Прытков Максим

Варианты заданий и ответы

Вар. 12 (250410)

1. Определить количество двоичных 22-значных чисел, имеющих в записи 17 единиц. Ответ записать в виде числа сочетаний.

2. Сколько существует решений уравнения $x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} = 70$ в целых числах, где $x_i \geqslant 1$?

3. Сколько существует 9-значных чисел в 11-ичной системе счисления, у которых есть две одинаковые подряд идущие цифры?

4. Все слова длины 7 в алфавите $A = \{a, b, c, d\}$ упорядочены в лексикографичекском порядке. Какое слово идет под номером 15058?

5. Среди 586 целых чисел, 250 кратно 11, 119 кратно 10, 72 кратно 121, 115 кратно 110, 56 кратно 1210. Определить, сколько среди них не кратно ни 11, ни 10.

6. Все перестановки 7 чисел (1;2;3;4;5;6;7) упорядочены в лексикографическом порядке. Найти перестановку с номером 1721.

7. Рассмотрим все 6-значные наборы в 9-ичной системе счисления. Пусть A — это множество тех наборов, у которых сумма первых двух цифр на 6 меньше суммы оставшихся. И пусть B — это множество тех наборов, у которых сумма цифр фиксирована и равна N.

- Докажите, что можно подобрать N, так чтобы количество наборов A было равно количеству наборов B. Чему равно N?
- Вычислите количество наборов A.

8. Из урны, в которой 3 синих шара и 17 фиолетовых, наудачу выбирают 2. Какова вероятность того, что среди них хотя бы один фиолетовый?

№	**Ответ**
1.	C_{21}^{16}.
2.	C_{69}^{9}.
3.	$10 \cdot 11^8 - 10^9$.
4.	$dccdbab$.
5.	332.
6.	3426715.
7.	а) $N = 22$ или $N = 29$; б) $C_{27}^5 - 6C_{18}^5$
8.	$\frac{187}{190}$.

Задание 1.

Поскольку числа по условию должны быть 22-значными, в крайнем левом разряде должна стоять единица. Тогда останется 21 разряд и 16 единиц, а значит количество всех двоичных 22-значных чисел, содержащих в записи 17 единиц, будет определяться как C_{21}^{16}.

Ответ: C_{21}^{16}.

Задание 2.

ב$y = x - 1$, тогда исходное уравнение примет следующий вид: $y_1 + y_2 + \cdots + y_{10} = 70 - 10 = 60$

Такое уравнение будет иметь $V(60, 10)$ решений, что эквивалентно $\mathrm{C}_{60+10-1}^{10-1} = C_{69}^{9}$.

Ответ: C_{69}^{9}.

Задание 3.

Всего в 11-ричной системе $10 \cdot 11^8$ 9-значных чисел. Среди них 10^9 чисел, не имеющих двух одинаковых подряд идущих цифр. Значит чисел, у которых есть 2 подряд идущие цифры: $10 \cdot 11^8 - 10^9$.

Ответ: $10 \cdot 11^8 - 10^9$.

Задание 4.

$|A| = 4$;

Переведем число $15058 - 1 = 15057$ в 4-ричную систему счисления:

$15057 = 4 \cdot 3764 + 1$;

$3764 = 4 \cdot 941 + 0$;

$941 = 4 \cdot 235 + 1$;

$235 = 4 \cdot 58 + 3$;

$58 = 4 \cdot 14 + 2$;

$14 = 4 \cdot 3 + 2$;

$15057_{10} = 3223101_4$;

Значит слову с номером 15058 соответствует слово $dccdbab$.

Ответ: $dccdbab$.

Задание 5.

$|\{A\}| = 586;$

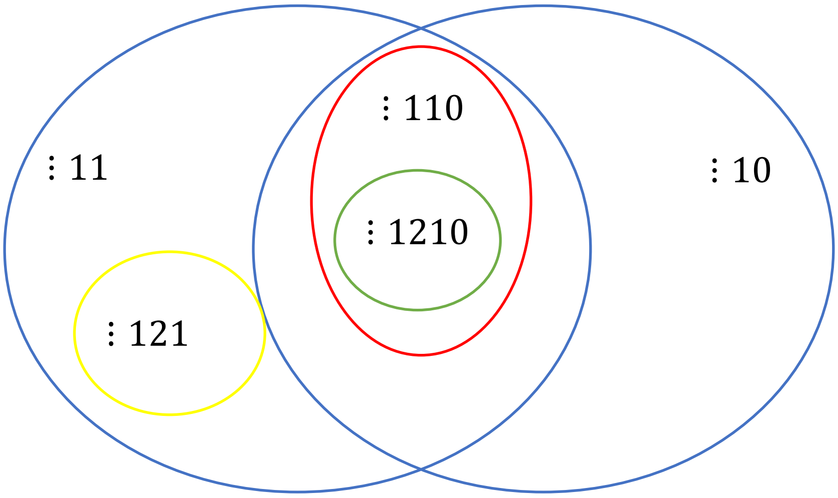
$|\{\vdots\ 11\}| = 250;$

$|\{\vdots\ 10\}| = 119;$

$|\{\vdots\ 121\}| = 72;$

$|\{\vdots\ 110\}| = 115;$

$|\{\vdots\ 1210\}| = 56;$



Количество чисел, не кратных ни 11, ни 10, можно найти как разность количества всех чисел и тех, которые кратны или 10, или 11:

Кратных 10 или 11: $|\{\vdots\ 10 \lor \vdots\ 11\}| = |\{\vdots\ 10\} \cup \{\vdots\ 11\}| = |\{\vdots\ 10\}| + |\{\vdots\ 11\}| -$
$-|\{\vdots\ 10\} \cap \{\vdots\ 11\}| = 119 + 250 - 115 = 254;$

Тогда не кратных ни 10, ни 11: $586 - 254 = 332$.

Ответ: 332.

Задание 6.

Будем искать перестановку с номером $1721 - 1 = 1720$;

Переводим в факториальную сс:

$1720 = 2 \cdot 860 + 0$;
$860 = 3 \cdot 286 + 2$;
$286 = 4 \cdot 71 + 2$;
$71 = 5 \cdot 14 + 1$;
$14 = 6 \cdot 2 + 2$;

Значит $1720_{10} = (221220)_{!}$;

2	7654321	3
2	765421	4
1	76521	2
2	7651	6
2	751	7
0	51	1
$\emptyset$	5	5

Таким образом, перестановка с номером 1721 имеет вид 3426715.

Ответ: 3426715.

Задание 7.

$x_1x_2x_3x_4x_5x_6,\ x_i \in \overline{0;8}$.

а) N -?

$x_1 + x_2 + 6 = x_3 + x_4 + x_5 + x_6$;

$\sqsupset y_i = 8 - x_i, \forall i \in \overline{3;6}$;

Тогда уравнение примет следующий вид: $x_1 + x_2 + 6 = 8 - y_3 + 8 - y_4 + 8 - y_5 + 8 - y_6$;

Перенесем неизвестные в левую часть, известные – в правую:

$x_1 + x_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 32 - 6$;

$x_1 + x_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 26 \rightarrow N = 26$;

Теперь сделаем замену в левой части:

$\sqsupset y_i = 8 - x_i, \forall i \in \overline{1;2}$;

Получим следующее: $8 - y_1 + 8 - y_2 + 6 = x_3 + x_4 + x_5 + x_6$;

$22 = y_1 + y_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \to N = 22;$

б) $a_1 + a_2 + \cdots + a_6 = 22, a_i \in \overline{0;8};$

1 способ:

Вычислим количество всех решений для уравнения. Оно равно $C_{22+6-1}^{5} = C_{27}^{5};$

Из количества всех решений надо вычесть количество тех наборов, в которых есть слагаемые, больше 8.

$\beth a_1' = a_1 - 9;$

Уравнение преобразуется к виду:

$a_1' + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 13;$

Количество решений которого: $C_{6+13-1}^{5} = C_{18}^{5};$

Но так как в исходном уравнении 6 переменных, то необходимо это учесть: $C_6^1;$

Значит количество наборов A будет равно $C_{27}^5 - C_6^1 \cdot C_{18}^5 = = C_{27}^5 - 6 \cdot C_{18}^5$.

2 способ:

Строим производящий многочлен:

$(1 + x + \cdots + x^8)^6 = \cdots + a_{22}x^{22} + \cdots;$

$S = 1 + x + x^2 + \cdots + x^8;$

$xS = x + x^2 + \cdots + x^9;$

$S = \frac{1-x^9}{1-x};$

$f = (1 - x^9)^6(1 + x + x^2 + \cdots)^6;$

$(1 - x^9)^6 = (1 - 6x^9 + \cdots);$

$(1 + x + x^2 + \cdots + x^9 + \cdots)^6 = C_{27}^5 x^{22} + C_{18}^5 x^{13} + \cdots;$

$(1 - 6x^9)\big(\ldots + C_{27}^5 x^{22} + C_{18}^5 x^{13} + \cdots\big) = \big(C_{27}^5 - 6C_{18}^5\big)x^{22}$

Ответ: а) $N = 22$ или $N = 29$; б)$C_{27}^5 - 6C_{18}^5$.

Задание 8.

Всего в урне $17 + 3 = 20$ шаров, вероятность того, что среди 2 шаров будет хотя бы один фиолетовый можно найти как $1 - P_{2c}$, где $P_{2с}$ – вероятность того, что оба раза будет выбран синий шар.

Значит $P_{2с} = \frac{3}{20} \cdot \frac{2}{19} = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{19} = \frac{3}{190} \rightarrow P_{ф} = 1 - \frac{3}{190} = \frac{187}{190}$.

Ответ: $\frac{187}{190}$.