МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
Навчально-науковий інститут прикладного системного аналізу
Кафедра штучного інтелекту

Звіт
про виконання лабораторної роботи №4 з дисципліни «Обчислювальна математика»

Виконав:
студент II курсу, групи КІ-32
Присяжнюк Владислав
Прийняв:
доцент Квітка О. О.

Київ – 2024

Індивідуальний варіант:

Варіант 38	
x_i	y_i
1.00	28.651
1.25	21.410
1.50	15.372
1.75	11.104
2.00	8.517
2.25	6.261
2.50	4.498
2.75	3.297
3.00	2.318

Теоретичні відомсті:

Класичним (прямим) завданням інтерполяції або наближення є визначення значень функції φ(x) на проміжних аргументах (не співпадаючих з заданими вузлами x0, x1, ... xn). Інколи розв'язують обернене завдання, коли за заданими значеннями функції намагаються встановити значення аргументів. Найчастіше наближуючу функцію φ(x) відшукують у вигляді алгебраїчного багаточлена. Такий спосіб ґрунтується на теоремі Вейерштрасса [1] про наближення безперервної функції f(x) на відрізку [a,b] поліномами {φi(x)}. Доведено, що функція f(x) може бути досить добре наближена за допомогою полінома деякого порядку m.

На практиці часто в якості базисних функцій $\{\varphi_i(x)\}$ беруть послідовність ступенів x, тобто $1, x, x^2, \dots, x^m$. Тоді

$$\varphi_0(x) = 1, \qquad \varphi_1(x) = x, \dots, \qquad \varphi_m(x) = x^m.$$

В такому випадку функція $\phi(x)$ є звичайним поліномом ступеня m

$$\varphi(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_m x^m.$$

Для знаходження коефіцієнтів $c_0, c_1, c_2, \dots, c_m$ виразу $\phi(x)$, можна ввести вимогу до наближуючої функції, тобто

$$\varphi(x_i) = f(x_i),\ i = 0, \dots, n$$

і сформувати систему з (n+1) лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\varphi_0(x_0)c_0 + \varphi_1(x_0)c_1 + \dots + \varphi_m(x_0)c_m = f(x_0), \qquad (4.3)$$
$$\varphi_0(x_1)c_0 + \varphi_1(x_1)c_1 + \dots + \varphi_m(x_1)c_m = f(x_1),$$
$$\dots$$
$$\varphi_0(x_n)c_0 + \varphi_1(x_n)c_1 + \dots + \varphi_m(x_n)c_m = f(x_n).$$

Завдання:

Застосуємо таблицю щоб отримати значення які будуть далі використані для побудови матриці Вандермонда. Кожен стовпець таблиці відповідає одному з елементів цієї матриці.

i	1	x	x^2	x^3	x^4	y
0	1	1	1	1	1	28.651
1	1	1.50	2.25	3.375	5.0625	15.372
2	1	2.00	4.00	8.00	16.00	8.517
3	1	2.50	6.25	15.625	39.0625	4.498
4	1	3.00	9	27.00	81	2.318

Всі значення x унікальні, тобто співпадання відсутні, що означає що матриця Вандермонда має не нульовий визначник.

Матриця Вандермонда створюється на основі значень аргументів x. Кожен рядок цієї матриці містить 1, x, x^2, x^3, x^4 для відповідного значення x.

Система рівнянь для знаходження коефіцієнтів:

- Вектор значень функції Y формується з відповідних значень y з таблиці.
- Щоб знайти вектор коефіцієнтів C, обчислюється обернена матриця V^-1

$$V = CY, \quad C = V^{-1}Y$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1.50 & 2.25 & 3.375 & 5.0625 \\ 1 & 2.00 & 4.00 & 8.00 & 16.00 \\ 1 & 2.50 & 6.25 & 15.625 & 39.0625 \\ 1 & 3.00 & 9 & 27.00 & 81 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 28.651 \\ 15.372 \\ 8.517 \\ 4.498 \\ 2.318 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 101.788 \\ -123.025 \\ 65.036 \\ -16.875 \\ 1.727 \end{pmatrix}$$

У результаті отримуємо значення коефіцієнтів, отримані значення записуємо у вигляді полінома:

$$P(x) = 101.788 - 123.025x + 65.036x^2 - 16.875x^3 + 1.727x^4$$

Щоб перевірити правильність поліному підставимо значення x^6:

$$P(2.50) = 101.788 - 123.025(2.50) + 65.036(2.50)^2 - 16.875(2.50)^3 + 1.727(2.50)^4$$

$$P(2.50) = 4.499$$

Отримане значення $P(2.50)$ збігається із значенням функції у наданній таблиці індивідуального завдання.

Заповнимо наступну таблицю значеннями розрахованими за допомогою поліному Лагранжа максимального степеня, та другого степеня.

$$P(x) = 101.788 - 123.025x + 65.036x^2 - 16.875x^3 + 1.727x^4$$

$$P(x) = 101.788 - 123.025x + 65.036x^2$$

Варіант №38				
i	x_i	y_i(із завдання)	Метод Лагранжа	
			$P_n(x_i)$	$P_2(x_i)$
0	1.00	28.651	28.651	28.651
1	1.25	21.410	21.234	20.892
2	1.50	15.372	15.372	15.133
3	1.75	11.104	11.465	11.374
4	2.00	8.517	8.517	8.517
5	2.25	6.261	6.324	6.562
6	2.50	4.498	4.498	4.607
7	2.75	3.297	3.253	3.463
8	3.00	2.318	2.318	2.318

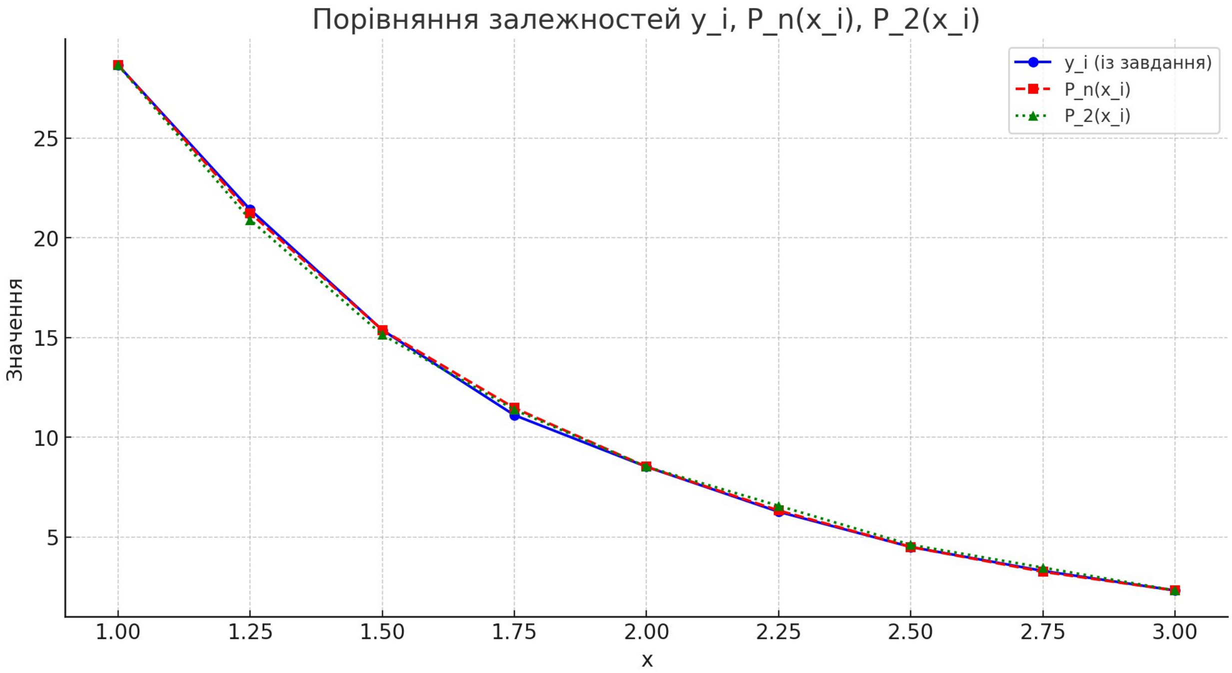

Рис 1.1 - Порівняння залежностей y_i, $P_n(x_i)$, $P_2(x_i)$

Частина 2

Використаємо значення аргументів x_i з таблиці 4.1 індивідуального завдання, для побудови таблиці скінченних різниць.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$	$\Delta^7 y$	$\Delta^8 y$
1.0	28.651	-7.241	1.203	0.567	-0.656	-0.605	3.378	-7.756	13.423
1.25	21.410	-6.038	1.770	-0.089	-1.261	2.773	-4.378	5.667	
1.50	15.372	-4.268	1.681	-1.350	1.512	-1.605	1.289		
1.75	11.104	-2.587	0.331	0.162	-0.093	-0.316			
2.00	8.517	-2.256	0.493	0.069	-0.409				
2.25	6.261	-1.763	0.562	-0.339					
2.50	4.498	-1.201	0.222						
2.75	3.297	-0.979							
3.00	2.318								

Побудова таблиці скінченних різниць дозволяє відобразити послідовні зміни значень функції між сусідніми вузлами. Ця таблиця є основою для обчислення інтерполяційного полінома в скінченно-різницевій формі.

Значення Δy (перші різниці) зменшуються, але не стабілізуються. Це вказує на нерівномірність зміни функції. Значення $\Delta^2 y$ (другі різниці) також спочатку коливаються, але поступово зменшуються, хоча і не до нуля. Для

$\Delta^3 y$ і вищих порядків різниці починають демонструвати сильні коливання, що вказує на наявність шуму в даних. Використання поліномів високого порядку (понад 3-й) недоцільне, оскільки значення вищих різниць нестабільні. Поліном другого чи третього порядку є оптимальним для опису цих даних, оскільки вони забезпечують збалансовану точність і стабільність.

Побудуємо інтерполяційний поліном другого порядку і розрахуємо його значення за однією з скінченно-різницевих формул для наведених нижче аргументів:

Метод Гауса

Розрахуємо за формулою Гауса значення $P_2(x_i)$:

$$P_2(x) = f_0 + t\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0$$

$$t = \frac{x_i - x_0}{h}$$

а) у середині інтервалу (x_3, x_4):

Спочатку обрахуємо середину інтервалу:

$$x_i = \frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{1.75 + 2.0}{2} = 1.875$$

Обрахуємо t (положення точки x_i відносно центральної точки x_0):

$$t = \frac{x_i - x_0}{h} = \frac{1.875 - 1.75}{0.25} = 0.5$$

Підставимо у формулу Гауса:

$$P_2(1.875) = 11.104 + (0.5)(-2.587) + \frac{0.5(0.5-1)}{2}(0.331)$$

$$P_2(1.875) \approx 9.769$$

б) у середині інтервалу (x_4, x_5):

Обрахуємо середину інтервалу:

$$x_i = \frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{2.00 + 2.25}{2} = 2.125$$

Обрахуємо t (положення точки x_i відносно центральної точки x_0):

$$t = \frac{x_i - x_0}{h} = \frac{2.125 - 2.0}{0.25} = 0.5$$

Підставимо у формулу Гауса:

$$P_2(2.125) = 8.517 + (0.5)(-2.256) + \frac{0.5(0.5-1)}{2}(0.493)$$

$$P_2(1.875) \approx 7.327$$

Оскільки в обох випадках точка знаходиться рівновіддалено між точками заданого інтервалу, то можна виористовувати як першу, так і другу формулу Гауса, залежно від зручності.

Для визначення порядку полінома, вищого за другий треба проаналізувати таблицю скінченних різниць, як видно на ній значення порядка $\Delta^3 y$ стабілізуються, це означає, що поліном третього порядку буде достатнім для обчислення.

а) у середині інтервалу (x_3, x_4):

Знаємо що середина інтервалу буде $x_i = 1.875$ а $t = 0.5$. Центральною точкою вибираємо x_3. Застосуємо першу формулу Гауса:

$$P_3(1.875) = 11.104 + (0.5)(-2.587) + \frac{(0.5)(0.5-1)}{2}(0.331) + \frac{(0.5)(0.5-1)(0.5-2)}{6}(0.162)$$

$$P_3(1.875) \approx 9.779$$

б) у середині інтервалу (x_4, x_5):

Використаємо попередньо знайденні значення що $x_i = 2.125$ а $t = 0.5$, а центральну точку оберемо 2.0, та застосуємо першу формулу Гауса.

$$P_3(2.125) = 8.517 + (0.5)(-2.256) + \frac{(0.5)(0.5-1)}{2}(0.493) + \frac{(0.5)(0.5-1)(0.5-2)}{6}(0.069)$$

$$P_3(2.125) \approx 7.332$$

Для обох точок використовувалась перша формула Гауса, оскільки обидві точки знаходяться праворуч від центральних точок, але можна було використати і другу формулу Гауса якби для центральної точки обиралась права границя інтервалу.

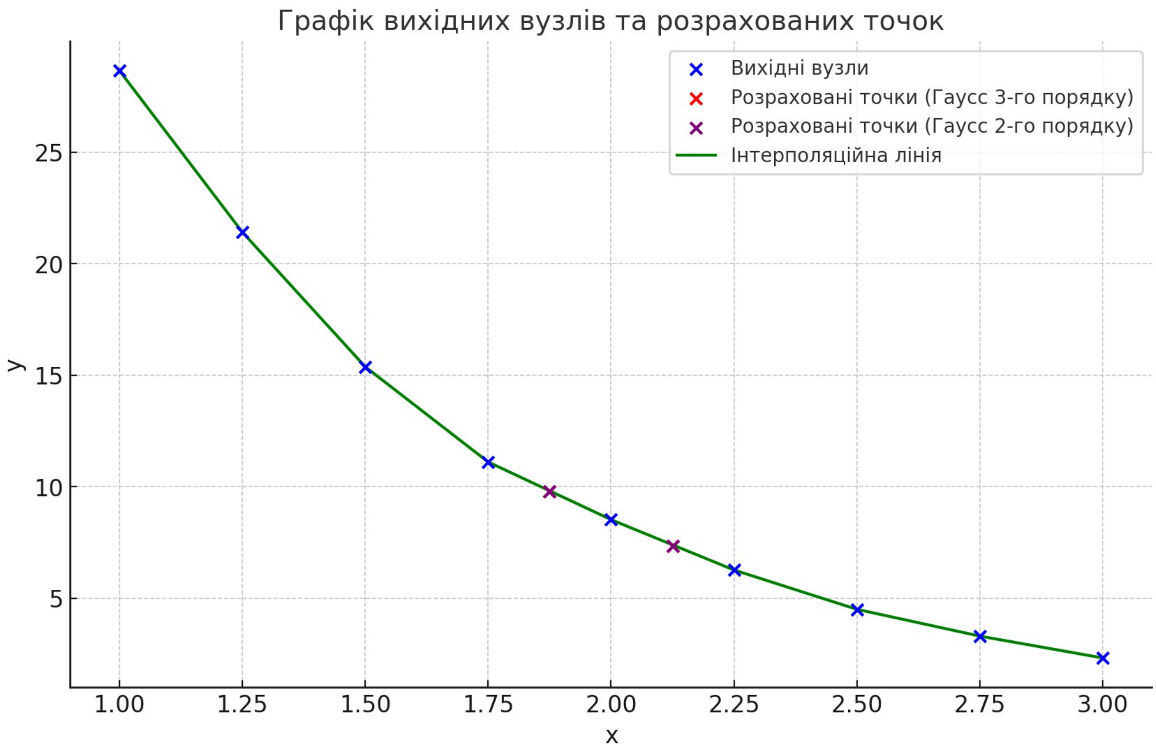

Рис 1.2 - Графік вихідних вузлів та розрахованих точок за інтерполяційними поліномами.

Обидва полінома показують гарну відповідність до вихідних вузлів. Поліном третього порядку краще описує поведінку функції, оскільки враховує більше членів скіннчених різниць але оскільки різниця настільки маленька то графік не відображає візуальної різниці.

Метод Ньютона

Побудуємо інтерполяційний поліном другого порядку за допомогою методу Ньютона і розрахуємо його значення. Формула методу Ньютона для інтерполяції полінома n порядка при рівномірно розташованих вузлів (наш випадок) та використанні таблиці скінченних різниць виглядає:

$$P_n(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{(x - x_0)}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{h^2} + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x - x_{n-1})}\}\{h^n\}$$

Де y_0 – значення функції в x_0, h – крок між вузлами.

а) у середині інтервалу (x_0, x_1):

$$x_0 = 1.0 \;\; x_1 = 1.25$$

$$y_0 = 28.651 \; \Delta y_0 = -7.241 \; \Delta^2 y_0 = 1.203$$

$$P_2(1.125) = 28.651 + (-7.241) \frac{(1.125 - 1.0)}{0.25} + \frac{1.203}{2} \frac{(1.125 - 1.0)(1.125 - 1.25)}{0.25^2}$$

$$P_2(1.125) \approx 24.880$$

б) у середині інтервалу (x_7, x_8):

$$x_7 = 2.75 \;\; x_8 = 3.0$$

$$y_7 = 3..297 \; \Delta y_7 = -\,0.979 \; \Delta^2 \; y_7 = 0.222$$

$$P_2(2.875) \;=\; 3.297 \;+\; (-\,0.979) \;\frac{(2.875 \;-\; 2.75)}{0.25} \;+\; \frac{0.222}{2} \;\frac{(2.875 \;-\; 2.75)\,(2.875 \;-\; 2.5)}{0.25^2}$$

$$P_2(2.875) \approx 2.779$$

В першому завданні була використана формула інтерполяції вперед, в другому інтерполяції назад, в обох випадках відстань між межами інтервалу була однакова і можна було обрати будь яку формулу.

Побудуємо поліном 3 порядку для обох завдань за такими самими причинами що для методу Гауса, стабільність яка була помітна у таблиці.

а) у середині інтервалу (x_0, x_1):

$$x_0 = 1.0 \;\; x_1 = 1.25$$

$$y_0 = 28.651 \; \Delta y_0 = -\,7.241 \; \Delta^2 \; y_0 = 1.203 \; \Delta^3 \; y_0 = 0.567$$

$$P_3(1.125) \;=\; 28.651 \;+\; (-\,7.241) \;\frac{(1.125 \;-\; 1.0)}{0.25} \;+\; \frac{1.203}{2} \;\frac{(1.125 \;-\; 1.0)\,(1.125 \;-\; 1.25)}{0.25^2}$$

$$P_3(1.125) \;=\; 24.915$$

б) у середині інтервалу (x_7, x_8):

$$x_7 = 2.75 \;\; x_8 = 3.0$$

$$y_7 = 3..297 \; \Delta y_7 = -\,0.979 \; \Delta^2 \; y_7 = 0.222 \; \Delta^3 \; y_7 = -\,0.339$$

$$P_3(2.875) \;=\; 3.297 \;+\; (-\,0.979) \;\frac{(2.875 \;-\; 2.75)}{0.25} \;+\; \frac{0.222}{2} \;\frac{(2.875 \;-\; 2.75)\,(2.875 \;-\; 2.5)}{0.25^2}$$

$$P_3(2.875) \;=\; 2.758$$

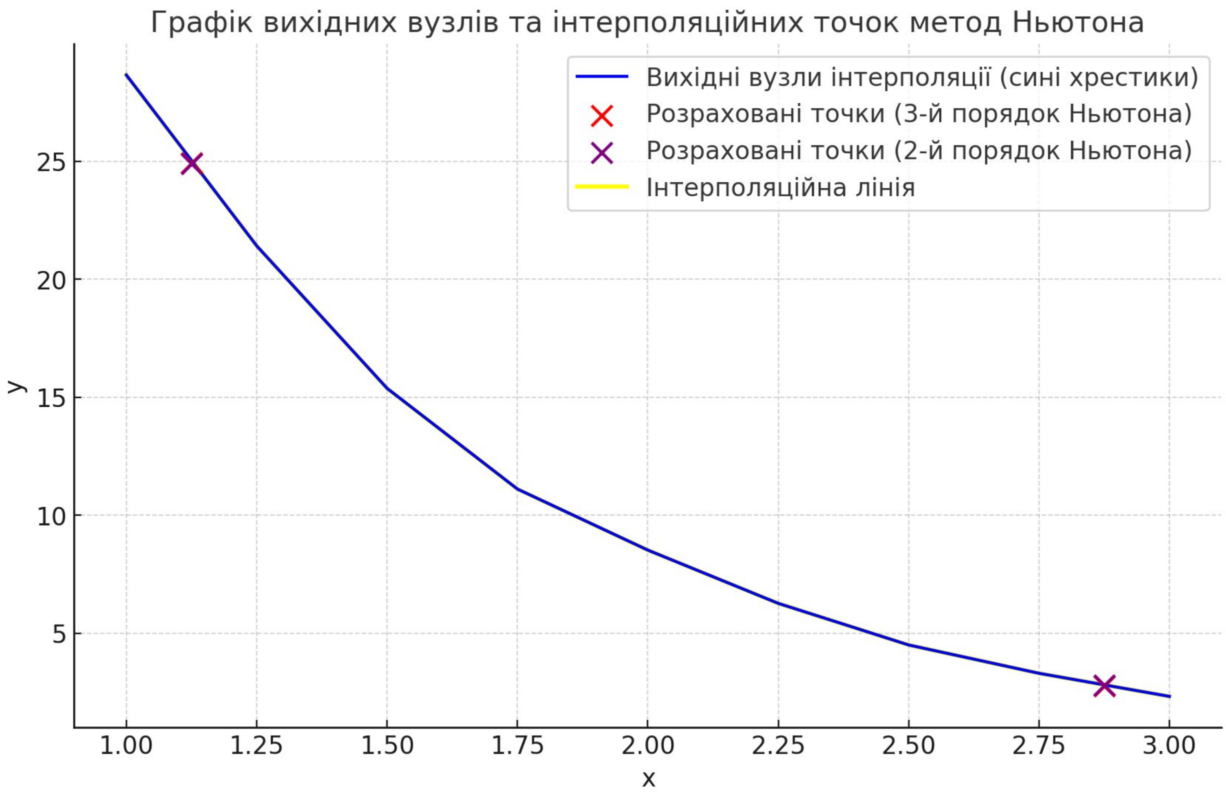

Рис 1.3 - Графік вихідних вузлів та розрахованих точок за інтерполяційними поліномами розрахованими методом Ньютона.

Метод Ньютона дозволяє використовувати таблицю скінченних різниць, що спрощує розрахунки, особливо для рівномірно розташованих вузлів. Використання формул інтерполяції вперед та назад дає змогу ефективно обчислювати значення функції в будь-якій точці, залежно від її розташування відносно вузлів. Поліноми 3-го порядку в обох методах (Гауса та Ньютона) показали лише незначне покращення точності порівняно з поліномами 2-го порядку, що є оптимальним компромісом між точністю та стабільністю.

Частина 3

Індивідуальне завдання:

$$3x \times \log_{10}(2x + 0.5) - 10$$

Використовуючі задану функцію побудуємо таблицю вузлів інтерполювання:

i	x_i	$y_i = f(x_i)$
0	1.50	-7.552

1	1.70	-6.986
2	1.90	-6.389
3	2.10	-5.766
4	2.30	-5.118
5	2.50	-4.447
6	2.70	-3.756
7	2.90	-3.046
8	3.10	-2.317

Оскільки кількість вузлів інтерполяції дорівнює 9, ми знаходимо похідну 9-го порядку функції. Формула похідної 9-го порядку використовується для оцінки похибки інтерполяції за залишковим членом. Для заданої функції було обчислено:

$$f_{(x)}^{(9)} = \frac{15120 \cdot (8x - 9\,(x + 0.25))}{(x + 0.25)^8 \cdot log(10)}$$

На заданому інтервалі вузлів інтерполяції [1.5,3.1] знайдено максимальне значення похідної 9-го порядку:

$$max|f_{(x)}^{(9)}| \approx 159.965$$

Для заданої точки x = 1.85 апріорна похибка інтерполяції оцінюється за формулою залишкового члена:

$$R_n(x) = \frac{max|f_{(x)}^{(9)}|}{9!} \cdot \prod_{i=0}^{8} |x - x_i|$$

$$R_n(x) = \frac{159.965|}{9!} \cdot \prod_{i=0}^{8} |1.85 - x_i| \approx 9.44 \times 10^{-8}$$

Інтерполяційний поліном Лагранжа будується за формулою:

$$P_8(x) = \sum_{i=0}^{8} l_i(x) \cdot y_i$$

де $l_j(x)$ – базисні поліноми Лагранжа які мають вигляд:

$$l_j(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{8} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

Після обчислення базисних поліномів і підстановки значень, отримано поліном:

$$P(x) = 6.389 \cdot 10^{-5} x^8 - 0.00138x^7 + 0.01333x^6 - 0.07647x^5 + 0.29207x^4 - 0.80544x^3 + 1.87502x^2 + 0.04718x - 10.15072$$

Доповнимо таблицю вихідних даних додатковими точками. Розрахуємо в заданих точках значення функції $y_i = f(x_i)$ та інтерполяційного поліному $P_n(x_i)$, а також значення відхилення $|y_i - P_n(x_i)|$.

i	x_i	$y_i = f(x_i)$	$P_n(x_i)$	$\lvert y_i - P_n(x_i)\rvert$
0	1.50	-7.552	-7.551	0.0000000036
1	1.60	-7.273	-7.273	0.0000000041
2	1.70	-6.986	-6.985	0.0000000037
3	1.80	-6.690	-6.691	0.0000000021
4	1.90	-6.389	-6.389	0.0000000013
5	2.00	-6.081	-6.080	0.0000000072
6	2.10	-5.766	-5.765	0.0000000163
7	2.20	-5.445	-5.444	0.0000000293
8	2.30	-5.118	-5.117	0.0000000472
9	2.50	-4.447	-4.447	0.0000000588
10	2,60	-4.104	-4.104	0.0000000061
11	2.70	-3.756	-3.756	0.0000000067
12	2.80	-3.403	-3.403	0.0000000015
13	2.90	-3.046	-3.045	0.0000000142
14	3.10	-2.317	-2.317	0.0000000151

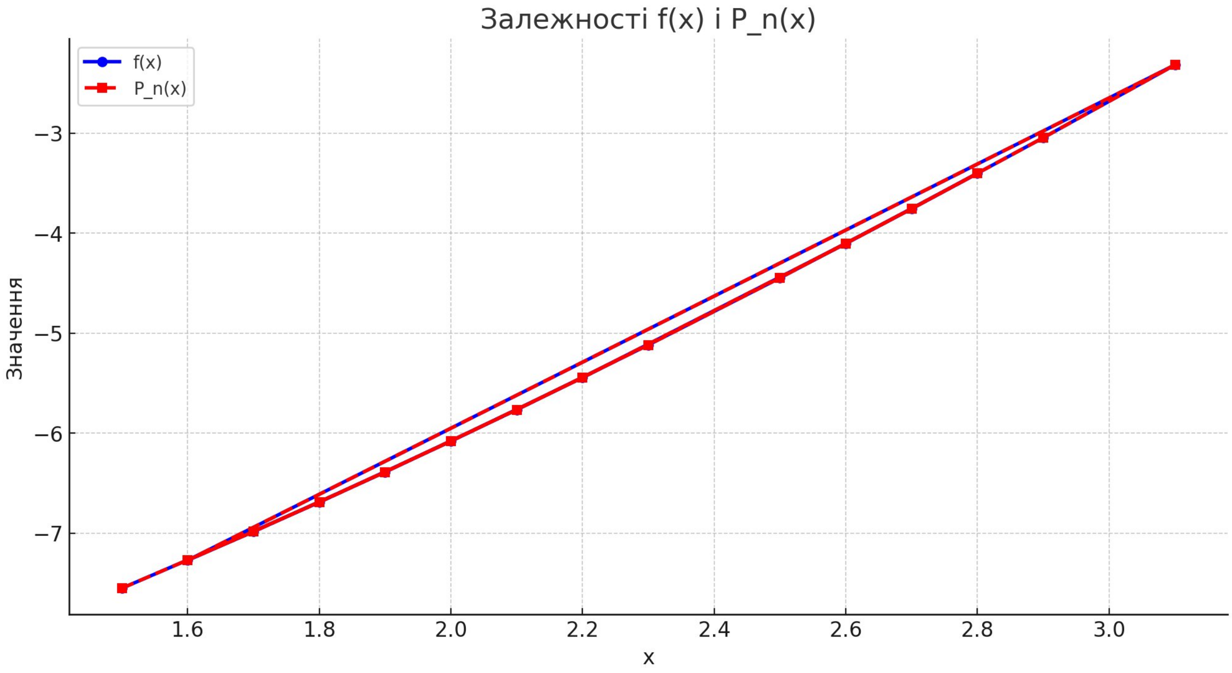

Рис 1.4 – Таблиця залежності $y_i = f(x_i)$ та $P_n(x_i)$

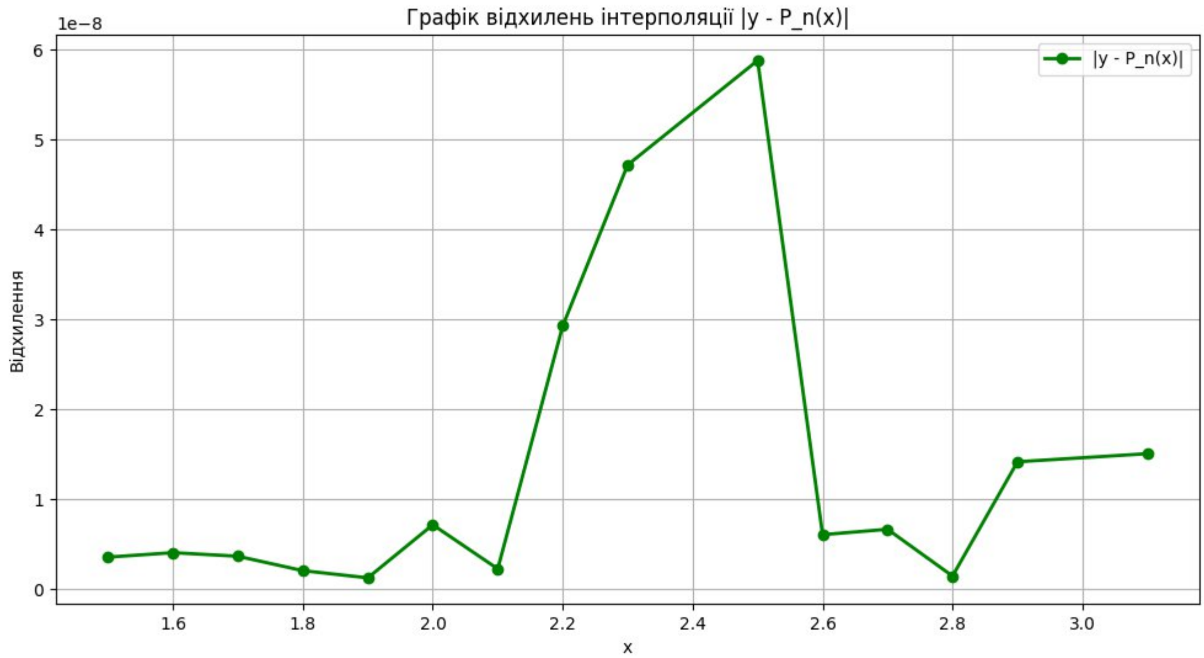

Рис 1.5 – Графік відхилень інтерполяції

Апостеріорна похибка як помітно на графіку та дивлячись на таблицю складає 5.88×10^{-8}, що є меньше ніж апріорна похибка 9.44×10^{-8}, що показує що апріорна похибка перевищує фактичну похибку, що вказує на обережність її як теоретичну межу. Апріорна похибка є теоретичною межою та зазвичай може бути занадто обережною.

Висновки:

Основна перевага методу Лагранжа те що він підходить коли вузли нерівномірно розташовані, на відміну від методу Гауса який працює лише для рівномірно розташованих вузлів. Також метод Гауса залежить від правильно обраної центральної точки, в нашому випадку центральна точка була обрана як найближча сторона інтервалу від центральної точки. Проте, метод Лагранжа може бути слкадним для великої кількості вузлів, тому обчислювально дорогий через використання всіх вузлів, замість використання тільки вузлів навколо центральної точки.

Апріорна похибка є обережною теоретичною оцінкою, яка в нашому випадку була вижча за апостеріорну (фактичну) похибку інтерполяції.