

Національна академія наук України  
Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова

Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут»

**В.М. Калита, В.М. Локтєв**

**Загальна фізика**  
**Коливання та хвильові процеси**  
**Модульне навчання**

Київ 2012

## ПЕРЕДМОВА

В посібнику, виходячи з загальних уявлень, викладено розділ загальної фізики «Коливання та хвильові процеси». Представлення матеріалу відповідає рівню університетського курсу загальної фізики для інженерних спеціальностей та діючих на сьогоднішній день навчальних програм технічних університетів. Посібник адаптовано до вимог Болонського процесу.

В посібнику викладено механічні та електричні коливання, механічні та електромагнітні хвилі, а також хвильова оптика. Очевидно, що коливання тіла, яке висить на пружині, і коливання електромагнітного поля в коливальному контурі в своїй основі спираються на абсолютно різні фізичні явища. Але, як це зроблено в посібнику, опис механічних та електромагнітних коливань та хвиль можна здійснити з єдиної точки зору. Такий підхід дозволяє продемонструвати студентам – майбутнім інженерам – універсальність фізичного підходу для опису різних за своєю сутністю фізичних явищ.

Коливання та хвилі супроводжують протікання абсолютної більшості фізичних процесів. Будь-які збудження стану фізичного об'єкта породжують коливальні та хвильові процеси. Знання цього розділу є обов'язковим для сучасного інженера, адже без відповідних знань неможливе успішне оволодіння новітніми галузями техніки. Викладені в цьому розділі фізичні явища необхідні для бакалаврів всіх спеціальних дисциплін технічного профілю.

Вивчення розділу курсу загальної фізики «Коливання та хвилі» потребують уявлень про «Механіку» та «Електромагнетизм». Студент також має володіти відповідним рівнем математичної підготовки – зокрема, знаннями векторної алгебри, та аналітичної геометрії, умінням брати найпростіші похідні та інтеграли. В посібнику всі математичні дії при розгляді теоретичних питань детально коментуються. Ми також сподіваємось, що в процесі вивчення фізики студенти отримають додаткові навички користування математичним апаратом, який застосовується для опису фізичних явищ.

Хотіли б також попередити, що число літер у будь-якій абетці набагато менше, чим кількість фізичних величин, які вимагають опису або позначення. Тому неминуче співпадіння означень для абсолютно різних фізичних параметрів. Ми намагалися де можна це обходити, але таке можливо далеко не завжди, оскільки для багатьох з них існують усталені в міжнародній науковій літературі означення. Проте сподіваємось, що випадки співпадінь не призводять до ускладнень у розумінні матеріалу, а також помилок при перевірці його засвоєння.

Посібник “Коливання та хвильові процеси” написано відповідно до вимог сьогодення з огляду на так зване “модульне навчання”. Приведені в кінці кожної глави питання для самоконтролю, перелічені формули, знання яких обов’язкове, допоможуть студентам успішно підготуватися до практичних занять та отримати необхідну кількість балів рейтингового оцінювання. До кожної глави також надані типові задачі, які мають бути розв’язані студентами як під час практичних занять, так і під час самостійної роботи. Ці завдання орієнтовані на теоретичну складову курсу, і в ході їх виконання студенти мають самостіно здійснити практичне застосування теоретичного матеріалу. Цих завдань, на думку авторів, достатньо не тільки для успішного вивчення даного розділу фізики, а й для написання модульних контрольних робіт.

При підготовці посібника “Коливання та хвильові процеси” до видання використано досвід викладання курсу загальної фізики на кафедрі загальної та теоретичної фізики Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”. Автори висловлюють подяку колегам, співробітникам кафедри за критичні зауваження та дискусії.

В. М. Калита, В. М. Локтєв

## Глава 1. МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ

### 1.1. Коливальні процеси

Багато фізичних, хімічних, біологічних та інших процесів (явищ) повторюються в часі, тобто відбуваються періодично. Прикладом таких періодичних явищ є рух маятника годинника, зміна заряду конденсатора коливального контуру, осциляції концентрацій складу під час хімічних реакцій, осциляції кількості різних тварин у біологічній системі „хижак-жертва”, тощо. Подібні періодичні процеси називають *коливальними* або просто *коливаннями*.

Доцільність введення такого спільного для різних галузей науки і навіть різних наук терміну обумовлена тим, що всі вище перелічені періодичні процеси описуються однаковими за своїм видом рівняннями. Причому, як це не дивно, диференціальні рівняння, що описують коливальні процеси, мають досить простий вигляд.

Вивчення коливань розпочнемо з найпростішого випадку, а саме: періодичного руху матеріальної точки.

### 1.2. Означення механічних коливань

*Механічними коливаннями* називають просторовий рух, під час якого відбувається часова повторюваність положення рухомого тіла.

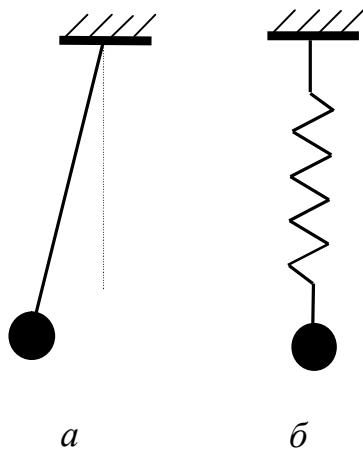


Рис. 1

Щоб розібратися, розглянемо найпростіший коливальний рух матеріальної точки – наприклад, математичного (рис. 1а) чи пружинного маятника (рис. 1 б), або фізичного маятника, коли стан рухомого тіла описується однією координатою чи одним кутом. Під час такого руху координата, що характеризує положення маятника, через однакові проміжки часу проходить через одне й те ж саме положення і має в ньому одну й ту ж саму (за величиною і напрямком) швидкість.

Слід відрізнити вільні механічні коливання, які відбуваються в коливальній системі за рахунок дії лише її внутрішніх сил без будь-якого втручання зовнішніх тіл, від коливань, що

відбуваються завдяки дії саме сил ззовні. Насправді, для виникнення коливального руху, як і руху взагалі, необхідна дія зовнішніх сил, які повинні здійснити збурення коливальної системи, щоб в ній розпочалися коливання. Таким чином, *вільними* є коливання, що спостерігаються в системі після припинення, як правило короткочасної, зовнішньої сили, яка збурюючи систему, виводить її з початкового стану спокою.

Якщо в системі є тертя, вільні коливання починають згасати, тобто відбуваються певний обмежений час. Такі коливання називають *згасаючими*.

Існують модельні, або умоглядні уявлення, про вільні незгасаючі коливання, які могли б відбуватися в коливальній системі, якби не було сили тертя. У разі, коли вільні незгасаючі коливання здійснюються за гармонічним законом, їх називають *власними* коливаннями.

Рух голки швейної машинки також є періодичним і формально задовольняє означенню механічних коливань. Але періодичність руху голки є наслідком дії зовнішньої періодичної сили. В таких випадках коливання називають *вимушеними* механічними коливаннями.

На рис. 2 для прикладу наведено графік часової залежності  $x$ -ої координати тіла під час коливального руху. Функція  $x(t)$  є періодичною і її значення повторюються через певний проміжок часу  $T$ , який називається

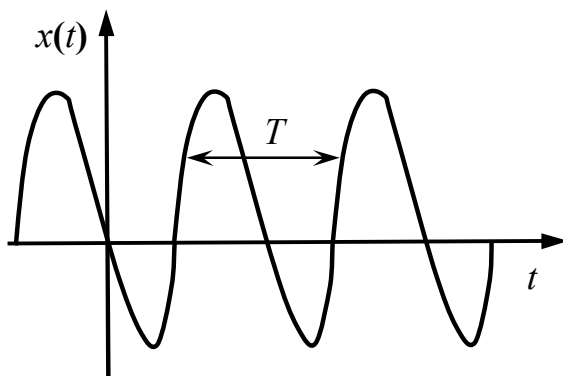


Рис. 2

*періодом*. Врахуємо, що будь-яка періодична функція може бути представлена сумою функцій косинусів чи синусів. Зокрема, функція, яка зображена на рис. 2, може бути записана у вигляді ряду

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} x_j \cos(\omega_j t + \varphi_j),$$

де  $j$  — індекс суми,  $x_j$ ,  $\omega_j$ ,  $\varphi_j$  — параметри ряду, які є постійними для кожного значення індексу,

причому величина  $\omega_j$  обернено пропорційна періоду і лінійно залежить від індекса (номера  $j$ ) суми:  $\omega_j = \frac{2\pi j}{T}$ . Таке представленням функції називають

розкладом в *ряд Фур'є*, або *гармонічним аналізом*. Кожен з косинусів під знаком суми називають *гармонікою* складного періодичного процесу. Повна сукупність гармонік  $\{\omega_j\}$  утворює *спектр* коливного руху  $x(t)$ .

Величини параметрів гармонік залежать від вигляду періодичного процесу. Найпростіший коливний процес описується однією гармонікою так, що  $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ . Коливання, які здійснюються за законом синуса, або косинуса (це безпосередньо залежить від величини параметру  $\varphi_0$ ), називаються *гармонічними* коливаннями (інколи їх називають *синусоїдальними*). Здійснимо спочатку опис гармонічних коливань.

### 1.3. Коливальна система

Системи, в яких спостерігаються вільні механічні коливання, називають *коливальними* системами. Вільні коливання в коливальних

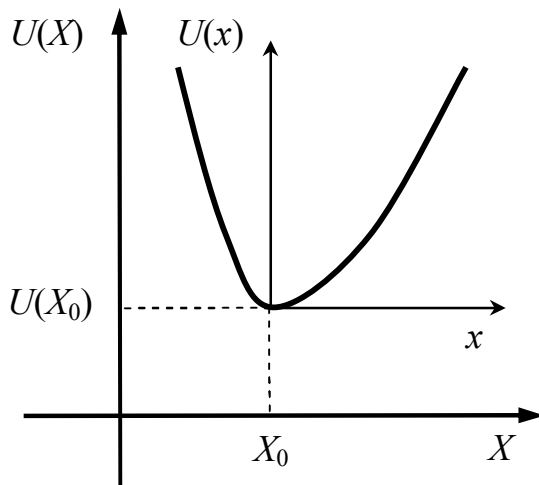


Рис. 3

системах виникають внаслідок дії внутрішніх сил, які за виключенням внутрішніх дисипативних сил тертя, є потенціальними. Тому внутрішні сили, що спричиняють коливання, можна характеризувати за допомогою потенціальної енергії. В курсі механіки відзначалося, що коливальний періодичний рух може виникати поблизу положення рівноваги, де потенціальна енергія має мінімум.

На рис. 3 зображено графік залежності потенціальної енергії точкового тіла коливальної системи у

найпростішому випадку одновимірного руху. Координату положення тіла у довільній лабораторній системі координат позначимо літерою  $X$ . Потенціальну енергію, яка є функцією від координати, запишемо у вигляді  $U=U(X)$ . Величина  $U_0$  потенціальної енергії в точці свого мінімуму, положення якої на рис. 2 задається координатою  $X_0$ , визначається рівністю  $U_0=U(X_0)$ . За умови, що функція  $U=U(X)$  неперервна і має щонайменше похідні другого порядку, потенціальну енергію в околі точки мінімуму можна представити у вигляді поліному

$$U(X) = U(X_0) + \left. \frac{dU}{dX} \right|_{X=X_0} (X - X_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2U}{dX^2} \right|_{X=X_0} (X - X_0)^2,$$

де відповідні похідні розраховуються, як зазначалося, в точці мінімуму.

Як відомо, в цій точці похідна першого порядку від потенціальної енергії задовольняє умові  $\left. \frac{dU}{dX} \right|_{X=X_0} = 0$ .

Видно, що в поліноміальному представленні потенціальна енергія задається як функція від різниці координат – координати  $X$  миттєвого положення тіла і координати  $X_0$  точки рівноваги. Різницю  $X-X_0$  називають *зміщенням*. Кількісно воно визначає відхилення тіла від положення рівноваги. Зміщення позначають літерою  $x$  і воно згідно означенню  $x \equiv X-X_0$ .

Зі зміщенням можна зв'язати систему координат, початок якої співпадає з точкою положення рівноваги коливальної системи, а координатна вісь направлена вздовж коливального руху (див. рис. 3). Таку систему можна вважати власною системою координат коливальної системи.

Потенціальна енергія визначається з точністю до довільної константи. Це математичне твердження дозволяє довільним чином вибирати її нульовий рівень. У власній системі координат точку нульового рівня потенціальної енергії можна співставити з точкою рівноваги. Тобто у повній відповідності до рис. 3 можна вважати, що  $U_0 \equiv U(X_0) = 0$ .

Таким чином, з урахуванням вище введених означень вираз для потенціальної енергії як функції зміщення  $x$  можна записати у вигляді:

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2,$$

де  $k$  – коефіцієнт, яким ми позначили другу похідну потенціальної енергії в положенні рівноваги:  $k \equiv \left. \frac{d^2U}{dX^2} \right|_{X=X_0}$ .

Бачимо, що вираз для потенціальної енергії, записаний для малих зміщень, подібний до виразу потенціальної енергії розтягнутої пружини. Тому коефіцієнт  $k$  називають *коефіцієнтом жорсткості* коливальної системи.

Для розрахунку сили, яка діє на рухоме тіло коливальної системи, врахуємо, що величина сили визначається градієнтом потенціальної енергії:  $\vec{F} = -\text{grad}U(x)$ . За такого означення для одновимірного випадку проекція сили може бути легко записана у вигляді:

$$F_x = -kx,$$

де, як вже говорилося,  $x$  – зміщення, а  $F_x$  – проекція внутрішньої сили (чи рівнодійної внутрішніх сил), яка визначена у власній системі координат.

З отриманого виразу для сили маємо, що поблизу положення рівноваги сила є прямо пропорційною зміщенню і направленою протилежно до нього  $F_x \uparrow \downarrow x$ .

#### 1.4. Диференціальне рівняння вільних незгасаючих механічних коливань

Прикладом механічної коливальної системи є *пружинний маятник*. Він складається з пружини, один кінець якої є фіксованим і нерухомим, а до другого кінця пружини приєднано тіло, яке можна вважати точковим і яке здійснює коливання (рис. 4, де показана горизонтальна пружина). Пружна сила, яка зі сторони пружини діє на тіло, є *внутрішньою* силою коливальної системи. Величина і напрямок цієї сили залежать від стадії коливань, що безпосередньо характеризується миттєвим положенням прикріпленого до пружини тіла і напрямком його руху.

Вважатимемо, що коливання пружинного маятника здійснюються без втручання зовнішніх сил. Крім того, нехтуватимемо дією сили тертя. За цих припущень тіло здійснює вільні незатухаючі коливання, які ми визначили як власні коливання.

Вище було показано, що при малих величинах зміщення внутрішня

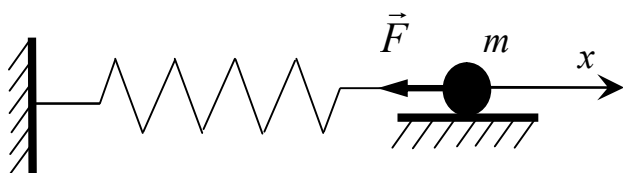


Рис. 4

сила, під дією якої рухається тіло, є пружною. Вона, як відомо, пропорційна зміщенню і направлена протилежно до нього:  $F_x = -kx$ . У випадку пружинного маятника, сила що прикладена до тіла, визначається законом пружності Гука, а коефіцієнт  $k$  є жорсткістю пружини.

Координатну вісь власної системи координат пружинного маятника направимо вздовж пружини (рис. 4).

Для пружинного маятника зміщенням є видовження пружини, яке в обраній системі координат додатне при видовженні пружини і від'ємне при її стиску. Зображений на рис. 4 вектор сили пружності відповідає випадку розтягнутої пружини.

Для опису руху тіла скористаємось другим законом Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F},$$



де  $m$  – маса точкового тіла,  $\vec{a}$  – його прискорення.

Запишемо це рівняння для проекцій:

$$ma_x = -kx,$$

де  $a_x$  – проекція прискорення, яка є похідною другого порядку від координати тіла  $x \equiv x(t)$ , тобто другою похідною від зміщення:  $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$ .

Отже, рівняння руху набуває вигляду:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0,$$

яке називають рівнянням руху одновимірного *осцилятора*.

Поділимо це рівняння на  $m$  і запишемо його у вигляді диференційного рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0,$$

в якому відношення коефіцієнту жорсткості до маси тіла позначено  $\omega_0^2 \equiv k / m$ . Величину  $\omega_0$  називають *власною частотою*. В СІ  $\omega_0$  вимірюють в  $[\omega_0] = \text{с}^{-1}$ .

Отримане рівняння другого порядку називають *диференціальним рівнянням вільних незгасаючих коливань*.

Переконаємось, що розв'язком цього диференційного рівняння є гармонічна функція

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Дійсно, знайдемо другу похідну від цієї функції, а саме:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Підставимо  $x(t)$  і її другу похідну в диференціальне рівняння коливань, що дає:

$$-A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) + A\omega_0^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = 0.$$

Винесемо за дужки спільні множники, внаслідок чого рівняння переходить у рівність:

$$A(\omega_0^2 - \omega^2) \cos(\omega t + \varphi_0) = 0.$$

Функція косинус, яка залежить від часу, не може забезпечити виконання цієї рівності для довільних моментів часу. Тому це рівняння для

будь-якого значення  $t$  може бути задоволено тільки при виконанні рівності  $\omega = \omega_0$ .

Отже, часова залежність зміщення при власних коливаннях пружинного маятника описується виразом

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

В результаті зроблених розрахунків приходимо до наступних висновків. Вільні незгасаючі коливання пружинного маятника відбуваються з власною частотою, яка не залежить ні від способу збурення коливань, ні від величини зміщення (за умови, що у розкладі потенціальної енергії можна обмежитись квадратичним доданком). Знайдено також, що величина зміщення залежить від значення параметрів  $A$  і  $\varphi_0$ . У випадку вільних незгасаючих коливань ці параметри в ході коливного процесу не змінюються і залишаються сталими. Значення цих параметрів знаходять з початкових умов, які залежать від способу збурення коливань.

### 1.5. Власна частота, амплітуда, період, фаза власних коливань

Модуль максимального зміщення коливальної системи називають *амплітудою*. Згідно з отриманого розв'язку диференціального рівняння вільних незгасаючих коливань максимальне значення зміщення  $x_{\max} \equiv A$  і визначає амплітуду коливань.

Миттєве значення координати під час коливального руху визначається аргументом гармонічної функції, який називають *фазою*. Згідно з цим означенням фаза коливань має вигляд

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0.$$

Бачимо, що для власних коливань фаза лінійно залежить від часу, або, що теж саме, пропорційна йому.

Величина фази, визначена для початкового моменту часу  $t = 0$ , називається *початковою фазою*  $\varphi_0 \equiv \varphi(t = 0)$ .

Найпростішим способом збурення вільних коливань є виведення системи з стану рівноваги, коли систему відхиляють від положення рівноваги, а потім у деякий момент часу, який вважається початковим, її вільно, тобто з нульовою швидкістю відпускають. Таку процедуру досить легко уявити для математичного маятника, коли спочатку кульку маятника відвели (відхилили) від положення рівноваги, а потім відпустили.

За такого збурення для початкового (нульового) моменту часу відомими є скінчене початкове зміщення  $x_0 \equiv x(t=0)$ , і початкова швидкість, яка в нашому прикладі дорівнює нулю:  $v_0 \equiv v_x(t=0)=0$ .

Зміщення

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

тіла коливної системи, а також швидкість

$$\frac{dx}{dt} \equiv v_x(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

його руху повинні задовольнити оговореним початковим умовам.

В результаті приходимо до двох рівнянь:

$$x_0 = A \cos \varphi_0,$$

$$0 = -\omega_0 A \sin \varphi_0.$$

З другого рівняння знаходимо початкову фазу  $\varphi_0 = 0$ , а з першого – амплітуду, яка дорівнює початковому зміщенню:  $A = x_0 \equiv x_{\max}$ , тобто початкове відхилення і стає для збуреного коливального процесу максимальним.

Таким чином, вираз для часової залежності зміщення набуває вигляду:

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t.$$

Для приведенного способу збурення коливання здійснюються за законом косинуса, а амплітуда коливаний дорівнює початковому зміщенню.

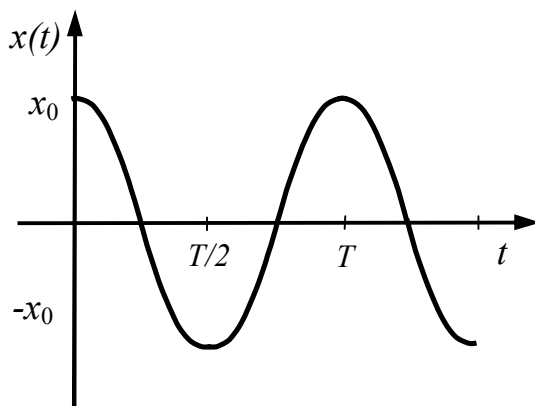


Рис. 5

На рис. 5 наведені графіки часових залежностей зміщення для цього способу збурення коливаний.

Розглянемо дещо інший спосіб збурення коливаний. Припустимо, що до початку коливаний тіло коливальної системи знаходиться в положенні рівноваги. В початковий момент тілу миттєво (поштовхом) надають

швидкості. Отже, початковими умовами є:  $x_0 = x(t=0)=0$  і  $v_0 = v_x(t=0) \neq 0$ . Для цих умов рівняння для  $A$  і  $\varphi_0$  набувають вигляду

$$0 = A \cos \varphi_0,$$

$$v_0 = -\omega_0 A \sin \varphi_0.$$

З першого рівняння знаходимо  $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$ , а з другого –  $A = \frac{v_0}{\omega_0}$ .

При такому збуренні коливального руху часова залежність для зміщення має вигляд:

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

При збуренні коливань поштовхом, коли задана тільки початкова швидкість, коливання здійснюються за законом синуса, а амплітуда коливань прямо пропорційна величині початкової швидкості.

У загальному випадку збурення коливань ненульовими можуть бути і початкове зміщення, і початкова швидкість. Це, зокрема, відбувається, коли кульку математичного маятника не тільки відхилили від положення рівноваги, а ще й штовхнули. За цих умов рівняння для  $A$  і  $\varphi_0$  набувають вигляду:

$$x_0 = A \cos \varphi_0,$$

$$v_0 = -\omega_0 A \sin \varphi_0.$$

З цих рівнянь знаходимо  $\operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{v_0}{\omega_0 x_0}$  і  $A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}$ , звідки маємо, що  $A$  та

$\varphi_0$  визначаються виразами

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}},$$

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg}\left(-\frac{v_0}{\omega_0 x_0}\right).$$

Зрозуміло, що з цих загальних формул прямо випливають вирази, отримані вище щодо окремих випадків збурення коливань.

Для характеристики періодичних процесів використовують поняття періоду, який, як зазначалося, позначають  $T$ . *Періодом* коливань називають проміжок часу, за який здійснюється одне повне коливання. Іншими словами, період визначає найменший час, за який гармонічна функція «повертається» до свого будь-якого вихідного значення, або  $x(t) = x(t + T)$ . Експериментально величину періоду можна знайти з відношення часу  $t$  до кількості  $n$  коливань, що відбулись за цей час:

$$T = \frac{t}{n}.$$

Для характеристики коливань використовують також поняття *частоти*, яка визначає кількість коливань, що відбуваються за одиницю часу.

У відповідності до цього означення отримуємо, що частота  $f = \frac{n}{t}$ .

З урахуванням попередньої формули для періоду бачимо, що  $f = \frac{1}{T}$ .

В СІ частоту вимірюють в герцах:  $[f] = \text{Гц}$ .

За один період фаза коливань змінюється на  $2\pi$ . Отже можна записати  $\omega_0 T = 2\pi$ . Звідки знаходимо, що період власних коливань визначається за формулою

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Подібне співвідношення можна записати і для частоти:

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi}.$$

З урахуванням означення власної частоти вираз для періоду коливань набуває вигляду

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}},$$

де, як і раніше,  $k$  – коефіцієнт жорсткості коливної системи. Він, як було видно вище, дорівнює значенню похідної другого порядку від потенціальної енергії в точці рівноваги. Для пружинного маятника, нагадаємо, цей коефіцієнт є коефіцієнтом жорсткості пружини.

Підсумовуючи, зазначимо, що період вільних незгасаючих коливань не залежить від їх амплітуди. Цей результат є справедливим лише для коливань з настільки малим значенням зміщення, що в околі положення рівноваги виконується квадратична апроксимація для потенціальної енергії. Для достатньо великих величин зміщень квадратичне представлення для потенціальної енергії може вже не виконуватися. Врахування в потенціальній енергії більш високих ступенів для зміщення призведе до того, що диференційне рівняння коливань ускладниться і буде містити доданки, пропорційні квадрату зміщення, кубу зміщення і т. д. Зрозуміло, що роль кожного з цих доданків буде збільшуватися по мірі зростання величини амплітуди коливань. Тому для коливань великої амплітуди (їх ще називають *коливаннями з скінченою амплітудою*) період і частота вже залежатимуть від величини амплітуди, а спектр міститиме частоти, кратні власній частоті вільних коливань.

## 1.6. Кінетична, потенціальна та повна енергія вільних незгасаючих коливань

При вивченні вільних незгасаючих коливань дією сили тертя нехтують, а отже для власних коливань має виконуватися закон збереження механічної енергії. Перевіримо це твердження.

Потенціальна енергія коливальної системи визначається у власній системі координат, і для неї нульовим рівнем вибрано положення рівноваги. У випадку малих зміщень потенціальна енергія в околі положення рівноваги може бути, як говорилося, наближено записана у квадратичній формі:

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2, \text{ де } k - \text{ коефіцієнт жорсткості коливальної системи, а } x -$$

зміщення. У разі коливань, які відбуваються у такому силовому полі, залежність зміщення від часу описується гармонічним законом і має вигляд  $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ . Підставимо цю залежність у вираз для потенціальної енергії, звідки отримаємо, що величина потенціальної енергії додатна і залежить від часу наступним чином:

$$U(t) = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Очевидно, що максимальне значення потенціальної енергії дорівнює

$$U_{\max} = \frac{1}{2} kA^2$$

Врахуємо, що квадрат косинуса можна переписати через косинус подвійного аргументу:

$$U(t) = \frac{1}{2} kA^2 \frac{1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2}.$$

Таким чином, маємо, що часова залежність потенціальної енергії при вільних гармонічних коливаннях може бути представлена сумою двох доданків, один з яких не залежить від часу, а другий змінюється періодично з частотою вдвічі більшою частоти власних коливань:

$$U(t) = \frac{1}{4} kA^2 + \frac{1}{4} kA^2 \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0).$$

З цього виразу видно, що середнє значення потенціальної енергії за період коливань дорівнює половині її максимального значення, а саме:

$$\bar{U} = \frac{1}{4} kA^2 \equiv \frac{1}{2} U_{\max}.$$

Кінетична енергія, як завжди, дорівнює половині добутку маси тіла на квадрат його швидкості:

$$E_{\text{кін}} = \frac{1}{2}mv^2.$$

Для випадку гармонічних коливань швидкість описується виразом  $v_x(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ . Отже, кінетична енергія змінюється з часом за законом:

$$E_{\text{кін}} = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Максимальне значення кінетичної енергії дорівнює  $E_{\text{кін}}^{(\text{max})} = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2$

Перепишемо вираз для  $E_{\text{кін}}$  також через косинус подвійного аргументу, що дає:

$$E_{\text{кін}} = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \frac{1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2} = \frac{1}{4}m\omega_0^2 A^2 - \frac{1}{4}m\omega_0^2 A^2 \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Звідси випливає, що середнє значення кінетичної енергії дорівнює половині її максимального значення, тобто

$$\bar{E}_{\text{кін}} = \frac{1}{4}m\omega_0^2 A^2 \equiv \frac{1}{2}E_{\text{кін}}^{(\text{max})}.$$

Таким чином, кінетична енергія коливань, як і їх потенціальна енергія, може бути записана сумою двох доданків, один з яких не залежить від часу, а другий змінюється з часом з подвійною частотою.

Обчислимо повну енергію коливань, яка за означенням дорівнює сумі кінетичної та потенціальної енергій:

$$E = E_{\text{кін}} + U = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0).$$

При знаходженні суми врахуємо, що  $\omega_0^2 = k/m$ :

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m \frac{k}{m} A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ &= \frac{1}{2}kA^2 \left[ \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) \right] = \frac{1}{2}kA^2. \end{aligned}$$

В результаті, приходимо до шуканого висновку: при вільних механічних незгасаючих коливаннях повна енергія залишається постійною. Власне, цей результат є наслідком закону збереження механічної енергії, за яким при нехтуванні дією сили тертя сума кінетичної та потенціальної енергії повинна зберігатися. Сума середніх значень кінетичної та потенціальної енергії дорівнює повній енергії.

Під час коливань кінетична і потенціальна енергії окремо змінюються з часом. При найбільшому відхиленні від положення рівноваги, коли зміщення максимальне, а швидкість дорівнює нулю, коливна система має тільки потенціальну енергію, величина якої дорівнює повній енергії системи. При проходженні положення рівноваги, коли зміщення  $x=0$  і тіло має максимальну швидкість, коливна система має тільки кінетичну енергію, яка також дорівнює повній енергії коливань. Таким чином, під час коливального процесу відбувається перетворення кінетичної механічної енергії в потенціальну механічну енергію і навпаки так, що повна енергія залишається незмінною.

Збереження механічної енергії під час коливного процесу означає, що сума  $E_{кін} + U = const$ , або  $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = const$ . Це, в свою чергу, свідчить, що похідна повної енергії по часу повинна дорівнювати нулеві, а отже, має мати місце співвідношення:

$$mv \frac{dv}{dt} + kx \frac{dx}{dt} = 0.$$

Якщо врахувати, що  $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ ,  $\frac{dx}{dt} = v$ , то знову приходимо до рівняння

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0,$$

після ділення якого на масу, отримуємо вже знайоме нам диференціальне рівняння вільних незгасаючих коливань

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0,$$

де  $\omega_0^2 = k/m$  – квадрат власної (циклічної) частоти.

Таким чином, можна стверджувати, що отримане і проаналізоване нами рівняння вільних незгасаючих коливань є наслідком закону збереження механічної енергії.

## 1.7. Фазовий портрет коливання

Розглянемо коливальну систему, в якій відбуваються вільні незгасаючі коливання. Врахуємо, що імпульс тіла  $p = mv$ , що дозволяє представити енергію у вигляді



$$E_{\text{кін}} + U = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} = E = \text{const},$$

де  $E$  – повна енергія системи.

Звідки знаходимо, що імпульс та координата тіла під час вільних незгасаючих коливань задовольняють співвідношенню:

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{x^2}{2E/k} = 1 \quad \text{або} \quad \left(\frac{p}{\sqrt{2mE}}\right)^2 + \left(\frac{x}{\sqrt{2E/k}}\right)^2 = 1.$$

У просторі з координатами  $x$  та  $p$  записане рівняння є еліпсом з півосями  $\sqrt{2mE}$  та  $\sqrt{2E/k}$  (див. рис. 6).

Простір, який визначений для координат та імпульсів, називається *фазовим простором*. Таким чином, у фазовому просторі траєкторія коливальної системи, яка здійснює вільні гармонічні коливання, є еліпсом.

Площа еліпсу, який визначається рівнянням  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ , як відомо, дорівнює  $\pi ab$ . Отже, площа  $S$  еліпсу фазової траєкторії коливального руху становить

$$S = \pi \sqrt{2mE} \sqrt{2E/k} = 2\pi E \sqrt{m/k} = 2\pi \frac{E}{\omega_0}.$$

Площу, що обмежена фазовою траєкторією і яку поділено на  $2\pi$ , називають *адіабатичним інваріантом*. Для коливальної системи, яка здійснює вільні незгасаючі коливання, адіабатичний інваріант

$$I = \frac{S}{2\pi} = \frac{E}{\omega_0} = \text{const}$$

не змінюється, оскільки, як ми бачили, зберігається повна енергія системи. Адіабатичний інваріант є важливою характеристикою будь-якої коливальної системи, бо залишається незмінним і тоді, коли параметри системи не є

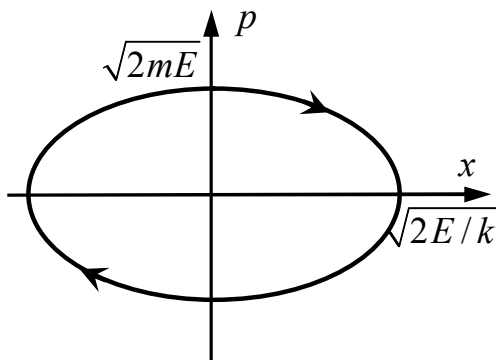


Рис. 6

постійними, а повільно (адіабатично) змінюються з часом. Наприклад, при адіабатичній зміні параметрів, якій відповідає, скажімо, зменшення частоти коливальної системи, відбувається таке саме зменшення і повної енергії системи, так що величина  $I$  зберігається у часі.

## 1.8. Період коливань фізичного маятника

Неточкове, або скінчене, тіло довільної форми, яке може здійснювати коливання навколо нерухомої горизонтальної осі, називається *фізичним маятником*. На рис. 7 вісь обертання фізичного маятника, перпендикулярна до площини рисунку, проходить через точку  $O$ .

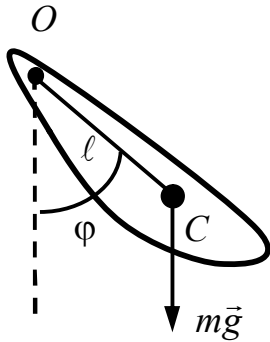


Рис. 7

Центр мас тіла маятника (на рис. 7 його позначено точкою  $C$ ) не лежить на осі обертання і в положенні рівноваги знаходиться нижче осі обертання. Відстань від центру мас до цієї осі позначена  $\ell$ . В стані рівноваги центр мас тіла буде знаходитися на

вертикальній лінії, що проходить через вісь обертання. При відхиленні тіла від положення рівноваги воно, завдяки дії сили тяжіння, буде здійснювати періодичний (коливальний) обертальний рух. Положення тіла фізичного маятника під час такого коливального процесу характеризують кутом повороту  $\varphi$ , який визначають відносно положення рівноваги. Запишемо рівняння обертального руху твердого тіла

$$I\varepsilon = M,$$

де  $\varepsilon$  – кутове прискорення,  $I$  – момент інерції тіла, який визначений відносно осі обертання, а  $M$  – момент сили, що також визначений відносно цієї ж осі. Момент сили створює сила тяжіння, а його (моменту) величина дорівнює добутку сили на плече. Коли вісь обертання перпендикулярна до площини рисунку, плече дорівнює найменшій відстані від лінії дії сили до точки  $O$ . Таким чином, момент сили тяжіння дорівнює  $M = -mg\ell \sin \varphi$ , де знак мінус враховує, що момент сили тяжіння спричиняє рух, протилежний до початкового відхилення. Кутове прискорення визначається як похідна

другого порядку від кута повороту:  $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ . З урахуванням цих означень

записане вище рівняння обертального руху набуває вигляду:

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg\ell \sin \varphi.$$

Розглянемо спочатку випадок малих коливань, коли  $\varphi \rightarrow 0$  і коли є справедливий розклад  $\sin \varphi \approx \varphi$ . За такого наближення права частина рівняння обертального руху набуде вигляду  $I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mg\ell \varphi$ , з якого легко приходимо до вже проаналізованого вище диференційного рівняння вільних незгасаючих коливань:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi = 0,$$

де  $\omega_0^2 = \frac{mg\ell}{I}$ . З точністю до означень, воно тотожне рівнянню механічних коливань, тому розв'язком отриманого рівняння також є гармонічна функція, що описує часову залежність координати, якою в даному випадку є кутове зміщення  $\varphi(t)$ ; останнє має вигляд:

$$\varphi(t) = \varphi_{\max} \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

де  $\varphi_{\max}$  – амплітуда коливань (в кутових коливаннях вона відповідає максимальному куту відхилення тіла від його положення рівноваги),

$\omega_0 = \sqrt{\frac{mg\ell}{I}}$  – власна частота цих коливань, а  $\alpha$  – їх початкова фаза. Період

коливань фізичного маятника визначається за тією ж формулою  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ , але

для них має дещо інший вигляд:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mg\ell}}.$$

Якщо фізичне тіло має розміри, які значно менші  $\ell$ , то таке тіло можна вважати точковим. Забезпечити його обертання навколо горизонтальної осі можна, наприклад, коли тіло (це може бути кулька з малим радіусом, яку можна вважати точковим тілом) прикріплене до точки обертання за допомогою нерозтяжної нитки довжиною  $\ell$ . Така коливальна система називається *математичним маятником*. Момент інерції точкового тіла відносно осі  $I = mg\ell^2$ . Використовуючи це співвідношення, знаходимо, що період коливань математичного маятника визначається за формулою

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m\ell^2}{mg\ell}} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

Звідси вираз для власної частоти математичного маятника приймає остаточний вигляд:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$

Опис коливань фізичного маятника можна також здійснити, застосовуючи закон збереження енергії. При нехтуванні дією сили тертя повна механічна енергія фізичного маятника складається з кінетичної енергії та потенціальної енергії сили тяжіння. Величина повної енергії має зберігатися, а отже:

$$E = \frac{1}{2} I \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + mg\ell(1 - \cos\varphi) = \text{const}:$$

де  $\ell(1 - \cos\varphi)$  – висота, на яку підіймається центр мас тіла при його відхиленні від положення рівноваги. Коли  $\varphi \rightarrow 0$  різниця  $1 - \cos\varphi \approx \frac{1}{2}\varphi^2$ , і для випадку малих коливань записана повна енергія фізичного маятника може бути представлена у вигляді:

$$E = \frac{1}{2} I \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} mg\varphi^2 = \text{const}.$$

Розрахуємо похідну повної енергії та прирівняємо її до нуля. Тоді прямо отримаємо рівняння

$$I \frac{d\varphi}{dt} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + mg\varphi \frac{d\varphi}{dt} = 0,$$

яке після простого скорочення знову набуває вигляду диференційного рівняння вільних гармонічних коливань

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2\varphi = 0$$

з власною частотою коливань фізичного маятника.

## 1.9. Показникова форма опису власних коливань

Розглянемо дещо інший аналітичний підхід для аналізу і опису коливального руху, для чого використаємо вже відоме нам диференціальне рівняння вільних незгасаючих гармонічних коливань:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

Будемо шукати його розв'язок у вигляді показникової функції

$$x(t) = Ce^{\lambda t},$$

де  $C$  – довільна константа, а  $\lambda$  – параметр. Обрана пробна функція буде розв'язком, якщо задовольняє диференціальному рівнянню. Знайдемо її

похідну другого порядку:  $\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda^2 Ce^{\lambda t}$ .

Підставимо пробну функцію та її другу похідну в диференціальне рівняння, що дає:

$$Ce^{\lambda t}(\lambda^2 + \omega_0^2) = 0.$$

Видно, що вибрана нами пробна функція задовольнить диференціальному рівнянню тільки у випадку, коли виконується рівність  $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$ , з якої прямо випливає, що  $\lambda = \sqrt{-\omega_0^2}$ . У загальному випадку корінь з від'ємного числа є комплексним числом. Дійсно, вираз під коренем можна представити у вигляді добутку:  $\lambda = \sqrt{-1 \cdot \omega_0^2} = \sqrt{\omega_0^2} \sqrt{-1}$ . Перший корінь дає два значення  $\sqrt{\omega_0^2} = \pm \omega_0$ , а другий – дорівнює уявній одиниці, або  $\sqrt{-1} = i$ . В результаті для параметра  $\lambda$  маємо два значення:

$$\lambda_+ = i\omega_0, \quad \lambda_- = -i\omega_0.$$

Відповідно, розв'язком диференційного рівняння будуть дві експоненціальні функції.

Оскільки диференціальне рівняння лінійне, то його розв'язком має бути довільна лінійна комбінація цих двох експонент:

$$x(t) = C_+ e^{\lambda_+ t} + C_- e^{\lambda_- t} = C_+ e^{i\omega_0 t} + C_- e^{-i\omega_0 t}.$$

В цьому виразі  $C_+$  та  $C_-$  довільні константи, які також можуть бути комплексними числами, але такими, щоб зміщення  $x(t)$  було дійсним. Нехай,

наприклад,  $C_+ = \frac{A}{2} e^{i\varphi_0}$ , а  $C_- = \frac{A}{2} e^{-i\varphi_0}$ ; тоді знаходимо:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{A}{2} e^{i\varphi_0} e^{i\omega_0 t} + \frac{A}{2} e^{-i\varphi_0} e^{-i\omega_0 t} = \frac{A}{2} \left( e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)} + e^{-i(\omega_0 t + \varphi_0)} \right) = \\
 &= \frac{A}{2} [\cos(\omega_0 t + \varphi_0) + i \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + \cos(\omega_0 t + \varphi_0) - i \sin(\omega_0 t + \varphi_0)] = \\
 &= A \cos(\omega_0 t + \varphi_0).
 \end{aligned}$$

Таким чином, приходимо до висновку, що для опису гармонічних коливань можна і дуже зручно використовувати показникову форму представлення функції зміщення. Водночас, часто обмежуються найпростішою формою такого представлення, коли спостережувані зміщення записують лише через дійсну частину показникової функції:

$$x(t) = \operatorname{Re} C e^{i\omega_0 t},$$

де символом  $\operatorname{Re}$  позначено процедуру знаходження реальної частини від комплексної функції.

### 1.10. Диференціальне рівняння вільних згасаючих коливань

Розглянемо тіло, маса якого  $m$  і яке висить на вертикальній пружині з жорсткістю  $k$  (див. рис. 8). Знайдемо точку його рівноваги. Для цього введемо систему відліку, початок якої точка  $O$  відповідає положенню

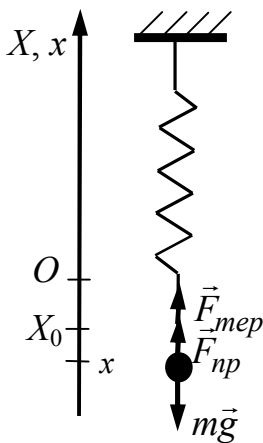


Рис. 8

нижнього кінця недеформованої пружини. Внаслідок деформації пружини, коли до неї прикріплюють тіло, коливальна система придбає потенціальну енергію  $U$ , яка складається з двох доданків: енергії деформованої пружини та потенціальної енергії пов'язаної зі зміною висоти, на якій знаходиться тіло, а саме:

$$U = U(X) = \frac{1}{2} kX^2 + mgX$$

Положення рівноваги відповідає мінімуму потенціальної енергії, що визначається умовою

$$\frac{dU(X)}{dX} = 0.$$

Прирівнюючи нулеві похідну записаної

вище потенціальної енергії по координаті, отримуємо лінійне алгебраїчне рівняння

$$kX + mg = 0,$$

яке визначає рівноважне положення пружинного маятника:

$$X_0 = -\frac{mg}{k}.$$

Перейдемо до власної системи відліку, початок якої співпадає з положенням рівноваги і координатами в якій є зміщення, тобто  $x = X - X_0$ . Підставимо значення  $X = x + X_0$  у вираз для потенціальної енергії:

$$U = \frac{1}{2}k(x + X_0)^2 + mg(x + X_0) = \frac{1}{2}kx^2 + (kX_0 + mg)x + \frac{1}{2}kX_0^2 + mgX_0.$$

Використаємо тепер значення  $X_0$ , що дає:

$$U = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}kX_0^2 + mgX_0.$$

Отже, потенціальна енергія коливальної системи залежить від зміщення за квадратичним законом. Два постійних доданки визначають величину потенціальної енергії для положення рівноваги, коли нульовим рівнем прийняте початкове положення нижнього кінця недеформованої пружини,  $X_0 = 0$ .

З отриманого виразу для потенціальної енергії, визначеної як функція зміщення відносно положення рівноваги, маємо, що незважаючи на дію сили тяжіння, коливальний рух спричиняє тільки дія пружної сили, проекція якої має звичайний вигляд

$$F_{np}^x = -\frac{dU}{dx} = -kx.$$

Врахуємо дію сили тертя  $\vec{F}_{тер}$ . Будемо вважати, що на тіло діє сила в'язкого тертя, яка у відповідності до закону Стокса пропорційна швидкості тіла і направлена протилежно до швидкості

$$\vec{F}_{тер} = -\eta\vec{v},$$

де  $\eta$  – константа. Проекція сили тертя на координатну вісь

$$F_{тер}^x = -\eta v_x.$$

Оскільки швидкість є похідною координати, або  $v_x = \frac{dx}{dt}$ , то

$$F_{тер}^x = -\eta \frac{dx}{dt}.$$

Тепер, скориставшись другим законом Ньютона, запишемо рівняння

$$ma_x = F_{np}^x + F_{тер}^x,$$

де  $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$  –  $x$ -ва проекція прискорення.

Додаючи вище записані вирази для усіх сил, отримаємо рівняння

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \eta \frac{dx}{dt} + kx = 0.$$

Поділимо його на  $m$  та введемо нові позначення. В результаті, приходимо до диференційного рівняння:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0,$$

Де стала  $\beta \equiv \frac{\eta}{2m}$ , а  $\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}$  – як і вище, власна частота.

Отримане рівняння називають *диференціальним рівнянням вільних згасаючих коливань*. Воно є лінійним однорідним рівнянням другого порядку з постійними коефіцієнтами.

### 1.11. Розв'язок диференціального рівняння вільних згасаючих коливань

Знайдемо розв'язок отриманого у попередньому розділі диференційного рівняння вільних згасаючих коливань

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$$

Використаємо для цього метод Ейлера, тобто оберемо пробну шукану функцію  $x(t)$  у вигляді показникової функції:

$$x(t) = Ce^{\lambda t},$$

де  $C$  – довільна константа, а  $\lambda$  – знову параметр, який треба визначити.

Знайдемо першу та другу похідні:  $\frac{dx}{dt} = \lambda Ce^{\lambda t}$ ,  $\frac{d^2 x}{dt^2} = \lambda^2 Ce^{\lambda t}$ . Підставимо запропоновану пробну функцію та її похідні у вихідне диференціальне рівняння, завдяки якому отримуємо, так зване *характеристичне рівняння*:

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0.$$

Воно алгебраїчне і має два розв'язки:  $\lambda_{\pm} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ .

Отже, загальний розв'язок диференціального рівняння вільних згасаючих коливань може бути представлений у вигляді:

$$x(t) = C_+ e^{\lambda_+ t} + C_- e^{\lambda_- t}.$$

Коли тертя мале, тобто  $\beta \ll \omega_0$ , то вираз під квадратним коренем виявляється від'ємним, а тому  $\lambda_{\pm} = -\beta \pm \sqrt{-1 \cdot (\omega_0^2 - \beta^2)} = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ , де



знову враховано, що  $i = \sqrt{-1}$ . В результаті, розв'язок рівняння набуває вигляду:

$$x(t) = C_+ e^{(-\beta + i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2})t} + C_- e^{(-\beta - i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2})t}.$$

Слід також врахувати, що просторове зміщення є дійсною функцією часу.

Тому, якщо вибрати  $C_+ = \frac{A}{2} e^{i\varphi_0}$ ,  $C_- = \frac{A}{2} e^{-i\varphi_0}$ , то знаходимо:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{A}{2} e^{-\beta t} (e^{i(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \varphi_0)} + e^{-i(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \varphi_0)}) = \\ &= \frac{A}{2} e^{-\beta t} [\cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \varphi_0) + i \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \varphi_0) + \\ &\quad + \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \varphi_0) - i \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \varphi_0)] . \end{aligned}$$

У підсумку отримаємо, що зміщення описується залежністю

$$x(t) = A e^{-\beta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \varphi_0).$$

Наведена функція є розв'язком диференційного рівняння вільних згасаючих коливань і описує часову залежність для зміщення при вільних згасаючих коливаннях.

Вираз, який стоїть перед косинусом, називають *амплітудою згасаючих коливань*. Вона, як видно, зменшується з часом за експоненційним законом, а саме:

$$A(t) = A e^{-\beta t}.$$

Під час згасаючого коливального процесу фазову періодичність часової залежності зміщення у виразі для  $x(t)$  забезпечує гармонічна функція, якою є

косинус. Циклічна частота вільних згасаючих коливань визначається співвідношенням

$$\tilde{\omega}_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Вона, що дуже важливо, є залежною від тертя, яке її завжди зменшує.

Відповідно можна ввести і поняття періоду вільних згасаючих

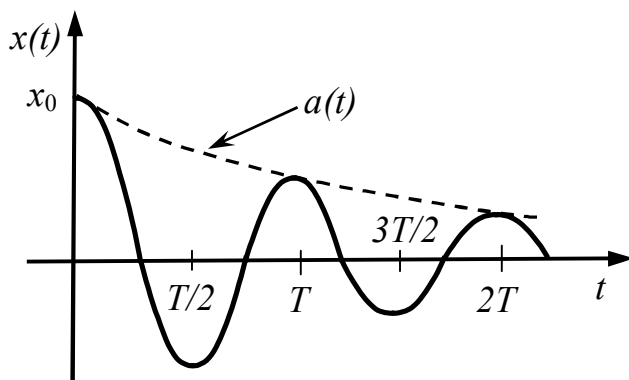


Рис. 9

коливань, який визначають за стандартною формулою

$$\tilde{T} = \frac{2\pi}{\tilde{\omega}_0} > \frac{2\pi}{\omega_0},$$

який тим самим у присутності тертя дещо збільшується.

На рис. 9 суцільною кривою зображено часову залежність величини зміщення при згасаючих коливаннях. На цьому рисунку пунктиром показана залежність від часу амплітуди коливань. Зауважимо, що графік функції  $A(t)$  трішечки зсунутий вправо і не співпадає з максимумами залежності  $x(t)$ .

Розглянемо, як змінюється повна механічна енергія коливальної системи з тертям. Для цього помножимо диференційне рівняння

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \eta \frac{dx}{dt} + kx = 0 \text{ на швидкість:}$$

$$m \frac{dx}{dt} \frac{d^2 x}{dt^2} + \eta \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + kx \frac{dx}{dt} = 0.$$

В цьому рівнянні перший доданок є часовою похідною кінетичної енергії –

$$m \frac{dx}{dt} \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}{dt} = \frac{dE_{\text{кін}}}{dt},$$

а третій – часовою похідною потенціальної енергії

$$kx \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} k \frac{dx^2}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2}kx^2\right)}{dt} = \frac{dU}{dt}.$$

Отже, можна записати

$$\frac{dE_{\text{кін}}}{dt} + \frac{dU}{dt} = -\eta v^2,$$

або

$$\frac{d(E_{\text{кін}} + U)}{dt} = -\eta v^2.$$

Звідси випливає, що швидкість зміни повної механічної енергії коливальної системи завжди від'ємна, тобто під час вільних згасаючих коливань повна енергія тільки зменшується.

Дія сил тертя призводить до втрат енергії. Фазовий портрет згасаючих

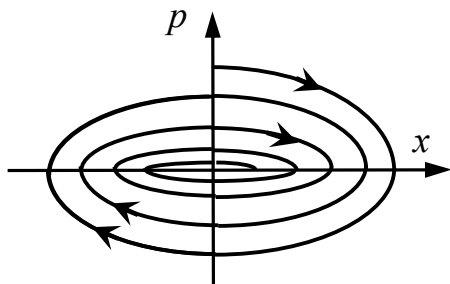


Рис. 10

коливань зводиться до спіралі, яка наведена на рис. 10 і яка при  $t \rightarrow \infty$  прямує до початку координат – точки  $x = 0$ ,  $p = 0$ .

### 1.12. Характеристики вільних згасаючих коливань

Основними характеристиками вільних згасаючих коливань є час релаксації, коефіцієнт загасання, логарифмічний декремент, добротність.

Дамо означення цим поняттям.

Час, за який амплітуда коливань зменшується в  $e$ -разів називають *часом релаксації*. Позначають час релаксації грецькою буквою  $\tau$ .

Вище показано, що амплітуда згасаючих коливань зменшується за експоненціальним законом

$$A(t) = Ae^{-\beta t}.$$

Її зменшення в  $e$ -разів,  $\frac{A}{A(\tau)} = e$ , відбувається в момент часу, коли показник експоненти дорівнює „-1”, тобто  $\beta\tau = 1$ . Звідки знаходимо, що час релаксації  $\tau = \frac{1}{\beta}$ . Таким чином, час релаксації обернено пропорційний до параметра  $\beta$ , який, в свою чергу, називають *коефіцієнтом згасання*.

Коефіцієнт згасання, як було визначено вище, задається співвідношенням

$$\beta = \frac{\eta}{2m}.$$

З'ясуємо, як властивості речовини, з якої виготовлено тіло, що здійснює коливання, впливають на коефіцієнт згасання та час релаксації. Для цього розглянемо дві кульки однакового розміру. Перша, наприклад, виготовлена з пластмаси, а друга – з свинцю. Густини кульок  $\rho_{nl}$  і  $\rho_{cv}$ , а діаметри –  $d_{nl} = d_{cv} = d$ . Нехай також поверхні кульок мають однакову шорхуватість і пофарбовані однаковою фарбою, щоб рівним були коефіцієнти в'язкого тертя:  $\eta_{cv} = \eta_{nl} = \eta$ . За цих умов коефіцієнти релаксації мають вигляд:

$$\beta_{nl} = \frac{\eta_{nl}}{2\rho_{nl} \frac{\pi d_{nl}^3}{6}} = \frac{3\eta}{\pi\rho_{nl}d^3}, \quad \beta_{cv} = \frac{\eta_{cv}}{2\rho_{cv} \frac{\pi d_{cv}^3}{6}} = \frac{3\eta}{\pi\rho_{cv}d^3}.$$

Звідки легко знайти, що відношення коефіцієнтів та часів релаксації для цих кульок будуть визначатимуться відношенням

$$\frac{\beta_{пл}}{\beta_{св}} = \frac{\rho_{св}}{\rho_{пл}}, \quad \frac{\tau_{св}}{\tau_{пл}} = \frac{\rho_{св}}{\rho_{пл}},$$

тобто безпосередньо залежать від густини.

Для отриманого відношення густин кульок можна наближено записати:

$$\frac{\rho_{св}}{\rho_{пл}} \approx \frac{13}{2} \geq 6, \text{ тому час релаксації згасаючих коливань маятника зі свинцевою}$$

кулькою буде значно більший часу релаксації пластмасової кульки. Це означає, що малі коливання свинцевої кульки продовжуватимуться у часі значно довше.

Щоб розрізнити описані ситуації, вводять величину, що обернена до кількості коливань, які відбуваються за час релаксації. Її називають *логарифмічним декрементом* і позначають буквою  $\theta$ . Нехай  $N_e$  – кількість коливань, які здійснить коливальна система за час релаксації  $\tau$  (індекс „e” позначає зменшення амплітуди в  $e$ -разів). Тоді за наведеним означенням логарифмічний декремент

$$\theta = \frac{1}{N_e}.$$

З іншого боку, кількість коливань, які здійснює система за час релаксації, можна знайти також з відношення  $N_e = \frac{\tau}{\tilde{T}}$ . Тому логарифмічний декремент

$$\theta = \frac{\tilde{T}}{\tau},$$

де знак « $\sim$ » підкреслює, що відповідні коливання є згасаючими.

Величина  $\theta$  характеризує процес зміни амплітуди коливань при їх згасанні. З’ясуємо тепер, як змінюється амплітуда коливань за відрізок часу, рівний одному періоду, від моменту часу  $t_1$  до моменту часу  $t_2 = t_1 + \Delta t$ , інтервал між якими  $\Delta t = \tilde{T}$  є періодом.

Запишемо вираз для амплітуди коливань для моменту часу  $t_1$ :

$$A(t_1) = Ae^{-\beta t_1}.$$

А тепер запишемо вираз для амплітуди коливань для моменту часу  $t_2 = t_1 + \tilde{T}$

$$A(t_2) = A(t_1 + \tilde{T}) = Ae^{-\beta(t_1 + \tilde{T})} = Ae^{-\beta t_1} e^{-\beta \tilde{T}} = A(t_1) e^{-\beta \tilde{T}}.$$

Шукане відношення цих амплітуд має вигляд:

$$\frac{A(t_1)}{A(t_2)} = \frac{A(t_1)}{A(t_1 + \tilde{T})} = e^{\beta \tilde{T}}.$$

Знайдемо логарифм цього виразу

$$\beta \tilde{T} = \ln \frac{A(t_1)}{A(t_1 + \tilde{T})}$$

і врахуємо, що коефіцієнт згасання є величиною оберненою до часу релаксації, тобто  $\beta = 1/\tau$ .

Отже, можна записати

$$\frac{\tilde{T}}{\tau} = \ln \frac{A(t_1)}{A(t_1 + \tilde{T})}.$$

В цій рівності зліва записано відношення періоду до часу релаксації, яке є логарифмічним декрементом.

Таким чином, приходимо до висновку, що логарифмічний декремент – це не що інше, як характеристика ступеня послаблення амплітуди коливань за час, рівний їх періоду:

$$\theta = \ln A(t) - \ln A(t + \tilde{T}),$$

де ми прибрали індекс у часової змінної, оскільки момент часу  $t_1$  був вибраний довільно.

Продовжуючи, доведемо, що ще одна характеристика коливань – добротність визначає втрати енергії коливальної системи під час згасаючого коливного процесу.

Дійсно, розглянемо енергію коливальної системи для двох моментів часу, інтервал між якими знову дорівнює періоду і зміщення в яких максимальні. Тоді для моменту часу  $t_1$  максимальне зміщення  $x_{\max}(t_1) = A(t_1) = Ae^{-\beta t_1}$ , а для моменту часу  $t_2$  воно дорівнює  $x_{\max}(t_2) = A(t_1 + \tilde{T}) = Ae^{-\beta(t_1 + \tilde{T})}$ . В точках максимумів зміщення система має тільки потенціальну енергію, яка для зафіксованих моментів часу може бути легко розрахована:

$$U(t_1) = \frac{1}{2} kx_{\max}^2(t_1) = \frac{1}{2} kA^2(t_1) = \frac{1}{2} kA^2 e^{-2\beta t_1},$$

$$U(t_1 + \tilde{T}) = \frac{1}{2} kx_{\max}^2(t_1 + \tilde{T}) = \frac{1}{2} kA^2(t_1 + \tilde{T}) = \frac{1}{2} kA^2 e^{-2\beta(t_1 + \tilde{T})}.$$

На цьому інтервалі втрати енергії, що йдуть на компенсацію роботи сили тертя, визначаються різницею

$$\Delta U = U(t_1) - U(t_1 + \tilde{T}),$$

яку можна записати інакше:

$$\Delta U = \frac{1}{2} k A^2 (e^{-2\beta t_1} - e^{-2\beta(t_1 + \tilde{T})}) = \frac{1}{2} k A^2 e^{-2\beta t_1} (1 - e^{-2\beta \tilde{T}}).$$

Як бачимо, приріст потенціальної енергії, а фактично повної енергії, залежить від вибраного моменту часу  $t_1$ , тому доцільно ввести відносну характеристику процесу втрат енергії коливальною системою.

*Добротність*, яку позначають буквою  $Q$ , знаходять з відношення початкової енергії коливальної системи до величини зменшення енергії системи за час одного періоду

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E},$$

яке в нашому випадку є:

$$Q = 2\pi \frac{U}{\Delta U}.$$

Підставимо в цю формулу вище розраховані величини для енергії та її зміни:

$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2} k A^2 e^{-2\beta t_1}}{\frac{1}{2} k A^2 e^{-2\beta t_1} (1 - e^{-2\beta \tilde{T}})} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\beta \tilde{T}}}.$$

Як видно з отриманого виразу, добротність не залежить ні від часу, ні від амплітуди коливань, а тому є дуже зручною характеристикою будь-якої коливальної системи.

Коли згасання мале  $\beta \tilde{T} \ll 1$ , що відповідає нерівності  $\tilde{T} \ll \tau$ , можна скористатися наближеним значенням експоненти, розклавши її:  $e^{-2\beta \tilde{T}} \approx 1 - 2\beta \tilde{T}$ . Тоді приходимо до більш простого і часто використовуваного виразу для добротності

$$Q = \frac{\pi}{\beta \tilde{T}}.$$

Добуток у знаменнику, як вже нам відомо, є логарифмічним декрементом:  $\theta = \beta \tilde{T}$ . В результаті, маємо, що добротність і логарифмічний декремент є зв'язаними простим співвідношенням

$$Q = \frac{\pi}{\theta}.$$

З іншого боку, добротність пропорційна кількості  $N_e$  коливань за час релаксації, тому можна записати, що

$$Q = \pi N_e.$$

За вище наведеним означеннями, коефіцієнт згасання  $\beta = \frac{\eta}{2m}$ , період  $\tilde{T} = \frac{2\pi}{\tilde{\omega}_0}$ , а їх частота  $\tilde{\omega}_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ , де  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  – частота власних коливань.

Підставляючи ці формули у вираз для добротності, знаходимо:

$$Q = \sqrt{\frac{mk}{\eta^2} - \frac{1}{4}}.$$

У більшості коливальних систем добротність набагато більша одиниці; зокрема, для механічних систем з  $Q \gg 1$  можна користуватися наближеною формулою

$$Q = \frac{\sqrt{mk}}{\eta}.$$

Зауважимо, що таку величину для  $Q$  можна отримати і з відношення амплітудного значення пружної сили  $F_{np}^{(max)} = kA$  до амплітудного значення сили тертя  $F_{тер}^{(max)} = \eta \tilde{\omega}_0 A = \eta A \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ . Отже,  $F_{np}^{(max)} / F_{тер}^{(max)} = k / \eta \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \approx k / \eta \omega_0 = \frac{k}{\eta \sqrt{k/m}} = \frac{\sqrt{mk}}{\eta} = Q$ , де, зрозуміло, враховано, що  $\omega_0 \gg \beta$ .

### 1.13. Аперіодичний процес

Треба сказати, що не завжди коливальні системи знаходяться у коливальному режимі, і буває так, коли він у такій системі, яка виведена з стану рівноваги, не встановлюється. Перехідний процес, яким є реакція системи на збурення і який відбувається у вигляді монотонного (без періодичних коливань) повернення системи до початкового стану чи переходу до нового стану рівноваги називають *аперіодичним*. Аперіодичний процес виникає як «відповідь» системи на порушення її рівноваги і стосується відновленню останньої. З'ясуємо умови, за якими повернення системи до свого рівноважного стану відбувається без виникнення коливального процесу.

Запишемо для цього диференціальне рівняння, яке описує рух коливальної системи при її незначному відхиленні від положення рівноваги

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \eta \frac{dx}{dt} + kx = 0.$$

Як і вище, перепишемо це рівняння у вигляді

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0,$$

де  $\beta = \frac{\eta}{2m}$ ,  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ , а  $m$  і  $\eta$  – маса та коефіцієнт тертя.

Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$x(t) = C_+ e^{\lambda_+ t} + C_- e^{\lambda_- t},$$

де знову  $C_+$  та  $C_-$  – довільні сталі, а  $\lambda_{\pm} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ .

При  $\omega_0 > \beta$ , коли під коренем у виразі для  $\lambda_{\pm}$  стоїть від'ємна величина, у системі при її збудженні виникають, як було показано, згасаючі коливання.

Якщо ж  $\beta > \omega_0$  параметри  $\lambda_{\pm}$  є дійсними і реакція системи на збудження буде описуватися виключно дійсними експоненціальними функціями.

Для механічної системи, у якій згасання настільки велике, що виконується нерівність  $\beta > \omega_0$ , загальний розв'язок диференційного рівняння для зміщення набуває вигляду

$$x(t) = C_+ e^{(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + C_- e^{(-\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t}.$$

Як видно, в механічній системі при великій силі тертя гармонічні коливання не виникають, то згідно до наведеного означення відбувається аперіодичний процес.

Значення сталих  $C_+$  та  $C_-$  знаходять, використовуючи початкові умови  $x_0 = x(t=0)$  для зміщення системи та її початкової швидкості  $v_0 = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0}$ .

Задовольняючи цим умовам, приходимо до системи двох рівнянь

$$x_0 = C_+ + C_-,$$

$$v_0 = C_+(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}) + C_-(-\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}) = (C_+ - C_-)\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} - \beta x_0.$$

Зробимо прості перетворення у другому рівнянні, що дає:

$$C_+ + C_- = x_0,$$

$$C_+ - C_- = \frac{v_0 + \beta x_0}{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}}.$$

Розв'язком цієї системи двох лінійних рівнянь є значення:

$$C_+ = \frac{1}{2} \left( x_0 + \frac{v_0 + \beta x_0}{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} \right), \quad C_- = \frac{1}{2} \left( x_0 - \frac{v_0 + \beta x_0}{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} \right).$$



Таким чином, для довільних величин початкової швидкості  $v_0$  та зміщення  $x_0$  аперіодичний процес переходу механічної системи до початкового стану рівноваги описується виразом:

$$x(t) = \frac{1}{2} e^{-\beta t} \left[ \left( x_0 + \frac{v_0 + \beta x_0}{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} \right) e^{t\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} + \left( x_0 - \frac{v_0 + \beta x_0}{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} \right) e^{-t\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} \right].$$

Принципово, що незалежно від початкових умов величина зміщення при  $t \rightarrow \infty$  прямує до нуля:  $x(t \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ , тобто система плавно повертається у свій вихідний стан, або до рівноваги.

У випадку, коли систему відхилили від положення рівноваги  $x_0 \neq 0$  і відпустили з нульовою швидкістю  $v_0 = 0$ , часова залежність зміщення описується іншим виразом, а саме:

$$x(t) = \frac{x_0}{2} e^{-\beta t} \left[ \left( 1 + \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} \right) e^{t\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} + \left( 1 - \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} \right) e^{-t\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} \right],$$

або

$$x(t) = x_0 e^{-\beta t} \left[ ch(t\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}) + \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} sh(t\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}) \right],$$

де використані функції гіперболічних косінуса та синуса.

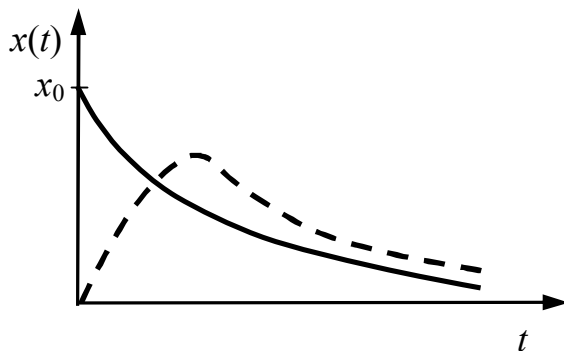


Рис. 11

При такому способі збудження системи зміщення буде монотонно спадаючою функцією від часу, хід якої на рис. 11 показано суцільною кривою.

Коли ж системі в положенні рівноваги  $x_0 = 0$  миттєво надали початкової швидкості,  $v_0 \neq 0$ , часова залежність зміщення описується наступним виразом

$$x(t) = \frac{1}{2} e^{-\beta t} \frac{v_0}{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} (e^{t\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} - e^{-t\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}}),$$

або

$$x(t) = \frac{v_0}{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} e^{-\beta t} sh(t\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}).$$

Видно, що в цьому випадку зміщення визначається добутком спадаючої та зростаючої функцій, а тому функція часової залежності  $x(t)$  має максимум.

Хід цієї часової залежності зміщення від часу для такого способу збурення на рис. 11 показаний пунктирною кривою.

#### 1.14. Диференційне рівняння вимушених гармонічних коливань

Коли на коливальну систему діє зовнішня сила, яка сама періодично залежить від часу, в системі виникають і відбуваються *вимушені* коливання. Обмежимося розглядом вимушених коливань, коли часова залежність зовнішньої періодичної сили описується функцією

$$\vec{F} = \vec{F}_{\max} \cos \omega t,$$

де  $\vec{F}_{\max}$  – максимальне (амплітудне) значення сили, а  $\omega$  – її частота.

Для простоти розглянемо горизонтальний пружинний маятник, жорсткість пружини якого дорівнює  $k$ , а маса тіла –  $m$ .

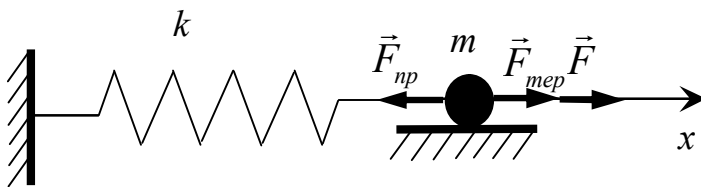


Рис. 12

При записі рівняння руху тіла маятника врахуємо, що на нього, крім пружної сили  $\vec{F}_{np}$  (див. рис. 12), діють також сила в'язкого тертя  $\vec{F}_{mep}$  та зовнішня сила  $\vec{F}$ , яка направлена горизонтально.

У відповідності до другого закону Ньютона запишемо рівняння

$$m\vec{a} = \vec{F}_{np} + \vec{F}_{mep} + \vec{F}.$$

Сила в'язкого тертя направлена протилежно до швидкості і згідно припущенню відповідає закону Стокса

$$\vec{F}_{mep} = -\eta \vec{v},$$

де  $\eta$  – константа. У випадку системи, яку зображено на рис. 12, будуть спостерігатися одновимірні коливання. Координатну вісь направимо вздовж лінії руху тіла. В цій системі проекція сили тертя буде пропорційна похідній від зміщення  $x$ :

$$F_{mep}^x = -\eta v_x = -\eta \frac{dx}{dt}.$$

В такий спосіб введеній системі координат рівняння другого закону Ньютона набуде вигляду

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \eta \frac{dx}{dt} + F_{\max} \cos \omega t,$$

де ми опустили індекс проекції у зовнішньої сили.

Поділимо це рівняння на  $m$  та введемо нові позначення, звідки отримаємо диференціальне рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_m \cos \omega t,$$

В якому, як і раніше,  $\beta \equiv \frac{\eta}{2m}$  – коефіцієнт згасання,  $\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}$  – власна частота, а  $f_m \equiv \frac{F_{\max}}{m}$ .

Отримане диференціальне рівняння другого порядку є неоднорідним і містить в правій частині періодичну функцію, яка залежить від часу. Це рівняння називають *диференціальним рівнянням вимушених коливань*.

### 1.15. Розв'язок диференціального рівняння вимушених гармонічних коливань

Як було показано, вимушені коливання описуються неоднорідним диференціальним рівнянням

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_m \cos \omega t.$$

Очевидно, що у загальному випадку його розв'язок можна представити сумою розв'язків однорідного рівняння  $x_{od}(t)$  та окремого (частинного) розв'язку  $x_{част}(t)$ , який задовольняє ненульовій правій частині рівняння

$$x(t) = x_{od}(t) + x_{част}(t).$$

Однорідне рівняння описує згасаючі коливання, і функція його розв'язку експоненціальна згасає з часом:

$$x_{od}(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \varphi_o).$$

Визначимо, як залежить від часу зміщення для усталених коливань, коли виконується припущення, що зовнішня сила діє нескінченно довго. В цьому випадку доданком до зміщення від вільних згасаючих коливань можна знехтувати (бо  $t \rightarrow \infty$ ), тому для усталених коливань зміщення визначається лише частинним розв'язком диференціального рівняння  $x(t) = x_{част}(t)$ .

Припустимо, що зміщення для таких коливань буде гармонічним з постійною незалежною від часу амплітудою і відбуватися з частотою

вимушуючої сили. За такого припущення зміщення можна представити у вигляді

$$x(t) = \operatorname{Re} A e^{i\omega t}.$$

Підставимо показникову функцію  $A e^{i\omega t}$  в диференціальне рівняння та отримаємо:

$$i^2 \omega^2 A e^{i\omega t} + 2i\beta\omega A e^{i\omega t} + \omega_0^2 A e^{i\omega t} = f_m e^{i\omega t},$$

де враховано, що  $\operatorname{Re} e^{i\omega t} = \cos \omega t$ .

З виписаного рівняння знаходимо амплітуду

$$A = A(\omega) = \frac{f_m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega}.$$

Помножимо чисельник і знаменник дробу амплітуди на вираз, який комплексно спряжений до знаменника, в результаті чого маємо:

$$A(\omega) = f_m \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\beta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega)(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\beta\omega)} = f_m \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\beta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}.$$

Врахуємо, що будь-яке комплексне число  $z$  може бути представлене

у вигляді  $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z = \sqrt{\operatorname{Re}^2 z + \operatorname{Im}^2 z} e^{i \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}}$ . Згідно з цим представленням знаходимо, що

$$\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\beta\omega = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2} e^{i \operatorname{arctg} \frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}}.$$

Тепер вираз для амплітуди можна переписати у спосіб:

$$A(\omega) = \frac{f_m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} e^{i \operatorname{arctg} \frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}}$$

Отже, для усталених вимушених коливань зміщення описується формулою

$$x(t) = \operatorname{Re} \frac{f_m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} e^{i(\omega t + \operatorname{arctg} \frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2})}.$$

Дійсна її частина має вигляд

$$x(t) = \frac{f_m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cos(\omega t - \operatorname{arctg} \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}).$$

Таким чином, сформулюємо основні висновки:

- усталені вимушені коливання завжди мають частоту зовнішньої періодичної сили;

- амплітуда усталених вимушених коливань прямо пропорційна амплітудному значенню вимушуючої сили;
- фаза коливань зміщення зсунута відносно фази зовнішньої періодичної сили так, що коливання зміщення завжди відбуваються з запізненням по відношенню до коливань вимушуючої сили, причому спочатку, коли  $\omega < \omega_0$ , це запізнення менше  $\pi / 2$ , при  $\omega = \omega_0$  досягає  $\pi / 2$ , а потім, коли  $\omega > \omega_0$ , запізнення по фазі знаходиться в інтервалі від  $\pi / 2$  до  $\pi$ .

### 1.16. Резонанс

Коли на коливальну систему діє гармонічна сила  $F = F_{\max} \cos \omega t$ , де  $F_{\max}$  – амплітудне значення сили, а  $\omega$  – її циклічна частота, то через деякий час в системі, як було вище продемонстровано, виникають усталені коливання, частота яких дорівнює частоті вимушуючої сили, а їх зміщення описуються виразом

$$x(t) = A(\omega) \cos(\omega t - \alpha),$$

де

$$A(\omega) = \frac{F_{\max}}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$$

– амплітуда, а

$$\alpha = \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

– зсув фаз для часових залежностей сили і зміщення.

Нагадаємо також, що в цих формулах  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ ,  $\beta = \frac{\eta}{2m}$ , де  $m$  – маса тіла,  $k$  – жорсткість пружини (ефективна жорсткість коливальної системи), а  $\eta$  – коефіцієнт в'язкого тертя.

З наведених формул випливає, що амплітуда усталених вимушених коливань залежить від частоти зовнішньої сили. Видно, що залежність амплітуди  $A(\omega)$  від частоти зовнішньої сили має максимум, який є прямим наслідком того, що її знаменник має мінімум. Тому при знаходженні точки максимуму амплітуди обмежимося розглядом похідної від виразу, що стоїть під коренем у знаменнику для  $A(\omega)$ , та прирівняємо цю похідну нулю

$$-2 \cdot 2\omega(\omega_0^2 - \omega^2) + 8\beta^2\omega = 0.$$

Звідси знаходимо, що точці екстремуму амплітуди відповідає частота

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

Звернемо увагу, що частота  $\omega_p$ , яку прийнято називати *резонансною*, не співпадає ні з власною частотою  $\omega_0$  вільних незгасаючих коливань, ні з частотою  $\tilde{\omega}_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  вільних згасаючих коливань, причому  $\omega_p < \tilde{\omega}_0 < \omega_0$  (зауважимо також, що у відсутності тертя всі ці частоти співпадають). На резонансній частоті амплітуда вимушених коливань має найбільше значення

$$A(\omega_p) = A_p = \frac{F_{\max}}{m\sqrt{(2\beta^2)^2 + 4\beta^2(\omega_0^2 - 2\beta^2)}} = \frac{F_{\max}}{2m\beta\tilde{\omega}_0}.$$

Коли  $\beta \ll \omega_0$ , амплітуда коливань на резонансній частоті має величину

$$A_p = \frac{F_{\max}}{2m\beta\omega_0} = \frac{F_{\max}}{\eta\omega_0},$$

або

$$A_p = \frac{F_{\max}}{\eta} \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

З наведених виразів для  $A_p$  видно, що при  $\omega = \omega_p$  амплітудне значення зовнішньої сили дорівнює максимальному значенню сили тертя  $F_{\max} = \eta\omega_0 A_p = F_{\text{тер}}^{(\max)}$ . Таке узгодження величин сил означає, що за умови  $\omega = \omega_p$  часова залежність зовнішньої сили та часова залежність швидкості коливальної системи мають однакову фазу.

Дійсно, з виразу для зсуву фаз  $\alpha(\omega)$  маємо, що на резонансній частоті  $\alpha(\omega = \omega_p) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ . Синфазність коливань зовнішньої сили та швидкості коливальної системи призводить до того, що потужність зовнішньої сили дорівнює (за модулем) потужності сили тертя, а отже на резонансній частоті робота зовнішньої сили виконується виключно для компенсації сили тертя.

Явище значного зростання амплітуди вимушених коливань при зміні частоти коливань і прямуванні  $\omega \rightarrow \omega_0$  називається *резонансом*. Повний резонанс виникає на так званій резонансній частоті коливальної системи. В складних системах власна частота може бути не одна (в деяких випадках їх

кількість може бути практично необмеженою), що, в свою чергу, визначає наявність в таких системах цілого набору резонансних частот.

На рис. 13 наведено залежності амплітуди вимушених коливань від частоти зовнішньої сили. Такі залежності можна отримати і експериментально, коли в умовах експерименту є можливість змінювати частоту зовнішньої сили, залишаючи при цьому незмінним амплітудне значення останньої.

Графіки залежності  $A(\omega)$  називають *резонансними кривими*. На рис. 13

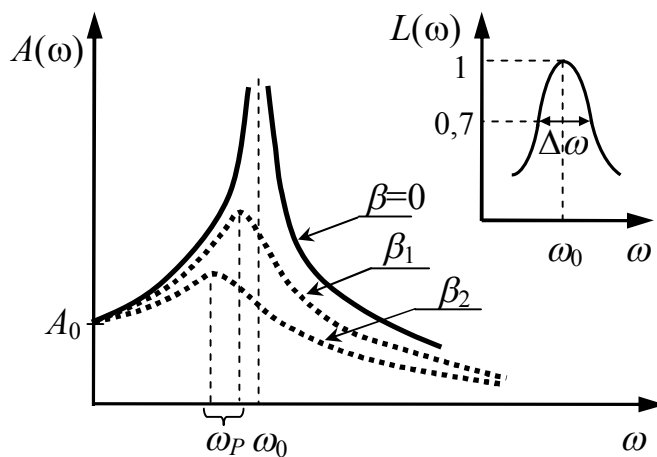


Рис. 13

такі криві побудовані для різних значень коефіцієнту згасання,  $\beta_2 > \beta_1$  та  $\beta = 0$ . Видно, що при зменшенні коефіцієнту згасання амплітуда вимушених коливань зростає, резонансна крива звужується і стає більш гострою. Відповідно, зростає амплітуда коливань на резонансній частоті  $\omega_p$ . Коли  $\beta \rightarrow 0$ , резонансна частота прямує до значення власної частоти  $\omega_p \rightarrow \omega_0$ , а

амплітуда при резонансі прямує до нескінченості  $A_p(\beta \rightarrow 0) \rightarrow \infty$ . При  $\omega \rightarrow 0$  амплітуда зміщення у відповідності до закону Гука приймає значення  $A_0 = A(\omega \rightarrow 0) = \frac{F_{\max}}{k}$ . Коли ж  $\omega \gg \omega_p$  і, більше того,  $\omega \rightarrow \infty$ , амплітуда вимушених коливань прямує до нуля  $A(\omega \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ .

При слабкому згасанні вираз  $A(\omega)$  для амплітуди вимушених коливань можна значно спростити, якщо скористатися наступними наближеннями:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = (\omega_0 - \omega)^2 (\omega_0 + \omega)^2 \approx 4\omega_0^2 (\omega_0 - \omega)^2,$$

$$4\beta^2 \omega^2 \approx 4\beta^2 \omega_0^2.$$

З їх урахуванням вираз для  $A(\omega)$  набуде вигляду

$$A(\omega) = \frac{F_{\max}}{2m\beta\omega_0} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 / \beta^2 + 1}}, \text{ або } A(\omega) = \frac{F_{\max} Q}{k} L(\omega),$$

де  $L(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 / \beta^2 + 1}}$  позначено функцію, яку у фізиці прийнято

називати *лоренцевою* функцією, або, інколи *лоренціаном*,  $Q = \frac{1}{\eta} \sqrt{mk}$  – добротність.

Ширину  $\Delta\omega$  резонансної кривої знаходять з умови зменшення амплітуди коливань в  $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$  разів (див. рис. 13). Очевидно, що ширина резонансної кривої становить  $\Delta\omega = 2\beta$ .

Підсумовуючи, слід також наголосити, що добротність коливальної системи можна визначити з ширини резонансної кривої. Дійсно, для слабкого згасання справедливе наближення  $Q = \frac{\pi}{\beta T} \approx \frac{\pi}{\beta T} = \frac{2\pi}{\Delta\omega} \frac{\omega_0}{2\pi}$ , з якого приходимо до формули

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega},$$

яка широко використовується у практиці.

### 1.17. Параметричний резонанс

Явище резонансу спостерігається не тільки за умови дії зовнішньої періодичної вимушуючої сили необхідної частоти, а й тоді, коли відбувається періодична зміна того чи іншого параметру коливальної системи. В цьому випадку можна також досягти великих значень амплітуди коливань, які тим самим визначатимуть явище *параметричного резонансу*. Збурити коливання маятника (наприклад, гойдалки) легше за все, коли частота поштовхів (що відіграють роль зовнішньої сили) співпадає з власною частотою коливань самої гойдалки – це випадок звичайного резонансу. Але досягти значної амплітуди коливань гойдалки можна і тоді, коли на ній дитина вчасно присідає та випрямляється – це вже випадок параметричного резонансу. Легко перевірити, що при цьому частота присідань дитини на гойдалці має бути приблизно в два рази більшою частоти власних коливань гойдалки з дитиною, коли дитина гойдається без присідань. Причина параметричного розкачування гойдалки обумовлена тим, що присідаючи та випрямляючись дитина змінює положення центру тяжіння, а отже – ефективну довжину маятника. Крім того, періодично рухаючись, дитина виконує роботу, що йде на зростання амплітуди коливань.

Розберемо явище параметричного резонансу на простому прикладі математичного маятника. Рівняння коливань такого маятника має вигляд



$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2\varphi = 0,$$

де, як ми знаємо, власна частота  $\omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$ . Якщо під час коливного процесу

змінюється довжина маятника, то відношення  $\frac{g}{\ell}$  стає залежним від часу, тобто залежною від часу стає і частота  $\omega_0$ . Коли зміна довжини маятника здійснюється за гармонічним законом, вираз для довжини математичного маятника може бути представлений у вигляді:

$$\ell(t) = \ell_0(1 - \delta \sin \omega t),$$

де  $\delta < 1$  – стала.

Припустимо, що виконується нерівність  $\delta \ll 1$ , тоді відношення прискорення вільного падіння до довжини маятника можна записати наступним чином

$$\frac{g}{\ell(t)} = \frac{g}{\ell_0(1 - \delta \sin \omega t)} \approx \frac{g}{\ell_0}(1 + \delta \sin \omega t) = \omega_0^2(1 + \delta \sin \omega t),$$

де тепер  $\omega_0^2 = \frac{g}{\ell_0}$  і є сталою величиною.

Отже рівняння, яке описує процес коливань маятника за умови, що його довжина періодично змінюється, набуває вигляду:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2(1 + \delta \sin \omega t)\varphi = 0.$$

Це диференціальне рівняння називають *рівнянням Мат'є*. Воно добре вивчене у математиці, його розв'язками є так звані *функції Мат'є*.

Особливий інтерес представляють розв'язки, що відповідають певним співвідношенням частот  $\omega_0$  та  $\omega$ . Наприклад, у випадку, коли частота  $\omega$  задовольняє співвідношенню

$$\omega = \frac{2\omega_0}{n},$$

де  $n$  – ціле число, відбувається зростання амплітуди коливань системи.

Розв'язок рівняння Мат'є для таких значень частот представляє собою зростаючу з часом амплітуду, помножену на гармонічну функцію з частотою  $\omega_0$ .

Найбільш цікавим є випадок  $n=1$ , коли частота зміни параметру в два рази перевищує власну частоту коливальної системи, тобто  $\omega = 2\omega_0$ .

Переконаємося, що в цьому випадку дійсно відбуватиметься значне розкачування маятника.

Для математичного маятника ефективною пружною силою є сила тяжіння, потужність якої

$$N = M \frac{d\varphi}{dt} = -mg\ell_0(1 - \delta \sin \omega t) \cdot \varphi \frac{d\varphi}{dt},$$

де  $M$  – момент сили тяжіння,  $\frac{d\varphi}{dt}$  – кутова швидкість, а плече сили тяжіння

$\ell(t) \sin \varphi \approx \ell_0(1 - \delta \sin \omega t) \cdot \varphi$ . Знак мінус враховує, що момент сили тяжіння протилежний до кутового зміщення.

Якщо коливання відбуваються з власною частотою коливальної системи і описуються виразом  $\varphi(t) = A \sin \omega_0 t$ , то вираз для потужності набуде вигляду

$$N = -mg\ell_0 A^2 \omega_0 (1 - \delta \sin \omega t) \cos \omega_0 t \sin \omega_0 t = -\frac{1}{2} mg\ell_0 A^2 \omega_0 (1 - \delta \sin \omega t) \sin 2\omega_0 t.$$

Розрахуємо середнє значення потужності за час, набагато більший періоду:  $t \gg T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ . Середнє синуса дорівнює нулю, тому величина середньої потужності буде визначатися середнім значенням добутку двох синусів

$$\langle N \rangle = \frac{1}{2} mg\ell_0 A^2 \omega_0 \delta \langle \sin \omega t \sin 2\omega_0 t \rangle.$$

З цього виразу випливає, що середнє значення потужності, розраховане за час набагато більший періоду, буде відмінне від нуля тільки при  $\omega = 2\omega_0$ , коли воно є скінчене і додатне:  $\langle N \rangle = \frac{1}{4} mg\ell_0 A^2 \omega_0 \delta$ .

Таким чином, якщо довжина маятника дещо змінюється з частотою  $\omega = 2\omega_0$ , яка і стає частотою параметричного резонансу, то амплітуда коливань системи зростатиме, оскільки в цьому випадку сила тяжіння знову стає розгойдувальною силою. В протилежному випадку, коли  $\omega \neq 2\omega_0$ , величина  $\langle N \rangle \rightarrow 0$  і ефективність сили тяжіння зникає.

### 1.18. Коливання в системах з в'язями

Коливальні системи з в'язями представляють сукупність двох і більшої кількості коливальних систем, які взаємодіють між собою. Інколи такі

системи називають зв'язаними. Найпростішим прикладом зв'язаної коливальної системи можуть бути два горизонтальні пружинні маятники, які з'єднані між собою пружиною (див. рис. 14).

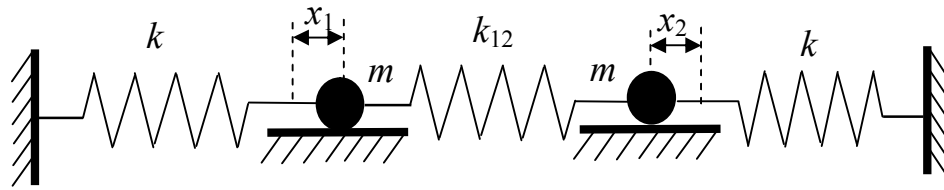


Рис. 14

Припустимо для простоти, що маси тіл обох коливальних систем однакові. Однакові також жорсткості пружин цих коливальних систем. Пружина з жорсткістю  $k_{12}$  забезпечує взаємозв'язок між цими двома пружинними маятниками.

Згідно з другим законом Ньютона маємо два диференціальні рівняння руху:

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -kx_1 - k_{12}(x_1 - x_2),$$

$$m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -kx_2 - k_{12}(x_2 - x_1).$$

Поділимо ці рівняння на масу тіл, переписавши їх у вигляді:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \left(\frac{k}{m} + \frac{k_{12}}{m}\right)x_1 - \frac{k_{12}}{m}x_2 = 0,$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \left(\frac{k}{m} + \frac{k_{12}}{m}\right)x_2 - \frac{k_{12}}{m}x_1 = 0.$$

Позначимо  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ ,  $\gamma^2 = \frac{k_{12}}{m}$  і представимо систему наступним чином:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + (\omega_0^2 + \gamma^2)x_1 - \gamma^2 x_2 = 0,$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + (\omega_0^2 + \gamma^2)x_2 - \gamma^2 x_1 = 0.$$

Будемо шукати розв'язок цих рівнянь у вигляді

$$x_1 = A_1 e^{i\omega t}, \quad x_2 = A_2 e^{i\omega t}.$$

Підставляючи ці функції у диференціальне рівняння, отримаємо систему однорідних лінійних рівнянь

$$(\omega_0^2 + \gamma^2 - \omega^2)A_1 - \gamma^2 A_2 = 0,$$

$$-\gamma^2 A_1 + (\omega_0^2 + \gamma^2 - \omega^2) A_2 = 0.$$

Зазначена система має ненульовий розв'язок тільки у випадку, коли детермінант, побудований з коефіцієнтів цієї системи рівнянь, дорівнює нулеві, тобто

$$\begin{vmatrix} \omega_0^2 + \gamma^2 - \omega^2 & -\gamma^2 \\ -\gamma^2 & \omega_0^2 + \gamma^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи цей детермінант, приходимо до квадратного рівняння

$$(\omega_0^2 + \gamma^2 - \omega^2)^2 - \gamma^4 = 0,$$

якому задовольняють два значення для частоти коливань

$$\omega_{1,2}^2 = \omega_0^2 + \gamma^2 \pm \gamma^2,$$

де

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\gamma^2}, \quad \omega_2 = \omega_0.$$

Таким чином, обидва тіла коливальної системи одночасно приймають участь у двох коливальних рухах з двома різними частотами  $\omega_1$  і  $\omega_2$ , які можна вважати власними частотами зв'язаної коливальної системи.

Для з'ясування, що це за рухи, складемо спочатку обидва рівняння другого закону Ньютона, що дає

$$m \frac{d^2(x_1 + x_2)}{dt^2} = -k(x_1 + x_2),$$

або

$$\frac{d^2(x_1 + x_2)}{dt^2} + \omega_0^2(x_1 + x_2) = 0.$$

Отже маємо, що сума зміщень обох тіл здійснює синфазне коливання з меншою частотою  $\omega_2 = \omega_0$ . Видно, що на таке коливання між маятниковий зв'язок впливу не чинить і воно відбувається так, начебто ніякого зв'язку немає.

Тепер розглянемо різницю рівнянь Ньютона:

$$m \frac{d^2(x_1 - x_2)}{dt^2} = -k(x_1 - x_2) - 2k_{12}(x_1 - x_2),$$

або

$$\frac{d^2(x_1 - x_2)}{dt^2} + (\omega_0^2 + 2\gamma)(x_1 - x_2) = 0.$$

Звідси бачимо, що різниця зміщень тіл коливається з більш високою частотою  $\omega_2$ , яка є частотою протифазного коливання пари, на яке впливає між маятникова взаємодія, збільшуючи вихідну частоту.

Обидва коливальні рухи – як суми, так і різниці зміщень – називаються *нормальними коливаннями*, а їх частоти називаються *нормальними частотами*.

Резонанс у системі з в'язями може спостерігатися при співпадінні частоти зовнішньої сили хоча б з однією з нормальних частот системи. Коли нормальні частоти мають близькі значення (слабкий зв'язок між коливальними системами), можлива резонансна передача енергії з однієї підсистеми до іншої.

### 1.19. Биття

Як вже зазначалося у пунктах 1.15 та 1.18, тіло коливальної системи може здійснювати декілька рухів, кожний з яких можна описувати гармонічними функціями. Розглянемо досить простий випадок, коли тіло здійснює одновимірний коливальний рух, який є сумою двох гармонічних рухів

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t),$$

де

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1),$$

$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

В загальному випадку амплітуди, частоти та фази рухів  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  можуть бути різними. Ми ж розглянемо найбільш цікавий випадок, коли частоти цих рухів незначно відрізняються між собою, причому будемо вважати  $\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$ , а  $\Delta\omega \ll \omega_1$ . Крім того, заради простоти опису припустимо, що амплітуди обох коливань взагалі однакові:  $A_1 = A_2 = A$ . Початкові фази обох коливань приймемо рівними нулю  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ . Коливання, які отримують в результаті накладання двох коливань однакового напрямку з близькими частотами, називають *биттям*.

За зроблених припущень зміщення, що відповідає результуючому коливанню тіла, визначається сумою

$$x(t) = A \cos \omega_1 t + A \cos \omega_2 t.$$

Використаємо представлення суми косинусів їх добутками:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

звідки знаходимо

$$x(t) = 2A \cos \frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2} \cos \frac{(\omega_2 + \omega_1)t}{2} \approx 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cos \omega t.$$

Таким чином, результуючий рух можна представити добутком амплітуди, яка відносно повільно залежить від часу, і гармонічної функції, частота якої дорівнює півсум частот обох коливань  $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ , а період

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Амплітуда результуючого коливання залежить, як видно, від часу і описується виразом

$$A_{\text{бум}}(t) = \left| 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \right|.$$

Отже, биття є коливальним рухом з амплітудою, яка періодично змінюється у часі, а ця залежність є набагато повільнішою, ніж самі коливання.

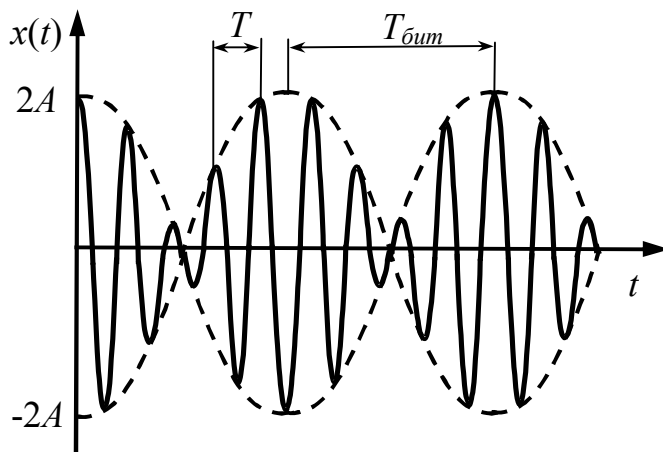


Рис. 15

На рис. 15 наведено часові залежності для зміщення (суцільна крива) та амплітуди (пунктир) биття. Максимальне значення цієї амплітуди дорівнює  $2A$ . Оскільки в правій частині формули для  $A_{\text{бум}}(t)$

стоїть модуль косинуса, то частота зміни амплітуди (частота биття) подвоюється. Період биття визначається різницею частот  $\Delta\omega$ , а саме:

$$T_{\text{бум}} = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

і зазвичай  $T_{\text{бум}} \gg T$ , оскільки  $\Delta\omega \ll \omega$ .

Явище биття є дуже поширеним. Наприклад, коливання моста, які збуджує вантажівка, проїжджаючи по ньому, мають вигляд биття. Спектр подібних коливань є широким, а тому головною проблемою є те, як уникнути спів падіння їх частот з однією з резонансних частот самої споруди, щоб запобігти її можливному руйнуванню.

### 1.20. Питання для самоконтролю

1. Дайте означення механічних коливань та коливальної системи.
2. Що таке спектр?
3. Дайте означення зміщення.
4. Запишіть диференційне рівняння та його розв'язок для вільних незгасаючих коливань.
5. Що таке амплітуда, фаза, частота та період коливань вільних незгасаючих коливань?
6. Як з закону збереження енергії отримати диференційне рівняння для вільних незгасаючих коливань?
7. Чим фізичний маятник відрізняється від математичного маятника?
8. Запишіть диференційне рівняння та його розв'язок для вільних згасаючих коливань.
9. Як сила тертя впливає на частоту та на амплітуду коливань?
10. Дайте означення для коефіцієнта згасання, логарифмічного декременту, добротності.
11. За якої умови виникають згасаючі коливання, а за якої – аперіодичний процес?
12. Запишіть диференційне рівняння та його розв'язок для вимушених коливань.
13. Що таке резонанс і коли він виникає?
14. Як визначити добротність з резонансної кривої?
15. Що таке параметричний резонанс?
16. Поясніть, чому при коливаннях зі зв'язами будуть різні частоти коливань.
17. Поясніть, коли виникають биття.
18. Чи можна спостерігати биття при вимушених коливаннях?

### 1.21. Формули, необхідні для розв'язку задач

1. Формула для коефіцієнта жорсткості коливальної системи

$$k = \left. \frac{d^2 U}{dX^2} \right|_{X=X_0},$$

де  $U$  – потенціальна енергія коливальної системи

2. Диференціальне рівняння для вільних незгасаючих гармонічних коливань

$$\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0,$$

де  $x$  – зміщення відносно положення рівноваги.

3. Розв'язок диференціального рівняння вільних незгасаючих гармонічних коливань

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

де  $A$  – амплітуда коливань.

4. Період власних коливань

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

5. Власна частота для пружинного, математичного та фізичного маятників, відповідно

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{mg\ell}{I}}.$$

6. Диференціальне рівняння для вільних згасаючих гармонічних коливань

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$$

7. Розв'язок диференціального рівняння вільних згасаючих коливань

$$x(t) = A e^{-\beta t} \cos(\tilde{\omega}_0 t + \varphi_0),$$

де  $\tilde{\omega}_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  – частота коливань,  $\beta$  – коефіцієнт згасання.

8. Формули для часу релаксації, логарифмічного декременту та добротності

$$\tau = \frac{1}{\beta}, \quad \theta = \frac{\tilde{T}}{\tau}, \quad Q = \frac{\pi}{\theta},$$

$$\text{де } \tilde{T} = \frac{2\pi}{\tilde{\omega}_0}.$$

9. Диференціальне рівняння для вимушених коливань

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_m \cos \omega t.$$

10. Розв'язок диференційного рівняння вимушених коливань

$$x(t) = A \cos(\omega t - \alpha),$$

де  $A = \frac{f_m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$  – амплітуда коливань,  $\omega$  – частота

зовнішньої сили,  $\alpha = \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$  – різниця фаз коливань між

зовнішньою силою та зміщенням.

11. Формули для резонансної частоти та амплітуди коливань при резонансі



$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}, \quad A_p = \frac{F_{\max}}{2m\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

## 1.22. Задачі

1.1. Запишіть з чисельними коефіцієнтами рівняння коливань, що відбуваються за законом косинуса. Амплітуда коливань становить 0,1 см і за дві хвилини відбувається 300 повних коливань. Початкова фаза є такою, що початкове зміщення складає половину від амплітуди, а тіло у початковий момент часу рухається від положення рівноваги. Побудуйте графік для зміщення

1.2. Запишіть з чисельними коефіцієнтами рівняння гармонічних коливань, коли їх амплітуда становить 1 см, період 2 с, а в початковий момент часу зміщення тіла максимальне. Запишіть вирази для швидкості руху тіла та для його прискорення. Знайдіть амплітудні значення для швидкості та для прискорення. Побудуйте графіки для зміщення, швидкості та прискорення тіла під час цих коливань.

1.3. Швидкість тіла, яке здійснює гармонічні коливання, описується виразом,  $v(t) = v_{\max} \sin(\frac{8\pi t}{t_0} + \frac{\pi}{5})$ , де  $v_{\max}$  – амплітудне значення швидкості,  $t_0$  – постійна. Знайдіть період коливань. Запишіть вираз для зміщення та прискорення. Знайдіть амплітуду коливань та амплітудне значення для прискорення. На який найменший час зсунуті амплітудні значення для зміщення та прискорення?

1.4. Тіло, маса якого  $m$ , здійснює вільні незгасаючі гармонічні коливання, що описуються рівнянням  $x(t) = A \cos(2\pi ft + \frac{\pi}{3})$ . Знайдіть вираз для пружної сили, яка діє на тіло під час цих коливань, та вираз для імпульсу тіла під час коливань.

1.5. Частинка здійснює гармонічні коливання. Частота коливань  $\omega = 4 \text{ с}^{-1}$ . В початковий момент часу зміщення частинки становить 25 см, а її швидкість 1,00 см/с. Знайдіть зміщення частинки на другій секунді коливань.

1.6. Частинка здійснює гармонічні коливання. В момент часу  $t_1$  зміщення частинки дорівнює  $x_1$ , а швидкість –  $v_1$ . А в момент часу  $t_2$  зміщення частинки дорівнює  $x_2$ , а швидкість –  $v_2$ . Знайдіть період коливань та їх амплітуду.

1. 7. Знайдіть середню швидкість маятника, зміщення якого описується виразом  $x(t) = A \cos \omega_0 t$ , де  $A$  – амплітуда, а  $\omega_0$  – частота коливань, за час, рівний четвертій частині періоду від початку коливань.
- 1.8. Частинка, маса якої  $m$ , здійснює гармонічні коливання відносно положення рівноваги  $x = 0$  в потенціальному полі  $U(x) = \alpha x^2 - b \cos \gamma x$ , де  $\alpha > 0$ ,  $b < 0$ . Знайдіть період коливань та вираз для квазіперіодичної сили, яка діє на тіло.
- 1.9. Частинка знаходиться у силовому полі, яке описується енергією  $U(x) = \alpha \cos^2 \gamma x$ , де  $\alpha < 0$ . Знайдіть період гармонічних коливань частинки, якщо її маса дорівнює  $m$ .
- 1.10. Частинка знаходиться у силовому полі, яке описується енергією  $U(x) = \alpha / x^2 - \beta / x$ , де  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ . Знайдіть період гармонічних коливань частинки, якщо її маса дорівнює  $m$ .
- 1.11. Горизонтальний пружинний маятник з кулькою маси  $m$  та жорсткістю пружини  $k$ , здійснює гармонічні коливання, які збуджені поштовхом з положення рівноваги. Запишіть рівняння руху кульки, коли маятник знаходиться у потязі, що рухається рівномірно та прямолінійно зі швидкістю  $v$  по рівнині.
- 1.12. Тіло підвісили до пружини. При цьому вона витягнулася на  $\Delta \ell$ . Знайдіть період власних незгасаючих коливань.
- 1.13. Знайдіть період коливань однорідного циліндричного тіла, радіус якого  $r$ , висота якого  $h$  і який на три четверті від своєї висоти занурений в рідину з густиною  $\rho_{\text{рід}}$ .
- 1.14. Кінці горизонтальної недеформованої пружини з жорсткістю  $k$  зафіксовані. До середини пружини приєднали легеньке тіло, маса якого  $m$ . Знайдіть період коливань тіла.
- 1.15. Два тіла, маси яких однакові, з'єднані горизонтальною пружиною жорсткістю  $k$ . Знайдіть період коливань тіл, коли маса кожного з тіл дорівнює  $m$ .
- 1.16. Знайдіть період поперечних коливань тіла, маса якого  $m$ , і яке закріплене на середині розтягнутого джгута довжиною  $\ell$ . Сила натягу джгута  $F$  і значно більша сили тяжіння, що діє на тіло. При розрахунку періоду коливань масою джгута знехтувати.
- 1.17. Порівняйте періоди коливань математичного маятника, що рухається в ліфті вгору з прискоренням  $a$ , з математичним маятником, що рухається в

ліфті з прискоренням  $-a$ . Зауважимо, що довжини обох маятників однакові, а прискорення  $a$  менше прискорення вільного падіння  $g$  в два рази.

1.18. На якій відстані від центру мас стрижня має проходити вісь обертання, щоб період коливань стрижня співпадав з періодом коливань математичного маятника. Довжина стрижня дорівнює довжині математичного маятника.

1.19. Стрижень здійснює коливання навколо осі, що проходить через його кінець. Довжина стрижня  $\ell$ , маса  $M$ . У скільки разів зміниться період коливань стрижня, якщо до його другого кінця прикріпити точкове тіло, маса якого  $m$ ?

1.20. До кінця стрижня, маса якого  $M$  а довжина  $\ell$ , прикріплено однорідний диск, маса якого  $m$ , а радіус  $r = \ell$ . Центр диску співпадає з рухомим кінцем стрижня. Знайдіть період коливань цього маятника, якщо коливання відбуваються у площині диску, а вісь обертання проходить через другий кінець стрижня.

1.21. Стрижень, довжина якого  $\ell$ , а маса  $M$ , відхилили відносно положення рівноваги на кут  $\varphi_0$  і відпустили без початкової швидкості. Запишіть рівняння коливань для стрижня, коли вісь обертання проходить через кінець стрижня.

1.22. Фізичний маятник здійснює гармонічні коливання, які описуються виразом  $\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\frac{4\pi t}{t_0} + \frac{\pi}{3})$ , де  $t_0$  – стала. Знайдіть період коливань.

Розрахуйте залежність кутової швидкості маятника від часу. Знайдіть також часову залежність для моменту імпульсу маятника, якщо момент інерції маятника відносно його центру становить  $I_C$ , маса маятника  $M$ , а відстань від центру мас до осі обертання становить  $b$ .

1.23. Дано, що момент інерції фізичного маятника відносно осі, щодо якої він здійснює вільні незгасаючі гармонічні коливання, дорівнює  $I$ . Кутова швидкість маятника під час коливань описується виразом  $\frac{d\varphi}{dt} = (\frac{d\varphi}{dt})_{\max} \sin(\frac{8\pi t}{\tau} + \frac{\pi}{3})$ , де  $\tau$  – стала, а  $(\frac{d\varphi}{dt})_{\max}$  – амплітудне значення кутової швидкості. Знайдіть залежність від часу для кутового зміщення маятника, а також вираз для моменту сил, що діють на маятник під час коливань.

1.24. До однорідного диску, маса якого  $m$ , а радіус  $r$ , відносно осі, що проходить через центр диску і перпендикулярна до його площини, прикладено момент сили, величина якого пропорційна куту повороту диску

відносно цієї осі:  $M = -k\varphi$ , де  $k$  – стала, а  $\varphi$  – кут повороту. Знайдіть період коливань диску відносно цієї осі, а також запишіть рівняння коливань, якщо початкове відхилення  $\varphi_0$  і початкова швидкість відсутня.

1.25. Знайдіть середню кутову швидкість фізичного маятника за час, рівний четвертій частині періоду від початку коливань, які описуються залежністю  $\varphi(t) = \varphi_0 \cos \omega_0 t$ , де  $\varphi_0$  – амплітуда, а  $\omega_0$  – частота коливань.

1.26. Тіло, маса якого  $m = 0,1$  кг, здійснює згасаючі коливання за законом  $x(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \cos(2\pi ft + \frac{\pi}{3})$ , де  $\tau = 0,05$  с,  $f = 10$  Гц. Знайдіть період коливань, власну частоту коливань та жорсткість пружини.

1.27. Тіло здійснює згасаючі коливання за законом  $x(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \cos(5\pi \frac{t}{t_0} + \frac{\pi}{3})$ , де  $\tau$  та  $t_0$  сталі. Знайдіть вираз для сили в'язкого тертя під час коливного процесу, якщо маса тіла  $m$ .

1.28. Фізичний маятник здійснює згасаючі коливання, кутове зміщення яких описується виразом  $\varphi(t) = \varphi_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(3\pi \frac{t}{t_0} + \frac{\pi}{5})$ , де  $\tau$  та  $t_0$  сталі. Знайдіть вираз для загального моменту сили в'язкого тертя, що діє на тіло, під час коливального процесу, якщо  $I$  – момент інерції тіла відносно осі, навколо якої здійснюються коливання.

1.29. Логарифмічний декремент згасання математичного маятника дорівнює 0,2. Знайдіть, у скільки разів зменшиться амплітуда коливань за один період коливань.

1.30. Чому дорівнює логарифмічний декремент згасання та добротність математичного маятника довжиною 1 м, якщо за 1 хвилину амплітуда його коливань зменшиться у два рази?

1.31. Точка здійснює згасаючі коливання з частотою  $\omega$ . Знайдіть час релаксації, якщо початкова швидкість точки дорівнює нулеві, а початкове зміщення в  $n$  разів менше амплітуди.

1.32. Тіло підвісили до вертикальної пружини. При цьому вона витягнулася на  $\Delta \ell$ . Знайдіть період згасаючих коливань, якщо добротність коливальної системи становить  $Q$ .

1.33. Тіло коливальної системи має масу  $m = 10$  г, а коефіцієнт згасання коливань становить  $1,6 \text{ с}^{-1}$ . Під дією зовнішньої періодичної сили коливальна система здійснює усталені коливання зі зміщенням, що описується виразом

$x(t) = 5 \sin(10\pi t - \frac{3\pi}{4})$ . Знайдіть період власних коливань системи, а також запишіть вираз для часової залежності зовнішньої періодичної сили, яка призводить до вимушених коливань.

1.34. Знайдіть різницю фаз для зміщення та вимушуючої сили при резонансі, якщо власна частота коливань  $\omega_0$ , а час релаксації –  $\tau$ .

1.35. Рух тіла під дією вимушуючої сили  $F = F_{\max} \cos \omega t$  описується виразом  $x(t) = A \sin \omega t$ . Маса тіла  $m$ . Знайдіть коефіцієнт згасання та коефіцієнт тертя.

1.36. Кулька, маса якої  $m$ , може здійснювати незгасаючі коливання з власною частотою  $\omega_0$ . Коли кулька знаходилася в стані рівноваги з моменту часу  $t = 0$  на кульку почала діяти періодична сила  $F = F_{\max} \cos \omega t$ . Знайдіть закон вимушених коливань кульки.

1.37. Визначте рівняння руху кульки за умов попередньої задачі, коли частота зовнішньої сили співпадає з власною частотою кульки.

1.38. Зміщення тіла під час вимушених коливань описується виразом  $x(t) = A \cos(\omega t - \alpha)$ . Ці коливання збурює сила  $F = F_{\max} \cos \omega t$ . Знайдіть роботу цієї сили за час одного періоду коливань.

1.39. Кутове зміщення тіла під час вимушених коливань описується виразом  $\varphi(t) = \varphi_{\max} \cos(\omega t - \alpha)$ . Ці коливання створює момент сили  $M = M_{\max} \cos \omega t$ . Знайдіть роботу цієї сили за час одного періоду коливань.

## Глава 2. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ КОЛИВАННЯ

Електромагнітні коливання – це коливання, як правило, взаємозв'язаних електричного та магнітного полів. Такі коливальні процеси притаманні багатьом системам, в яких відбувається періодичний рух зарядів (заряджених частинок). Зокрема, електромагнітні коливання супроводжують так звані *квазістаціонарні* процеси, що відбуваються в електричних колах, лінійні розміри яких набагато менші за довжину електромагнітної хвилі з часовим масштабом (періодом) квазіперіодичного процесу. Наприклад, для періодичного процесу з частотою 100 кГц довжина електромагнітної хвилі, яку визначають добутком швидкості світла на період, легко знаходиться і дорівнює  $3 \cdot 10^8 / 10^5 = 3 \cdot 10^3$  м, або 3 км. Якщо періодичний процес зміни електричного поля всередині конденсатора, розміри якого  $\sim 10^{-2}$  м, відбувається на такій частоті, то впливом хвильових явищ взагалі можна знехтувати. При цьому можна вважати, що електричне поле в конденсаторі однорідне, і відбувається тільки періодична з часом зміна напруженості поля, тобто часові коливання останнього.

*Електричними (електромагнітними)* коливаннями називають періодичну зміну заряду на ємностях електричних кіл або періодичну зміну електричного струму на індуктивних чи дисипативних (омічних) ділянках кіл. Таке означення електричних коливань передбачає їх опис через заряди конденсаторів кіл або через струми активних чи індуктивних опорів кіл.

Струми в колах при квазіперіодичних процесах задовольняють рівнянню неперервності. Тому для сили струму та заряду на обкладинках конденсаторів виконується співвідношення  $I = \pm \frac{dq}{dt}$ , яке безпосередньо свідчить: періодична зміна заряду призводить до періодичної зміни струму.

### 2.1. Власні електромагнітні коливання

*Власні електромагнітні коливання* відбуваються в електричному колі, яке містить ємність та індуктивність і яке в цілому називають *коливальним контуром*. На рис. 16 зображено контур з конденсатором ємністю  $C$  та з котушкою, індуктивність якої  $L$ .

Підключимо конденсатор коливального контуру до джерела постійного струму. Обкладинки конденсатора набудуть заряду. Відключимо джерело струму, переведемо ключ з положення 1 до положення 2. Коли ключ

знаходиться в положенні 2, конденсатор і індуктивність утворюють замкнене коло. Тоді конденсатор набуває можливість розрядитися через котушку індуктивності. Але внаслідок явища самоіндукції миттєва компенсація зарядів конденсатора не відбувається.

При підключенні зарядженого конденсатора до котушки в контурі виникає струм, який супроводжується утворенням в котушці електрорушійної сили (ЕРС) самоіндукції, яка протидіє будь-якій часовій зміні струму в колі, бо ЕРС самоіндукції протидіє не тільки наростанню струму, а і його зменшенню.

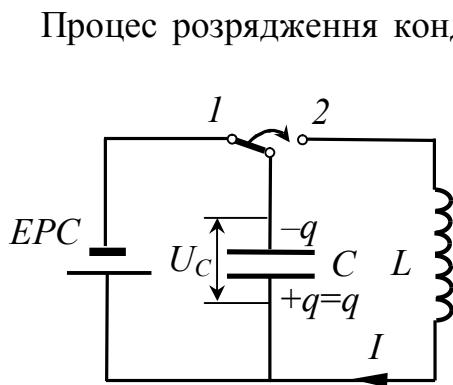


Рис. 16

Процес розрядження конденсатора мав би завершитися, коли миттєве значення його заряду досягне нуля. Але в момент часу, коли заряд конденсатора стає рівним нулеві, миттєве значення сили струму дорівнювати нулю не буде, бо його підтримує ЕРС самоіндукції.

Тому, в той момент, коли накопичений на обкладинках конденсатора заряд компенсується, розпочнеться зворотній процес

зарядження конденсатора. На цьому етапі обкладинки конденсатора набувають зарядів, знаки яких протилежні знакам їх вихідних зарядів. Таке зворотне зарядження конденсатора буде відбуватися до тих пір, поки миттєве значення сили струму знову не стане дорівнювати нулю. В цей момент конденсатор набуває максимального (за модулем) заряду, і знову розпочинається наступний цикл розрядження конденсатора.

Таким чином, приходимо до фізичної картини періодичного процесу в коливальному контурі: при підключенні до котушки зарядженого конденсатора в контурі буде відбуватися циклічний процес розрядження та зарядження конденсатору. Іншою мовою, в коливальному контурі будуть відбуватися коливання електричного поля (в конденсаторі) та магнітного поля (в котушці). Спостерігати за коливаннями можна, наприклад, шляхом вимірювань напруги  $U_C$  на конденсаторі або вимірюванням сили струму  $I(t)$ , що тече в котушці.

Здійснимо математичний опис електричних коливань у коливальному контурі. Напруга на конденсаторі, який підключений паралельно до котушки, дорівнює ЕРС самоіндукції, що виникає в котушці; тому можна записати рівність

$$U_C = -L \frac{dI}{dt},$$

якою враховано, що ЕРС самоіндукції котушки пропорційна швидкості наростання струму, а саме:  $\mathcal{E}_{\text{н}} = -L \frac{dI}{dt}$ .

Для електричних коливань у коливальному контурі виправдовується припущення, за яким для повільних квазістаціонарних коливальних процесів зберігається пряма пропорційність між миттєвими значеннями заряду конденсатора та напруги на ньому. Прийmemo заряд додатно зарядженої обкладинки конденсатора (нижньої обкладинки конденсатора на рис. 16) зарядом конденсатора  $q(t)$ . При обході цього контура за годинниковою стрілкою напруга на конденсаторі  $U_C = \frac{q}{C}$ . З урахуванням цього отримаємо рівняння

$$\frac{q}{C} = -L \frac{dI}{dt}.$$

Для струму, напрямок якого на рис. 16 позначено стрілкою, виконується співвідношення  $I = \frac{dq}{dt}$ , бо заряд перенесений струмом йде на збільшення заряду конденсатора. В результаті, приходимо до диференційного рівняння другого порядку

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0.$$

Коли це рівняння поділити на індуктивність, то фактично отримуємо вже відоме з розгляду механічних коливань диференційне рівняння вільних незгасаючих коливань, а саме:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0,$$

де тепер введено позначення  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ . Величину  $\omega_0$  називають *власною* частотою електричних коливань контуру. Як видно, вона визначається за формулою, яку називають *формулою Томпсона*:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Легко записати період власних коливань:



$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Зрозуміло також, що вільні незгасаючі коливання заряду в контурі в загальному випадку описуються гармонічною функцією

$$q(t) = Q_{\max} \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

де  $Q_{\max}$  – амплітуда заряду,  $\varphi_0$  – початкова фаза. У разі збурення коливань шляхом надання конденсатору початкового заряду, як це показано на рис. 16, часова залежність для заряду описується виразом

$$q(t) = Q_{\max} \cos \omega_0 t,$$

де амплітудне значення заряду  $Q_{\max}$  дорівнює його початковому значенню  $q_0 = q(t=0)$ , яке пропорційне ЕРС джерела постійного струму:  $Q_{\max} = q_0 = CE_{\text{дж}}$ .

Коливання струму також відбувається за гармонічним законом

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = -I_{\max} \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

де  $I_{\max} = \omega_0 Q_{\max}$  – амплітудне значення сили струму. Видно, що воно пропорційне добутку власної частоти на амплітудне значення заряду.

Власні електричні коливання є ідеалізованими, бо при їх визначенні нехтували дією активного електричного опору, і тому такі коливання виявляються незгасаючими, причому енергія власних електромагнітних коливань не змінюється. Повна енергія коливального контуру дорівнює сумі енергії електричного поля конденсатора та енергії магнітного поля індуктивності:

$$W(t) = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2}.$$

Оскільки  $W(t) = \text{const} \equiv W$ , то похідна від повної енергії контуру має дорівнювати нулю. Таким чином, якщо диференціювати по часу вираз для повної енергії, що зберігається, то прийдемо до рівняння

$$\frac{1}{C} q \frac{dq}{dt} + LI \frac{dI}{dt} = 0.$$

Враховуючи, що  $I = \frac{dq}{dt}$ , то знову отримуємо диференціальне рівняння вільних незгасаючих коливань.

Легко переконатися, що величина повної енергії контуру дорівнює максимальному значенню електричної енергії конденсатора, або

максимальному значенню енергії магнітного поля котушки. Отже, можна записати:

$$W = \frac{Q_{\max}^2}{2C} = \frac{LI_{\max}^2}{2}.$$

Під час коливань напруженість електричного поля в середині конденсатора змінюється за гармонічним законом

$$E(t) = \frac{U_C}{d} = \frac{q}{Cd} = E_{\max} \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

де  $d$  – відстань між пластинами конденсатора, а  $E_{\max} = \frac{Q_{\max}}{Cd}$  – амплітудне значення напруженості електричного поля.

Коли діаметр котушки індуктивності значно менший її довжини, то магнітне поле в котушці можна вважати однорідним. Вектор індукції магнітного поля в ній здійснює гармонічні коливання, які описуються виразом

$$B = \frac{\psi}{NS_{\text{пер}}} = \frac{LI}{NS_{\text{пер}}} = -B_{\max} \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

де  $S_{\text{пер}}$  – площа перерізу котушки,  $N$  – кількість витків в ній,  $\psi$  – магнітний потік, а  $B_{\max} = \frac{LI_{\max}}{NS_{\text{пер}}}$  – амплітудне значення вектора індукції магнітного поля в котушці.

Таким чином, під час електричних коливань відбувається періодична зміна таких фізичних величин в контурі, як заряд на обкладинках конденсатора, електричний струм в котушці, напруженість електричного поля в конденсаторі, індукція магнітного поля в котушці.

Зробимо важливе зауваження, що стосується коливань заряду на обкладинках конденсатора, яких в конденсаторі дві. Заряди на них під час коливань змінюються періодично, але їх знаки протилежні, тому заряди обкладинок коливаються в протифазі. Вище, у відповідності до рис. 16, зарядом конденсатора було позначено заряд обкладинки, похідна якого дорівнює силі струму в контурі  $I = \frac{dq}{dt}$ , коли заряд, який переносить струм, дорівнює швидкості зміни заряду на обкладинці. Якщо зарядом конденсатора вибрати заряд іншої обкладинки, тоді в формулі зв'язку між силою струмом і зарядом зміниться знак:  $I = -\frac{dq}{dt}$ . Отже, існує певна невизначенність опису

коливань заряду на обкладинках конденсатора, яким може бути обрано заряд однієї з них. Але, насправді, така невизначенність не впливає на характеристики коливального процесу. Дійсно, коли вибрати зарядом конденсатора заряд верхньої обкладинки на рис. 16, то  $I = -\frac{dq}{dt}$ , а при вказаному на цьому рисунку напрямку обходу контуру напруга на конденсаторі також зміниться на протилежну:  $U_C = -\frac{q}{C}$ . Але незважаючи на це, диференціальне рівняння коливань в контурі, як легко перевірити, залишається одним і тим же.

## 2.2. Вільні згасаючі електромагнітні коливання

До згасання електричних коливань призводить втрата енергії на активному опорі. Для опису згасаючих електричних коливань розглянемо коливальний контур, який додатково до ємності  $C$  та індуктивності  $L$  містить також омичний опір  $R$  (див. рис. 17). Врахуємо, що сума напруги  $U_C$  на конденсаторі та напруги  $U_R$  на опорі дорівнює ЕРС самоіндукції, що виникає в котушці, тобто

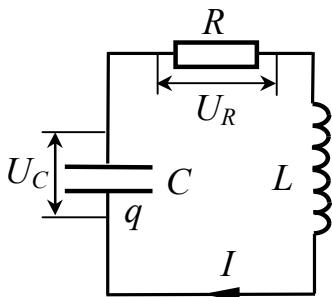


Рис. 17

$$U_C + U_R = -L \frac{dI}{dt},$$

де враховано, що ЕРС самоіндукції котушки пропорційна швидкості наростання струму  $\mathcal{E}_{\text{нз}} = -L \frac{dI}{dt}$ . Обхід контуру, зображеного на рис. 17, здійснимо за годинниковою стрілкою.

Напруга на конденсаторі дорівнює  $U_C = \frac{q}{C}$ , а на опорі –  $U_R = RI$ . З їх урахуванням у попередньому співвідношенні приходимо до рівняння

$$\frac{q}{C} + RI = -L \frac{dI}{dt}.$$

Використаємо в цьому рівнянні співвідношення, яке зв'язує силу струму та заряд  $I = \frac{dq}{dt}$ , і зробимо прості перетворення. Після цього одержимо диференціальне рівняння другого порядку:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0.$$

Поділивши його на індуктивність, знову прийдемо до відомого з розгляду механічних коливань диференційного рівняння вільних згасаючих коливань, а саме:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0,$$

де, як і вище,  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$  – квадрат власної частоти,  $\beta = \frac{R}{2L}$  – коефіцієнт згасання.

Аналогічно випадку механічних коливань розв'язок цього диференційного рівняння вільних згасаючих електричних коливань є добутком експоненційної спадаючої функції на гармонічну функцію. Тому залежність величини заряду від часу для вільних згасаючих електричних коливань описується виразом

$$q(t) = Q_{\max} e^{-\beta t} \cos(\tilde{\omega}_0 t + \varphi_0),$$

де  $\tilde{\omega}_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  – частота коливань,  $Q_{\max}$  – амплітудне значення заряду для початкового моменту часу.

Видно, що амплітуда коливань заряду під час згасаючих коливань зменшується за експоненційним законом

$$Q_{\max}(t) = Q_{\max} e^{-\beta t}.$$

На рис. 18 суцільною кривою показано хід часової залежності заряду

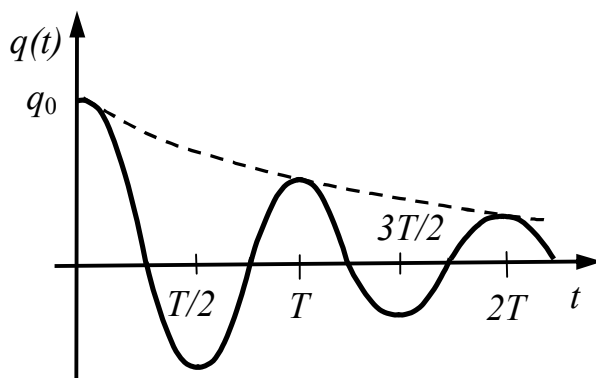


Рис. 18

коливального контуру, коли початкова фаза  $\varphi_0 = 0$  і коли для  $t=0$  початковий заряд дорівнює його амплітуді  $Q_{\max}$ .

На рис. 18 пунктирною кривою також зображено часову залежність  $Q_{\max}(t)$  амплітудного значення заряду.

Період вільних згасаючих електричних коливань визначається за формулами:

$$\tilde{T} = \frac{2\pi}{\tilde{\omega}_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} > T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC},$$

де використано позначення для величин  $\omega_0$  та  $\beta$ .

З формули для періоду випливає, що існує деякий критичний опір  $R_{кр}$ , який розділяє границю між коливальним і аперіодичним процесами і який, як легко зрозуміти, визначається рівністю  $R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ . При  $R < R_{кр}$  здійснюватимуться вільні згасаючі коливання, а при  $R > R_{кр}$  відбуватиметься аперіодичний процес.

За означенням *час релаксації* – це час, за який амплітуда коливань зменшується в  $e$ -разів. Для коливального електричного контуру час релаксації

$$\tau = \frac{1}{\beta} = \frac{2L}{R},$$

де знову використано, що  $\beta = \frac{R}{2L}$  – коефіцієнт згасання.

*Логарифмічний декремент* згасаючих електричних коливань визначається як величина, що обернена до кількості коливань, які відбуваються за час релаксації. Отже, величина логарифмічного декременту коливального контуру визначається за формулою, аналогічною випадку механічних коливань, але іншого конкретного виду:

$$\theta = \frac{\tilde{T}}{\tau} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} \frac{R}{2L} = \frac{\pi R}{L\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}.$$

Для випадку слабкого згасання, коли  $\beta \ll \omega_0$ , отримуємо, що  $\theta \approx \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}$ .

Щоб охарактеризувати втрати енергії коливальної системи під час згасаючих електричних коливань, користуються поняттям добротності, яке також визначається з відношення

$$Q = \frac{\pi}{\theta}.$$

Якщо підставити до нього величину логарифмічного декременту, то легко знайдемо, що *добротність* електричного контуру має вигляд

$$Q = \frac{L}{R} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}},$$

і для слабкого ( $\beta \ll \omega_0$ ) згасання її величина  $Q \approx \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ . Звернемо увагу, що при умові  $R > R_{кр}$  величина  $Q$  стає уявною; останнє свідчить, що до аперіодичного процесу поняття добротності незастосовне.

### 2.3. Вимушені електромагнітні коливання

Вимушені електричні коливання відбуваються під дією зовнішньої періодичної ЕРС. Розглянемо контур, який містить ємність  $C$ , індуктивність  $L$  та опір  $R$  (див. рис. 19). Припустимо, що до контуру послідовно підключена зовнішня ЕРС, яка змінюється за гармонічним законом

$$U_{зов}(t) = U_{\max} \cos \omega t,$$

де  $U_{\max}$  – амплітудне значення зовнішньої ЕРС.

Сума напруги  $U_C$  на конденсаторі та напруги  $U_R$  на опорі дорівнює сумі ЕРС самоіндукції, що виникає в котушці, та зовнішньої ЕРС, тобто

$$U_C + U_R = -L \frac{dI}{dt} + U_{зов}(t),$$

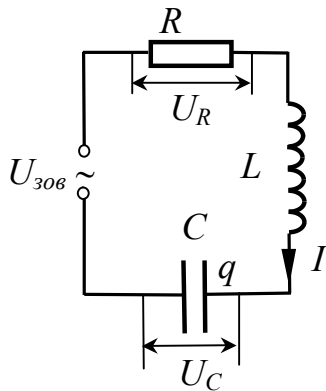


Рис. 19

де враховано, що ЕРС самоіндукції  $\mathcal{E}_{\vec{n}^3} = -L \frac{dI}{dt}$ .

При обході контуру на рис. 18 за годинниковою стрілкою маємо  $U_C = \frac{q}{C}$ , та  $U_R = RI$ .

В результаті, приходимо до рівняння

$$\frac{q}{C} + RI = -L \frac{dI}{dt} + U_{\max} \cos \omega t.$$

Підставимо в це рівняння співвідношення між силою струму та зарядом конденсатора  $I = \frac{dq}{dt}$  та зробимо прості перетворення. Тоді одержимо неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = U_{\max} \cos \omega t.$$

Якщо його поділити на індуктивність, то прийдемо до вже відомого з розгляду вимушених механічних коливань диференційного рівняння вимушених коливань:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = u_m \cos \omega t,$$

де введено позначення  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ ,  $2\beta = \frac{R}{L}$  та  $u_m \equiv \frac{U_{\max}}{L}$ .

Коли час дії періодичної ЕРС значно більший часу релаксації, то в контурі будуть відбуватися так звані *усталені* коливання, які здійснюються за гармонічним законом. Частота усталених вимушених коливань дорівнює частоті зовнішньої ЕРС. Залежність заряду від часу для усталених коливань описуються виразом

$$q(t) = Q_{\max}(\omega) \cos(\omega t - \alpha).$$

Амплітудне значення  $Q_{\max}(\omega)$  заряду при вимушених коливаннях в контурі пропорційне амплітудному значенню  $U_{\max}$  зовнішньої ЕРС, а саме:

$$Q_{\max}(\omega) = \frac{U_{\max}}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}},$$

Величина  $\alpha$  різниці фаз часових залежностей заряду та зовнішньої ЕРС знаходиться за формулою

$$\alpha = \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

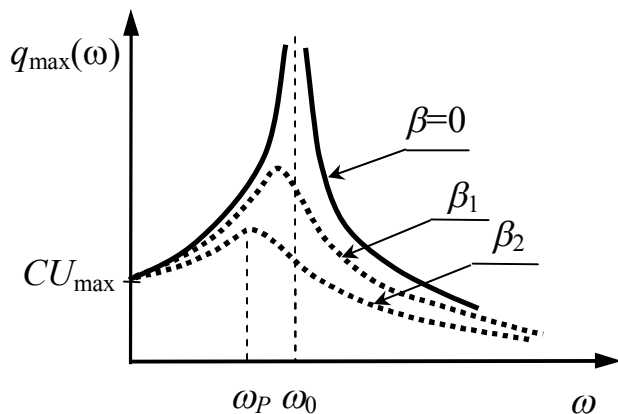


Рис. 20

Хід залежності амплітудного значення заряду від частоти вимушених коливань  $Q_{\max}(\omega)$  при різних значеннях коефіцієнта згасання ( $\beta = 0$ ,  $\beta_1 < \beta_2$ ) показано на рис. 20.

Частота зовнішньої ЕРС, при якій амплітудне значення заряду буде найбільшим, визначається за формулою

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

Видно, що значення частоти  $\omega_p$ , яка є резонансною частотою для коливань заряду в контурі, залежить від опору  $R$  контуру.

На частоті  $\omega = \omega_p$  амплітудне значення заряду має вигляд:

$$Q_{\max}(\omega = \omega_p) = \frac{U_{\max}}{L \sqrt{(2\beta^2)^2 + 4\beta^2(\omega_0^2 - 2\beta^2)}} = \frac{U_{\max}}{2L\beta \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{U_{\max}}{2L\beta \tilde{\omega}_0}.$$

Коли  $\omega \rightarrow 0$ , то амплітуда коливань заряду  $Q_{\max}(\omega = 0) = CU_{\max}$ , а коли  $\omega \rightarrow \infty$ , ця амплітуда  $Q_{\max}(\omega \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ .

При малому згасанні ( $\beta \ll \omega_0$ ) вираз для амплітуди коливань заряду при резонансі може бути представлений у формі:

$$Q_{\max}(\omega_p) = \frac{U_{\max}}{R \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} \approx \frac{C}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} U_{\max} = CQ U_{\max},$$

де  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$  – добротність при слабкому згасанні. Оскільки відношення заряду конденсатора до його ємності дорівнює напрузі на ньому, то приходимо до цікавого і досить корисного співвідношення, за яким при умові резонансу відношення амплітудного значення напруги на конденсаторі до амплітудного значення зовнішньої ЕРС дорівнює добротності контуру:

$$\left. \frac{U_{\max}^{(C)}}{U_{\max}} \right|_{\omega=\omega_p} = Q.$$

Сила струму при вимушених коливаннях в контурі описується виразом

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = - \frac{U_{\max} \omega}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \sin(\omega t - \arctg \frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}).$$

Бачимо, що амплітудне значення сили струму має не таку, як амплітуда заряду, частотну залежність; дійсно

$$I_{\max}(\omega) = \frac{U_{\max} \omega}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}.$$

Поділимо чисельник та знаменник цього виразу на частоту  $\omega$  та внесемо її під знак кореня в знаменнику, що дає

$$I_{\max}(\omega) = \frac{U_{\max}}{L \sqrt{(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega)^2 + 4\beta^2}}.$$

Коли вираз у дужках знаменника стає рівним нулю, амплітудне значення сили струму буде найбільшим. Таким чином, при вимушених коливаннях максимальне значення амплітуди сили струму спостерігається тоді, коли частота зовнішньої ЕРС співпадає з власною частотою коливального контуру,  $\omega = \omega_0$ . Хід частотної залежності амплітудного значення сили струму в контурі при усталених вимушених коливаннях показано на рис. 21 при  $\beta = 0$  та при  $\beta \neq 0$ . Залежності  $I_{\max}(\omega)$  називають *резонансними кривими електричного контуру*.

При  $\omega = \omega_0$  величина амплітуди сили струму в контурі має вигляд



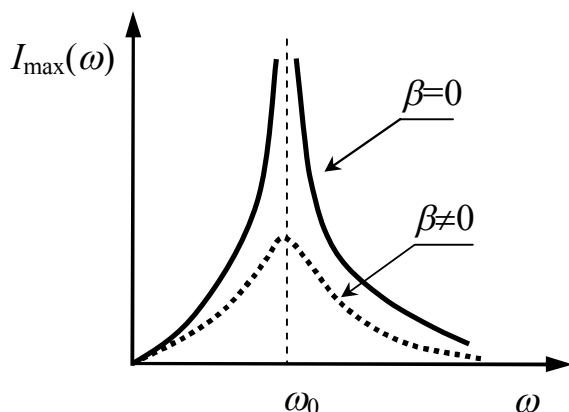


Рис.21

$$I_{\max}(\omega = \omega_0) = \frac{U_{\max}}{2\beta L} = \frac{U_{\max}}{R}.$$

Це означає, що коли частота зовнішньої ЕРС співпадає з власною частотою контуру, то коливання напруги на конденсаторі і коливання ЕРС самоіндукції котушки відбуваються протифазно, причому їх амплітудні значення однакові. Іншою мовою, на частоті  $\omega = \omega_0$  сума напруг на конденсаторі та котушці дорівнює нулю, а тому напруга зовнішнього джерела струму падає тільки на опорі  $R$ .

## 2.4. Метод векторних діаграм

Для опису коливань інколи використовують так званий *метод векторних діаграм*. Суть цього методу спирається на певну аналогію гармонічного коливального руху з обертальним рухом вектора.

Візьмемо вектор  $\vec{A}$ , який з постійною кутовою швидкістю обертається навколо осі, що проходить через точку його початку. На рис. 22 вектор  $\vec{A}$  обертається навколо осі, яка проходить через точку  $O$ , що позначає початок вектора  $\vec{A}$ .

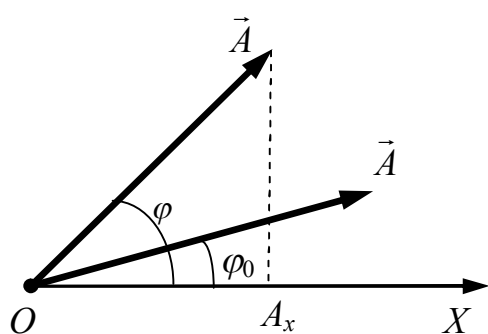


Рис. 22

Приймемо також, що вісь обертання перпендикулярна до площини рисунку (площини обертання).

Положення точок вектора характеризується кутом  $\varphi$ , який є кутом між вектором  $\vec{A}$  та віссю  $X$ . Якщо початковому моменту часу  $t=0$  відповідає деякий кут  $\varphi_0$ , то при обертанні з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  маємо,

що кут  $\varphi$  залежить від часу лінійно:

$$\varphi = \omega t + \varphi_0.$$

Коли початок системи відліку співпадає з початком вектора  $\vec{A}$  (з точкою  $O$ ), то проекція вектора  $\vec{A}$  на вісь  $X$  описується виразом

$$A_x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0),$$

де  $A = |\vec{A}|$  – модуль вектора.

Як бачимо часова залежність проекції вектора при його обертовому русі подібна до часової залежності зміщення коливальної системи чи до часової залежності величини заряду при електричних коливаннях в коливальному контурі. Така аналогія дозволяє суттєво спростити знаходження амплітуди та фази коливань, при, наприклад, складанні двох незалежних коливань, які можуть відбуватися в однаковому напрямку і мають однакові частоти, або при аналізі змінного струму в електричних колах, тощо.

## **2.5. Складання двох гармонічних коливань однакового напрямку та однакової частоти**

Використаємо метод векторних діаграм для визначення характеристик результуючого коливання, яке виникає при складанні двох незалежних коливань. Накладатися можуть періодичні напруги чи змінні струми, напруженості електричних полів і таке інше. Зауважимо, що напруги та сили струмів є скалярними величинами, напруженості електричного поля – векторами. Проте результат складання періодичних векторних полів не залежить від їх напрямку, якщо коливання векторів здійснюються в однаковому напрямку.

Нехай в деякій точці простору накладаються два електричні поля, вектори напруженостей яких лежать вздовж однієї осі, яку позначимо  $Z$ . Коливання напруженостей обох полів відбуваються з однаковою частотою.

Крім того, припустимо, що коливання напруженостей обох полів є гармонічними, а проекції векторів напруженості полів на вісь  $Z$  описуються виразами

$$E_1 = E_{\max}^{(1)} \cos(\omega t + \varphi_0^{(1)}),$$

$$E_2 = E_{\max}^{(2)} \cos(\omega t + \varphi_0^{(2)}),$$

відповідно.

Нехай також, амплітудні значення проекцій напруженості полів різні і їх початкові фази є різними:  $E_{\max}^{(1)} \neq E_{\max}^{(2)}$ ,  $\varphi_0^{(1)} \neq \varphi_0^{(2)}$ .

Для електричних полів виконується принцип суперпозиції, тому проекція напруженості результуючого поля дорівнює сумі проекцій напруженостей обох полів

$$E = E_1 + E_2 = E_{\max}^{(1)} \cos(\omega t + \varphi_0^{(1)}) + E_{\max}^{(2)} \cos(\omega t + \varphi_0^{(2)}).$$

Очевидно, що коливання результуючого поля будуть відбуватися з частотою  $\omega$  і будуть описуватися виразом

$$E = E_{\max} \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Для розрахунку амплітуди  $E_{\max}$ , а також для знаходження початкової фази  $\varphi_0$  результуючого коливання застосуємо метод векторних діаграм.

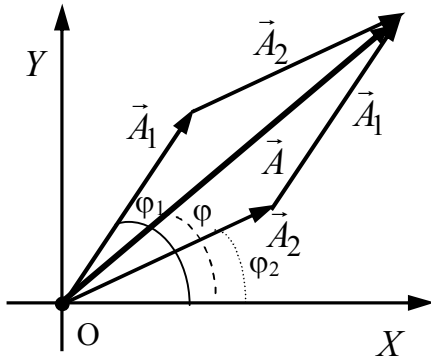


Рис. 23

Поставимо у відповідність першому коливанню вектор  $\vec{A}_1$ , який обертається з

частотою  $\omega$ , а другому полю вектор  $\vec{A}_2$ , який обертається з цією самою частотою (рис. 23). Модулі цих векторів дорівнюють амплітудним значенням напруженостей полів  $|\vec{A}_1| = E_{\max}^{(1)}$ ,  $|\vec{A}_2| = E_{\max}^{(2)}$ . Кути початкової (для  $t = 0$ ) орієнтації векторів  $\vec{A}_1$  та  $\vec{A}_2$  дорівнюють значенням початкових фаз  $\varphi_0^{(1)}$ ,  $\varphi_0^{(2)}$  коливань  $E_1$  та  $E_2$ . Часові залежності кутів повороту векторів  $\vec{A}_1$  та  $\vec{A}_2$  відповідають фазам обох коливань  $\varphi_1 = \omega t + \varphi_0^{(1)}$ ,  $\varphi_2 = \omega t + \varphi_0^{(2)}$ . На рис. 23 показане взаємне розташування цих векторів  $\vec{A}_1$  і  $\vec{A}_2$  для довільного моменту часу  $t$ . Оскільки обидва вектори обертаються з однаковою кутовою швидкістю, то кут між ними не змінюється з часом.

Результуючий вектор  $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$  також обертається з кутовою швидкістю  $\omega$ , причому його кут з віссю  $X$  становить  $\varphi = \omega t + \varphi_0$ , який є фазою результуючого коливання. Модуль  $\vec{A}$  не змінюється з часом і є амплітудою результуючого коливання. Таким чином, обертання вектора  $\vec{A}$  ставиться у відповідність результуючому коливанню, яке отримане внаслідок векторного складання двох коливань і яке відбувається з частотою  $\omega$ .

За теоремою косинусів модуль вектора  $\vec{A}$  визначається формулою:

$$|\vec{A}| = \sqrt{|\vec{A}_1|^2 + |\vec{A}_2|^2 + 2|\vec{A}_1||\vec{A}_2|\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Нами було прийнято, що модулі векторів дорівнюють амплітудним значенням коливань напруженостей полів. Різниця кутів не залежить від часу:  $\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_0^{(1)} - \varphi_0^{(2)}$ . Отже, у відповідності до попередньої формули знаходимо амплітуду результуючого коливання

$$E_{\max} = \sqrt{(E_{\max}^{(1)})^2 + (E_{\max}^{(2)})^2 + 2E_{\max}^{(1)} E_{\max}^{(2)} \cos(\varphi_0^{(1)} - \varphi_0^{(2)})}.$$

Початкова фаза  $\varphi_0$  результуючого коливання дорівнює куту орієнтації вектора  $\vec{A}$  для моменту часу  $t=0$ . З рис. 23 видно, що  $\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{A_y}{A_x}$ , де  $A_x$  та  $A_y$  – проекції вектора  $\vec{A}$  на осі  $X$  та  $Y$ . В результаті, знаходимо, що початкова фаза результуючого коливання задовольняє рівності

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{E_{\max}^{(1)} \sin \varphi_0^{(1)} + E_{\max}^{(2)} \sin \varphi_0^{(2)}}{E_{\max}^{(1)} \cos \varphi_0^{(1)} + E_{\max}^{(2)} \cos \varphi_0^{(2)}}.$$

Розглянемо декілька найпростіших випадків.

1) Різниця фаз між коливаннями полів  $E_1$  та  $E_2$  кратна  $2\pi$ , тобто  $\varphi_0^{(1)} - \varphi_0^{(2)} = 2\pi n$ , де  $n$  – ціле число. Тоді обидві напруженості коливаються синфазно, а амплітуда результуючого коливання максимально з можливих:

$$E_{\max} = E_{\max}^{(1)} + E_{\max}^{(2)}.$$

2) Різниця фаз між коливаннями дорівнює куту, що є непарним до значення  $\pi$ , або  $\varphi_0^{(1)} - \varphi_0^{(2)} = \pi(2n+1)$ , де  $n$  – ціле число. Тоді коливання напруженостей полів  $E_1$  та  $E_2$  відбуваються протифазно, а тому амплітуда результуючого коливання буде найменшою з можливих:

$$E_{\max} = |E_{\max}^{(1)} - E_{\max}^{(2)}|.$$

3) Коли ж різниця фаз коливань напруженостей  $E_1$  та  $E_2$  зсунута на  $\frac{\pi}{2}$ , тобто  $\varphi_0^{(1)} - \varphi_0^{(2)} = 2\pi n \pm \frac{\pi}{2}$ , амплітуда результуючого коливання визначається за теоремою Піфагора, як гіпотенуза прямокутного трикутника:

$$E_{\max} = \sqrt{(E_{\max}^{(1)})^2 + (E_{\max}^{(2)})^2}.$$

Застосуємо тепер метод векторних діаграм для розрахунку результуючого коливання при складанні декількох коливань, які відбуваються в одному напрямку і початкові фази яких утворюють арифметичну прогресію:

$$x_1(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad x_2(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0 + \delta), \quad x_3(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0 + 2\delta), \dots \\ x_N(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0 + (N-1)\delta),$$

де  $N$  – кількість коливань. Ці  $N$  – коливань мають однакову частоту  $\omega$  і однакову амплітуду  $A$ . Фаза коливань відрізняється на величину  $\delta$  і послідовно зростає на  $\delta$  при збільшенні номера коливання.

Згідно з методом векторних діаграм кожному з цих коливань відповідає вектор  $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots, \vec{A}_j, \dots, \vec{A}_N$ . Модулі векторів за припущенням однакові

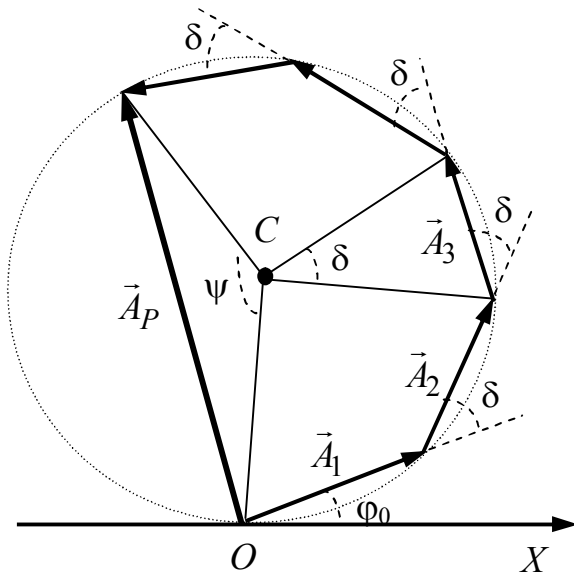


Рис. 24

$|\vec{A}_1| = |\vec{A}_2| = \dots |\vec{A}_N| = A$ , тому амплітуда  $A_P$  результуючого коливання знаходиться як сума:  $\vec{A}_P = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \dots + \vec{A}_N$ .

Як видно з рис. 24, при геометричному додаванні цих векторів їх початки та кінці лежать на колі з центром в точці  $C$  (на рис. 24 положення цих векторів і кути між ними відповідають моменту часу  $t=0$ ).

З геометричної побудови маємо, що кут  $\varphi_P$ , на який спирається вектор результуючого коливання, є

$$\varphi_P = 2\pi - N\delta.$$

Таким чином, амплітуда результуючого коливання може бути розрахована точно:

$$A_P = |\vec{A}_P| = 2|OC| \sin \frac{\varphi_P}{2} = 2|OC| \sin \frac{2\pi - N\delta}{2} = 2|OC| \sin \frac{N\delta}{2}.$$

Врахуємо, що  $|OC|$  є радіусом кола на рис. 24, який також легко знаходиться:

$$|OC| = \frac{|\vec{A}_j|}{2 \sin \frac{\delta}{2}} = \frac{A}{2 \sin \frac{\delta}{2}}.$$

В результаті отримуємо, що амплітуда результуючого коливання при накладанні коливань, фази яких утворюють арифметичну прогресію, визначається за формулою

$$A_P = A \frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}}.$$

Це співвідношення відоме фахівцям і використовується, зокрема, в оптиці при описі багатопроменевої інтерференції.

## 2.6. Змінний струм

Струм в електричних колах, який виникає під дією зовнішньої періодичної ЕРС, називають *змінним* струмом.

Зовнішню періодичну в часі ЕРС можна отримати за допомогою генераторів змінного струму. Найпростіший генератор змінного струму

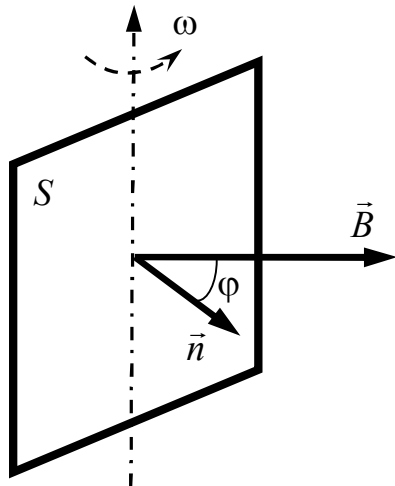


Рис. 25

складається з рамки, що має площу  $S$ . На неї намотано  $N$  витків і вона обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  в однорідному магнітному полі з вектором індукції  $\vec{B}$  (див. рис. 25).

ЕРС індукції, яка виникає в рамці, визначається за законом Фарадея

$$U_{\text{зов}} = -\frac{d\Psi}{dt} = -N\frac{d\Phi}{dt},$$

де  $\Psi$  – магнітний потік, який пронизує рамку.

Він розраховується за формулою  $\Psi = N\Phi$ , в якій  $\Phi$  – магнітний потік через поверхню,

натягнуту на рамку з одним витком. Величина  $\Phi = BS\cos\varphi$ , де  $\varphi$  – кут повороту між вектором  $\vec{n}$  нормалі до цієї поверхні і вектором індукції магнітного поля  $\vec{B}$ , модуль якого  $B = |\vec{B}|$ . При рівномірному обертанні рамки кут повороту  $\varphi$  лінійно залежить від кутової швидкості  $\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$ , де  $\varphi_0$  визначає початкову ( $t = 0$ ) орієнтацію рамки.

Таким чином, приходимо до висновку, що величина  $U_{\text{зов}}$  ЕРС, яка утворюється в рамці при його рівномірному обертанні в однорідному магнітному полі, змінюється з часом за гармонічним законом:

$$U_{\text{зов}}(t) = -N\frac{dBS\cos(\omega t + \varphi_0)}{dt} = NBS\omega\sin(\omega t + \varphi_0) = U_{\text{max}}\sin(\omega t + \varphi_0),$$

де  $U_{\text{max}} = NBS\omega$  – амплітудне значення ЕРС генератора.

Початкову орієнтацію рамки (насправді, мова йде про початковий момент часу  $t = 0$ , який може бути довільним) зручно вибрати так, щоб  $\varphi_0 = \pi/2$ . Тоді ЕРС генератора описуватиметься виразом

$$U_{\text{зов}}(t) = U_{\text{max}}\cos\omega t.$$

Частота коливань ЕРС генератора співпадає з частотою обертання рамки.

Коли генератор підключається до електричного кола, то ЕРС генератора слугує зовнішньою напругою. В результаті, під дією зовнішньої періодичної ЕРС в колі виникає змінний струм з частотою цієї ЕРС. Часову залежність змінного струму можна записати у вигляді

$$I(t) = I_{\max} \cos(\omega t - \varphi_{zc}),$$

де  $I_{\max}$  – амплітудне значення сили струму в колі, а  $\varphi_{zc}$  позначає зсув (різницю) фаз між коливанням зовнішньої напруги та коливанням сили струму. Основною задачею теорії електричних кіл є розрахунок  $I_{\max}$  та  $\varphi_{zc}$ .

## 2.7. Активний опір

Розглянемо опір  $R$ , який підключено до генератора змінного струму, ЕРС якого змінюється за законом,

$$U_{зов}(t) = U_{\max} \cos \omega t,$$

де  $U_{\max}$  – амплітуда напруги, а  $\omega$  – її частота.

Коли до генератора змінного струму підключити опір, як це показано на рис. 26, то напруга на опорі дорівнює ЕРС генератора

$$U_R = U_{зов}.$$

Для квазістаціонарних процесів миттєві значення сили струму та напруги задовольняють закону Ома

$$U_R = IR.$$

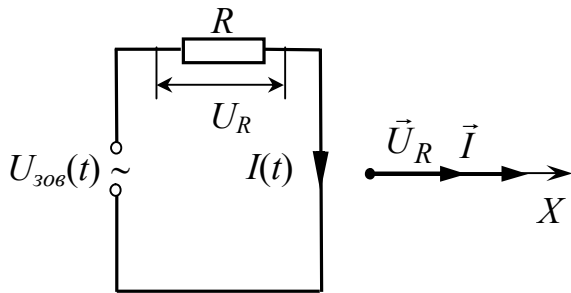


Рис. 26

З урахуванням виписаних співвідношень отримуємо, що сила змінного струму набуває вигляду

$$I(t) = \frac{U_{\max}}{R} \cos \omega t = I_{\max} \cos \omega t,$$

де  $I_{\max} = \frac{U_{\max}}{R}$  – амплітудне

значення сили струму, яке визначається через амплітудне значення напруги та опір.

Фази коливань сили струму та коливань напруги на опорі однакові, тобто  $\varphi_{zc} = 0$ . На векторній діаграмі, яка зображена на рис. 26, вектори  $\vec{U}_R$  та  $\vec{I}$ , які відповідають коливанням напруги та сили струму на опорі, виявляються паралельними векторами.

Електричний струм при проходженні через опір  $R$  виконує роботу, тому такі опори називають *активними*. Для квазістаціонарних процесів миттєва потужність роботи струму визначається за формулою

$$P = IU_R.$$

З неї знаходимо, що миттєве значення потужності змінного струму визначається виразами

$$P = I_{\max}^2 R \cos^2 \omega t, \quad \text{або} \quad P = \frac{(U_{\max}^{(R)})^2}{R} \cos^2 \omega t,$$

де  $U_{\max}^{(R)}$  – амплітудне значення напруги на провіднику:  $U_{\max}^{(R)} = RI_{\max}$ .

Як правило, проходження струму відбувається на проміжках часу набагато більших періоду коливальних, тому інтерес представляє розрахунок середнього значення потужності.

Середнє значення  $\cos^2 \omega t$  за час набагато більший періоду (або середнє за час, рівний одному періоду) обчислюється просто, так що  $\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$ .

Використовуючи це значення, знаходимо, що середнє значення потужності змінного струму на опорі  $R$  дорівнює

$$\langle P \rangle = \frac{I_{\max}^2 R}{2} = \frac{(U_{\max}^{(R)})^2}{2R}.$$

Введемо поняття діючих значень сили струму та напруги. *Діючим* називають таке значення постійної сили струму (або напруги), який за час одного періоду виконує таку саму роботу, що і змінний струм. При такому введенні діючих значень сили струму  $I_\partial$  та напруги  $U_\partial$  потужність кола буде визначатися за формулами:

$$P = I_\partial^2 R, \quad \text{або} \quad P = \frac{U_\partial^2}{R}.$$

Порівнюючи ці вирази з виразами для середньої потужності, знаходимо, що діючі значення сили струму та напруги в  $\sqrt{2}$  разів менші їх амплітудних значень:

$$I_\partial = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}, \quad U_\partial = \frac{U_{\max}^{(R)}}{\sqrt{2}}.$$

Наприклад, значення напруги 220 В в міських електричних мережах є діючим. Відповідно, амплітудне значення напруги в міських мережах в  $\sqrt{2}$  разів більше. При цьому більшість електроприладів – амперметрів та вольтметрів – вимірюють діючі значення сили струму або напруги.



## 2.8. Ємнісний опір

Розглянемо конденсатор з ємністю  $C$ , що підключений до генератора змінного струму (див. рис. 27), ЕРС якого змінюється за законом косинуса

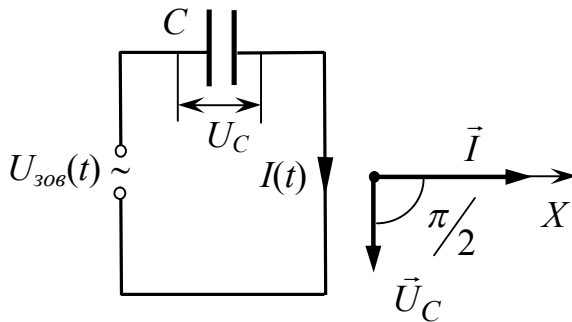


Рис. 27

$$U_{зov}(t) = U_{\max} \cos \omega t,$$

де  $U_{\max}$  – амплітудне значення ЕРС генератора, а  $\omega$  – її частота.

При підключенні ємності до генератора змінного струму напруга на ємності дорівнює ЕРС генератора

$$U_C = U_{зov}.$$

Врахуємо, що для квазістаціонарних процесів миттєве значення напруги на конденсаторі пропорційне миттєвому значенню заряду конденсатора

$$U_C = \frac{q}{C}.$$

Виходячи з цих співвідношень знаходимо, що миттєве значення заряду конденсатора описується виразом

$$q(t) = CU_{\max} \cos \omega t.$$

Продиференціюємо цей вираз та знайдемо силу струму

$$I(t) = -\omega CU_{\max} \sin \omega t,$$

що тече через конденсатор.

Отриманий вираз для сили струму можна переписати у спосіб

$$I(t) = I_{\max} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right),$$

де  $I_{\max}$  – амплітуда сили струму, величина якої визначається за формулою

$$I_{\max} = \omega CU_{\max}.$$

Коефіцієнт пропорційності між амплітудним значенням сили струму та амплітудним значенням напруги на конденсаторі обернено пропорційний ємнісному опору  $X_C$ , який визначається за формулою

$$X_C = \frac{1}{\omega C}.$$

Отже, при проходженні через конденсатор змінного струму амплітудне значення сили струму на конденсаторі прямо пропорційне амплітудному

значенню напруги на конденсаторі і обернено пропорційне ємнісному опору, або

$$I_{\max} = \frac{U_{\max}}{X_C}.$$

Зауважимо, що така пропорційність виконується тільки для амплітудних значень, бо коливання сили струму на конденсаторі зсунуті по фазі відносно коливань напруги на величину  $\varphi_{zc} = -\frac{\pi}{2}$ , внаслідок чого напрямок вектора сили струму  $\vec{I}$  на векторній діаграмі перпендикулярний до вектора напруги  $\vec{U}_C$  (див. рис. 27), причому вектор сили струму випереджає вектор напруги.

Запишемо вираз для миттєвої потужності:

$$P = IU_C.$$

Підставимо в нього миттєві значення сили струму та напруги. Така підстановка демонструє, що миттєва потужність змінюється за законом синуса з вдвічі більшою частотою

$$P = I_{\max}^2 X_C \cos \omega t \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = -I_{\max}^2 X_C \cos \omega t \sin \omega t = -\frac{1}{2} I_{\max}^2 X_C \sin 2\omega t.$$

Середнє значення синуса за час, кратний періоду, дорівнює нулеві. Тому при проходженні змінного струму через конденсатор середнє значення потужності за час, значно більший одного періоду, також дорівнюватиме нулю,  $\langle P \rangle = 0$ . Іншими словами, при проходженні змінного струму через конденсатор електрична енергія не виділяється і не втрачається.

## 2.9. Індуктивний опір

Розглянемо котушку з індуктивністю  $L$ , яку підключено до генератора змінного струму (див. рис. 28) з ЕРС, яка змінюється за законом

$$U_{\text{зов}}(t) = U_{\max} \cos \omega t,$$

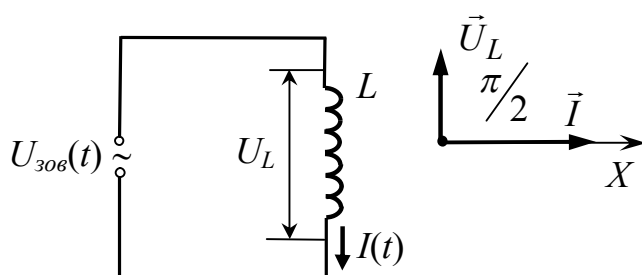


Рис. 28

де  $U_{\max}$  – амплітудне значення ЕРС, а  $\omega$  – її частота.

Тепер напруга на котушці дорівнює ЕРС генератора

$$U_L = U_{\text{зов}}.$$

Активний опір ідеальної котушки дорівнює нулю. Тому

сума напруги на котушці та ЕРС самоіндукції, що виникає в ній при проходженні змінного струму, дорівнює нулю, або

$$U_L + E_{ci} = 0.$$

За відсутності такої компенсації струм в ідеальній котушці з  $R = 0$  сягав би нескінченності.

Величина ЕРС самоіндукції пропорційна похідній силі струму

$$\mathcal{E}_{\tilde{n}^3} = -L \frac{dI}{dt}.$$

В результаті, комбінуючи виписані вирази, приходимо до співвідношення

$$\frac{dI}{dt} = \frac{U_{\max}}{L} \cos \omega t.$$

Шляхом прямого інтегрування цього рівняння знаходимо шукану залежність для сили струму, а саме:

$$I(t) = \frac{U_{\max}}{\omega L} \sin \omega t.$$

Цей вираз для сили струму можна переписати у вигляді

$$I(t) = I_{\max} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right),$$

де  $I_{\max}$  – амплітудне значення сили струму, величина якого визначається за формулою

$$I_{\max} = \frac{U_{\max}}{\omega L}.$$

Проходження змінного струму котушкою прийнято описувати за допомогою *індуктивного опору*  $X_L$ , який визначають за формулою

$$X_L = \omega L.$$

Амплітудне значення сили струму в котушці прямо пропорційне амплітудному значенню напруги на ній і обернено пропорційне її індуктивному опору

$$I_{\max} = \frac{U_{\max}}{X_L}.$$

Зауважимо, що така пропорційність виконується тільки для амплітудних значень. Коливання сили струму в котушці також зсунуті по фазі відносно коливань напруги на ній, але тепер  $\varphi_{zc} = \frac{\pi}{2}$ , внаслідок чого, напрямок вектора сили струму  $\vec{I}$  на векторній діаграмі перпендикулярний до

напрямку вектора напруги  $\vec{U}_L$  (див. рис. 28), і вектор сили струму в даному випадку індуктивного опору відстає від вектора напруги.

Запишемо вираз для миттєвої потужності

$$P = IU_L.$$

Підставимо в цей вираз миттєві значення сили струму та напруги. Знайдемо, що миттєва потужність і тут змінюється за законом синуса з вдвічі більшою частотою

$$P = I_{\max}^2 X_L \cos \omega t \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = I_{\max}^2 X_L \cos \omega t \sin \omega t = \frac{1}{2} I_{\max}^2 X_L \sin 2\omega t.$$

Застосуємо ті ж міркування, що і для ємнісного опору: середнє значення синусу за час одного періоду дорівнює нулю. А отже, при проходженні змінного струму через котушку індуктивності середнє значення потужності струму за час, значно більший одного періоду, також зникає, тобто  $\langle P \rangle = 0$ . Це означає, що при проходженні змінного струму через ідеальну котушку електрична енергія, як і у випадку ємнісного опору, не виділяється.

## 2.10. Закон Ома для кола зі змінним струмом

Розглянемо електричне коло, яке вміщує активний опір  $R$  конденсатор ємністю  $C$  та котушку з індуктивністю  $L$ , коли ці елементи з'єднані послідовно (рис. 29) і до них підключено генератор змінного струму з ЕРС, яка змінюється за законом синуса

$$U_{\text{зог}}(t) = U_{\max} \cos \omega t,$$

де  $U_{\max}$  – амплітуда напруги, а  $\omega$  – її частота.

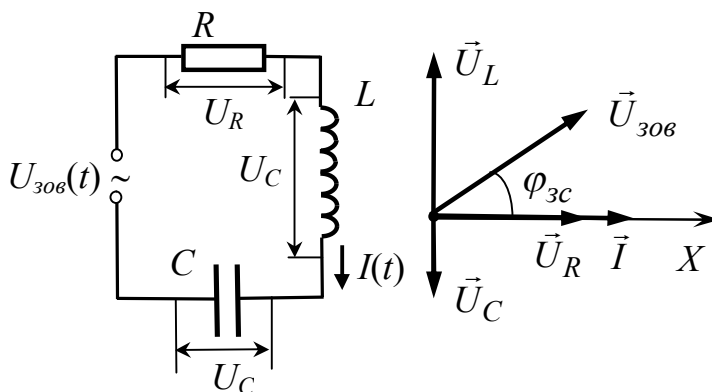


Рис. 29

В колі під дією зовнішньої ЕРС виникає змінний струм з частотою напруги генератора

$$I(t) = I_{\max} \cos(\omega t - \phi_{\text{зс}}),$$

де  $I_{\max}$  – амплітудне значення сили струму в колі, а  $\phi_{\text{зс}}$  – зсув фаз між коливанням зовнішньої ЕРС

та коливанням сили струму. Для розрахунку  $I_{\max}$  та  $\phi_{\text{зс}}$  зручно використати метод векторних діаграм.

1. В колі з послідовним з'єднанням опору, ємності та індуктивності напруга на генераторі дорівнює сумі напруг на ділянках кола

$$U_{\text{зов}} = U_R + U_L + U_C.$$

Інакше, коливання напруги на генераторі дорівнює сумі коливань на ділянках кола.

Поставимо у відповідність коливанням напруг  $U_{\text{зов}}$ ,  $U_R$ ,  $U_L$  та  $U_C$  вектори  $\vec{U}_{\text{зов}}$ ,  $\vec{U}_R$ ,  $\vec{U}_L$  та  $\vec{U}_C$ . На діаграмі, яку наведено на рис. 29, враховано, що коливання напруги на опорі  $R$  мають однакову фазу з коливаннями струму, а тому вектори  $\vec{U}_R$  та  $\vec{I}$  паралельні. Коливання напруги на ємності відстають по фазі на  $\frac{\pi}{2}$  коливання сили струму, тому вектор  $\vec{U}_C$  направлений перпендикулярно до вектора  $\vec{I}$ . Коливання ж напруги на індуктивності випереджають по фазі на  $\frac{\pi}{2}$  коливання сили струму, тому вектор  $\vec{U}_L$  теж перпендикулярний до вектора  $\vec{I}$  і направлений протилежно до вектора  $\vec{U}_C$ .

Всі напруги зв'язані векторною рівністю

$$\vec{U}_{\text{зов}} = \vec{U}_R + \vec{U}_L + \vec{U}_C.$$

Що стосується модулів цих векторів, то з наведеної на рис. 29 діаграми випливає, що для них справедливе співвідношення

$$|\vec{U}_{\text{зов}}| = \sqrt{|\vec{U}_R|^2 + (|\vec{U}_L| - |\vec{U}_C|)^2}.$$

Згідно методу векторних діаграм модулі векторів визначаються амплітудами коливань, тому  $|\vec{U}_{\text{зов}}| = U_{\text{max}}$ ,  $|\vec{U}_R| = U_{\text{max}}^{(R)}$ ,  $|\vec{U}_C| = U_{\text{max}}^{(C)}$  і  $|\vec{U}_L| = U_{\text{max}}^{(L)}$ . З урахуванням цих означень маємо, що амплітуди коливань напруги задовольняють умові

$$U_{\text{max}} = \sqrt{(U_{\text{max}}^{(R)})^2 + (U_{\text{max}}^{(L)} - U_{\text{max}}^{(C)})^2}.$$

Для кожної з ділянок кола амплітудні значення напруги пропорційні амплітудному значенню сили струму:

$$U_{\text{max}}^{(R)} = RI_{\text{max}}, \quad U_{\text{max}}^{(C)} = \frac{I_{\text{max}}}{\omega C}, \quad U_{\text{max}}^{(L)} = \omega LI_{\text{max}}.$$

Завдяки цим рівностям приходимо до формули

$$U_{\text{max}} = I_{\text{max}} \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}.$$

Перепишемо її у вигляді

$$I_{\max} = \frac{U_{\max}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \equiv \frac{U_{\max}}{Z_{\text{noc}}},$$

де  $Z_{\text{noc}}$  називають *повним* опором електричного кола, при послідовному з'єднанні елементів, а саме:

$$Z_{\text{noc}} = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}.$$

Використовуючи раніше введені означення для опорів різної природи, вираз для повного опору у послідовному ланцюгу можна переписати інакше:

$$Z_{\text{noc}} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \equiv \sqrt{R^2 + X^2},$$

де різниця  $X \equiv X_L - X_C$  називається *реактивним* опором.

Бачимо, що повний опір  $Z_{\text{noc}}$  цього кола мінімальний, коли  $X \equiv 0$ , або, що теж саме, частота зовнішньої напруги співпадає з власною частотою кола  $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . На цій частоті не тільки пропадає реактивний опір кола, а й амплітудне значення сили струму максимальне.

Розрахуємо величину напруг на конденсаторі та індуктивності на резонансній частоті; маємо:

$$U_{\max}^{(C)}(\omega = \omega_0) = I_{\max}(\omega = \omega_0)X_C(\omega = \omega_0) = \frac{U_{\max}}{R\omega_0 C} = \frac{U_{\max}}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \approx QU_{\max},$$

$$U_{\max}^{(L)}(\omega = \omega_0) = I_{\max}(\omega = \omega_0)X_L(\omega = \omega_0) = \frac{U_{\max}\omega_0 L}{R} = \frac{U_{\max}}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \approx QU_{\max}$$

Здійснений в цих виразах перехід до формул з використанням добротності  $Q$  виправданий лише тільки при малому згасанні, що відповідає нерівності  $\beta \ll \omega_0$ .

Отже, на частоті  $\omega = \omega_0$  амплітудні значення коливань напруг на ємності та індуктивності однакові –  $U_{\max}^{(C)}(\omega = \omega_0) = U_{\max}^{(L)}(\omega = \omega_0)$ , а на векторній діаграмі сума векторів  $\vec{U}_L + \vec{U}_C = 0$ . Вимушені коливання в контурі з послідовним з'єднанням ємності, індуктивності та опору, які відбуваються на власній частоті контуру, називають *резонансом напруг*.

З наведеної на рис. 29 діаграми випливає, що зсув фази між коливанням сили струму та ЕРС генератора для довільної частоти визначається з виразу

$$\operatorname{tg} \varphi_{3c} = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{X_L - X_C}{R}.$$

З цього співвідношення легко отримати, що

$$\operatorname{tg} \varphi_{3c} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Видно, що в колі з послідовним з'єднанням різних елементів тангенс зсуву фаз між силою струму і ЕРС генератора визначається відношенням величини реактивного опору до величини активного опору. На власній частоті  $\omega = \omega_0$ , коли  $X_L - X_C = 0$ , зсуву фаз між коливаннями сили струму та зовнішньої ЕРС не буде,  $\varphi_{3c} = 0$ .

2. Розглянемо тепер випадок паралельного підключення опору  $R$ , ємності  $C$  та індуктивності  $L$  до зовнішньої періодичної ЕРС, як це показано на рис. 30.

Розрахуємо амплітудне значення сили струму, що тече цим колом, та зсув фаз між змінним струмом та зовнішньою напругою.

При паралельному з'єднанні елементів кола, напруга на них буде однаковою  $U_{306} = U_R = U_L = U_C$ , проте величина повної сили струму визначається сумою сил струмів

$$I = I_R + I_L + I_C.$$

Таким чином, коливання сили струму кола є сумою коливань сил струмів на ділянках кола.

Знову поставимо у відповідність коливанням сил струмів  $I$ ,  $I_R$ ,  $I_L$  та

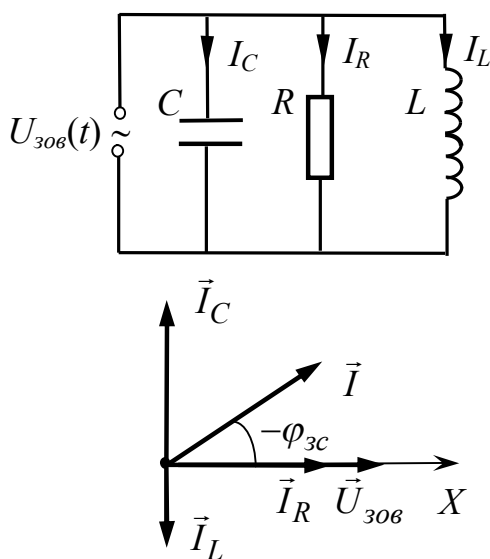


Рис. 30

$I_C$  вектори  $\vec{I}$ ,  $\vec{I}_R$ ,  $\vec{I}_L$  та  $\vec{I}_C$ . На діаграмі, яку наведено на рис. 30, враховано, що коливання струму на опорі  $R$  мають однакову фазу з коливаннями напруги на ньому, а тому вектори  $\vec{U}_{306}$  та  $\vec{I}$  будуть паралельними. Коливання струму на ємності випереджають коливання напруги на ній, тобто їх фази відрізняються на  $\frac{\pi}{2}$ , тому вектор  $\vec{I}_C$  є перпендикулярним до вектора  $\vec{U}_{306}$ . Коливання ж струму на індуктивності

відстають по фазі на  $\frac{\pi}{2}$  від коливань напруги на ній, тому вектор  $\vec{I}_L$  направлений протилежно до вектора  $\vec{I}_C$ .

З наведеної на рис. 30 діаграми випливає, що для модулів векторів сил струмів виконується співвідношення

$$|\vec{I}| = \sqrt{|\vec{I}_R|^2 + (|\vec{I}_C| - |\vec{I}_L|)^2}.$$

Модулі векторів визначаються амплітудами коливань сил струмів:  $|\vec{I}| = I_{\max}$ ,  $|\vec{I}_R| = I_{\max}^{(R)}$ ,  $|\vec{I}_C| = I_{\max}^{(C)}$ ,  $|\vec{I}_L| = I_{\max}^{(L)}$ . З урахуванням цих рівностей амплітуди коливань сил струмів задовольняють співвідношенню

$$I_{\max} = \sqrt{(I_{\max}^{(R)})^2 + (I_{\max}^{(L)} - I_{\max}^{(C)})^2}.$$

Амплітудні значення сил струмів на кожній ділянці кола прямо пропорційні амплітудному значенню напруги на них, або

$$I_{\max}^{(R)} = \frac{U_{\max}}{R}, \quad I_{\max}^{(C)} = \omega C U_{\max}, \quad I_{\max}^{(L)} = \frac{U_{\max}}{\omega L}.$$

Звідси знаходимо шукану амплітуду, так що

$$I_{\max} = U_{\max} \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}.$$

Аналогічно випадку послідовного з'єднання елементів перепишемо цей вираз у спосіб:

$$I_{\max} = \frac{U_{\max}}{Z_{\text{пар}}},$$

де  $Z_{\text{пар}}$  – повний опір кола при паралельному з'єднанні його елементів.

Величина цього повного опору, як легко бачити, визначається за формулою

$$\frac{1}{Z_{\text{пар}}} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}, \quad \text{або} \quad \frac{1}{Z_{\text{пар}}} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)^2}.$$

З неї випливає, що повний опір  $Z_{\text{пар}}$  є максимальним за тієї ж умови, а саме: частота зовнішньої напруги співпадає з власною частотою кола

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

З наведеної на рис. 30 діаграми видно, що зсув фаз між коливаннями сили струму довільної частоти в колі з паралельним з'єднанням елементів можна визначити з виразу



$$\operatorname{tg} \varphi_{3c} = \frac{I_L - I_C}{I_R} \equiv R \left( \frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right).$$

З цього співвідношення прямо знаходимо, що

$$\operatorname{tg} \varphi_{3c} = R \left( \frac{1}{\omega L} - \omega C \right).$$

Припустимо, що у кола з паралельним з'єднанням елементів активний опір прямує до нескінченності, тобто  $R \rightarrow \infty$ . В цьому випадку з схеми на рис. 30 опір  $R$  можна вилучити. Іншими словами, розглянемо коло, в якому ємність та котушка підключені паралельно до генератора змінного струму. Як видно, для такого підключення амплітудне значення сили струму буде визначатися за формулою

$$I_{\max} = \left( \frac{1}{\omega L} - \omega C \right) U_{\max}.$$

Якщо частота зовнішньої напруги співпадає з власною частотою  $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , при якій  $\frac{1}{\omega L} - \omega C = 0$ , то струм (повний струм) в колі зникає, або  $I_{\max}(\omega = \omega_0) = 0$ , незважаючи, на те що  $U_{\max} \neq 0$ . Справа в тому, що на цій частоті колювання сил струмів на ємності та індуктивності відбуваються точно в протифазі. Хоча амплітуди цих струмів однакові і скінчені, з векторної діаграми видно, що  $\vec{I}_L + \vec{I}_C = 0$ . За таких умов струм, що тече через ємність, повністю компенсує струм, що тече через індуктивність. Подібні вимушені колювання в електричному контурі при паралельному підключенні до нього змінної напруги, частота якої співпадає з власною частотою контуру, називають *резонансом струмів*.

## 2.11. Коефіцієнт потужності

Розрахуємо потужність, яку споживає електричне коло, при проходженні змінного струму. Нехай до кола підключено змінну напругу

$$U_{30B}(t) = U_{\max} \cos \omega t,$$

де  $U_{\max}$  – амплітудне значення змінної напруги, а  $\omega$  – її частота. Ця напруга визиває в колі змінний струм, який коливається з частотою змінної напруги:

$$I(t) = I_{\max} \cos(\omega t - \varphi_{3c}),$$

де  $I_{\max}$  – амплітудне значення сили струму в колі, а  $\varphi_{3c}$  – зсув фаз між колюванням зовнішньої напруги та колюванням сили струму.

Струм виконує роботу, миттєве значення потужності якої

$$P = IU_{\text{зоб}} = I_{\text{max}} U_{\text{max}} \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi_{\text{зс}}).$$

Як правило, електроприлади, які використовуються у техніці при вимірюванні потужності, реєструють її середнє значення. При розрахунку середньої потужності зробимо деякі перетворення:

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= I_{\text{max}} U_{\text{max}} \langle \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi_{\text{зс}}) \rangle = \\ &= I_{\text{max}} U_{\text{max}} (\cos \varphi_{\text{зс}} \langle \cos^2 \omega t \rangle + \sin \varphi_{\text{зс}} \langle \cos \omega t \sin \omega t \rangle). \end{aligned}$$

Врахуємо, що за час значно більший періоду коливань середнє  $\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$ , а середнє  $\langle \cos \omega t \sin \omega t \rangle = \frac{1}{2} \langle \sin 2\omega t \rangle = 0$ .

Таким чином, середнє значення потужності в колі зі змінним струмом визначається співвідношенням

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_{\text{max}} U_{\text{max}} \cos \varphi_{\text{зс}}.$$

Для кола з послідовно з'єднаними опором, ємністю та індуктивністю, векторна діаграма якого наведена на рис. 28, амплітудне значення напруги на опорі  $U_{\text{max}}^{(R)} = U_{\text{max}} \cos \varphi_{\text{зс}}$ , тому для такого кола середня потужність дорівнює

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_{\text{max}} U_{\text{max}}^{(R)} = \frac{1}{2} I_{\text{max}}^2 R.$$

Запишемо вираз для середньої потужності з використанням не амплітудних, а діючих значень сили струму і напруги  $I_{\text{д}} = \frac{I_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$ ,  $U_{\text{д}} = \frac{U_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$ .

Тоді прийдемо до висновку, що середнє значення потужності змінного струму визначається за формулою

$$\langle P \rangle = I_{\text{д}} U_{\text{д}} \cos \varphi_{\text{зс}}.$$

Величину  $\cos \varphi_{\text{зс}}$ , яка входить у вираз для середньої потужності, називають *коефіцієнтом потужності*.

Для кола з послідовним з'єднанням опору, ємності та індуктивності величина коефіцієнта потужності дорівнює відношенню активного опору до повного опору. Дійсно, з векторної діаграми на рис. 29 маємо

$$\cos \varphi_{\text{зс}} = \frac{|\vec{U}_R|}{|\vec{U}_{\text{зоб}}|} = \frac{U_{\text{max}}^{(R)}}{U_{\text{max}}} = \frac{I_{\text{max}} R}{I_{\text{max}} Z_{\text{noc}}} = \frac{R}{Z_{\text{noc}}}.$$

Коефіцієнт потужності характеризує вплив зсуву фаз між силою струму в колі та прикладеною до нього напругою на потужність, яку отримує коло (споживач). В електротехніці бажаною є, зрозуміло, ситуація, коли

$\cos \varphi_{zc} \rightarrow 1$ . Якщо ж  $\cos \varphi_{zc}$  є малими, то забезпечення необхідної потужності здійснюється за рахунок збільшення сили струму, що призводить до зростання втрат енергії в провідниках, які з'єднують споживача з джерелом струму (генератором).

## 2.12. Складання взаємно перпендикулярних гармонічних коливань

В пунктах 2.5 та 2.10 було розглянуто складання коливань скалярних величин (наприклад, напруг), або коливань векторних величин, які здійснюються в однаковому напрямку, коли вектори напруженостей електричних полів коливаються вздовж однієї осі.

В цьому пункті ми вивчатимемо складання двох коливань, які відбуваються в перпендикулярних напрямках. Розглянемо, наприклад, складання коливань напруженостей двох електричних полів, якщо вектор напруженості одного поля направлений вздовж осі  $X$ , а вектор напруженості іншого поля – вздовж осі  $Y$ , причому осі  $X$  та  $Y$  перпендикулярні між собою,  $X \perp Y$ . Часові залежності коливань проєкцій обох полів описуються гармонічними функціями

$$E_x(t) = E_{\max}^{(x)} \cos \omega_X t,$$

$$E_y(t) = E_{\max}^{(y)} \cos(\omega_Y t + \alpha),$$

де  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  – частоти відповідних коливань,  $E_{\max}^{(x)}$ ,  $E_{\max}^{(y)}$  – амплітудні значення коливань проєкцій напруженостей обох полів, а  $\alpha$  – різниця фаз між цими коливаннями.

Напруженість результуючого поля представляє собою суму (суперпозицію) напруженостей обох полів

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j},$$

де  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  – одиничні вектори (орти), що лежать вздовж координатних осей.

Таким чином, в результаті складання напруженостей двох взаємно перпендикулярних полів, маємо вектор, проєкції якого здійснюють коливання.

Проведемо опис результуючого коливання у найпростішому випадку, коли частоти коливань напруженостей обох полів однакові,  $\omega_x = \omega_y = \omega$ .

Запишемо рівняння коливань проєкцій у вигляді

$$\frac{E_x(t)}{E_{\max}^{(x)}} = \cos \omega t,$$

$$\frac{E_y(t)}{E_{\max}^{(y)}} = \cos \omega t \cos \alpha - \sin \omega t \sin \alpha .$$

З цих можна співвідношень записати рівняння:

$$\frac{E_y(t)}{E_{\max}^{(y)}} = \frac{E_x(t)}{E_{\max}^{(x)}} \cos \alpha \pm \sin \alpha \sqrt{1 - \left( \frac{E_x(t)}{E_{\max}^{(x)}} \right)^2} ,$$

або

$$\frac{E_y(t)}{E_{\max}^{(y)}} - \frac{E_x(t)}{E_{\max}^{(x)}} \cos \alpha = \pm \sin \alpha \sqrt{1 - \left( \frac{E_x(t)}{E_{\max}^{(x)}} \right)^2} .$$

Піднесемо це рівняння до квадрату та зробимо прості перетворення. У підсумку, приходимо до рівності:

$$\left( \frac{E_y(t)}{E_{\max}^{(y)}} \right)^2 + \left( \frac{E_x(t)}{E_{\max}^{(x)}} \right)^2 - 2 \frac{E_y(t)}{E_{\max}^{(y)}} \frac{E_x(t)}{E_{\max}^{(x)}} \cos \alpha = \sin^2 \alpha$$

Проведемо аналіз отриманого рівняння в залежності від величини різниці фаз коливань  $\alpha$ .

Розглянемо спочатку випадок, коли  $\alpha = 0$ . Тоді записане рівняння для проекцій векторів дає співвідношення:

$$\frac{E_y(t)}{E_{\max}^{(y)}} = \frac{E_x(t)}{E_{\max}^{(x)}} ,$$

яке відповідає прямо пропорційній залежності між проекціями, і з якого випливає, що вектор результуючого поля коливається вздовж прямої.

Треба врахувати, що функції  $E_x(t)$  та  $E_y(t)$  обмежені їх амплітудним значенням, тому отримане рівняння для проекцій задає відрізок, який на рис.

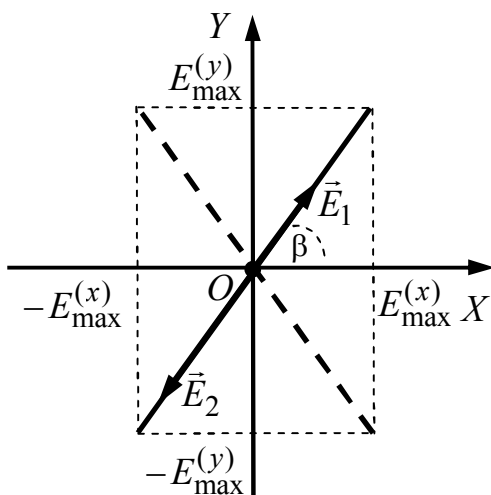


Рис. 31

31 лежить у першому та третьому квадрантах. Цей відрізок визначає множину точок положення кінця вектора  $\vec{E}(t)$  результуючої напруженості. Початок вектора  $\vec{E}(t)$  нерухомий і лежить в точці  $O$  початку системи координат на рис. 31. На рис. 31 показано вектор  $\vec{E}(t)$  для двох довільних моментів часу:  $t_1$ , якому відповідає вектор  $\vec{E}_1 = \vec{E}(t_1)$ , та  $t_2$ , якому відповідає вектор  $\vec{E}_2 = \vec{E}(t_2)$ .

Таким чином, в результаті складання двох взаємно перпендикулярних коливань з однаковими частотою та фазою, буде формуватися коливання з тими ж самими частотою і фазою. Вектор результуючого коливання здійснює коливання вздовж осі, яка складає кут  $\beta$  з віссю  $X$ . Величина цього кута визначається відношенням:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{E_{\max}^{(y)}}{E_{\max}^{(x)}}.$$

Амплітуда такого результуючого коливання дорівнює

$$E_{\max} = \sqrt{(E_{\max}^{(x)})^2 + (E_{\max}^{(y)})^2}.$$

Припустимо тепер, що  $\alpha = \pi$ . Тоді рівняння для проекцій набуває вигляду

$$\frac{E_y(t)}{E_{\max}^{(y)}} = -\frac{E_x(t)}{E_{\max}^{(x)}},$$

яке також описує пряму, яка, однаке, лежить у другому та третьому квадрантах на рис. 31. Відрізок, що відповідає цим коливанням, на рис. 31 зображений пунктиром і є симетричним відносно осі  $Y$  до відрізка, отриманому при  $\alpha = 0$ .

В оптиці коливання вектора напруженості електричного поля хвилі, які відбуваються вздовж прямої, називають *лінійно поляризованими*.

Розглянемо, нарешті, випадок, коли зсув фаз між коливаннями  $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ .

Для такого зсуву фаз рівняння для проекцій набуває вигляду

$$\left( \frac{E_x(t)}{E_{\max}^{(x)}} \right)^2 + \left( \frac{E_y(t)}{E_{\max}^{(y)}} \right)^2 = 1.$$

Це рівняння відповідає еліпсу (див. рис. 32) з півосями  $E_{\max}^{(x)}$  та  $E_{\max}^{(y)}$ .

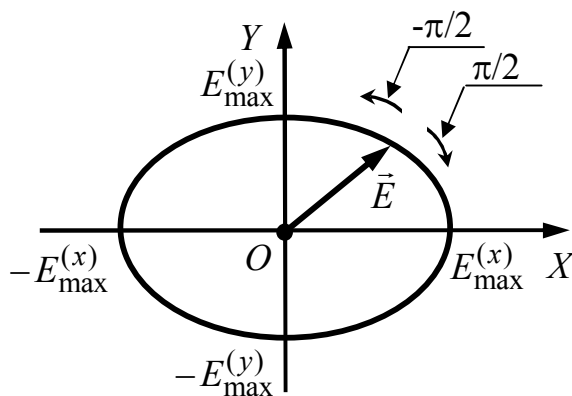


Рис. 32

З'ясуємо, що це за еліпс.

При накладанні коливань напруженостей двох взаємно перпендикулярних полів, фази яких відрізняються на  $\frac{\pi}{2}$ , отримаємо електричне поле з результуючою напруженістю, що характеризується вектором  $\vec{E}$ . Початок цього вектора

лежить у точці  $O$  початку системи відліку, а кінець вектора  $\vec{E}$  лежить на еліпсі (див. рис. 32). Іншою мовою, кінець вектора  $\vec{E}$  результуючої напруженості поля описує з часом еліпс. При цьому при часовому обертанні вектора  $\vec{E}$  змінюється і його модуль.

В оптиці такі коливання вектора напруженості називають *еліптично поляризованими*. Коли  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , то обертання здійснюється за рухом годинникової стрілки. Якщо так, то такі коливання називають *право* поляризованими. Коли  $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ , то вони здійснюється проти руху годинникової стрілки і називаються *ліво* поляризованими. На рис. 32 відповідні напрямки обертального руху вектора  $\vec{E}$  позначено стрілками.

У випадку, коли амплітуди коливань проекцій напруженостей обох полів будуть однаковими  $E_{\max}^{(x)} = E_{\max}^{(y)}$ , кінець вектора  $\vec{E}$  описуватиме колову траєкторію, а його модуль, звичайно, не буде змінюватися у часі. Такі коливання вектора напруженості відбуваються з *круговою поляризацією*.

### 2.13. Питання для самоконтролю

1. Дайте означення квазіперіодичних процесів та електромагнітних коливань.
2. Поясніть фізичну причину виникнення коливань у коливальному контурі.
3. Запишіть вирази для часових залежностей заряду, сили струму, напруженості електричного поля та індукції під час власних електромагнітних коливань у контурі.
4. Запишіть диференціальні рівняння для власних, вільних згасаючих та вимушених коливань у коливальному контурі.
5. Як відрізняються формули для частот власних та вільних згасаючих електромагнітних коливань?
6. Як з закону збереження енергії отримати диференціальне рівняння для вільних незгасаючих коливань у коливальному контурі?
7. Перерахуйте характеристики вільних згасаючих електричних коливань. Поясніть їх фізичну сутність.
8. В чому різниця між частотною залежністю амплітуди заряду та резонансною кривою для вимушених електричних коливань?
9. Як опір впливає на частоту коливань контуру та на їх амплітуду?
10. Нарисуйте схеми коливального контуру для спостереження власних коливань, вільних незгасаючих коливань та вимушених коливань.

11. На якій частоті спостерігається максимум амплітуди заряду при вимушених коливаннях?
12. Поясніть суть методу векторних діаграм.
13. Складання яких коливань можна описати методом векторних діаграм?
14. Поясніть механізм утворення ЕРС в генераторі змінного струму.
15. Які опори називають активними і чому?
16. Дайте означення ємнісному, індуктивному та реактивному опорам.
17. Яким є зсув фаз між коливаннями струму та напруги на опорі, на ємності, на індуктивності?
18. Нарисуйте векторні діаграми для опору, для ємності та для індуктивності.
19. Порівняйте векторні діаграми для кіл з послідовно та паралельно підключеними елементами.
20. Як відрізняються формули для повного опору при послідовному та при паралельному з'єднаннях елементів кола?
21. Коли коефіцієнт потужності дорівнює нулеві? Чому коефіцієнт потужності не може бути більшим за одиницю?
22. Як відрізняється результат накладання двох коливань, що відбуваються в одному напрямку, від накладання двох коливань, які відбуваються в перпендикулярних напрямках?

#### 2.14. Формули необхідні для розв'язку задач

1. Часова залежність заряду в електричному контурі при власних коливаннях

$$q(t) = Q_{\max} \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

де  $Q_{\max}$  – амплітуда заряду,  $\omega_0$  – власна частота,  $\varphi_0$  – початкова фаза.

2. Формула Томпсона для частоти та формула для періоду власних коливань контуру

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC},$$

де  $C$  – ємність,  $L$  – індуктивність.

3. Залежність заряду від часу під час вільних згасаючих електричних коливаннях

$$q(t) = Q_{\max} e^{-\beta t} \cos(\tilde{\omega}_0 t + \varphi_0),$$

де  $\tilde{\omega}_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  – частота згасаючих коливань,  $Q_{\max}$  – амплітудне значення заряду для моменту часу  $t=0$ .

4. Коефіцієнт згасання, час релаксації, логарифмічний декремент і добротність коливального контуру:

$$\beta = \frac{R}{2L}, \quad \tau = \frac{2L}{R}, \quad \theta = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}, \quad Q \approx \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}},$$

(формули для логарифмічного декременту та добротності справедливі за умови  $\beta \ll \omega_0$ ).

5. Залежність заряду від часу для усталених коливань, збурених зовнішньою періодичною напругою  $U_{\text{зов}}(t) = U_{\text{max}} \cos \omega t$ , описуються виразом

$$q(t) = Q_{\text{max}} \cos(\omega t - \alpha),$$

де  $Q_{\text{max}}(\omega) = \frac{U_{\text{max}}}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$  – амплітудне значення заряду,

$\alpha = \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$  – різниця фаз коливань заряду та зовнішньої напруги.

6. Залежність сили струму від часу для усталених коливань, збурених зовнішньою періодичною напругою  $U_{\text{зов}}(t) = U_{\text{max}} \cos \omega t$ , описуються виразом

$$I(t) = I_{\text{max}} \cos(\omega t - \varphi_{\text{зс}}),$$

де  $I_{\text{max}} = \frac{U_{\text{max}}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$  – амплітудне значення сили струму,

$\varphi_{\text{зс}} = \arctg \frac{X_L - X_C}{R}$  – зсув фаз між коливаннями сили струму та напруги.

7. Індуктивний опір, ємнісний опір, реактивний опір і повний опір при паралельному з'єднанні елементів кола

$$X_L = \omega L, \quad X_C = \frac{1}{\omega C}, \quad X = X_L - X_C, \quad Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}.$$

8. Потужність змінного струму

$$\langle P \rangle = I_{\text{д}} U_{\text{д}} \cos \varphi_{\text{зс}},$$

де  $I_{\text{д}} = \frac{I_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$ ,  $U_{\text{д}} = \frac{U_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$  – діючі значення сили струму та напруги,

$\cos \varphi_{\text{зс}} = \frac{R}{Z_{\text{ноч}}}$  – коефіцієнт потужності для кола з послідовним з'єднанням елементів.



## 2.15. Задачі

2.1. Запишіть з чисельними коефіцієнтами рівняння коливань заряду в коливальному контурі, які відбуваються за законом косинуса. Амплітуда коливань становить  $5 \cdot 10^{-6}$  Кл, і за дві секунди здійснюється  $2 \cdot 10^5$  повних коливань. Початкова фаза є такою, що початковий заряд складає половину від його амплітудного значення. Побудуйте графік для часової залежності заряду.

2.2. Запишіть рівняння гармонічних електричних коливань, коли амплітуда становить  $2 \cdot 10^{-6}$  Кл, період коливань 2 мкс, а в початковий момент часу заряд максимальний. Запишіть вираз для сили струму. Знайдіть амплітудне значення сили струму. Побудуйте графіки для заряду та сили струму під час цих коливань.

2.3. Сила струму під час електричних коливань в коливальному контурі змінюється з часом згідно залежності  $I(t) = I_{\max} \sin(\frac{8\pi t}{t_0} + \frac{\pi}{5})$ , де  $I_{\max}$  – амплітудне значення швидкості,  $t_0$  – постійна. Знайдіть період коливань. Запишіть вираз для часової зміни заряду. Визначте амплітудне значення заряду.

2.4. У коливальному контурі з індуктивністю  $L$  відбуваються вільні незгасаючі гармонічні коливання, так що ЕРС самоіндукції в котушці контуру змінюється за законом  $\mathcal{E}_{\tilde{n}^3} = \mathcal{E}_{\max}^{(\tilde{n}^3)} \cos(2\pi \nu t + \frac{\pi}{3})$ , де  $\mathcal{E}_{\max}^{(\tilde{n}^3)}$  – амплітудне значення ЕРС. Запишіть вираз для залежності заряду на ємності контуру, а також знайдіть вираз для енергії електричного поля конденсатора контуру.

2.5. Під час власних коливань, що відбуваються у коливальному контурі, сила струму змінюється з часом по закону  $I(t) = I_{\max} \sin(\omega_0 t + \frac{\pi}{3})$ , де  $I_{\max}$  – амплітудне значення сили струму, а  $\omega_0$  – власна частота. Знайдіть часову залежність густини заряду обкладинок конденсатора контуру, якщо відстань між ними дорівнює  $d$ . Індуктивність контуру  $L$ . Діелектрична проникність діелектрика конденсатора  $\varepsilon$ .

2.6. У коливальному контурі відбуваються власні електричні коливання. Частота коливань  $\omega = 4 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$ . В початковий момент часу заряд конденсатора контуру становить 25 мкКл, а сила струму 75 мА. Знайдіть заряд конденсатора, коли фаза коливань заряду становить  $13\pi$ .

2.7. У коливальному контурі відбуваються власні електричні коливання. В момент часу  $t_1$  заряд ємності контуру  $q_1$ , а сила струму  $I_1$ . А в момент часу  $t_2$  заряд контуру дорівнює  $q_2$ , а сила струму  $I_2$ . Знайдіть період коливань та амплітудне значення заряду.

2.8. Знайдіть середнє значення сили струму під час власних коливань коливального контуру за час, рівний четвертій частині періоду від початку коливань, які описуються виразом  $q(t) = Q_{\max} \cos(\omega_0 t)$ , де  $Q_{\max}$  – амплітудне значення заряду, а  $\omega_0$  – власна частота коливань.

2.9. Коливальний контур містить конденсатор з ємністю 2,5 мкФ та котушку з індуктивністю 1,015 Гн. Конденсатору надали заряду 5 мкКл. Напишіть рівняння (з чисельними коефіцієнтами) для коливань заряду, сили струму, напруги на конденсаторі та ЕРС самоіндукції в котушці.

2.10. Сила струму в коливальному контурі описується виразом  $I(t) = 0,2 \cdot \sin(200\pi t)$ . Знайдіть часову залежність для напруженості електричного поля в конденсаторі, якщо індуктивність контуру 1 Гн, а відстань між обкладинками конденсатора 2 мм.

2.11. Електричні коливання в коливальному контурі описуються виразом  $q(t) = Q_{\max} \sin \omega_0 t$ . Знайдіть відношення електричної енергії конденсатора до магнітної енергії котушки для моменту часу  $T/8$ .

2.12. У скільки разів зміниться власна частота коливань коливального контуру, якщо діелектричну проникність середовища між обкладинками конденсатора збільшити в два рази, а магнітну проникність середовища в середині котушки збільшити у 8 разів?

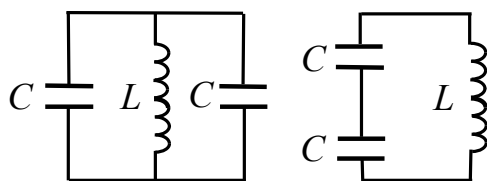


Рис. 33

2.13. У скільки разів треба змінити щільність витків у котушці, щоб частота власних коливань контуру збільшилася втричі.

2.14. Порівняйте власні частоти коливань для контурів, наведених на рис. 33.

2.15. Котушку коливального контуру розмістили у зовнішнє стаціонарне магнітне поле. В момент часу  $t=0$  зовнішнє магнітне поле миттєво виключили. Знайдіть вираз для часової залежності сили струму та заряду в контурі, якщо ємність конденсатора  $C$ , а індуктивність котушки  $L$ . В початковий момент часу магнітний потік через котушку дорівнює  $\Phi_S$ .

2.16. У коливальному контурі відбуваються вільні згасаючі коливання за законом  $q(t) = Q_{\max} e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(2\pi\nu t + \frac{\pi}{3})$ , де  $\tau = 0,05$  с,  $\nu = 10$  Гц. Знайдіть період коливань, їх власну частоту та індуктивність котушки, якщо активний опір конура  $R = 1$  Ом.

2.17. Заряд здійснює згасаючі коливання за законом  $q(t) = Q_{\max} e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(2\pi\nu t + \frac{\pi}{3})$ , де  $\tau$  та  $\nu$  сталі. Знайдіть вираз для ЕРС самоіндукції котушки під час коливного процесу, якщо активний опір кола становить  $R$ .

2.18. У коливальному контурі відбуваються вільні згасаючі коливання, заряд яких описується виразом  $q(t) = Q_{\max} e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(2\pi\nu t + \frac{\pi}{3})$ . Знайдіть моменти часу, коли сила струму в контурі стає рівною нулеві.

2.19. До зарядженого конденсатора ємністю  $C$  підключили активний опір  $R$ . Знайдіть часову залежність для сили струму в колі, якщо початковий заряд конденсатора дорівнює  $q_0$ .

2.20. Котушка з індуктивністю  $L$  підключена до активного опору  $R$ . Котушка розміщена у зовнішньому стаціонарному магнітному полі. В момент часу  $t = 0$  зовнішнє магнітне поле миттєво виключили. Знайдіть вираз для сили струму в колі. Початковий струм  $I_0$

2.21. Сила струму при вільних згасаючих коливаннях описується виразом  $I(t) = I_{\max} e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(2\pi\nu t + \frac{\pi}{3})$ . Знайдіть часову залежність напруги на ємності, якщо індуктивність контуру  $L$ .

2.22. Коливальний контур має ємність  $C = 1$  мкФ, індуктивність  $L = 25$  мГн, активний опір  $R = 1$  Ом. Через скільки коливань амплітуда заряду зменшиться в  $e$ -разів? Яка добротність цього контуру?

2.23. На скільки відсотків відрізняється частота коливань контуру від власної частоти цього контуру, якщо добротність контуру  $Q = 5$ .

2.24. Логарифмічний декремент згасання коливального контуру дорівнює  $0,1$ . Знайти у скільки разів зменшиться амплітуда коливань заряду за одне повне коливання.

2.25. Ємність конденсатора коливального контуру  $C = 2,2$  нФ. Котушка має довжину  $20$  см. Вона намотана мідним дротом, діаметр якого  $0,5$  мм.

Знайдіть логарифмічний декремент згасання коливань. Питомий опір міді  $1,7 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ .

2.26. Яку середню потужність необхідно надавати коливальному контуру, щоб у ньому відбувалися незгасаючі коливання з амплітудою сили струму  $I_{\max} = 30 \text{ мА}$ ? Активний опір провідника контуру  $R = 0,45 \text{ Ом}$ .

2.27. Конденсатор з ємністю  $C$  і активний опір  $R$  послідовно підключили до зовнішньої напруги, яка змінюється за законом  $U_{\text{зов}}(t) = U_{\max} \cos \omega t$ . Знайдіть залежність від  $t$  для сили струму в колі.

2.28. Котушку з індуктивністю  $L$  та опір  $R$  послідовно підключили до зовнішньої напруги  $U_{\text{зов}} = U_{\max} \cos \omega t$ . Знайдіть залежність від  $t$  для сили струму в колі.

2.29. Конденсатор коливального контуру має ємність  $C = 22 \text{ мкФ}$ , індуктивність котушки  $L = 0,35 \text{ Гн}$ , а опір  $R = 20 \text{ Ом}$ . Контур підключено до зовнішньої періодичної напруги амплітудне значення якої  $U_{\max} = 150 \text{ В}$ , а частота  $\omega = 314 \text{ с}^{-1}$ . Знайдіть амплітуду заряду на конденсаторі та зсув фаз між коливанням заряду та зовнішньою напругою.

2.30. Конденсатор коливального контуру має ємність  $C$ , індуктивність контуру  $L$ , а активний опір  $R$ . Знайдіть значення частот усталених вимушених коливань, коли буде максимальна напруга на ємності, коли буде максимальна напруга на опорі, коли буде максимальною напруга на індуктивності.

2.31. Знайдіть добротність коливального контуру, якщо для максимально можливої амплітуди сили струму напруга на конденсаторі в  $n$  разів більша напруги джерела змінного струму.

2.32. Котушка з активним опором  $10 \text{ Ом}$  підключена до джерела змінного струму з діючою напругою  $127 \text{ В}$  і частотою  $50 \text{ Гц}$ . Знайдіть індуктивність котушки, якщо на ній виділяється потужність  $400 \text{ Вт}$ , а зсув фаз між напругою та струмом становить  $60^\circ$ .

2.33. Конденсатор з ємністю  $1 \text{ мкФ}$  і активний опір  $R = 300 \text{ Ом}$  підключені до кола змінного струму з частотою  $50 \text{ Гц}$ . Знайдіть і порівняйте повний опір кола, якщо конденсатор і опір підключені спочатку послідовно, а потім – паралельно.

2.34. Порівняйте повний опір індуктивності  $L$  та опору  $R$ , коли вони з'єднані спочатку паралельно, а потім – послідовно. Частота змінного струму  $\omega$ .

2.35. Обмотка котушки містить  $500$  витків мідного дроту з площею перерізу  $1 \text{ мм}^2$ . Довжина котушки  $50 \text{ см}$ , а її діаметр  $5 \text{ см}$ . На якій частоті коливань

повний опір котушки буде у два рази більший за її активний опір? Питомий опір міді  $1,7 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ .

2.36. Котушку з індуктивністю  $L$  та опором  $R$  підключили до генератора змінного струму. На якій частоті генератора потужність, яку споживає котушка, буде в  $\eta$  разів менша за потужність, що виділяється в котушці при проходженні постійного струму? Вважати, що діюче значення напруги генератора дорівнює напрузі джерела постійного струму.

2.38. Залежність заряду під час усталених вимушених коливань описується виразом  $q(t) = Q_{\max} \cos(\omega t - \alpha)$ . Ці коливання збудовує зовнішня напруга з часовою залежністю  $U(t) = U_{\max} \cos \omega t$ . Знайдіть роботу цієї напруги за час одного періоду коливань.

2.39. Часова залежність сили струму в коливальному контурі описується виразом  $I(t) = I_{\max} \cos(\omega t - \varphi_{zc})$ . Ці коливання збудовує зовнішня напруга виду  $U(t) = U_{\max} \cos \omega t$ . Знайдіть роботу цієї напруги за час одного періоду коливань.

### Глава 3. МЕХАНІЧНІ ХВИЛІ

*Хвилею* називають процес поширення коливань в просторі. Зокрема, в механічних хвилях коливання здійснюють точки середовища. *Точкою середовища* є його малий об'єм, розміри якого значно менші за довжину хвилі. В той же час, розміри такого об'єму залишаються значно більшими розмірів однієї молекули чи міжмолекулярних відстаней в даній речовині, тому в ньому міститься величезна кількість атомів або молекул. В такому разі, точка середовища може характеризуватися тими ж самими фізичними величинами, що й макроскопічні тіла, наприклад, температурою, густиною, тиском. З такого означення також випливає, що точка, або фізично малий об'єм середовища, може зазнавати деформації стиску, розтягу, зсуву тощо. Так, при поширенні хвиль у газах точки середовища зазнають деформацій стиску та розтягу, а у хвилях на поверхні рідини, навпаки, можна обмежитися наближенням, за яким стиском рідини можна знехтувати. Підкреслимо, що поширення механічних хвиль відбувається тільки у середовищі і не можливе у вакуумі.

При поширенні хвиль у газах, або під час хвильового процесу у газі, точки середовища здійснюють одновимірні коливальні рухи вздовж прямої, що співпадає з напрямком поширення самої хвилі. Такі хвилі називають *повздовжніми*. З іншого боку, у хвилі, що поширюється, скажімо, у скрипичній струні, точки середовища також здійснюють одновимірні рухи, але вони відбуваються у напрямку, перпендикулярному до напрямку поширення хвилі. Такі хвилі називаються *поперечними*. Нарешті, у хвиль, які поширюються на поверхні рідини, точки середовища здійснюють більш складний двовимірний рух по коловій траєкторії, в чому можна переконатися, уважно пильнуючи, наприклад, за рухом поплавка вудки.

Під час хвильового процесу точки середовища коливаються відносно своїх положень рівноваги. В рівновазі точки середовища не рухаються відносно одна одної, не зазнають деформацій і не чинять силової дії одна на одну. Отже, хвильовий процес можна розглядати як збурення рівноважного стану середовища. Для хвильового збурення необхідна енергія.

Коли хвиля поширюється у безмежному середовищі, то з часом у хвильовому процесі приймає участь все більше точок середовища. Тому при поширенні хвилі відбувається перенесення енергії, проте таке перенесення енергії не супроводжується перенесенням маси, або, що теж саме, речовини. Хвилі, які переносять енергію, називаються *біжучими*.

Якщо ж хвильовий процес відбувається в обмеженому середовищі, то в цьому випадку перенесення енергії не відбувається, оскільки хвиля не поширюється. При цьому не відбувається і зростання кількості точок середовища, що включаються у хвильовий рух, і тому такі хвилі називаються *стоячими*.

З огляду на те, що поширення хвилі вимагає енергії, для його виникнення необхідне *джерело* хвилі, яке за рахунок власної енергії підтримує існування хвильового процесу в цілому. В біжучій хвилі точки середовища здійснюють вимушені коливання, обумовлені дією джерела хвилі. При цьому коливання точок середовища біжучої хвилі здійснюються з частотою коливань її джерела.

Наприклад, джерелом звукових хвиль, що визначають наш голос і забезпечують спілкування між людьми, є мовний апарат, складовою якого є голосові зв'язки. Під час видиху повітря з легень відбувається збурення коливань зв'язок, які далі поширюються в оточуючому повітрі у вигляді звукових хвиль. Характер збурення залежить від інтенсивності видиху, напруження зв'язок, положення язика, губ. В результаті, виникаючий звуковий процес є досить складним, а точки повітря здійснюють складний коливальний рух з багатьма частотами.

Далі ми вивчатимемо та математично опишемо найпростіші гармонічні хвилі, під час поширення яких точки середовища здійснюють коливання на одній частоті.

### 3.1. Рівняння хвилі

Розглянемо натягнутий резиновий джгут. Добре відомо, що в такому джгуті шляхом невеликого струсу можна утворити збурення, яке поширюватиметься вдовж джгута. На рис. 34 наведено приклад такого

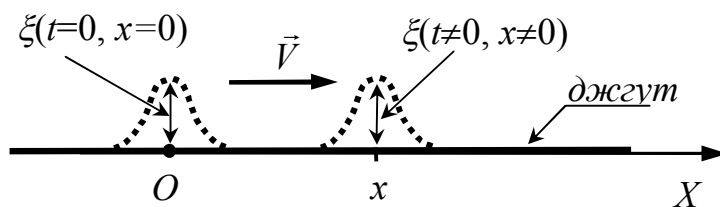


Рис.34

збурення: воно, як видно, представляє собою досить локальне, поперечне зміщення точок джгута, яке зображене пунктиром.

Збурення поширюється, рухаючись вздовж джгута. На рис. 34 показані два різних положення одного збурення, коли воно спочатку, при  $t = 0$ , проходить точку  $O$  початку системи відліку, якому відповідає  $x = 0$ , і наступне положення, коли його максимум в

момент часу  $t$  знаходиться в точці з поточною координатою  $x$ . Важливо, що для обох цих моментів часу збурення має однакову форму, змінюється тільки його положення – збурення „біжить” вздовж джгута.

Величина зміщення точок джгута в ході збурення визначається відстанню, на яку точки джгута змістилися від осі  $X$  (в перпендикулярному до цієї осі напрямку) відносно положення їх рівноваги. Позначатимемо таке зміщення буквою  $\xi$ . Величина зміщення залежить від часу та від координати точок джгута, тобто

$$\xi = \xi(x, t).$$

При поширенні збурення точки джгута зміщуються однаково, але їх зміщення відбуваються з запізненням на час поширення збурення. Таким чином, часова залежність збурення точок джгута описується деякою функцією, аргумент якої можна встановити, а саме:

$$\xi(x, t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right),$$

де  $v$  - швидкість поширення збурення, яка в розглянутому на рис. 34 випадку поширення збурення в натягнутому джгуті, паралельна координатній осі  $\vec{v} \uparrow \uparrow X$ .

Коли збурення поширюється у протилежному напрямку  $\vec{v} \uparrow \downarrow X$ , то в аргументі функції, яка описує величину зміщення, змінюється знак перед дробом, тобто просторово-часова залежність набуває вигляду

$$\xi(x, t) = f\left(t + \frac{x}{v}\right).$$

Зрозуміло, що отримана форма просторово-часового аргументу для функції зміщення відповідає поширенню не тільки поодинокого збурення, а і будь-якому неперервному хвильовому процесу.

Функцію  $f(t, x)$  з аргументами  $t \pm \frac{x}{v}$  називають *рівнянням хвилі*.

Ця функція визначає, де і коли відбуватиметься зміщення точок середовища під час хвильового процесу.

Коли точка середовища здійснює зміщення за гармонічним законом, то така хвиля називається *гармонічною*. У відповідності до сказаного рівняння гармонічної хвилі, що рухається вздовж джгута, має вигляд:

$$\xi(x, t) = \xi_{\max} \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_0\right)$$

для хвилі, що поширюється в позитивному напрямку осі  $X$ , і



$$\xi(x, t) = \xi_{\max} \cos(\omega(t + \frac{x}{v}) + \varphi_0),$$

для хвилі, що поширюється в зворотному напрямку, де  $\xi_{\max}$  – амплітудне зміщення коливань точки,  $\varphi_0$  – початкова фаза, а  $\omega$  – частота.

З виразу зміщення для гармонічної хвилі маємо, що кожна точка середовища здійснює гармонічне коливання, але фази коливань різних точок різні і залежать від їх положення.

Рівняння гармонічної хвилі можна також записати, використовуючи показникову функцію; тоді відповідно

$$\xi(x, t) = \operatorname{Re} \xi_{\max} e^{i[\omega(t \pm \frac{x}{v}) + \varphi_0]},$$

де  $i$  – уявна одиниця.

### 3.2. Період, частота, довжина хвилі, хвильове число та фазова швидкість хвилі

У попередньому пункті було отримано рівняння одновимірної гармонічної хвилі, яка поширюється вздовж прямої і яка описується виразом

$$\xi(x, t) = \xi_{\max} \cos[\omega(t - \frac{x}{v}) + \varphi_0],$$

де  $\xi_{\max}$  – амплітудне значення коливань точок середовища. Величина

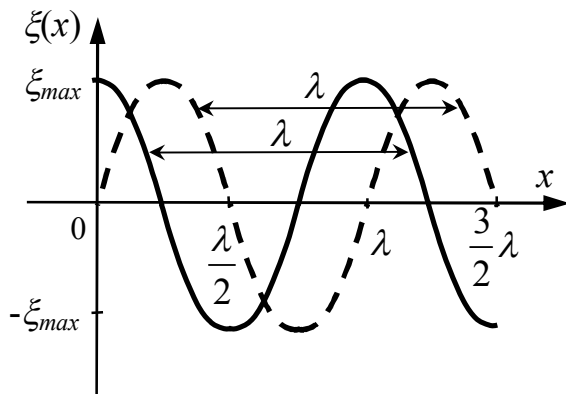


Рис. 35

амплітудного значення точок середовища визначається амплітудою коливань джерела хвилі.

Розподіл зміщень для гармонічної хвилі з  $\varphi_0 = 0$  і для  $t=0$  наведено на рис. 35, де цей розподіл позначено суцільною лінією.

Частота коливань точок середовища під час хвильового

процесу, як і завжди, позначена буквою  $\omega$ , яка задає так звану *циклічну частоту*, а одиниця її вимірювання  $[\omega] = \text{с}^{-1}$ .

Вже зазначалося, що частота хвилі дорівнює частоті коливань її джерела.

Період коливань точок середовища під час хвильового процесу також обернено пропорційний частоті хвилі

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Частоту (не циклічну) коливань точок хвилі позначають  $f$ ; вона визначається рівністю

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Часта  $f$  вимірюється в герцах  $[f] = \text{Гц}$ .

Довільна стадія коливань визначається фазою. Як бачимо з рівняння гармонічної хвилі, фаза коливань залежить від положення точок середовища. Точки, які мають різні координати, можуть коливатися однаково. Це можливо, якщо різниця фаз коливань для двох і більше різних точок середовища кратна числу  $2\pi$ . Найменша відстань між точками середовища, які коливаються однаково, називається *довжиною хвилі*. З виразу для фази знаходимо, що має місце рівність

$$\omega \frac{\lambda}{v} = 2\pi,$$

якщо  $\lambda$  – довжина хвилі: на рис. 35 її позначено подвійною стрілкою. З цього означення легко отримати стандартну формулу для довжини хвилі

$$\lambda = vT = \frac{v}{f}.$$

Як видно, довжина хвилі – це відстань, яку проходить хвиля за час, рівний періоду.

На рис. 35 також зображено (пунктирною кривою) розподіл зміщень для моменту часу  $t = T/4$ .

З використанням введених понять періоду та довжини хвилі рівняння хвилі можна записати у вигляді

$$\xi(x, t) = \xi_{\max} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_0\right),$$

яке прийнято писати дещо інакше:

$$\xi(x, t) = \xi_{\max} \cos(\omega t - kx + \varphi_0),$$

де  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , так зване *хвильове число*.

Циклічна частота  $\omega$  визначається кількістю коливань, що відбуваються за час  $2\pi$  секунд, а хвильове число відповідає кількості довжин хвиль, яка припадає на відстань  $2\pi$  метрів.

Як вже говорилося, фаза коливань гармонічної хвилі в будь-який момент залежить від часу та положення точок середовища у спосіб:

$$\varphi(x, t) = \omega t - kx + \varphi_0.$$

Визначимо умову, за якою значення фази є постійним,  $\varphi(x, t) = \text{const}$ . Ця умова не виконується для будь-якої точки середовища з фіксованим значенням координати. Але фаза може залишатися незмінною, при переміщенні вздовж напрямку поширення хвилі. Знайдемо похідну від виразу для фази за означеної вище умови, що фаза не змінює свого значення:

$$\omega - k \frac{dx}{dt} = 0.$$

Знаходимо, що фіксоване значення фази відповідає руху вздовж напрямку поширення хвилі зі швидкістю  $v_\phi = \frac{dx}{dt}$ , яку називають *фазовою швидкістю* і яка визначається виразом

$$v_\phi = \frac{\omega}{k}.$$

Фазова швидкість гармонічної хвилі дорівнює швидкості поширення хвилі  $v_\phi = v$ .

### 3.3. Рівняння плоскої хвилі

В розглянутому вище прикладі поширення поперечної хвилі в натягнутому джгуті, коливання здійснювали точки середовища, які лежать на прямій джгута. Було отримано рівняння хвилі, яке описує поширення біжучої хвилі вздовж джгута і яке має вигляд

$$\xi(x, t) = \xi_{\max} \cos(\omega t - kx + \varphi_0),$$

де  $\xi_{\max}$  – амплітуда коливань точок середовища,  $\omega$  – частота хвилі, а  $k$  – хвильове число.

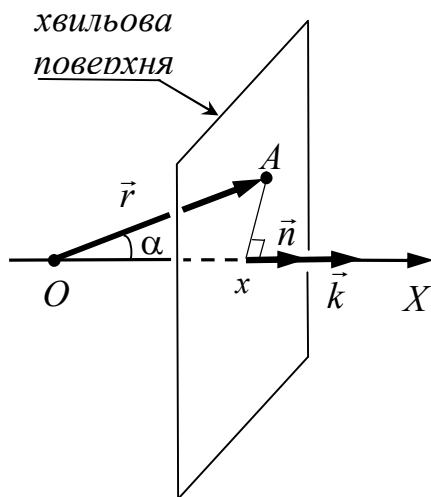


Рис. 36

Це рівняння хвилі називають *рівнянням плоскої хвилі*, бо воно може описувати не тільки одновимірну гармонічну хвилю, що поширюється вздовж прямої, як це має місце для джгута.

Дійсно, рівняння плоскої хвилі відповідає процесу поширення тривимірної просторової хвилі у середовищі. На рис. 36 зображено поширення такої тривимірної плоскої хвилі вздовж координатної осі X.

Всі точки площини, яка перпендикулярна до осі  $X$ , мають (див. рис. 36) однакове значення координати  $x$ , а тому вони мають однакове значення фази, тобто, як кажуть, коливаються *синфазно*. Поверхня, яку утворюють точки, які коливаються синфазно, або однаково, називається *хвильовою поверхнею*. Для плоскої хвилі хвильовою поверхнею є площина.

Орієнтацію хвильової площини у просторі задає одиничний вектор  $\vec{n}$  перпендикулярний до цієї площини. У випадку, що наведений на рис. 36,  $\vec{n} \uparrow\uparrow X$ .

Положення довільної точки  $A$  на хвильовій поверхні задається радіус-вектором  $\vec{r}$ . Він складає кут  $\alpha$  з віссю  $X$ . Тоді координата точки  $A$  задається скалярним добутком векторів:

$$x = \vec{r} \vec{n} = |\vec{r}| \cos \alpha.$$

Введемо поняття хвильового вектора. *Хвильовим вектором* називають вектор, перпендикулярний до хвильової поверхні, величина якого дорівнює хвильовому числу. Позначають хвильовий вектор  $\vec{k}$ , а його модуль  $|\vec{k}| = k$  був визначений у попередньому пункті.

У відповідності до введеного означення, хвильовий вектор визначає напрямок поширення хвилі. Для випадку плоскої хвилі цей вектор направлений перпендикулярно до хвильової поверхні, тому вектори  $\vec{k}$  та  $\vec{n}$  є колінеарними,  $\vec{k} \uparrow\uparrow \vec{n}$ , а отже можна покласти, що

$$\vec{k} = k\vec{n}.$$

В результаті такого означення хвильового вектора, добуток хвильового числа  $k$  на  $x$ -ву координату може бути представлений у вигляді

$$kx = k\vec{r}\vec{n} = \vec{k}\vec{r}.$$

Таким чином, рівняння плоскої хвилі набуде форми

$$\xi(\vec{r}, t) = \xi_{\max} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0),$$

де  $\vec{r}$  – радіус-вектор положення довільної точки середовища, яка приймає участь у хвильовому процесі, а  $\xi(\vec{r}, t)$  – її зміщення у довільний момент часу  $t$ . Це рівняння відповідає такій плоскій хвилі, в якій точки середовища під час коливань здійснюють одновимірний рух, а відповідні зміщення описується однією проекцією  $\xi(\vec{r}, t)$ .

Рівняння плоскої хвилі можна також записати у вигляді

$$\xi(\vec{r}, t) = \text{Re} \xi_{\max} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0)}.$$

За такого представлення плоскої хвилі її напрямок поширення задає хвильовий вектор  $\vec{k}$ .

### 3.4. Хвильове рівняння

*Хвильовим рівнянням* називають диференціальне рівняння, що описує рух точок середовища під час хвильового процесу. Вище нами було показано, що при поширенні хвилі вздовж осі  $X$ , коли  $\vec{v} \uparrow \uparrow X$ , чи в протилежному напрямку, коли  $\vec{v} \uparrow \downarrow X$ , зміщення описується функцією

$$\xi(x, t) = f\left(t \mp \frac{x}{v}\right),$$

яку можна представити як складну функцію від аргументу. Для цього введемо змінну  $\tau = t \mp \frac{x}{v}$ , що має розмірність часу. З урахуванням цього частинні похідні першого порядку для зміщення визначаються виразами:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{df}{d\tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{df}{d\tau}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{df}{d\tau} \frac{\partial \tau}{\partial x} = \mp \frac{1}{v} \frac{df}{d\tau},$$

де враховано, що  $\frac{\partial \tau}{\partial t} = 1$ ,  $\frac{\partial \tau}{\partial x} = \mp \frac{1}{v}$ . Бачимо, що частинна похідна по координаті залежить від напрямку поширення хвилі.

Тепер запишемо частинні похідні другого порядку:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= \frac{d^2 f}{d\tau^2} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{d^2 f}{d\tau^2}, \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} &= \mp \frac{1}{v} \frac{d^2 f}{d\tau^2} \frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{1}{v^2} \frac{d^2 f}{d\tau^2}. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що частинна похідна другого порядку по координаті на відміну від похідної першого порядку не залежить від напрямку поширення хвилі.

З виразів для похідних другого порядку приходимо до рівності

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

яка фактично є диференціальним рівнянням. Воно в однаковій мірі виконується для хвиль, що розповсюджуються і вздовж осі  $X$ , і протилежно до неї. Таке рівняння є хвильовим рівнянням. Воно лінійне, тому у загальному випадку його розв'язком є сума функцій обох можливих аргументів, а саме:

$$\xi(x, t) = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{v}\right),$$

де перший доданок описує поширення хвилі вздовж осі  $X$ , а другий – в протилежному напрямку.

Узагальнене хвильове рівняння містить суму частинних похідних зміщення по всім трьом координатам і може бути представлено виразом:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Це рівняння можна записати використовуючи поняття лапласіану, яким „скорочено” позначають суму частинних похідних другого порядку

$$\Delta \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

де  $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа, або *лапласіан*.

Переконаємося, що плоска гармонічна хвиля задовольняє узагальненому хвильовому рівнянню. Для цього запишемо рівняння хвилі у вигляді

$$\xi(\vec{r}, t) = \text{Re} \xi_{\max} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0)},$$

де  $\xi_{\max}$  – амплітудне зміщення, а  $\vec{k}$  – хвильовий вектор, а  $i$  – уявна одиниця.

Представимо записану комплексну функцію дещо інакше:

$$\tilde{\xi}(\vec{r}, t) \equiv \tilde{\xi} = \xi_{\max} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0)} = \xi_{\max} e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi_0)},$$

де  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$  – просторові проекції хвильового вектора, а  $x$ ,  $y$ ,  $z$  – проекції радіус-вектора (координати точки середовища).

Порахуємо лапласіан від функції  $\tilde{\xi}$

$$\Delta \tilde{\xi} = \frac{\partial^2 \tilde{\xi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\xi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\xi}}{\partial z^2} = (-i)^2 \xi_{\max} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi_0)}.$$

Отже, вираз для лапласіану від функції  $\tilde{\xi}$  можна записати у вигляді

$$\Delta \tilde{\xi} = -k^2 \xi_{\max} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0)}, \quad \text{або} \quad \Delta \tilde{\xi} = -k^2 \tilde{\xi},$$

де враховано, що  $(-i)^2 = -1$ , а  $k^2$  – квадрат модуля хвильового вектора (квадрат хвильового числа).

В результаті, отримуємо, що лапласіан зміщення плоскої гармонічної хвилі прямо пропорційний зміщенню і визначається його добутком на квадрат хвильового вектора.

Тепер порахуємо часову похідну другого порядку від  $\tilde{\xi}$ :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\xi}}{\partial t^2} = (i)^2 \omega^2 \xi_{\max} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0)} = -\omega^2 \tilde{\xi}.$$

Порівнюючи два останні вирази, прямо приходимо до рівності

$$k^2 \xi_{\max} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0)} = \frac{1}{v^2} \omega^2 \xi_{\max} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0)}.$$

Отже, ми продемонстрували, що функція  $\xi$  задовольняє узагальненому хвильовому рівнянню, коли виконується рівність

$$k^2 = \frac{\omega^2}{v^2},$$

яку можна записати простіше:  $\omega = vk$ . Отриманий зв'язок між хвильовим вектором та частотою називають *дисперсійним співвідношенням*.

Хвильовий вектор гармонічної плоскої хвилі прямо пропорційний частоті. Проте зауважимо, що згасання або нелінійні ефекти призводять до порушення цієї пропорційності.

### 3.5. Сферична хвиля

Запишемо узагальнене хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

права частина якого містить суму похідних другого порядку від зміщення по координатах  $x, y, z$ , які визначені в декартовій системі координат.

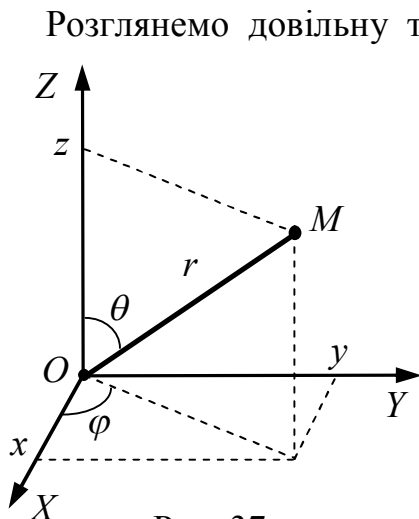


Рис. 37

Розглянемо довільну точку  $M$  з координатами  $x, y, z$  у декартовій системі координат. Перейдемо до сферичної системи координат, в якій положення точки характеризується відстанню  $r$  від неї до початку системи відліку та двома кутами  $\theta$  та  $\varphi$  (див. рис. 37). Запишемо відомі формули зв'язку між координатами декартової та сферичної систем координат:

$$x = r \cos \varphi \sin \theta,$$

$$y = r \sin \varphi \sin \theta,$$

$$z = r \cos \theta.$$

В сферичній системі координат лапласіан від зміщення, як відомо, має вигляд

$$\Delta \xi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2}.$$

З урахуванням такого запису лапласіану узагальнене хвильове рівняння у сферичній системі відліку набуває вигляду

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Знаходження розв'язку цього рівняння спирається на знання методів математики, який називають математичною фізикою.

Обмежимося розглядом найпростішого випадку, коли хвиля має сферичну симетрію, тобто хвильові зміщення залежать тільки від відстані  $r$  до початку системи відліку і не залежать від кутів  $\theta$  та  $\varphi$ . Іншою мовою, в такій хвилі величини зміщень не залежать від напрямку її поширення. Хвильовою поверхнею будь-якої сферичної хвилі є сфера з центром в точці  $O$  (див. рис. 38). В сферичній хвилі хвильовий вектор співнаправлений з радіус-вектором  $\vec{r}$  точки на поверхні сфери  $\vec{k} \uparrow \uparrow \vec{r}$ .

У випадку, зображеному на рис. 38, джерело сферичної хвилі знаходиться в точці  $O$ . Точкою  $M$  на цьому рисунку позначено довільну точку середовища, яка лежить на хвильовій поверхні, радіус якої  $r = |\vec{r}| = |\overline{OM}|$

Отже, для сферичної хвилі зміщення залежать тільки від  $r$  та  $t$  (тобто  $\xi(\vec{r}, t) = \xi(r, t)$ ), тому похідні  $\frac{\partial \xi}{\partial \theta} = 0$ ,  $\frac{\partial \xi}{\partial \varphi} = 0$ . У підсумку, хвильове рівняння для зміщень сферичної хвилі значно спрощується і приймає вигляд:

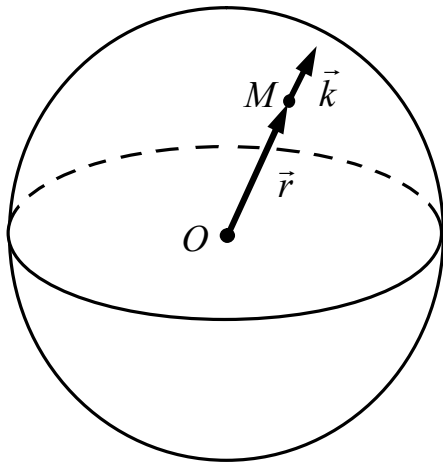


Рис. 38

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Це рівняння можна перетворити, переписавши його у вигляді

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \xi) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

або, що теж саме,

$$\frac{\partial^2 (r \xi)}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 (r \xi)}{\partial t^2}.$$

Якщо тепер ввести функцію  $\zeta = r \xi$ , то хвильове рівняння для сферичної хвилі набуде, як видно, свого звичайного

вигляду:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}.$$



Розв'язок цього рівняння у загальному випадку можна представити сумою двох функцій

$$\zeta(r, t) = f_1\left(t - \frac{r}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{r}{v}\right).$$

Звідси знаходимо вираз для зміщень у сферичній хвилі:

$$\xi(r, t) = \frac{1}{r} f_1\left(t - \frac{r}{v}\right) + \frac{1}{r} f_2\left(t + \frac{r}{v}\right).$$

Тоді рівняння гармонічної сферичної хвилі можна записати у остаточному вигляді:

$$\xi(r, t) = \frac{C}{r} \cos(\omega t \mp kr + \varphi_0),$$

де  $C$  - константа. У сферичній хвилі, яка поширюється від центру сфери (знак „-” перед добутком  $kr$ ) амплітуда зменшується обернено пропорційно відстані до її центру.

Коли ж сферична хвиля збігається до центру сфери (знак „+” перед  $kr$ ), то амплітуда хвилі по мірі наближення до центру навпаки, наростає. Така властивість амплітуди сферичних хвиль при їх русі до центру використовується у техніці – зокрема, у так званих „концентраторах” хвиль. Одні з перших досліджень концентраторів ультразвукових хвиль були проведені саме в НТУУ „КПІ”.

### 3.6. Швидкість поширення біжучої хвилі в струні

Дотепер в попередніх пунктах цієї глави розглядалося поширення хвиль без врахування фізичних характеристик середовища, в якому відбувається хвильовий процес. Так, ми користувалися поняттям швидкості поширення хвилі, не встановивши, як пов'язана ця швидкість з властивостями середовища. Швидкість поширення хвилі, безумовно, визначається фізичними чинниками, що характеризують хвильовий процес. Тому вивчаючи той або інший конкретний випадок, необхідно дослідити

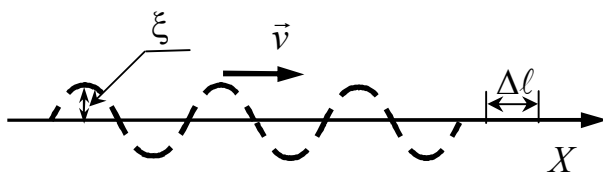


Рис. 39

фізичні процеси, що супроводжують хвильовий процес.

В цьому пункті ми визначимо швидкість поширення хвилі у натягнутій струні (див. рис. 39).

Будемо вважати, що струна є нескінченно тонкою. Точками середовища є фізично малі ділянки струни

довжиною  $\Delta\ell \rightarrow 0$  (очевидно, більш фізичною є умова  $\Delta\ell \ll \lambda$ , де  $\lambda$  – довжина хвилі). Силу натягу струни позначимо  $F$ . Вважатимемо, що струна однорідна, тобто в усіх її точках густина  $\rho$  речовини струни однакова і однакова площа  $S$  перерізу струни.

Визначимо швидкість поширення в струні поперечної біжучої хвилі. На рис. 39 зміщення точок струни під час хвильового процесу показане пунктирною кривою.

Очевидно, що швидкість  $\vec{v}$  поширення хвилі дорівнює швидкості поширення максимуму зміщення вздовж струни. Поширення максимуму зміщення струни еквівалентне руху ділянок струни, яку тягнуть через трубку, форма якої співпадає з формою кривої зміщення хвилі біля максимуму (див. рис. 40). При цьому припускати, що швидкість, з якою струну тягнуть через трубу, постійна і за величиною дорівнює швидкості поширення хвилі.

На рис. 40 трубку зображено пунктиром, а струну, яку тягнуть через трубку, зображено суцільною лінією. Таке припущення означає, що струна є гнучкою і можна нехтувати можливими деформаціями зсуву.

Виділимо малу ділянку струни довжиною  $\Delta\ell$ , яка спирається на кут  $\Delta\alpha$  з центром заокруглення в точці  $O$  та радіусом кривизни  $R$ . За прийнятих умов (форма трубки тотожна кривій зміщень поблизу максимуму зміщення) радіус кривизни  $R$  дорівнює радіусу кривизни кривої зміщення біля одного з його максимумів.

Виділена ділянка струни рухається з доцентровим прискоренням  $\vec{a}_\partial$ , яке направлене до точки  $O$ . За другим законом Ньютона цього прискорення

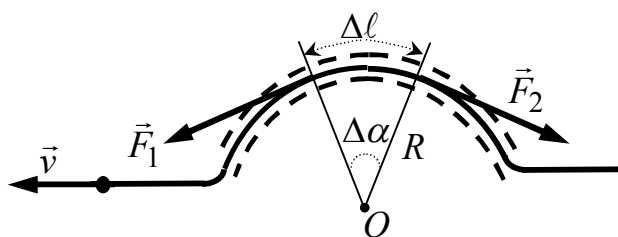


Рис. 40

даній ділянці струни надають сили натягу  $\vec{F}_1$  та  $\vec{F}_2$ , які прикладені до її країв

$$\Delta m \cdot \vec{a}_\partial = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

Зміщення точок струни за припущенням незначне, тому можна покласти, що

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| \approx F.$$

Тоді з рівняння другого закону Ньютона отримаємо

$$\Delta m \frac{v^2}{R} = F \Delta \alpha.$$

Для однорідної струни маса ділянки

$$\Delta m = \rho S \Delta \ell,$$

а її довжина –

$$\Delta \ell = R \Delta \alpha.$$

Підставимо ці співвідношення до рівняння другого закону Ньютона, звідки отримуємо

$$\rho S R \Delta \alpha \frac{v^2}{R} = F \Delta \alpha.$$

Після необхідного скорочення знаходимо, що швидкість поширення поперечної біжучої хвилі в натягнутій струні визначається формулою

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho S}}.$$

З неї випливає, що швидкість поширення поперечної біжучої хвилі в струні залежить від сили натягу струни. Чим більший натяг, тим більшою є швидкість поширення хвилі в струні, але водночас поширення хвилі гальмується у товстих струнах, зроблених з більш важких матеріалів.

### 3.7. Швидкість поширення біжучої повздовжньої пружної хвилі в стрижні

Розглянемо інший приклад, а саме: однорідний стрижень. Визначимо, якою буде швидкість повздовжньої біжучої хвилі, яка поширюється вздовж осі вільного стрижня. Така хвиля буде плоскою. Всі точки площини, що лежать на перпендикулярному перерізі стрижня, матимуть однакову фазу. Вони будуть мати однакове зміщення  $\xi$ .

Зміщення у повздовжній хвилі направлені вздовж напрямку її поширення, а в даному випадку – вздовж осі стрижня. Під час поширення хвилі точки середовища стрижня зсуваються по-різному, тим самим створюючи деформації, які, в свою чергу, супроводжуються виникненням пружних сил.

На рис. 41 зображено стрижень, вісь якого позначено  $X$ . До перерізу

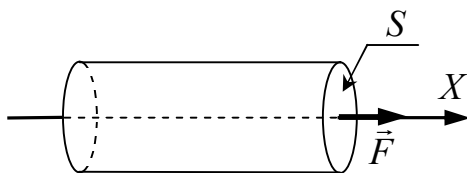


Рис. 41

стрижня прикладено силу  $\vec{F}$ , дія якої характеризується напруженням, яке однакове для всіх точок перерізу і яке визначається з відношення сили до площі перерізу стрижня  $\sigma = \frac{F}{S}$ .

Крім того, треба враховувати, що сили, які виникають під час хвильового процесу, є неоднорідними, тобто залежать від координати.

Дійсно, виділимо малу ділянку стрижня довжиною  $\Delta x$  (рис. 42). Внаслідок дії сили на виникають напруження, які деформують ділянку, абсолютне видовження якої позначимо  $\Delta \xi$ . Зрозуміло, що відносне видовження ділянки дорівнює відношенню  $\Delta \xi / \Delta x$ .

За законом Гука напруження прямо пропорційне відносному видовженню

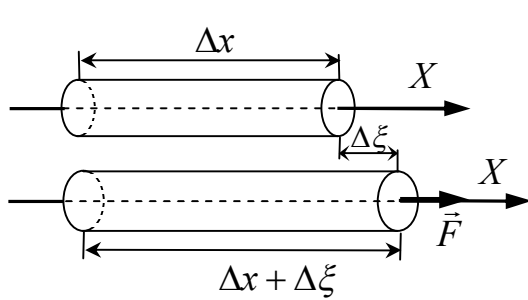


Рис. 42

$$\sigma = E \frac{\Delta \xi}{\Delta x},$$

де  $E$  – модуль Юнга.

Коли  $\Delta \xi \rightarrow 0$  та  $\Delta x \rightarrow 0$ , наведений вираз для напруження набуває вигляду

$$\sigma = E \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Таким чином, у стрижні локальне значення напруження прямо пропорційне просторовій похідній зміщення, тобто є локальним.

Під час хвильового процесу будь-яка мала ділянка стрижня зміщуючись як ціле, деформується та деформує сусідні ділянки (див. рис.

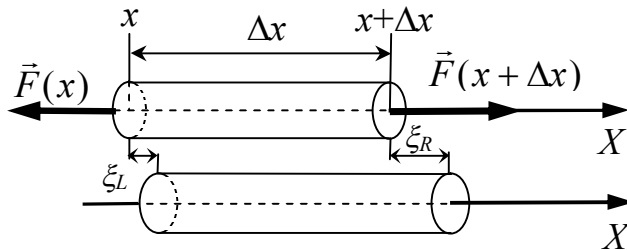


Рис. 43

43), оскільки точки лівого та правого боків ділянки зміщуються на різні відстані  $\xi_L$  та  $\xi_R$ . Це означає, що довжина виділеної ділянки зміниться на величину  $\Delta \xi = \xi_R - \xi_L$ . Середня швидкість, яку набуває ділянка

(її центр мас) в цілому за час  $\Delta t$ , визначається відношенням  $\frac{\Delta \xi}{\Delta t}$ , а миттєве

значення швидкості цієї ділянки визначається похідною  $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ .

Відповідно, прискорення ділянки задається часовою похідною другого порядку від зміщення  $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ .

Прискорення виникає в результаті дії сил – в даному випадку  $\vec{F}(x)$  та  $\vec{F}(x + \Delta x)$ , які прикладені до лівого та правого кінців ділянки. За другим законом Ньютона можемо записати рівняння її руху:

$$\Delta m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = F(x + \Delta x) - F(x),$$

де  $\Delta m = \rho S \Delta x$  – маса ділянки, яка визначається добутком густини  $\rho$  на об’єм  $S \Delta x$ .

Різниця сил пропорційна різниці напружень

$$F(x + \Delta x) - F(x) = [\sigma(x + \Delta x) - \sigma(x)]S.$$

Для різниці напружень обмежимося лінійним наближенням

$$\sigma(x + \Delta x) - \sigma(x) \approx \frac{\partial \sigma}{\partial x} \Delta x.$$

З урахуванням цих співвідношень рівняння другого закону Ньютона для ділянки стрижня приймає форму

$$\rho S \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = S \frac{\partial \sigma}{\partial x} \Delta x.$$

Після скорочень  $S$  та  $\Delta x$  приходимо до диференційного рівняння

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}.$$

Якщо тепер в ньому врахувати, що  $\sigma = E \frac{\partial \xi}{\partial x}$ , то отримаємо диференційне рівняння, яке містить вже тільки одну функцію координати і часу – зміщення:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

З останнього рівняння знаходимо остаточне рівняння, яке приймає вигляд хвильового:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

де

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

– швидкість біжучої повздовжньої пружної хвилі в стрижні. В останній формулі припускається, що, незважаючи на хвильовий процес, густина стрижня залишається незмінною.

При визначенні швидкості поширення хвилі ми також знехтували зміною площі перерізу стрижня під час його деформування. Це так зване наближення „тонкого” стрижня, яке виконується, наприклад, для сталюого

стрижня. В ньому  $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \sim 5000$  м/с, коли по ньому поширюється хвиля з частотою  $f = 5000$  Гц; тоді довжина хвилі становить  $\lambda = v/f \sim 1$  м. Отже, стрижень з діаметром 1 см можна вважати тонким. Для випадку стрижня кінцевого перерізу формула для швидкості модифікується. Зауважимо, що наведений вираз для швидкості розповсюдження повздовжньої біжучої пружної хвилі в тонкому стрижні співпадає з виразом для швидкості поширення повздовжньої пружної біжучої хвилі у безмежному ізотропному твердому середовищі.

### 3.8. Швидкість поширення хвиль у газах і рідинах

У газах та рідинах поширюються тільки повздовжні пружні хвилі. Дійсно, поширення пружних хвиль супроводжується неоднорідними деформаціями середовища: у поперечних хвилях відбуваються деформації зсуву, а у повздовжніх – деформації стиску та розтягу. Деформації зсуву змінюють не об'єм тіл, а лише їх форму. Деформації стиску чи розтягу, навпаки, змінюють не форму, а об'єм.

Рідини та гази не мають власної форми, займаючи, як відомо, увесь доступний ним об'єм, тому в них можливими є тільки деформації стиску чи розтягу. З цього випливає, що у рідинах та газах можуть існувати і поширюватися тільки повздовжні пружні хвилі. Пружні хвилі, що розповсюджуються у середовищі, називають *звуковими* хвилями.

Розглянемо газ (чи рідину), який розміщений всередині нескінченно довгого циліндру (див рис. 44). Нехай вздовж осі циліндру, яку ми позначимо  $X$ , поширюється повздовжня пружна плоска хвиля. Її фазовою поверхнею

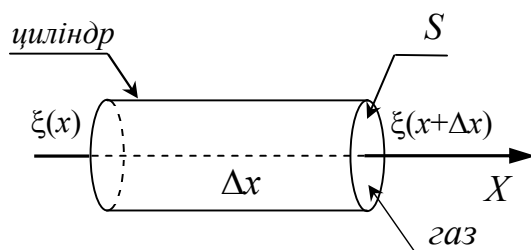


Рис. 44

буде площина перерізу циліндру, яка перпендикулярна до осі  $X$ .

Виділимо вздовж циліндру ділянку довжиною  $\Delta x$ . Під час стиску чи розтягу ця ділянка зазнаватиме деформації  $\Delta \xi$ . Таке деформування ділянки буде супроводжуватися зміною тиску,

причому величина додаткового тиску на ділянці буде пропорційна її відносному видовженню

$$\Delta P = -\alpha \frac{\Delta \xi}{\Delta x},$$

де  $\alpha$  – коефіцієнт пропорційності, який відіграє таку ж саму роль, що й модуль Юнга для твердих тіл. Знак мінус в цьому виразі означає, що знак додаткового тиску протилежний до знаку деформації. Наприклад, при стисненні, коли  $\Delta\xi < 0$ , додатковий тиск додатний  $\Delta P > 0$ .

Помножимо в попередньому виразу чисельник та знаменник на площу  $S$  перерізу циліндру. Отримаємо, що зміна тиску пропорційна відносній зміні об'єму

$$\Delta P = -\alpha \frac{S\Delta\xi}{S\Delta x} = -\alpha \frac{\Delta V}{V},$$

де враховано, що добуток  $S\Delta x$  – це не що інше, як об'єм виділеної ділянки:  $S\Delta x = V$ , а добуток  $S\Delta\xi$  – зміна об'єму ділянки під час хвильового процесу:  $S\Delta\xi = \Delta V$ .

Коли  $\Delta V \rightarrow 0$ , то останній вираз можна записати з використанням диференціалів:

$$dP = -\alpha \frac{dV}{V}.$$

Таким чином, параметр  $\alpha$ , який характеризує пружні здатності середовища, виявляється термодинамічною величиною:

$$\alpha = -V \frac{dP}{dV}.$$

Як вже говорилося, цей параметр подібний до модуля Юнга. Тому вираз для швидкості поширення повздовжньої пружної хвилі в газі чи рідині можна записати у вигляді

$$v = \sqrt{\frac{\alpha}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{V}{\rho_0} \left| \frac{dP}{dV} \right|},$$

де  $\rho_0$  - густина незбуреного хвилею середовища.

Розрахуємо параметр  $\alpha$  у випадку поширення пружної звукової хвилі в ідеальному газі.

Експерименти показують, що при поширенні пружних хвиль у газах, деформування ділянок середовища відбувається без теплообміну з сусідніми точками. Це означає, що стиск чи розтяг точок середовища відбувається адіабатно. Рівняння адіабати описується виразом

$$PV^\gamma = \text{const},$$

де  $\gamma$  – коефіцієнт адіабати.

Продиференціюємо рівняння адіабати:

$$V^\gamma dP + \gamma PV^{\gamma-1} dV = 0.$$

Поділимо останню рівність на  $PV^\gamma$  та запишемо диференціальне рівняння адіабатного процесу:

$$\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0.$$

З цього рівняння, використовуючи формулу для параметра  $\alpha$ , знаходимо, що цей параметр прямо пов'язаний з тиском рівноважного стану газу:

$$\alpha = \gamma P_0.$$

Отже швидкість поширення пружної хвилі в ідеальному газі визначається формулою

$$v = \sqrt{\gamma \frac{P_0}{\rho_0}}.$$

Далі врахуємо рівняння стану ідеального газу (рівняння Менделєєва-Клапейрона), яке має вигляд

$$P_0 V = \frac{m}{\mu} RT,$$

де  $m$  – маса газу,  $\mu$  – молярна маса газу,  $R$  – універсальна газова стала, а  $T$  – абсолютна температура. За означенням густина газу  $\rho_0 = \frac{m}{V}$ , тому шукане відношення набуває форми  $\frac{P_0}{\rho_0} = \frac{R}{\mu} T$ .

Таким чином, формулу для швидкості поширення пружної хвилі (швидкість звукової хвилі) в ідеальному газі можна записати у вигляді

$$v = \sqrt{\gamma \frac{R}{\mu} T}.$$

Для газу параметр адіабати  $\gamma$  дорівнює відношенню питомих теплоємностей  $\gamma = \frac{c_P}{c_V}$ , де  $c_P$  – питома теплоємність газу при  $P = const$ , а  $c_V$  – питома теплоємність газу при  $V = const$ , причому  $c_P = c_V + R$ . Для одноатомного ідеального газу  $\gamma = \frac{5}{3}$ , для двохатомного ідеального газу  $\gamma = \frac{7}{5}$ .

Підставляючи у формулу для  $v$  необхідні чисельні значення можна знайти, що швидкість поширення звукових хвиль в повітрі при нормальних умовах ( $T=273$  К) становить приблизно 330 м/с.



Зазвичай при аналізі пружних хвиль у газах і рідинах користуються не зміщенням точок середовища, а додатковим тиском, що виникає при поширенні хвилі. Величину додаткового тиску визначають як різницю між миттєвим значенням тиску і тиском у рівноважному стані  $\Delta P = P - P_0$ . З попередньо проведеного розгляду за умови, що на рис. 44  $\Delta x \rightarrow 0$ , випливає, що величина додаткового тиску становить  $\Delta P = -\alpha \frac{\partial \xi}{\partial x}$ . Величина параметра  $\alpha$  дорівнює добутку  $\alpha = \rho_0 v^2$ , де  $v$  – швидкість поширення хвилі,  $\rho_0$  – густина рівноважного (не збуреного хвилею) середовища.

Таким чином, отримуємо, що додатковий тиск, утворений хвилею, описується виразом

$$\Delta P = -\rho_0 v^2 \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

В ідеальному газі ця формула набуває вигляду

$$\Delta P = -\gamma P_0 \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

З нього знаходимо, що для плоскої гармонічної хвилі  $\xi(x, t) = \xi_{\max} \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$ , яка поширюється в ідеальному газі, вираз для доданого хвилею тиску можна записати у вигляді

$$\Delta P = \gamma P_0 \xi_{\max} k \sin(\omega t - kx + \varphi_0).$$

Отже, пружну хвилю у газі (чи рідині) можна означити як хвилю поширення тиску, а її рівняння можна записати наступним чином

$$\Delta P = (\Delta P)_{\max} \sin(\omega t - kx + \varphi_0),$$

де  $(\Delta P)_{\max}$  – амплітудне значення тиску хвилі, яке для ідеального газу пов'язане з амплітудним зміщенням  $(\Delta P)_{\max} = \rho_0 v^2 k \xi_{\max} = \rho_0 v \omega \xi_{\max}$ , а для ідеального газу –  $(\Delta P)_{\max} = \gamma P_0 \xi_{\max} k$ .

Наприклад, поряд зі струменем газу, що витікає з реактивного двигуна, амплітудне значення звуку  $(\Delta P)_{\max} \sim 300$  Па, що на межі порогу больового відчуття людини (атмосферний тиск становить  $P_0 = 10^5$  Па). Для частоти  $f = 1$  кГц, на якій людина сприймає звуки найкраще, амплітудне значення зміщення точок повітря при такому стиску буде становити малу величину – лише  $\xi_{\max} = \frac{(\Delta P)_{\max}}{\gamma P_0 k} = \frac{\lambda (\Delta P)_{\max}}{2\pi \gamma P_0} = \frac{v_0 (\Delta P)_{\max}}{2\pi f \gamma P_0} = \frac{300 \cdot 340}{2 \cdot 3,14 \cdot 10^5 \cdot 1,7 \cdot 10^3} \approx 10^{-4}$  м.

Водночас, на цій частоті амплітудне значення прискорення точок повітря, яке пропорційне квадрату частоти, буде дуже великим

$a_{\max} = \omega^2 \xi_{\max} = (2\pi f)^2 \xi_{\max} = (2 \cdot 3,14 \cdot 10^3)^2 \cdot 10^{-4} \approx 4 \cdot 10^3 \text{ м/с}^2$ . Таким чином, прискорення точки середовища при такому хвильовому процесі може бути в декілька тисяч разів більшим прискорення вільного падіння (більш строго треба розглядати весь спектр хвиль, які утворюються при роботі турбіни двигуна). Таке велике прискорення треба враховувати при розгляді впливу на живі організми звукових хвиль великої амплітуди, а також ультразвукових хвиль, частоти яких більші 20 кГц.

### 3.9. Енергія пружних хвиль

Визначимо пружну енергію повздовжньої хвилі, яка поширюється вздовж осі  $X$  в ізотропному однорідному пружному середовищі і рівняння якої має вигляд

$$\xi(x, t) = \xi_{\max} \cos(\omega t - kx + \varphi_0).$$

Виберемо довільну точку середовища. Під час хвильового процесу вона здійснює коливальний рух, тому має кінетичну енергію.

Величина кінетичної енергії точки середовища легко обчислюється за формулою

$$\Delta E_{\text{кін}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 \Delta m,$$

де  $\frac{\partial \xi}{\partial t}$  – миттєва швидкість коливального руху точки, а  $\Delta m$  – її маса.

Як відомо  $\Delta m = \rho \Delta V$ , де  $\Delta V$  – об'єм точки середовища,  $\rho$  – його густина. Тепер вираз для кінетичної енергії набуде вигляду

$$\Delta E_{\text{кін}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 \rho \Delta V.$$

Характеризуватимемо енергію хвилі за допомогою фізичної величини, яку називають *густиною кінетичної енергії хвилі* і яку визначають відношенням

$$e_{\text{кін}} = \frac{\Delta E_{\text{кін}}}{\Delta V}, \text{ коли } \Delta V \rightarrow 0.$$

З урахуванням попередніх співвідношень бачимо, що миттєве значення густини кінетичної енергії хвилі визначається добутком

$$e_{\text{кін}} = \frac{\rho}{2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2.$$

Для плоскої хвилі швидкість точок середовища легко знаходиться з її (хвилі) рівняння

$$\frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t} = -\omega \xi_{\max} \sin(\omega t - kx + \varphi_0).$$

Отже, миттєве значення густини кінетичної енергії плоскої хвилі має вигляд

$$e_{kin} = \frac{\rho}{2} \omega^2 \xi_{\max}^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0).$$

Середнє значення густини кінетичної енергії хвилі, розраховане за час, значно більший періоду, дорівнює половині її амплітудного значення, а саме:

$$\bar{e}_{kin} = \frac{\rho}{4} \omega^2 \xi_{\max}^2.$$

При поширенні пружної хвилі відбувається деформування точок середовища. Тому під час хвильового процесу кожна точка середовища, крім кінетичної, має ще й потенціальну енергію. Пружна енергія точки середовища може бути представлена

$$\Delta E_{np} = \frac{1}{2} \kappa (\Delta \xi)^2,$$

де  $\kappa$  – коефіцієнт жорсткості. Величина цього коефіцієнта пропорційна модулю Юнга і визначається розмірами точки середовища:  $\kappa = E \frac{\Delta S}{\Delta x}$ , де  $\Delta x$  – лінійний розмір точки, визначений у напрямку поширення хвилі, а  $\Delta S$  – її поперечний переріз. З урахуванням таких означень

$$\Delta E_{np} = \frac{1}{2} E \frac{\Delta S}{\Delta x} (\Delta \xi)^2 = \frac{1}{2} E \Delta S \Delta x \left( \frac{\Delta \xi}{\Delta x} \right)^2.$$

Відношення  $\frac{\Delta \xi}{\Delta x}$  відповідає відносному видовженню точки середовища, яке у границі  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta \xi \rightarrow 0$  дорівнює частинній похідній  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ .

Отже, пружна енергія точки пропорційна її об'єму  $\Delta V = \Delta S \Delta x$ :

$$\Delta E_{np} = \frac{1}{2} E \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \Delta V$$

і виникає, коли зміщення неоднорідні по простору. Цьому завжди задовольняє хвильовий процес у суцільному пружному середовищі.

Пружну енергію хвилі характеризують *густиною потенціальної енергії хвилі*, яку визначають відношенням

$$e_{np} = \frac{\Delta E_{np}}{\Delta V}, \quad \text{коли } \Delta V \rightarrow 0.$$

З урахуванням цього означення густину пружної енергії повздовжньої хвилі можна записати у вигляді

$$e_{np} = \frac{1}{2} E \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2.$$

Для плоскої пружної хвилі

$$\frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} = k \xi_{\max} \sin(\omega t - kx + \varphi_0).$$

Миттєве значення густини потенціальної енергії плоскої гармонічної повздовжньої хвилі також легко знайти

$$e_{np} = \frac{1}{2} E k^2 \xi_{\max}^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0).$$

Видно, що густини кінетичної та потенціальної енергій хвилі мають однакові фази.

Врахуємо дисперсійне співвідношення  $k = \frac{\omega}{v}$ , де  $v$  – швидкість поширення пружної хвилі, яка в твердому середовищі визначається формулою  $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ . Знайдемо

$$e_{np} = \frac{1}{2} E \left( \frac{\omega}{v} \right)^2 \xi_{\max}^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0) = \frac{1}{2} E \frac{\rho}{E} \omega^2 \xi_{\max}^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0) = e_{kin}.$$

Таким чином, у пружній хвилі миттєві значення густин кінетичної та потенціальної енергій однакові. Однаковими є і їх середні значення.

Густина повної енергії повздовжньої пружної хвилі дорівнює сумі густин її кінетичної та потенціальної енергій

$$e = e_{kin} + e_{np}.$$

Миттєве значення густини повної енергії повздовжньої пружної хвилі визначається виразом

$$e = \frac{\rho}{2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} E \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2.$$

Для плоскої повздовжньої пружної хвилі густина повної енергії дорівнює подвоєній густині кінетичної енергії або подвоєній густині потенціальної енергії. Отже, мають місце рівності:

$$e = 2e_{kin} = 2e_{np} = \rho \omega^2 \xi_{\max}^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0).$$

З них можна порахувати амплітудне значення густини повної енергії пружної повздовжньої хвилі:

$$e_m = \rho \omega^2 \xi_{\max}^2.$$

Середнє значення густини повної енергії хвилі дорівнює

$$\bar{e} = 2\bar{e}_{\text{кін}} = 2\bar{e}_{\text{пр}} = \frac{\rho}{2} \omega^2 \xi_{\text{max}}^2.$$

Таким чином, середнє значення густини повної енергії хвилі співпадає з максимальним значенням густини кінетичної енергії (або, що теж саме, максимальним значенням густини потенціальної енергії) хвилі.

### 3.10. Стоячі хвилі

Уявимо випадок, коли зміщення точок середовища описується виразом

$$\xi = \xi(\vec{r}) \cos(\omega t + \varphi_0),$$

Він свідчить, що в такому хвильовому процесі всі точки середовища коливаються з однаковою частотою і мають однакову фазу, але амплітуди  $\xi(\vec{r})$  коливань точок різні. Подібні хвильові процеси називають *стоячими хвилями*.

Розглянемо найбільш простий випадок стоячих хвиль – так звані плоскі стоячі хвилі, коли амплітуда залежить лише від однієї просторової змінної, наприклад від  $x$ . Плоску стоячу хвилю можна отримати як результат накладання двох гармонічних плоских хвиль, які мають однакову амплітуду, довжину хвилі та частоту і які поширюються в протилежних напрямках.

Дійсно, візьмемо дві хвилі

$$\xi_1(x, t) = \xi_{\text{max}} \cos(\omega t - kx + \varphi_1), \quad \xi_2(x, t) = \xi_{\text{max}} \cos(\omega t + kx + \varphi_2),$$

перша поширюється вздовж осі  $X$ , а друга протилежно. Припустимо, що зміщення точок середовища для обох хвиль відбуваються в одному напрямку (нехай обидві хвилі є повздовжніми).

При накладанні двох таких хвиль результуюче зміщення буде дорівнювати сумі

$$\xi(x, t) = \xi_1(x, t) + \xi_2(x, t).$$

Отже,

$$\xi(x, t) = \xi_{\text{max}} [\cos(\omega t - kx + \varphi_1) + \cos(\omega t + kx + \varphi_1)].$$

Для знаходження цієї суми використаємо тригонометричну формулу

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

за допомогою якої знаходимо

$$\xi(x, t) = 2\xi_{\text{max}} \cos(kx - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}) \cos(\omega t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}).$$

Видно, що цей вираз відповідає умові для плоскої стоячої хвилі.

З нього отримуємо, що коли  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ , рівняння стоячої хвилі набуває простого вигляду

$$\xi(x, t) = 2\xi_{\max} \cos kx \cos \omega t.$$

Як бачимо, амплітуда коливань точок середовища в такій хвилі залежить від координати і визначається за формулою

$$\xi_{\max}(x) = 2\xi_{\max} |\cos kx|,$$

з чого випливає, що амплітуда плоскої стоячої хвилі є періодичною просторовою функцією з періодом  $\frac{\lambda}{2}$ .

Знайдемо координати точок  $x_{\max}$ , для яких амплітуда максимальна  $\xi_{\max}(x_{\max}) = 2\xi_{\max}$  і які задовольняють очевидній умові

$$|\cos kx_{\max}| = 1.$$

Це означає, що у стоячій хвилі максимальну амплітуду мають точки з координатами

$$x_{\max} = \frac{\pi n}{k} = \frac{n\lambda}{2},$$

де  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Точки з координатами  $x_{\max}$ , в яких амплітуда стоячої хвилі максимальна, називаються *пучностями*. Відстань між найближчими пучностями  $\Delta x_{\max} = \frac{\lambda}{2}$ .

Тепер знайдемо координати точок  $x_{\min}$ , для яких амплітуда мінімальна  $\xi_{\max}(x_{\min}) = 0$  і які фактично задовольняють умові нерухомості

$$|\cos kx_{\min}| = 0.$$

Як легко зрозуміти, в стоячій хвилі таку амплітуду мають точки з координатами

$$x_{\min} = \frac{\pi}{k} \left( n + \frac{1}{2} \right) = \frac{\lambda}{2} \left( n + \frac{1}{2} \right),$$

де знову  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Точки  $x_{\min}$ , в яких амплітуда стоячої хвилі мінімальна і дорівнює нулю, називаються *вузлами*. Відстань між найближчими вузлами  $\Delta x_{\min} = \Delta x_{\max} = \frac{\lambda}{2}$ .

Точки середовища, які лежать між сусідніми вузлами, мають однакову фазу і коливаються синфазно. При переході через вузол фаза коливань стрибком змінюється на  $\pi$ .

Легко зрозуміти, що відстань між найближчими вузлом та пучністю дорівнює  $\frac{\lambda}{4}$ .

На рис. 45 показано розподіл зміщень точок вздовж осі  $x$  в стоячій хвилі для трьох різних моментів часу:  $t_1 < t_2 < t_3$ . На рис. 45 для моменту часу  $t_1$  всі точки мають амплітудне зміщення і в пучностях з координатою  $x_{\max} = 0$  чи  $x_{\max} = \lambda$  зміщення дорівнює  $2\xi_{\max}$ , а в точках  $x_{\max} = \lambda/2$  чи  $x_{\max} = 3\lambda/2$  зміщення від'ємне і дорівнює  $-2\xi_{\max}$ . З часом величина зміщень в цих точках буде зменшуватися. На рис. 45 наведено розподіл зміщень для моменту часу  $t_2$ , який лежить в інтервалі  $t_1 < t_2 < t_1 + T/4$ , та моменту часу  $t_3$ , який лежить в інтервалі  $t_1 + T/4 < t_2 < t_1 + T/2$  де  $T$  – період коливань.

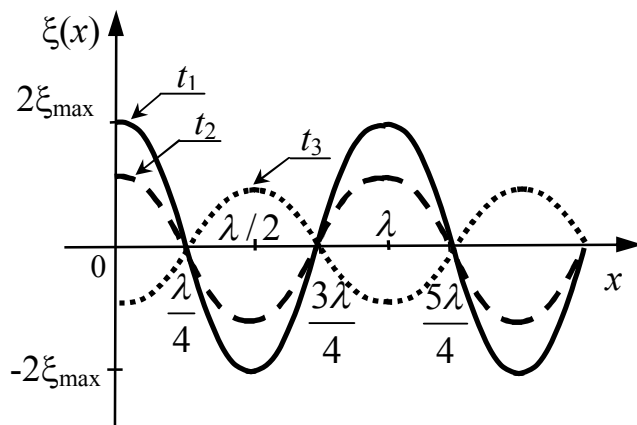


Рис. 45

З цього рисунку також видно, що у вузлах зміщення відсутнє для всіх моментів часу.

Прикладом системи, в якій можуть існувати стоячі хвилі, є натягнута струна. Позначимо  $\ell$  довжину струни. Обидва кінці струни фіксовані (нерухомі) і під час хвильового процесу є вузлами. Відстань між вузлами

кратна цілому числу напівдовжин хвиль, тому можна записати рівність

$$\ell = n \frac{\lambda}{2},$$

де  $n = 1, 2, 3, \dots$  – натуральні числа.

Отже, в струні можуть спостерігатися стоячі хвилі з певними фіксованими довжинами хвиль

$$\lambda_n = \frac{2\ell}{n}.$$

Визначимо періоди коливань стоячих хвиль в струні. За загальною формулою

$$T_n = \frac{\lambda_n}{v},$$

де  $v$  – швидкість поширення хвилі.

Врахуємо, що швидкість поширення хвилі в струні визначається з виразу  $v = \sqrt{\frac{F}{S\rho}}$ , де  $F$  – сила натягу струни,  $S$  – площа її перерізу, а  $\rho$  – об’ємна густина речовини струни.

В результаті, знаходимо, що періоди коливань різних стоячих хвиль струни описується формулою

$$T_n = \frac{2\ell}{n} \sqrt{\frac{S\rho}{F}}.$$

Коливання струни, які відповідають значенню  $n=1$ , називають *основним тоном*, а решту – коливання з  $n>1$  – називають *обертонами*.

Частоти  $f_n = \frac{1}{T_n}$  називають *власними частотами* коливань струни.

У загальному випадку коливання струни представляють собою суперпозицію гармонічних коливань з різними значенням власних частот і характеризуються їх дискретним спектром.

### 3.11. Питання для самоконтролю

1. Дайте означення хвилі.
2. Що називають точкою середовища?
3. Що таке довжина хвилі та хвильове число?
4. Як довжина хвилі зв’язана з частотою хвилі?
5. Запишіть рівняння хвилі та хвильове рівняння.
6. Запишіть рівняння плоскої та сферичної хвилі.
7. Запишіть хвильове рівняння у декартовій та у сферичній системах координат.
8. Як виглядає дисперсійне співвідношення для гармонічної хвилі?
9. Як швидкість біжучої хвилі залежить від сили натягу джгута?
10. Порівняйте вирази для закону Гука при однорідній та неоднорідній деформаціях стрижня.
11. Запишіть формулу для швидкості поширення пружної хвилі в стрижні.
12. Поясніть, чому при зростанні температури швидкість звуку зростає?
13. При власних коливаннях пружинного маятника пружна енергія переходить в кінетичну і навпаки. Чи відбувається такий процес перетворення енергії при поширенні пружних хвиль?
14. Як отримати стоячу хвилю?
15. Запишіть рівняння стоячої хвилі.



16. Наведіть приклад, коли під час коливань спостерігається тільки одна пучність.
17. Чи рухається фазова поверхня у стоячій хвилі?
18. Що треба зробити з струною, щоб частота основного тону зросла ?

### 3.12. Формули, необхідні для розв'язку задач

1. Рівняння плоскої та сферичної хвиль

$$\xi(\vec{r}, t) = \xi_{\max} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0), \quad \xi(r, t) = \frac{C}{r} \cos(\omega t \mp kr + \varphi_0),$$

де  $\vec{k}$  – хвильовий вектор,  $k = |\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$  – хвильове число,  $\lambda$  – довжина хвилі,  $\omega = vk$  – частота хвилі.

2. Хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

3. Швидкість хвилі у натягнутій струні, швидкість повздовжньої пружної хвилі в стрижні

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho S}}, \quad v = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

де  $F$  – сила натягу струни,  $S$  – площа її перерізу,  $\rho$  – густина,  $E$  – модуль Юнга.

4. Швидкість хвилі у газі

$$v = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}}, \quad pV = \frac{m}{\mu} RT,$$

де  $P$  – тиск,  $\rho$  – густина,  $T$  – температура,  $m$  – маса газу,  $R$  – універсальна газова стала,  $\gamma$  – коефіцієнт адіабати,  $\mu$  – молярна маса.

5. Густина енергії пружної хвилі

$$e = 2e_{\text{кін}} = 2e_{\text{пр}} = \rho \omega^2 \xi_{\max}^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0).$$

6. Рівняння стоячої хвилі

$$\xi(x, t) = 2\xi_{\max} \cos kx \cos \omega t.$$

7. Періоди власних коливань струни

$$T_n = \frac{2\ell}{n} \sqrt{\frac{S\rho}{F}},$$

де  $\ell$  – довжина струни.

### 3.13. Задачі

- 3.1. Знайдіть довжину хвилі, період коливань якої становить  $10^{-4}$  с. Швидкість поширення коливань становить 300 м/с. Знайдіть різницю фаз коливань двох точок, які лежать на відстані 5 см вздовж напрямку поширення хвилі.
- 3.2. Плоска хвиля має довжину хвилі 70 см та частоту 500 Гц. Амплітудне значення зміщення становить 0,25 мм. Знайдіть швидкість поширення хвилі та амплітудні значення швидкості точок середовища і їх прискорення.
- 3.3. Рівняння коливань джерела плоскої хвилі мають (числові значення задані в СІ) вигляд  $x(t) = 0,01 \cos(0,5\pi t + \pi / 4)$ . Швидкість поширення хвилі 300 м/с. Запишіть рівняння хвилі. Запишіть рівняння коливань точки, що віддалена від джерела на відстань 600 м. Побудуйте графік часової залежності для зміщення цих коливань. Побудуйте також графік розподілу зміщень у хвилі в момент часу  $t = 4$  с.
- 3.4. Плоска гармонічна хвиля, період коливань якої  $T$ , поширюється зі швидкістю  $v$  в площині  $XY$ . Хвильовий вектор становить кут  $\alpha$  з віссю  $X$ . Напишіть рівняння хвилі, та знайдіть різницю фаз коливань в точках з координатами  $x_1, y_1$  та  $x_2, y_2$ .
- 3.5. Знайдіть довжину хвилі, хвильовий вектор та швидкість хвилі, рівняння якої має вигляд  $\xi(x, y, t) = \xi_{\max} \cos(\omega t - \alpha x - \beta y)$ .
- 3.6. В середовищі поширюється плоска хвиля, рівняння якої  $\xi(x, t) = \xi_{\max} \cos(\omega t - kx)$ . Запишіть рівняння цієї хвилі в системі відліку, яка рухається зі швидкістю  $u$  вздовж осі  $X$ .
- 3.7. Повздовжня пружна хвиля поширюється в вздовж осі  $X$  стрижня з густиною  $\rho = 4,0$  г/см<sup>3</sup> та модулем Юнга  $E = 100$  ГПа. Знайдіть швидкість точок середовища цієї хвилі, коли їх відносна деформація становить  $\varepsilon = 0,01$ .
- 3.8. Рівняння плоскої хвилі (числові значення задані у СІ) має вигляд  $\xi(x, t) = 6 \cdot 10^{-5} \cos(600\pi t - 5x)$ . Знайдіть відношення амплітуди зміщення до довжини хвилі. Знайдіть також відношення амплітудного значення швидкості точок середовища до швидкості поширення хвилі. Знайдіть амплітудне значення відносного видовження точок середовища.
- 3.9. В одному напрямку поширюються дві хвилі, швидкості яких  $v_1$  та  $v_2$ , а довжини хвиль  $\lambda_1$  та  $\lambda_2$ . Знайдіть швидкість руху точок простору, для яких фази коливань обох хвиль будуть однаковими.

- 3.10. Два джерела випромінюють дві гармонічні хвилі. Джерела коливаються з однаковою частотою, однаковою початковою фазою та однаковою амплітудою. Опишіть рух частинки середовища, що знаходиться на відстані  $d_1$  від першого джерела та відстані  $d_2$  від другого джерела, якщо напрямок коливань в цій точці однаковий для обох хвиль.
- 3.11. Якою є довжина струни, якщо при зменшенні її довжини на 10 см частота коливань зросла в півтора рази? Натяг пружини не змінився.
- 3.12. Струна звучить з частотою 400 Гц. В якому місці треба затримати рух струни, щоб вона звучала з частотою 800 Гц або 1200 Гц?
- 3.13. Стальна струна довжиною 110 см та діаметром 1 мм натягнута між полюсами електромагніту. Коли по струні пропустили змінний струм частотою 50 Гц, то на ній сформувався 5 півхвиль. Знайдіть силу натягу струни, якщо густина сталі  $7,8 \text{ г/см}^3$ .
- 3.14. Механічні коливання з частотою 400 Гц поширюються вздовж циліндра з повітрям при температурі  $0^\circ \text{C}$ . Амплітуда зміщень становить 0,25 мм. Запишіть рівняння хвилі. Знайдіть довжину хвилі, швидкість її поширення, амплітудне значення швидкості точок середовища та середню густину енергії хвилі.
- 3.15. На якій частоті в трубі з киснем буде спостерігатися резонанс? Кінці труби запаяні з обох боків. Довжина труби 1,6 м, а температура  $100^\circ \text{C}$ .
- 3.16. Плоска хвиля поширюється у воді. Амплітудне значення швидкості точок середовища хвилі 1,38 м/с, а амплітуда зміщення  $5 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ . Визначте частоту хвилі. Запишіть рівняння хвилі та знайдіть середнє значення густини енергії хвилі.
- 3.17. Плоска біжуча хвиля має довжину хвилі 0,16 м. Визначте положення двох найближчих від поверхні відбивання вузла та пучності для зміщення, якщо на відбиваючій поверхні буде його вузол; буде його пучність.
- 3.18. Зміщення точок середовища описується рівнянням  $\xi(x,t) = 0,003 \cos \frac{\pi x}{3} \cos 110,7\pi t$ . Визначте координати точок, які мають максимальну та мінімальну швидкість. Запишіть рівняння біжучих хвиль, які не порушують заданий стоячий хвильовий процес.
- 3.19. За який час звукові коливання пройдуть відстань  $\ell$  між точками 1 та 2, якщо температура повітря між ними змінюється лінійно від  $T_1$  до  $T_2$ ? Швидкість звуку в повітрі  $v = \alpha \sqrt{T}$ , де  $\alpha$  – стала.

## Глава 4. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ

*Електромагнітними хвилями* називають процес поширення в просторі електромагнітних коливань. Під час хвильового процесу відбуваються коливання електричного та магнітного полів електромагнітного поля хвилі. Отже, електромагнітні хвилі – це явище поширення в просторі електромагнітного поля.

Дослідження електромагнітних хвиль є надзвичайно важливою задачею, яка має велике практичне значення. Фактично всі сучасні засоби комунікації базуються на законах випромінювання, поширення та взаємодії з середовищем електромагнітних хвиль.

Джерелом електромагнітних хвиль є заряди чи струми, величини яких змінюються з часом. Низькочастотні (до інфрачервоних хвиль) електромагнітні хвилі описуються за допомогою класичної електродинаміки, коли оперують поняттями густини заряду та густини струму. Процеси, що супроводжуються випромінювання електромагнітних хвиль високих частот (світло, рентгенівське чи  $\gamma$ -випромінювання) мають квантово-механічну природу і пов'язані зі зміною стану електронів (носіїв елементарних зарядів) чи ядер в атомах.

На поширення електромагнітних хвиль суттєво впливає середовище. Тому просторовий розподіл електричного  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  та магнітного  $\vec{H}(\vec{r}, t)$  полів електромагнітної хвилі визначається не тільки особливостями часової залежності заряду або струму її джерела, а й властивостями середовища, в якому поширюється хвиля. Часові залежності коливань полів в точності відповідають часовим залежностям струмів у джерел хвилі, тільки у тому випадку, коли середовище лінійне.

Довільну хвилю можна представити сумою гармонічних хвиль, але це виправдано лише у випадку лінійних середовищ. Тому для них основною задачею є встановлення закономірностей поширення гармонічних електромагнітних хвиль, просторово-часова поведінка полів у якій описується гармонічними функціями.

### 4.1. Хвильове рівняння електромагнітної хвилі

Запишемо систему рівнянь Максвела – основну систему рівнянь електродинаміки:

закон Фарадея

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t};$$

узагальнений закон повного струму

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_{np} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t};$$

теорему Остроградського-Гауса для вектора індукції магнітного поля

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0;$$

теорему Остроградського-Гауса для вектора індукції електричного поля

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_{cm},$$

де використані такі позначення:  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  – вектори напруженостей електричного та магнітного полів,  $\vec{D}$  та  $\vec{B}$  – вектори індукції електричного та магнітного полів,  $\vec{j}_{np}$  – густина струму провідності,  $\rho_{cm}$  – густина сторонніх зарядів.

В лінійному середовищі за відсутності струмів,  $\vec{j}_{np}=0$ , та за відсутності сторонніх зарядів,  $\rho_{cm}=0$ , і коли вектори індукції полів пропорційні їх векторам напруженостей  $\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$ ,  $\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$ , система рівнянь Максвела, як легко переконатися, набуває вигляду:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0,$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0,$$

де  $\mu$ ,  $\varepsilon$  – магнітна та електрична проникності середовища,  $\mu_0$ ,  $\varepsilon_0$  – магнітна та електрична сталі.

Запис ротора та дивергенції можна здійснити з використанням вектора «набла», який позначають  $\vec{\nabla}$  і компонентами якого є частинні похідні  $\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{n} \frac{\partial}{\partial z}$ , де  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{n}$  – одиничні вектори (орти).

Знаходження ротора від векторів  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  тотожне знаходженню векторного добутку вектора  $\vec{\nabla}$  на вектори  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$ , або  $[\vec{\nabla} \vec{E}]$  та  $[\vec{\nabla} \vec{H}]$ .

Знаходження дивергенції векторів  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  тотожне скалярному добутку вектора  $\vec{\nabla}$  на вектори  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$ , або  $\vec{\nabla} \vec{E}$  та  $\vec{\nabla} \vec{H}$ .

Таким чином, для лінійного однорідного ізотропного середовища рівняння Максвела можна записати у вигляді

$$[\vec{\nabla} \vec{E}] = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

$$[\vec{\nabla} \vec{H}] = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

$$\vec{\nabla} \vec{H} = 0,$$

$$\vec{\nabla} \vec{E} = 0.$$

Знайдемо ротор від першого рівняння Максвела та візьмемо часову частинну похідну від другого рівняння Максвела. В прийнятій вище символіці маємо:

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = -\mu\mu_0 \text{rot} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

$$\text{rot} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

При знаходженні часової частинної похідної від другого рівняння було враховано, що ротор відповідає процедурі диференціювання по просторовим змінним (по координатам), а тому знаходження часової частинної похідної і знаходження ротора є незалежними діями, тобто їх можна переставити місцями, або, як кажуть фахівці, ці математичні операції *комутують*.

З останньої системи рівнянь легко отримати, що

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = -\mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

При використанні вектора  $\vec{\nabla}$ , запис цього рівняння набуває іншого, але тотожного за змістом вигляду:

$$[\vec{\nabla}[\vec{\nabla} \vec{E}]] = -\mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},$$

де зліва у виразі стоїть подвійний векторний добуток.

Нагадаємо правило знаходження подвійного векторного добутку трьох векторів  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  і  $\vec{C}$ , за яким

$$[\vec{A}[\vec{B}\vec{C}]] = \vec{B}(\vec{A}\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\vec{B}),$$

де скалярний добуток векторів, записано у круглих дужках. Згідно з цим правилом маємо

$$[\vec{\nabla}[\vec{\nabla} \vec{E}]] = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \vec{E}) - (\vec{\nabla} \vec{\nabla}) \vec{E} = -(\vec{\nabla} \vec{\nabla}) \vec{E},$$

де було враховано, що відповідно до четвертого рівняння Максвелла,  $\text{div}\vec{E}=0$ , або, що теж саме, скалярний добуток  $\vec{\nabla}\vec{E}=0$ .

Розглянемо скалярний добуток вектора набла самого на себе,  $\vec{\nabla}\vec{\nabla}$ , який формально можна представити наступним чином

$$\vec{\nabla}\vec{\nabla} = (\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{n}\frac{\partial}{\partial z})(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{n}\frac{\partial}{\partial z}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta,$$

де справа позначено лапласіан.

Отже, в результаті здійснених математичних перетворень приходимо до хвильового рівняння щодо електричного поля

$$\Delta\vec{E} = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

З отриманого хвильового рівняння прямо випливає, що швидкість поширення електромагнітної хвилі в однорідному лінійному та ізотропному середовищі визначається за формулою

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}}.$$

У цій формулі середовище представлене своїми матеріальними константами –  $\varepsilon$  та  $\mu$ . Водночас, на відміну від коливальних процесів іншої природи, які ми вивчали раніше, хвильове рівняння для електричного поля свідчить про фундаментальну властивість електромагнітних хвиль: вони для свого поширення не вимагають матеріального середовища і самовільний процес їх розповсюдження може відбуватися у вакуумі, де  $\varepsilon=1$ ,  $\mu=1$ . Це, в свою чергу, означає, що швидкість електромагнітних хвиль у вакуумі скінчена і дорівнює швидкості у ньому світла

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

В довільному лінійному ізотропному матеріальному середовищі з  $\varepsilon \neq 1$  та  $\mu \neq 1$  швидкість поширення електромагнітної хвилі може бути записана у вигляді

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}.$$

З цим означенням хвильове рівняння електромагнітної хвилі набуває стандартного вигляду

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Описану вище процедуру виведення з рівнянь Максвелла хвильового рівняння можна провести з іншою послідовністю, коли спочатку знаходять похідну по часу від першого рівняння Максвелла, а ротором діють на друге рівняння Максвелла. В результаті, знову буде отримане хвильове рівняння з тією ж самою швидкістю  $v$  поширення хвилі, але записане для вектора напруженості магнітного поля:

$$\Delta \vec{H} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}.$$

Таким чином, маємо висновок: поширення обох складових  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  електромагнітного поля хвилі описується однаковим хвильовим рівнянням. Кожна з проекцій векторів цих полів електромагнітної хвилі також задовольняє хвильовому рівнянню. Наприклад,

$$\Delta E_x = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}, \Delta E_y = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \Delta E_z = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}.$$

Точно такі ж три рівняння для проекцій можна записати і для вектора напруженості магнітного поля хвилі.

## 4.2. Плоска електромагнітна хвиля

При вивченні плоскої механічної хвилі було встановлено, що вона задовольняє хвильовому рівнянню, форма якого співпадає з хвильовим рівнянням електромагнітної хвилі. Було також отримано, що у загальному випадку розв'язком хвильового рівняння є гармонічна функція, фаза якої залежить від часу та координати у спосіб:  $\omega t - \vec{k}\vec{r}$ , де  $\omega$  – частота хвилі, а  $\vec{k}$  – її хвильовий вектор. Зрозуміло, що і для електромагнітної плоскої хвилі вектори напруженості електричного та магнітного полів плоскої електромагнітної хвилі мають задовольняти такій самій функціональній залежності від часу та координати, як і зміщення у плоскій механічній хвилі, оскільки вони є розв'язком однакового (з точки зору математики) диференційного рівняння.

Таким чином, рівняння плоскої електромагнітної хвилі мають вигляд

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_{\max} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0),$$

де  $\vec{E}_{\max}$  – постійний вектор (вектор амплітудної напруженості електричного поля),  $\omega$  – частота хвилі, яка відповідає частоті коливань електричного поля під час хвильового процесу, а  $\vec{k}$  – хвильовий вектор, модуль якого є



хвильовим числом і величина якого визначається з формули  $k = |\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$ .

За означенням довжина хвилі  $\lambda$  відповідає найменшій відстані між точками простору, в яких вектор  $\vec{E}$  напруженості електричного поля коливається однаково (синфазно).

Переконаємося, що записане рівняння плоскої електромагнітної хвилі дійсно задовольняє хвильовому рівнянню. Спочатку знайдемо лапсасіан від вектора напруженості електричного поля плоскої хвилі. Здійснюючи прості математичні дії, отримаємо

$$\begin{aligned}\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_{\max} \Delta \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0) = \\ &= \vec{E}_{\max} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi_0) = \\ &= \vec{E}_{\max} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi_0) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi_0) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi_0) \right] = \\ &= -\vec{E}_{\max} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi_0) = \\ &= -k^2 \vec{E}_{\max} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0).\end{aligned}$$

Отже, знаходження лапсасіану від вектора напруженості електричного поля плоскої хвилі зводиться до множення її рівняння на квадрат хвильового числа (хвильового вектора).

Знайдемо тепер другу частинну похідну від вектора напруженості електричного поля плоскої хвилі по часу:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_{\max} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0) = -\omega^2 \vec{E}_{\max} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0).$$

Підставимо знайдені лапсасіан та другу часову частинну похідну в хвильове рівняння

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},$$

що дає:

$$-k^2 \vec{E}_{\max} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0) = -\frac{1}{v^2} \omega^2 \vec{E}_{\max} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0).$$

Звідси легко приходимо до дисперсійного співвідношення для електромагнітних хвиль, яке записується у вигляді

$$k^2 = \frac{\omega^2}{v^2}, \quad \text{або} \quad \omega = kv,$$

де ми залишили лише додатні значення, оскільки частота завжди додатна.

Таким чином, для всіх електромагнітних хвиль, незалежно від їх довжини хвилі (що охоплює діапазон від радіохвиль до гамма-випромінювання), які поширюються у лінійних ізотропних однорідних середовищах, включаючи вакуум, частота коливань електричного і магнітного полів у хвилі прямо пропорційна хвильовому числу.

Рівняння плоскої хвилі можна також записати у вигляді дійсної частини від експоненціальної функції з тією ж самою залежністю від аргументу:

$$\vec{E} = \vec{E}_{\max} \operatorname{Re} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0)},$$

де  $i$  – уявна одиниця.

#### 4.3. Зв'язок між векторами напруженості електричного та магнітного полів в електромагнітній хвилі

Знову розглянемо плоску електромагнітну хвилю, рівняння якої має вигляд

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_{\max} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0),$$

де  $\vec{E}_{\max}$  – вектор амплітудної напруженості електричного поля, а  $\vec{k}$  – хвильовий вектор з проекціями  $\vec{k} = k_x \vec{i} + k_y \vec{j} + k_z \vec{n}$ , де  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{n}$  – орти.

У просторових компонентах рівняння хвилі має вигляд

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_{\max} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0) = \\ &= (E_{\max}^x \vec{i} + E_{\max}^y \vec{j} + E_{\max}^z \vec{n}) \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi_0), \end{aligned}$$

де  $E_{\max}^x$ ,  $E_{\max}^y$ ,  $E_{\max}^z$  – проекції вектора  $\vec{E}_{\max}$ , а  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$  – проекції хвильового вектора на осі, визначені ортами.

Нагадаємо, що перше рівняння Максвелла містить операції ротора від напруженості електричного поля, яку записують у вигляді

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

Для знаходження ротору застосуємо формальне правило знаходження векторного добутку за допомогою визначника

$$rot\vec{E} = [\vec{\nabla}\vec{E}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{n} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i} \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \vec{n} \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right).$$

Підставимо у вираз для ротора проекції рівняння хвилі. Отримаємо, що для проекцій  $\vec{E}$  вираз для ротора має вигляд

$$rot\vec{E} = [\vec{i}(E_{\max}^z k_y - E_{\max}^y k_z) + \vec{j}(E_{\max}^x k_z - E_{\max}^z k_x) +$$

$$+ \vec{n}(E_{\max}^y k_x - E_{\max}^x k_y)] \sin(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0).$$

Вираз у квадратних дужках, що стоїть перед синусом, є векторним добутком векторів  $\vec{k}$  та  $\vec{E}_{\max}$ .

Отже, нами розраховано дію ротора на вектор  $\vec{E}$  електричного поля плоскої хвилі, або

$$rot\vec{E} = [\vec{k}\vec{E}_{\max}] \sin(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0).$$

Підставимо тепер знайдений нами вираз для ротора в перше рівняння Максвелла. З цього випливає диференціальне рівняння, в якому невідомим є напруженість  $\vec{H}$  магнітного поля хвилі:

$$[\vec{k}\vec{E}_{\max}] \sin(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0) = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

Для знаходження поля  $\vec{H}(\vec{r}, t)$  проінтегруємо отримане диференціальне рівняння по часу. Тоді знайдемо, що явний вираз для магнітної складової електромагнітного поля хвилі має вигляд

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu\mu_0\omega} [\vec{k}\vec{E}_{\max}] \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0).$$

Таким чином, приходимо до важливого висновку: коливання напруженості електричного поля  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  та напруженості магнітного поля  $\vec{H}(\vec{r}, t)$  електромагнітної хвилі синфазно, тобто їх фази однакові.

Якщо рівняння для вектора напруженості магнітного поля цієї хвилі записати у вигляді

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_{\max} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0),$$

то приходимо до співвідношення  $\vec{H}_{\max} = \frac{1}{\mu\mu_0\omega} [\vec{k}, \vec{E}_{\max}]$  між амплітудними значеннями напруженостей магнітного та електричного полів хвилі.

Внесемо у попередньому рівнянні косинус під знак векторного добутку, звідки отримаємо схожий вираз, який пов'язує вже миттєві значення векторів напруженості електричного та магнітного поля хвилі,

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu\mu_0\omega} [\vec{k}, \vec{E}].$$

Отже в цілому маємо, що вектор напруженості магнітного поля хвилі є перпендикулярним не тільки до напрямку поширення хвилі, а й перпендикулярний до вектора напруженості електричного поля.

Здійснену схему розрахунків можна повторити для вектора напруженості магнітного поля, взявши його у якості вихідної функції. Для цього треба розрахувати ротор від  $\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_{\max} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0)$ , підставити його в друге рівняння Максвела

$$\text{rot}\vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Далі необхідно за тією ж процедурою отримати диференціальне рівняння для вектора напруженості електричного поля  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ . З такого розрахунку знову буде видно, що коливання полів у хвилі є синфазними. Принципово важливо, що з проведення цих розрахунків слідує ще одне важливе співвідношення між векторами напруженостей полів у хвилі, а саме:

$$\vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0\omega} [\vec{k}, \vec{H}].$$

З нього випливає аналогічний попередньому висновок: вектор напруженості магнітного поля хвилі є перпендикулярним до напрямку поширення хвилі та до вектора напруженості електричного поля.

Отже, у підсумку маємо, що вектори напруженостей  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  електромагнітного поля хвилі взаємно перпендикулярні між собою  $\vec{E} \perp \vec{H}$ , та перпендикулярні до напрямку поширення хвилі  $\vec{E} \perp \vec{k}$ ,  $\vec{H} \perp \vec{k}$ .

В результаті, доведено, що електромагнітна хвиля є *поперечною хвилею* ( $\vec{E} \perp \vec{k}$ ,  $\vec{H} \perp \vec{k}$ ). В такій хвилі вектори напруженостей  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  перпендикулярні між собою та коливаються з однаковою фазою (рис. 46).

На рис. 46 показано миттєвий просторовий розподіл для векторів напруженостей електричного та магнітного полів плоскої електромагнітній хвилі, яка поширюється вздовж осі  $Y$ . Вектори напруженостей на рис. 46

позначено стрілками: вектори напруженості електричного поля суцільними стрілками, а вектори напруженості магнітного поля пунктиром.

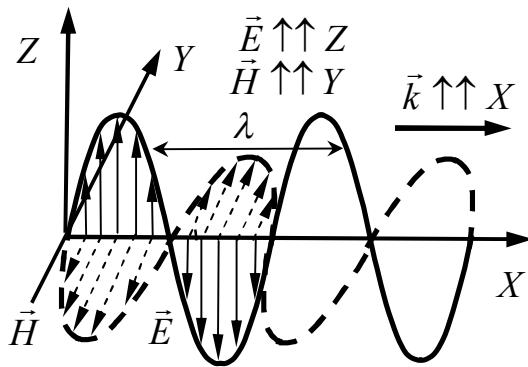


Рис. 46

Рівняння для напруженостей електричного та магнітних полів хвилі, поля якої зображені на рис. 46, мають вигляд

$$E_z = E_{\max} \cos(\omega t - kx),$$

$$H_y = H_{\max} \cos(\omega t - kx).$$

Вектор напруженості електричного поля  $\vec{E}$  цієї хвилі коливається у площині  $XZ$ , а вектор напруженості магнітного поля  $\vec{H}$  – у площині  $YX$ , тобто  $\vec{E} \perp \vec{H}$ . Обидва вектори  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  перпендикулярні до осі  $X$ , вздовж якої поширюється хвиля ( $\vec{k} \uparrow\uparrow X$ ).

Оскільки в електромагнітній хвилі  $\vec{E} \perp \vec{H}$ ,  $\vec{E} \perp \vec{k}$ ,  $\vec{H} \perp \vec{k}$ , то для модулів цих векторів виконується рівність

$$H = \frac{1}{\mu\mu_0} \frac{k}{\omega} E,$$

де  $H = |\vec{H}|$ ,  $E = |\vec{E}|$ .

Коли врахувати дисперсійне співвідношення  $\omega = kv$  та формулу для швидкості хвилі  $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\mu_0\epsilon\epsilon_0}}$ , то легко отримати співвідношення

$$\sqrt{\mu\mu_0} H = \sqrt{\epsilon\epsilon_0} E,$$

яке виконується і для миттєвих, і для амплітудних значень напруженостей електричного та магнітного полів, що як складові утворюють електромагнітне поле хвилі.

#### 4.4. Енергія електромагнітної хвилі

Електромагнітне поле хвилі складається з двох змінних у просторі та часі електричного та магнітного полів. Кожне з цих полів має енергію. Її характеризують за допомогою фізичної величини, яку називають густиною енергії.

Енергію електромагнітного поля хвилі також характеризують густиною енергії. *Густина енергії електромагнітної хвилі* визначається сумою густин

енергії її електричного та магнітного полів. Для електромагнітної хвилі, що поширюється в ізотропному лінійному однорідному середовищі, густина енергії дорівнює

$$e = e_{el} + e_{mag} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}^2}{2} + \frac{\mu\mu_0\vec{H}^2}{2},$$

де  $\varepsilon$ ,  $\mu$  – електрична та магнітна проникності середовища,  $\varepsilon_0$ ,  $\mu_0$  – електрична та магнітна сталі, а  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  – вектори напруженостей електричного та магнітного полів.

Врахуємо, що для миттєвих значень напруженостей електричного та магнітного полів хвилі виконується рівність

$$\sqrt{\mu\mu_0}H = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E.$$

Перевіримо, що у хвилі (біжучій, бо у стоячій це не так) миттєве значення густини енергії електричного поля дорівнює миттєвому значенню густини енергії магнітного поля, тобто

$$e_{el} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \frac{\mu\mu_0 H^2}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = e_{mag},$$

де ми скористалися зв'язком між величинами напруженостей електричного та магнітного полів хвилі.

Отже, густина енергії електромагнітної хвилі дорівнює подвоєній густині енергії її електричного поля, або подвоєній густині енергії її магнітного поля

$$e = 2e_{el} = 2e_{mag} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}^2 = \mu\mu_0\vec{H}^2.$$

Вираз для густини енергії електромагнітної хвилі можна також представити у вигляді

$$e = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0} |\vec{E}| |\vec{H}| = \frac{EH}{v},$$

який враховує, що швидкість поширення хвилі визначається за формулою

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}}.$$

Розглянемо плоску електромагнітну хвилю, рівняння якої має вигляд

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_{\max} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0), \quad \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_{\max} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0),$$

де  $\vec{E}_{\max}$ ,  $\vec{H}_{\max}$  – вектори амплітудних значень напруженостей електричного та магнітного полів,  $\omega$  – частота хвилі, а  $\vec{k}$  – хвильовий вектор.

Для плоскої електромагнітної хвилі миттєве значення густини енергії задовольняє співвідношенню

$$e = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}_{\max}^2 \cos^2(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0) \quad \text{або} \quad e = \mu\mu_0 \vec{H}_{\max}^2 \cos^2(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0),$$

де  $\varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}_{\max}^2$  та  $\mu\mu_0 \vec{H}_{\max}^2$  – однакові амплітудні значення густин енергії електромагнітного поля хвилі. При записі виразу для густини енергії хвилі була використана рівність  $\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} E_{\max} = \sqrt{\mu\mu_0} H_{\max}$ , яка виконується для амплітуд напруженостей полів.

Середнє значення густини енергії електромагнітного поля гармонічної хвилі можна визначити за формулами

$$\bar{e} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}_{\max}^2}{2}, \quad \text{або} \quad \bar{e} = \frac{\mu\mu_0 \vec{H}_{\max}^2}{2},$$

де враховано, що середнє значення квадрату косинуса на інтервалі часу, рівному періоду коливань, дорівнює  $\frac{1}{2}$ .

#### 4.5. Вектор Пойтинга

Електромагнітна хвиля переносить енергію, бо з часом збільшується кількість точок простору, де починає та відбувається хвильовий процес, тобто збільшується об'єм простору, зайнятий електромагнітним полем хвилі.

Поверхню, яка розділяє частину простору, де має місце хвильовий процес, від тієї частини, де його ще нема, називають *фронтом хвилі*. Фронт хвилі у довільний момент часу задає поверхню, точки якої коливаються синфазно, а отже фронт хвилі є хвильовою поверхнею. Він рухається зі швидкістю поширення хвилі.

На рис. 47 показано положення фронту хвилі для двох моментів часу  $t_1$  та  $t_2$ . Виділимо частину простору, яка має циліндричну форму. Будемо

вважати, що вісь  $X$  цього циліндра направлена вздовж напрямку поширення електромагнітної хвилі,  $\vec{k} \uparrow\uparrow X$ , а його основи перпендикулярні до  $\vec{k}$ .

Приймемо, що інтервал часу  $\Delta t = t_2 - t_1$  значно менший періоду хвилі  $\Delta t \ll T$ . За цієї умови енергія, яку перенесла хвиля через основу циліндра на поверхні фронту для моменту часу  $t_1$ , буде дорівнювати енергії електромагнітного поля хвилі в об'ємі

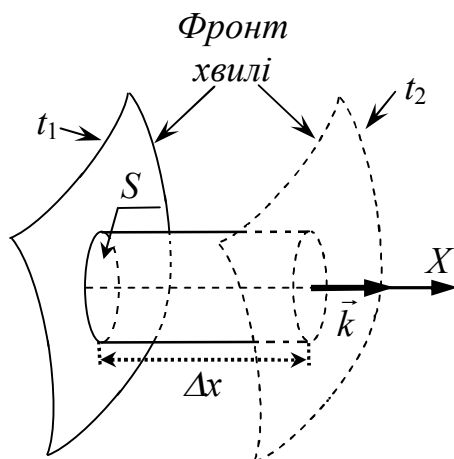


Рис. 47

виділеного на рис. 47 циліндру, тобто

$$\Delta E_{e-m} = eS\Delta x,$$

де  $S$  – площа основи циліндру.

Врахуємо, що довжина циліндру  $\Delta x = v\Delta t$ , де  $v$  – швидкість хвилі, та знайдемо

$$\Delta E_{e-m} = eSv\Delta t.$$

Процес перенесення енергії хвилею описують фізичною величиною, яку називають *густиною потоку енергії*, і яку визначають з відношення

$$\Phi_e = \frac{\Delta E_{e-m}}{S\Delta t}.$$

Як відомо, густина потоку енергії електромагнітної хвилі пропорційна добутку миттєвого значення густини енергії поля хвилі на швидкість її поширення, або

$$\Phi_e = \frac{eSv\Delta t}{S\Delta t} = ev.$$

Врахуємо, що густина цієї енергії визначається за формулою  $e = \frac{EH}{v}$ .

Тоді можемо отримати, що густина потоку енергії, яку переносить електромагнітна хвиля, дорівнює добутку миттєвих значень величин напруженостей електричного та магнітного полів:

$$\Phi_e = EH.$$

Оскільки перенесення енергії хвилею здійснюється у напрямку поширення хвилі, який визначає вектор  $\vec{k}$ , а вектори  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  та  $\vec{k}$  взаємно перпендикулярні, то векторний добуток  $\vec{E}$  на  $\vec{H}$  дає вектор направлений, вздовж  $\vec{k}$ . Таким чином, для характеристики процесу перенесення енергії хвилею користуються вектором, який визначається за формулою

$$\vec{S}_\Pi = [\vec{E}\vec{H}].$$

Вектор  $\vec{S}_\Pi$  називають вектором *Пойтинга*. Видно, що  $|\vec{S}_\Pi| = \Phi_e$ . Для біжучої хвилі (стоячі хвилі енергії не переносять) перенесення енергії здійснюється, як зазначалося, вздовж хвильового вектора,  $\vec{S}_\Pi \uparrow\uparrow \vec{k}$ .

Коли у формулі означення густини потоку енергії  $\Delta t \gg T$ , то з відношення  $\frac{\Delta E}{S\Delta t}$  визначають усереднену характеристику процесу переносу енергії, яку називають *інтенсивністю хвилі*.



Інтенсивність хвилі дорівнює середньому значенню вектора Пойтинга, або усередненому по часу, більшому за період, значенню густини потоку енергії. Інтенсивність хвилі визначається середньою густиною її енергії та швидкістю у спосіб:

$$I = \bar{e}v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} \vec{E}_{\max}^2.$$

Одиницею виміру для вектора Пойтинга чи інтенсивності хвилі є:  $\frac{Bm}{m^2}$ .

#### 4.6. Потік імпульсу електромагнітної хвилі

Електромагнітні хвилі характеризуються не тільки енергією, а й імпульсом. Тому вони переносять імпульс. Перенесення хвилею імпульсу прямо свідчить, що електромагнітна хвиля здатна чинити силову дію на тіла, наприклад, при поглинанні чи відбиванні ними електромагнітних хвиль.

У спеціальній теорії відносності було доведено, що імпульс та енергія будь-якого тіла зв'язані співвідношенням:

$$E_{\text{тіла}}^2 - c^2 p_{\text{тіла}}^2 = m_0^2 c^4,$$

де  $E_{\text{тіла}}$  – повна енергія тіла,  $p_{\text{тіла}}$  – його імпульс, а  $m_0$  - його маса спокою.

Застосуємо цю формулу до електромагнітного поля хвилі, яке маси спокою не має, а тому можна записати:

$$\Delta p = \frac{\Delta E_{e-m}}{c},$$

де  $\Delta E_{e-m}$  – енергія електромагнітного поля хвилі в об'ємі  $\Delta V$ , а  $\Delta p$  – імпульс хвильового поля цієї частини простору.

Локальною характеристикою імпульсу хвилі є *густина імпульсу електромагнітної хвилі*. Після ділення  $\Delta p$  на  $\Delta V$ , отримаємо, що густина імпульсу прямо пропорційна густині енергії хвилі

$$p = \frac{e}{c},$$

де  $e = \frac{\Delta E_{e-m}}{\Delta V}$  – густина енергії хвилі, а  $p = \frac{\Delta p}{\Delta V}$  – густина імпульсу.

Імпульс і густина імпульсу є векторними величинами, вектори яких спрямовані вздовж напрямку поширення хвилі.

Поширення хвилі призводить до перенесення імпульсу. Перенесення імпульсу хвилею характеризують фізичною величиною, яку називають *густиною потоку імпульсу*.

Густина потоку імпульсу дорівнює імпульсу, який переносить хвиля через одиничну площу за одиницю часу, і яка визначається з відношення

$$\Phi_p = \frac{\Delta p}{S \Delta t},$$

де  $\Delta p$  – імпульс перенесений хвилею за час  $\Delta t$ , через поверхню площею  $S$ , яка перпендикулярна до напрямку поширення хвилі.

Густина потоку імпульсу електромагнітної хвилі, що поширюється у вакуумі, дорівнює добутку густини імпульсу на швидкість світла

$$\Phi_p = pc.$$

Врахуємо рівність  $p = \frac{e}{c}$  та отримаємо, що за модулем густина потоку імпульсу дорівнює густині енергії  $\Phi_p = e$ .

Далі врахуємо, що густина потоку енергії хвилі  $\Phi_e = ec$ . В результаті, знаходимо, що

$$\Phi_p = \frac{\Phi_e}{c}, \quad \text{або} \quad \Phi_p = \frac{EH}{c}.$$

Густина імпульсу є векторна величина, тому густина потоку імпульсу також є векторною величиною, яку можна записати у вигляді

$$\vec{\Phi}_p = \frac{[\vec{E}\vec{H}]}{c}, \quad \text{або} \quad \vec{\Phi}_p = \frac{\vec{S}_\Pi}{c},$$

де  $\vec{S}_\Pi$  – вектор Пойтинга.

Розглянемо тіло, яке виготовлене з металу. Нехай на його поверхню

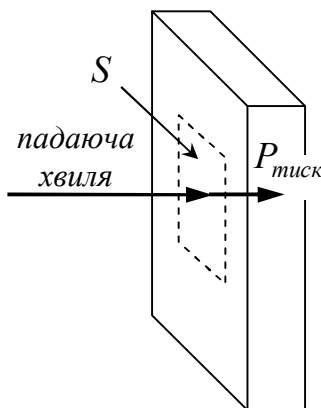


Рис. 48

падає електромагнітна хвиля (рис. 48). Будемо вважати, що хвиля поширюється вздовж нормалі до поверхні тіла і повністю поглинається ним. Хвиля за час  $\Delta t$  ділянці поверхні тіла площею  $S$  передасть імпульс  $\Delta p$ , величина якого визначається виразом

$$\Delta p = \Phi_p S \Delta t.$$

Відношення переданого хвилею тілу імпульсу до проміжку часу дорівнює силі  $F = \Delta p / \Delta t$ , з якою електромагнітне поле хвилі

тисне на поверхню тіла. Силу тиску, віднесену на одиницю поверхні, називають *тиском електромагнітної хвилі*

$$P_{\text{тиск}} = F / S.$$

З наведених означень отримуємо, що при нормальному падінні і повному поглинанні тиск електромагнітної хвилі на поверхню дорівнює густині потоку імпульсу хвилі, або густині потоку енергії

$$P_{\text{тиск}} = \Phi_p, \quad \text{або} \quad P_{\text{тиск}} = \frac{\Phi_e}{c}.$$

Очевидно, що при повному поглинанні середнє значення тиску електромагнітного поля хвилі пропорційне її інтенсивності  $\bar{P}_{\text{тиск}} = \frac{I}{c}$ .

#### 4.7. Випромінювання електромагнітних хвиль

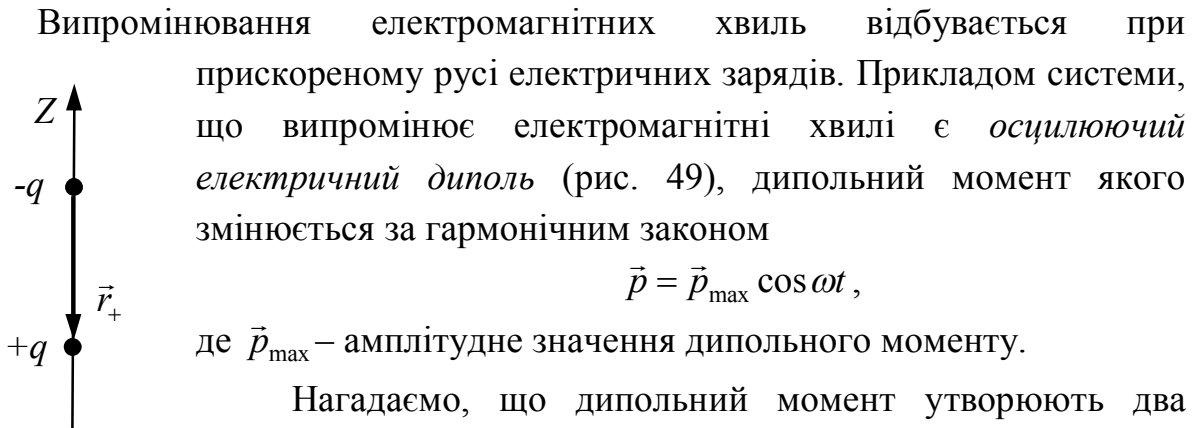


Рис. 49

де  $\vec{p}_{\text{max}}$  – амплітудне значення дипольного моменту.

Нагадаємо, що дипольний момент утворюють два різнойменні заряди, модулі яких однакові:  $|q_+| = |q_-| = q$ . За означенням, дипольний момент дорівнює добутку додатного заряду диполя на визначений відносно від'ємного заряду радіус-вектор положення додатного заряду,  $\vec{p} = q\vec{r}_+$ . В такий спосіб введений вектор  $\vec{r}_+$  тотожний до вектора плеча диполя  $\vec{\ell}$ . Нехай додатний заряд буде нерухомим, а від'ємний заряд здійснює коливний рух за гармонічним законом

$$z = z_{\text{max}} \cos \omega t, \quad \text{або} \quad \vec{r}_+ = \vec{r}_{\text{max}}^{(+)} \cos \omega t,$$

де  $\omega$  – частота коливань,  $z_{\text{max}}$  – амплітуда зміщення від'ємного заряду відносно додатного заряду, відповідно,  $\vec{r}_{\text{max}}^{(+)}$  – амплітудне значення радіус-вектора  $\vec{r}$ . В цьому випадку амплітуда коливань дипольного моменту прямо пропорційна амплітуді зміщення від'ємного заряду диполя:  $\vec{p}_{\text{max}} = q\vec{r}_{\text{max}}^{(+)}$ .

На відстанях  $r \gg r_{\max}$  диполь створює навколо себе електростатичне поле, напруженість якого обернено пропорційна їх кубу  $E \sim \frac{1}{r^3}$ , де  $r$  – обігає точки спостереження поля. Видно, що дипольне поле досить швидко спадає при збільшенні відстані.

Великі відстані від осцилюючого диполя як джерела важливі ще й тому, що на них електростатичне поле майже спадає до нуля, і в так званій *хвильовій зоні*, для якої  $r \gg \lambda$ , утворюється (є джерелом) електромагнітне

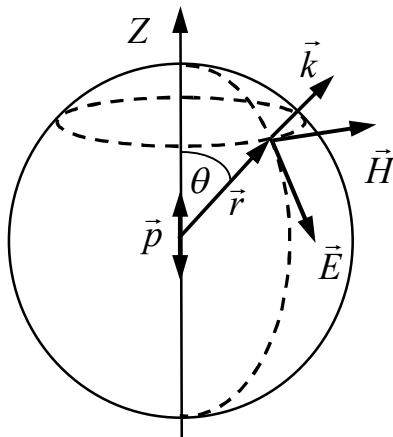


Рис. 50

поле, що представляє собою сферичну електромагнітну хвилю. Хвильовий вектор цієї хвилі співпадає з радіус-вектором точки спостереження поля  $\vec{k} \uparrow \uparrow \vec{r}$  (див. рис. 50). Залежність величини напруженості електричного поля такої хвилі описується рівнянням

$$\vec{E} = \vec{E}_{\max}(r, \theta) e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})},$$

де  $\omega$  – частота хвилі, яка дорівнює частоті коливань дипольного моменту,  $\vec{E}_{\max}$  – амплітудне значення напруженості електричного поля хвилі. Величина амплітудного значення поля хвилі залежить від кута  $\theta$  між віссю  $Z$  та радіус-вектором  $\vec{r}$  точки спостереження поля хвилі та обернено пропорційна відстані  $|\vec{r}| = r$  до диполя,

$$|\vec{E}_{\max}| \sim \frac{\sin \theta}{r}.$$

Вектор напруженості магнітного поля хвилі є перпендикулярним до вектора напруженості електричного поля та до хвильового вектора і визначається векторним добутком:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu\mu_0\omega} [\vec{k}\vec{E}].$$

Видно, що вектори  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  сферичної хвилі аналогічно плоскій електромагнітній хвилі перпендикулярні між собою та перпендикулярні до вектора  $\vec{k}$ , а амплітудне значення вектора напруженості магнітного поля

$$|\vec{H}_{\max}| \sim \frac{\sin \theta}{r}.$$

Проведемо площину, яка проходить через вісь  $Z$  диполя. Перерізи цієї площини зі сферою фазової поверхні хвилі (хвиля сферична) називають *меридіанами*. Вектор  $\vec{E}$  лежить на дотичній до меридіану (рис. 50).

Перерізи фазової поверхні з площиною, яка перпендикулярна до осі диполя, називають *паралелями*. Вектор  $\vec{H}$  лежить на дотичній до паралелі.

Інтенсивність хвилі пропорційна квадрату амплітуди напруженості електричного поля хвилі, тому можна записати

$$I(r, \theta) \sim \frac{\sin^2 \theta}{r^2}.$$

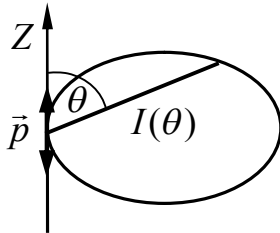


Рис. 51

Графічне зображення (див. рис. 51) кутової залежності для інтенсивності називають *діаграмою направленості диполя*. На діаграмі довжина відрізка від осцилюючого диполя джерела хвилі до кривої діаграми дорівнює інтенсивності хвилі для даного напрямку поширення хвилі.

*Потужність випромінювання диполя* визначається шляхом інтегрування інтенсивності по замкненій поверхні, що оточує диполь,

$$P = \int_S I(r, \theta) \vec{n} d\vec{S},$$

де  $S$  – площа цієї поверхні, а під знаком інтеграла стоїть скалярний добуток вектора елементарної ділянки цієї поверхні  $d\vec{S}$  на одиничний вектор, що направлений вздовж хвильового вектора  $\vec{n} = \frac{\vec{k}}{k}$  і визначений у місці розташування ділянки.

Для диполя потужність випромінювання описується виразом

$$P = \frac{\mu_0}{12\pi c} \omega^4 p_{\max}^2,$$

де  $p_{\max} = qr_{\max}$ .

Таким чином, бачимо, що чим більша частота, тим більшою є потужність випромінювання диполем. Крім того, величина  $\omega^2 p_{\max}$  дорівнює добутку  $qa_{\max}$ , де  $a_{\max}$  – амплітудне значення прискорення при коливальному русі заряду диполя. Тому можна записати

$$P = \frac{\mu_0}{12\pi c} q^2 a_{\max}^2.$$

З цієї формули випливає, що потужність електромагнітного випромінювання пропорційна квадрату прискорення рухомого заряду. Такий

зв'язок між потужністю хвилі та прискоренням є характерний для усіх випадків прискореного руху зарядів. Загальний висновок такий: довільний прискорений рух зарядів супроводжується випромінюванням електромагнітних хвиль.

#### **4.8. Питання для самоконтролю**

1. Дайте означення електромагнітної хвилі.
2. Запишіть рівняння Максвелла за відсутності струмів та зарядів.
3. Як властивості середовища впливають на швидкість поширення електромагнітної хвилі?
4. Отримайте хвильове рівняння для вектора напруженості магнітного поля.
5. Дайте означення та запишіть формули для плоскої електромагнітної хвилі.
6. Розрахуйте лапласіан від вектора напруженості магнітного поля плоскої електромагнітної хвилі.
7. Розрахуйте ротор від вектора напруженості магнітного поля плоскої електромагнітної хвилі.
8. Як виглядає дисперсійне співвідношення для гармонічної електромагнітної хвилі?
9. Поясніть поперечність електромагнітних хвиль, наведіть формули зв'язку між векторами напруженостей електричного та магнітних полів у таких хвилях.
10. Нарисуйте графіки розподілу електричного та магнітного поля в електромагнітній хвилі.
11. Що таке фронт хвилі?
12. Дайте означення та поясніть фізичний зміст густини потоку енергії, вектора Пойтинга та інтенсивності. В чому різниця між цими фізичними величинами?
13. Дайте означення густини потоку імпульсу.
14. Наведіть формули зв'язку між густиною потоку імпульсу та густиною потоку енергії, вектором Пойтинга.
15. Запишіть формулу для тиску, що спричиняє електромагнітна хвиля.
16. Поясніть суть терміну осцилюючий електричний диполь.
17. Дайте означення діаграми направленості диполя.
18. Як вектори напруженості електричного та магнітного полів хвилі, яку випромінює осцилюючий диполь, залежать від відстані у хвильовій зоні?

19. Напишіть формулу зв'язку між потужністю випромінювання диполя та інтенсивністю хвилі.

#### 4.9. Формули, необхідні для розв'язку задач

1. Рівняння Максвелла для електромагнітної хвилі

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

2. Швидкість поширення електромагнітної хвилі

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}} \quad \text{або} \quad v = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}},$$

де  $c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$  - швидкість електромагнітних хвиль у вакуумі.

3. Хвильове рівняння для електричної та магнітної складових електромагнітної хвилі

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad \Delta \vec{H} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}.$$

4. Рівняння плоскої електромагнітної хвилі

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_{\max} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0), \quad \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_{\max} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0).$$

5. Формули для густини потоку енергії, вектора Пойтинга та інтенсивності

$$\Phi_e = EH, \quad \vec{S}_\Pi = [\vec{E}\vec{H}], \quad I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} \vec{E}_{\max}^2.$$

6. Формули для густини потоку імпульсу та тиску електромагнітної хвилі при її нормальному падінні на поверхню і при її повному поглинанні нею

$$\vec{\Phi}_p = \frac{[\vec{E}\vec{H}]}{c}, \quad P_{\text{тиск}} = \Phi_p.$$

#### 4.10. Задачі

- 4.1. Знайдіть довжину електромагнітної хвилі, період коливань якої становить  $10^{-6}$  с, яка поширюється у середовищі з  $\mu = 4/3$  та  $\varepsilon = 1,5$ . Знайдіть різницю фаз коливань двох точок, що лежать на відстані  $5 \cdot 10^2$  м вздовж напрямку поширення хвилі.
- 4.2. Електромагнітна хвиля з частотою  $\nu = 3,0$  МГц поширюється з вакууму в немагнітне діелектричне середовище з діелектричною проникністю  $\varepsilon = 4,0$ . Знайдіть приріст довжини хвилі.
- 4.3. Рівняння коливань електричного поля плоскої електромагнітної хвилі поблизу її джерела мають (числові значення задані в СІ) вигляд

$E = 0,01 \cos(0,5 \cdot 10^6 \pi t + \pi / 4)$ . Хвиля поширюється у вакуумі. Запишіть рівняння хвилі. Запишіть рівняння коливань вектора напруженості електричного поля та вектора напруженості магнітного поля в точці, що віддалена від джерела на відстань 600 м.

4.4. Плоска електромагнітна хвиля  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_{\max} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$  поширюється у вакуумі. Вектори  $\vec{E}_{\max}$  та  $\vec{k}$  вважати відомими. Знайдіть вектор  $\vec{H}$  як функцію часу в точці  $\vec{r} = 0$ .

4.5. У вакуумі поширюється плоска електромагнітна хвиля  $\vec{E} = \vec{e}_x E_{\max} \cos(\omega t - ky)$ , де  $\vec{e}_x$  - орт вздовж осі  $X$ ,  $E_{\max} = 160$  В/м,  $k = 0,51$  м<sup>-1</sup>. Знайдіть вектор  $\vec{H}$  в точці з координатою  $y = 7,7$  м у моменти часу  $t = 0$  та  $t = 33$  нс.

4.6. Плоска електромагнітна хвиля з частотою  $\omega$  поширюється в мало провідному середовищі з питомим опором  $\rho$  та діелектричною проникністю  $\varepsilon$ . Знайдіть відношення амплітуд густин струму провідності та струму зміщення. Магнітна проникність  $\mu = 1$ .

4.7. Плоска гармонічна електромагнітна хвиля, період коливань якої  $T$ , поширюється з швидкістю  $v$  в площині  $XY$ . Вектор напруженості електричного поля перпендикулярний до цієї площини. Хвильовий вектор становить кут  $\alpha$  з віссю  $y$ . Напишіть рівняння хвилі, та знайдіть різницю фаз коливань в точках з координатами  $x_1, y_1$  та  $x_2, y_2$ .

4.8. Знайдіть довжину хвилі, хвильовий вектор та швидкість поширення електромагнітної хвилі, рівняння якої має вигляд  $\vec{E}(x, y, t) = \vec{E}_{\max} \cos(\omega t - \gamma x + \beta y)$ .

4.9. Два джерела випромінюють дві гармонічні електромагнітні хвилі. Джерела коливаються з однаковою частотою, однаковою початковою фазою та однаковою амплітудою. Опишіть результуючу напруженість вектора напруженості електричного поля в точці, що знаходиться на відстані  $d_1$  від першого джерела та відстані  $d_2$  від другого джерела, якщо напрямок коливань векторів напруженості обох хвиль в цій точці однаковий.

4.10. Запишіть результуюче коливання вектора напруженості електричного поля при накладанні двох плоских хвиль, що поширюються назустріч одна одній. Частоти та хвильові числа хвиль однакові. Коливання векторів напруженості електричних полів здійснюються в одній площині, а їх амплітуди – однакові. Початкові фази коливань також однакові.

4.11. Доведіть, що при поширенні плоскої електромагнітної хвилі в однорідному ізотропному середовищі перерозподілу сторонніх зарядів не відбувається.

4.12. Доведіть, що для магнітного поля гармонічної плоскої хвилі, яка поширюється в однорідному ізотропному лінійному середовищі, виконується теорема Гауса.



4.13. У вакуумі вздовж осі  $X$  поширюється дві плоскі електромагнітні хвилі, електричні поля яких описуються рівняннями  $\vec{E}_1 = \vec{E}_{\max} \cos(\omega t - ky)$  та  $\vec{E}_2 = \vec{E}_{\max} \cos(\omega t - ky + \varphi)$ , де  $\varphi$  – стала. Знайдіть середнє значення густини потоку енергії.

4.14. Куля, радіус якої  $R=40$  см, знаходиться у немагнітному діелектричному середовищі з діелектричною проникністю  $\varepsilon=4,0$ . У середовищі поширюється електромагнітна плоска хвиля, довжина хвилі якої  $\lambda \ll R$ . Амплітуда коливань вектора напруженості магнітного поля  $E_{\max}=200$  В/м. Знайдіть, яка енергія хвилі потрапить на кулю за час  $t=10,0$  хв.

4.15. Диск має радіус  $R$ . Вектор  $\vec{k}$  плоскої електромагнітної хвилі з частотою  $\omega$  та  $\varphi_0=0$  складає кут  $\alpha$  з вектором нормалі до поверхні диску. Амплітуда хвилі  $E_{\max}$ . Знайдіть значення енергії, яку хвиля перенесла до диску за час  $t \gg T$ , де  $T$  – період коливань.

4.16. Диск має радіус  $R$ . Вектор  $\vec{k}$  плоскої електромагнітної хвилі з частотою  $\omega$  та  $\varphi_0=0$  перпендикулярний до поверхні диску. Амплітуда хвилі  $E_{\max}$ . Знайдіть значення енергії, яку хвиля перенесла до диску за час рівний  $t=T/8$ , де  $T$  – період коливань, та за час  $t=8 \cdot T$ .

4.17. У вакуумі поширюється плоска хвиля  $\vec{E}(x, y, t) = \vec{E}_{\max} \cos(\omega t - \gamma x + \beta y)$ . Знайдіть миттєве та середнє значення вектора Пойтинга, а також визначте кут між вектором Пойтинга та довільним вектором  $\vec{p} = p_x \vec{i} + p_y \vec{j}$ .

4.18. Плоска електромагнітна хвиля поширюється перпендикулярно до поверхні плоско-паралельного шару, товщина якого  $\ell$ . Шар немагнітний, а його діелектрична проникність лінійно зменшується від значення  $\varepsilon_1$  на передній поверхні шару, на яку спочатку потрапляє хвиля, до  $\varepsilon_2$  на другій поверхні шару, куди вона потрапляє після проходження всієї товщини шару. Знайдіть час поширення фазової поверхні хвилі через цей шар.

4.19. Плоска електромагнітна хвиля поширюється перпендикулярно до поверхні плоско-паралельного шару, товщина якого  $\ell$ . Шар немагнітний, а його діелектрична проникність експоненційно зменшується від значення  $\varepsilon_1$  на передній поверхні шару, на яку спочатку потрапляє хвиля, до  $\varepsilon_2$  на другій поверхні шару, куди вона потрапляє після проходження всієї товщини шару. Знайдіть час поширення фазової поверхні хвилі через цей шар.

## Глава 5. ОПТИКА

Розділ фізики, в якому вивчають природу випромінювання світлових електромагнітних хвиль, закони їх поширення та взаємодію світла з речовиною, називають *оптикою*. *Світло* – це електромагнітне випромінювання, що вміщує поперечні плоскі хвилі довжиною приблизно від 400 нм до 760 нм, які сприймаються людським оком (*видиме світло*). Чутливість людини до хвиль цього діапазону обумовлена її існуванням на Землі як планеті, для якої найбільш яким джерелом світла є Сонце, причому зазначений діапазон є найбільш оптимальним. Різні довжини електромагнітних хвиль око людини сприймає по-різному – від найбільш довгих, що відповідають червоним кольорам, до найбільш коротких, що відповідають фіолетовому діапазону. А взагалі число основних кольорів, яке зазвичай розрізняє людське око, дорівнює семи: червоний, помаранчевий, жовтий, зелений, блакитний, синій, фіолетовий, чутливість до сприйняття яких також неоднакова. Як правило, око людини найкраще сприймає світло з довжинами хвиль близько 555 нм, які відповідають зеленому кольору і його відтінкам.

В оптиці вивчають також *інфрачервоне* випромінювання, довжини хвиль якого знаходяться у діапазоні від 760 нм до 1 мм. Інфрачервоне випромінювання складається з електромагнітних хвиль, частоти яких менші за частоти видимого світла і які мають в основному такі ж самі властивості, що і видиме світло.

Електромагнітні хвилі з довжиною, з довжиною, що лежить в діапазоні від 10 нм до 400 нм, відносять до *ультрафіолетового* випромінювання. Воно має частоти більші за частоти видимого світла і також є предметом вивчення оптики, бо за всіма ознаками подібне до хвиль видимого діапазону.

У вакуумі, де  $\varepsilon=1$ ,  $\mu=1$ , швидкість світла визначається за формулою

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с},$$

в якій  $\varepsilon_0$  та  $\mu_0$  – електрична та магнітна сталі.

Швидкість поширення світлових хвиль у лінійному ізотропному однорідному середовищі відрізняється від  $c$  і залежить від його матеріальних констант:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0}} \quad \text{або} \quad v = \frac{c}{\sqrt{\mu \varepsilon}},$$

де  $\varepsilon$  і  $\mu$  – діелектрична та магнітна сприйнятливості відповідної речовини. Як правило, більшість оптично прозорих матеріальних тіл немагнітні, тому для них з великою точністю можна прийняти  $\mu=1$ , що дає

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Тіла, які випромінюють електромагнітні хвилі світлового діапазону, називаються *джерелами світла*. Джерела світла розрізняються за способом створення випромінювання (теплове, люмінесцентне, лазерне, тощо), а також за його фізичними характеристиками (біле, монохроматичне, поляризоване, частково поляризоване, тощо).

*Точковим джерелом світла* називають джерело, розміри якого значно менші за відстані, на яких спостерігають світло за умови, що його випромінювання ізотропне, тобто однакове в усі боки.

### 5.1. Геометрична оптика

Електромагнітне поле світлових хвиль є короткохвильовим, бо його довжини хвиль близькі до  $5 \cdot 10^{-7}$  м, а частоти надзвичайно великі – більші за  $10^{14}$  Гц. Отже, при вирішенні деяких задач опису поширення світлових хвиль можна застосовувати наближення, коли припускається, що  $\lambda \rightarrow 0$  (хоча, звісно, довжина хвилі ніколи не може бути рівною нулеві, бо це унеможливило б саме існування хвиль). За такого припущення поширення світла можна описати, спираючись на геометричні поняття. Розділ оптики, в якому для опису поширення світла та його характеристик користуються уявленнями з просторової геометрії, називається *геометричною оптикою*.

Так, при розгляді поширення світла вводять поняття пучка, а також – променя світла. *Пучок* світла можна отримати при освітленні непрозорого тіла з круглим отвором. В такому випадку створюється циліндричний або конічний пучок, в межах якого відбувається поширення світла. Твірні, або осі пучка, а також інші його лінії, вздовж яких поширюється світло, називають *світловими променями*. Промінь, таким чином, є геометричним поняттям. Саме вздовж променя світлова хвиля переносить свою енергію.

Геометрична оптика ґрунтується на твердо встановленому експериментальному факті *прямолінійного* поширення світла в однорідних середовищах. Дійсно, при опроміненні непрозорих тіл світлом від точкового джерела на екрані виникають чіткі границі тіні цього тіла.

Другим важливим експериментальним фактом є *незалежність* світлових променів. При перетині світлових променів вони не збурюють один одного, не змінюють напрямку свого поширення, а також не впливають на поширення інших світлових променів.

Третій експериментальний факт стосується принципу *зворотності поширення світла*. Якщо назустріч променю направити інший, то він пройде по тому ж самому шляху, що й перший, але в зворотному до нього напрямку.

### 5.1.1. Принцип Ферма

Лінія, яка відповідає ходу світлового променя в будь-якому середовищі, визначається за допомогою *принципу Ферма*. Цей принцип є постулатом і твердо приписує світловому променю рухатися з однієї точки до іншої за найменший з можливих час.

Продемонструємо цей принцип. Нехай світловий промінь поширюється вздовж суцільної кривої (див. рис. 52 ) від точки 1 до точки 2 у неоднорідному середовищі, в якому  $\varepsilon$  або  $\mu$  – діелектрична та магнітна сприйнятливості середовища – не є однаковим у різних точках. При цьому крива руху світла вже не буде прямою, а може викривлятися.

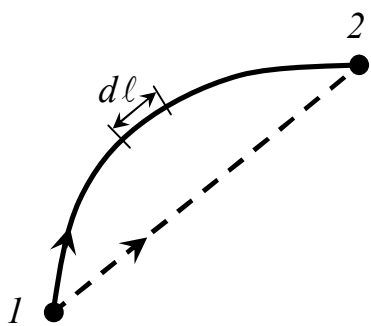


Рис. 52

Візьмемо на цій кривій малу ділянку довжиною  $d\ell$ . Час, за який світло пройде цю ділянку, дорівнює  $dt = \frac{d\ell}{v}$ , де  $v$  – швидкість

поширення світла по цій ділянці траєкторії. Зрозуміло, що повний час  $\tau$  поширення світла між точками 1 і 2 визначається криволінійним інтегралом

$$\tau = \int_1^2 dt = \int_1^2 \frac{d\ell}{v}.$$

За принципом Ферма час поширення світла з точки 1 до точки 2, має бути найменшим. Врахуємо, що швидкість поширення світла

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}, \quad \text{або} \quad v = \frac{c}{n},$$

де  $c$  – швидкість світла у вакуумі, а  $n$  – *показник заломлення* середовища:

$n = \sqrt{\mu\varepsilon}$  (у немагнітних речовинах  $n = \sqrt{\varepsilon}$ ). Оскільки  $n = \frac{c}{v} > 1$ , то показник

заломлення завжди показує, наскільки зменшується швидкість поширення світла у середовищі відносно вакууму.

Таким чином, час поширення світла від точки 1 до точки 2 можна представити у спосіб

$$\tau = \frac{1}{c} \int_0^{\ell_{12}} n(\ell) d\ell,$$

який враховує, що величина показника заломлення є різною в різних точках середовища, а  $\ell_{12}$  позначено довжину кривої від точки 1 до точки 2.

Інтеграл в отриманому виразі має розмірність довжини, яку в геометричній оптиці називають *оптичною довжиною шляху* і позначають

$$L = \int_0^{\ell_{12}} n(\ell) d\ell.$$

З урахуванням такого означення час поширення світла можна записати у вигляді

$$\tau = \frac{L}{c}.$$

Звідси бачимо, що час поширення світла дійсно буде мінімальним, коли оптична довжина шляху приймає найменше значення.

Зауважимо, що принцип Ферма можна сформулювати інакше: світловий промінь серед усіх можливих обирає для свого поширення таку траєкторію, оптична довжина шляху якої виявляється мінімальною.

В однорідному середовищі, що означає незмінність показника заломлення в усіх точках, або  $n(\ell) = n$ , оптична довжина шляху буде прямо пропорційною довжині ділянки кривої

$$L = n \int_0^{\ell_{12}} d\ell = n\ell_{12}.$$

Очевидно, що оптична довжина шляху для однорідного середовища буде найменшою, коли найменшою буде довжина кривої. Зрозуміло також, що відстань між двома точками найменша, коли ці точки лежать на прямій (на рис. 52 вона позначена пунктиром). Отже, принцип Ферма задовольняє закону прямолінійного поширення світла в однорідному середовищі, або, можна стверджувати, що таке поширення у відповідних речовинах випливає з принципу Ферма. Легко перевірити, що цей принцип також задовольняє принципу зворотності.

### 5.1.2. Закони відбивання та заломлення світла

На межі двох середовищ спостерігаються явища відбивання світла та заломлення світла. Ці явища супроводжуються зміною напрямку поширення світла без зміни частоти хвилі. Розглянемо випадок, коли межею між двома однорідними ізотропними середовищами є ідеальна площина (див. рис. 53).

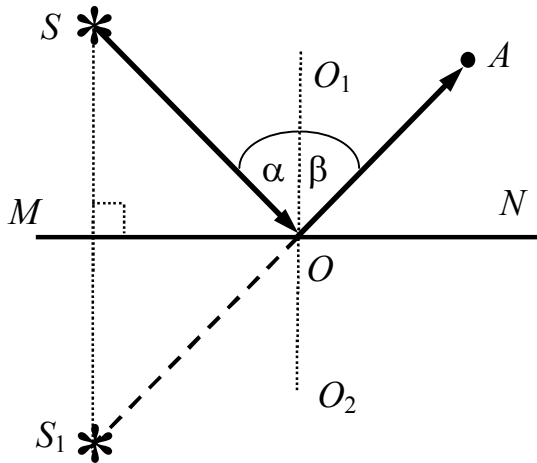


Рис. 53

На цій межі, яку на рисунку позначено  $MN$ , відбувається відбиття світлових променів, джерело яких на рис. 53 позначено  $S$ . На ньому також показано хід променя, який йде від джерела  $S$  до межі  $MN$ , відбивається в точці  $O$ , а потім прямує до точки  $A$ . Згідно з принципом Ферма відстань, яку проходить світло від джерела  $S$  до точки  $A$ , має бути найменшою.

Проведемо до межі  $MN$  перпендикуляр  $O_1O_2$ , який проходить через точку  $O$ . В точці  $O$  промінь відбивається від границі. Кут між падаючим променем та перпендикуляром  $O_1O_2$  позначають  $\alpha$ . Цей кут називають *кутом падіння*. Кут між відбитим променем та перпендикуляром до межі називають *кутом відбивання* і позначають  $\beta$ .

З метою обчислення положення токи  $O$ , для якого сума відстаней  $SO+OA$  мінімальна, розглянемо точку  $S_1$ , яка симетрична відносно межі  $MN$  до точки  $S$ .

З умов симетрії положення точок  $S$  та  $S_1$  повинна виконуватися рівність кутів

$$\alpha = \angle S_1OO_2.$$

З цієї симетрії також випливає, що сума відстаней  $SO+OA=S_1O+OA$ . Сума відрізків  $SO+OA$  буде найменшою, коли найменшою є сума  $S_1O+OA$ . Очевидно, що сума відстаней  $S_1O+OA$  буде найменшою, якщо точка  $O$  лежить на прямій, утвореній точками  $S_1$  та  $A$ .

Кути  $\beta$  та  $\angle S_1OO_2$  є суміжними, а тому

$$\beta = \angle S_1OO_2.$$

Праві частини обох рівностей для кутів однакові, тому мають бути однаковими і ліві частини цих рівностей. Звідси приходимо до співвідношення, яке називають *законом відбивання світла* і яке гласить:

падаючий промінь, відбитий промінь та перпендикуляр до межі, що проведений через точку відбивання, лежать в одній площині, а кут падіння дорівнює куту відбивання, тобто

$$\alpha = \beta.$$

З точки зору спостерігача, який буде знаходитися у точці  $A$ , відбитий промінь начебто поширюється з точки  $S_1$ , яку називають *уявним* джерелом світла.

Тепер розглянемо явище заломлення світла, коли воно перетинає межу двох однорідних ізотропних середовищ. Суть явища полягає в тому, що при

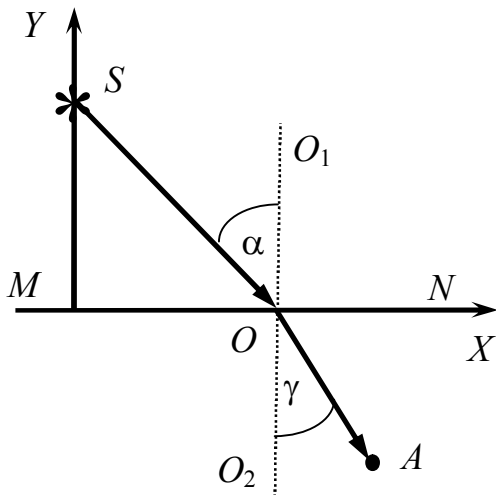


Рис. 54

заломленні світло змінює напрямок поширення. Для опису цього явища знову використаємо принцип Ферма. Розрахуємо час поширення світла від джерела  $S$ , яке знаходиться у середовищі з показником заломлення  $n_1$ , до довільної точки  $O$ , яка знаходиться в середовищі з показником заломлення  $n_2$ . Межу між цими середовищами на рис. 54 позначено  $MN$ . Точку, в якій відбувається заломлення променя, позначимо  $O$ . Аналогічно попередньому розгляду відбивання світла проведемо до межі  $MN$  в точці  $O$  перпендикуляр  $O_1O_2$  (див. рис. 54).

У явищі заломлення кут  $\alpha$  між падаючим променем і перпендикуляром теж називають *кутом падіння*, а кут  $\gamma$  між перпендикуляром до межі і заломленим променем називають *кутом заломлення*.

Точки  $S$ ,  $O$  та  $A$  лежать в одній площині, тому для визначення положення цих точок використаємо ортогональну систему координат, в якій джерело знаходиться на осі  $Y$ , а вісь  $X$  лежить на межі і проходить через точку  $O$ . В цій системі точка  $S$  має координати  $(0, y_1)$ , точка  $O$  – координати  $(x, 0)$ , а точка  $A$  – координати  $(x_2, y_2)$ .

Час  $t$  поширення світла від джерела  $S$  до точки  $A$  при заломленні в точці  $O$  дорівнює сумі  $t = t_1 + t_2$ , де  $t_1$  – час проходження падаючим променем відстані  $SO$ , а  $t_2$  – час проходження заломленим променем відстані  $OA$ . Цю суму можна легко записати у вигляді

$$t = \frac{SO}{v_1} + \frac{OA}{v_2} = \frac{\sqrt{y_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{y_2^2 + (x_2 - x)^2}}{v_2},$$

де  $v_1$  – швидкість світла у середовищі до заломлення, а  $v_2$  – швидкість світла після заломлення. Положення точки  $O$  має бути таким, щоб  $t$  було

найменшим. Знайдемо похідну  $\frac{dt}{dx}$ , яка має дорівнювати нулеві. Зробивши необхідні прості обчислення, приходимо до рівняння:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{v_1 \sqrt{y_1^2 + x^2}} - \frac{x_2 - x}{v_2 \sqrt{y_2^2 + (x_2 - x)^2}} = 0.$$

Враховуючи, що  $\sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{y_1^2 + x^2}}$ , а  $\sin \gamma = \frac{x_2 - x}{\sqrt{y_2^2 + (x_2 - x)^2}}$ , наведену

вище рівність перепишемо у вигляді

$$\frac{\sin \alpha}{v_1} = \frac{\sin \gamma}{v_2}.$$

Звідки отримуємо співвідношення

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{v_1}{v_2},$$

за яким відношення синуса кута падіння до синуса кута заломлення не залежить ні від кута падіння, ні від кута заломлення, а визначається лише швидкостями поширення світла у відповідних середовищах.

Якщо тепер врахувати, що  $v_1 = \frac{c}{n_1}$ , а  $v_2 = \frac{c}{n_2}$ , то отримаємо інше співвідношення, яке повністю задає проходження світлового променя через межу двох середовищ, а саме:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{n_2}{n_1}, \quad \text{або} \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = n_{21},$$

де

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1}, \quad \text{або} \quad n_{21} = \frac{v_1}{v_2}$$

– так званий *відносний показник заломлення*.

Таким чином, використання принципу Ферма дозволило довести, що для двох однорідних ізотропних середовищ виконуються *закон заломлення світла*, за яким падаючий промінь, заломлений промінь та перпендикуляр до межі, проведений до точки падіння, лежать в одній площині, а відношення синуса кута падіння до синуса кута заломлення дорівнює відносному показнику заломлення.

З двох середовищ, що межують, середовище з меншим значенням абсолютного показника заломлення називають *оптично менш густим*, а середовище з більшим значенням абсолютного показника заломлення –



*оптично більш густим.* У оптично більш густого середовища швидкість поширення світла менша за швидкість світла в оптично менш густому середовищі.

З цього випливає, що при поширенні світла з оптично менш густого середовища до оптично більш густого середовища кут падіння є більшим за кут заломлення. І, навпаки, коли світло переходить з більш оптично густого середовища до оптично менш густого середовища кут падіння є меншим за кут заломлення.

Звідси легко зрозуміти, що при поширенні світла з оптично більш густого середовища до оптично менш густого середовища (що відповідає  $n_1 > n_2$ ) може спостерігатися явище, що зветься *повним внутрішнім відбиванням*. Дійсно, змінюючи величину кута  $\alpha$ , можна досягти умови  $\gamma = \pi / 2$ , яка свідчить, що заломлений промінь поширюватиметься вздовж межі між середовищами. При цьому явище заломлення не відбуватиметься, а матиме місце лише явище відбивання світла.

Граничний кут, починаючи з якого відбувається повне внутрішнє відбивання, просто знаходиться з закону заломлення, якщо у відповідне відношення синусів підставити значення  $\sin \gamma = \sin(\pi / 2) = 1$ . В результаті маємо, що цей кут визначається з рівності

$$\sin \alpha_0 = \frac{n_2}{n_1}.$$

Отже, приходимо до остаточного висновку, що для всіх кутів падіння  $\alpha > \alpha_0$ , заломлення не відбувається і світло може лише відбиватися.

### **5.1.3. Закони відбивання та заломлення як наслідок теорії Максвела**

Як ми бачили, при проходженні хвилею межі двох діелектриків відбувається зміна напрямку поширення хвилі. Але слід пам'ятати, що світлова хвиля є поширенням електромагнітного поля. Тому, коли на межі двох діелектриків відсутні сторонні заряди і не течуть поверхневі струми, при переході через неї мають виконуватися граничні умови для векторів напруженостей електричного та магнітного полів. Ці умови записуються наступним чином

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad B_{1n} = B_{2n}, \quad H_{1\tau} = H_{2\tau}, \quad D_{1n} = D_{2n},$$

де індекси 1 та 2 позначають середовища, індекси  $\tau$  позначають тангенціальні складові (проекції) векторів полів на площину межі, а індекси  $n$  позначають нормальні до межі складові векторів,  $\vec{E}$  – вектор напруженості електричного поля в околі межі,  $\vec{D}$  – вектор індукції цього поля,  $\vec{H}$  – вектор напруженості магнітного поля в околі межі,  $\vec{B}$  – вектор індукції цього поля.

У випадку електромагнітного поля хвилі з чотирьох рівнянь граничних умов незалежними залишаються лише два. Дійсно, запишемо узагальнений закон повного струму, за яким  $\oint \vec{H} d\vec{\ell} = \int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}$ , де перший інтеграл – це циркуляція вектора напруженості магнітного поля, який розраховують по замкненому контуру, а другий – потік похідної вектора електричної індукції через поверхню, натягнуту на цей контур.

Виберемо контур таким чином, щоб він був паралельним до межі. Тоді циркуляція включатиме тільки тангенціальну складову напруженості магнітного поля. Натягнута на контур поверхня буде паралельною до межі, а отже інтеграл потоку може розраховуватися лише по нормальній складовій похідної вектора електричного зміщення. Для такого контуру можна записати

$$\oint H_{\tau} d\ell_{\tau} = \int \frac{\partial D_n}{\partial t} dS.$$

Бачимо, що з рівності  $H_{1\tau} = H_{2\tau}$  випливає рівність для часових похідних  $\frac{\partial D_{1n}}{\partial t} = \frac{\partial D_{2n}}{\partial t}$ . Для плоскої електромагнітної хвилі знаходження похідної по часу еквівалентне множенню рівняння хвилі на  $i\omega$ , де  $i$  – уявна одиниця, а  $\omega$  – частота хвилі. Виходячи з цього маємо, що виконання рівності  $\frac{\partial D_{1n}}{\partial t} = \frac{\partial D_{2n}}{\partial t}$  для хвилі призводить до виконання рівності  $D_{1n} = D_{2n}$ . В результаті, маємо, що пара рівнянь  $H_{1\tau} = H_{2\tau}$ , і  $D_{1n} = D_{2n}$  не є незалежною.

У такий самий спосіб, але розглядаючи інтегральний запис закону Фарадея, можна отримати, що пара рівнянь  $E_{1\tau} = E_{2\tau}$ ,  $B_{1n} = B_{2n}$  також не є незалежною.

Отже, для електромагнітного поля хвилі на межі двох діелектриків незалежними є два рівняння для тангенціальних компонент напруженостей електричного та магнітного полів.

Позначимо частоти  $\omega_{nad}$ ,  $\omega_{eid}$ ,  $\omega_{zal}$  та хвильові вектори  $\vec{k}_{nad}$ ,  $\vec{k}_{eid}$ ,  $\vec{k}_{zal}$  для падаючої, відбитої та заломленої хвиль, відповідно. Запишемо їх рівняння:

$$\vec{E}_{nad}(\vec{r}, t) = \vec{E}_{\max}^{(nad)} e^{i(\omega_{nad}t - \vec{k}_{nad}\vec{r})}, \quad \vec{E}_{eid}(\vec{r}, t) = \vec{E}_{\max}^{(eid)} e^{i(\omega_{eid}t - \vec{k}_{eid}\vec{r})},$$

$$\vec{E}_{zal}(\vec{r}, t) = \vec{E}_{\max}^{(zal)} e^{i(\omega_{zal}t - \vec{k}_{zal}\vec{r})}.$$

Вектори  $\vec{k}_{nad}$ ,  $\vec{k}_{eid}$ ,  $\vec{k}_{zal}$  лежать у площині падіння, тому умову рівності тангенціальних складових полів в обох середовища запишемо наступним чином

$$E_{\tau}^{(nad)} + E_{\tau}^{(eid)} = E_{\tau}^{(zal)}.$$

Введемо координатні осі. Вісь  $X$  розташуємо в площині межі середовищ і в площині падіння, а вісь  $Z$  – перпендикулярно до межі. На межі  $z = 0$ . В цьому випадку рівняння для рівності тангенціальних складових поля приймуть вигляд

$$E_{\max, \tau}^{(nad)} e^{i(\omega_{nad}t - k_x^{(nad)}x)} + E_{\max, \tau}^{(eid)} e^{i(\omega_{eid}t - k_x^{(eid)}x)} = E_{\max, \tau}^{(zal)} e^{i(\omega_{zal}t - k_x^{(zal)}x)}.$$

Зазначене рівняння має виконуватися для всіх моментів часу і для всіх координат  $x$ . Це можливо, лише коли для частот хвиль і проекцій хвильового вектора виконуються рівності

$$\omega_{nad} = \omega_{eid} = \omega_{zal} \equiv \omega, \quad k_x^{(nad)} = k_x^{(eid)} = k_x^{(zal)}.$$

З першої рівності випливає, що процес відбивання та заломлення не впливає на частоту хвилі.

Проаналізуємо окремо співвідношення для проекцій хвильових векторів. Для розрахунку цих проекцій використаємо кут падіння  $\alpha$ , кут відбивання  $\beta$  та кут заломлення  $\gamma$ . Врахуємо також, що у першому середовищі хвильові числа однакові (бо однакові частоти падаючої і відбитої хвиль), тобто  $k_{nad} = k_{eid} = \frac{\omega}{v_1}$ , а у другому середовищі хвильове число

$k_{zal} = \frac{\omega}{v_2}$ , де  $v_1$  та  $v_2$  – швидкості поширення хвиль. В результаті, з рівнянь

для шуканих проекцій хвильового вектора отримуємо дві рівності:

$$\frac{\omega}{v_1} \sin \alpha = \frac{\omega}{v_1} \sin \beta, \quad \frac{\omega}{v_1} \sin \alpha = \frac{\omega}{v_2} \sin \gamma.$$

З них прямо випливає закон відбивання, або рівність  $\alpha = \beta$ , та закон заломлення, або відношення  $\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{v_1}{v_2}$ .

## 5.2. Дисперсія світла

*Дисперсією світла* називають залежність показника заломлення від довжини хвилі. Вперше явище дисперсії відкрив і дослідив Ньютон. Після

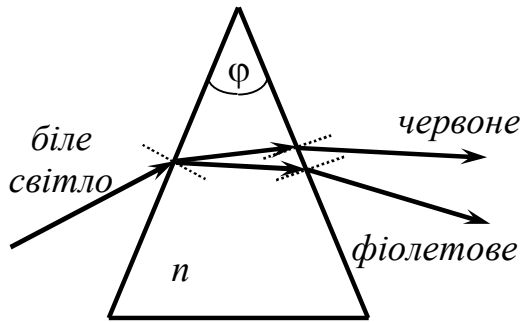


Рис. 55

направлення на призму тонкого пучка сонячного (білого) світла він, спостерігав створюване на екрані зображення з райдужною мережею кольорів (див. рис. 55). Сонячне світло, як відомо, складається з хвиль різних довжин. При проходженні хвилями призми вони по-різному, залежно від їх довжини, заломлюються і відхиляються від початкового напрямку падаючого на

призму світла. З дослідів також випливає, що відхилення променів залежить від кута  $\varphi$  при вершині призми, який називають *кутом заломлення призми*, та від величина показника заломлення речовини призми.

На рис. 56 буквою  $\gamma$  позначено повний кут відхилення променя, після проходження ним призми. Легко бачити з побудови, що цей кут дорівнює  $\gamma = \alpha - \delta + \beta - \chi$ . З закону заломлення маємо, що  $\sin \alpha = n \sin \delta$ , а  $\sin \beta = n \sin \chi$ . Якщо обрати умови проходження такими, щоб кути  $\varphi$  та  $\alpha$  були малими, то інші кути  $\delta$ ,  $\gamma$  та  $\beta$  також будуть малими. Тому використовуючи наближення, що синус малого кута визначається самим

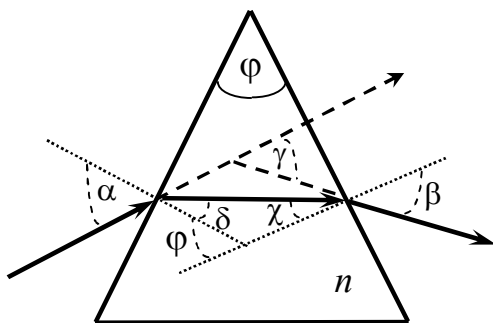


Рис. 56

кутом, можна записати:  $\alpha = n\delta$ ,  $\beta = n\chi$ . Звідси зразу знаходимо, що  $\gamma = (\delta + \chi)(n - 1)$ . Далі врахуємо, як видно з рис. 56, що  $\delta + \chi = \varphi$ .

За таких умов кут відхилення променя визначається добутком

$$\gamma = (n - 1)\varphi.$$

Експеримент свідчить, що цей кут залежить також від довжини хвилі, а це можливо лише у випадку, коли показник заломлення речовини призми залежить від цієї довжини.

Зчислені дослідження дозволили встановити, що залежність показника заломлення від довжини хвилі можна з великою точністю представити у вигляді:

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda_{\text{вак}}^2} + \frac{C}{\lambda_{\text{вак}}^4},$$

де  $A$ ,  $B$ ,  $C$  – деякі параметри, які залежать від речовини і значення яких знаходять шляхом вимірювань,  $\lambda_{\text{вак}}$  – довжина хвилі у вакуумі.

Більше того, емпірична формула для  $n(\lambda)$  досить добре описує дисперсію показника заломлення для прозорих тіл, причому у більшості випадків можна обмежитися першими двома доданками, покладаючи  $C \approx 0$ . Наведена функціональна залежність  $n(\lambda)$  не тільки розкриває і пояснює зміст

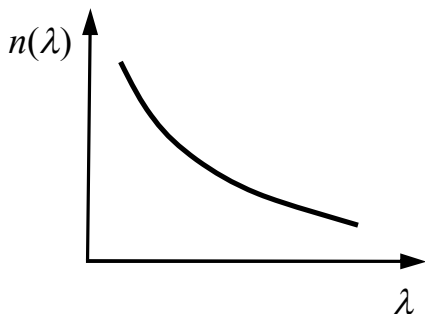


Рис. 57

уявлень про дисперсію світла у матеріальних середовищах, а й дозволяє кількісні дослідження явищ відбивання та заломлення. Суттєво, що для більшості випадків значення констант  $B$  і  $C$  таке, що похідна  $\frac{dn(\lambda)}{d\lambda} < 0$

(див. рис. 57). Таку дисперсію називають *нормальною*. З урахуванням тієї обставини, що фазова швидкість хвилі обернено пропорційна до показника заломлення і тим самим  $v(\lambda) = \frac{c}{n(\lambda)}$ , легко отримати, що при нормальній дисперсії  $\frac{dv(\lambda)}{d\lambda} > 0$ .

Удосконалення методик оптичних експериментів дозволило встановити, що у деяких речовинах для певного інтервалу частот спостерігається явище *аномальної дисперсії*,

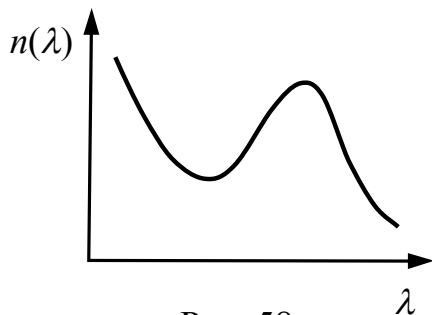


Рис. 58

коли  $\frac{dn(\lambda)}{d\lambda} > 0$  (див. рис. 58). Як легко переконатися, аномальній дисперсії відповідає умова  $\frac{dv(\lambda)}{d\lambda} < 0$ .

У більшості відомих випадків аномальна дисперсія експериментально спостерігається в тій області довжин хвиль, де дана речовина інтенсивно поглинає світло.

Згадаємо, що показник заломлення немагнітної оптично прозорої речовини визначається за формулою

$$n = \sqrt{\varepsilon},$$

де  $\varepsilon$  – діелектрична проникність цієї речовини. Тоді очевидно, що явище дисперсії, або залежність показника заломлення від довжини хвилі, є наслідком залежності діелектричної проникності тієї чи іншої речовини від довжини хвилі світла. Саме завдяки такій залежності можна у лабораторних умовах спостерігати відкрите Ньютоном явище штучного утворення райдуги.

### 5.2.1. Електронна теорія дисперсії світла

Зрозуміло, що пояснення явища дисперсії світла слід шукати у природі мікроскопічної взаємодії електромагнітного поля з речовиною. Зокрема, під дією електричного поля хвилі виникає залежність від довжини хвилі електричної поляризації речовини, що обумовлено відносним зміщенням зв'язаних зарядів різних знаків. Величина такої поляризації визначається діелектричною проникністю  $\varepsilon(\lambda)$ , знаючи яку легко обчислити показник заломлення  $n(\lambda)$ .

З електрики відомо, що діелектрична проникність пропорційна діелектричній сприйнятливості,

$$\varepsilon(\lambda) = 1 + \varepsilon_0 \chi(\lambda),$$

де  $\chi(\lambda)$  – діелектрична сприйнятливість. Діелектрична сприйнятливість виступає коефіцієнтом пропорційності між вектором поляризації  $\vec{P}(t)$  та вектором напруженості діючого електричного поля  $\vec{E}(t)$ :

$$\vec{P}(t) = \varepsilon_0 \chi \vec{E}(t),$$

а тому вираз для електричної проникності можна записати у вигляді

$$\varepsilon = 1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E},$$

де  $P = |\vec{P}(t)|$  та  $E = |\vec{E}(t)|$ , який прямо свідчить, що  $\vec{P} = \vec{P}(\lambda)$ .

Для знаходження діелектричної проникності треба знайти відношення величин об'ємної поляризації до напруженості електричного поля, що визвало цю поляризацію.

Електромагнітні хвилі оптичного діапазону мають настільки високі частоти коливань, що під дією електричного поля таких хвиль встигають зміщуватися і рухатися навколо свого рівноважного положення лише найбільш легкі частинки, якими у будь-якому середовищі є електрони. Подібні коливні зміщення призводять до утворення атомних дипольних моментів, величина яких дорівнює  $\vec{p} = -e\vec{r}$ , де  $e$  – заряд електрона, а  $\vec{r}$  –

вектор його зміщення навколо нерухомого ядра атому. Тут враховано, що вектор дипольного моменту пропорційний вектору плеча диполя, який визначає положення додатного заряду відносно від'ємного заряду, тому у формулі для дипольного моменту з'явився мінус. Об'ємна густина поляризації тим більша, чим більша густина таких диполів, тобто

$$\vec{P} = N_{\text{dun}} \vec{p} = -N_{\text{dun}} e \vec{r},$$

де  $N_{\text{dun}}$  – кількість диполів в одиниці об'єму. Будемо вважати, що під впливом поля хвилі зміщуються тільки зовнішні електрони атомів, бо вони найслабкіше зв'язані з їх ядрами. За такого наближення число  $N_{\text{dun}}$  є пропорційним концентрації атомів у діелектрику.

Вектор напруженості електричного поля у будь-якій точці речовини змінюється за гармонічним законом  $\vec{E}(t) = \vec{E}_{\text{max}} \cos \omega t$ . На електрон атома в електричному полі діє сила  $\vec{F} = q\vec{E} = -e\vec{E}$ , де знову враховано, що заряд електрона від'ємний.

Отже, під час хвильового процесу на електрон буде діяти періодична сила

$$\vec{F} = -e\vec{E}_{\text{max}} \cos \omega t,$$

за рахунок якої електрон здійснюватиме вимушені коливання.

Рівняння руху електрона має вигляд:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -k_{\text{am}} \vec{r} - e\vec{E}_{\text{max}} \cos \omega t,$$

де  $m$  – маса електрона,  $-k_{\text{am}} \vec{r}$  – квазіупругна сила, яка прагне повернути електрон до його положення рівноваги в атомі і яку вважаємо пропорційною вектору зміщення,  $k_{\text{am}}$  – коефіцієнт ефективної жорсткості, визначається другою похідною потенціальної енергії електрона в атомі.

Після ділення цього рівняння на масу отримаємо диференціальне рівняння вимушених коливань:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \omega_0^2 \vec{r} = -\frac{e\vec{E}_{\text{max}}}{m} \cos \omega t,$$

де введено позначення  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_{\text{am}}}{m}}$  для частоти власних коливань електрона.

Будемо шукати розв'язок цього рівняння у вигляді функції

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_{\text{max}} \cos \omega t.$$

При її підстановці у диференціальне рівняння отримаємо звичайне лінійне рівняння, з якого знайдемо величину невідомої амплітуди:

$$\vec{r}_{\max} = -\frac{e\vec{E}_{\max}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Таким чином, під дією гармонічного електричного поля хвилі електрон атома здійснює періодичні зміщення, величина яких пропорційна вектору напруженості електричного поля. Повна залежність коливального руху електрону має форму:

$$\vec{r}(t) = -\frac{e\vec{E}_{\max}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t.$$

Розрахуємо тепер вектор об'ємної поляризації, який пропорційний напруженості електричного поля і залежить від частоти хвилі, а саме:

$$\vec{P}(t) = -N_{\text{dun}} e \vec{r} = \frac{N_{\text{dun}} e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \vec{E}(t).$$

Звідси отримуємо шукане відношення величини поляризації до величини напруженості електричного поля хвилі залежить від частоти хвилі:

$$\frac{P}{E} = \frac{N_{\text{dun}} e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Підставимо це співвідношення до наведеного вище виразу для діелектричної проникності. В результаті, приходимо до висновку, що величина діелектричної проникності залежить від частоти світла і описується формулою

$$\varepsilon = \varepsilon(\omega) = 1 + \frac{N_{\text{dun}} e^2}{m \varepsilon_0 (\omega_0^2 - \omega^2)} = 1 + \frac{N_{\text{dun}} e^2 \lambda_0^2 \lambda^2}{4 \pi^2 m c^2 \varepsilon_0 (\lambda^2 - \lambda_0^2)},$$

яку ми переписали через залежність від довжини хвилі, скориставшись

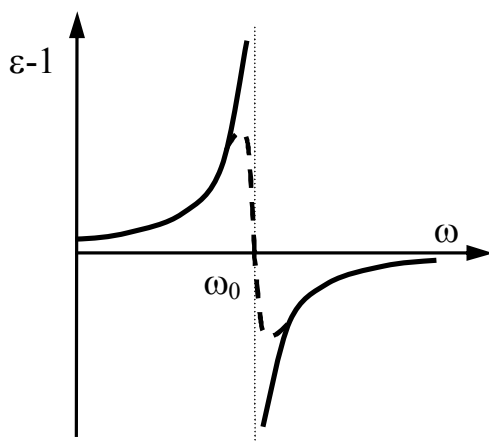


Рис. 59

співвідношенням  $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$  і тим самим

довівши, що з фізичної точки зору залежність  $\varepsilon(\omega)$  тотожна залежності  $\varepsilon(\lambda)$ .

Зауважимо, що, як правило, прийнято експериментально вимірювати саме залежність  $\varepsilon(\omega)$ .

На рис. 59 наведено графік залежності величини  $\varepsilon(\omega) - 1$  від частоти хвилі (суцільні криві). З нього видно, що при  $\omega < \omega_0$  та при  $\omega > \omega_0$ , діелектрична

проникність зростає з частотою, а отже зменшується при збільшенні довжини



хвилі. Це безпосередньо відповідає поведінці показника заломлення при нормальній дисперсії, коли  $\frac{dn(\lambda)}{d\lambda} < 0$ .

Коли ж  $\omega \rightarrow \omega_0$ , відбувається необмежене зростання (з боку  $\omega < \omega_0$ ) або необмежене падіння (з боку  $\omega > \omega_0$ ) функції  $\varepsilon(\omega)$ , що є наслідком резонансного зростання амплітуди коливань електронів. Такий процес вимагає втрат енергії. Оскільки вимушені коливання електронів відбуваються під дією електричного поля хвилі, то резонансне зростання амплітуди коливань електронів може здійснюватись лише за рахунок енергії хвилі. Отже, в околі власної частоти  $\omega_0$  відбувається інтенсивне поглинання енергії світлової хвилі.

Вище, при розгляді руху електрона, було знехтувано дією сили тертя (точніше, релаксаційними процесами, що мають місце у будь-якому середовищі), через яку коливання згасають. Релаксація негайно обумовить зникнення нефізичної розбіжності та забезпечить неперервний хід залежності  $\varepsilon(\omega)$  при проходженні через резонансну частоту (ця ділянка на рис. 59 зображена пунктиром). На спадаючій ділянці пунктирної кривої діелектрична проникність зменшується при зростанні  $\omega$  (відповідно, вона зростатиме при збільшенні  $\lambda$ ), що відповідає явищу аномальної дисперсії, або, що легко перевірити, умові  $\frac{dv(\lambda)}{d\lambda} < 0$ .

### 5.2.2. Групова швидкість

Гармонічна хвиля є ідеалізованим поняттям, бо необмежено займає весь простір, в якому існує, а джерело, що її випромінює, робить це нескінчений час. В реальності процес випромінювання хвиль відбувається певний скінчений проміжок часу і поля хвилі відмінні від нуля лише в обмеженій області простору. Це, в свою чергу, означає, що будь-яке періодичне в просторі та часі електромагнітне поле складається не з однієї, а з декількох хвиль, або так званої групи хвиль.

Групу хвиль, яка в певний момент часу займає обмежену область простору, називають *хвильовим пакетом*.

При поширенні такого пакету у вакуумі, показник заломлення якого не залежить від частоти і становить  $n=1$ , кожна з хвиль пакету розповсюджується з однаковою швидкістю  $c$ . Тому якою б не була форма

хвильового пакету при його поширенні у вакуумі вона залишатиметься незмінною.

Можна також стверджувати, що коли пакет поширюється у середовищі, залежністю показника заломлення якого від частоти можна знехтувати, то в цьому випадку (і з точністю до такого припущення) форма пакету також змінюватися не буде, а швидкість його поширення дорівнюватиме фазовій швидкості хвиль у цьому середовищі:

$$v = v_\phi = \frac{\omega}{k},$$

де  $\omega$  – частота, а  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  – хвильове число.

Якщо ж середовище має дисперсію, якою знехтувати неможливо, то для показника його заломлення  $n(\lambda)$  необхідно явно враховувати залежність від довжини хвилі. З такої залежності прямо випливає, що хвилі пакету, які мають різні частоти (або, що теж саме, різні довжини хвиль), матимуть і різні фазові швидкості. Тому в процесі поширення в такому середовищі пакет неминуче змінюватиме свою форму.

Розглянемо як найпростіший приклад пакету, що містить лише дві хвилі з однаковими значеннями амплітудних векторів напруженостей їх електричних полів, які мають близькі значення частот і поширюються вздовж осі  $X$ . Нехай рівняння першої та другої хвиль описуються виразами

$$\vec{E}_1(x,t) = \vec{E}_{\max} \cos(\omega t - kx), \quad \vec{E}_2(x,t) = \vec{E}_{\max} \cos[(\omega + \Delta\omega)t - (k + \Delta k)x],$$

де  $\omega$ ,  $\omega + \Delta\omega$  – частоти хвиль, а  $k$ ,  $k + \Delta k$  – хвильові вектори, причому  $\Delta\omega \ll \omega$ ,  $\Delta k \ll k$ .

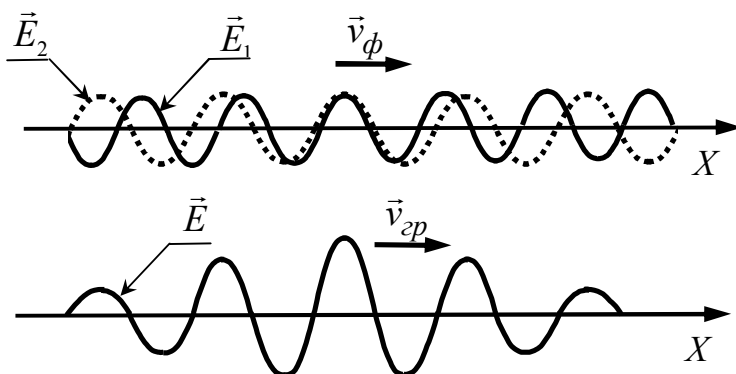


Рис. 60

На рис. 60 показано просторовий (для фіксованого часу) розподіл напруженості електричного поля при складанні полів  $\vec{E}(x,t)$  цих хвиль. Видно, що при складанні хвиль утворюється максимум з напруженістю електричного поля  $2\vec{E}_{\max}$ .

*Групова швидкість*

відповідає швидкості поширення (руху) саме цього максимуму. Дійсно при складанні хвиль отримаємо загальне поле у вигляді

$$\begin{aligned}\vec{E}(x,t) &= \vec{E}_1(x,t) + \vec{E}_2(x,t) = \vec{E}_{\max} \{ \cos(\omega t - kx) + \cos[(\omega + \Delta\omega)t - (k + \Delta k)x] \} = \\ &= 2\vec{E}_{\max} \cos \frac{\Delta\omega t - \Delta k x}{2} \cos[(\omega + \frac{1}{2}\Delta\omega)t - (k + \frac{1}{2}\Delta k)x].\end{aligned}$$

Звідси видно, що максимальне значення напруженості електричного поля хвиль відповідає очевидній умові  $\cos \frac{\Delta\omega t - \Delta k x}{2} = 1$ , що відповідає рівності

$$\Delta\omega t - \Delta k x = 0,$$

де  $x$  – біжуча координата максимуму результуючої хвилі в момент часу  $t$ . Хід часу обумовлює зміну цієї координати, або положення цього максимуму. В результаті, він пересувається у просторі зі своєю швидкістю. Швидкість  $\vec{v}_{gp}$  руху максимуму, визначається відношенням

$$v_{gp} = \frac{x}{t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}.$$

За умови  $\Delta\omega \rightarrow 0$  та  $\Delta k \rightarrow 0$  бачимо, що групова швидкість визначається як похідна

$$v_{gp} = \frac{d\omega}{dk},$$

або в загальному випадку  $\vec{v}_{gp} = \nabla_{\vec{k}} \omega(\vec{k})$ , де  $\omega(\vec{k})$  – функція, що задає залежність частоти хвилі від її хвильового вектора в конкретному середовищі.

Врахуємо тепер, що групова швидкість та хвильове число в електромагнітній хвилі зв'язані між собою дисперсійним співвідношенням  $\omega = vk$ . Легко, що з використанням цього зв'язку групову швидкість можна записати у вигляді

$$v_{gp} = \frac{d(vk)}{dk} = v + k \frac{dv}{dk}.$$

Хвильове число обернено пропорційне до довжини хвилі  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , а тому  $dk = -2\pi \frac{d\lambda}{\lambda^2}$ . Підставимо останні співвідношення у вираз для групової швидкості:

$$v_{gp} = v + \frac{2\pi}{\lambda} \frac{dv}{-2\pi \frac{d\lambda}{\lambda^2}},$$

в результаті чого приходимо до формули, яку називають *формулою Релея*

$$v_{gp} = v_{gp}^{(\lambda)} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}.$$

У вакуумі швидкість електромагнітних хвиль дорівнює їх фазовій швидкості  $v = v_{\phi} = c$ , тобто не залежить від довжини хвилі, тому  $\frac{dv}{d\lambda} = 0$ , а отже групова швидкість світла у вакуумі постійна,  $v_{gp} = c$ .

Для випадку нормальної дисперсії, коли  $\frac{dv}{d\lambda} > 0$ , групова швидкість менша за фазову,  $v_{gp} < v$ . Для випадку аномальної дисперсії  $\frac{dv}{d\lambda} < 0$ , навпаки, групова швидкість більша за фазову,  $v_{gp} > v$ . У деяких випадках дуже значної аномальної дисперсії може навіть так трапитися, що розрахована величина групової швидкості виявиться більшою за швидкість світла у вакуумі, що лише свідчитиме про недостатність застосованого наближення і необхідність більш акуратного розрахунку похідної  $\frac{dv}{d\lambda}$ . Проте фізично більш цікавою є протилежна ситуація, коли групова швидкість наближається до нуля, тобто світло, буцімто зупиняється. Такі ситуації дійсно реалізуються у ряді конденсованих середовищ поблизу резонансів, коли можна спостерігати уповільнення розповсюдження електромагнітних сигналів на декілька порядків.

### 5.3. Інтерференція світла

*Інтерференцією світла* називають явище взаємного підсилення та ослаблення інтенсивності світла при накладанні двох чи більшої кількості когерентних хвиль. При інтерференції відбувається просторовий перерозподіл енергії світла, і на екрані можуть утворюватися області більш освітлені, яким відповідають максимуми інтенсивності світла, і менш освітлені області, де інтенсивність світла виявляється мінімальною. Таку регулярну сукупність максимумів та мінімумів просторового розподілу інтенсивності світла, викликану явищем інтерференції, називають *інтерференційною картиною*. Як правило, вона має вигляд майже періодичної послідовності світлих та темних смужок на екрані або – в залежності від умов експерименту – послідовності темних та світлих кілець, що по чергово охоплюють одне одного.

Світло є електромагнітною хвилею, густина енергії якої складається з густин енергії електричного та магнітного полів,  $e = e_{ел} + e_{маг}$ , причому густини енергії електричного поля і енергії магнітного поля хвилі є рівними між собою:  $e_{ел} = e_{маг}$ . Перенесення енергії світловою хвилею описують інтенсивністю, яка визначається добутком середньої енергії електромагнітного поля хвилі на швидкість її поширення, або  $I = \bar{e}v$ . В цьому виразі середнє значення енергії  $\bar{e}$  вміщує енергію як електричного, так і магнітного поля хвилі.

Проте дія електричного поля хвилі на електрони, зазвичай, значно сильніша від дії магнітного поля. Дійсно, на електрон з боку електромагнітного поля діє сила

$$\vec{F} = -e\vec{E} - e[\vec{v}\vec{B}],$$

де враховано, що заряд електрона від'ємний і рівний  $-e$ ,  $\vec{E}$  – вектор напруженості електричного поля хвилі,  $\vec{v}$  – швидкість електрону,  $\vec{B}$  – вектор індукції магнітного поля хвилі. Врахуємо, що  $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$ , де  $\vec{H}$  – вектор напруженості магнітного поля, та отримаємо

$$\vec{F} = -e\vec{E} - e\mu_0[\vec{v}\vec{H}].$$

Миттєві значення напруженостей електричного та магнітного полів хвилі задовольняють виразу  $\sqrt{\epsilon_0}E = \sqrt{\mu_0}H$ , а швидкість світла –  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$ .

З використанням цих співвідношень легко переконатися, що величина внеску магнітної складової до повної сили  $\vec{F}$  значно менша за внесок її електричної складової:

$$e\mu_0|[\vec{v}\vec{H}]| \leq e\mu_0vH = ev\sqrt{\mu_0\epsilon_0}E = e\frac{v}{c}E \ll eE,$$

оскільки в конденсованих речовинах швидкості електронів ( $v \sim 10^6$  м/с) значно менші за швидкість світла  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с, тобто  $\frac{v}{c} \sim 10^{-2} \ll 1$ .

Досліди підтверджують цей висновок. Наприклад, явище фотоефекту, фотохімічні реакції, дія світла на око, фотолюмінесценція тощо, визначаються лише дією вектора напруженості  $\vec{E}$  електричного поля хвилі, тому цей вектор інколи називають *світловим вектором*.

Очевидно, що при явищі інтерференції спостережуваним і діючим може вважатися також саме світловий вектор. Таким чином, ослаблення чи підсилення освітленості, яке спостерігається при інтерференції, мають бути

пояснені зменшенням чи збільшенням результуючої напруженості (точніше, її амплітуди) електричного поля при накладанні двох хвиль.

### 5.3.1. Когерентність

Розглянемо накладання електричних полів двох світлових хвиль. Для спрощення припустимо, що вектори напруженості їх електричних полів коливаються в однаковому напрямку (вздовж однієї осі). У загальному ж випадку коливання векторів напруженості електричного поля обох хвиль можна записати у вигляді

$$\vec{E}_1(t) = \vec{E}_{\max}^{(1)} \cos(\omega_1 t + \varphi_1^{(0)}), \quad \vec{E}_2(t) = \vec{E}_{\max}^{(2)} \cos(\omega_2 t + \varphi_2^{(0)}),$$

де  $\vec{E}_{\max}^{(1)}$ ,  $\vec{E}_{\max}^{(2)}$  – амплітуди напруженостей обох полів, причому прийнято, що  $\vec{E}_{\max}^{(1)} \uparrow \uparrow \vec{E}_{\max}^{(2)}$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  – частоти обох хвиль,  $\varphi_1^{(0)}$ ,  $\varphi_2^{(0)}$  – початкові фази коливань полів у вибраній точці простору. Відповідно, фази цих коливань дорівнюють  $\varphi_1 = \omega_1 t + \varphi_1^{(0)}$ ,  $\varphi_2 = \omega_2 t + \varphi_2^{(0)}$ .

З методу векторних діаграм знаємо, що при складанні двох незалежних коливань, квадрат амплітуди результуючого коливання може бути записаний у вигляді:

$$E_{\max}^2 = \left| E_{\max}^{(1)} \right|^2 + \left| E_{\max}^{(2)} \right|^2 + 2 \left| E_{\max}^{(1)} \right| \left| E_{\max}^{(2)} \right| \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Врахуємо тепер, що інтенсивність хвилі прямо пропорційна квадрату амплітуди:  $I \sim E_{\max}^2$ , причому  $I_1 \sim \left| E_{\max}^{(1)} \right|^2$ ,  $I_2 \sim \left| E_{\max}^{(2)} \right|^2$ . Отже, знаходимо, що

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_1^{(0)} - \varphi_2^{(0)}).$$

Як зазначалося, частоти світлових хвиль надзвичайно великі. Тому коли  $\omega_1 \neq \omega_2$  усереднення косинуса за час  $t \gg \frac{1}{|\omega_1 - \omega_2|}$  фактично зануляє відповідний доданок у правій частині цього виразу. Це означає, що інтенсивність світла при накладанні хвиль від двох джерел з різними частотами визначається сумою інтенсивностей цих хвиль:

$$I = I_1 + I_2.$$

Таким чином, приходимо до важливого висновку, що не відбувається взаємного підсилення або ослаблення, яке проявляє себе в утворенні максимумів та мінімумів інтенсивності, при накладанні двох хвиль з різними частотами світла.

Більше того, експерименти свідчать, що при накладанні світла від двох звичайних джерел з однаковими частотами  $\omega_1 = \omega_2$ , чи навіть при накладанні світла від двох різних ділянок одного джерела, інтерференція не спостерігається, а результуюча інтенсивність дорівнює сумі інтенсивностей і просторового підсилення-ослаблення інтенсивності не спостерігається. Причина цього полягає в особливостях механізмів випромінювання світла атомами чи молекулами. По-перше, атоми випромінюють світло самочинно, а по-друге, таке випромінювання здійснюється протягом дуже малого

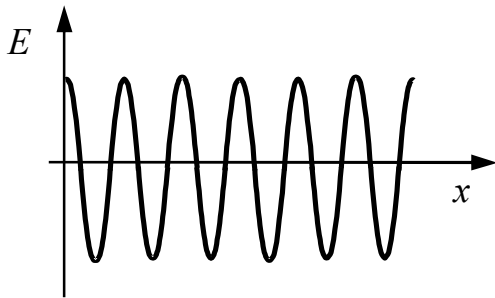


Рис. 61

відрізку часу  $\tau \sim 10^{-8} - 10^{-7}$  с. Отже, випромінене джерелами світло представляє собою набір короточасних хвильових пакетів, які називають *цугами* хвиль (на рис. 61 зображено такий цуг). В результаті такого процесу випромінювання початкові фази  $\varphi_1^{(0)}$ ,  $\varphi_2^{(0)}$  коливань полів обох хвиль будуть випадковими функціями від часу і

інтерференція не проявлятиметься. Внаслідок хаотичності різниці фаз обох хвиль усереднення косинусу в правій частині виразу для інтенсивності дасть нуль. Тому і в цьому випадку результуюча інтенсивність світла визначається сумою інтенсивностей обох хвиль.

Таким чином, приходимо до висновку, що при накладанні двох хвиль інтерференція буде спостерігатися тільки в тому випадку, коли хвилі мають однакову частоту, а різниця їх фаз не залежить від часу. Такі хвилі називаються *когерентними*. Когерентними називають і джерела, що випромінюють когерентні хвилі.

Для таких хвиль інтенсивність світла має визначатися за формулою

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi_1^{(0)} - \varphi_2^{(0)}),$$

де  $\varphi_1^{(0)} - \varphi_2^{(0)} = \text{const}$ .

Легко бачити, що у точці інтерференційного максимуму інтенсивність світла описується виразом:

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2,$$

який враховує, що в точках найбільшої освітленості вектори напруженостей обох хвиль коливаються синфазно, тобто  $\varphi_1^{(0)} - \varphi_2^{(0)} = 2m\pi$ , де  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

В точках інтерференційного мінімуму інтенсивність світла відповідно зменшується:

$$I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2,$$

в якому, навпаки, враховано, що в точках найменшої освітленості вектори напруженостей обох хвиль коливаються протифазно, коли  $\varphi_1^{(0)} - \varphi_2^{(0)} = (2m+1)\pi$ , де  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Зауважимо, що гармонічні хвилі з однаковими частотами та з фіксованими напрямками векторів напруженості електричного поля завжди є когерентними.

### 5.3.2. Інтерференція двох плоских когерентних гармонічних хвиль

Розглянемо два джерела світла, які на рис. 62 позначені  $S_1$  та  $S_2$ . Припустимо, що ці джерела випромінюють гармонічні плоскі хвилі з однаковими частотами. Покладемо, що у хвиль однакові амплітудні напруженості електричних полів, тобто рівні модулі цих векторів, і вони лежать вздовж однієї осі, яка перпендикулярна до площини рисунку. Такі хвилі є за означенням когерентними.

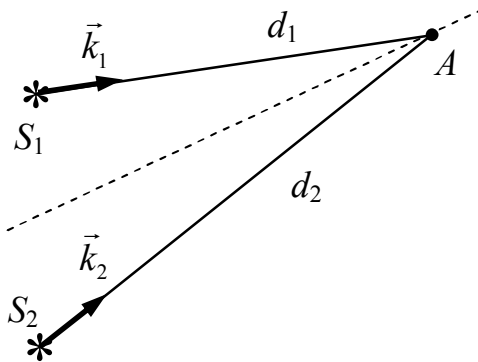


Рис. 62

Припустимо, що вони поширюються у середовищах з різними показниками заломлення: перша – у середовищі з

показником заломлення  $n_1$ , а друга – у середовищі з показником заломлення  $n_2$  (межа між цими середовищами на рис. 62 умовно позначена пунктиром). Хвильові числа  $k_1$  і  $k_2$  цих хвиль будуть різними (див. рис. 62), саме внаслідок припущення, що  $n_1 \neq n_2$ . Крім того, хвильові вектори  $\vec{k}_1$  і  $\vec{k}_2$  обох хвиль мають різні напрямки, через що хвилі будуть накладатися.

Розрахуємо вектор напруженості електричного поля в точці  $A$ , яка знаходиться на відстані  $d_1$  від джерела  $S_1$  та на відстані  $d_2$  від джерела  $S_2$ . Запишемо вектор  $\vec{E}(A, t)$  результуючої напруженості в цій точці:

$$\vec{E}(A, t) = \vec{E}_{\max} \cos(\omega t - k_1 d_1) + \vec{E}_{\max} \cos(\omega t - k_2 d_2),$$

де припускається, що початкові фази обох хвиль дорівнюють нулеві.

Зважаючи на те, що світлові вектори обох хвиль колінеарні, перепишемо цю суму для проекції результуючого електричного поля хвилі:

$$E(A, t) = 2E_{\max} \cos\left(\frac{k_2 d_2 - k_1 d_1}{2}\right) \cos\left(\omega t - \frac{k_2 d_2 + k_1 d_1}{2}\right).$$



Звідси знаходимо, що при накладанні в точці  $A$  двох когерентних плоских хвиль амплітудне значення поля хвилі має вигляд

$$E_{\max}(A) = 2E_{\max} \left| \cos \frac{k_2 d_2 - k_1 d_1}{2} \right|.$$

Врахуємо, що  $k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{2\pi n_1}{\lambda}$ , а  $k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} = \frac{2\pi n_2}{\lambda}$ , де  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  – довжини цих хвиль, а  $\lambda$  – довжина цих хвиль, якби вони поширювалися у вакуумі.

В результаті, легко перевірити, що остаточний вираз для амплітуди коливань поля у точці  $A$  набуде вигляду:

$$E_{\max}(A) = 2E_{\max} \left| \cos \frac{\pi(n_2 d_2 - n_1 d_1)}{\lambda} \right|.$$

Видно, що величина амплітуди результуючого коливання залежить від різниці добутків показників заломлення на відстані, що проходять хвилі. Цю величину називають *оптичною різницею ходу* і визначають як величину

$$\Delta = n_2 d_2 - n_1 d_1.$$

Зрозуміло, що для одного середовища  $\Delta = n(d_2 - d_1)$ .

Неважко пересвідчитись, що у точці  $A$  спостерігатиметься інтерференційний максимум, якщо модуль косинусу у виразі для амплітуди буде максимальним, тобто коли виконується рівність

$$\frac{\pi\Delta}{\lambda} = m\pi,$$

де  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  – як завжди ціле число.

Отже, інтерференційний максимум відповідає такій оптичній різниці ходу двох променів, коли вона кратна цілому числу довжин хвиль цих променів у вакуумі або

$$\Delta = m\lambda.$$

Навпаки, якщо цей косинус дорівнюватиме нулю, то на інтерференційній картині сформується мінімум поля. Умова такого мінімуму визначається співвідношенням

$$\frac{\pi\Delta}{\lambda} = \frac{\pi}{2} + m\pi.$$

Звідси знаходимо, що оптична різниця ходу, для якої виникає інтерференційний мінімум, має бути кратною непарній кількості півдовжин хвиль

$$\Delta = \frac{2m+1}{2} \lambda.$$

Оскільки обрана нами точка  $A$  у просторі довільна, то можна зробити висновок, що змінюючи точку спостереження інтерференційної картини в цілому, будемо переходити від місць з відносно більшою (максимальною) освітленістю до місць з мінімальною освітленістю. Решта точок буде мати проміжну освітленість.

### 5.3.3. Дослід Юнга

На рис. 63 наведено схему досліду для спостереження інтерференції, який був запропонований англійським оптиком Юнгом. Схема включає точкове джерело  $S$  монохроматичного світла, непрозору площину та екран. В непрозорій площині зроблено два маленьких отвори. Вони, внаслідок їх

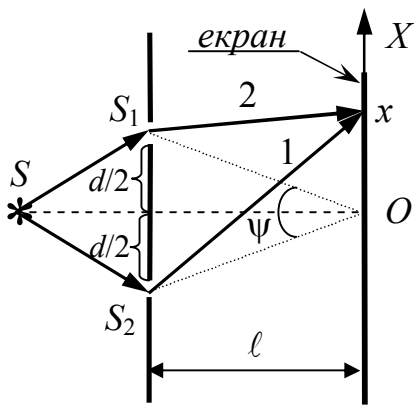


Рис.63

освітлення джерелом  $S$ , самі починають грати роль джерел світла. Позначимо їх  $S_1$  та  $S_2$ . Оскільки джерело  $S$  є рівновіддаленим від отворів і лежить на перпендикулярі до непрозорої площини, який проведено до середини відрізка, що сполучає ці отвори, то «нові» джерела виявляються точковими та когерентними. Відстань між  $S_1$  та  $S_2$  на схемі позначено  $d$ . На відносно великій відстані  $\ell$  від непрозорої площини розташовано плоский

екран. Площина екрану паралельна непрозорій площині. Світлові промені від джерел  $S_1$  та  $S_2$  утворюють на екрані інтерференційну картину.

Знайдемо різницю ходу для двох довільних променів 1 та 2, які поширюються від джерел  $S_1$  та  $S_2$  до екрану. Введемо координатну вісь  $OX$ , що лежить в площині екрану, є паралельною до відрізка  $S_1S_2$  і проходить через точку  $O$ , яка, в свою чергу, є початком відліку і лежить на серединному перпендикулярі до цього відрізка. Координату довільної точки на екрані, до якої можуть сходитися обидва промені 1 та 2, позначимо  $x$ .

Легко бачити, що оптична різниця ходу цих променів визначатиметься по суті лише різницею відстаней, оскільки промені поширюються в одному середовищі:

$$\frac{\Delta}{n} = \sqrt{\ell^2 + \left(\frac{d}{2} + x\right)^2} - \sqrt{\ell^2 + \left(\frac{d}{2} - x\right)^2},$$

де  $n$  – показник заломлення цього середовища (якщо це не повітря, то звичайно  $n \neq 1$ ).

Врахуємо, що за припущенням  $x \ll \ell$ ,  $d \ll \ell$ . Тоді, скориставшись цим, різницю ходу можна суттєво спростити, звільнившись від коренів:

$$\begin{aligned}\Delta &= n\ell\left(1 + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{d}{2} + x\right)^2}{\ell^2}\right) - n\ell\left(1 + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{d}{2} - x\right)^2}{\ell^2}\right) = \\ &= \frac{n}{2\ell} \left(\frac{d}{2} + x\right)^2 - \frac{n}{2\ell} \left(\frac{d}{2} - x\right)^2 = \frac{nx d}{\ell}.\end{aligned}$$

Знову-таки при накладанні променів на екрані сформується серія освітлених та затемнених смуг. При цьому максимум, або освітлена смуга, буде спостерігатися, коли знайдена різниця ходу кратна цілому числу  $m$  довжин хвиль:

$$\Delta = \lambda m.$$

Звідси приходимо до виразу положення  $m$ -го інтерференційного максимуму:

$$x_{\max}^{(m)} = \frac{\lambda \ell}{nd} m.$$

З іншого боку, мінімум інтерференційної картини, або затемнене місце, буде розташоване у тих точках екрану, для яких різниця ходу кратна непарній кількості півдовжин хвиль:

$$\Delta = \frac{\lambda}{2} (2m + 1).$$

Тим самим отримуємо положення точки  $m$ -го мінімуму

$$x_{\min}^{(m)} = \frac{\lambda \ell}{2nd} (2m + 1).$$

*Шириною інтервенційної смуги* називають відстань між сусідніми мінімумами (або максимумами). З останніх формул знаходимо, що в досліді Юнга ширина інтерференційної смуги визначається виразом

$$\Delta x_{\lambda} = x_{\min}^{(m)} - x_{\min}^{(m-1)} = \frac{\lambda \ell}{nd},$$

який не залежить від  $m$ , що свідчить про періодичність інтерференційної картини на екрані.

З рис. 63 видно, що виконується геометричне співвідношення  $d/2\ell = \operatorname{tg}(\psi/2)$ . Для нерівності  $d \ll \ell$  можна покласти  $d/\ell = \psi$ . Тоді вираз для ширини інтерференційної смуги набуває вигляду

$$\Delta x_{\lambda} = \frac{\lambda}{n\psi},$$

де  $\psi$  є кут, під яким з точки  $O$  видно випромінюючі джерела  $S_1$  та  $S_2$ .

З наведеної формули випливає також, що для збільшення ширини (періоду) інтерференційної смуги слід зменшувати кут  $\psi$ , тобто віддаляти екран, і зближувати отвори.

Для отримання більш чіткої (з більш великою освітленістю) інтерференційної картини замість отворів на непрозорій площині використовують дві паралельні тонкі щілини.

Коли кут  $\psi$  малий, то амплітуди хвиль від джерел  $S_1$  та  $S_2$  майже не змінюються вздовж осі  $x$  (див рис. 63), і тому при розрахунку інтенсивності можна вважати, що амплітуди обох хвиль однакові. За умови виконання цього наближення квадрат амплітуди поля на екрані визначатиметься з виразу

$$E^2(x) = E_{\max}^2 + E_{\max}^2 + 2E_{\max}^2 \cos \frac{2\pi nxd}{\ell\lambda},$$

де  $E_{\max}$  – амплітуда електричного поля інтерферуєючих хвиль, а  $\frac{2\pi nxd}{\ell\lambda} = \varphi_1 - \varphi_2$  – різниця фаз цих хвиль при їх поширенні від отвору до екрану.

Здійснимо прості тригонометричні перетворення:

$$E^2(x) = 2E_{\max}^2 \left(1 + \cos \frac{2\pi nxd}{\ell\lambda}\right) = 4E_{\max}^2 \cos^2 \frac{\pi nxd}{\ell\lambda}$$

і врахуємо, що інтенсивність хвилі є прямо пропорційною квадрату амплітуди поля. Тоді негайно приходимо до виразу залежності інтенсивності світла на екрані від координати  $x$ :

$$I(x) = I_{\max} \cos^2 \frac{\pi nxd}{\ell\lambda}, \quad \text{або} \quad I(x) = I_{\max} \cos^2 \frac{\pi x}{\Delta x_{\lambda}},$$

де  $I_{\max}$  – інтенсивність світла у точці інтерференційного максимуму, а величина  $\frac{\ell\lambda}{nd}$  визначає просторовий період розподілу інтенсивності на екрані. Видно, що просторовий період розподілу інтенсивності дорівнює ширині інтерференційної смуги:  $\frac{\ell\lambda}{nd} = \Delta x_{\lambda}$ .

Можна також стверджувати, що оскільки у досліді Юнга джерело світла є монохроматичним, то спостережуване явище інтерференції, або

розподіл інтенсивності світла поблизу центру екрану, описується гармонічною функцією.

Зауважимо, що при розгляді інтерференції світлових хвиль не брався до уваги напрямок векторів напруженостей електричних полів хвиль, тобто фактично розглядалося скалярне наближення. Дійсно, з рис. 63 видно, що коли вектори електричних полів обох хвиль лежать у площині рисунку чи направлені перпендикулярно до нього, то їх сумарна інтенсивність на екрані буде різною. Проте використане наближення є виправданим, бо завжди виконуються нерівності  $\Delta x \ll \ell$  та  $\Delta x \ll d$ . А за таких умов врахування точного напрямку напруженостей електричного поля хвиль майже не впливає на остаточний результат розрахунку, що можна перевірити експериментально і що відповідні досліди підтверджують.

#### 5.3.4. Час когерентності, довжина когерентності

Як вже зазначалося, причиною відсутності інтерференції, навіть коли джерела випромінюють хвилі однакової частоти, є невизначеність їх фази, яка є наслідком того, що світло від звичайних джерел становить фактично сукупність окремих, не зв'язаних між собою, хвильових пакетів (цугів). Ближче за інші на гармонічні хвилі походить лазерне випромінювання, але навіть для нього неможливо не враховувати кінцеву просторову довжину таких цугів і присутність у їх складі хвиль з дещо різними частотами.

Припустимо для простоти, що накладаються лише дві гармонічні хвилі з однаковими амплітудами  $\vec{E}_{\max}$ , але з різними частотами  $\omega_1$  та  $\omega_2$  (менша та більша частоти цугу). При накладанні таких хвиль у довільній точці простору амплітудне значення результуючого поля буде змінюватися (див. пункт 1.19. Биття) за законом

$$E_{\max}(\omega_1, \omega_2) = 2E_{\max} \left| \cos \frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2} \right|.$$

Знайдемо інтервал часу  $\Delta t$ , у межах якого фаза часової залежності амплітуди змінюється на  $\pi$ , тобто

$$\frac{(\omega_2 - \omega_1)\Delta t}{2} = \pi.$$

Отже, в межах цього інтервалу часу відносна фаза коливань, що визначають сумарну амплітуду, змінюється від 0 до  $\pi$ . Час, рівний  $\Delta t$ , називають *часом когерентності*, позначаючи його  $t_{\text{ког}}$  і розраховуючи за формулою

$$t_{\text{ког}} = \frac{2\pi}{\Delta\omega},$$

де  $\Delta\omega$  – інтервал частот, який в загальному випадку задає ширину спектра світлових хвиль, що складають цуг.

Добуток часу когерентності  $\Delta t$  на швидкість світла називають *довжиною когерентності*. При проходженні цієї довжини фаза коливань у цугі зміниться на  $\pi$ . Згідно з цим означенням довжина когерентності є не що інше, як

$$\ell_{\text{ког}} = \frac{2\pi c}{\Delta\omega}.$$

Врахуємо, що  $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ . Звідси маємо, що  $\Delta\omega = \frac{2\pi c \Delta\lambda}{\lambda^2}$ , де  $\Delta\lambda$  – інтервал довжин хвиль, що безпосередньо відповідає інтервалу  $\Delta\omega$  їх частот.

В результаті, приходимо до дещо іншого і інколи більш зручного виразу для довжини когерентності, а саме:

$$\ell_{\text{ког}} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}.$$

Повернемося до досліду Юнга (див. рис. 63). Нехай на обидва отвори потрапляє світло, спектр довжин хвиль якого характеризується інтервалом  $\Delta\lambda$ . Розглянемо дві крайні з цього діапазону хвилі, довжини хвиль яких  $\lambda$  та  $\lambda + \Delta\lambda$ . Ці хвилі будуть, як ми знаємо, утворювати незалежні інтерференційні картини, що матимуть різні ширини інтерференційних смуг:

$$\Delta x_{\lambda} = \frac{\lambda}{n\psi}, \quad \Delta x_{\lambda+\Delta\lambda} = \frac{\lambda + \Delta\lambda}{n\psi},$$

де  $n$  – показник заломлення.

Оскільки  $\Delta x_{\lambda+\Delta\lambda} > \Delta x_{\lambda}$ , то різниця ширини інтерференційних смуг для таких хвиль складатиме

$$\Delta x_{\lambda+\Delta\lambda} - \Delta x_{\lambda} = \frac{\Delta\lambda}{n\psi}.$$

Очевидно, що вона обумовить відносний зсув положення кожного з відповідних інтерференційних максимумів, через що світлі й темні інтерференційні смуги будуть накладатися, або, як кажуть, „розмиватися”. При цьому, чим більший номер  $m$  становить інтерференційний максимум (мінімум), тим більшим буде таке неспівпадіння між інтерференційними смугами.

В результаті, при деякому значенні  $m+1$  інтерференційний максимум хвилі з довжиною  $\lambda$  співпадає з  $m$  інтерференційним максимумом з

довжиною  $\lambda + \Delta\lambda$ . В такому випадку інтерференційна картина розмиється повністю, тобто фактично зникне. Запишемо умову співпадіння положень  $m$ -го максимуму однієї інтерференційної картини ( $m + 1$ )-им максимумом іншої, що знаменує поступовий і плавний відносний зсув інтерференційних картин цих хвиль:

$$m\Delta x_{\lambda+\Delta\lambda} = (m+1)\Delta x_{\lambda}$$

З неї отримуємо

$$m(\Delta x_{\lambda+\Delta\lambda} - \Delta x_{\lambda}) = \Delta x_{\lambda}.$$

Останню формулу для випадку досліду Юнга можна переписати у спосіб:

$$m \frac{\Delta\lambda}{m\psi} = \frac{\lambda}{m\psi}.$$

Цей вираз свідчить, що внаслідок немонохроматичності випромінювання кількість інтерференційних максимумів обмежується граничним значенням  $m_{\text{гран}}$ , яке можна пов'язати з довжиною когерентності. Дійсно, маємо:

$$m_{\text{гран}} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\lambda^2}{\lambda\Delta\lambda} = \frac{\ell_{\text{ког}}}{\lambda}.$$

З останнього виразу випливає очевидний результат, за яким граничному номеру  $m_{\text{гран}}$  спостереження інтерференційної картини відповідає оптична різниця ходу променів, що дорівнює довжині когерентності, помноженій на показник заломлення,

$$\Delta = m_{\text{гран}}\lambda = \ell_{\text{ког}}.$$

Зробимо оцінки: так, у сонячного світла довжина когерентності дуже мала і є порівняною з довжинами хвиль світлового діапазону, тому у досліді Юнга з білим сонячним світлом інтерференційна картина не формується (бо, як легко перевірити,  $m_{\text{гран}} \sim 1$ ). Але якщо використовувати випромінювання лазерів, для якого довжина когерентності може бути значно більшою і сягати  $\ell_{\text{ког}} \sim 10^3$  м, тоді у досліді Юнга вдається спостерігати чітку інтерференційну картину.

### 5.3.5. Приклади спостереження інтерференції: дзеркало Ллойда, біпризма Френеля

Найпростіша схема спостереження явища інтерференції (так звана схема дзеркала Ллойда) спирається на використання плоского дзеркала,

поряд з яким розташоване точкове джерело світла  $S$  (див. рис. 64). Інтерференційна картина на екрані утворюється завдяки накладанню світлових хвиль, що йдуть безпосередньо від джерела та хвиль, відбитих від дзеркала Ллойда. Такі хвилі, зрозуміло, мають бути когерентними і на екрані

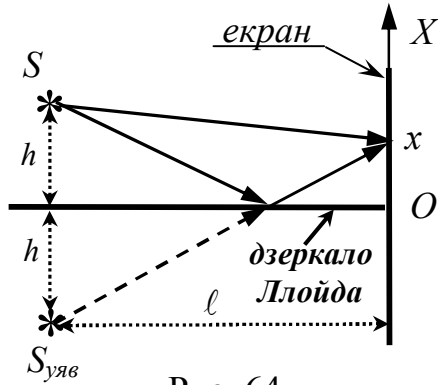


Рис. 64

повинна спостерігатися інтерференційна картина, але за умови, що оптична різниця ходу менша за довжину когерентності.

З схеми досліду випливає, що джерелом відбитих променів можна вважати уявне джерело, яке на рис. 64 позначене  $S_{\text{уяв}}$  і яке розташоване симетрично відносно площини дзеркала до вихідного джерела  $S$ . Відстань між джерелами  $S$  та  $S_{\text{уяв}}$  становить  $2h$ , де  $h$  —

відстань від джерела  $S$  до дзеркала. Відстань від джерела  $S$  до екрану позначимо  $\ell$ . З розрахунків, які були проведені при розгляді досліду Юнга, отримаємо, що ширина інтерференційної смуги з використанням дзеркала Ллойда буде становити

$$\Delta x_{\lambda} = \frac{\lambda \ell}{2h},$$

де заради простоти ми поклали показник середовища, яке розділяє джерело та екран рівним одиниці. Тоді легко отримати, що положення інтерференційних максимумів на екрані у схемі досліду Ллойда визначатиметься формулою

$$x_{\text{max}}^{(m)} = \frac{m\lambda\ell}{2h}.$$

Розглянемо інший експеримент. На рис. 65 наведено схему спостереження інтерференції з застосуванням біпризми Френеля. Схема містить джерело світла  $S$ , біпризму та екран. Біпризма складається з двох однакових і в такий спосіб з'єднаних між собою призм, щоб вони були симетричними відносно площини їх основи. Кут заломлення призм однаковий (його на рис. 65 позначено  $\varphi$ ) і прийнято, що він малий, тобто  $\varphi \rightarrow 0$ .

Як відомо, призма відхиляє промені на кут  $\gamma = (n-1)\varphi$ , де  $n$  — її показник заломлення.

На рис. 65 показано хід різних променів від джерела  $S$  до призми та після їх заломлення при поширенні від призми до екрану. Так, центральний промінь 1, який поширюється паралельно малій основі кожної з призм, буде



заломлюватися обома ними. Тоді той промінь, що заломлений верхньою призмою, відхилятиметься вниз (на рис. 65 його позначено 1'), а той, що заломлюється нижньою призмою, піде ввєрх (його позначено 1'')

Верхній промінь 2 від джерела  $S$ , який спрямований до вершини верхньої призми, також відхиляється нею. Після проходження призми цей промінь позначено 2'. Перетин променів 1' та 2' дає положення уявного

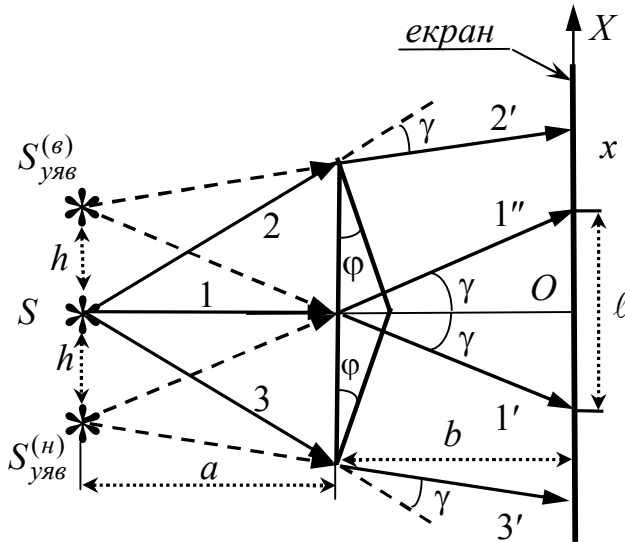


Рис. 65

джерела  $S_{уяв}^{(e)}$  світла. Промені від цього уявного джерела – це ті промені, що йдуть від джерела  $S$  і які заломлюються верхньою призмою. На екрані вони знаходяться між променями 1' та 2'.

Нижній промінь 3 від джерела  $S$ , який спрямлений до вершини нижньої призми, також відхиляється. Тут все симетрично: після проходження призми його позначено 3'. Перетин променів 1''

та 3' дає положення нижнього уявного джерела світла  $S_{уяв}^{(n)}$ . Промені від цього уявного джерела – це ті промені, які, як видно, йдуть від джерела  $S$  і які заломлюються нижньою призмою. На екрані вони лежать між променями 1' та 3'.

Уявні джерела  $S_{уяв}^{(e)}$  та  $S_{уяв}^{(n)}$  породжені джерелом  $S$ , тому вони когерентні. На ділянці екрану, що лежить між променями 1' та 1'', промені від обох джерел  $S_{уяв}^{(e)}$  та  $S_{уяв}^{(n)}$  накладаються, і в цій області екрану формується інтерференційна картина. Ширина інтерференційної області, яку на рис. 65 позначено  $\ell$ , дорівнює

$$\ell = 2b \cdot \operatorname{tg} \gamma \approx 2b \cdot \gamma = 2b(n-1)\varphi,$$

де  $b$  – відстань від біпризми до екрану.

Уявні джерела  $S_{уяв}^{(e)}$  та  $S_{уяв}^{(n)}$  є симетричними відносно площини основи біпризми. Згідно з позначеннями, які зроблені на рис. 65, відстань між цими джерелами дорівнює  $2h$ . З рис. 65 бачимо, що ця відстань дорівнює  $2h = 2a \cdot \operatorname{tg} \gamma \approx 2a \cdot \gamma = 2a(n-1)\varphi$ , де  $a$  – відстань від джерел до біпризми.

Відстань від уявних джерел до екрану дорівнює  $a + b$ ,

З формул, які були отримані при розгляді досліду Юнга, знаходимо, що ширина інтерференційних смуг визначається виразом

$$\Delta x_{\lambda} = \frac{\lambda(a+b)}{2a(n-1)\varphi}.$$

Перепишемо його дещо інакше:

$$\Delta x_{\lambda} = \frac{\lambda}{2(n-1)\varphi} \left(1 + \frac{b}{a}\right).$$

Якщо на біпризму падає паралельний пучок світла, тобто коли формально  $a \rightarrow \infty$ , то ширина інтерференційних смуг виявляється не залежною від відстані між біпризмою та екраном.

Кількість  $N$  інтерференційних смуг знайдемо з відношення ширини  $\ell$  інтерференційної області до ширини  $\Delta x_{\lambda}$  інтерференційної смуги, або

$$N = \frac{\ell}{\Delta x_{\lambda}} = \frac{4ab(n-1)^2 \varphi^2}{\lambda(a+b)}.$$

Видно, що збільшення ширини інтерференційної смуги вимагає зменшення кута заломлення призми. Проте це призводить до зменшення кількості смуг в інтерференційній області.

### 5.3.6. Інтерференція променів, відбитих від поверхонь однорідної пластини

Розглянемо тонку однорідну плоско-паралельну прозору пластину з показником заломлення  $n$  та товщиною  $d$  (рис. 66). Нехай на цю пластинку падає плоска монохроматична хвиля з довжиною хвилі  $\lambda$ . Падаюча хвиля поширюється у повітрі, а її промені

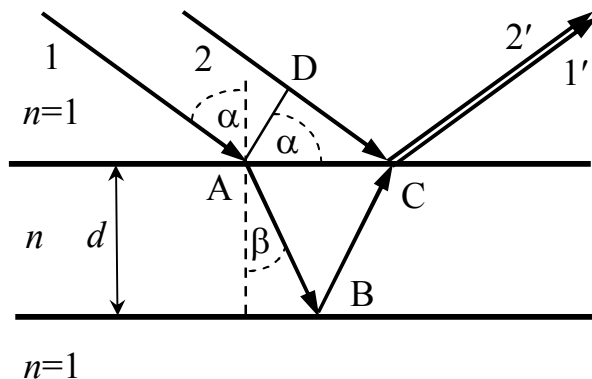


Рис. 66

(на рис. 66 промені 1 та 2) під кутом  $\alpha$  падають на поверхню пластинки.

Промінь 1 в точці A поверхні пластинки заломлюється і йде до другої поверхні пластинки, де в точці B відбивається. Після другого заломлення у точці C цей промінь виходить з пластинки (його на рис. 66 позначено 1'). Промінь 2 на

пряму відбивається у точці C (відбитий промінь на рис. 66 позначено 2').

Як видно, промені 1' та 2' збігаються у точці С. Вони когерентні і проходять різні відстані. В результаті, при накладанні цих променів має спостерігатися інтерференція. Оптична різниця ходу променів, відбитих від нижньої та від верхньої поверхонь пластини, легко обчислюється:

$$\Delta = n(|AB| + |BC|) - |DC| + \frac{\lambda}{2},$$

де враховано, що при відбиванні променя на межі оптично більш густого середовища з оптично менш густим середовищем, як це має місце в точці В, фаза коливань змінюється на  $\pi$ , а тому до оптичної різниці ходу слід додати величину  $\frac{\lambda}{2}$ .

Врахуємо закон заломлення  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$ , та очевидну рівність  $|AB| = |BC|$ .

Тоді легко знаходимо, що

$$|AB| = |BC| = \frac{d}{\cos \beta} = \frac{d}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}} = \frac{d}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}}} = \frac{nd}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}},$$

а також

$$|DC| = |AC| \sin \alpha = 2|AB| \sin \beta \sin \alpha = 2|AB| \frac{\sin^2 \alpha}{n}.$$

Підставляючи сюди вище знайдений вираз для  $|AB|$ , маємо:

$$|DC| = \frac{2d \sin^2 \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}.$$

Тепер формула для оптичної різниці ходу променів 1 та 2 набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \Delta &= 2n \frac{nd}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} - \frac{2d \sin^2 \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} + \frac{\lambda}{2} = \frac{2d(n^2 - \sin^2 \alpha)}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} + \frac{\lambda}{2} = \\ &= 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} + \frac{\lambda}{2}. \end{aligned}$$

Як відомо, коли різниця ходу цих променів кратна цілому числу довжин хвиль, 1' та 2', або

$$\Delta = m\lambda,$$

де  $m = 1, 2, 3, \dots$ , то буде спостерігатися інтерференційний максимум променів.

І видно, що інтерференційний максимум для цих променів формується за умови

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} + \frac{\lambda}{2} = m\lambda.$$

З неї знаходяться значення кута падіння

$$\alpha_{\max}^{(m)} = \arcsin \sqrt{n^2 - \frac{(2m-1)^2 \lambda^2}{16d^2}},$$

для яких вектори напруженостей електричних полів у по-різному відбитих променів 1' та 2' коливаються синфазно, а їх накладання викликає появу інтерференційного максимуму.

Коли ж різниця ходу променів 1' та 2' дорівнюватиме непарній кількості напівдовжин хвиль, або

$$\Delta = \frac{2m+1}{2} \lambda,$$

то буде формуватися інтерференційний мінімум.

Для цього має виконуватися рівність,

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} + \frac{\lambda}{2} = \frac{2m+1}{2} \lambda,$$

з якої легко отримується вираз для кута падіння, при якому вектори напруженостей відбитих різними поверхнями променів коливаються протифазно

$$\alpha_{\min}^{(m)} = \arcsin \sqrt{n^2 - \frac{m^2 \lambda^2}{4d^2}},$$

що відповідає мінімуму інтерференційної картини (або її затемненим областям).

Як бачимо, для заданих значень  $\lambda$ ,  $n$  та  $d$  характер інтерференційної картини визначається кутом падіння світла на поверхню. В загальному ж випадку інтерференційна картина залежить від усіх цих трьох параметрів і, зокрема, може змінюватися внаслідок збільшення або зменшення товщини пластини.

### 5.3.7. Кільця Ньютона

*Кільцями Ньютона* називають інтерференційну картину, яка утворюється при освітленні плоско-опуклої лінзи, що розміщена на плоскій прозорій пластинці (рис. 67), коли на лінзу направляють паралельний пучок світла перпендикулярно до її площини.

Кільця Ньютона є наслідком інтерференції променів 1', відбитих від сферичної поверхні лінзи, та променів 1'', відбитих від поверхні пластини (рис. 67). Ці промені є когерентними і – збігаючись – інтерферують.

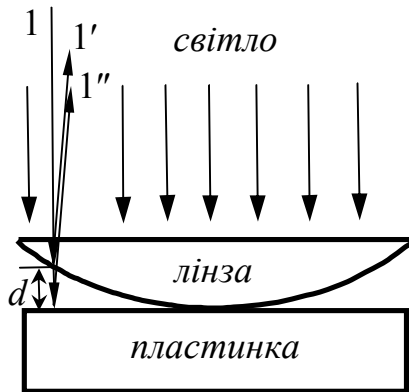


Рис. 67

Промінь 1', що відбивається від сферичної поверхні, яка є межею з оптично менш густим повітрям, змінює фазу на  $\pi$ , тому до оптичної різниці ходу слід додати  $\frac{\lambda}{2}$ . Промінь 1'', при відбиванні від поверхні пластинки фази не змінює. Як легко бачити з рис. 67, різниця ходу променів складає

$$\Delta = 2d + \frac{\lambda}{2},$$

де  $d$  – довжина повітряного проміжку між сферичною поверхнею лінзи та плоскою поверхнею пластинки в точках відбивання променів 1' та 1''. Тут покладено, що показник заломлення повітря  $n \approx 1$ .

Позначимо  $R$  – радіус сферичної поверхні лінзи, а  $r$  – радіус кільця, який дорівнює найменшій відстані від точки відбивання променя 1' до перпендикуляру, що проведений до поверхні пластинки в точці дотику до неї лінзи. Точкою  $O$  на рис. 68 позначено центр сферичної поверхні лінзи.

З рис. 68 маємо, що

$$R^2 = r^2 + (R - d)^2.$$

Розкриття квадрату дає рівняння

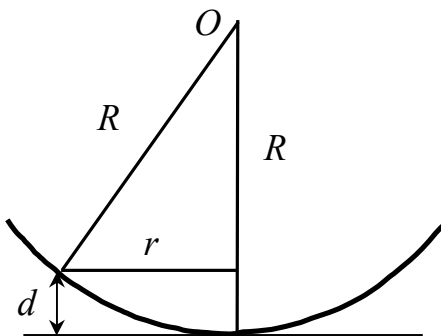


Рис. 68

$$r^2 - 2Rd + d^2 = 0,$$

з якого при умові  $d \ll R$  та  $d \ll r$ , знаходимо

$$d = \frac{r^2}{2R}.$$

Звідси вираз для оптичної різниці ходу набуває вигляду

$$\Delta = \frac{r^2}{R} + \frac{\lambda}{2}.$$

Оскільки система осе-симетрична, то інтерференційна картина буде мати смугасто-колову структуру. При цьому радіус  $r$  виявиться, наприклад, радіусом темного кільця, якщо при відбиванні світла в точках, що лежать на відповідному колі, формується інтерференційний мінімум для відбитих

променів  $1'$  та  $1''$ . Для цього треба, щоб оптична різниця ходу дорівнювала непарній кількості півдовжин хвиль, або

$$\Delta = \frac{2m+1}{2} \lambda,$$

де  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ .

Таким чином, приходимо до рівняння

$$\frac{r^2}{R} + \frac{\lambda}{2} = \frac{2m+1}{2} \lambda,$$

з якого знаходимо значення радіусів темних кілець Ньютона:

$$r_{\min}^{(m)} = \sqrt{mR\lambda}.$$

Бачимо, що в центрі інтерференційної картини буде мінімум, якому відповідає  $m=0$ . За ним буде розташоване кільце з інтерференційним максимумом. Радіуси кілець з максимальною інтенсивністю визначаються, як легко зрозуміти, за формулою

$$r_{\max}^{(m)} = \sqrt{\frac{(2m-1)R\lambda}{2}},$$

яка дійсно показує, що першому інтерференційному максимуму відповідає  $m=1$ .

В цілому, знову-таки інтерференційна картина у формі кілець Ньютона також залежить від кількох параметрів і її досить просто змінювати за рахунок, наприклад, радіусу лінзи.

## 5.4. Дифракція світла

*Дифракцією світла* називають явище огинання світлом перешкод та його поширення в область, де мала б бути тінь. Для спостереження дифракції на шляху поширення світлової хвилі розміщують непрозору перешкоду, яка лише частково закриває хвилю, тобто площа перешкоди менша за площу фронту хвилі. За перешкодою розташовують екран. На екрані в залежності від форми та розмірів перешкоди спостерігають дифракційну картину у вигляді сукупності темних та світлих смуг чи кілець. Дифракція спостерігається і в звичайних природних умовах. Наприклад, розсіювання світла крапельками туману є наслідком дифракції.

Явище дифракції є прямим проявом хвильових властивостей світла і не може бути пояснене, виходячи з уявлень геометричної оптики. Дифракція як хвильове явище зникає, коли довжина хвилі  $\lambda \rightarrow 0$ , і залежить від довжини хвилі. Явище дифракції виражене краще для довгих хвиль і менше для

коротких, а отже для червоного світла його спостерігати легше, ніж для фіолетового. Це обумовлене тим, що при розкладанні світла на хвильовий спектр за рахунок дифракції червоне світло відхиляється більше, а фіолетове – менше. Таким чином, у дифракційному спектрі спостерігається послідовність розташування різних кольорів, яка є оберненою до послідовності цих кольорів у спектрі, що отримують за допомогою призми, коли червоне світло відхиляється менше, а фіолетове – більше (див. п. 5.2. Дисперсія світла).

#### 5.4.1. Принцип Гюйгенса

Вперше принципову можливість зміни напрямку поширення світла перешкодою пояснив Гюйгенс, який припустив, що кожна точка фронту

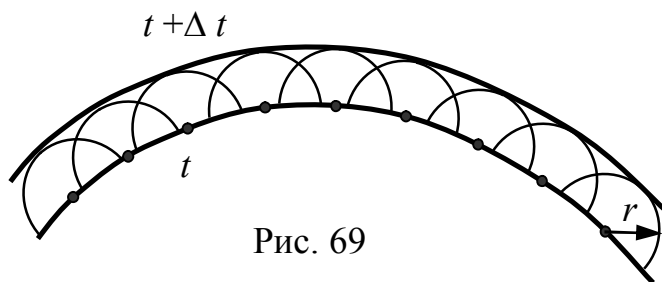


Рис. 69

хвилі є джерелом вторинної хвилі. При цьому фронт хвилі у кожний наступний момент часу визначається обвідною фронтів вторинних хвиль. На рис. 69 показано зображення фронту хвилі для моменту

часу  $t$  та для наступного моменту часу  $t + \Delta t$ . Тонкими лініями на рис. 69 зображено fronti сферичних вторинних хвиль, джерела яких знаходяться на фронті, визначеного для моменту часу  $t$ . У такій картині вторинні хвилі випромінюються неперервно і, зокрема, на зображеному фронті починають випромінюватися в момент часу  $t$ . Якщо їх випромінювання відбувається протягом інтервалу  $\Delta t$ , то радіус сфер вторинних хвиль дорівнює добутку швидкості поширення хвиль на час  $\Delta t$ , тобто  $r = v\Delta t$ . За принципом Гюйгенса фронт хвилі в момент часу  $t + \Delta t$  визначається обвідною вторинних хвиль і зсунеться також на відстань  $r$ .

Принцип Гюйгенса є корисним і дозволяє, наприклад, з точки зору хвильових уявлень пояснити закони відбивання та заломлення світла. Доведемо з використанням принципу Гюйгенса закон заломлення світла.

Для цього розглянемо два середовища, які розділяє плоска межа. Направимо на неї звичайну плоску хвилю. На рис. 70 зображені два промені  $A'A$  та  $B'B$  падаючої хвилі. На цьому рис. 70 показано також положення фронту  $AD$  падаючої хвилі для моменту часу, коли хвиля досягає точки  $A$  на межі середовищ. Відрізок  $AD$ , що відповідає фронту, перпендикулярний до

променів  $A'A$  та  $B'B$ . Позначимо  $\Delta t$  час проходження променем  $B'B$  відстані  $|DB| = v_1 \Delta t$ , де  $v_1$  – швидкість поширення падаючої хвилі у першому

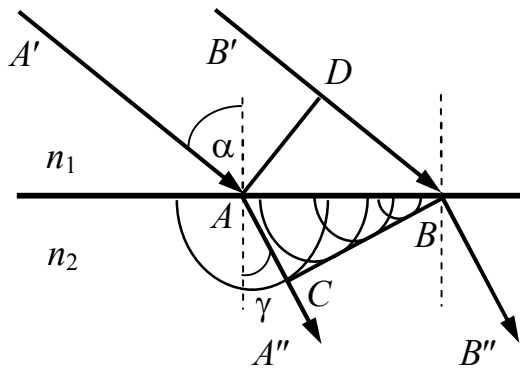


Рис. 70

середовищі, що знаходиться над межею. Згідно з принципом Гюйгенса, поки падаюча хвиля дійде до точки  $B$ , точки ділянки  $AB$  стануть джерелами вторинних хвиль.

Обвідна цих хвиль  $CB$  є фронтом заломленої хвилі. Вона, як і падаюча, буде плоскою хвилею, тому відрізок  $CB$  також перпендикулярний до заломлених променів. За час  $\Delta t$  вторинна хвиля з

джерелом у точці  $A$  пройде відстань  $|AC|$ , причому  $|AC| = v_2 \Delta t$ , де  $v_2$  – швидкість поширення променів у другому середовищі. Довжина гіпотенузи

$AB$  прямокутного трикутника  $ADB$  дорівнює  $|AB| = \frac{|DB|}{\sin \alpha} = \frac{v_1 \Delta t}{\sin \alpha}$ , де  $\alpha$  – кут

падіння. Але  $AB$  є також гіпотенузою прямокутного трикутника  $ABC$ , тому

$|AB| = \frac{|BC|}{\sin \gamma} = \frac{v_2 \Delta t}{\sin \gamma}$ . Порівнюючи обидва вирази для довжини гіпотенузи  $AB$

приходимо до вже відомого нам рівняння закону заломлення

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1},$$

де  $n_1$  і  $n_2$  – показники заломлення відповідних середовищ.

За допомогою того ж принципу Гюйгенса легко також якісно пояснити,

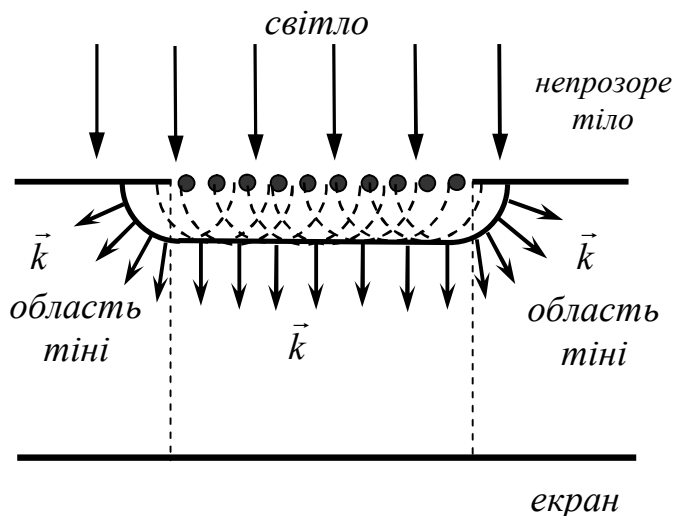


Рис. 71

чому на перешкоді може змінитися напрямок поширення хвилі. Дійсно, розглянемо непрозоре плоске тіло, яке має отвір (рис. 71). Направимо на нього плоску хвилю, хвильовий вектор якої перпендикулярний до площини тіла. Кожна точка отвору стає за Гюйгенсом джерелом вторинної сферичної хвилі. На рис. 71 показані



центри таких хвиль і їх фронти, які зображені пунктиром. Обвідна вторинних хвиль визначає фронт поширення хвилі після проходження первинною хвилею отвору. Напрямок поширення кожної вторинної хвилі перпендикулярний до її фронту і відповідає хвильовому вектору. На рис. 71 показані напрямки хвильових векторів для фронту хвилі, які формують вторинні хвилі після проходження хвилею отвору. Видно, що після проходження отвору хвиля вже не є плоскою, бо біля країв отвору її фронт викривляється. З напрямку хвильових векторів знаходимо, що хвиля дещо поширюється в область геометричної тіні. Тепер на екрані не буде чіткої геометричної тіні, яка б повністю відтворювала форму отвору, оскільки частина світла потрапляє в область тіні.

Таким чином, принцип Гюйгенса дозволяє пояснити, чому світло потрапляє в область тіні. Але цей принцип не може підказати, як буде розподілена інтенсивність світла вздовж екрану. Іншим принциповим недоліком принципу Гюйгенса є неможливість пояснити з його позицій утворення дифракційної картини, що складається з регулярного набору світлих та темних смуг або кілець. Навіть з попереднього розгляду явища інтерференції видно, що відмічена вада обумовлена тим, що принцип Гюйгенса нічого не говорить стосовно можливої ролі частот хвиль або, що теж саме, їх довжин в явищах подолання хвилями різного типу перешкод.

#### 5.4.2. Принцип Гюйгенса-Френеля

Перше пояснення інтерференційних наслідків дифракції було дано Френелем, який суто геометричну побудову Гюйгенса доповнив положенням про інтерференцію вторинних хвиль. Дійсно, у відповідності з принципом Гюйгенса джерела вторинних хвиль лежать на фронті хвилі (або на хвильовій поверхні) і здійснюють коливання з однаковою фазою, тому ці джерела повинні бути когерентними. При накладанні вторинних хвиль від цих джерел також має відбуватися явище інтерференції – підсилення чи послаблення інтенсивності хвилі в залежності від оптичної різниці ходу вторинних хвиль. Таким чином, за Френелем дифракція фактично є інтерференцією вторинних хвиль, кількість яких нескінченна, бо кожна точка фронту може розглядатися як джерело вторинної хвилі.

В сучасній оптиці ці положення теорії дифракції складають принцип, який називають *принципом Гюйгенса-Френеля*. Зауважимо, що цей принцип

застосовують, як правило, для сферичних електромагнітних хвиль або хвиль, фронт яких близький до сферичного.

Розглянемо точкове джерело  $S$  монохроматичної сферичної хвилі (рис. 72). Амплітуду коливань світлового вектора цієї хвилі у точці  $\vec{R}$  на поверхні позначимо  $\vec{E}(\vec{R})$ . Хвиля сферична, тому  $|\vec{E}(\vec{R})| \sim 1/R$ . Згідно з принципом Гюйгенса-Френеля хвильове збурення у точці  $A$ , створене сферичною хвилею з джерелом  $S$  у точці  $O$ , можна розглядати як результат

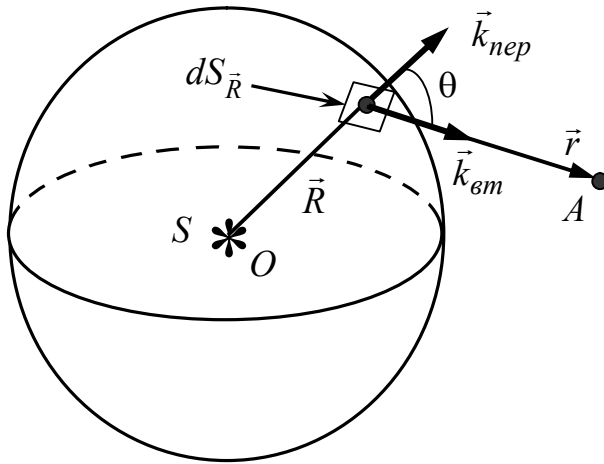


Рис. 72

інтерференції вторинних хвиль, джерела яких лежать на хвильовій поверхні цієї сферичної хвилі.

На рис. 72 показана сферична хвильова поверхня, на якій лежить точка, положення якої задає вектор  $\vec{R}$  (зауважимо, що точка  $A$  знаходиться поза межами цієї хвильової поверхні, зовні неї). Розіб'ємо хвильову поверхню на елементарні площі  $dS_{\vec{R}}$ . Кожна така

елементарна площа є джерелом вторинної хвилі. Амплітуда вторинної хвилі пропорційна амплітуді первинної хвилі  $E(\vec{R})$ , а також пропорційна площі ділянки  $dS_{\vec{R}}$ . Крім того, амплітуда залежить від величини кута  $\theta$  між хвильовим вектором  $\vec{k}_{пер}$  первинної хвилі та напрямком поширення вторинної хвилі, який задається хвильовим вектором  $\vec{k}_{вт}$ , причому  $|\vec{k}_{пер}| = |\vec{k}_{вт}|$ . Вплив цієї кутової залежності на амплітуду вторинних хвиль Френель характеризував коефіцієнтом  $K_{Fr}(\theta)$ , граничні значення для якого він прийняв рівними  $K_{Fr}(\theta = 0) = 1$  та  $K_{Fr}(\theta = \pi / 2) = 0$ .

Якщо ввести цей коефіцієнт, можемо отримати, що вторинна хвиля з джерелом в точці  $\vec{R}$  призведе до збурення поля, величина якого в точці  $A$  описується виразом

$$dE(\vec{r}) = \frac{K_{Fr}(\theta)E(\vec{R})}{r} e^{i(\omega t - \vec{k}_{вт}\vec{r} + \varphi_0)} dS_{\vec{R}},$$

де  $\varphi_0$  – початкова фаза, а  $r$  – відстань від точки  $\vec{R}$  до точки  $A$ .

Результуюче поле в точці  $A$  дорівнює сумі внесків від усіх вторинних джерел, а отже визначається інтегралом

$$E(\vec{r}) = \int_{\Delta S_{\vec{R}}} dE_A = \int_{\Delta S_{\vec{R}}} \frac{K_{Fr}(\theta) E(\vec{R})}{r} e^{i(\omega t - \vec{k}_{em} \vec{r} + \varphi_0)} dS_{\vec{R}},$$

де інтегрування здійснюється по тій частині  $\Delta S_{\vec{R}}$  від хвильової поверхні  $S_{\vec{R}}$ , в межах якої кут  $\theta$  лежить в інтервалі від 0 до  $\pi/2$ . Записаний інтеграл називають *інтегралом Гюйгенса-Френеля*.

Розглянемо тепер непрозоре плоске тіло з отвором, через який може поширюватися світло від точкового джерела  $S$  (див. рис. 73). Необхідно

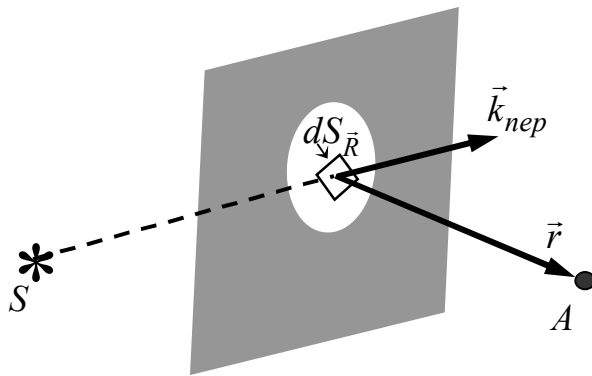


Рис. 73

визначити світловий вектор коливань  $E(\vec{r})$  у довільній точці  $A$ , яка знаходиться по іншу сторону від отвору, ніж джерело  $S$ . При застосуванні для цього випадку принципу Гюйгенса-Френеля роблять припущення, щодо амплітуди коливань первинної світлової хвилі на отворі: вона вважається такою, начебто

непрозоре тіло відсутнє, а амплітуда коливань на решті поверхні непрозорого тіла приймається рівною нулю. Крім того, нехтується можливим впливом матеріалу екрану на результат розрахунку і принциповими залишаються лише форма отвору та його розміри. Вимірювання свідчать, що ці припущення добре виконуються, коли розміри отвору та відстані від джерела до непрозорої площини і від непрозорої площини до екрану є значно більшими за довжину хвилі. Таку дифракцію називають *дифракцією Френеля*. Зрозуміло, що при таких умовах відхилення від напрямку поширення світла внаслідок дифракції буде незначним, або таким, якби воно описувалося законами геометричної оптики.

Тим не менш, виявляється, що при розрахунку поля  $E(\vec{r})$  світла, що пройшло через отвір довільної форми, не можна обмежуватися розглядом вторинних хвиль, джерела яких лежать тільки на хвильовій поверхні первинної хвилі в околі отвору. Ці джерела розташовані у площині отвору, і при складанні амплітуд в точці  $A$  слід враховувати не тільки оптичну різницю ходу цих вторинних хвиль, а й необхідно врахувати можливе

набігання фази внаслідок того, що точки поверхні отвору знаходяться на різних відстанях від джерела  $S$  первинної хвилі.

Слід зробити ще одне важливе зауваження. Записуючи вираз для поля  $\vec{E}(\vec{r})$ , яке є результируючим при накладанні вторинних хвиль, ми не брали до уваги (не враховували) напрямки векторів напруженостей електричних полів як вторинних хвиль, так і первинної хвилі. Як буде показано далі, це припущення для дифракції Френеля є виправданим, оскільки основний внесок в  $\vec{E}(\vec{r})$  дає лише мала частина хвильової поверхні, яка відповідає малому значенню кута  $\theta$  в інтегралі Гюйгенса-Френеля. Тому акуратне врахування напрямку векторів поля суттєво не вплине на результат розрахунку інтерференції вторинних хвиль. Крім того, принцип Гюйгенса-Френеля має узгоджуватися з принципом прямолінійного розповсюдження світлових променів в однорідному ізотропному середовищі.

### 5.4.3. Метод зон Френеля

Обчислення інтегралу Гюйгенса-Френеля, що визначає амплітуду світлового поля, утвореного при накладанні вторинних хвиль для отворів довільної форми, є досить складною математичною задачею. Проте в деяких простих випадках (наприклад, для круглого отвору або диску) дифракційну картину можна якісно проаналізувати і навіть отримати корисні чисельні співвідношення, якщо скористатися наближенням Френеля. Суть цього

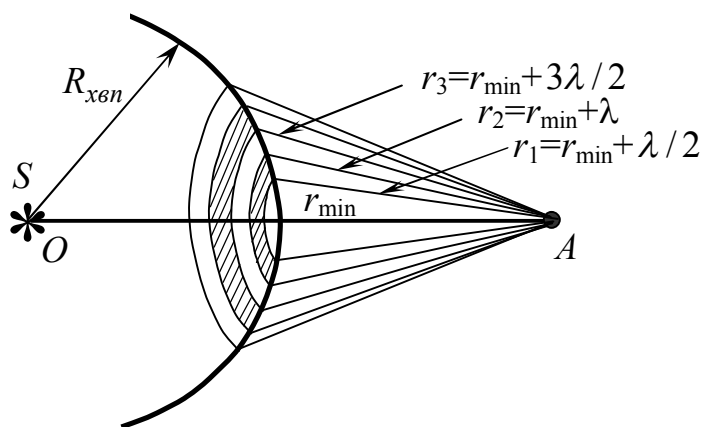


Рис. 74

наближення полягає у наступному. Візьмемо монохроматичне точкове джерело  $S$  світла, яке на рис. 74 знаходиться в точці  $O$ . Нас цікавить розрахунок інтегралу Гюйгенса-Френеля у точці  $A$ . Розглянемо хвильову поверхню сферичної первинної хвилі. На рис. 74 її радіус

позначено  $R_{xvn}$ , де індекс «хвн» скорочено позначає, що це радіус хвильової поверхні первинної хвилі. Відстань від найближчої точки хвильової поверхні

до точки  $A$  позначимо  $r_{\min}$ . З використанням цих позначень відстань від джерела до точки спостереження становитиме  $R_{\text{хвн}} + r_{\min}$ .

Френель запропонував хвильову поверхню первинної хвилі розбити на зони. В кожній з таких зон відстань від її точок до точки  $A$  лежить в інтервалі, що зростає на величину  $\lambda/2$  (див. рис. 74). На рис. 74 парні зони заштриховано. Точки першої зони Френеля віддалені від точки  $A$  на відстані, які знаходяться в інтервалі  $[r_{\min}, r_{\min} + \lambda/2]$ , точки другої зони Френеля віддалені від точки  $A$  на відстані в інтервалі  $[r_{\min} + \lambda/2, r_{\min} + \lambda]$ , точки третьої зони віддалені на відстані  $[r_{\min} + \lambda, r_{\min} + 3\lambda/2]$ , а точки  $m$ -ої зони лежать на відстанях  $[r_{\min} + (m-1)\lambda/2, r_{\min} + m\lambda/2]$ . В результаті, маємо, що відстані від внутрішнього та зовнішнього країв  $m$ -ої зони до точки  $A$  будуть складати  $r_{m-1} = r_{\min} + (m-1)\lambda/2$  та  $r_m = r_{\min} + m\lambda/2$ , відповідно. Очевидно, що лінії зон на хвильовій поверхні утворюють концентричні кільця.

Внесок усіх зон в амплітуду коливань світлового вектора у точці  $A$  буде визначатися інтегралом, який можна представити сумою інтегралів, розрахованих по кожній із зон окремо:

$$E(A) = \int_{\Delta S_{\vec{R}}} \frac{K_{Fr}(\theta) E(\vec{R})}{r} e^{-i\vec{k}_{\vec{a}\vec{o}} \vec{r}} dS_{\vec{R}} = \sum_m \int_{\Delta S_m} \frac{K_{Fr}(\theta) E(\vec{R})}{r} e^{-i\vec{k}_{\vec{a}\vec{o}} \vec{r}} dS_{\vec{R}},$$

де  $\Delta S_m$  – ділянка поверхні  $m$ -ї зони,  $\Delta S_{\vec{R}} = \sum_m \Delta S_m$ ,  $E(\vec{R})$  – амплітуда поля в на хвильовій поверхні.

Можна наближено покласти, що в межах однієї зони коливання вторинних джерел відбуваються майже синфазно, а величину  $K_{Fr}(\theta)$  можна прийняти постійною:  $K_{Fr}(\theta) \approx K_{Fr}(\theta_m)$ , де  $\theta_m$  – кут між вектором  $\vec{k}_{\text{неп}}$  та  $r_m$  на межі зони, тому за теоремою про середнє запишемо:

$$\begin{aligned} \int_{\Delta S_m} \frac{K_{Fr}(\theta) E(\vec{R})}{r} e^{-i\vec{k}_{\vec{a}\vec{o}} \vec{r}} dS_{\vec{R}} &= K_{Fr}(\theta_m) \int_{\Delta S_m} \frac{E(\vec{R})}{r} e^{-i\vec{k}_{\vec{a}\vec{o}} \vec{r}} dS_{\vec{R}} = \\ &= K_{Fr}(\theta_m) f(r_m) \Delta S_m = (-1)^{m+1} E_m(A), \end{aligned}$$

де  $f(r_m)$  – середнє значення підінтегрального виразу,  $E_m(A) > 0$  – амплітуда коливань світлового вектора у точці  $A$  від  $m$ -ої зони. При записі цього виразу враховано також, що за побудовою коливання вторинних джерел сусідніх зон відбуваються протифазно, а амплітуду першої зони вибрано додатною.

У підсумку знаходимо, що амплітудне значення коливань представляє собою суму знакозмінного ряду

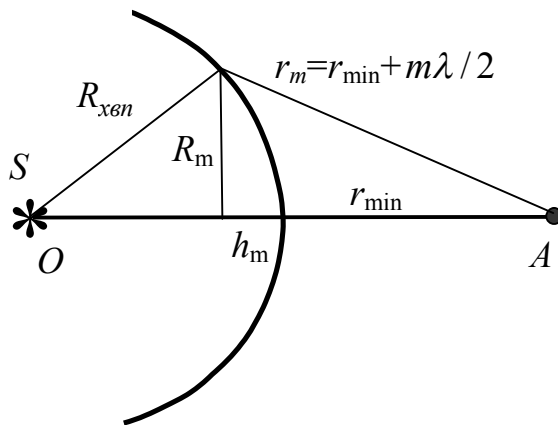
$$E(A) = \sum_m (-1)^{m-1} E_m(A).$$

Для його обчислення більш ретельно дослідимо геометричні особливості зон Френеля. Знайдемо радіуси кілець зон Френеля та їх площу.

З двох прямокутних трикутників наведених на рис. 75 маємо два рівняння

$$R_{x\phi n}^2 = (R_{x\phi n} - h_m)^2 + R_m^2, \quad (r_{\min} + m\lambda / 2)^2 = (r_{\min} + h_m)^2 + R_m^2,$$

де  $R_m$  – радіус  $m$ -го кільця,  $h_m$  – найменша відстань від площини кільця до точки перетину фронту хвилі та відрізка  $OA$ ,  $R_{x\phi n}$  – радіус хвильової поверхні



первинної хвилі. Врахуємо, що  $\lambda \ll R_m, h_m$ , крім того  $R_m, h_m \ll R_{x\phi n}, r_{\min}$ , та  $R_m \gg h_m$ . Тоді рівняння набудуть вигляду

$$2R_{x\phi n}h_m = R_m^2, \quad r_{\min}m\lambda = 2r_{\min}h_m + R_m^2.$$

З першого рівняння знаходимо, що

$$h_m = \frac{R_m^2}{2R_{x\phi n}}.$$

Рис. 75

Після підстановки  $h_m$  у друге рівняння отримаємо рівняння для  $R_m$ :

$$r_{\min}m\lambda = r_{\min} \frac{R_m^2}{R_{x\phi n}} + R_m^2.$$

З нього визначимо величину  $R_m$  радіусу  $m$ -го кільця, яка визначає зовнішню межу для  $m$ -ої зони Френеля, як функцію радіусу  $R_{x\phi n}$  хвильової поверхні первинної хвилі:

$$R_m = \sqrt{\frac{r_{\min}R_{x\phi n}}{r_{\min} + R_{x\phi n}}} m\lambda.$$

Для  $R_{x\phi n} \approx 1$  м,  $r_{\min} \approx 1$  м та  $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$  м радіус, наприклад, кільця першої зони  $m=1$  дорівнює:  $R_1 = \sqrt{\frac{1}{1+1}} 5 \cdot 10^{-7} = \sqrt{25 \cdot 10^{-8}} = 5 \cdot 10^{-4}$  м, тобто складає тільки півміліметра.

Величина  $h_m$  визначається формулою

$$h_m = \frac{1}{2} \frac{r_{\min}}{R_{x\phi n} + r_{\min}} m\lambda.$$

Тепер знайдемо площу  $m$ -ої зони Френеля. Спочатку обчислимо площу  $S_m$  сферичного сегменту (див. рис. 76), утвореного кільцем з радіусом  $R_m$ . Ця площа визначається за формулою

$$S_m = 2\pi R_{x\phi n} h_m,$$

де  $R_{x\phi n}$  – радіус сфери хвильової поверхні первинної хвилі. Підставимо у цю формулу значення  $h_m$ , що дає:

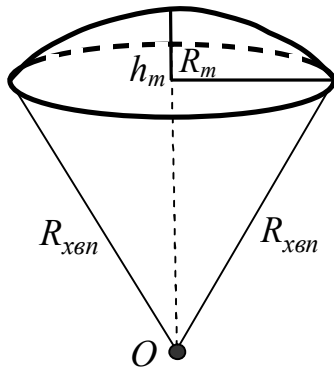


Рис. 76

$$S_m = \frac{\pi R_{x\phi n} r_{\min}}{R_{x\phi n} + r_{\min}} m \lambda.$$

Площа  $m$ -ої зони Френеля  $\Delta S_m$  дорівнює різниці площ сферичних сегментів, утворених сусідніми кільцями, радіуси яких  $R_m$  та  $R_{m-1}$

$$\begin{aligned} \Delta S_m = S_m - S_{m-1} &= \frac{\pi R_{x\phi n} r_{\min}}{R_{x\phi n} + r_{\min}} m \lambda - \frac{\pi R_{x\phi n} r_{\min}}{R_{x\phi n} + r_{\min}} (m-1) \lambda = \\ &= \frac{\pi R_{x\phi n} r_{\min}}{R_{x\phi n} + r_{\min}} \lambda. \end{aligned}$$

Отже, площа зони Френеля не залежить від  $m$ , тобто є однаковою для кожного кільця.

Таким чином, приходимо до наступних висновків: площі зон Френеля однакові; відстань  $r_m$  зростає для зон з більшим номером; кут  $\theta_m$  також зростає із збільшенням  $m$ . Звідси можна зробити ще один важливий висновок: амплітуда  $E_m(A)$  – амплітуда коливань світлового вектора від  $m$ -ої зони у точці  $A$  монотонно зменшується при зростанні  $m$ . Тому можна записати нерівність

$$E_1(A) > E_2(A) > E_3(A) > \dots E_{m-1}(A) > E_m(A) > \dots$$

Оскільки коливання у сусідніх зонах протифазні, то амплітудне значення світлового вектора в точці  $A$  від усіх зон буде дорівнювати сумі знакозмінного ряду, який внаслідок попередньої умови для амплітуд сходиться:

$$E(A) = \sum_m (-1)^{m-1} E_m(A) = E_1(A) - E_2(A) + E_3(A) - E_4(A) + \dots$$

Знайдемо суму цього ряду. Для цього перепишемо його у вигляді

$$E(A) = \frac{E_1(A)}{2} + \left[ \frac{E_1(A)}{2} - E_2(A) + \frac{E_3(A)}{2} \right] + \left[ \frac{E_3(A)}{2} - E_4(A) + \frac{E_5(A)}{2} \right] + \dots,$$

звідки з причини монотонного зменшення амплітуди можна покласти

$$E_m(A) \approx \frac{E_{m-1}(A) + E_{m+1}(A)}{2}.$$

Тому для записаної суми ряду вирази у дужках в середньому дорівнюватимуть нулю.

Таким чином, амплітуда хвилі у точці  $A$  визначається половиною амплітуди коливань лише першої зони Френеля

$$E(A) \approx \frac{E_1(A)}{2}.$$

Іншою мовою, отриманий результат демонструє, що амплітуда коливань первинної сферичної хвилі в точці  $A$  становить тільки половину амплітуди коливань в цій точці, утворених вторинними хвилями першої зони Френеля. Як було видно вище, поля усіх інших зон взаємокомпенсуються внаслідок саме явища інтерференції. Отже, усе відбувається так, начебто зі всього хвильового фронту діючою залишається лише певна частина першої зони Френеля, і до довільної точки  $A$  доходить світло тільки від неї. Оскільки для реальних параметрів діаметр першої зони не перевищує 1 мм, то можна стверджувати, що взаємна компенсація електричних полів вторинних хвиль від усіх зон Френеля, крім першої, фактично обумовлює виконання закону прямолінійного поширення світла в однорідному ізотропному середовищі (проте за умови відсутності перешкод).

#### 5.4.4. Дифракція Френеля від круглого отвору

За допомогою зон Френеля зручно пояснювати дифракцію хвиль у найбільш простих випадках симетричних перешкод (зокрема, для круглого

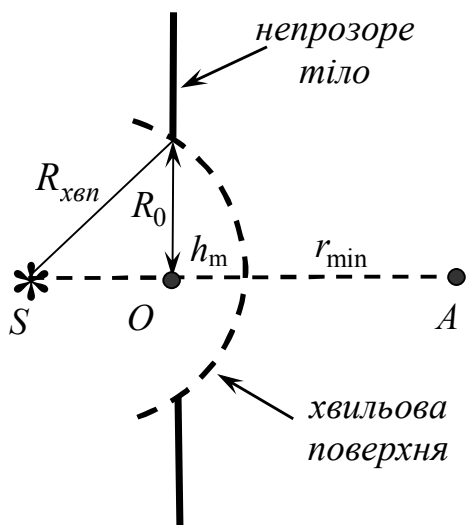


Рис. 77

отвору, коли джерело та точка спостереження лежать на осі отвору).

На рис. 77 зображено такий круглий отвір у непрозорому плоскому тілі. Радіус отвору позначимо  $R_0$ , а його центр точкою  $O$ . Точкове джерело світла  $S$  та точка спостереження  $A$  світлового поля знаходяться на осі кругового отвору, так що пряма  $SA$  проходить через точку  $O$  перпендикулярно до площини отвору. Розглянемо умовну хвильову поверхню первинної хвилі, яку проведемо так, щоб



вона дотикалася до країв отвору. Відстань від точкового джерела  $S$  до точки  $O$  позначимо  $R_{x\delta n} - h_m$ , де  $R_{x\delta n}$  – радіус хвильової поверхні первинної хвилі, а відстань від точки  $A$  до точки  $O$  позначимо  $r_{\min} + h_m$  (див. рис. 77).

Розіб'ємо ту частину поверхні сфери, яка спирається на отвір, на зони Френеля. Припустимо, що фронтальні відстані  $R_{x\delta n}$  та  $r_{\min}$  є такими, що радіус  $R_0$  співпадає з радіусом  $R_m$   $m$ -ої зони Френеля, тобто виконується рівність

$$R_0 = R_m, \quad \text{або} \quad R_0 = \sqrt{\frac{R_{x\delta n} r_{\min}}{R_{x\delta n} + r_{\min}}} m \lambda.$$

При визначенні  $R_0$  можна вважати, що відстань  $r_{\min}$  наближено дорівнює довжині відрізка  $OA$ , бо  $h_m \ll r_{\min}$ ,  $R_{x\delta n}$ . Крім того,  $R_0 \ll R_{x\delta n}$ , тому можна вважати, що  $R_{x\delta n} \approx |SO|$ .

З останньої рівності легко знаходимо значення  $m$  для кількості зон Френеля, на які розбито сферичний сегмент, утворений отвором:

$$m = \frac{(R_{x\delta n} + r_{\min}) R_0^2}{R_{x\delta n} r_{\min} \lambda}.$$

Таким чином, ми визначили кількість обмежених отвором зон Френеля, які визначають амплітуду коливань світлового поля в точці  $A$ .

Амплітуда світлового поля в цій точці буде дорівнює сумі ряду

$$E(A) = \sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} E_j(A),$$

де  $E_j(A)$  – амплітуда коливань світлового вектора в точці  $A$  від  $j$ -ої зони, причому  $E_j > 0$ .

Результат розрахунку знакозмінної суми залежить від значення числа  $m$  – є це число парним чи непарним. Для парного  $m$  сума ряду має вигляд

$$E(A) = E_1(A) - E_2(A) + E_3(A) - E_4(A) + \dots + E_{m-1}(A) - E_m(A).$$

Як і вище, перепишемо цю суму у спосіб:

$$E(A) = \frac{E_1(A)}{2} + \left[ \frac{E_1(A)}{2} - E_2(A) + \frac{E_3(A)}{2} \right] + \left[ \frac{E_3(A)}{2} - E_4(A) + \frac{E_5(A)}{2} \right] + \dots + \left[ \frac{E_{m-3}(A)}{2} - E_{m-2}(A) + \frac{E_{m-1}(A)}{2} \right] + \frac{E_{m-1}(A)}{2} - E_m(A).$$

Оскільки вирази у прямих дужках знову близькі до нуля, то знаходимо, що для парного  $m$  амплітуда коливань світлового поля в точці  $A$  визначається виразом:

$$E(A) = \frac{E_1(A)}{2} + \frac{E_{m-1}(A)}{2} - E_m(A).$$

Врахуємо, що амплітуди коливань від сусідніх зон майже рівні між собою, тобто  $E_{m-1} \approx E_m$ . В результаті, амплітуда коливань світлового поля в точці  $A$  у випадку парного  $m$  визначається піврізницею амплітуд коливань від першої та останньої зон Френеля, або

$$E(A) = \frac{E_1(A)}{2} - \frac{E_m(A)}{2}.$$

Таким чином, коли частина хвильової поверхні, обмеженої отвором, включає парну кількість зон Френеля, то у точці  $A$ , яка є центром дифракційної картини, буде спостерігатися мінімум інтенсивності світла – дифракційний мінімум.

Для непарного  $m$  сума ряду дещо змінюється, оскільки останній доданок додатний:

$$E(A) = E_1(A) - E_2(A) + E_3(A) - E_4(A) + \dots + E_{m-2}(A) - E_{m-1}(A) + E_m(A).$$

Перепишемо суму у той же спосіб:

$$E(A) = \frac{E_1(A)}{2} + \left[ \frac{E_1(A)}{2} - E_2(A) + \frac{E_3(A)}{2} \right] + \\ + \left[ \frac{E_3(A)}{2} - E_4(A) + \frac{E_5(A)}{2} \right] + \dots + \left[ \frac{E_{m-2}(A)}{2} - E_{m-1}(A) + \frac{E_m(A)}{2} \right] + \frac{E_m(A)}{2},$$

який остаточно дає:

$$E(A) = \frac{E_1(A)}{2} + \frac{E_m(A)}{2}.$$

Отже, на відміну від попереднього випадку отримуємо, що коли обмежена отвором хвильова сферична поверхня вміщує непарну кількість зон Френеля, то у точці  $A$  центру дифракційної картини спостерігатиметься максимум інтенсивності світла – дифракційний максимум.

У загальному ж випадку вираз для амплітуди коливань світлового поля можна записати у вигляді:

$$E(A) = \frac{1}{2} [E_1(A) + (-1)^{m-1} E_m(A)].$$

При зміні відстані від центру отвору до точки спостереження  $A$  буде змінюватися число  $m$  для кількості зон. Тому змінюватиметься і освітленість цієї точки. Отже, при віддаленні точки  $A$  від екрану фактично будуть відбуватися послідовні перетворення ярко освітлених областей (коли  $m$  непарне) у темні області (коли  $m$  парне), що добре узгоджується з даними експериментів.

Якщо точку  $A$  (точка спостереження на екрані) переміщувати паралельно до площини отвору, то також будуть спостерігатися послідовні зміни інтенсивності світла, які проте пов'язані не зі зміною кількості зон, а які обумовлені зміною умов інтерференції вторинних хвиль від зон Френеля (а точніше – різницею ходу вторинних хвиль до точки  $A$ ). При симетричному розташуванні джерела, коли воно лежить на осі отвору, ці зміни інтенсивності не залежать від напрямку зміщення точки  $A$ . Тому в площині, що перпендикулярна до отвору, дифракційна картина буде мати вигляд сукупності темних та світлих кілець, аналогічних кільцям Ньютона. А якщо джерело змістити від осі отвору, то осьова симетрія темних та світлих дифракційних областей буде порушена і дифракційна картина стане несиметричною.

#### 5.4.5. Дифракція Френеля від непрозорого диску

У попередньому пункті було показано, що при дифракції на круглому отворі формування світлового поля на екрані здійснюється за участі тільки

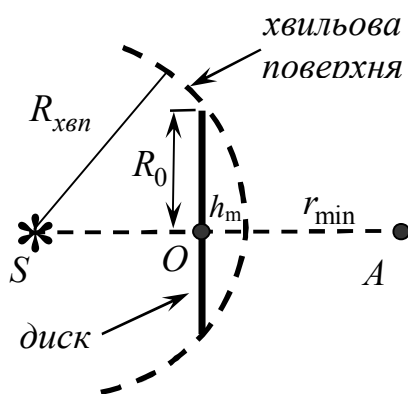


Рис. 78

декілька перших зон Френеля. Зовсім інша ситуація спостерігається при дифракції на непрозорому диску, коли декілька френелівських перших зон закриті ним, і світлове поле у точці спостереження, навпаки, визначається всіма іншими зонами Френеля, число яких нічим не обмежене.

На рис. 78 зображено круглий диск. Радіус диска по аналогії з отвором позначимо  $R_0$ , а його центр точкою  $O$ .

Точкове джерело світла  $S$  та точка спостереження  $A$  світлового поля знаходяться на осі диска, так що пряма  $SA$  проходить через точку  $O$  перпендикулярно до площини диска. Відстань від точкового джерела  $S$  до точки  $O$  позначимо  $R_{xen} - h_m$ , а відстань від точки  $A$  до точки  $O$  позначимо  $r_{min} + h_m$  (див. рис. 78).

Хвильовою поверхнею точкового джерела є сфера, що визначає фронт розповсюдженої хвилі. Розглянемо таку умоглядну хвильову поверхню первинної хвилі, яка дотикається до країв диска і радіус якої  $R_{xen}$ .

Розіб'ємо її на зони Френеля, припустимо, що відстані  $R_{x\delta n}$  та  $r_{\min}$  були такими, щоб радіус  $R_0$  диску співпадав з радіусом  $R_m$  для  $m$ -ої зони Френеля, тобто виконувалась рівність:

$$R_0 = R_m, \quad \text{або} \quad R_0 = \sqrt{\frac{R_{x\delta n} r_{\min}}{R_{x\delta n} + r_{\min}}} m \lambda.$$

Аналогічно попередньому випадку отвору, при визначенні  $R_m$  було знехтувано величиною  $h_m$ , яка задовольняє умові  $h_m \ll R_{x\delta n}, r_{\min}$ . Оскільки  $R_0 \ll R_{x\delta n}$  та  $R_0 \ll r_{\min}$ , тому в цій формулі наближено можна вважати  $R_{x\delta n} \approx |SO|$  і  $r_{\min} \approx |OA|$ . З останньої рівності випливає значення  $m$  кількості зон, які будуть закриті диском і не даватимуть внеску в амплітуду коливань світлового вектора у точці  $A$ :

$$m = \frac{(R_{x\delta n} + r_{\min}) R_0^2}{R_{x\delta n} r_{\min} \lambda}.$$

Як і для отвору, амплітуда світлового поля в точці  $A$  буде визначатися сумою ряду

$$E(A) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{j-m-1} E_j(A),$$

де  $E_j(A)$  – амплітуда коливань світлового вектора у точці  $A$  від  $j$ -ої френелевої зони і  $E_j(A) > 0$ . Внесок до амплітуди коливань від  $m+1$ -ої зони прийнятий додатним, оскільки результуюча амплітуда має бути додатною  $E(A) > 0$ .

Записана сума має для випадку непрозорого диску вигляд:

$$E(A) = E_{m+1}(A) - E_{m+2}(A) + E_{m+3}(A) - E_{m+4}(A) + \dots$$

Перепишемо її інакше:

$$E(A) = \frac{E_{m+1}(A)}{2} + \left[ \frac{E_{m+1}(A)}{2} - E_{m+2}(A) + \frac{E_{m+3}(A)}{2} \right] + \\ + \left[ \frac{E_{m+3}(A)}{2} - E_{m+4}(A) + \frac{E_{m+5}(A)}{2} \right] + \dots$$

Як вже говорилося, вирази у прямих дужках прямують до нуля. В результаті, отримуємо, що амплітуда коливань світлового поля у точці  $A$  дорівнює половині амплітуди коливань  $m+1$ -ої зони Френеля

$$E(A) = \frac{E_{m+1}(A)}{2}$$

незалежно від парності чи непарності її номеру.

Таким чином, за круглим непрозорим диском амплітуда коливань світлового поля завжди відмінна від нуля. Коли диск закриває лише декілька перших зон Френеля, інтенсивність світла у точці  $A$  буде порівняною з інтенсивністю світла, коли б диску не було. Це достатньо неочікуваний результат, бо з точки зору уявлень геометричної оптики точка  $A$  знаходиться в області тіні, і строго кажучи інтенсивність світла в її околі мала б бути відсутньою. Таку освітлену область за круглим диском називають *плямою Пуассона*. Можливість послідовного пояснення природи утворення подібної світлової плями є переконливим доказом справедливості припущення Френеля про існування дифракційних зон і характер їх випромінювання.

#### 5.4.6. Дифракція Фраунгофера від щілини

Інший цікавий випадок формування дифракційної картини – це так звана *дифракція Фраунгофера*, або дифракція, що спостерігається для паралельних променів світла. Для її спостереження треба мати джерело, від якого поширюються паралельні промені світла. Такий пучок паралельних променів і направляють на перешкоду. Після огинання променями перешкоди результат її впливу на поширення світла розглядається на нескінченності, коли промені, що продифрагували, вже можна розглядати як паралельні. Іншими словами, при дифракції Фраунгофера промені світла, яке падає на перешкоду, і світла, що дифрагує, розглядаються як плоскі хвилі.

У випадку дифракції Френеля сферичних хвиль від точкового джерела на отворі можна застосовувати метод зон, радіус яких визначається за формулою

$$R_m = \sqrt{\frac{r_{\min} R_{\text{хвн}}}{r_{\min} + R_{\text{хвн}}} m \lambda},$$

де  $\lambda$  – довжина хвилі,  $R_{\text{хвн}}$  – радіус хвильової поверхні первинної хвилі, який суміщають з площиною отвору,  $r_{\min}$  – відстань від отвору до екрану (площини спостереження дифракційної картини). При дифракції Френеля радіус зон співставляють з розміром перешкоди (в даному випадку – радіусом отвору).

Коли  $r_{\min} \rightarrow \infty$ , то ця формула набуває вигляду

$$R_m = \sqrt{m R_{\text{хвн}} \lambda}.$$

Якщо тепер віддаляти джерело світла від перешкоди (тобто вважати, що має місце границя  $R_{\text{хвн}} \rightarrow \infty$ ), то можлива ситуація, коли радіус першої

зони Френеля виявиться більшим радіусу отвору. Для таких великих відстаней вже не можна розбивати хвильовий фронт поблизу перешкоди на зони Френеля, а опис явища дифракції треба здійснювати із застосуванням більш строгої теорії.

З фізичних міркувань зрозуміло, що коли  $R_{\text{хвн}} \rightarrow \infty$  та  $r_{\text{min}} \rightarrow \infty$ , то і падаючу і вторинні хвилі можна вважати плоскими.

Здійснимо опис найпростішого випадку дифракції Фраунгофера на однорідній вузькій прямолінійній щілині. Ширину щілини позначимо  $h$ , а амплітуду світлового вектора падаючої плоскої хвилі –  $E_{\text{max}}$ . На рис. 79 зображено хід променів дифракції Фраунгофера на щілині. Промені падаючої монохроматичної хвилі позначено суцільними стрілками, а промені вторинних хвиль – пунктиром.

Після проходження збиральної лінзи паралельні промені вторинних хвиль зберуться у точці  $f$  побічного фокусу, яка лежить у фокальній площині лінзи. У цій площині розміщено екран. Припускається, що площини щілини, лінзи та екрану паралельні між собою,

а центр лінзи розташований напроти середини щілини, так що її головному фокусу на екрані відповідає точка  $F$ .

Вторинні плоскі хвилі когерентні і при їх накладанні на екрані буде утворюватися дифракційна картина. Результат накладання хвиль залежить від оптичної різниці ходу. Зауважимо, що лінза не змінює оптичної різниці ходу хвиль.

Проведемо перпендикулярно до осі щілини і в її площині координатну

вісь  $X$  з нулем в точці  $O$ , що знаходиться посередині щілини. Візьмемо на цій осі в точці з координатою  $x$  маленьку ділянку щілини шириною  $dx$ , якій відповідає вузька смужка щілини.

Як видно з рис. 79, по відношенню до вторинної хвилі, що йде з точки  $O$ , оптична різниця ходу для вторинних хвиль цієї смужки складає

$$\Delta = x \sin \varphi,$$

де  $\varphi$  – кут між хвильовим вектором  $\vec{k}$  вторинної хвилі та перпендикуляром до площини щілини.

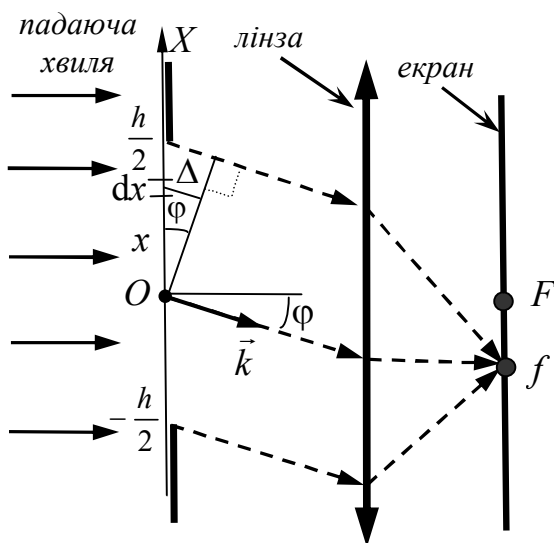


Рис. 79

Врахуємо цю різницю ходу в часовій залежності світлового вектора  $dE(f)$  вторинної хвилі від цієї смужки, який формується в точці  $f$ :

$$dE(f) = E_{\max}^{(sm)} \cos(\omega t - k\Delta),$$

де  $E_{\max}^{(sm)}$  – амплітуда вторинної хвилі,  $\omega$  – її частота,  $k$  – хвильове число:

$k = |\vec{k}|$  (початкова фаза для спрощення прийнята рівною нулю).

За означенням хвильове число обернено пропорційне до довжини хвилі  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ . Амплітуда  $E_{\max}^{(sm)}$  вторинної хвилі прямо пропорційна амплітуді  $E_{\max}$  первинної хвилі, прямо пропорційна ширині  $dx$  смужки та обернено пропорційна ширині  $h$  щілини, тобто  $E_{\max}^{(sm)} = \frac{E_{\max} dx}{h}$ . Отже, у точці  $f$  часова залежність коливань світлового вектора від виділеної тонкої смужки, має вигляд

$$dE(f) = \frac{E_{\max}}{h} \cos(\omega t - \frac{2\pi \sin \varphi}{\lambda} x) dx.$$

Результуюче значення світлового вектора в довільній точці  $f$  від всієї щілини знайдемо шляхом інтегрування по ширині щілини, а саме:

$$\begin{aligned} E(f) &= \int_{-h/2}^{h/2} dE(f) = \frac{E_{\max}}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \cos(\omega t - \frac{2\pi \sin \varphi}{\lambda} x) dx = \\ &= \frac{E_{\max}}{h} \left( -\frac{\lambda}{2\pi \sin \varphi} \right) \sin(\omega t - \frac{2\pi \sin \varphi}{\lambda} x) \Big|_{-h/2}^{h/2} = \\ &= \frac{E_{\max}}{h} \left( -\frac{\lambda}{2\pi \sin \varphi} \right) \left[ \sin(\omega t - \frac{\pi h \sin \varphi}{\lambda}) - \sin(\omega t + \frac{\pi h \sin \varphi}{\lambda}) \right]. \end{aligned}$$

Нагадаємо, що для різниці синусів має місце формула:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Використаємо її, щоб отримати остаточний вираз:

$$E(f) = \frac{E_{\max}}{h} \frac{\lambda}{\pi \sin \varphi} \sin \frac{\pi h \sin \varphi}{\lambda} \cos \omega t.$$

Вираз, який стоїть перед останнім косинусом, фактично дає результуючу амплітуду коливань світлового поля вторинних хвиль у точках екрану. Ці хвилі поширюються під кутом  $\varphi$  і мають амплітуду

$$E_{\max}(f) = E_{\max}^{(\varphi)} = E_{\max} \left| \frac{\sin(\frac{\pi}{\lambda} h \sin \varphi)}{\frac{\pi}{\lambda} h \sin \varphi} \right|.$$

Коли  $\varphi=0$ , чисельник і знаменник в цьому виразі для  $E_{\max}^{(\varphi)}$  прямують до нуля. Але з умови, що границя  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , отримуємо, що  $E_{\max}^{(0)} = E_{\max}$ .

Якщо ж  $\frac{\pi}{\lambda} h \sin \varphi = \pm \pi m$ , де  $m=1, 2, 3, \dots$ , то чисельник у виразі для цієї амплітуди дорівнює нулеві, і для таких кутів дифракції на екрані буде формуватися дифракційний мінімум. Отже, кути  $\varphi_m$ , для яких при дифракції Фраунгофера від щілини на екрані будуть спостерігаються мінімуми амплітуди світлового поля, визначаються з формули

$$h \sin \varphi_m = \pm m \lambda.$$

Коли виконується рівність  $\lambda = h$ , то можливим буде тільки значення  $m=1$ , якому відповідає  $\varphi_m = \frac{\pi}{2}$ . Якщо ширина щілини менша за довжину хвилі, то знайдені вище мінімуми для амплітуди формуватися не зможуть і дифракційна картина буде відсутня. Іншими словами, за умови  $\lambda \sim h$  дифракційне розходження падаючого пучка світла становитиме  $\pm \frac{\pi}{2}$ .

Врахуємо, що інтенсивність первинної плоскої хвилі пропорційна  $I_0 \sim E_{\max}^2$ , а інтенсивність світла на екрані  $I \sim E_{\max}^2(f)$ . Звідси знаходимо, що

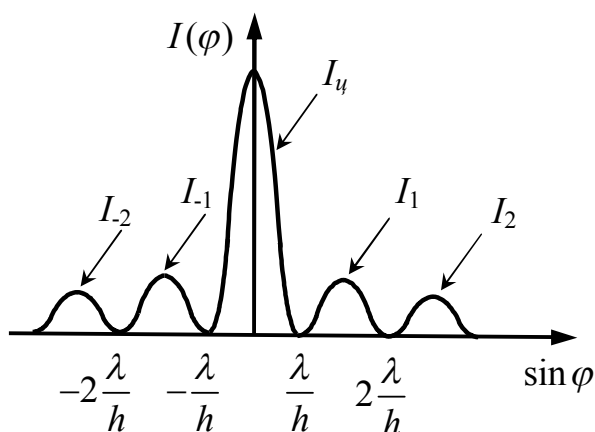


Рис. 80

залежність інтенсивності світла від кута  $\varphi$  при дифракції Фраунгофера на щілині описується виразом

$$I(\varphi) = I_0 \left( \frac{\sin(\frac{\pi}{\lambda} h \sin \varphi)}{\frac{\pi}{\lambda} h \sin \varphi} \right)^2.$$

З цієї формули видно, що мінімуми інтенсивності дійсно відповідають кутам  $\varphi_m$ .

На рис. 80 наведено графік залежності інтенсивності  $I(\varphi)$  від  $\sin \varphi$ , з якого випливає, що в основному енергія хвилі припадає на головний (центральный) максимум. Значення кутів,



що обмежують цей максимум, визначаються з виразу, що задає мінімальну різницю  $h \sin \varphi_{\pm} = \pm \lambda$ . Це дозволяє знайти, що кутова ширина  $\delta \varphi$  центрального максимуму становить

$$\delta \varphi \approx 2 \arcsin \frac{\lambda}{h}.$$

Якщо виконується  $\lambda \ll h$ , то кутова ширина першого центрального максимуму становить  $\delta \varphi = 2 \lambda / h$ .

З рис. 80 маємо, що інтенсивності амплітуд зменшуються по мірі збільшення номера дифракційного максимуму. Відношення амплітуди центрального максимуму до амплітуди сусіднього, відношення інтенсивності другого максимуму до інтенсивності третього і т.д., утворюють послідовність

$$I_0 : I_{\pm 1} : I_{\pm 2} \dots = 1 : \left( \frac{2}{3\pi} \right)^2 : \left( \frac{2}{5\pi} \right)^2 : \dots = 1 : 0,045 : 0,016 : \dots$$

Наведені значення для відношень інтенсивностей сусідніх дифракційних максимумів є універсальними, оскільки не залежать ні від ширини щілини, ні від довжини хвилі, ні від інтенсивності первинної хвилі.

#### 5.4.7. Дифракційні ґрати

*Дифракційні ґрати* – це оптичний пристрій з великою кількістю дуже вузьких однакових щілин, розділених однаковими непрозорими проміжками

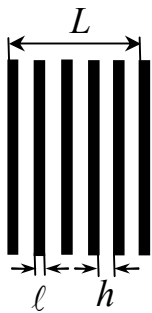


Рис. 81

(рис. 81). Ширину кожної з прозорих щілин позначимо  $h$ , а ширину непрозорого проміжку позначимо  $\ell$ . Суму цих відстаней  $d = h + \ell$  називають *періодом дифракційних ґрат*, або *сталю дифракційних ґрат*. Для дифракційних ґрат завширшки  $L$ , які містять  $N$  щілин, період ґрат можна розрахувати з відношення

$$d = \frac{L}{N}.$$

Направимо перпендикулярно до поверхні ґрат плоску монохроматичну хвилю. Після проходження світлом однієї щілини, вектор світлового поля в площині екрану, паралельного щілині, здійснює коливання, які описуються формулою

$$E = \frac{E_{\max}}{h} \frac{\lambda}{\pi \sin \varphi} \sin \frac{\pi h \sin \varphi}{\lambda} \cos \omega t, \quad \text{або} \quad E = E_{\max}^{(\varphi)} \cos \omega t,$$

де  $\lambda$  – довжина хвилі,  $\omega$  – її частота,  $E_{\max}$  – амплітуда первинної хвилі,  $E_{\max}^{(\varphi)}$  – амплітуда хвилі після проходження нею щілини,  $\varphi$  – кут напрямку поширення хвилі після проходження ґрат.

Тепер треба розрахувати поле після накладання хвиль від різних щілин. Хвилі, що проходять через сусідні щілини (рис. 82), відрізняються різницею ходу

$$\Delta = d \sin \varphi,$$

яка обумовлює різницю у величинах фаз коливань полів цих хвиль. Величина різниці фаз може бути отримана з очевидного співвідношення, а саме:

$$\delta = k\Delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \varphi,$$

де  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  – хвильове число.

В результаті, в площині екрану коливання величин векторів світлового

поля хвиль від кожної (від 1-ої до  $N$ -ої) щілини ґратки можна записати у вигляді:

$$E_1 = E_{\max}^{(\varphi)} \cos \omega t$$

$$E_2 = E_{\max}^{(\varphi)} \cos(\omega t + \delta),$$

$$E_3 = E_{\max}^{(\varphi)} \cos(\omega t + 2\delta),$$

.....,

$$E_N = E_{\max}^{(\varphi)} \cos[\omega t + (N-1)\delta].$$

Як бачимо, фази коливань вектора світлового поля утворюють арифметичну прогресію.

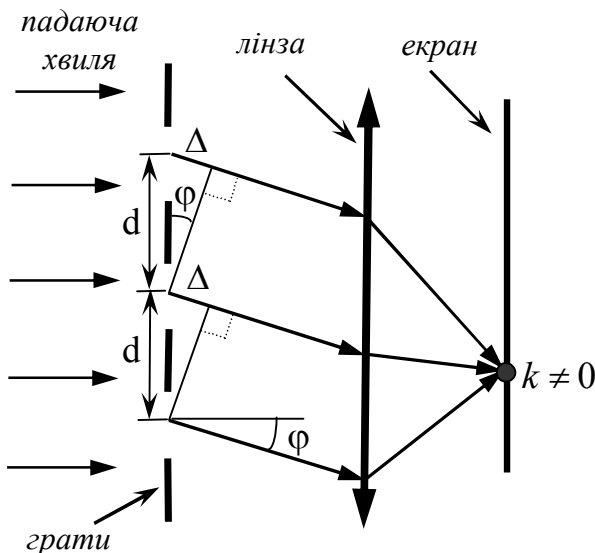


Рис. 82

Результуюче світлове поле визначається шляхом складання коливань

$$E = E_1 + E_2 + \dots + E_N =$$

$$= E_{\max}^{(\varphi)} [\cos \omega t + \cos(\omega t + \delta) + \cos(\omega t + 2\delta) + \dots + \cos(\omega t + (N-1)\delta)].$$

Знаходження амплітуди результуючого коливання при накладанні декількох коливань, фаза яких відрізняється на однакове число, утворюючи арифметичну прогресію, було здійснене у пункті 2.5. Застосуємо формулу для амплітуди результуючого коливання, яку там наведено. Це дає, що після проходження хвилею ґрат амплітудне значення вектора світлового поля визначається за формулою

$$E_{\max}(\varphi) = E_{\max}^{(\varphi)} \frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}}.$$

Підставимо в цей вираз величину  $\delta$  та величину  $E_{\max}^{(\varphi)}$ . В результаті, приходимо до формули:

$$E_{\max}(\varphi) = E_{\max} \frac{\sin(\frac{\pi h}{\lambda} \sin \varphi)}{\frac{\pi h}{\lambda} \sin \varphi} \frac{\sin(\frac{\pi Nd}{\lambda} \sin \varphi)}{\sin(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi)}.$$

Врахуємо, що інтенсивність падаючої на ґрати плоскої світлової хвилі пропорційна  $I_0 \sim E_{\max}^2$ , а інтенсивність світла на екрані  $I(\varphi) \sim E_{\max}^2(\varphi)$ . Звідси прямо знаходимо, що внаслідок дифракції інтенсивність світла у площині екрану в залежності від кута  $\varphi$  описується виразом

$$I(\varphi) = I_0 \left( \frac{\sin(\frac{\pi h}{\lambda} \sin \varphi)}{\frac{\pi h}{\lambda} \sin \varphi} \right)^2 \left( \frac{\sin(\frac{\pi Nd}{\lambda} \sin \varphi)}{\sin(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi)} \right)^2.$$

У другому дробу цього виразу чисельник та знаменник стають рівними нулю для кутів, що задовольняють умові  $\pi(d/\lambda) \sin \varphi_m = \pm m\pi$ , де  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Отже, для кутів  $\varphi_m$ , які визначаються виразом

$$d \sin \varphi_m = \pm m\lambda$$

на екрані мають спостерігатися дифракційні максимуми. Цю формулу називають *формулою дифракційних ґрат*, а відповідно максимуми – *головними максимумами*.

Оскільки границя  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = a$ , то для кута  $\varphi = 0$  другий дріб дорівнює  $N^2$ . Звідси для  $\varphi = 0$  інтенсивність світла набуває значення  $I(\varphi = 0) = I_0 N^2$ , тобто інтенсивність центрального максимуму дифракційних ґрат значно збільшується.

Для інших кутів, а саме:  $\pi N(d/\lambda) \sin \varphi_p = \pm p\pi$ , де  $p = 1, 2, 3, \dots, N-1, N+1, \dots$  (крім точок  $N, 2N, \dots$ ) чисельник другого дробу дорівнює нулю. Для цих кутів на екрані будуть спостерігатися мінімуми інтенсивності, які лежать між головними максимумами. Кутове положення цих мінімумів визначається з умови:

$$d \sin \varphi_p = \pm \frac{P}{N} \lambda.$$

Між ними розташовуються максимуми, але з слабкою інтенсивністю світла.

Таким чином, дифракційна картина від ґрат представляє собою сукупність дуже інтенсивних головних максимумів, між якими знаходиться

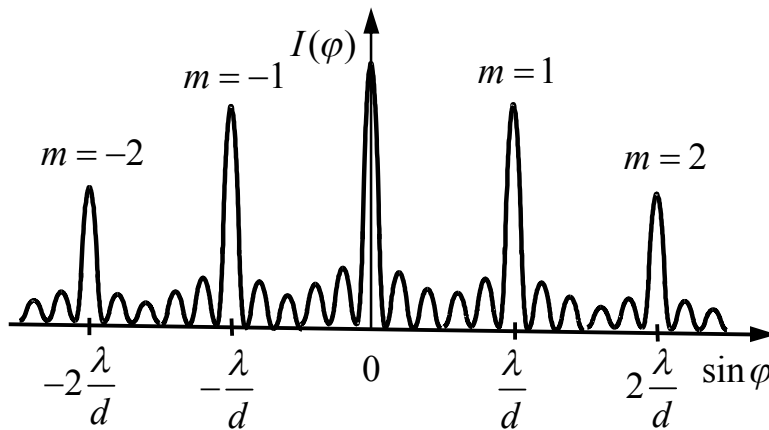


Рис. 83

велика кількість інших максимумів відносно малої інтенсивності (див. рис. 83).

Перший дріб у формулі для інтенсивності дає також мінімуми. Тому треба мати на увазі, що інколи можливе співпадіння кутового положення одного з

головних максимумів з кутовим положенням мінімуму, обумовленим першим дробом (він відповідає кутовому положенню мінімуму для однієї щілини). Такі кути задаються рівністю

$$h \sin \varphi_j = \pm j \lambda,$$

де  $j = 1, 2, 3, \dots$

І коли має місце співпадіння  $\varphi_j = \varphi_m$ , то головний максимум з номером  $m$  буде подавлений деяким мінімумом від щілини і на дифракційній картині спостерігатися не буде. Легко переконатися, що умову такого гасіння головного максимуму можна записати у інший спосіб:  $\frac{d}{h} = \frac{m}{j}$ .

#### 5.4.8. Дифракційні ґрати як оптичний прилад

З формули для кутової залежності інтенсивності для дифракції на ґратах випливає, що положення головних максимумів залежать не тільки від параметрів типу  $h$  або  $d$ , але й від довжини хвилі. Чим більшою є довжина хвилі, тим більшими виявляються величини кутів  $\varphi_m$ . Це в свою чергу, свідчить, що коли на дифракційні ґрати направити немонохроматичне світло, то вони будуть його розкладати, утворюючи кольоровий спектр, причому найбільше буде відхилятися червона складова світла. Тим самим,

дифракційні ґрати можуть служити оптичним приладом, який дозволяє аналізувати світлові пакети та отримувати спектр хвиль, що їх утворюють.

Характеристиками дифракційних ґрат є кутова дисперсія, роздільна здатність та область дисперсії.

*Кутова дисперсія* визначає кутове відхилення падаючих на ґрати хвиль в залежності від їх довжини. Позначають кутову дисперсію буквою  $D$  і розраховують за формулою

$$D = \frac{d\varphi}{d\lambda},$$

де  $d\varphi$  – кутовий зсув положення головного максимуму при зміні довжини хвилі на  $d\lambda$ .

Продиференціюємо формулу дифракційних ґрат. Прийдемо до зв'язку між  $d\varphi$  та  $d\lambda$ , який має вигляд

$$d \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi = m \cdot d\lambda.$$

Це дає вираз для кутової дисперсії у вигляді

$$D = \frac{m}{d \cdot \cos \varphi}.$$

З нього випливає, що величина  $D$  росте як при збільшенні порядку головного максимуму, так і при зростанні кутів головних максимумів.

*Роздільна здатність* тих чи інших дифракційних ґрат визначається як найменша різниця довжин хвиль, які може розділити прилад. Величина роздільної здатності розраховується за формулою

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda},$$

де  $\delta\lambda$  – найменша різниця довжин хвилі, які можуть бути розділені (розрізнені) за допомогою ґрат (тобто ґрати «бачать» ці хвилі як різні за довжинами).

Хвилі однакової інтенсивності з довжинами  $\lambda$  та  $\lambda - \delta\lambda$  можна розрізнити, коли, щонайменше, головний максимум хвилі з довжиною  $\lambda$  співпадає з першим мінімумом для хвилі з довжиною хвилі  $\lambda - \delta\lambda$ . Цій умові відповідають рівняння:

$$d \sin \varphi = m\lambda,$$

$$d \sin \varphi = \left(m + \frac{1}{N}\right)(\lambda - \delta\lambda).$$

Віднявши від другого рівняння перше та знехтувавши величинами другого порядку малості, отримуємо:

$$\frac{\lambda}{N} - m \cdot \delta\lambda = 0,$$

де прийнято, що  $N \gg 1$ , а  $\delta\lambda \ll \lambda$ .

В результаті, знаходимо, що формула для роздільної здатності ґрат набуває вигляду

$$R = mN.$$

Таким чином, роздільна здатність ґрат зростає, тобто чутливість їх покращується, при збільшенні номеру головного максимуму (за рахунок росту  $m$ ) та при збільшенні кількості щілин в ґратах.

Зрозуміло, що перекриття спектрів сусідніх максимумів є негативним явищем, яке обмежує використання ґрат, бо при такому перекритті чутливість знижується і ґрати стають недієздатними. Діапазон довжин хвиль  $\Delta\lambda$ , для яких спектри сусідніх головних максимумів не перекриваються, називається *дисперсійною областю*.

Для знаходження величини дисперсійної області порівняємо кути положення двох сусідніх головних максимумів для хвиль з довжинами  $\lambda$  та  $\lambda - \Delta\lambda$

$$d \sin \varphi = m\lambda,$$

$$d \sin \varphi = (m+1)(\lambda - \Delta\lambda).$$

Аналогічно попередньому випадку знайдемо різницю цих рівнянь, що дає:

$$\lambda - (m+1)\Delta\lambda = 0.$$

Звідси легко заключити, що дисперсійна область обмежена інтервалом довжин хвиль

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m+1}.$$

Видно, що дисперсійна область пропорційна довжині хвилі, але її величина на відміну від роздільної здатності зменшується при збільшенні номера головного максимуму та не залежить від числа щілин у ґратці.

## 5.5. Поляризація світла

Електромагнітні хвилі є поперечними і в них вектори напруженості електричного поля  $\vec{E}$ , магнітного поля  $\vec{H}$  та хвильовий вектор  $\vec{k}$  утворюють трійку взаємно перпендикулярних векторів  $\vec{E} \perp \vec{H} \perp \vec{k}$ . У хвилі з заданим напрямком хвильового вектора орієнтації векторів  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  залишаються невизначеними. Можна лише констатувати, що вони лежать у площині, яка

перпендикулярна до хвильового вектора. Для визначення напрямків векторів  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  достатньо встановити напрямок лише одного з них (як правило, обирають світловий вектор  $\vec{E}$ ). Явище впорядкування напрямків коливань векторів  $\vec{E}$  або  $\vec{H}$  у світловій електромагнітній хвилі називають *поляризацією світла*.

Хвиля, яку випромінює окремий атом чи молекула, є поляризованою. Звичайні джерела світла містять величезну кількість таких випромінюючих частинок, кожна з яких породжує світло спонтанно, тобто незалежно від інших. Тому для звичайних джерел явище спонтанного впорядкування для орієнтації вектора напруженості  $\vec{E}$  відсутнє. Вектор  $\vec{E}$  кожної з випромінених звичайними джерелами світлових хвиль має випадкову орієнтацію у площині, що перпендикулярна до хвильового вектора. Саме це обумовлює неполяризований в цілому характер випромінювання, що йде від звичайних джерел.

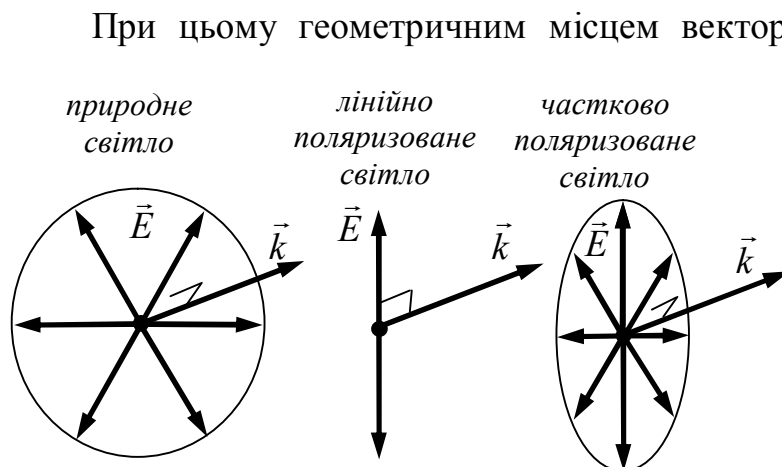


Рис. 84

рис. 84) з радіусом, який дорівнює амплітуді вектора напруженості електричного поля. Таке світло і називається *неполяризованим*.

Наприклад, сонячне світло є неполяризованим – його ще називають *природним світлом*.

Для такого світла розподіл вектора напруженості електричного поля в площині, що перпендикулярна до хвильового вектора, наведено на рис. 84.

Плоска монохроматична гармонічна хвиля (див. пункт 3.2) описується рівнянням

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_{\max} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0),$$

де  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  – вектор напруженості електричного поля хвилі в точці  $\vec{r}$  в момент часу  $t$ ,  $\vec{E}_{\max}$  – вектор амплітудної напруженості електричного поля),  $\omega$  – частота хвилі, з якою відбуваються коливання вектора напруженості електричного поля під час хвильового процесу, а  $\vec{k}$  – хвильовий вектор, модуль якого є хвильовим числом, і величина якого пов'язана з довжиною

хвилі співвідношенням  $k = |\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$ , причому  $\omega = ck$ ,  $\varphi_0$  – початкова фаза.

Розглянемо таку хвилю, коли вона поширюється вздовж осі  $X$  з  $\vec{k} \uparrow\uparrow X$  і коли її вектор напруженості електричного поля лежить вздовж осі  $Z$ , тобто  $\vec{E}_{\max} \uparrow\uparrow Z$ . Розподіл поля цієї хвилі для довільного моменту часу наведено на рис. 85. Видно, що вектори  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  для всіх точок  $\vec{r}$  цієї плоскої монохроматичної хвилі і всіх часів лежать в одній площині, яка утворена векторами  $\vec{E}_{\max}$  та  $\vec{k}$ .

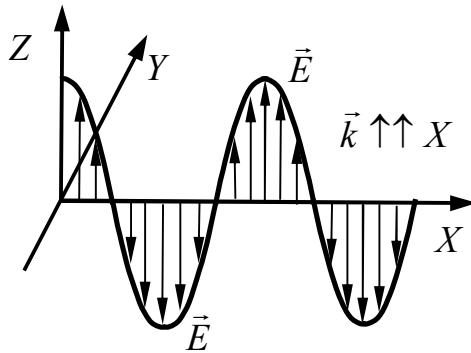


Рис. 85

Світло, вектор напруженості електричного поля якого заданий у площині, називається *плоско поляризованим* або *лінійно поляризованим* світлом. Площину, в якій лежать вектори  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  плоско-поляризованого світла і в якій лежить також вектор  $\vec{k}$ , називають *площиною поляризації*. На рис. 85 такою площиною є площина  $XZ$ .

Якщо світло складається з хвиль (у загальному випадку з різними частотами), вектори  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  яких паралельні між собою і лежать в одній площині з вектором  $\vec{k}$ , то таке світло також буде лінійно поляризованим.

Розподіл вектора напруженості електричного поля у площині поляризації для лінійно поляризованого світла є відрізок половини довжини якого становить  $E_{\max}$  (див. рис. 84).

Можливий випадок, коли вектор напруженості електричного поля в площині, яка перпендикулярна до  $\vec{k}$ , обмежений не колом, а еліпсом (див. рис. 84), таке світло називається *частково поляризованим*. Частково поляризоване некогерентне світло можна представити сумою некогерентного неполяризованого (природного) світла та некогерентного лінійно поляризованого світла. Нагадаємо, що при накладанні некогерентних хвиль інтенсивність результуючого світла дорівнює сумі інтенсивностей хвиль, що накладаються.

Поляризоване або частково поляризоване світло характеризують коефіцієнтом, який називають *ступенем поляризації світла* і який визначають за формулою



$$p_{\text{пол}} = \frac{I_{\text{max}} - I_{\text{min}}}{I_{\text{max}} + I_{\text{min}}},$$

де  $I_{\text{max}}$  – інтенсивність складової світла, яка визначена вздовж більшої півосі еліпсу на рис. 84, а  $I_{\text{min}}$  – інтенсивність світла, що визначена для складової світла вздовж меншої півосі еліпсу.

Коли  $p_{\text{пол}} = 0$ , світло є неполяризованим, а коли  $p_{\text{пол}} = 1$ , світло є лінійно і повністю поляризованим. У частково поляризованого світла  $0 < p_{\text{пол}} < 1$ .

Тепер для прикладу розглянемо поляризацію світла, що складається з двох когерентних лінійно поляризованих хвиль однакової частоти, зсув фаз між якими становить  $\pm \frac{\pi}{2}$ . Будемо вважати, що площини поляризації обох хвиль перпендикулярні між собою, тобто, що теж саме, вектори  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  обох хвиль перпендикулярні між собою. Нехай ці хвилі поширюються вздовж осі  $X$ , причому  $XZ$  – площина поляризації першої хвилі, а  $YZ$  – площина поляризації другої хвилі. Рівняння обох хвиль мають вигляд

$$E_z(x, t) = E_{\text{max}}^{(z)} \cos(\omega t - kx),$$

$$E_y(x, t) = E_{\text{max}}^{(y)} \cos(\omega t - kx \pm \frac{\pi}{2}),$$

де  $E_{\text{max}}^{(z)}$ ,  $E_{\text{max}}^{(y)}$  – амплітудні значення полів хвиль.

У загальному випадку результуюче поле є суперпозиція обох полів, а саме:

$$\vec{E}(x, t) = E_y(x, t)\vec{j} + E_z(x, t)\vec{k},$$

де  $\vec{j} \uparrow\uparrow Y$  та  $\vec{k} \uparrow\uparrow Z$  – одиничні вектори (орти), що визначають поляризації.

Таким чином, у довільній точці з координатою  $z$ , результуюче поле від накладання електричних полів хвиль з однаковою частотою, що поляризовані в перпендикулярних напрямках (див. пункт 2.12), визначаються сумою напруженостей. Коли зсув фаз між коливаннями дорівнює  $\pm \frac{\pi}{2}$ , то проекції поля задовольняють рівнянню

$$\left[ \frac{E_z(x, t)}{E_{\text{max}}^{(z)}} \right]^2 + \left[ \frac{E_y(x, t)}{E_{\text{max}}^{(y)}} \right]^2 = 1.$$

При цьому неважко перевірити, що кінець вектора результуючої напруженості описує еліпс, а початок вектора лежить в центрі еліпса (див.

рис. 32). Такі світлові хвилі мають *еліптичну* поляризацію. Отже, у кожній точці простору кінець вектора напруженості електричного поля при еліптичній поляризації рухається по еліпсу.

Коли ж амплітуди обох хвиль однакові  $E_{\max}^{(z)} = E_{\max}^{(y)}$ , кінець вектора результуючого поля рухається по колу. Це випадок *кругової* поляризації.

Не менш цікавим є просторовий розподіл поля хвилі при круговій чи еліптичній поляризації. На рис. 86 для моменту часу  $t=0$  зображений

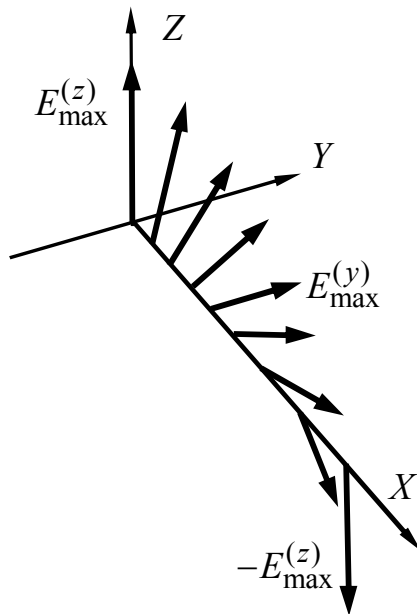


Рис. 86

розподіл векторів напруженості електричного поля при накладанні двох лінійно поляризованих хвиль  $E_z(x,t)$  та  $E_y(x,t)$  в різних точках, що лежать вздовж осі  $X$ , коли зсув фаз становить  $\frac{\pi}{2}$ . Хвильовий вектор

направлений вздовж осі  $\vec{k} \uparrow\uparrow X$ . Якщо дивитися на рис. 86, так щоб напрямок зору був направлений протилежно до напрямку поширення хвилі, тобто протилежно до вектора  $\vec{k}$ , то бачимо, що при зсуві фаз на  $\frac{\pi}{2}$

кінець вектора  $\vec{E}$  здійснює обертальний рух по еліпсу за ходом годинникової стрілки. Така хвиля називається *право* поляризованою. Якщо зсув фаз коливань становить  $-\frac{\pi}{2}$ , то при вибраному напрямку зору, обертальний рух кінця вектора  $\vec{E}(x,t)$  буде відбуватися проти ходу годинникової стрілки. Така хвиля за означенням є *ліво* поляризованою.

### 5.5.1. Закон Малюса

Для отримання лінійно поляризованого світла використовують так звані *поляризатори*. Поляризатор не пропускає (відбиває або поглинає) складову поля хвилі, що є перпендикулярною до осі поляризатора, а складову поля хвилі, що паралельна до осі поляризатора, пропускає майже без змін. Для останньої може існувати слабке поглинання, яким, як правило, нехтують.

Якщо направити на поляризатор природне світло, то після проходження ним поляризатора вектор напруженості світлового

електричного поля  $\vec{E}_{z_{пол}}$  буде лінійно поляризованим, причому  $\vec{E}_{z_{пол}}$  буде паралельним осі  $Z_{пол}$  поляризатора (див. рис. 87).

Як довести, що це світло дійсно має лінійну поляризацію? Для цього використаємо ще один (такий самий, як і попередній) поляризатор, який у схемі розташування, наведений на рис. 87, називають *аналізатором*. Вісь аналізатора на рис. 87 позначена  $Z_{ан}$ . Очевидно, що коли осі  $Z_{пол}$  поляризатора та  $Z_{ан}$  аналізатора паралельні, кут  $\theta$  на рис. 87 дорівнює нулю,

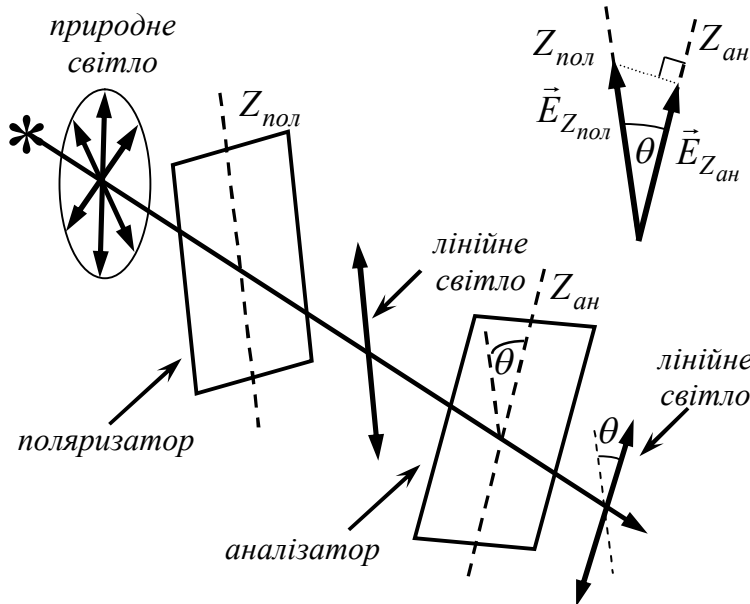


Рис. 87

$\theta = 0$ , то лінійно поляризоване світло пройде через аналізатор без змін, і тому вектор  $\vec{E}_{z_{пол}} \parallel \vec{E}_{z_{ан}}$ .

Якщо  $Z_{пол} \perp Z_{ан}$ , то вектор  $\vec{E}_{z_{пол}}$  поляризованого світла буде перпендикулярним до осі аналізатора, а кут  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

При такій взаємній орієнтації головних осей

поляризатора та аналізатора світло через аналізатор проходити не зможе. Саме у такий спосіб перевіряється ступінь поляризації світлових хвиль.

Коли кут  $\theta$  між осями поляризатора та аналізатора довільний, то при визначенні напрямку поля хвилі, що проходить через аналізатор, необхідно напруженість лінійно поляризованого світла розкласти на дві складові – вздовж осі аналізатора та перпендикулярно до неї. Після аналізатора буде поширюватися хвиля з поляризацією, яка співпадає за напрямком з віссю аналізатора. Амплітуда напруженості електричного поля  $E_{\max}^{(z_{ан})}$  цієї хвилі дорівнює складовій на вісь аналізатора амплітуди напруженості  $E_{\max}^{(z_{пол})}$ , тобто

$$E_{\max}^{(z_{ан})} = E_{\max}^{(z_{пол})} \cos \theta.$$

Врахуємо, що інтенсивність хвилі після поляризатора пропорційна  $I_{z_{пол}} \sim |E_{\max}^{(z_{пол})}|^2$ , а після аналізатора –  $I_{z_{ан}} \sim |E_{\max}^{(z_{ан})}|^2$ . Отже, знаходимо, що інтенсивність лінійно поляризованого світла після проходження ним аналізатора описується співвідношенням

$$I_{zan} = I_{z_{nol}} \cos^2 \theta.$$

Цей вираз називають *законом Малюса*.

Природне світло некогерентне, тому його завжди можна представити сумою двох лінійно поляризованих хвиль з перпендикулярними площинами поляризації і однаковими інтенсивностями. Поляризатор поглинає/відбиває перпендикулярну до його осі складову поля світлової хвилі. Тому у загальному випадку інтенсивність лінійно поляризованого світла, що вийшло з поляризатора, на який направлене природне світло, становитиме рівно половину інтенсивності падаючого на поляризатор світла:

$$I_{Z_{nol}} = \frac{1}{2} I_{np},$$

де  $I_{np}$  – повна інтенсивність природного світла.

В результаті, можна стверджувати, що після проходження природним світлом двох схрещених поляризаторів інтенсивність остаточного лінійно поляризованого світла буде описуватися виразом

$$I_{zan} = \frac{1}{2} I_{np} \cos^2 \theta.$$

Зауважимо, що в цьому виразі знехтувано слабким поглинанням обома схрещеними поляризаторами (а точніше – поляризатором і аналізатором, вісі яких направлені під кутом  $\theta$  одна до одної) тієї складової поля хвилі, поляризація якої паралельна до їх осей.

### 5.5.2. Поляризація світла при відбиванні та заломленні

В пункті 5.1.2 були розглянуті закони заломлення та відбивання світла на межі двох однорідних ізоотропних середовищ – діелектриків. При цьому мова йшла тільки про зміну напрямку поширення світла і жодного слова не говорилося про інтенсивності відбитого або заломленого променів.

Очевидно, що величини інтенсивностей відбитого та заломленого променів повинні залежати від характеристик середовищ, тобто від їх показників заломлення.

Розглянемо випадок, коли світло падає на межу нормально (перпендикулярно). Якщо обидва середовища однорідні та ізоотропні, то при нормальному падінні кут падіння та кут відбивання дорівнюють нулеві. Припустимо, що падаюче перпендикулярно на межу світло має інтенсивність  $I_{nad}$ . Тоді інтенсивність  $I_{vid}$  відбитого світла визначається за формулою:

$$I_{від} = I_{над} \frac{(n_2 - n_1)^2}{(n_2 + n_1)^2},$$

в якій  $n_1$  – показник заломлення середовища, де поширюються падаюча та відбита хвилі, а  $n_2$  – показник заломлення середовища, в якому існує заломлена хвиля.

Інтенсивність заломленої хвилі буде визначатися різницею

$$I_{зал} = I_{над} - I_{від}.$$

В ізотропному середовищі всі напрямки відносно нормалі є еквівалентними, тому результат відбивання нормального до межі світла не залежить від його поляризації.

Ситуація значно ускладнюється, якщо світло падає на межу двох ізотропних середовищ під довільним кутом. В цьому випадку результат

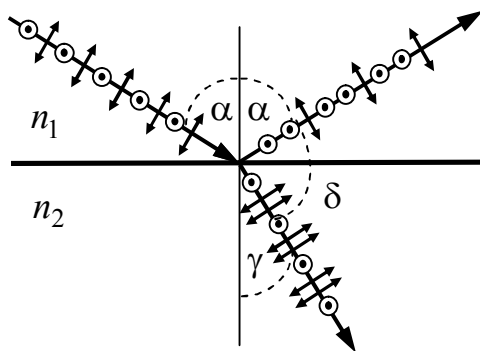


Рис. 88

відбивання та заломлення світла залежить від його поляризації. Треба розрізнити дві ситуації: 1) вектор напруженості електричного поля лінійно поляризованого світла лежить в площині падіння світла (нагадаємо цю площину утворюють падаючий та відбитий промені), 2) він перпендикулярний до цієї площини. Легко зрозуміти, що таким випадкам відповідають різні кути між вектором напруженості світлового поля хвилі з

межею, яка розділяє середовища.

Коли напруженість електричного поля лінійно поляризованого світла падаючої хвилі перпендикулярна до площини падіння, то незалежно від кута поширення відбитої і заломленої хвиль їх вектор напруженості залишається паралельним до площини межі (на рис. 88 така поляризація позначена кружечками з точками). Якщо вектор напруженості електричного поля падаючої хвилі лежить у площині падіння, то поляризація всіх трьох хвиль – падаючої, відбитої та заломленої – буде різною (відповідні напрямки поляризації на рис. 88 позначені подвійними стрілками). Через це процес відбивання та заломлення стає залежним від поляризації падаючої хвилі, що, зрозуміло, впливає на інтенсивності відбитої та заломленої хвиль.

Нехай падаюче світло є природним. Природне неполяризоване некогерентне світло, можна представити сумою двох лінійно поляризованих хвиль з перпендикулярними площинами поляризації і однаковими

інтенсивностями. На рис. 88 це зображено тим, що кількість кружечків та кількість подвійних стрілок у падаючої природної хвилі однакова. Направимо природне світло на межу. Що стосується інтенсивностей відбитої та заломленої хвиль, то для цих складових світла вони однаковими вже не будуть. В результаті відбите світло і заломлене світло стають частково поляризованим.

Напрямки переважної часткової поляризації відбитого та заломленого променів будуть різними. Відбите світло набуває часткової поляризації у площині, що є перпендикулярною до площини падіння світла, тому при зображенні відбитої хвилі на рис. 88 кількість кружечків більша за кількість подвійних стрілок. Навпаки, заломлене світло стає частково поляризованим у площині, яка співпадає з площиною падіння світла, тому при зображенні заломленої хвилі на рис. 88 кількість подвійних стрілок перевищує кількість кружечків.

Ступінь такої часткової поляризації відбитого та заломленого світла залежить від кута падіння. Зокрема, коли відбитий промінь є перпендикулярним до заломленого, то він буде мати лінійну поляризацію з коефіцієнтом поляризації  $p_{\text{пол}} = 1$ . Явище набуття повної лінійної поляризації, коли  $p_{\text{пол}} = 1$ , для відбитого природного світла називають *законом Брюстера*.

На рис. 88 кут між відбитим та заломленим променем позначений буквою  $\delta$ . Іншою мовою, закон Брюстера має місце, коли  $\delta = \frac{\pi}{2}$ .

З рис. 88 легко бачити, що сума кутів падіння  $\alpha$ , заломлення  $\gamma$  та  $\delta$  дорівнює величині  $\pi$ . Звідси негайно знаходимо, що при  $\delta = \frac{\pi}{2}$ , сума кутів падіння та заломлення також фіксована:  $\alpha + \gamma = \frac{\pi}{2}$ .

Врахуємо тепер, що кути  $\alpha$  та  $\gamma$  задовольняють закону заломлення, а саме:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{n_2}{n_1}.$$

У підсумку, приходимо до результату, згідно з яким закон Брюстера виконується для кута падіння, що визначається формулою:

$$\operatorname{tg} \alpha_B = \frac{n_2}{n_1},$$

де кут  $\alpha_B$  називають *кутом Брюстера*. Використовуючи закон Брюстера, можна досить просто перетворювати природне світло у плоско поляризоване, чим користуються при створенні ряду оптичних приладів.

### 5.5.3. Проходження світла через анізотропні речовини: подвійне променезаломлення

Суть явища *подвійного променезаломлення* полягає у роздвоєнні (або розбитті) променя, що пройшов через анізотропне середовище, на два окремі промені. Покажемо, що подвійне променезаломлення є наслідком залежності показника заломлення від поляризації світла та від напрямку його розповсюдження відносно осі анізотропії середовища.

На рис. 89 демонструється, як внаслідок явища подвійного променезаломлення неполяризоване світло при нормальному падінні на прозору пластинку (після проходження неї) розбивається на два окремі промені. Один, що на рис. 89 позначений *зв*, називають *звичайним*. Перебуваючи в середовищі він не змінює напрямку свого поширення, другий промінь, який позначено *незв*, називають *незвичайним*. У середовищі він змінює напрямок свого поширення відносно падаючого, і для нього не виконується закон заломлення.

На рис. 89 *вісь анізотропії* середовища позначено *OZ*. Вона задає напрямок, вздовж якого оптичні властивості середовища відрізняються від властивостей у напрямку, що перпендикулярний до неї.

На рис. 89 вісь анізотропії *OZ* лежить в одній площині з падаючим променем. Таку площину називають *головною площиною* середовища.

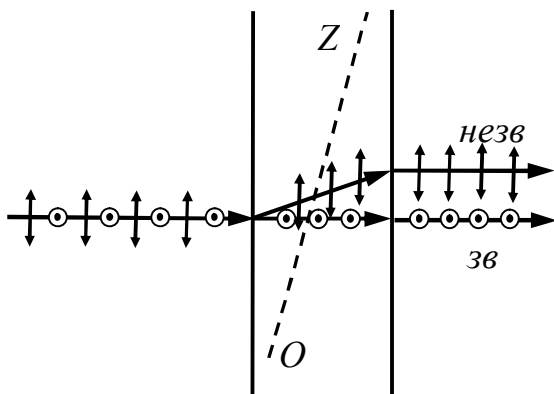


Рис. 89

Коли падаюче світло неполяризоване, то його можна представити сумою двох лінійно поляризованих променів з взаємно перпендикулярними площинами поляризації. У звичайного променя вектор напруженості електричного поля є перпендикулярним до головної площини середовища, а у незвичайного

променя – лежить у головній площині. Очевидно, що по відношенню до осі анізотропії такі промені не є еквівалентними. Саме ця нееквівалентність і

призводить до явища подвійного променезаломлення, яке має місце навіть при перпендикулярному падінні світла на пластину (але за умови відповідного напрямку осі анізотропії).

Якщо світло поширюється вздовж осі анізотропії, то явища подвійного променезаломлення не виникає, бо у такому випадку обидві поляризації світла повністю еквівалентні відносно цієї осі.

Розрізнити звичайний та незвичайний промені можна за допомогою поляризатора, який розміщують на шляху світла після проходження ним пластини. Коли вісь поляризатора паралельна головній оптичній осі, то через поляризатор пройде тільки незвичайний промінь. Коли ж вісь поляризатора перпендикулярна до головної площини, то через нього пройде лише звичайний промінь. З рис. 89 видно, що після проходження пластинки незвичайний промінь буде також просторово зсунутим відносно звичайного. Коли повертати вісь поляризатора, то на екрані спостерігатиметься перетворення зображення, що відповідає звичайному променю до зображення, що відповідає незвичайному променю.

Для звичайного променя показник заломлення  $n_{зв} = \frac{c}{v_{зв}}$  не залежить від напрямку поширення світла, де  $v_{зв}$  – швидкість поширення звичайного променя у середовищі. Показник же заломлення незвичайного променя  $n_{незв} = \frac{c}{v_{незв}}$ , де  $v_{незв}$  – швидкість в середовищі незвичайної хвилі, залежить від напрямку поширення світла. При поширенні світла вздовж осі анізотропії показники заломлення та швидкості поширення обох хвиль будуть однаковими. Різниця між величинами цих параметрів зростає по мірі відхилення напрямку поширення світла від осі анізотропії. Знак різниці може бути як додатним, так і від’ємним, що є особливістю речовини середовища.

Явище подвійного променезаломлення може провокуватись і в ізотропних середовищах, але для цього на них треба подіяти зовнішніми полями, що понижують вихідну симетрію середовища і призводять до утворення в ньому виділеного напрямку з відповідною віссю анізотропії. Пониження симетрії можна, наприклад, досягти при осьовому (вздовж будь-якої осі, що не паралельна напрямку поширення світла) стиску оптично ізотропної речовини. При стиску вздовж осі, що перпендикулярна до напрямку поширення світла, різниця показників заломлення звичайного і незвичайного променів пропорційна величині прикладеного напруження і визначається за формулою



$$n_{зв} - n_{незв} = \kappa \sigma ,$$

де  $\kappa$  – коефіцієнт пропорційності, а  $\sigma$  – величина напруження.

Якщо, з іншого боку, ізотропне середовище розмістити в електростатичному полі, вектор напруженості якого перпендикулярний до напрямку поширення хвилі, то також буде спостерігатися явище подвійного променезаломлення – *ефект Керра*. Різниця показників звичайного та незвичайного променів при ефекті Керра визначається за формулою

$$n_{зв} - n_{незв} = B \lambda E_{ст}^2 ,$$

де  $B$  – *постійна Керра*, величина якої залежить, звичайно, від роду речовини,  $\lambda$  – довжина хвилі падаючого на пластинку світла,  $E_{ст}$  – величина вектора напруженості електростатичного поля.

При розміщенні ізотропної речовини у стаціонарному магнітному полі також буде спостерігатися явище подвійного променезаломлення – *ефект Коттона-Муттона*, при якому різниця показників заломлення визначається за формулою

$$n_{зв} - n_{незв} = C \lambda H_{ст}^2 ,$$

де  $C$  – *постійна Коттона-Муттона*, величина якої також залежить від роду речовини,  $\lambda$  – довжина хвилі,  $H_{ст}$  – величина вектора напруженості стаціонарного магнітного поля.

З фізичної точки зору важливо, що промені звичайного та незвичайного світла по-різному поглинаються середовищем. Таке явище називають *дихроїзмом*. Поглинання при цьому залежить від довжини хвилі, тому інколи виникає враження, що колір кристалів залежить від їх товщини.

Так, в кристалі турмаліну має місце сильне поглинання звичайного променя, а поглинання незвичайного променя при його поширенні в турмаліні незначне. Подібні речовини зручно використовувати у якості поляризаторів світла. Треба тільки правильно підібрати товщину кристалу. Наприклад, в кристалі турмаліну при проходженні відстані  $\approx 1$  мм звичайний промінь буде повністю поглинутий. Тому при опроміненні природним світлом кристалу турмаліну приблизно такої товщини воно перетворюється на лінійно поляризоване світло незвичайних хвиль, які пройдуть через кристал майже без поглинання. Вісь такого поляризатора співпадає з головною оптичною віссю.

На завершення також зауважимо, що існують такі речовини, при проходженні через які лінійно поляризованого світла відбувається поворот площини його поляризації. Відповідні речовини називаються *оптично*

*активними*. До них відносяться, наприклад, розчини цукру чи кристали кварцу. Поворот площини поляризації може відбуватися як за годинниковою стрілкою, так і проти її ходу. Кут повороту при цьому визначається самою речовиною, довжиною хвилі та відстанню, яку світло проходить в оптично активному середовищі.

## **5.6. Питання для самоконтролю**

1. Дайте означення оптики.
2. Яке світло називається видимим? Які хвилі відносяться до інфрачервоних, а які – до ультрафіолетових?
3. За якою формулою визначається швидкість світла?
4. Запишіть математичне формулювання принципу Ферма.
5. Виведіть закони відбивання та заломлення світла.
6. В чому фізична суть явища повного внутрішнього відбивання?
7. Чому і за яких умов закони заломлення світла задовольняють теорії Максвелла?
8. Визначте величину кутового зміщення променя після проходження ним призми.
9. Яка дисперсія світла вважається нормальною, а яка – аномальною?
10. Виведіть формулу залежності діелектричної проникності від частоти хвилі.
11. Що таке групова швидкість і як отримати формулу для неї?
12. Поясніть, що таке інтерференція?
13. Дайте пояснення когерентності хвиль.
14. Використовуючи поняття різниці ходу, запишіть умови виникнення інтерференційних мінімумів та максимумів.
15. Поясніть дослід Юнга.
16. Яким у досліді Юнга є розподіл інтенсивності світла на екрані?
17. Що таке час когерентності та довжина когерентності?
18. Поясніть утворення інтерференції з застосуванням біпризми Френеля.
19. Опишіть явище інтерференції на тонких плівках.
20. Як утворюються кільця Ньютона?
21. Дайте означення явища дифракції.
22. У чому суть принципу Гюйгенса і як з його допомогою довести закон заломлення?
23. Запишіть математичне формулювання принципу Гюйгенса-Френеля.

24. Що таке зони Френеля? Розрахуйте їх радіус та площу.
25. Поясніть утворення дифракційної картини від круглого отвору або диску.
26. Виведіть вираз для інтенсивності дифракції світла на щілині.
27. Отримайте формулу дифракційних ґрат.
28. Дайте означення поляризації світла.
29. Яке світло є ліво поляризованим, а яке є право поляризованим?
30. Для чого існує поляризатор, а для чого – аналізатор?
31. Сформулюйте закон Брюстера.
32. У чому полягає явище подвійного променезаломлення?
33. Як навести оптичну анізотропію і в чому вона проявляється? Наведіть приклади наведеного подвійного променезаломлення.

### 5.7. Формули, необхідні для розв'язку задач

1. Формули для швидкості поширення світлових хвиль у лінійному ізотропному однорідному середовищі визначається з формул

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}}, \quad v = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}, \quad v = \frac{c}{n},$$

де  $\varepsilon_0$  – діелектрична стала,  $\mu_0$  – магнітна стала,  $\varepsilon$  і  $\mu$  – електрична та магнітна проникності середовища,  $c$  – швидкість світла у вакуумі,  $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$  – показник заломлення середовища

2. Закони відбивання та заломлення

$$\alpha = \beta, \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = n_{21},$$

де  $\alpha$  – кут падіння,  $\beta$  – кут відбивання,  $\gamma$  – кут заломлення,  $n_{21}$  – відносний показник заломлення, який визначається відношенням

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1}, \text{ або, що теж саме, } n_{21} = \frac{v_1}{v_2}.$$

3. Формула Релея для групової швидкості

$$v_{gp} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}.$$

4. Інтенсивність світла при накладанні двох когерентних хвиль

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi_1^{(0)} - \varphi_2^{(0)}),$$

де  $\varphi_1^{(0)} - \varphi_2^{(0)}$  – різниця фаз.

5. Формула для оптичної різниці ходу

$$\Delta = n_2 d_2 - n_1 d_1,$$

де  $n_1, n_2$  – показники середовищ, у яких хвилі проходять відстані  $d_1$  та  $d_2$ , відповідно.

6. Умови інтерференційного максимуму та мінімуму

$$\Delta = m\lambda, \quad \Delta = \frac{2m+1}{2}\lambda,$$

де  $\lambda$  – довжина хвилі,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  – ціле число.

7. Формула для ширини інтерференційної смуги у досліді Юнга

$$\Delta x_\lambda = \frac{\lambda \ell}{nd}, \quad \Delta x_\lambda = \frac{\lambda}{n\psi},$$

де  $\lambda$  – довжина хвилі,  $d$  – відстань між джерелами,  $\ell$  – відстань від джерел до екрану,  $\psi$  – кут, під яким з точки центру інтерференційної картини видно обидва джерела,  $n$  – показник заломлення.

8. Формули для часу когерентності та довжини когерентності

$$t_{\text{ког}} = \frac{2\pi}{\Delta\omega}, \quad \ell_{\text{ког}} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda},$$

де  $\Delta\omega$  та  $\Delta\lambda$  – інтервали частот та довжин хвиль, які визначаються спектром світлових хвиль.

9. Формула для радіуса  $m$  – ї зони Френзеля

$$R_m = \sqrt{\frac{r_{\min} R_{\text{хвн}}}{r_{\min} + R_{\text{хвн}}} m\lambda}.$$

де  $\lambda$  – довжина хвилі,  $R_{\text{хвн}}$  – радіус хвильової поверхні первинної сферичної хвилі від точкового джерела, а  $r_{\min}$  – відстань хвильової поверхні до точки спостереження дифракційної картини.

10. Формула положення мінімумів при дифракції Фраунгофера на щілині

$$h \sin \varphi_m = \pm m\lambda,$$

де  $\lambda$  – довжина хвилі,  $h$  – ширина щілини,  $\varphi_m$  – кут, що визначає положення  $m$ -го мінімуму,  $m = 1, 2, 3, \dots$

11. Формула дифракційних ґрат (формула для кутів головних дифракційних максимумів)

$$d \sin \varphi_m = \pm m\lambda$$

де  $\varphi_m$  – кут, що визначає положення  $m$ -го головного максимуму,  $m = 1, 2, 3, \dots$ ,  $d$  – період ґратки,  $d = h + b$ , якщо  $h$  – ширина щілини,  $b$  – ширина

непрозорої смужки, або  $d = \frac{L}{N}$ , де  $L$  – ширина ґрат, а  $N$  – кількість щілин.

12. Закон Малюса для природного світла, що проходить через два схрещених поляризатори,

$$I_{zan} = \frac{1}{2} I_{np} \cos^2 \theta$$

13. Закон Брюстера

$$\operatorname{tg} \alpha_B = \frac{n_2}{n_1}.$$

### 5.8. Задачі

5.1. Скільки довжин хвиль монохроматичного світла з частотою  $\nu = 5 \cdot 10^{14}$  Гц уміститься на шляху довжиною  $l = 1,2$  мм у вакуумі чи у склі з  $n = 1,5$ ?

5.2. При якому значенні кута падіння  $\alpha$  промінь, який відбивається від поверхні води буде перпендикулярним до заломленого променя? Показник заломлення води  $n = 1,33$ .

5.3. Промінь падає на плоско-паралельну скляну пластинку, товщина якої  $d = 6,0$  см. Кут падіння  $\alpha = 60^\circ$ . Знайдіть зміщення променя, після проходження ним пластинки.

5.4. На краю басейна стоїть людина і дивиться на камінь, що лежить на дні. Глибина басейна  $h$ . На якій відстані від поверхні води видно зображення каменя, якщо промінь зору складає з нормаллю до поверхні кут  $\gamma$ ?

5.5. Промінь проходить через призму з кутом заломлення  $\varphi$  і показником заломлення  $n$ . Нехай  $\delta$  є кут відхилення променя. Покажіть, що при симетричному ході променя через призму, кут  $\delta$  є мінімальним і що зв'язок між  $\delta$  та  $\varphi$  визначається співвідношенням  $\sin \frac{\delta + \varphi}{2} = n \sin \frac{\varphi}{2}$ .

5.6. Запишіть у векторному вигляді закон відбивання світлового променя від дзеркала з використанням направляючих ортів  $\vec{e}_{nad}$  та  $\vec{e}_{vid}$  падаючого та відбитого променів та одиничного вектора  $\vec{n}$  нормалі до поверхні.

5.7. Для деякої скляної призми кут найменшого відхилення променя дорівнює куту заломлення призми. Знайти кут заломлення призми.

5.8. Покажіть, що при складанні коливань двох гармонічних хвиль середня інтенсивність дорівнює сумі їх інтенсивностей, коли обидва коливання

мають однаковий напрямок, але некогерентні з рівномірним значенням різниці фаз або коли відбуваються у взаємно перпендикулярних напрямках, маючи при цьому однакову частоту та однакові фази.

5.9. Визначте залежність між груповою та фазовою швидкостями, коли

фазова швидкість  $v_\phi = \frac{a}{\sqrt{\lambda}}$ , де  $a$  – константа.

5.10. Визначте залежність між груповою та фазовою швидкостями, коли

фазова швидкість  $v_\phi = \frac{a}{\omega^2}$ , де  $a$  – константа.

5.11. Визначте залежність між груповою та фазовою швидкістю, коли фазова швидкість  $v_\phi = ak^4$ , де  $a$  – константа.

5.12. На мильну плівку з показником заломлення  $n=1,3$ , яка знаходиться у повітрі, нормально падає пучок променів білого світла. При якій найменшій товщині плівки відбите світло з довжиною хвилі  $\lambda=0,55$  мкм буде максимально ярким?

5.13. На мильну плівку, показник заломлення якої  $n=1,33$  під кутом  $45^\circ$  до нормалі падає біле світло. При якій найменшій товщині плівки промені відбитого світла будуть найкраще відбивати світло жовтого кольору з  $\lambda_{жс}=0,6$  мкм?

5.14. На поверхні скла знаходиться плівка води. На неї падає світло з довжиною хвилі  $\lambda=0,68$  мкм під кутом  $\alpha=30^\circ$  до нормалі. Знайдіть швидкість випаровування плівки, якщо інтенсивність відбитого світла змінюється таким чином, що інтервал часу між сусідніми максимумами становить 15 хвилин.

5.15. Плоско-опукла лінза опуклою стороною лежить на скляній пластині. Радіус 10-го темного кільця Ньютона для відбитого світла становить  $r_{10}=1,25$  мм. Довжина хвилі світла  $\lambda=0,6$  мкм. Визначте радіус кривизни опуклої поверхні лінзи.

5.16. Плоско-опукла лінза опуклою стороною лежить на скляній пластині. Визначте товщину шару повітря між лінзою і пластиною в області спостереження першого світлого кільця Ньютона. Довжина хвиля  $\lambda=0,6$  мкм.

5.17. Плоско-опукла скляна лінза, радіус кривизни якої  $R=40$  см, дотикається опуклою поверхнею до поверхні скляної пластини. При цьому радіус  $m$ -го темного кільця становить  $r_m=2,5$  мм. Спостерігаючи за цим кільцем, лінзу обережно відсунули від пластини на відстань  $h=5$  мкм. Яким став радіус цього кільця?

5.18. Плоско-опукла лінза з радіусом  $R$  кривизни опуклої поверхні лежить на скляній пластині. Радіус  $m$ -го темного інтерференційного кільця, яке спостерігається після проходження світлом пластини дорівнює  $r_{\min}^{(m)}$ . Радіус

$n$ -го темного кільця Ньютона для відбитих променів дорівнює  $r_{\min}^{(n)}$ . Визначте довжину світлової хвилі.

5.19. В досліді Ллойда (рис. 64) світлова хвиля, що безпосередньо виходить з джерела, інтерферує з хвилею, відбитою від дзеркала. В результаті, на екрані утворюється інтерференційна картина. Відстань від джерела світла до екрану  $\ell = 1000$  см. При початковому положенні джерела ширина інтерференційної полоси на екрані становила 0,25 мм. Після того, як джерело віддалили від площини на 0,60 мм, ширина інтерференційної полоси зменшилась в 1,5 разів. Знайдіть довжину хвилі світла.

5.20. Дві когерентні плоскі світлові хвилі, кут між напрямками поширення яких  $\psi \ll 1$ , падають майже перпендикулярно до площини екрану. Покажіть, що між сусідніми інтерференційними максимумами на екрані визначається відношенням  $\Delta x_\lambda = \frac{\lambda}{\psi}$ , де  $\lambda$  – довжина хвилі.

5.21. Лінзу, яка мала діаметр 5,0 см та фокус 25 см, розрізали уздовж діаметра навпіл, а потім утворили з неї білінзу, видаливши шар товщиною 1,0 мм. У фокальній площині білінзи розташували вузьку щілину, яка є джерелом монохроматичного світла з  $\lambda = 0,64$  мкм. За білінзою розташували екран на відстані 50 см від неї. Визначте ширину інтерференційної полоси.

5.22. Плоска монохроматична хвиля падає нормально на діафрагму, що містить дві вузькі щілини, відстань між якими 2,5 мм. На екрані, що розташований на відстані  $r = 100$  см, утворюється система інтерференційних смуг. На яку відстань і в який бік змістяться ці смуги, якщо одну з щілин прикрити скляною пластинкою, товщина якої 10 мкм?

5.23. Плоска світлова хвиля з довжиною хвилі  $\lambda = 0,5$  мкм падає нормально на діафрагму з круглим отвором, діаметр якого  $d = 1$  мм. На якій відстані від отвору повинна знаходитися точка спостереження, щоб отвір відкривав лише одну зону Френеля?

5.24. Точкове джерело світла з довжиною хвилі  $\lambda = 0,5$  мкм розташоване на відстані  $R = 100$  см перед діафрагмою з круглим отвором радіусу  $R_0 = 1,0$  мм. Знайдіть відстань  $r$  від діафрагми до точки спостереження, для якої число зон Френеля на отворі становить  $m = 3$ .

5.25. Між точковим джерелом світла та екраном розмістили діафрагму з круглим отвором, радіус якого можна змінювати. Відстань від діафрагми до джерела дорівнює 100 см, а від діафрагми до екрана – 125 см. Визначте довжину хвилі світла, якщо максимум освітленості в центрі дифракційної картини на екрані спостерігається при  $R_1 = 1,0$  мм, а наступний максимум при  $R_2 = 1,29$  мм.

- 5.26. Радіус 4-ої зони Френеля для плоского хвильового фронту дорівнює 3 мм. Визначте радіус 6-ої зони Френеля.
- 5.27. На діафрагму, яка має отвір з діаметром 1,96 мм, нормально падає паралельний пучок монохроматичного світла з  $\lambda=600$  нм. При якій найбільшій відстані між діафрагмою та екраном в центрі дифракційної картини ще буде спостерігатися темне п'ятно?
- 5.28. На щілину, ширина якої 0,05 мм, нормально падає монохроматичне світло з довжиною хвилі  $\lambda=0,6$  мкм. Визначте кут  $\varphi$  між початковим напрямком світла та напрямком на четвертий дифракційний мінімум.
- 5.29. На щілину, ширина якої  $h=6\lambda$ , нормально падає плоска монохроматична хвиля з довжиною  $\lambda$ . Під яким кутом  $\varphi$  буде спостерігатися 3-ій дифракційний мінімум?
- 5.30. На щілину, ширина якої 0,1 мм, нормально падає плоска монохроматична світлова хвиля з довжиною хвилі  $\lambda=0,5$  мкм. За щілиною знаходиться збиральна лінза, у фокальній площині якої знаходиться екран. Що буде спостерігатися на екрані, коли кут дифракції  $\varphi$  дорівнює:  
1) 17 хвилин; 2) 43 хвилини?
- 5.31. На дифракційні ґрати з періодом 10 мкм під кутом  $30^\circ$  падає монохроматичне світло з довжиною  $\lambda=600$  нм. Визначте кут  $\varphi$  дифракції для другого головного максимуму.
- 5.32. Інфрачервоне випромінювання лазера з довжиною хвилі  $\lambda=10,6$  мкм попадає нормально на систему паралельних щілин, ширина яких 50 мкм. Відстань між щілинами також становить 50 мкм. Який максимальний номер головного дифракційного максимуму може спостерігатися у цьому випадку?
- 5.33. Скільки штрихів на один міліметр містять ґрати, якщо при нормальному падінні на них монохроматичного світла з довжиною хвилі  $\lambda=0,6$  мкм головний максимум 5-го порядку відхилений на кут  $\varphi=18^\circ$ ?
- 5.34. Яку найменшу роздільну здатність повинні мати дифракційні ґрати, щоб з їх допомогою можна було розрізнити дві хвилі з  $\lambda_1=578$  нм і  $\lambda_2=580$  нм з спектру калію? Яке найменше число штрихів повинні мати ці ґрати, щоб розрізнення цих хвиль було можливе у спектрі другого порядку?
- 5.35. За допомогою дифракційних ґрат з періодом 20 мкм треба у спектрі 2-го порядку розрізнити дублет натрію з  $\lambda_1=589,0$  нм та  $\lambda_2=589,6$  нм. При якій найменшій ширині ґрат це можливо?
- 5.36. При освітленні дифракційних ґрат білим світлом спектри 2-го та 3-го порядків частково перекриваються. На яку довжину хвилі у спектрі 2-го порядку попадає фіолетова межа ( $\lambda=0,4$  мкм) спектру 3-го порядку?



- 5.37. Пучок світла, який поширюється у повітрі, падає на поверхню рідини під кутом  $\alpha = 54^\circ$ . Визначте кут заломлення  $\gamma$ , якщо відбитий промінь повністю поляризований.
- 5.38. Кут Брюстера  $\alpha_B$  при падінні світла з повітря на кристал кам'яної солі дорівнює  $57^\circ$ . Визначте швидкість світла у цьому кристалі.
- 5.39. Граничний кут повного внутрішнього відбивання світла на межі рідини з повітрям становить  $43^\circ$ . Визначте кут Брюстера  $\alpha_B$  при падінні променя з повітря на поверхню цієї рідини.
- 5.40. У частково поляризованого світла амплітуда вектора напруженості, яка відповідає максимальній інтенсивності світла, в 2 рази більше амплітуди при мінімальній інтенсивності світла. Визначте ступінь поляризації світла.
- 5.41. Ступінь поляризації частково поляризованого світла дорівнює 0,5. У скільки разів відрізняється максимальна інтенсивність світла, яке пропускає аналізатор, від мінімальної?
- 5.42. У скільки разів послаблюється інтенсивність світла, що проходить через два поляризатори, осі яких повернуті на кут  $30^\circ$ , якщо у кожному поляризаторі втрачається (поглинається) 10% інтенсивності падаючого на нього світла?

## ЗМІСТ

<b>ПЕРЕДМОВА</b>	<b>3</b>
<b>Глава 1. МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ</b>	<b>5</b>
1.1. Коливальні процеси	5
1.2. Означення механічних коливань	5
1.3. Коливальна система	7
1.4. Диференціальне рівняння вільних незгасаючих механічних коливань	9
1.5. Власна частота, амплітуда, період, фаза власних коливань	11
1.6. Кінетична, потенціальна та повна енергія вільних незгасаючих коливань	15
1.7. Фазовий портрет коливання	17
1.8. Період коливань фізичного маятника	19
1.9. Показникова форма опису власних коливань	22
1.10. Диференціальне рівняння вільних згасаючих коливань	23
1.11. Розв'язок диференціального рівняння вільних згасаючих коливань	25
1.12. Характеристики вільних згасаючих коливань	28
1.13. Аперіодичний процес	32
1.14. Диференційне рівняння вимушених гармонічних коливань	35
1.15. Розв'язок диференційного рівняння вимушених гармонічних коливань	36
1.16. Резонанс	38
1.17. Параметричний резонанс	41
1.18. Коливання в системах з в'язями	43
1.19. Биття	46
1.20. Питання для самоконтролю	48
1.21. Формули, необхідні для розв'язку задач	48
1.22. Задачі	50
<b>Глава 2. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ КОЛИВАННЯ</b>	<b>55</b>
2.1. Власні електромагнітні коливання	55

2.2. Вільні згасаючі електромагнітні коливання	60
2.3. Вимушені електромагнітні коливання	63
2.4. Метод векторних діаграм	66
2.5. Складання двох гармонічних коливань однакового напрямку та однакової частоти	67
2.6. Змінний струм	71
2.7. Активний опір	72
2.8. Ємнісний опір	74
2.9. Індуктивний опір	75
2.10. Закон Ома для кола зі змінним струмом	77
2.11. Коефіцієнт потужності	82
2.12. Складання взаємно перпендикулярних гармонічних коливань	84
2.13. Питання для самоконтролю	87
2.14. Формули, необхідні для розв'язку задач	88
2.15. Задачі	90
<b>Глава 3. МЕХАНІЧНІ ХВИЛІ</b>	<b>95</b>
3.1. Рівняння хвилі	96
3.2. Період, частота, довжина хвилі, хвильове число, фазова швидкість хвилі	98
3.3. Рівняння плоскої хвилі	100
3.4. Хвильове рівняння	102
3.5. Сферична хвиля	104
3.6. Швидкість біжучої хвилі в струні	106
3.7. Швидкість поширення біжучої повздовжньої пружної хвилі в стрижні	108
3.8. Швидкість поширення хвиль в газах і рідинах	111
3.9. Енергія пружних хвиль	115
3.10. Стоячі хвилі	118
3.11. Питання для самоконтролю	121
3.12. Формули, необхідні для розв'язку задач	122
3.13. Задачі	123
<b>Глава 4. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ</b>	<b>125</b>
4.1. Хвильове рівняння електромагнітної хвилі	125
4.2. Плоска електромагнітна хвиля	129

4.3. Зв'язок між векторами напруженості електричного та магнітного полів в електромагнітній хвилі .....	131
4.4. Енергія електромагнітної хвилі .....	134
4.5. Вектор Пойтинга .....	136
4.6. Потік імпульсу електромагнітної хвилі .....	138
4.6. Випромінювання електромагнітних хвиль .....	140
4.7. Питання для самоконтролю .....	143
4.8. Формули, необхідні для розв'язку задач .....	144
4.9. Задачі .....	144
<b>Глава 5. ОПТИКА .....</b>	<b>147</b>
5.1. Геометрична оптика .....	148
5.1.1. Принцип Ферма .....	149
5.1.2. Закони відбивання та заломлення світла .....	151
5.1.3. Закони відбивання та заломлення, як наслідок теорії Максвелла .....	154
5.2. Дисперсія світла .....	157
5.2.1. Електронна теорія дисперсії світла .....	159
5.2.2. Групова швидкість .....	162
5.3. Інтерференція світла .....	165
5.3.1. Когерентність .....	167
5.3.2. Інтерференція двох плоских когерентних гармонічних хвиль .....	169
5.3.3. Дослід Юнга .....	171
5.3.4. Час когерентності, довжина когерентності .....	174
5.3.5. Приклади спостереження інтерференції: дзеркало Ллойда, біпризма Френеля .....	176
5.3.6. Інтерференція променів, відбитих від поверхонь однорідної пластини .....	179
5.3.7. Кільця Ньютона .....	181
5.4. Дифракція світла .....	183
5.4.1. Принцип Гюйгенса .....	184
5.4.2. Принцип Гюйгенса-Френеля .....	186
5.4.3. Метод зон Френеля .....	189
5.4.4. Дифракція Френеля від круглого отвору .....	193
5.4.5. Дифракція Френеля від непрозорого диску .....	196
5.4.6. Дифракція Фраунгофера від щілини .....	198

5.4.7. Дифракційні ґрати.....	202
5.4.8. Дифракційні ґрати як оптичний прилад.....	205
5.5. Поляризація світла.....	207
5.5.1. Закон Малюса.....	211
5.5.2. Поляризація світла при відбиванні та заломленні.....	213
5.5.3. Проходження світла через анізотропні речовини: подвійне променезаломлення.....	216
5.6. Питання для самоконтролю.....	219
5.7. Формули, необхідні для розв'язку задач.....	220
5.8. Задачі.....	222