знайти параметр λ потоку Пуассона? В теоремі 3.1 покладемо $t - s = 1$. Тоді $N(s,t) \sim Pois(\lambda)$. Але для пуассонівської випадкової величини ξ, $\mathbb{E}\xi = \lambda$. Отже, інтенсивність λ — це середня кількість подій, що відбуваються на проміжку одиничної довжини.

Приклад 3.25 (Задача про проріджження потоку Пуассона)**.** *Припустимо, що на іспит з теорії випадкових процесів приходить "пуассонівська кількість студентів" з параметром λ, тобто випадкова величина, розподілена за законом Пуассона. Кожний студент незалежно один від одного складає іспит з ймовірністю p. Всіх, хто не склав іспит викладач одразу відраховує. Довести, що число невідрахованих студентів є знову пуассоніським та знайти його параметр.*

Розв'язання. Нехай ξ — число студентів, що прийшли складати іспит, а η — число тих, які склали іспит на позитивну оцінку. Знайдемо $\mathbb{P}\{\eta = k\}$. За формулою повної ймовірності:

$$\mathbb{P}\Big\{\eta = k\Big\} = \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}\Big\{\xi = n\Big\} \cdot \mathbb{P}\Big\{\eta = k \Big| \xi = n\Big\} =$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \cdot C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{e^{-\lambda}p^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^n (1-p)^{n-k}}{(n-k)!} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda}p^k}{k!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+l}(1-p)^l}{l!} = \frac{e^{-\lambda}p^k\lambda^k}{k!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l (1-p)^l}{l!} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda}p^k\lambda^k}{k!} e^{\lambda(1-p)} = \frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^k}{k!}, \quad k \geq 0.$$

Отже, η — пуассонівська випадкова величина з параметром λp. □

Проведіть самостійно подібні міркування у наступній задачі.

Задача 3.1. *У Сигізмунда в кишені ξ штук несиметричних монет, де в.в. ξ розподілена за законом Пуассона з параметром λ. Він підкидає кожну монету один раз. Ймовірність випадіння герба на кожній монеті p. Показати, що сумарна кількість гербів, що випали розподілена за законом Пуассона з параметром λp.*

4. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЛАНЦЮГІВ МАРКОВА

Поняття ланцюга Маркова було вперше введено російським ученим А.А. Марковим[1] в 1906 році. Відразу ланцюги Маркова не знайшли свого практичного застосування, але поступово стали проникати у все більшу кількість теоретичних та практичних наук. Крім математики ланцюги Маркова відіграють важливу роль в теорії масового обслуговування, соціології, інформаційних технологіях тощо.

В цьому розділі дано основні початкові відомості теорії ланцюгів Маркова. Зауважимо, що ланцюгам Маркова присвячена велика кількість наукової та навчальної літератури. Більш детально з ланцюгами Маркова та їх застосуваннями можна познайомитись, наприклад, в [3; 14; 15; 22].

4.1. Основні поняття

Нехай задано скінчену або злічену множину станів E. Наприклад, $E = \{1, 2, 3, ..., N\}$ або $E = \{1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N}$ або $E = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\} = \mathbb{Z}$. Розглянемо наступну модель: частинка в дискретні моменти часу переходить з одного стану множини E в інший. Позначимо через ξ_n номер стану з множини E, в якому частинка знаходиться в момент часу n, $n \geq 0$. Таким чином, ми отримаємо послідовність випадкових величин ξ_0, ξ_1, ..., ξ_n, ...

Означення 4.1. Послідовність $(\xi_n,\ n \geq 0)$ називається ланцюгом Маркова, якщо виконується (марківська) властивість:

$$\mathbb{P}\Big\{\xi_{n+1} = x_{n+1} \Big| \xi_0 = x_0, \xi_1 = x_1, ..., \xi_n = x_n\Big\} = \mathbb{P}\Big\{\xi_{n+1} = x_{n+1} \Big| \xi_n = x_n\Big\}, \quad (4.1)$$

для всіх $n \geq 1$ та будь-яких станів x_0, x_1, ..., x_n, x_{n+1} із E.

[1] Андрій Андрійович Марков (1856-1922) – російський математик, учень П.Л. Чебишова. Зробив значний внесок у теорію чисел та математичний аналіз. Теорія ланцюгів Маркова утворює один з фундаментальних розділів теорії випадкових процесів. Сам Марков свої результати щодо ланцюгів застосовував до знаходження розподілу голосних і приголосних букв у поемі О.С. Пушкіна «Євгеній Онєгін».

Зауваження 4.1. Підкреслимо, що запис $\xi_n = i$ означає, що в момент часу n ланцюг Маркова знаходиться в стані i.

Крім того, рівність (4.1) еквівалентна кожній з наступних рівностей:

$$\mathbb{P}\Big\{\xi_{n+1} = x_{n+1} \Big|\, \xi_{k_1} = x_{k_1}, \xi_{k_2} = x_{k_2}, \ldots, \xi_{k_m} = x_{k_m}\Big\} = \mathbb{P}\Big\{\xi_{n+1} = x_{n+1} \Big|\, \xi_{k_m} = x_{k_m}\Big\},$$

для будь-яких $k_1 < k_2 < \ldots < k_m \le n$;

$$\mathbb{P}\Big\{\xi_{n+m} = x_{n+m} \Big|\, \xi_0 = x_0, \xi_1 = x_1, \ldots, \xi_n = x_n\Big\} = \mathbb{P}\Big\{\xi_{n+m} = x_{n+m} \Big|\, \xi_n = x_n\Big\},$$

для будь-яких $m, n \ge 0$.

Позначимо через

$$p_n(i,j) = \mathbb{P}\{\xi_{n+1} = j \,|\, \xi_n = i\}, \quad i, j \in E, \quad n \ge 0,$$

ймовірність переходу зі стану i в стан j на $(n+1)$-у кроці.

Означення 4.2. Набір ймовірностей $p_n(i,j)$, для будь-яких $i, j \in E$ та будь-якого $n \ge 0$, називаються *перехідними ймовірностями*.

Обчислимо ймовірність того, що ланцюг крок за кроком побував у станах $x_0, x_1, \ldots, x_n \in E$. А саме,

$$\mathbb{P}\big\{\xi_0 = x_0, \xi_1 = x_1, \ldots, \xi_n = x_n\big\} =$$

$$= \mathbb{P}\big\{\xi_0 = x_0\big\}\mathbb{P}\big\{\xi_1 = x_1 \big|\, \xi_0 = x_0\big\} \cdot \mathbb{P}\big\{\xi_2 = x_2 \big|\, \xi_0 = x_0, \xi_1 = x_1\big\} \cdot$$

$$\cdot \ldots \cdot \mathbb{P}\big\{\xi_n = x_n \big|\, \xi_0 = x_0, \xi_1 = x_1, \ldots, \xi_{n-1} = x_{n-1}\big\} =$$

$$= \mathbb{P}\big\{\xi_0 = x_0\big\}\mathbb{P}\big\{\xi_1 = x_1 \big|\, \xi_0 = x_0\big\}\mathbb{P}\big\{\xi_2 = x_2 \big|\, \xi_1 = x_1\big\} \ldots \mathbb{P}\big\{\xi_n = x_n \big|\, \xi_{n-1} = x_{n-1}\big\} =$$

$$= \mathbb{P}\big\{\xi_0 = x_0\big\} \cdot p_0(x_0, x_1) p_1(x_1, x_2) \cdot \ldots \cdot p_{n-1}(x_{n-1}, x_n).$$

В загальному випадку ймовірності $p_n(i,j)$ переходу зі стану i в стан j залежать від номера кроку n, на якому здійснюється перехід. Якщо ці ймовірності не залежать від n для будь-яких $n \ge 0$, то такі ланцюги Маркова називають однорідними. Дамо формальне означення.

Означення 4.3. Ланцюг Маркова $(\xi_n, n \geq 0)$ називається однорідним, якщо для будь-яких $i, j \in E$

$$p_n(i,j) = \mathbb{P}\Big\{\xi_{n+1} = j \Big| \xi_n = i\Big\} = \mathbb{P}\Big\{\xi_1 = j \Big| \xi_0 = i\Big\}, \quad n \geq 0.$$

Надалі будемо розглядати лише однорідні ланцюги Маркова. Для них перехідні ймовірності $p_n(i,j)$ домовимось позначати p_{ij} для всіх $i, j \in E$.

Нехай множина станів E однорідного ланцюга Маркова є скінченою. В цьому випадку можемо вважати, що $E = \{1, 2, 3, ..., N\}$.

Означення 4.4. Матриця

$$P = \Big(p_{ij}\Big)_{i,j=1}^{N} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{N1} & p_{N2} & \dots & p_{NN} \end{pmatrix}.$$

називається *матрицею перехідних ймовірностей.*

Матриця перехідних ймовірностей має такі очевидні **властивості**:

1. $p_{ij} \in [0,1]$, для всіх $i, j = \overline{1, N}$;

2. $\sum_{j=1}^{N} p_{ij} = 1$, для всіх $i = \overline{1, N}$.

Означення 4.5. Матриця, яка задовольняє властивості 1 та 2 називається *стохастичною матрицею.*

Крім того, матриця P має ще одну корисну властивість, яку ми сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема 4.1. *Принаймні одне з власних чисел матриці P дорівнює 1, а всі інші за модулем менші 1.*

Доведення. *Розглянемо вектор $\overrightarrow{X}$ розмірності N, кожна компонента якого дорівнює 1, тобто $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}^T$, та покажемо, що він є власним вектором будь-якої стохастичної матриці P, що відповідає власному числу 1. Дійсно,*

$$P\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{N1} & p_{N2} & \dots & p_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{N} p_{ij} \\ \sum_{j=1}^{N} p_{ij} \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{N} p_{ij} \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Звідси та з означення власного вектора, отримаємо, що $\overrightarrow{X}$ є власним вектором матриці P, що відповідає власному числу 1.

Далі, нехай λ — довільне власне число матриці P, а $\overrightarrow{Y} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix}^T$ — власний вектор, що відповідає цьому числу. Не обмежуючи загальності можна вважати, що одна з координат вектора $\overrightarrow{Y}$ дорівнює 1, а всі інші не перевищують 1 за модулем, інакше можна поділити всі координати вектора на найбільшу координату. Отже,нехай $y_i = 1$, та $|y_j| \leq 1$, для всіх $j \neq i$. Тоді скориставшись означенням власного вектора, а саме i-м рядком у рівності $P\overrightarrow{Y} = \lambda\overrightarrow{Y}$, отримаємо

$$|\lambda| = |\lambda y_i| = \left|\sum_{j=1}^{N} p_{ij} y_j\right| \leq \sum_{j=1}^{N} p_{ij}|y_j| \leq \sum_{j=1}^{N} p_{ij} = 1,$$

що й треба було довести.

Нехай тепер $p_{ij}^{(m)}$, $i, j \in E$ — ймовірність переходу зі стану i в стан j за m кроків, а $P^{(m)} = \left(p_{ij}^{(m)}\right)_{i,j=1}^{N}$ — матриця перехідних ймовірностей ланцюга Маркова за m кроків. Розглянемо елемент цієї матриці:

$$p_{ij}^{(m)} = \mathbb{P}\{\xi_m = j \,|\, \xi_0 = i\} = \frac{\mathbb{P}\{(\xi_m = j) \cap (\xi_0 = i)\}}{\mathbb{P}\{\xi_0 = i\}} =$$

$$= \frac{1}{\mathbb{P}\{\xi_0 = i\}} \sum_{k_1, k_2, \dots, k_{m-1} \in E} \mathbb{P}\{\xi_0 = i, \xi_1 = k_1, \xi_2 = k_2, \dots, \xi_{m-1} = k_{m-1}, \xi_m = j\} =$$

$$= \frac{1}{\mathbb{P}\{\xi_0 = i\}} \sum_{k_1, k_2, \dots, k_{m-1} \in E} \mathbb{P}\{\xi_0 = i\} \cdot p_{ik_1} \cdot p_{k_1 k_2} \cdot \ldots \cdot p_{k_{m-1} j} =$$

$$= \sum_{k_1, k_2, \dots, k_{m-1} \in E} p_{ik_1} \cdot p_{k_1 k_2} \cdot \ldots \cdot p_{k_{m-1} j},$$

де остання сума є насправді елементом з індексом ij матриці P^m. Отже, ми отримали, що

$$P^{(m)} = P^m,$$

тобто *матриця перехідних ймовірностей однорідного ланцюга Маркова за m кроків дорівнює матриці перехідних ймовірностей за 1 крок, піднесеній до степеня m.*

Позначатимемо через $\overleftarrow{p}^0 = (p_1^0 \quad p_2^0 \quad \dots \quad p_N^0)$ — матрицю-рядок, що описує початковий розподіл ланцюга Маркова. Тут $p_i^0 = \mathbb{P}\{\xi_0 = i\}$ — ймовірність перебування в стані i в нульовий момент часу, $i \in E$. Зрозуміло, що $\sum_{i=1}^N p_i^0 = 1$.

Нехай також $\overleftarrow{p}^n = (p_1^n \quad p_2^n \quad \dots \quad p_N^n)$ — розподіл ланцюга Маркова через n кроків. Тоді

$$p_j^n = \mathbb{P}\{\xi_n = j\} = \sum_{i=1}^N \mathbb{P}\{\xi_0 = i\}\mathbb{P}\{\xi_n = j \mid \xi_0 = i\} = \sum_{i=1}^N p_i^0 p_{ij}^n,$$

звідки випливає, що

$$\boxed{\overleftarrow{p}^n = \overleftarrow{p}^0 P^n}. \tag{4.2}$$

Отже, щоб описати еволюцію однорідного ланцюга Маркова, необхідно знати матрицю перехідних ймовірностей P та початковий розподіл ланцюга Маркова $\overleftarrow{p}^0$.

Зауваження 4.2. У випадку зліченої множини станів E, всі проведені міркування можна дослівно повторити, але матриця перехідних ймовірностей P буде нескінченною.

Розглянемо приклади.

Приклад 4.1. *Відомо, що студент КПІ може перебувати у трьох станах: 1 – на парах, 2 – вдома, 3 – в бібліотеці. В дискретні моменти часу він може залишатися в стані, де він знаходиться, або переходити в інший стан з відповідними ймовірностями, які вказані на графі (див. рис. 4.1). Записати матрицю перехідних ймовірностей цього ланцюга Маркова, та знайти ймовірність того, що в момент часу n студент опиниться в бібліотеці, якщо в нульовий момент часу він був вдома.*

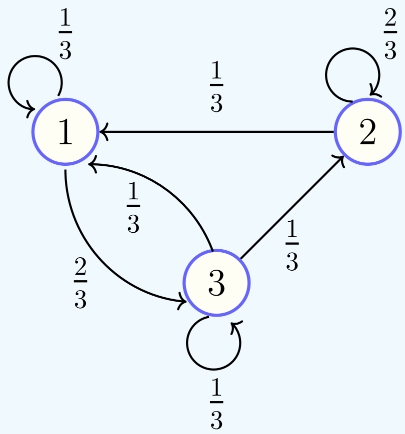

Рис. 4.1. Граф до ланцюга Маркова із прикладу 4.1.

Розв'язання. Матриця перехідних ймовірностей:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

В початковий момент часу студент знаходиться в стані 2, тобто вдома. Значить $\overleftarrow{p}^0 = (0 \;\; 1 \;\; 0)$. Тоді згідно з формулою (4.2)

$$\overleftarrow{p}^n = (0 \;\; 1 \;\; 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^n.$$

Щоб піднести матрицю до степеня, знайдемо жорданову форму матриці P. Легко бачити, що характеристичне рівняння $|P - \lambda I| = 0$, де I — одинична матриця, має три різні дійсні корені: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{1}{3}$, $\lambda_1 = 1$. Звідси випливає, що існує діагональна матриця

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

що відповідає матриці P, причому $P = CDC^{-1}$, де C — матриця перетворення, стовпцями якої є власні вектори матриці P. Власними векторами матриці P (в порядку нумерації власних чисел) є вектори

$$\overrightarrow{X}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{X}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, матриця C і обернена до неї C^{-1} мають відповідно вигляд:

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Враховуючи, що $P^n = CD^nC^{-1}$, будемо мати

$$\overleftarrow{p}^n = (0 \;\; 1 \;\; 0) \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0^n & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3^n} & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \Big(-\frac{1}{3} \cdot 0^n + \frac{1}{3} \qquad -\frac{1}{3} \cdot 0^n + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^n} \qquad \frac{2}{3} \cdot 0^n + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^n} \Big).$$

Таким чином, ми отримали розподіл ланцюга Маркова в довільний момент часу n, якщо в початковий момент часу ланцюг Маркова знаходився в стані 2. Звідси одразу отримаємо ймовірність того, що студент в момент часу n опиниться в стані 3, тобто в бібліотеці:

$$\mathbb{P}\{\xi_n = 3\} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3^n}.$$

Зауважимо, що в цьому прикладі ми вважаємо, що $0^0 = 1$ для того, щоб була відповідність із записом нульового степеня матриці перехідних ймовірностей, а саме $P^0 = I$. □

Повернемося до прикладу 2.37 про випадкове блукання.

Приклад 4.2 (Випадкове блукання на прямій)**.** *Кіт мандрує цілими точками дійної осі, на кожному кроці переміщуючись на одиницю праворуч з ймовірністю p або ліворуч з ймовірністю q, $p + q = 1$ (див. рис. 4.2).*

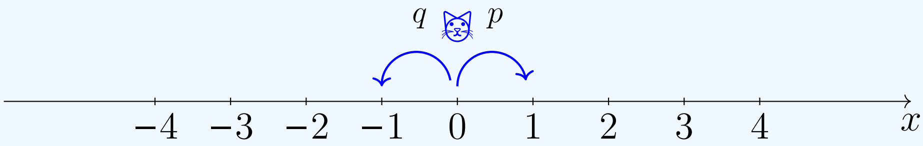

Рис. 4.2. Випадкове блукання на осі

Таке випадкове блукання є однорідним ланцюгом Маркова зі зліченою кількістю станів $E = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$. *При цьому ймовірності* p_{ij}^n *переходу зі стану* i *в стан* j *за* n *кроків знайдено в прикладі* 2.37. *Коротко нагадаємо наші міркування. Нехай для визначеності* $j > i$. *Для того, щоб зі стану* i *перейти в стан* j *за* n *кроків, необхідно зробити на* $(j - i)$ *більше кроків праворуч ніж ліворуч. Отже,*

$$p_{ij}^n = \begin{cases} C_n^{\frac{n+j-i}{2}} p^{\frac{n+j-i}{2}} q^{\frac{n-j+i}{2}}, & \textit{якщо } (n + j - i) \textit{ парне}, \\ 0, & \textit{в інших випадках.} \end{cases}$$

4.2. Класифікація станів ланцюга Маркова

Нехай $E = \{1, 2, 3, \ldots, N\}$ — скінченна множина станів ланцюга Маркова. Розглянемо коротко деяку термінологію, пов'язану зі станами ланцюга Маркова.

Означення 4.6. Стан $j \in E$ називається *досяжним* зі стану $i \in E$, якщо існує $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ таке, що $p_{ij}^{(n)} > 0$. Позначатимемо $i \to j$.

Означення 4.7. Стани i та j називаються *сполучними* (*взаємодосяжними*), якщо $i \to j$ та $j \to i$. Позначатимемо $i \leftrightarrow j$.

Очевидно, відношення сполучності станів є відношенням еквівалентності, оскільки виконуються три властивості:

- (рефлексивність) $i \leftrightarrow i$.
- (симетричність) якщо $i \leftrightarrow j$, то $j \leftrightarrow i$;

- (транзитивність) якщо $i \leftrightarrow j$, та $j \leftrightarrow k$, то $i \leftrightarrow k$.

Таким чином, множина всіх станів ланцюга Маркова розбивається на класи еквівалентності — класи сполучності.

Означення 4.8. Клас сполучності C називається *замкнутим*, якщо для будь-яких $i \in C$, $j \in E$ таких, що $i \to j$, випливає, що стан $j \in C$.

Замкнутий клас сполучності означає, що з нього не можна вийти. Якщо ж в класі сполучності існує принаймні один стан, який виводить ланцюг з цього класу, то клас не є замкнутим.

Означення 4.9. Стан $i \in E$ називається станом поглинання, якщо $p_{ii} = 1$.

Стан поглинання означає, що ланцюг не може вийти з цього стану і залишається там назавжди. Очевидно кожний стан поглинання є замкненим класом сполучності.

Означення 4.10. Стан $i \in E$ називається *несуттєвим*, якщо існує стан j такий, що $i \to j$, але $j \nrightarrow i$, тобто існує n_0 таке, що $p_{ij}^{(n_0)} > 0$, але $p_{ji}^{(n)} = 0$ для всіх $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Аналогічне означення інколи вводять для класів сполучності. Незамкнений клас сполучності називається *несуттєвим*.

Приклад 4.3. *Розглянемо ланцюг Маркова, зображений графом на рисунку* 4.3. *Припустимо, що перехідні ймовірності* p_{12}, p_{23}, p_{31}, p_{24}, p_{46}, p_{64}, p_{53}, p_{57}, p_{78}, p_{87} *є ненульовими.*

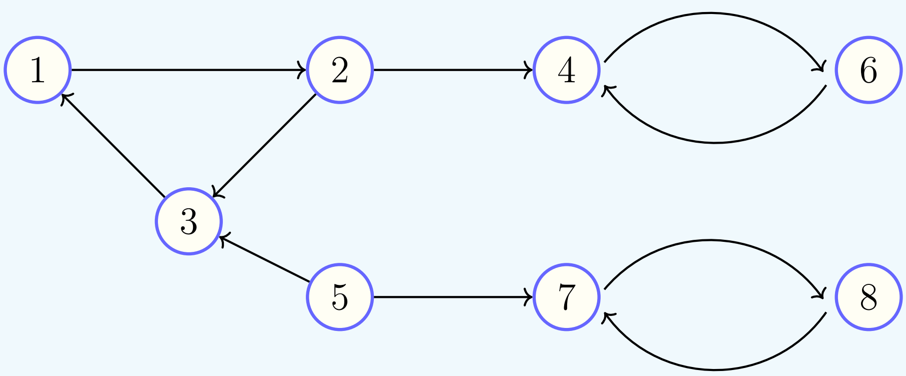

Рис. 4.3. Граф до ланцюга Маркова із прикладу 4.3.

Очевидно, ланцюг має чотири сполучні класи:
$C_1 = \{1, 2, 3\}$;
$C_2 = \{4, 6\}$;
$C_3 = \{7, 8\}$;
$C_4 = \{5\}$.

При цьому класи C_2 та C_3 є замкненими, а значить суттєвими, класи C_1 та C_4 є незамкненими, тобто несуттєвими.

Означення 4.11. Ланцюг Маркова називається незвідним, якщо всі його стани утворюють один клас сполучності (який в цьому випадку є замкненим).

Якщо ланцюг Маркова має більше ніж один клас сполучності, його вивчення можна звести до дослідження "звуження" ланцюга на різні класи сполучності окремо.

Задачі для самостійного розв'язання до 4.1-4.2

1. Чи є стохастичними наступні матриці:

   а) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$;   б) $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$?

2. Ланцюг Маркова може перебувати у двох станах і заданий графом на рисунку 4.4. Початковий розподіл ланцюга $\overleftarrow{p}^0 = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$. Знайти ймовірність того, що на n-му кроці ланцюг буде в стані 1.

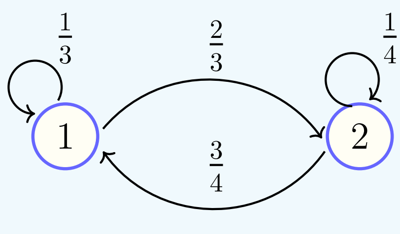

Рис. 4.4. Граф до ланцюга Маркова із задачі 2.

3. Нехай ланцюг Маркова $(\xi_n, n \geq 0)$ має матрицю перехідних ймовірностей A із задачі 1 (а). Вважаючи, що в нульовий момент часу ланцюг перебував у стані 3 з ймовірністю 1, знайти:

   а) $\mathbb{P}\{\xi_0 = 3, \xi_1 = 2, \xi_2 = 1, \xi_3 = 2\}$;

   б) $\mathbb{P}\{\xi_0 = 3, \xi_2 = 1\}$;

   в) $\mathbb{P}\{\xi_n = 2\}$.

4. Кіт Том сидить на місці, миша Джеррі пересувається клітинами (див. рис. 4.5), обираючи на кожному кроці одну з сусідніх з рівними ймовірностями. Наприклад, з клітини 5 Джеррі переходить до клітин 2, 4, 6, 8 з імовірностями по 1/4, а з клітини 6 до клітин 3, 5, 9 з імовірностями по 1/3 і т. д. З клітини 7 він більше ніколи нікуди не перейде. Потрапивши у клітину 9, він рятується назавжди.

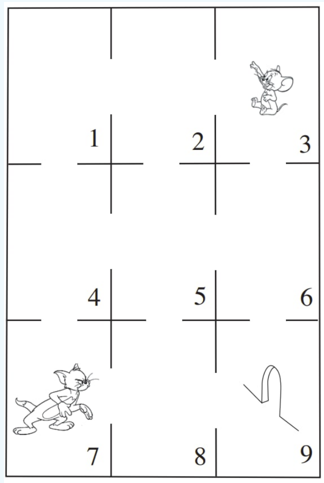

Рис. 4.5. Том і Джеррі

   а) Намалювати граф ланцюга Маркова, що задає пересування Джеррі.

   б) Записати матрицю перехідних імовірностей цього ланцюга.

   в) Знайти ймовірність того, що після четвертого кроку Джеррі ще буде жити (тобто не потрапить в клітину 7).

г) Знайти ймовірність того, що рівно на шостому кроці подорож Джеррі закінчиться одним з двох можливих результатів (тобто Джеррі потрапить в клітину 7 або в клітину 9).

д) Якщо відомо, що рівно на шостому кроці подорож Джеррі закінчилася, знайти ймовірність того, що на третьому кроці він відвідав клітину 8.

е) Класифікувати стани ланцюга Маркова.

4.3. Ймовірності потрапляння в підмножину станів

Нехай $(\xi_n, n \geq 0)$ — ланцюг Маркова, E — множина станів цього ланцюга, $A \subset E$ — деяка підмножина. Нехай також

$$\tau = \min\Big\{n \geq 0 : \quad \xi_n \in A\Big\}.$$

Випадкова величина τ описує момент часу, в який ланцюг Маркова вперше потрапляє в підмножину A.

Надалі позначатимемо символом $\mathbb{P}_i$ ймовірність події, пов'язаної з еволюцією ланцюга Маркова, якщо ланцюг стартував зі стану i. Покладемо

$$h_i = \mathbb{P}_i\Big\{\tau < \infty\Big\}, \quad i \in E.$$

Величини h_i, $i \in E$, описують ймовірності того, що ланцюг колись потрапить в підмножину A, якщо ланцюг Маркова стартував зі стану i.

Для визначеності будемо вважати, що множина станів E є скінченою, $E = \{1, 2, \ldots, N\}$.

Теорема 4.2. *Набір ймовірностей* $(h_1 \quad h_2 \quad \ldots \quad h_N)$ *є найменшим невід'ємним розв'язком системи:*

$$\begin{cases} h_i = 1, & i \in A, \\ h_i = \sum_{j \in E} p_{ij} h_j, & i \notin A. \end{cases} \tag{4.3}$$

Зауваження 4.3. В загальному випадку, набори розв'язків h_i, $i \in E$, не можна порівнювати (в просторі векторів не визначено відношення порядку). Але, як розв'язки системи (4.3) найменший невід'ємний розв'язок означає, що для будь-якого іншого розв'язку системи g_i, $i \in E$, виконується співвідношення: $h_i \le g_i$, $i \in E$.

Доведення. *Покажемо спочатку, що ймовірності h_i, $i \in E$, задовольняють систему (4.3). Дійсно, якщо $i \in A$, то $h_i = 1$, оскільки ланцюг Маркова вже в підмножині A. Якщо $i \notin A$, то*

$$h_i = \mathbb{P}_i\Big\{\tau < \infty\Big\} = \sum_{j\in E} \mathbb{P}_i\Big\{\xi_1 = j\Big\}\mathbb{P}\Big\{\tau < \infty \,\Big|\, \xi_0 = i, \xi_1 = j\Big\} =$$

$$= \sum_{j\in E} \mathbb{P}_i\Big\{\xi_1 = j\Big\}\mathbb{P}\Big\{\tau < \infty \,\Big|\, \xi_1 = j\Big\} = \sum_{j\in E} p_{ij}h_j.$$

Нехай тепер $(g_i,\ i \in E)$ — деякий інший невід'ємний розв'язок системи (4.3). Доведемо, що $h_i \le g_i$, для всіх $i \in E$. Якщо $i \in A$, то $1 = h_i \le g_i = 1$, тобто нерівність справедлива. Розглянемо випадок, коли $i \notin A$. Підставимо розв'язки g_i, $i \in E$, у систему (4.3):

$$g_i = \sum_{j_1\in E} p_{ij_1}g_{j_1} = \sum_{j_1\in A} p_{ij_1}g_{j_1} + \sum_{j_1\notin A} p_{ij_1}g_{j_1} = \sum_{j_1\in A} p_{ij_1}\cdot 1 + \sum_{j_1\notin A} p_{ij_1}g_{j_1} =$$

$$= \sum_{j_1\in A} p_{ij_1} + \sum_{j_1\notin A} p_{ij_1}\Big(\sum_{j_2\in E} p_{j_1j_2}g_{j_2}\Big) =$$

$$= \sum_{j_1\in A} p_{ij_1} + \sum_{j_1\notin A} p_{ij_1}\Big(\sum_{j_2\in A} p_{j_1j_2}g_{j_2} + \sum_{j_2\notin A} p_{j_1j_2}g_{j_2}\Big) =$$

$$= \sum_{j_1\in A} p_{ij_1} + \sum_{j_1\notin A} p_{ij_1}\Big(\sum_{j_2\in A} p_{j_1j_2}\cdot 1 + \sum_{j_2\notin A} p_{j_1j_2}g_{j_2}\Big) =$$

$$= \sum_{j_1\in A} p_{ij_1} + \sum_{j_1\notin A} p_{ij_1}\sum_{j_2\in A} p_{j_1j_2} + \sum_{j_1\notin A} p_{ij_1}\sum_{j_2\notin A} p_{j_1j_2}g_{j_2} =$$

$$= \sum_{j_1\in A} p_{ij_1} + \sum_{j_1\notin A} p_{ij_1}\sum_{j_2\in A} p_{j_1j_2} + \sum_{j_1\notin A} p_{ij_1}\sum_{j_2\notin A} p_{j_1j_2}\Big(\sum_{j_3\in E} p_{j_2j_3}g_{j_3}\Big) = \ldots$$

Продовжуючи процедуру, на n-му кроці отримаємо

$$g_i = \sum_{j_1 \in A} p_{ij_1} + \sum_{j_1 \notin A} \sum_{j_2 \in A} p_{ij_1} p_{j_1 j_2} + \sum_{j_1 \notin A} \sum_{j_2 \notin A} \sum_{j_3 \in A} p_{ij_1} p_{j_1 j_2} p_{j_2 j_3} + \ldots$$

$$\ldots + \sum_{j_1 \notin A} \sum_{j_2 \notin A} \ldots \sum_{j_{n-1} \notin A} \sum_{j_n \in A} p_{ij_1} p_{j_1 j_2} \ldots p_{j_{n-1} j_n} +$$

$$+ \sum_{j_1 \notin A} \sum_{j_2 \notin A} \ldots \sum_{j_{n-1} \notin A} \sum_{j_n \notin A} p_{ij_1} p_{j_1 j_2} \ldots p_{j_{n-1} j_n} g_{j_n},$$

де останній доданок є невід'ємним. Крім того, в останній сумі

$$\sum_{j_1 \in A} p_{ij_1} = \mathbb{P}_i\{\tau = 1\},$$

$$\sum_{j_1 \notin A} \sum_{j_2 \in A} p_{ij_1} p_{j_1 j_2} = \mathbb{P}_i\{\tau = 2\},$$

$$\ldots$$

$$\sum_{j_1 \notin A} \sum_{j_2 \notin A} \ldots \sum_{j_{n-1} \notin A} \sum_{j_n \in A} p_{ij_1} p_{j_1 j_2} \ldots p_{j_{n-1} j_n} = \mathbb{P}_i\{\tau = n\},$$

і т.д. Тому

$$g_i \geq \mathbb{P}_i\{\tau = 1\} + \mathbb{P}_i\{\tau = 2\} + \ldots + \mathbb{P}_i\{\tau = n\},$$

тобто

$$g_i \geq \mathbb{P}_i\{\tau \leq n\}.$$

При $n \to \infty$:

$$g_i \geq \mathbb{P}_i\{\tau < \infty\} = h_i,$$

для всіх $i \in E$. *Теорему доведено.*

Приклад 4.4. *В прикладі 4.1 знайти ймовірність потрапляння студента в стан 1, тобто на пари, якщо в нульовий момент часу він перебував в стані 2, тобто вдома.*

Розв'язання. Маємо $E = \{1, 2, 3\}$, $A = \{1\}$,

$$\tau = \min\{n \geq 0 : \xi_n \in A\}, \quad h_i = \mathbb{P}_i\{\tau < \infty\}, \quad i \in E.$$

Розв'язавши систему для ймовірностей h_i, $i = 1, 2, 3$,

$$\begin{cases} h_1 = 1, \\ h_2 = \frac{1}{3}h_1 + \frac{2}{3}h_2, \\ h_3 = \frac{1}{3}h_1 + \frac{1}{3}h_2 + \frac{1}{3}h_3, \end{cases}$$

отримаємо $h_1 = h_2 = h_3 = 1$. Інтуїтивно результат задачі є очевидним: переміщуючись по ланцюгу, студент обов'язково колись попаде в будь-який стан. Зокрема, $h_2 = 1$, тобто з ймовірністю 1 студент колись опиниться на парах. □

Повернемося до прикладу 2.33 про розорення гравців.

Приклад 4.5 (Задача про двох гравців)**.** *Саша та Маша грають у таку азартну гру: по черзі підкидають несиметричну монету з ймовірністю випадіння герба p, а решки — $q = 1 - p$. В кожному раунді обов'язково виграє один з них: якщо випадає герб, Маша віддає Саші 1 грн., якщо решка, Саша віддає Маші 1 грн. Гра продовжується, поки в когось не закінчаться гроші. На початку гри у Саші було a грн., у Маші — b грн. Яка ймовірність, що виграє Саша?*

Розв'язання. Наведену в цьому прикладі гру можна розглядати як ланцюг Маркова. Дійсно, нехай ξ_n — кількість грн. у Саші в момент часу n, $E = \{0, 1, 2, \ldots, (a + b)\}$ — множина станів. Перед початком гри, тобто в нульовий момент часу, Саша має a грн., тобто $\xi_0 = a$ з ймовірністю 1. Далі, в кожний наступний момент часу у Саші стає або на 1 грн. більше з ймовірністю p або на 1 грн. менше з ймовірністю q. Якщо в якийсь момент часу n: $\xi_n = 0$, то Саша збанкрутував і гра закінчується. Якщо ж в якийсь момент часу $\xi_n = a + b$, то Саша виграв всі гроші у Маші і гра теж закінчується. Граф такого ланцюга Маркова зображено на рисунку 4.6.

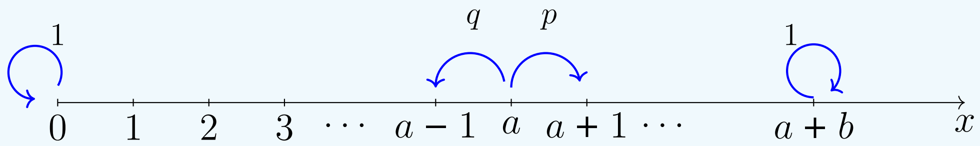

Рис. 4.6. Граф ланцюга Маркова в задачі про двох гравців

Зауважимо, що цей ланцюг має 3 класи сполучності: $\{0\}$, $\big\{1, 2, 3, \ldots, (a+b-1)\big\}$, $\{a+b\}$. При цьому стани 0 та $(a+b)$ є станами поглинання, а значить класи сполучності $\{0\}$ та $\{a+b\}$ є замкненими, тобто суттєвими. Всі стани класу $\big\{1, 2, 3, \ldots, (a+b-1)\big\}$ є несуттєвими, а отже колись ланцюг потрапить або в клас $\{0\}$ або в клас $\{a+b\}$, тобто гра закінчиться.

Покладемо $A = \big\{a+b\big\}$,

$$\tau = \min\big\{n \geq 0 : \ \xi_n \in A\big\} \ \text{ та } \ h_i = \mathbb{P}_i\big\{\tau < \infty\big\}, \quad i \in E.$$

Потрібно знайти ймовірність

$$\mathbb{P}\big\{\text{виграє Саша}\big\} = \mathbb{P}_a\big\{\text{існує } n \geq 0 : \ \xi_n = a+b\big\}.$$

Запишемо систему (4.3):

$$\begin{cases} h_{a+b} = 1, \\ h_i = p h_{i+1} + q h_{i-1}, \quad i \notin A. \end{cases}$$

Крім того, з умови задачі $h_0 = 0$.

Отримали однорідне рекурентне рівняння. Складемо для нього характеристичне рівняння: $\lambda = p\lambda^2 + q$. З теорії рекурентних рівнянь відомо, що загальний розв'язок однорідного рекурентного рівняння можна шукати у вигляді

$$h_i = C_1\lambda_1^i + C_2\lambda_2^i, \quad \text{якщо} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2,$$

та

$$h_i = C_1\lambda^i + C_2 j\lambda^i, \quad \text{якщо} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda,$$

де C_1 та C_2 — деякі сталі.

Характеристичне рівняння $\lambda = p\lambda^2 + q$ має 2 корені: $\lambda_1 = 1$ та $\lambda_2 = \frac{q}{p}$. Розглянемо 2 випадки:

1) $p \neq q$. Тоді $\lambda_1 \neq \lambda_2$ і загальним розв'язком рекурентного рівняння є

$$h_j = C_1 + C_2\Big(\frac{q}{p}\Big)^i.$$

Знайдемо C_1 та C_2 з початкових умов.

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 + C_2\Big(\frac{q}{p}\Big)^{a+b} = 1, \end{cases}$$

звідки $C_1 = \frac{1}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}} = -C_2$. Таким чином,

$$h_i = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

2) $p = q$. Тоді $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ і загальним розв'язком рекурентного рівняння є

$$h_i = C_1 + C_2 i.$$

Знайдемо C_1 та C_2 з початкових умов.

$$\begin{cases} C_1 + C_2 \cdot 0 = 0, \\ C_1 + C_2(a+b) = 1, \end{cases}$$

звідки $C_1 = 0$, $C_2 = \frac{1}{a+b}$. Тому в цьому випадку

$$h_i = \frac{i}{a+b}.$$

Нарешті,

$$h_a = \begin{cases} \dfrac{a}{a+b}, & \text{якщо } p = q = \frac{1}{2}, \\ \dfrac{\left(1 - \frac{q}{p}\right)^a}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}, & \text{якщо } p \neq q. \end{cases}$$

Цікавим в цій задачі є також питання: скільки в середньому раундів триватиме гра? Дати відповідь на це питання ми зможемо в наступному підрозділі. □

Задачі для самостійного розв'язання до 4.3

1. Для ланцюга Маркова з матрицею перехідних ймовірностей

$$\text{а) } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}; \qquad \text{б) } P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

знайти ймовірність потрапляння в стан 1, якщо в нульовий момент часу ланцюг знаходився в стані 3.

2. Для ланцюга Маркова, який задає пересування Джеррі у задачі 4 на стор. 201, знайти ймовірність потрапляння Джеррі у клітину 7.

4.4. Середній час потрапляння в підмножину станів

Нехай $(\xi_n,\ n \geq 0)$ — ланцюг Маркова, E — множина станів цього ланцюга, $A \subset E$ — деяка підмножина. Нехай як і раніше

$$\tau = \min\{n \geq 0 : \ \xi_n \in A\}, \quad \text{та} \quad h_i = \mathbb{P}_i\{\tau < \infty\}, \quad i \in E.$$

По аналогії з позначенням $\mathbb{P}_i$ позначатимемо через $\mathbb{E}_i\tau$ — математичне сподівання в.в. величини τ, якщо ланцюг стартував зі стану i, а саме нехай

$$m_i = \mathbb{E}_i\tau, \quad i \in E.$$

Величини m_i означають середній час потрапляння в підмножину A, якщо ланцюг Маркова стартував зі стану i.

Очевидно, якщо $i \in A$, то $m_i = 0$, бо ланцюг вже знаходиться в підмножині A. Крім того, якщо $h_i < 1$, то існує ненульова ймовірність, що $\tau = \infty$, а отже $m_i = \infty$.

Для визначеності будемо вважати, що множина станів E є скінченою, $E = \{1, 2, \ldots, N\}$.

Теорема 4.3. *Набір величин* $(m_1 \ \ m_2 \ \ \ldots \ \ m_N)$ *є найменшим невід'ємним розв'язком системи:*

$$\begin{cases} m_i = 0, & i \in A, \\ m_i = 1 + \sum_{j \in E} p_{ij} m_j, & i \notin A. \end{cases} \tag{4.4}$$

Доведення. *Те, що величини m_i, $i \in E$, задовольняють систему (4.4), досить зрозуміло. Дійсно, якщо $i \in A$, то $m_i = 0$, оскільки ланцюг Маркова вже в підмножині A. Якщо $i \notin A$, то ланцюг Маркова повинен зробити принаймні 1 крок в якийсь стан $j \in E$, і тому $m_i = 1 + \sum_{j \in E} p_{ij} m_j$.*

Нехай тепер $(g_i,\, i \in E)$ — *деякий інший невід'ємний розв'язок системи* (4.4). *Доведемо, що* $m_i \leq g_i$, *для всіх* $i \in E$. *Якщо* $i \in A$, *то* $0 = m_i \leq g_i = 0$, *тобто нерівність справедлива. Розглянемо випадок, коли* $i \notin A$. *Підставимо розв'язки* g_i, $i \in E$, *у систему* (4.4):

$$g_i = 1 + \sum_{j_1 \in E} p_{ij_1} g_{j_1} = 1 + \sum_{j_1 \in A} p_{ij_1} g_{j_1} + \sum_{j_1 \notin A} p_{ij_1} g_{j_1} =$$

$$= 1 + \sum_{j_1 \in A} p_{ij_1} \cdot 0 + \sum_{j_1 \notin A} p_{ij_1} g_{j_1} = 1 + \sum_{j_1 \notin A} p_{ij_1} g_{j_1} =$$

$$= 1 + \sum_{j_1 \notin A} p_{ij_1} \Big(1 + \sum_{j_2 \in E} p_{j_1 j_2} g_{j_2} \Big) =$$

$$= 1 + \sum_{j_1 \notin A} p_{ij_1} \Big(1 + \sum_{j_2 \in A} p_{j_1 j_2} \cdot 0 + \sum_{j_2 \notin A} p_{j_1 j_2} g_{j_2} \Big) =$$

$$= 1 + \sum_{j_1 \notin A} p_{ij_1} + \sum_{j_1 \notin A} \sum_{j_2 \notin A} p_{ij_1} p_{j_1 j_2} g_{j_2} =$$

$$= 1 + \sum_{j_1 \notin A} p_{ij_1} + \sum_{j_1 \notin A} \sum_{j_2 \notin A} p_{ij_1} p_{j_1 j_2} \Big(1 + \sum_{j_3 \in E} p_{j_2 j_3} g_{j_3} \Big) =$$

$$= 1 + \sum_{j_1 \notin A} p_{ij_1} + \sum_{j_1 \notin A} \sum_{j_2 \notin A} p_{ij_1} p_{j_1 j_2} + \sum_{j_1 \notin A} \sum_{j_2 \notin A} p_{ij_1} p_{j_1 j_2} \Big(\sum_{j_3 \in A} p_{j_2 j_3} \cdot 0 + \sum_{j_3 \notin A} p_{j_2 j_3} g_{j_3} \Big) =$$

$$\ldots = 1 + \sum_{j_1 \notin A} p_{ij_1} + \sum_{j_1 \notin A} \sum_{j_2 \notin A} p_{ij_1} p_{j_1 j_2} + \sum_{j_1 \notin A} \sum_{j_2 \notin A} \sum_{j_3 \notin A} p_{ij_1} p_{j_1 j_2} p_{j_2 j_3} + \ldots +$$

$$+ \sum_{j_1 \notin A} \sum_{j_2 \notin A} \cdots \sum_{j_{n-1} \notin A} p_{ij_1} p_{j_1 j_2} \cdots p_{j_{n-2} j_{n-1}} + \sum_{j_1 \notin A} \sum_{j_2 \notin A} \cdots \sum_{j_n \notin A} p_{ij_1} p_{j_1 j_2} \cdots p_{j_{n-1} j_n} g_n,$$

де останній доданок суми є невід'ємним. Крім того, помітимо, що

$$1 = \mathbb{P}_i \big\{ \tau \geq 1 \big\},$$

$$\sum_{j_1 \notin A} p_{ij_1} = \mathbb{P}_i \big\{ \tau \geq 2 \big\},$$

$$\sum_{j_1 \notin A} \sum_{j_2 \notin A} p_{ij_1} p_{j_1 j_2} = \mathbb{P}_i \{ \tau \geq 1 \},$$

$$\ldots$$

$$\sum_{j_1 \notin A} \sum_{j_2 \notin A} \ldots \sum_{j_{n-1} \notin A} p_{ij_1} p_{j_1 j_2} \ldots p_{j_{n-2} j_{n-1}} = \mathbb{P}_i\{\tau \geq n\}.$$

Тоді

$$g_i \geq \sum_{l=1}^{n} \mathbb{P}_i\left\{\tau \geq l\right\}.$$

При $n \to \infty$*:*

$$g_i \geq \sum_{l=1}^{\infty} \mathbb{P}_i\left\{\tau \geq l\right\} =$$

$$= \mathbb{P}_i\left\{\tau = 1\right\} + 2\mathbb{P}_i\left\{\tau = 2\right\} + 3\mathbb{P}_i\left\{\tau = 3\right\} + \ldots =$$

$$= \mathbb{E}_i \tau = m_i, \quad i \in E.$$

Таким чином, $g_i \geq m_i$ *для всіх* $i \in E$*. Теорему доведено.*

Приклад 4.6. *В прикладі 4.1 знайти середній час потрапляння студента в стан 1, тобто на пари, якщо в нульовий момент часу він перебував в стані 2, тобто вдома.*

Розв'язання. 1 спосіб. Маємо $E = \{1, 2, 3\}$, $A = \{1\}$,

$$\tau = \min\left\{n \geq 0 : \xi_n \in A\right\}, \quad m_i = \mathbb{E}_i \tau, \quad i \in E.$$

Розв'язавши систему для величин m_i, $i = 1, 2, 3$,

$$\begin{cases} m_1 = 0, \\ m_2 = 1 + \frac{1}{3} m_1 + \frac{2}{3} m_2, \\ m_3 = 1 + \frac{1}{3} m_1 + \frac{1}{3} m_2 + \frac{1}{3} m_3, \end{cases}$$

отримаємо $m_1 = 0$, $m_2 = m_3 = 3$. Зокрема, $m_2 = 3$, тобто зі стану 2 в стан 1 студент потрапить в середньому за 3 кроки.

2 спосіб. Обчислимо середній час не застосовуючи теорію ланцюгів Маркова. Дійсно, зі стану 2 студент може перейти в стан 1 з ймовірністю $\frac{1}{3}$ або залишитись в стані 2 з ймовірністю $\frac{2}{3}$. Таким чином, нехай в.в. η — номер кроку, на якому студент вперше зі стану 2 вийшов в стан 1. Очевидно, $\eta \sim Geom^{(2)}\left(\frac{1}{3}\right)$. І ми знаємо, що $\mathbb{E}\eta = \frac{1}{p} = 3$. □

Приклад 4.7. *Знайти середню тривалість гри в прикладі 4.5 за умови, що $p = q = \frac{1}{2}$.*

Розв'язання. Нагадаємо, що в цій задачі $E = \{0, 1, 2, \ldots, a + b\}$. Покладемо $A = \{0, a + b\}$,

$$\tau = \min\{n \geq 0 : \ \xi_n \in A\}, \quad \text{та} \quad m_i = \mathbb{E}_i \tau, \quad i \in E.$$

Запишемо систему (4.4):

$$\begin{cases} m_0 = 0, \quad m_{a+b} = 0, \\ m_i = 1 + \frac{1}{2} m_{i+1} + \frac{1}{2} m_{i-1}, \quad i \notin A. \end{cases}$$

Застосувавши теорію рекурентних рівнянь, отримаємо, що

$$m_i = (a + b)i - i^2, \quad i \in E.$$

Зокрема, оскільки перед початком гри у Саші було a грн., то $m_a = ab$, тобто в середньому гра триватиме ab раундів. □

Задача 4.1. *Знайти середню тривалість гри в задачі із прикладу 4.5 за умови, що $p \neq q$.*

Приклад 4.8. *Нехай монету підкидають нескінченну кількість разів. На якому в середньому підкиданні вперше з'явиться серія з n гербів підряд?*

Розв'язання. Розглянемо ланцюг Маркова з такими станами:

0 — послідовність закінчується 0 гербами (тобто решкою),

1 — послідовність закінчується одним гербом,

2 — послідовність закінчується двома гербами,

$\ldots$,

n — послідовність закінчується n гербами.

Зрозуміло, що $\xi_0 = 0$. Позначимо

$$A = \{n\}, \quad \tau = \min\{n \geq 0 : \ \xi_n \in A\}$$

та знайдемо $m_0 = \mathbb{E}_0 \tau$. Очевидно, система (4.4) набуває вигляду:

$$\begin{cases} m_n = 0, \\ m_i = 1 + \frac{1}{2} m_{i+1} + \frac{1}{2} m_0, \quad 0 \leq i \leq n - 1. \end{cases}$$

З системи отримаємо

$$m_{n-1} = 1 + \frac{1}{2}m_n + \frac{1}{2}m_0 = 1 + \frac{1}{2}m_0,$$

$$m_{n-2} = 1 + \frac{1}{2}m_{n-1} + \frac{1}{2}m_0 = 1 + \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{2}m_0\Big) + \frac{1}{2}m_0 = \frac{3}{2}\Big(1 + \frac{1}{2}m_0\Big),$$

$$m_{n-3} = 1 + \frac{1}{2}\Big(\frac{3}{2}\Big(1 + \frac{1}{2}m_0\Big)\Big) + \frac{1}{2}m_0 = \frac{7}{4}\Big(1 + \frac{1}{2}m_0\Big),$$

$$\ldots,$$

$$m_{n-k} = \frac{2^k - 1}{2^{k-1}}\Big(1 + \frac{1}{2}m_0\Big),$$

звідки при $k = n$:

$$m_0 = 2(2^n - 1).$$

Так, наприклад, щоб отримати 5 гербів підряд, в середньому доведеться підкидати монету $(2^6 - 2) = 62$ рази. □

Задачі для самостійного розв'язання до 4.4

1. Для ланцюга Маркова з матрицею перехідних ймовірностей

$$\text{а) } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}; \qquad \text{б) } P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

   знайти середній час потрапляння в стан 1, якщо в нульовий момент часу ланцюг знаходився в стані 3.

2. Для ланцюга Маркова, який задає пересування Джеррі у задачі 4 на стор. 201, знайти середню тривалість подорожі Джеррі, яким би результатом вона не закінчилася (нагадаємо, що подорож закінчується, якщо Джеррі опиниться в клітині 7 або 9).

3. Нехай гральну кістку підкидають нескінченну кількість разів. Скільки в середньому підкидань треба здійснити, щоб в послідовності очок вперше з'явились три "6" підряд?

4.5. Ергодична теорема Маркова

Нехай $E = \{1, 2, 3, ..., N\}$ — скінченна множина станів, $(\xi_n,\ n \geq 0)$ — однорідний ланцюг Маркова, P — матриця перехідних ймовірностей цього ланцюга.

Теорема 4.4. *Якщо існує* $n_0 \in \mathbb{N}$ *таке, що* $p_{ij}^{(n_0)} > 0$, *для всіх* $i, j \in E$, *то*
1) *існує* $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$, *тобто границя не залежить від початкового стану* i;
2) $\pi_j > 0$, *для всіх* $j \in E$, *та* $\sum_{j=1}^{N} \pi_j = 1$;
3) *набір* $\overleftarrow{\pi} = (\pi_j,\ j = \overline{1, N})$ *є єдиним розв'язком системи*

$$\begin{cases} \overleftarrow{\pi} = \overleftarrow{\pi} P, \\ \sum_{j=1}^{N} \pi_j = 1. \end{cases} \tag{4.5}$$

Доведення. *З підрозділу 4.1 відомо, що матриця перехідних ймовірностей за n кроків* $P^{(n)}$ *насправді дорівнює* P^n. *Спочатку доведемо, що існує*

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_N \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_N \end{pmatrix}.$$

Позначимо $m_j^{(n)} = \min\limits_{1\leq i\leq N} p_{ij}^{(n)}$ *і* $M_j^{(n)} = \max\limits_{1\leq i\leq N} p_{ij}^{(n)}$ *— відповідно мінімальний та максимальний елементи в* j*-му стовпці матриці* P^n. *Покажемо, що для кожного* $j \in E$ *при* $n \to \infty$ m_j *та* M_j *збігаються.*

Розглянемо

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k\in E} p_{ik} p_{kj}^{(n)} \geq \sum_{k\in E} p_{ik} m_j^{(n)} = m_j^{(n)} \sum_{k\in E} p_{ik} = m_j^{(n)},$$

тобто

$$m_j^{(n+1)} \geq m_j^{(n)}, \quad j = \overline{1, N}.$$

Аналогічно,

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k\in E} p_{ik} p_{kj}^{(n)} \leq \sum_{k\in E} p_{ik} M_j^{(n)} = M_j^{(n)} \sum_{k\in E} p_{ik} = M_j^{(n)},$$

тобто
$$M_j^{(n+1)} \le M_j^{(n)}, \quad j = \overline{1, N}.$$
Покажемо, що $M_j^{(n)} - m_j^{(n)} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$

За умовою теореми існує $n_0 \in \mathbb{N}$ *таке, що* $p_{ij}^{(n_0)} \ge \varepsilon > 0$, *для всіх* $i, j \in E$. *Враховуючи це, отримаємо*
$$p_{ij}^{(n_0+n)} = \sum_{k\in E} p_{ik}^{(n_0)} p_{kj}^{(n)} = \sum_{k\in E} p_{kj}^{(n)} \Big(p_{ik}^{(n_0)} - \varepsilon p_{jk}^{(n)} + \varepsilon p_{jk}^{(n)}\Big) =$$
$$= \sum_{k\in E} p_{kj}^{(n)} \Big(p_{ik}^{(n_0)} - \varepsilon p_{jk}^{(n)}\Big) + \sum_{k\in E} p_{kj}^{(n)} \varepsilon p_{jk}^{(n)} \ge \sum_{k\in E} \Big(p_{ik}^{(n_0)} - \varepsilon p_{jk}^{(n)}\Big) m_j^{(n)} + \varepsilon p_{jj}^{(2n)} =$$
$$= m_j^{(n)} \Big(\sum_{k\in E} p_{ik}^{(n_0)} - \varepsilon \sum_{k\in E} p_{jk}^{(n)} \Big) + \varepsilon p_{jj}^{(2n)} = m_j^{(n)}(1-\varepsilon) + \varepsilon p_{jj}^{(2n)}.$$
Отже,
$$p_{ij}^{(n_0+n)} \ge (1-\varepsilon) m_j^{(n)} + \varepsilon p_{jj}^{(2n)},$$
звідки
$$m_j^{(n_0+n)} \ge (1-\varepsilon) m_j^{(n)} + \varepsilon p_{jj}^{(2n)}.$$
Цілком аналогічно
$$M_j^{(n_0+n)} \le (1-\varepsilon) M_j^{(n)} + \varepsilon p_{jj}^{(2n)}.$$

З останніх двох нерівностей випливає, що
$$M_j^{(n_0+n)} - m_j^{(n_0+n)} \le (1-\varepsilon)\Big(M_j^{(n)} - m_j^{(n)}\Big).$$
Тому для будь-якого $k \in \mathbb{N}$,
$$M_j^{(kn_0+n)} - m_j^{(kn_0+n)} \le (1-\varepsilon)^k \Big(M_j^{(n)} - m_j^{(n)}\Big),$$
звідки випливає, що існує
$$\lim_{k\to\infty} \Big(M_j^{(kn_0+n)} - m_j^{(kn_0+n)}\Big) = 0,$$
для всіх $j = \overline{1, N}$. *Останнє співвідношення в свою чергу означає, що послідовність* $\big(M_j^{(n)} - m_j^{(n)}\big)$ *має збіжну підпослідовність.*

Але, вище було показано, що $\left(m_j^{(n)}\right)$ *— зростаюча послідовність, а* $\left(M_j^{(n)}\right)$ *— спадна послідовність. З цього випливає, що* $\left(M_j^{(n)} - m_j^{(n)}\right)$ *— спадна послідовність. Як відомо з курсу математичного аналізу, монотонна послідовність, яка містить збіжну підпослідовність, сама є збіжною, причому до тієї самої границі. Отже,*

$$M_j^{(n)} - m_j^{(n)} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Таким чином, ми довели, що гранична матриця має однакові елементи у кожному рядку, тобто при $n \to \infty$

$$P^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_N \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_N \end{pmatrix} := \Pi,$$

де $\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$.

Оскільки $p_{ij}^{(n_0)} \geq \varepsilon > 0$, *то* $m_j^{(n_0)} \geq \varepsilon$. *Враховуючи те, що послідовність* $(m_j^{(n)}, n \geq 0)$ *є зростаючою по* n *для будь-якого* $j = \overline{1,N}$, *то* $\pi_j \geq \varepsilon > 0$, $j = \overline{1,N}$. *Крім того,* $\sum_{j\in E} p_{ij}^n = 1$, *а значить* $\sum_{j=1}^N \pi_j = 1$. *Таким чином, ми довели пункт 2) теореми 4.4 і отримали друге з рівнянь системи (4.5).*

З рівності $P^n \cdot P = P^{n+1}$, *при* $n \to \infty$ *випливає, що* $\Pi \cdot P = \Pi$, *а отже*

$$\begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_N \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_N \end{pmatrix} \cdot P = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_N \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_N \end{pmatrix}.$$

Оскільки всі рядки матриці Π *однакові, достатньо це рівняння розглядати для одного рядка:*

$$\overleftarrow{\pi} P = \overleftarrow{\pi}, \tag{4.6}$$

де $\overleftarrow{\pi} = (\pi_1 \;\; \pi_2 \;\; \dots \;\; \pi_N)$. *Підкреслимо, що рівняння (4.6) є одним з рівнянь системи (4.5).*

Нехай тепер $\overleftarrow{p}^0 = (p_1^0 \ \ p_2^0 \ \ \dots \ \ p_N^0)$ *— початковий розподіл ланцюга Маркова. Оскільки* $\overleftarrow{p}^n = \overleftarrow{p}^0 P^n$*, то при* $n \to \infty$

$$\overleftarrow{p}^\infty = \overleftarrow{p}^0 \Pi = (p_1^0 \ \ p_2^0 \ \ \dots \ \ p_N^0) \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_N \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_N \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\pi_1 \sum_{i=1}^N p_i^0 \ \ \pi_2 \sum_{i=1}^N p_i^0 \ \ \dots \ \ \pi_N \sum_{i=1}^N p_i^0\right) = (\pi_1 \ \ \pi_2 \ \ \dots \ \ \pi_N) = \overleftarrow{\pi}.$$

З цих міркувань випливає, що границя не залежить від початкового розподілу ланцюга Маркова.

Нарешті доведемо єдиність розв'язку системи (4.5). Для цього припустимо, що $\overleftarrow{\pi}^*$ *— ще один розв'язок системи. Візьмемо його в якості початкового розподілу ланцюга Маркова. Тоді з рівності* $\overleftarrow{p}^n = \overleftarrow{p}^0 P^n$ *для* $n = 1$ *випливає, що*

$$\overleftarrow{p}^1 = \overleftarrow{p}^0 P = \overleftarrow{\pi}^* P = \overleftarrow{\pi}^*,$$

а отже $\overleftarrow{p}^n = \overleftarrow{\pi}^*$*, і при* $n \to \infty$ *отримаємо* $\overleftarrow{p}^\infty = \overleftarrow{\pi}^*$*. Але* $\overleftarrow{p}^\infty = \overleftarrow{\pi}$*. Прийшли до суперечності. Теорему повністю доведено.*

Приклад 4.9. *Знайти граничний розподіл для ланцюга Маркова із прикладу 4.1.*

Розв'язання. Нехай $\overleftarrow{\pi} = (\pi_1 \ \ \pi_2 \ \ \pi_3)$ — граничний розподіл ланцюга Маркова. Оскільки матриця перехідних ймовірностей ланцюга має вигляд

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

то система (4.5) набуває вигляду

$$\begin{cases} (\pi_1 \ \ \pi_2 \ \ \pi_3) = (\pi_1 \ \ \pi_2 \ \ \pi_3) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1, \end{cases}$$

що еквівалентно наступній

$$\begin{cases} \frac{2}{3}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_3 = \pi_2, \\ \frac{2}{3}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_3 = \pi_3, \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1. \end{cases}$$

Розв'язком системи є ковектор $\overleftarrow{\pi} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. □

Розглянемо тепер приклади ланцюгів Маркова, для яких не виконуються умови теореми 4.4.

Приклад 4.10. *Нехай* $E = \{1, 2\}$ *і ймовірності переходу зі стану в стан вказано на графі ланцюга Маркова на рисунку* 4.7.

Рис. 4.7. Граф ланцюга Маркова з прикладу 4.10.

В цьому випадку матриця перехідних ймовірностей $P = I$, *і умови ергодичної теореми не виконуються. Зрозуміло, що граничний розподіл ланцюга Маркова цілком залежить від початкового розподілу* $\overleftarrow{p}^0$, *і з ним співпадає. При цьому система рівнянь* 4.5 *набуває вигляду:*

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \pi_1 + \pi_2 = 1, \end{cases}$$

звідки отримаємо безліч розв'язків: $\pi_1 + \pi_2 = 1$.

Приклад 4.11. *Нехай* $E = \{1, 2\}$ *і ймовірності переходу зі стану в стан вказано на графі ланцюга Маркова на рисунку* 4.8.

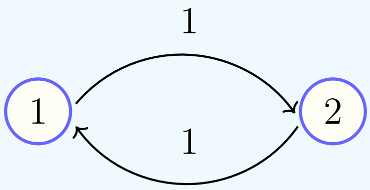

Рис. 4.8. Граф ланцюга Маркова з прикладу 4.11.

В цьому випадку матриця перехідних ймовірностей

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

і знову не виконуються умови ергодичної теореми. При цьому система рівнянь 4.5 *набуває вигляду*

$$\begin{cases} (\pi_1 \;\; \pi_2) = (\pi_1 \;\; \pi_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \pi_1 + \pi_2 = 1, \end{cases}$$

і має єдиний розв'язок: $\pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{2}$. *Але, зрозуміло, що цей розв'язок не є граничним розподілом, оскільки граничного розподілу не існує.*

Задачі для самостійного розв'язання до 4.5

1. Знайти граничний розподіл для ланцюга Маркова, заданого графом на рисунку 4.9.

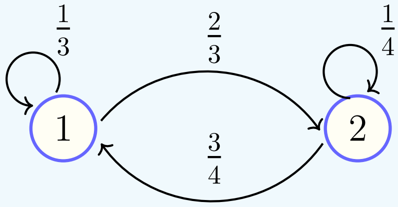

Рис. 4.9. Граф ланцюга Маркова до задачі 1.

2. Знайти граничний розподіл ланцюга Маркова, заданого матрицею перехідних ймовірностей

$$а)\ P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}; \qquad б)\ P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

3. Чи існує граничний розподіл для ланцюга Маркова, заданого матрицею перехідних ймовірностей

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{7}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{10} & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}?$$

Якщо ні, визначити, чи є в цьому ланцюзі замкнені класи сполучності та знайти граничний розподіл окремо для кожного з цих класів.

Список використаної і рекомендованої літератури

[1] Березанський Ю.М. Функціональний аналіз. Серія: університетська бібліотека / Ю.М. Березанський, Г.Ф. Ус, З.Ф. Шефтель. — Львів: Видавець І. Е. Чижиков, 2014. – 559 с.

[2] Вишенський В.А. Комбінаторика: перші кроки. / В.А. Вишенський, М.О. Перестюк. – Камянець-Подільський: Аксіома, 2010. – 324 с.

[3] Гихман И.И. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / И.И. Гихман, А.В. Скороход, М.И. Ядренко. – К.: Вища школа, 1979. – 408 с.

[4] Гнеденко Б.В. Курс теорії ймовірностей: підручник / Б.В. Гнеденко. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2010. – 464 с.

[5] Голомозий В.В. Збірник задач з теорії ймовірностей та математичної статистики: навч. посіб. / В.В. Голомозий, В.М. Карташов, К.В. Ральченко. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2015. – 366 с.

[6] Дороговцев А.Я. Теория ймовірностей. Збірник задач / А.Я. Дороговцев, Д.С. Сільвестров, А.В. Скороход, М.Й. Ядренко. – К.: "Вища школа 1976. – 384 с.

[7] Дороговцев А.Я. Математичний аналіз: підручник (у двох частинах). Частина I / А.Я. Дороговцев. – К.: Либідь, 1993. – 320 с.

[8] Дороговцев А.Я. Математичний аналіз: підручник (у двох частинах). Частина II / А.Я. Дороговцев. – К.: Либідь, 1994. – 304 с.

[9] Карташов М.В. Імовірність, процеси, статистика: навч. посіб./ М.В. Карташов. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008.— 494 с.

[10] Клесов О.І. Вибрані питання теорії ймовірностей та математичної статистики: навч. посіб. / О.І. Клесов. – Київ: "ТВіМС 2010. – 248 с.

[11] Коваленко И.Н. Теория вероятностей: учебник / И.Н. Коваленко, Б.В. Гнеденко. – К.: "Вища школа 1990. – 329 с.

[12] Нікольський Ю.В. Дискретна математика: навч. посіб. / Ю.В. Нікольський, В.В. Пасічник, Ю.М. Щербина. – К.: Видавнича група BHV, 2007. – 368 с.

[13] Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике / Г. Секей. – М.: “Мир”, 1990. – 240 с.

[14] Скороход А.В. Лекції з теорії випадкових процесів / А.В. Скороход. – Київ: Либідь, 1990. – 168 с.

[15] Скороход А.В. Елементи теорії ймовірностей та випадкових процесів / А.В. Скороход. –К.: Вища школа, 1975. – 296 с.

[16] Турчин В.М. Теорія ймовірностей і математична статистика. Основні поняття, приклади, задачі: підручник для студентів ВНЗ. / В.М. Турчин. – Дніпропетровськ: IMA-прес, 2014. – 556 с.

[17] Ядренко М.Й. Дискретна математика: навч. посіб. / М.Й. Ядренко. – Київ: "ТВіМС 2004. – 245 с.

[18] Feller W. An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. I, 3rd edition/ W. Feller. – Wiley, 1968. – 509.

[19] Grimmett G. One Thousand Exercises in Probability. / G. Grimmett, D. Stirzaker. – Oxford University Press, 2001. – 448 p.

[20] Gut A. Probability: A graduate course / A. Gut. – New York: Springer, 2013. – 602 p.

[21] Kelbert M.Ya. Probability and Statistics by example. Vol. I: Basic probability and statistics / M.Ya. Kelbert, Yu.M. Sukhov. – Cambridge University Press, 2005. – 373 p.

[22] Kelbert M.Ya. Probability and Statistics by example. Vol. II: A Primer in Random Processes and their Applications / M.Ya. Kelbert, Yu.M. Sukhov. – Cambridge University Press, 2008. – 504 c.

[23] Stirzaker D. Elementary Probability. / D. Stirzaker. – Cambridge University Press, 2003. – 524 p.