

# METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

---



**TEMAT:** Stworzenie programu MES do analizy przepływu ciepła w języku Python

**AUTOR:** Przemysław Janiszewski nr. 411890, grupa 2

## **Spis treści**

<b>WSTĘP TEORETYCZNY .....</b>	<b>3</b>
<b>OPIS MODELU Z WARUNKAMI BRZEGOWYMI.....</b>	<b>3</b>
<b>ZGRUBNY OPIS MES – PODSTAWOWE POJĘCIA:.....</b>	<b>5</b>
<b>ZGRUBNA CHARAKTERYSTYKA KODU:.....</b>	<b>7</b>
<b>PORÓWNANIE WYNIKÓW OPROGRAMOWANIA Z TESTAMI .....</b>	<b>16</b>
<b>WNIOSKI.....</b>	<b>22</b>
<b>SYMULACJA (SIATKA 4_4_MIX):.....</b>	<b>23</b>
<b>ROZWIĄZANIE WŁASNE: .....</b>	<b>28</b>
OPIS PROBLEMU.....	28
CHARAKTERYSTYKA DANYCH MATERIAŁOWYCH .....	29
REALIZACJA OBLCZEŃ.....	30
WYNIKI I ICH INTERPRETACJA: .....	31
WNIOSKI .....	32

## Wstęp teoretyczny

Metoda Elementów Skończonych (FEM, z ang. Finite Element Method) to zaawansowana metoda numerycznego rozwiązywania problemów brzegowych. Polega ona na wyznaczeniu ciągłego rozkładu badanej zmiennej na podstawie dyskretnego zestawu jej punktów. W procesie tym niezwykle ważne są tzw. elementy skończone, które powstają w wyniku podziału dziedziny problemu, na skończoną liczbę części. MES znajduje szerokie zastosowanie w różnych dziedzinach, takich jak mechanika konstrukcji, przepływ ciepła, przepływ cieczy, dynamika, kinematyka i statyka maszyn, a także oddziaływanie elektrostatyczne, magnetostatyczne i elektromagnetyczne. Główną zaletą MES jest możliwość uzyskiwania rozwiązań dla obszarów o skomplikowanych kształtach, dla których nie jest możliwe przeprowadzenie ścisłych obliczeń analitycznych. Ponadto, MES umożliwia modelowanie materiałów wielofazowych oraz materiałów, których właściwości są funkcją temperatury. Metoda posiada także, wady, z których wyróżnić możemy dużą złożoność modelowania jak i obliczeń – które zazwyczaj trwają tak długo, że nie mogą być przeprowadzane w czasie rzeczywistym.

## Opis modelu z warunkami brzegowymi

W zaprojektowanym przeze mnie programie zająłem się analizą niestacjonarnego (zmennego w czasie) przepływu ciepła. Punktem wyjścia do całego programu, jest poniższe równanie Fouriera opisujące badane zjawisko:

$$\operatorname{div}(k(t)\nabla t) = c \cdot \rho \cdot \frac{\partial t}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x(t) \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y(t) \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z(t) \frac{\partial t}{\partial z} \right) - c\rho \frac{dt}{d\tau} = 0$$

Rozwiążanie powyższego równania, można sprowadzić do zadania polegającego na poszukiwaniu minimum odpowiedniego funkcjonału, wyznaczonego według zasad rachunku wariacyjnego. Przy założeniu, że  $k_x(t) = k_y(t) = k_z(t) = k(t)$  (materiał izotropowy) otrzymujemy

$$\int_V \left( \frac{k(t)}{2} \left( \left( \frac{\partial t}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial t}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial t}{\partial z} \right)^2 \right) + c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} \right) dV$$

By uzyskać poprawne wyniki, konieczne jest narzucenie odpowiednich warunków brzegowych. Bezpośrednie ich wprowadzenie do funkcjonału nie jest możliwe. Narzuca się je więc w postaci całek, gdzie pierwszy składnik reprezentuje intensywności przepływu ciepła na granicy styku ciała i płynu, a drugi składnik reprezentuje strumień ciepła przepływający przez powierzchnię ciała. (Trzeci warunek brzegowy)

$$\int_S \left( \frac{\alpha}{2} (t - t_\infty)^2 \right) dS + \int_S qt dS = 0$$

Rozwiążanie problemu (z dołożonymi warunkami brzegowymi) i po uprzedniej dyskretyzacji, sprowadza się do obliczenia pochodnych cząstkowych otrzymanego w ten sposób funkcjonału. W konsekwencji otrzymujemy następujący układ równań:

$$[H] \{t\} + [C] \frac{\partial}{\partial \tau} \{t\} + \{P\} = 0$$

gdzie:

$$[H] = \int_V k(t) \left( \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \right\} \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \right\}^T + \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \right\} \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \right\}^T + \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial z} \right\} \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial z} \right\}^T \right) dV + \\ + \int_S \alpha \{N\} \{N\}^T dS,$$

$$\{P\} = - \int_S \alpha \{N\} t_\infty dS$$

$$[C] = \int_V c \rho \{N\} \{N\}^T dV$$

Zgrubny opis MES – podstawowe pojęcia:

**Macierz sztywności (dla elementu 2D).** Reprezentuje ona zdolność elementu do oporu przeciwko deformacji. W kontekście problemów termicznych, macierz sztywności jest często związana z przewodnictwem ciepła w materiale:

$$[H] = \int_V k(t) \left( \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \right\} \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \right\}^T + \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \right\} \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \right\}^T \right) dV$$

**Macierz HBC:** Jest to macierz sztywności brzegowej. Reprezentuje ona wpływ warunków brzegowych na sztywność systemu. W kontekście problemów termicznych, może to być związane z przepływem ciepła przez brzegi analizowanego obszaru.

$$[H_{BC}] = \int_S \alpha(\{N\}\{N\}^T) dS$$

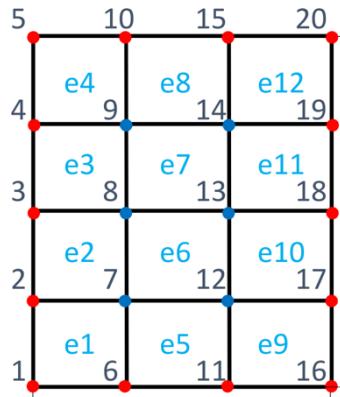
**Macierz C:** Jest to macierz pojemności cieplnej. Reprezentuje ona zdolność elementu do magazynowania energii cieplnej. W kontekście problemów termicznych, macierz pojemności cieplnej jest związana z gęstością i ciepłem właściwym materiału.

$$[C] = \int_V \rho c_p (\{N\}\{N\}^T) dV$$

**Wektor P:** Jest to wektor obciążen. Każdy element tego wektora reprezentuje obciążenie cieplne przyłożone do konkretnego węzła w systemie. W kontekście problemów termicznych, wektor obciążen jest często związany z generowanym ciepłem lub przepływem ciepła do lub z systemu.

$$[P] = \int_S \alpha \{N\} t_{ot} dS$$

**Dyskretyzacja:** MES polega na podziale ciągłego obszaru na dyskretny zbiór prostych podobszarów, nazywanych elementami skończonymi. Każdy element skończony jest zdefiniowany przez zestaw węzłów, a poszukiwane rozwiązanie jest interpolowane w każdym elemencie za pomocą prostych funkcji bazowych:



**Interpolacja:** W MES, poszukiwane rozwiązanie jest interpolowane na dyskretnym zbiorze węzłów, które powstają w wyniku dyskretyzacji dziedziny. Interpolacja jest realizowana za pomocą prostych funkcji bazowych, które są zdefiniowane lokalnie dla każdego elementu skońzonego.

$$t = \sum_{i=1}^n N_i t_i = \{N\}^T \{t\}$$

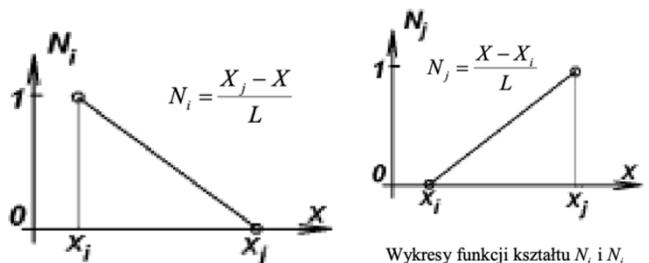
**Rozwiązywanie układu równań:** MES prowadzi do układu równań algebraicznych, które można rozwiązać za pomocą różnych technik numerycznych. Otrzymujemy w ten sposób przybliżone rozwiązanie oryginalnego problemu brzegowego:

$$\left( [H] + \frac{[C]}{\Delta\tau} \right) \{t_1\} - \left( \frac{[C]}{\Delta\tau} \right) \{t_0\} + \{P\} = 0$$

**Funkcje kształtu:** to zestaw funkcji opisujących zmianę wartości danej wielkości wewnątrz elementu skońzonego. Są one zdefiniowane lokalnie i używane do interpolacji rozwiązania na dyskretnym zbiorze węzłów. Są zawsze tak zbudowane, aby w węzłach, których dotyczą, ich wartości wynosiły 1, a w pozostałych węzłach przyjmowały wartość 0 :

$$N_i = \frac{X_j - X}{L} \quad N_j = \frac{X - X_i}{L}$$

$$t = N_i t_i + N_j t_j = [N] \{t\}$$



## Zgrubna charakterystyka kodu:

- Klasy występujące w kodzie:

`class Global_Data` – odpowiedzialna za wczytanie i przechowywanie parametrów opisujących konkretną symulację.

`class Node` – odpowiedzialna za reprezentowanie węzła elementu skończonego i zarządzanie jego składowymi

`class Element` – odpowiedzialna za reprezentowanie elementu skończonego i zarządzanie jego składowymi

`class Grid` – odpowiedzialna za wczytanie i zarządzanie węzłami i elementami

`class Matrix_H` – odpowiedzialna za tworzenie i zarządzanie lokalnymi macierzami sztywności dla wszystkich elementów siatki.

`class Matrix_HBC` – odpowiedzialna za tworzenie i zarządzanie lokalnymi macierzami sztywności brzegowej dla wszystkich elementów siatki.

`class Matrix_C` – odpowiedzialna za tworzenie i zarządzanie lokalnymi macierzami pojemności ciepła dla wszystkich elementów siatki.

`class VectorP` – odpowiedzialna za tworzenie i zarządzanie lokalnymi wektorami obciążen dla wszystkich elementów siatki.

### Element\_uniwersalny:

`class dNdksi` – odpowiedzialna za obliczanie pochodnych funkcji kształtu względem ksi, w wszystkich punktach całkowania

`class dNdeteta` – odpowiedzialna za obliczanie pochodnych funkcji kształtu względem eta, w wszystkich punktach całkowania

`class NFun` – odpowiedzialna za obliczanie wartości funkcji kształtu w wszystkich punktach całkowania

`class Solver` – odpowiedzialna za rozwiązywanie układu równań macierzowych

`class Aggregation` – odpowiedzialna za globalną agregację lokalnych składowych elementów tj: H,HBC,P,C

`class Paraview` – odpowiedzialna za generowanie plików paraview

Algorytm MES z racji swojego skomplikowania, podzielony jest na kilka pomniejszych etapów:

- Wczytanie z pliku danych opisujących warunki symulacji (Global Data) oraz parametry siatki:

```
"""TWORZENIE LISTY NODEÓW"""
is_node_section = False
with open(f"{self.file_path}", "r") as file:
    for line in file:
        if line.strip() == "*Node": is_node_section = True
        elif line.strip().split(',')[0] == "*Element": is_node_section = False

        elif is_node_section and line.strip():
            parts = line.strip().split(",")
            if len(parts) == 3:
                x, y = float(parts[1].strip()), float(parts[2].strip())
                self.nodes.append(Node(x,y))

"""TWORZENIE LISTY ELEMENTÓW"""
is_element_section = False
with open(f"{self.file_path}", "r") as file:
    for line in file:
        if line.strip().split(',')[0] == "*Element": is_element_section = True
        elif line.strip() == "*BC": is_element_section = False

        elif is_element_section and line.strip():
            parts = line.strip().split(",")
            if len(parts) == 5:
                vec_4 = [int(x) for x in parts][1:]
                vec_4_points = [self.nodes[i-1] for i in vec_4]
                vec_element = Element(vec_4_points)
                vec_element.nodes_IDs = [int(x) - 1 for x in parts][1:] # Bo numerujemy od 0 w listach
                self.elements.append(vec_element)

"""GLOBAL DATA"""
def __init__(self,file_PATH: str):
    variables = {}
    self.file_path = file_PATH
    with open(f'{self.file_path}', 'r') as file:
        for i in range(10):
            line = file.readline()
            parts = line.split()
            if len(parts) == 2:
                variable_name = parts[0]
                variable_value = parts[1]
                variables[variable_name] = int(variable_value)
            if len(parts) == 3:
                variable_name = f'{parts[0]}_{parts[1]}'
                variable_value = parts[2]
                variables[variable_name] = int(variable_value)
    self.variables = variables
```

- **Obliczenie macierzy H, polegające na:**

- Obliczaniu pochodnych cząstkowych: Pochodne cząstkowe funkcji kształtu są obliczane względem zmiennych  $\xi$  i  $\eta$  dla każdego punktu całkowania na powierzchni elementu.

```
N1dksi = lambda eta,ksi: -0.25 * (1 - eta)
N2dksi = lambda eta,ksi: 0.25 * (1 - eta)
N3dksi = lambda eta,ksi: 0.25 * (1 + eta)
N4dksi = lambda eta,ksi: -0.25 * (1 + eta)
funkcje = [N1dksi,N2dksi,N3dksi,N4dksi]

N1deta = lambda eta,ksi: -0.25 * (1 - ksi)
N2deta = lambda eta,ksi: -0.25 * (1 + ksi)
N3deta = lambda eta,ksi: 0.25 * (1 + ksi)
N4deta = lambda eta,ksi: 0.25 * (1 - ksi)
funkcje = [N1deta, N2deta, N3deta, N4deta]
```

```
if points == 2:
    self.matrix = np.zeros((4, 4))
    for i in range(4):
        for j in range(4):
            self.matrix[i][j] = self.funkcje[i](*gauss_points["p2"][j])
    self.matrix = self.matrix.T

elif points == 3:
```

- Transformacji do układu globalnego: Pochodne cząstkowe są przekształcane do układu globalnego ( $x, y$ ) za pomocą macierzy Jacobiego. Jakobian przekształcenia mierzy, jak “dużo” przestrzeni jest “rozciągane” lub “kurczone” podczas przekształcenia z jednego układu współrzędnych na inny. Dlatego, kiedy przekształcamy punkt całkowania z jednego układu na inny, musimy “uwzględnić” ten efekt. Robimy to, mnożąc wyrażenie przez Jakobian przekształcenia. W ten sposób, element objętości  $dV$  w nowym układzie współrzędnych jest równy elementowi objętości w starym układzie współrzędnych.

```
@staticmethod
def przejscie(vec_dNidksi, vec_dNideta, vec2, vec4):
    dxdksi = vec_dNidksi[0] * vec4[0].x + vec_dNidksi[1] * vec4[1].x + vec_dNidksi[2] * vec4[2].x + vec_dNidksi[3] * vec4[3].x
    dydksi = vec_dNidksi[0] * vec4[0].y + vec_dNidksi[1] * vec4[1].y + vec_dNidksi[2] * vec4[2].y + vec_dNidksi[3] * vec4[3].y
    dxdata = vec_dNideta[0] * vec4[0].x + vec_dNideta[1] * vec4[1].x + vec_dNideta[2] * vec4[2].x + vec_dNideta[3] * vec4[3].x
    dydata = vec_dNideta[0] * vec4[0].y + vec_dNideta[1] * vec4[1].y + vec_dNideta[2] * vec4[2].y + vec_dNideta[3] * vec4[3].y

    matrix = np.array([[dxdksi,dydksi],
                      [dxdata, dydata]])

    determinant = np.linalg.det(matrix)
    reverse_mat = np.array([[dydata,-dydksi],
                           [-dxdata, dxdksi]])

    wynik = (1. / determinant) * reverse_mat @ vec2.T

    return wynik, determinant
```

- Agregacja macierzy wyliczonych w punktach: po uzyskaniu macierzy cząstkowych, są one przemnażane przez odpowiednie wagi i zsumowywany w celu utworzenia macierzy H dla elementu.

```
self.H_matrix = [] # Tablica poszczególnych macierzy cząstkowych - macierzy H
for i in range(self.points ** 2):
    Hpcj = self.k * (self.matrix_dx[i] + self.matrix_dy[i]) * list_jacobian[i]
    self.H_matrix.append(Hpcj)

if self.points == 2:
    for i, w in enumerate(gauss_weights["w2"]):
        self.H_matrix[i] *= w[0] * w[1]
elif self.points == 3:
    for i, w in enumerate(gauss_weights["w3"]):
        self.H_matrix[i] *= w[0] * w[1]
elif self.points == 4:
    for i, w in enumerate(gauss_weights["w4"]):
        self.H_matrix[i] *= w[0] * w[1]
else:
    raise ("Błąd liczby punktów")

self.H_matrix = np.sum(self.H_matrix, axis=0)
```

- Powtórzenie dla wszystkich elementów: Powyższe kroki są powtarzane dla każdego elementu w układzie, a wyniki globalnie agregowane , aby uzyskać globalną macierz H (w kodzie realizowane w tym samym momencie co agregacja macierzy HBC)

```
def fill_matrix_H(self):
    for element, id_mat in zip(self.grid.elements, self.where_ids_H):
        H = element.matrix_H
        HBC = element.matrix_HBC
        for i in range(4):
            for j in range(4):
                x,y = id_mat[i][j]
                self.global_H[x][y] += H[i][j]
                self.global_H[x][y] += HBC[i][j]
```

- **Obliczenie macierzy HBC, polegające na:**

- Obliczaniu wartości funkcji kształtu: Wartości funkcji kształtu są obliczane dla każdego punktu całkowania na brzegu elementu

```

N1 = lambda ksi, eta: 0.25 * (1 - ksi) * (1 - eta)
N2 = lambda ksi, eta: 0.25 * (1 + ksi) * (1 - eta)
N3 = lambda ksi, eta: 0.25 * (1 + ksi) * (1 + eta)
N4 = lambda ksi, eta: 0.25 * (1 - ksi) * (1 + eta)
N = [N1,N2,N3,N4]
edges_list = [edges["edge_d"],edges["edge_r"],edges["edge_t"],edges["edge_l"]]

for j in range(4):                      # Wylicz dla konkretnego punktu funkcje kształtu
    mat[0][j] = N[j](*point)

```

- Transformacji do układu globalnego: tym razem realizowana poprzez przemnożenie przez połowę długości boku elementu. Wynika to z liniowości przekształcenia.

```

def generate_jacobi_list_for_element(self,vec_4):
    if vec_4.to_list()[0].BC == 1 and vec_4.to_list()[1].BC == 1:
        jacobi_1 = np.sqrt((vec_4.to_list()[0].x - vec_4.to_list()[1].x) ** 2 + (vec_4.to_list()[0].y - vec_4.to_list()[1].y) ** 2) / 2
    else: jacobi_1 = 0.0 # """Nie uwzględniaj danej krawędzi w liczeniu macierzy HBC"""

    if vec_4.to_list()[1].BC == 1 and vec_4.to_list()[2].BC == 1:
        jacobi_2 = np.sqrt((vec_4.to_list()[1].x - vec_4.to_list()[2].x) ** 2 + (vec_4.to_list()[1].y - vec_4.to_list()[2].y) ** 2) / 2
    else: jacobi_2 = 0.0

    if vec_4.to_list()[2].BC == 1 and vec_4.to_list()[3].BC == 1:
        jacobi_3 = np.sqrt((vec_4.to_list()[2].x - vec_4.to_list()[3].x) ** 2 + (vec_4.to_list()[2].y - vec_4.to_list()[3].y) ** 2) / 2
    else: jacobi_3 = 0.0

    if vec_4.to_list()[3].BC == 1 and vec_4.to_list()[0].BC == 1:
        jacobi_4 = np.sqrt((vec_4.to_list()[3].x - vec_4.to_list()[0].x) ** 2 + (vec_4.to_list()[3].y - vec_4.to_list()[0].y) ** 2) / 2
    else: jacobi_4 = 0.0

```

- Agregacja macierzy wyliczonych w punktach: po uzyskaniu wyniku jest on przemnożony przez odpowiednie wagi, współczynnik przejmowania ciepła i zsumowywany w celu utworzenia macierzy HBC dla elementu.

```

    if jacobi_list[k] != 0.0:
        wynik += gauss[f"w{self.points}"][i] * self.k * (mat.T @ mat) * jacobi_list[k]
    warunki_brzegowe.append(wynik)
return np.sum(warunki_brzegowe, axis=0)

```

- Powtórzenie dla wszystkich elementów: Powyższe kroki są powtarzane dla każdego elementu w układzie, a wyniki globalnie agregowane , aby uzyskać globalną macierz HBC (w kodzie realizowane w tym samym momencie co agregacja macierzy H)

```
def fill_matrix_H(self):
    for element, id_mat in zip(self.grid.elements, self.where_ids_H):
        H = element.matrix_H
        HBC = element.matrix_HBC
        for i in range(4):
            for j in range(4):
                x,y = id_mat[i][j]
                self.global_H[x][y] += H[i][j]
                self.global_H[x][y] += HBC[i][j]
```

- **Obliczenie Macierzy C, polegające na:**

- Obliczaniu pochodnych cząstkowych: Podobnie jak dla macierzy H

```
if self.points == 2:
    vec_el_ksi = dNdksi(2)
    vec_el_eta = dNdet(2)
    self.vec_el_N = NFun(2)

elif self.points == 3:
```

- Transformacji do układu globalnego: Również analogicznie jak dla macierzy H

```
@staticmethod
def jacobian_calculate(vec_dNidksi,vec_dNideta,vec4):
    dxdksi = vec_dNidksi[0] * vec4[0].x + vec_dNidksi[1] * vec4[1].x + vec_dNidksi[2] * vec4[2].x + vec_dNidksi[3] * vec4[3].x
    dydksi = vec_dNidksi[0] * vec4[0].y + vec_dNidksi[1] * vec4[1].y + vec_dNidksi[2] * vec4[2].y + vec_dNidksi[3] * vec4[3].y
    dxdet = vec_dNideta[0] * vec4[0].x + vec_dNideta[1] * vec4[1].x + vec_dNideta[2] * vec4[2].x + vec_dNideta[3] * vec4[3].x
    dydet = vec_dNideta[0] * vec4[0].y + vec_dNideta[1] * vec4[1].y + vec_dNideta[2] * vec4[2].y + vec_dNideta[3] * vec4[3].y

    matrix = np.array([[dxdksi,dydksi],
                      [dxdet, dydet]])

    determinant = np.linalg.det(matrix)

    return determinant
```

- Agregacja macierzy wyliczonych w punktach: Tutaj w odróżnieniu od macierzy H, mnożymy uzyskane wyniki przez  $\rho$  i  $c$  by uwzględnić wpływ gęstości i ciepła właściwego na zdolność elementu do magazynowania energii cieplnej.

```
self.C_matrix = [] # Tablica poszczególnych macierzy częstkowych - macierzy C
for i in range(self.points ** 2):
    Cpc_i = self.cp * self.rho * self.matrix_N[i] * list_jacobian[i]
    self.C_matrix.append(Cpc_i)

if self.points == 2:
    for i, w in enumerate(gauss_weights["w2"]):
        self.C_matrix[i] *= w[0] * w[1]
elif self.points == 3:
    for i, w in enumerate(gauss_weights["w3"]):
        self.C_matrix[i] *= w[0] * w[1]
elif self.points == 4:
    for i, w in enumerate(gauss_weights["w4"]):
        self.C_matrix[i] *= w[0] * w[1]
else:
    raise ("Błąd liczby punktów")

self.C_matrix = np.sum(self.C_matrix, axis=0)
```

- Powtórzenie dla wszystkich elementów: Powyższe kroki są powtarzane dla każdego elementu w układzie, a wyniki globalnie agregowane, aby uzyskać globalną macierz C:

```
def fill_matrix_C(self):
    for element, id_mat in zip(self.grid.elements, self.where_ids_C):
        C = element.matrix_C
        for i in range(4):
            for j in range(4):
                x, y = id_mat[i][j]
                self.global_C[x][y] += C[i][j]
```

- Obliczenie Wektora P, polegające na:

- Obliczaniu wartości funkcji kształtu: Podobnie jak dla macierzy HBC

```
N1 = lambda ksi, eta: 0.25 * (1 - ksi) * (1 - eta)
N2 = lambda ksi, eta: 0.25 * (1 + ksi) * (1 - eta)
N3 = lambda ksi, eta: 0.25 * (1 + ksi) * (1 + eta)
N4 = lambda ksi, eta: 0.25 * (1 - ksi) * (1 + eta)
N = [N1,N2,N3,N4]
edges_list = [edges["edge_d"],edges["edge_r"],edges["edge_t"],edges["edge_l"]]
jacobi_list = self.generate_jacobi_list_for_element(vec_4) # Jakobiany dla poszczególnych boków [uwzględniony warunek BC]
```

- Transformacji do układu globalnego: Również analogicznie jak dla macierzy HBC

```
def generate_jacobi_list_for_element(self,vec_4):
    if vec_4.to_list()[0].BC == 1 and vec_4.to_list()[1].BC == 1:
        jacobi_1 = np.sqrt((vec_4.to_list()[0].x - vec_4.to_list()[1].x) ** 2 + (vec_4.to_list()[0].y - vec_4.to_list()[1].y) ** 2) / 2
    else: jacobi_1 = 0.0 # """wyzeruje macierz - bo wtedy nie uwzględniamy danej krawędzi [ Bez tego warunku wszystkie krawędzie są zewnętrzne ]"""
    if vec_4.to_list()[1].BC == 1 and vec_4.to_list()[2].BC == 1:
        jacobi_2 = np.sqrt((vec_4.to_list()[1].x - vec_4.to_list()[2].x) ** 2 + (vec_4.to_list()[1].y - vec_4.to_list()[2].y) ** 2) / 2
    else: jacobi_2 = 0.0
    if vec_4.to_list()[2].BC == 1 and vec_4.to_list()[3].BC == 1:
        jacobi_3 = np.sqrt((vec_4.to_list()[2].x - vec_4.to_list()[3].x) ** 2 + (vec_4.to_list()[2].y - vec_4.to_list()[3].y) ** 2) / 2
    else: jacobi_3 = 0.0
    if vec_4.to_list()[3].BC == 1 and vec_4.to_list()[0].BC == 1:
        jacobi_4 = np.sqrt((vec_4.to_list()[3].x - vec_4.to_list()[0].x) ** 2 + (vec_4.to_list()[3].y - vec_4.to_list()[0].y) ** 2) / 2
    else: jacobi_4 = 0.0
```

- Agregacja macierzy wyliczonych w punktach: po uzyskaniu wyniku jest on przemnożony przez odpowiednie wagę, współczynnik przejmowania ciepła, temperaturę otoczenia i zsumowywany w celu utworzenia wektora P dla elementu.

```
    if jacobi_list[k] != 0.0:
        wynik += gauss[f"w{self.points}"][i] * self.alfa * mat * self.tot * jacobi_list[k]
    warunki_brzegowe.append(wynik)

return np.sum(warunki_brzegowe, axis=0)
```

- Powtórzenie dla wszystkich elementów: Powyższe kroki są powtarzane dla każdego elementu w układzie, a wyniki globalnie agregowane, by uzyskać globalny wektor P.

```
def fill_vector_P(self):
    for element, id_vec in zip(self.grid.elements, self.where_ids_P):
        P = element.vectorP
        for i in range(4):
            x = id_vec[0][i]
            self.global_P[x][0] += P[i]
```

- Rozwiązań układu równań, niejawnym schematem (bardziej stabilnym numerycznie, niż jawny):

$$\left( [H] + \frac{[C]}{\Delta\tau} \right) \{t_1\} - \left( \frac{[C]}{\Delta\tau} \right) \{t_0\} + \{P\} = 0 . \quad \{t_1\} = \{t_0\} - \frac{\Delta\tau}{[C]} ([H] \{t_0\} + \{P\})$$

## Niejawny schemat

jawny schemat

- Wykorzystana została w tym celu biblioteka: `scipy.sparse` zoptymalizowana do obsługi rzadkich układów macierzowych układów równań.

```
def solve(self):
    matric_c_per_step = self.global_C / self.SimulationStepTime
    matrix_glob = self.global_H + matric_c_per_step

    T_opt = []

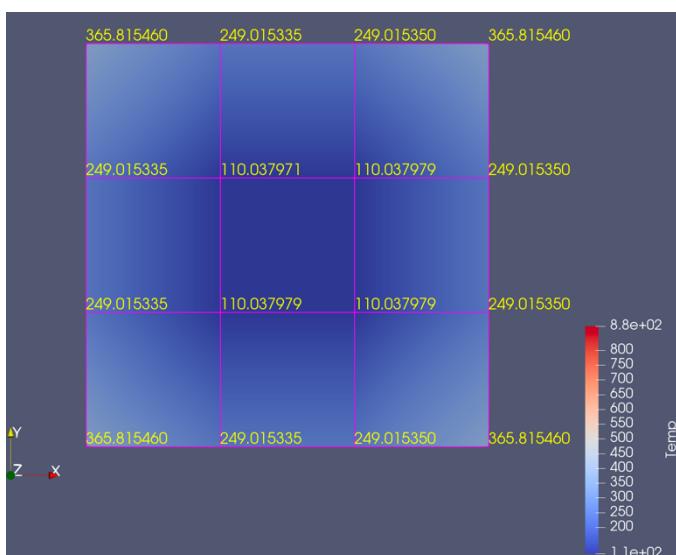
    for time in range(self.SimulationStepTime, self.SimulationTime + self.SimulationStepTime, self.SimulationStepTime):
        T1 = spsolve(csr_matrix(matrix_glob), self.global_P + (matric_c_per_step @ self.T0))

        T1 = np.array(T1).reshape(-1,1)

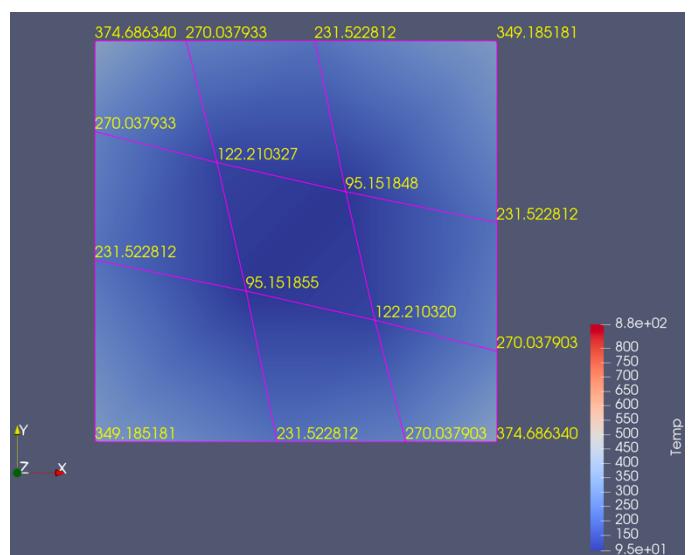
        self.print_T(T1,time)
        T_opt.append(T1)
        self.T0 = T1

    return np.array(T_opt)
```

- Wygenerowanie plików .vtk dla programu paraview i wizualnego sprawdzenia wyników:



## Siatka testowa – simple (Test1.txt)



Siatka testowa – mixgrid (Test2.txt)

## Porównanie wyników oprogramowania z testami

### 1. Test wczytywania siatki i parametrów symulacji (Siatka 4\_4\_mix // 2pkt schemat)

```
-----TEST_GRID-----
Test: SimulationTime: 500 , SimulationStepTime: 50
Test: Conductivity: 25 , Alfa: 300
Test: Tot: 1200 , InitialTemp: 100
Test: Density: 7800 , SpecificHeat: 700
Test: Nodes_number: 16 , Elements_number: 9
-----
1) x: 0.100000001 y: 0.0049999989 BC: 1
2) x: 0.0546918176 y: 0.0049999989 BC: 1
3) x: 0.0226540919 y: 0.0049999989 BC: 1
4) x: 0.0 y: 0.0049999989 BC: 1
5) x: 0.100000001 y: -0.0403081849 BC: 1
6) x: 0.0623899326 y: -0.0326100662 BC: 0
7) x: 0.0303522106 y: -0.0253522098 BC: 0
8) x: 0.0 y: -0.0176540911 BC: 1
9) x: 0.100000001 y: -0.072345905 BC: 1
10) x: 0.069647789 y: -0.0646477863 BC: 0
11) x: 0.0376100652 y: -0.0573899336 BC: 0
12) x: 0.0 y: -0.0496918149 BC: 1
13) x: 0.100000001 y: -0.0949999988 BC: 1
14) x: 0.0773459077 y: -0.0949999988 BC: 1
15) x: 0.0453081839 y: -0.0949999988 BC: 1
16) x: 0.0 y: -0.0949999988 BC: 1
-----
1) vec[0]: (0.100000001, 0.0049999989) , vec[3]: (0.100000001, -0.0403081849)
2) vec[0]: (0.0546918176, 0.0049999989) , vec[3]: (0.0623899326, -0.0326100662)
3) vec[0]: (0.0226540919, 0.0049999989) , vec[3]: (0.0303522106, -0.0253522098)
4) vec[0]: (0.100000001, -0.0403081849) , vec[3]: (0.100000001, -0.072345905)
5) vec[0]: (0.0623899326, -0.0326100662) , vec[3]: (0.069647789, -0.0646477863)
6) vec[0]: (0.0303522106, -0.0253522098) , vec[3]: (0.0376100652, -0.0573899336)
7) vec[0]: (0.100000001, -0.072345905) , vec[3]: (0.100000001, -0.0949999988)
8) vec[0]: (0.069647789, -0.0646477863) , vec[3]: (0.0773459077, -0.0949999988)
9) vec[0]: (0.0376100652, -0.0573899336) , vec[3]: (0.0453081839, -0.0949999988)
-----
```

SimulationTime 500  
SimulationStepTime 50  
Conductivity 25  
Alfa 300  
Tot 1200  
InitialTemp 100  
Density 7800  
SpecificHeat 700  
Nodes number 16  
Elements number 9  
\*Node  
1, 0.100000001, 0.0049999989  
2, 0.0546918176, 0.0049999989  
3, 0.0226540919, 0.0049999989  
4, 0., 0.0049999989  
5, 0.100000001, -0.0403081849  
6, 0.0623899326, -0.0326100662  
7, 0.0303522106, -0.0253522098  
8, 0., -0.0176540911  
9, 0.100000001, -0.072345905  
10, 0.069647789, -0.0646477863  
11, 0.0376100652, -0.0573899336  
12, 0., -0.0496918149  
13, 0.100000001, -0.0949999988  
14, 0.0773459077, -0.0949999988  
15, 0.0453081839, -0.0949999988  
16, 0., -0.0949999988  
\*Element, type=DC2D4  
1, 1, 2, 6, 5  
2, 2, 3, 7, 6  
3, 3, 4, 8, 7  
4, 5, 6, 10, 9  
5, 6, 7, 11, 10  
6, 7, 8, 12, 11  
7, 9, 10, 14, 13  
8, 10, 11, 15, 14  
9, 11, 12, 16, 15  
\*BC  
1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 12, 13, 14, 15, 16

### 2. Test obliczeń pochodnych cząstkowych po ksi i eta (schemat 2pkt):

```
-----ELEMENT_UNIIVERSALNY_TEST-----
dNdksi: [[-0.39433757  0.39433757  0.10566243 -0.10566243]
           [-0.39433757  0.39433757  0.10566243 -0.10566243]
           [-0.10566243  0.10566243  0.39433757 -0.39433757]
           [-0.10566243  0.10566243  0.39433757 -0.39433757]]
dNdeteta: [[-0.39433757 -0.10566243  0.10566243  0.39433757]
            [-0.10566243 -0.39433757  0.39433757  0.10566243]
            [-0.39433757 -0.10566243  0.10566243  0.39433757]
            [-0.10566243 -0.39433757  0.39433757  0.10566243]]
```

dN/dKsi  
-0.394338 0.394338 0.105662 -0.105662  
-0.394338 0.394338 0.105662 -0.105662  
-0.105662 0.105662 0.394338 -0.394338  
-0.105662 0.105662 0.394338 -0.394338  
\*dN/dEta  
-0.394338 -0.105662 0.105662 0.394338  
-0.105662 -0.394338 0.394338 0.105662  
-0.394338 -0.105662 0.105662 0.394338  
-0.105662 -0.394338 0.394338 0.105662

3 . Test obliczeń lokalnych macierzy H – ( porównanie dla pierwszych 5):

```
-----MACIERZ_H_TEST-----
[[ 17.76238271 -3.39971499 -10.96295267 -3.39971506]
 [ -3.39971499 14.65084276 -5.14961161 -6.10151617]
 [-10.96295267 -5.14961161 21.26217502 -5.14961075]
 [ -3.39971506 -6.10151617 -5.14961075 14.65084198]]
[[ 20.95840051 -5.19066342 -13.27218673 -2.49555037]
 [ -5.19066342 14.13800425 -4.44552642 -4.50181441]
 [-13.27218673 -4.44552642 23.37692347 -5.65921033]
 [ -2.49555037 -4.50181441 -5.65921033 12.6565751 ]]
[[ 21.12793339 -5.49124732 -12.36735175 -3.26933431]
 [ -5.49124732 16.21364391 -5.49124826 -5.23114833]
 [-12.36735175 -5.49124826 21.12793348 -3.26933437]
 [ -3.26933431 -5.23114833 -3.26933437 11.76981611]]
[[ 20.95840224 -2.49554802 -13.27218766 -5.19066657]
 [ -2.49554802 12.65657462 -5.65921257 -4.50181403]
 [-13.27218766 -5.65921257 23.37692413 -4.4455239 ]
 [ -5.19066657 -4.50181403 -4.4455239 14.1380045 ]]
[[ 24.43980717 -4.61747587 -15.2048546 -4.6174767 ]
 [ -4.61747587 12.49999981 -4.61747545 -3.26504849]
 [-15.2048546 -4.61747545 24.43980512 -4.61747507]
 [ -4.6174767 -3.26504849 -4.61747507 12.50000025]]
```

<pre>H dla elementu - 1 17.7624 -3.39971 -10.963 -3.39972 -3.39971 14.6508 -5.14961 -6.10152 -10.963 -5.14961 21.2622 -5.14961 -3.39972 -6.10152 -5.14961 14.6508</pre>
<pre>H dla elementu - 2 20.9584 -5.19066 -13.2722 -2.49555 -5.19066 14.138 -4.44553 -4.50181 -13.2722 -4.44553 23.3769 -5.65921 -2.49555 -4.50181 -5.65921 12.6566</pre>
<pre>H dla elementu - 3 21.1279 -5.49125 -12.3674 -3.26933 -5.49125 16.2136 -5.49125 -5.23115 -12.3674 -5.49125 21.1279 -3.26933 -3.26933 -5.23115 -3.26933 11.7698</pre>
<pre>H dla elementu - 4 20.9584 -2.49555 -13.2722 -5.19067 -2.49555 12.6566 -5.65921 -4.50181 -13.2722 -5.65921 23.3769 -4.44552 -5.19067 -4.50181 -4.44552 14.138</pre>
<pre>H dla elementu - 5 24.4398 -4.61748 -15.2049 -4.61748 -4.61748 12.5 -4.61748 -3.26505 -15.2049 -4.61748 24.4398 -4.61748 -4.61748 -3.26505 -4.61748 12.5</pre>

4. Test obliczeń lokalnych macierzy HBC – ( porównanie dla pierwszych 5):

```
-----MACIERZ_HBC_TEST-----
[[9.06163682 2.26540917 0.          2.26540924]
 [2.26540917 4.53081834 0.          0.          ]
 [0.          0.          0.          0.          ]
 [2.26540924 0.          0.          4.53081848]]
[[3.20377257 1.60188629 0.          0.          ]
 [1.60188629 3.20377257 0.          0.          ]
 [0.          0.          0.          0.          ]
 [0.          0.          0.          0.          ]]
[[2.26540919 1.1327046 0.          0.          ]
 [1.1327046 4.53081829 1.13270455 0.          ]
 [0.          1.13270455 2.2654091 0.          ]
 [0.          0.          0.          0.          ]]
[[3.20377201 0.          0.          1.60188601]
 [0.          0.          0.          0.          ]
 [0.          0.          0.          0.          ]
 [1.60188601 0.          0.          3.20377201]]
```

<pre>Macierz Hbc dla elementu nt 1 9.06164 2.26541 0 2.26541 2.26541 4.53082 0 0 0 0 0 0 2.26541 0 0 4.53082</pre>
<pre>Macierz Hbc dla elementu nt 2 3.20377 1.60189 0 0 1.60189 3.20377 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0</pre>
<pre>Macierz Hbc dla elementu nt 3 2.26541 1.1327 0 0 1.1327 4.53082 1.1327 0 0 1.1327 2.26541 0 0 0 0 0</pre>
<pre>Macierz Hbc dla elementu nt 4 3.20377 0 0 1.60189 0 0 0 0 0 0 0 0 1.60189 0 0 3.20377</pre>
<pre>Macierz Hbc dla elementu nt 5 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0</pre>

5. Test obliczeń lokalnych dla wektorów P:

```
-----VECTOR_P_TEST-----
[16310.9462742 8155.473012 0. 8155.4732622]
[5766.790626 5766.790626 0. 0. ]
[4077.736542 8155.4729202 4077.7363782 0. ]
[5766.789618 0. 0. 5766.789618]
[0. 0. 0. 0. ]
[ 0. 5766.790284 5766.790284 0. ]
[4077.736884 0. 4077.736794 8155.473678]
[ 0. 0. 5766.790284 5766.790284]
[ 0. 8155.473102 16310.946204 8155.473102]
-----
```

Wektor {P} dla elementu - 1  
 16310.9 8155.47 0 8155.47  
 Wektor {P} dla elementu - 2  
 5766.79 5766.79 0 0  
 Wektor {P} dla elementu - 3  
 4077.74 8155.47 4077.74 0  
 Wektor {P} dla elementu - 4  
 5766.79 0 0 5766.79  
 Wektor {P} dla elementu - 5  
 0 0 0 0  
 Wektor {P} dla elementu - 6  
 0 5766.79 5766.79 0  
 Wektor {P} dla elementu - 7  
 4077.74 0 4077.74 8155.47  
 Wektor {P} dla elementu - 8  
 0 0 5766.79 5766.79  
 Wektor {P} dla elementu - 9  
 0 8155.47 16310.9 8155.47

6. Test obliczeń lokalnych macierzy C:

```
-----MACIERZ_C_TEST-----
[[1139.58553695 543.34302896 258.44665067 543.34304086]
 [ 543.34302896 1033.78657887 490.44356182 258.44665067]
 [ 258.44665067 490.44356182 927.9876684 490.44357372]
 [ 543.34304086 258.44665067 490.44357372 1033.78662648]]
[[687.25729177 325.99548394 160.87926377 339.3916895 ]
 [325.99548394 616.72464397 304.1253656 160.87926377]
 [160.87926377 304.1253656 599.77681842 317.52157116]
 [339.3916895 160.87926377 317.52157116 670.30946621]]
[[417.1450592 195.34765972 104.28626453 221.79739895]
 [195.34765972 364.24557969 195.34765919 104.28626453]
 [104.28626453 195.34765919 417.14505708 221.79739841]
 [221.79739895 104.28626453 221.79739841 470.04453658]]
[[687.25723209 339.39166817 160.87925465 325.99545718]
 [339.39166817 670.3094406 317.52156143 160.87925465]
 [160.87925465 317.52156143 599.77680513 304.12535044]
 [325.99545718 160.87925465 304.12535044 616.72459662]]
[[590.73508105 295.3675505 147.68377846 295.36754693]
 [295.3675505 590.73512097 295.36756689 147.68377846]
 [147.68377846 295.36756689 590.73514661 295.36756332]
 [295.36754693 147.68377846 295.36756332 590.73510669]]
```

C dla elementu - 1  
 1139.59 543.343 258.447 543.343  
 543.343 1033.79 490.444 258.447  
 258.447 490.444 927.988 490.444  
 543.343 258.447 490.444 1033.79  
  
 C dla elementu - 2  
 687.257 325.995 160.879 339.392  
 325.995 616.725 304.125 160.879  
 160.879 304.125 599.777 317.522  
 339.392 160.879 317.522 670.309  
  
 C dla elementu - 3  
 417.145 195.348 104.286 221.797  
 195.348 364.246 195.348 104.286  
 104.286 195.348 417.145 221.797  
 221.797 104.286 221.797 470.045  
  
 C dla elementu - 4  
 687.257 339.392 160.879 325.995  
 339.392 670.309 317.522 160.879  
 160.879 317.522 599.777 304.125  
 325.995 160.879 304.125 616.725  
  
 C dla elementu - 5  
 590.735 295.368 147.684 295.368  
 295.368 590.735 295.368 147.684  
 147.684 295.368 590.735 295.368  
 295.368 147.684 295.368 590.735

## 7. Test obliczeń globalnej Macierzy H ( H\_local + HBC\_local):

```
MatrixH
[[ 26.82401953 -1.13430582 0. 0. -1.13430582 -10.96295267 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. ]]
[ -1.13430582 43.34383419 -3.58877714 0. -6.10151617 -7.64516197 -13.27218673 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. ]]
[ 0. -3.58877714 40.7351194 -4.35854273 0. -4.50181441 -7.71486073 -12.36735175 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. ]]
[ 0. 0. -4.35854273 20.7444622 0. 0. -5.23114833 -4.35854371 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. ]]
[ -1.13430582 -6.10151617 0. 0. 43.3438347 -7.64515876 0. 0. -3.58878056 -13.27218766 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. ]]
[-10.96295267 -7.64516197 -4.50181441 0. -7.64515876 71.01513191 -10.2766862 0. -4.50181403 -10.27668927 -15.2048546 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. ]]
[ 0. -13.27218673 -7.71486073 -5.23114833 0. -10.2766862 71.02366242 -7.71485936 0. -3.26504849 -10.27668552 -13.27218706 0. 0. 0. 0. 0. 0. ]]
[ 0. 0. -12.36735175 -4.35854371 0. 0. -7.71485936 40.73511927 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. ]]
[ 0. 0. 0. 0. -3.58878056 -4.50181403 0. 0. 40.73511887 -7.71485807 0. 0. -4.35854273 -12.36735139 0. 0. 0. 0. 0. ]]
[ 0. 0. 0. 0. -13.27218766 -10.27668927 -3.26504849 0. -7.71485807 71.02366272 -10.27668542 0. -5.23114854 -7.71485883 -13.27218644 0. 0. ]]
[ 0. 0. 0. 0. -15.2048546 -10.27668552 -4.5018142 0. -10.27668542 71.01513152 -7.64516194 43.34383439 0. 0. -4.5018146 -7.64516177 -10.96295347 ]]
[ 0. 0. 0. 0. 0. 0. -13.27218706 -3.58877803 0. 0. -7.64516194 43.34383439 0. 0. -6.10151559 -1.13430562 ]]
[ 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. -4.35854273 -5.23114854 0. 0. 20.7444626 -4.35854326 40.73511911 -3.58877846 0. 0. ]]
[ 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. -13.27218644 -7.64516177 -6.10151559 0. 0. -3.58877846 43.34383403 -1.13430562 ]]
[ 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. -10.96295347 -1.13430562 0. 0. 0. -1.13430562 26.82401988]]
```

## 8. Test obliczeń globalnego Wektora P:

```
VectorP
[[16310.9462742]
 [13922.263638]
 [ 9844.527168]
 [ 8155.4729202]
 [13922.2628802]
 [ 0. ]
 [ 0. ]
 [ 9844.5266622]
 [ 9844.526502 ]
 [ 0. ]
 [ 0. ]
 [13922.263386]
 [ 8155.473678]
 [ 9844.527078]
 [13922.263386]
 [16310.946204]]
```

## 9. Test obliczeń globalnej Macierzy C:

```
MatrixC
[[1139.58553695 543.34302896 0. 0. 543.34304086 258.44665067 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. ]]
[ 543.34302896 1721.04387064 325.99548394 0. 258.44665067 829.83525131 160.87926377 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. ]]
[ 0. 325.99548394 1033.86978031 195.34765972 0. 160.87926377 525.92276454 104.28626453 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. ]]
[ 0. 0. 195.34765972 364.24557969 0. 0. 104.28626453 195.34765919 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. ]]
[ 543.34304086 258.44665067 0. 0. 1721.04385857 829.83524189 0. 0. 325.99545718 160.87925465 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. ]]
[ 258.44665067 829.83525131 160.87926377 0. 829.83524189 289.34165626 612.88912166 0. 160.87925465 612.88910837 147.68377846 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. ]]
[ 0. 160.87926377 525.92276454 104.28626453 0. 612.88912166 2260.33332365 525.92276908 0. 147.68377846 612.88914727 160.8792636 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. ]]
[ 0. 0. 104.28626453 195.34765919 0. 0. 525.92276908 1033.86969204 0. 0. 160.8792636 325.99547401 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. ]]
[ 0. 0. 0. 0. 325.99545718 160.87925465 0. 0. 1033.86972303 525.92278434 0. 0. 195.34769222 104.28628146 0. 0. 0. 0. ]]
[ 0. 0. 0. 0. 160.87925465 612.88910837 147.68377846 0. 525.92278434 2260.33346030 612.88915626 0. 104.28628146 525.92282834 160.87926932 0. 0. ]]
[ 0. 0. 0. 0. 0. 0. 147.68377846 612.88914727 160.8792636 0. 612.88915626 289.34169287 829.83521492 0. 160.87926932 829.83522175 258.4466355 ]]
[ 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 195.34769222 104.28628146 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. ]]
[ 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 104.28628146 525.92282034 160.87926932 0. 195.34769193 0. 0. 0. 0. ]]
[ 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. ]]
[ 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. ]]
```

## 10. Test max/min temperatury w węzłach siatki dla poszczególnych kroków czasowych:

```

VectorT // time=50
min: [95.15184899723258] ; max: [374.68633318838175]

VectorT // time=100
min: [147.64441907368297] ; max: [505.9681112788898]

VectorT // time=150
min: [220.16445575098794] ; max: [586.9978492792005]

VectorT // time=200
min: [296.73643835297565] ; max: [647.2855822356539]

VectorT // time=250
min: [370.96827241893254] ; max: [697.3339844638065]

VectorT // time=300
min: [440.5601435998324] ; max: [741.2191101272799]

VectorT // time=350
min: [504.8912021091295] ; max: [781.2095685593976]

VectorT // time=400
min: [564.0015163225324] ; max: [817.39150466240944]

VectorT // time=450
min: [618.1738632500773] ; max: [850.2373167651089]

VectorT // time=500
min: [667.765556911745] ; max: [880.1676019293311]

```

## Temperature results

```

Time = 50 min_T= 95.152, max_T = 374.69
Time = 100 min_T= 147.64, max_T = 505.97
Time = 150 min_T= 220.16, max_T = 587
Time = 200 min_T= 296.74, max_T = 647.29
Time = 250 min_T= 370.97, max_T = 697.33
Time = 300 min_T= 440.56, max_T = 741.22
Time = 350 min_T= 504.89, max_T = 781.21
Time = 400 min_T= 564, max_T = 817.39
Time = 450 min_T= 618.17, max_T = 850.24
Time = 500 min_T= 667.77, max_T = 880.17

```

## 11. Test wydajności – pomiar czasu wykonania:

```

t1 = time.time()

matrix_H = Matrix_H(points, path)          # Uzyskaj macierze sztywności H dla wszystkich elementów
matrix_HBC = Matrix_HBC(points, grid, global_data) # Uzyskaj macierze HBC dla wszystkich elementów
matrix_vecP = VectorP(points, grid, global_data) # Uzyskaj wektor P dla wszystkich elementów
matrix_C = Matrix_C(points, path)          # Uzyskaj macierz C dla wszystkich elementów

for i, element in enumerate(grid.elements):
    element.matrix_H = matrix_H.get_H_matrices()[i]      # Dodaj macierz H do elementów
    element.matrix_HBC = matrix_HBC.get_HBC_matrices()[i] # Dodaj macierz HBC do elementów
    element.vectorP = matrix_vecP.get_vectorP_matrices()[i] # Dodaj VectorP do elementów
    element.matrix_C = matrix_C.get_C_matrices()[i]        # Dodaj Macierz C do elementów

aggregate = Aggregation(grid, global_data)      # Klasa do agregacji macierzy
# aggregate.test_H_global()                      # Test złożenia macierzy H_global
# aggregate.test_P_global()                      # Test złożenia wektora P_global
# aggregate.test_C_global()                      # Test złożenia macierzy C_global

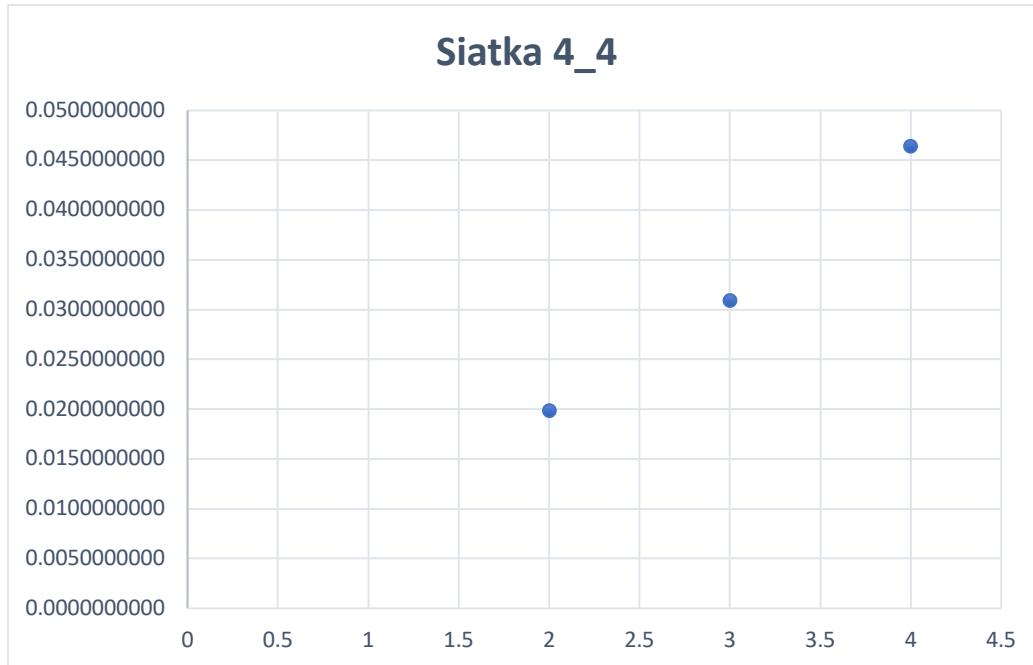
solver = Solver(global_data, aggregate.global_H, aggregate.global_P, aggregate.global_C)      # Klasa do rozwiązywania układu równań
t_opt = solver.solve()                         # Rozwiązywanie układu równań

t2 = time.time()

```

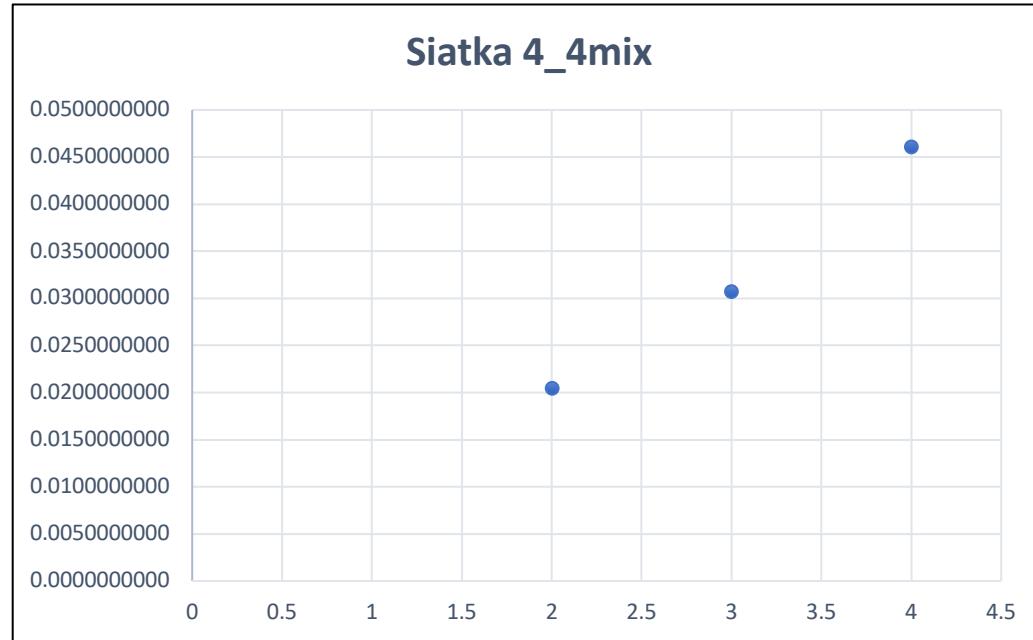
- **Siatka 4\_4:**

- **2 pkt :** Czas obliczeń: 0.01986980438232422 s
- **3 pkt:** Czas obliczeń: 0.03090214729309082 s
- **4 pkt:** Czas obliczeń: 0.04640698432922363 s



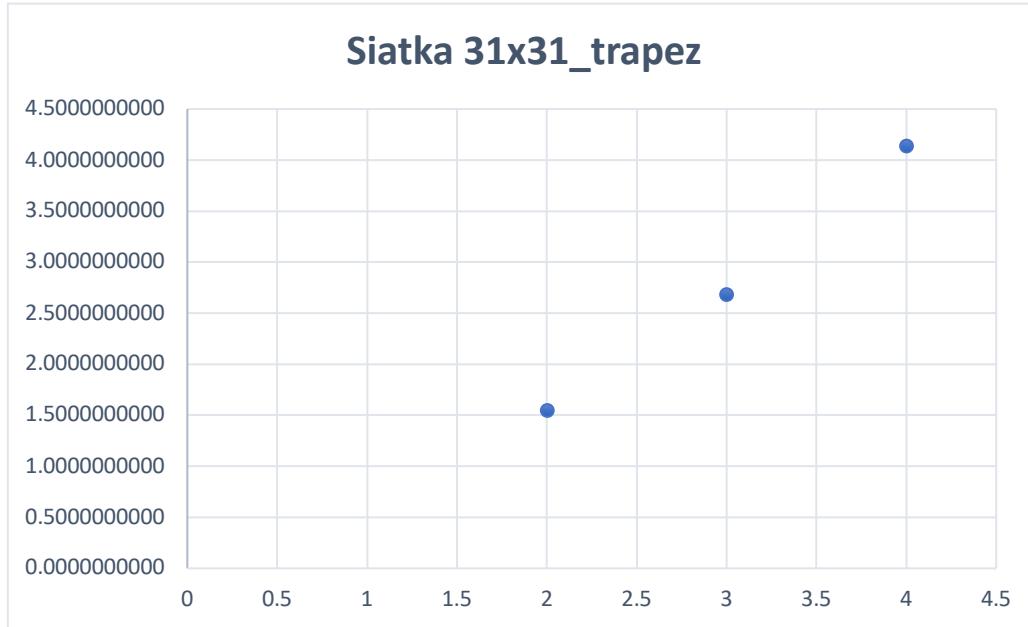
- **Siatka 4\_4mix:**

- **2 pkt :** Czas obliczeń: 0.02043008804321289 s
- **3 pkt:** Czas obliczeń: 0.030714988708496094 s
- **4 pkt:** Czas obliczeń: 0.046035051345825195 s



- **Siatka 31x31 trapez:**

- **2 pkt**: Czas obliczeń: 1.5451130867004395 s
- **3 pkt**: Czas obliczeń: 2.6795828342437744 s
- **4 pkt**: Czas obliczeń: 4.135563135147095 s



## Wnioski

- W napisanym programie wzrost liczby punktów całkowania powoduje (nieznaczne) zwiększenie dokładności obliczeń, lecz odbywa się to kosztem ich czasu:

```

VectorT // time=50
min: [95.15184899723258] ; max: [374.68633318838175]

VectorT // time=100
min: [147.64441987368297] ; max: [585.968112788898]

VectorT // time=150
min: [220.16445575098794] ; max: [586.9978492792005]

VectorT // time=200
min: [296.73643835297565] ; max: [647.2855822356539]

VectorT // time=250
min: [370.96827241893254] ; max: [697.3339844638065]

VectorT // time=300
min: [440.5601435998324] ; max: [741.2191101272799]

VectorT // time=350
min: [504.8912021091295] ; max: [781.2095685593976]

VectorT // time=400
min: [564.0015163225324] ; max: [817.3915046240944]

VectorT // time=450
min: [618.1738632590773] ; max: [850.2373167651089]

VectorT // time=500
min: [667.765556911745] ; max: [888.1676019293311]

```

Schemat całkowania 2 pkt

```

VectorT // time=50
min: [95.15907045805812] ; max: [374.6682653076116]

VectorT // time=100
min: [147.65589676737176] ; max: [585.9542555019275]

VectorT // time=150
min: [220.1781130523986] ; max: [586.9894190714291]

VectorT // time=200
min: [296.75088744900926] ; max: [647.2801115566524]

VectorT // time=250
min: [370.9826353113169] ; max: [697.3298658653003]

VectorT // time=300
min: [440.574008633251024] ; max: [741.2156477930183]

VectorT // time=350
min: [504.9943692131344] ; max: [781.2408553797723]

VectorT // time=400
min: [564.0139181296834] ; max: [817.4205105019431]

VectorT // time=450
min: [618.185492013078] ; max: [850.2641100838319]

VectorT // time=500
min: [667.776433784155] ; max: [888.1923022343236]

```

Schemat całkowania 4 pkt

Dla siatki 4\_4\_mix różnice w uzyskanych wynikach, są rzędu 0.01, przy ponad 2 razy dłuższym czasie obliczeń.

Dla większej siatki, różnice w uzyskiwanych wynikach stają się jeszcze mniejsze, a czas wykonania drastycznie (ponad 2.5 razy co jest już zauważalne przez użytkownika).

```
-----VectorT // time=20-----
min: [100.064319869904] ; max: [341.0846585343215]
```

Schemat całkowania 2 pkt

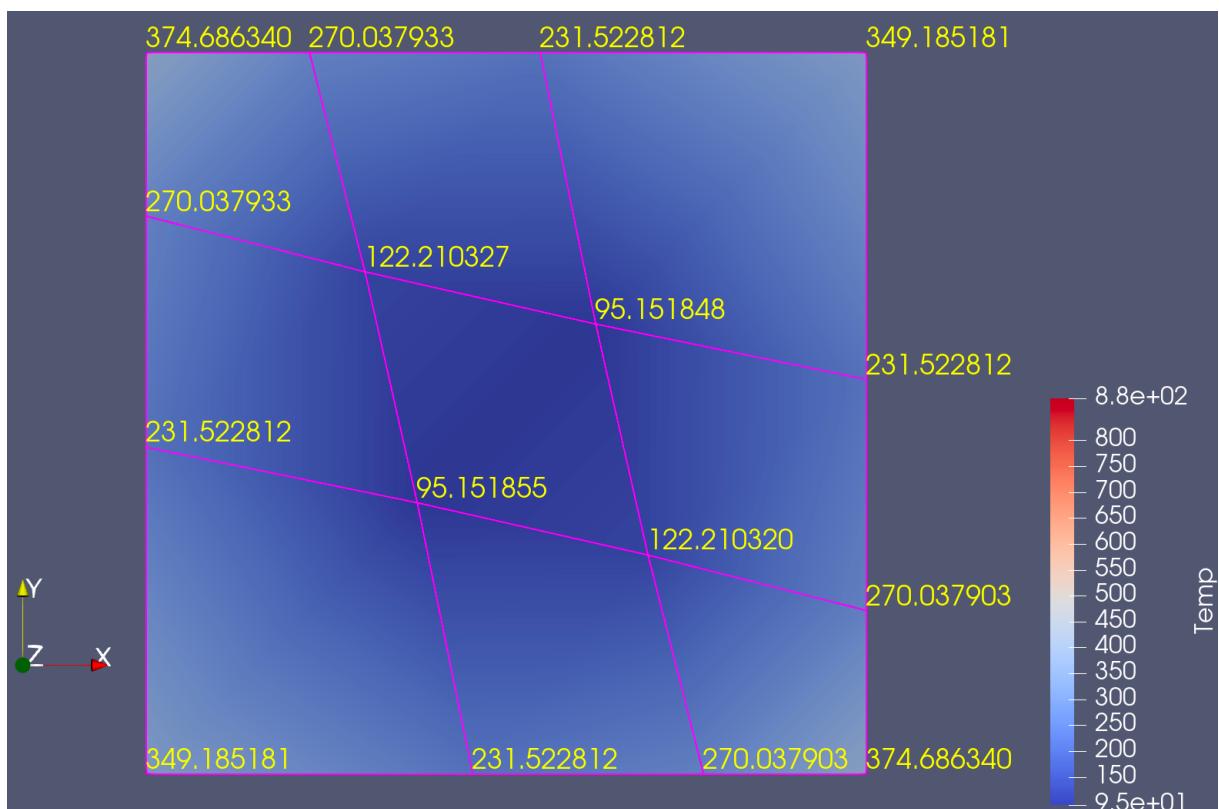
```
-----VectorT // time=20-----
min: [100.0643198699041] ; max: [341.08465853432136]
```

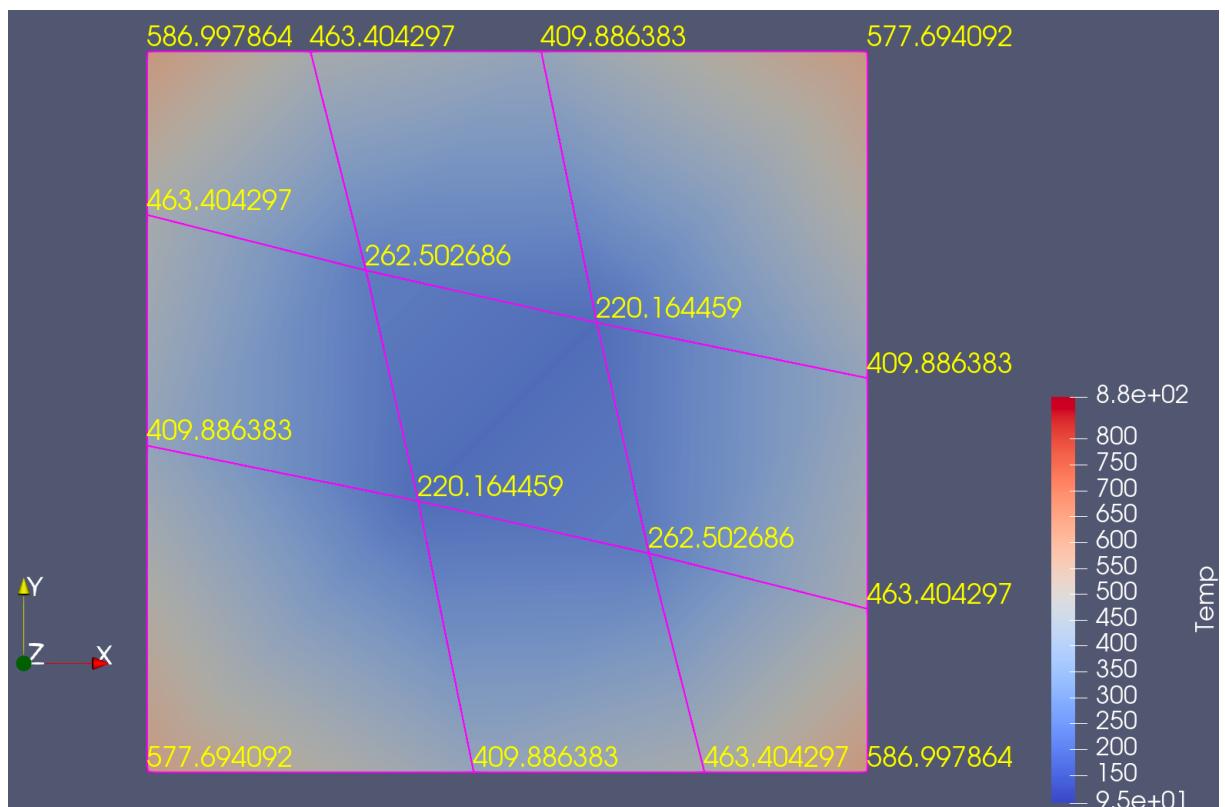
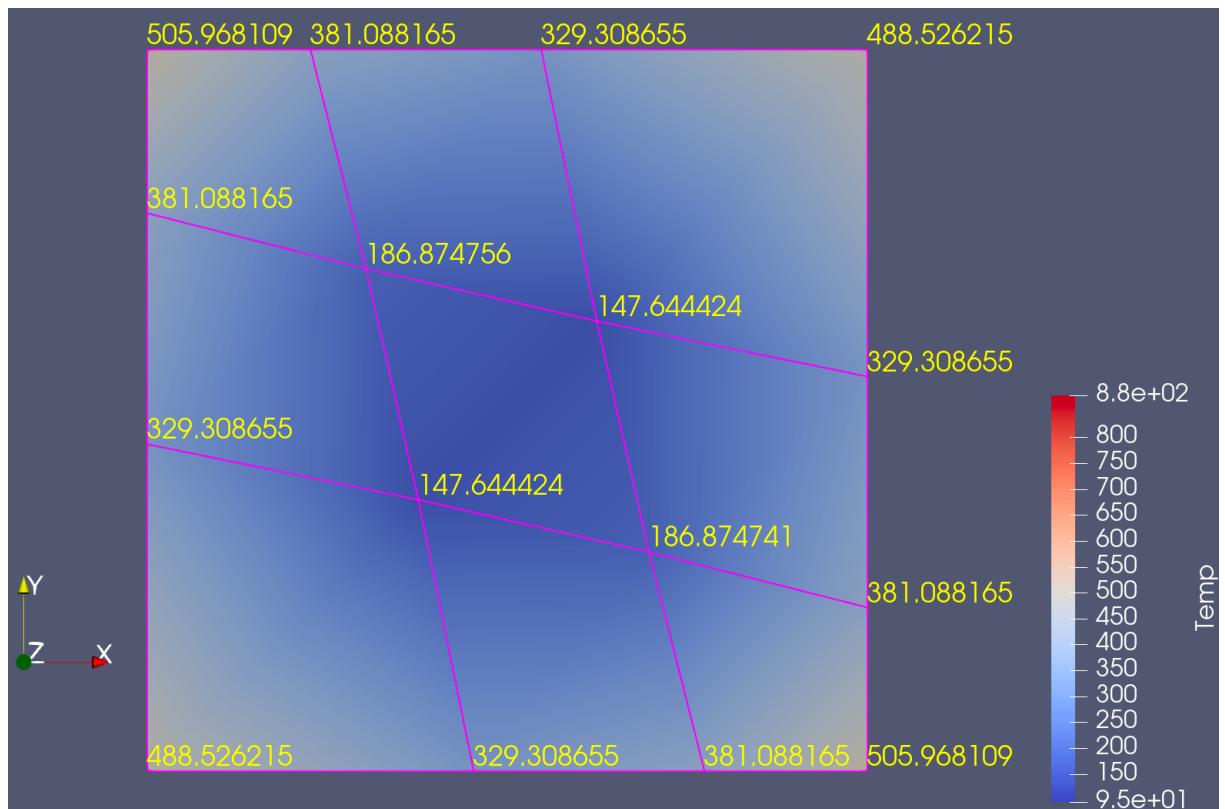
Schemat całkowania 4 pkt

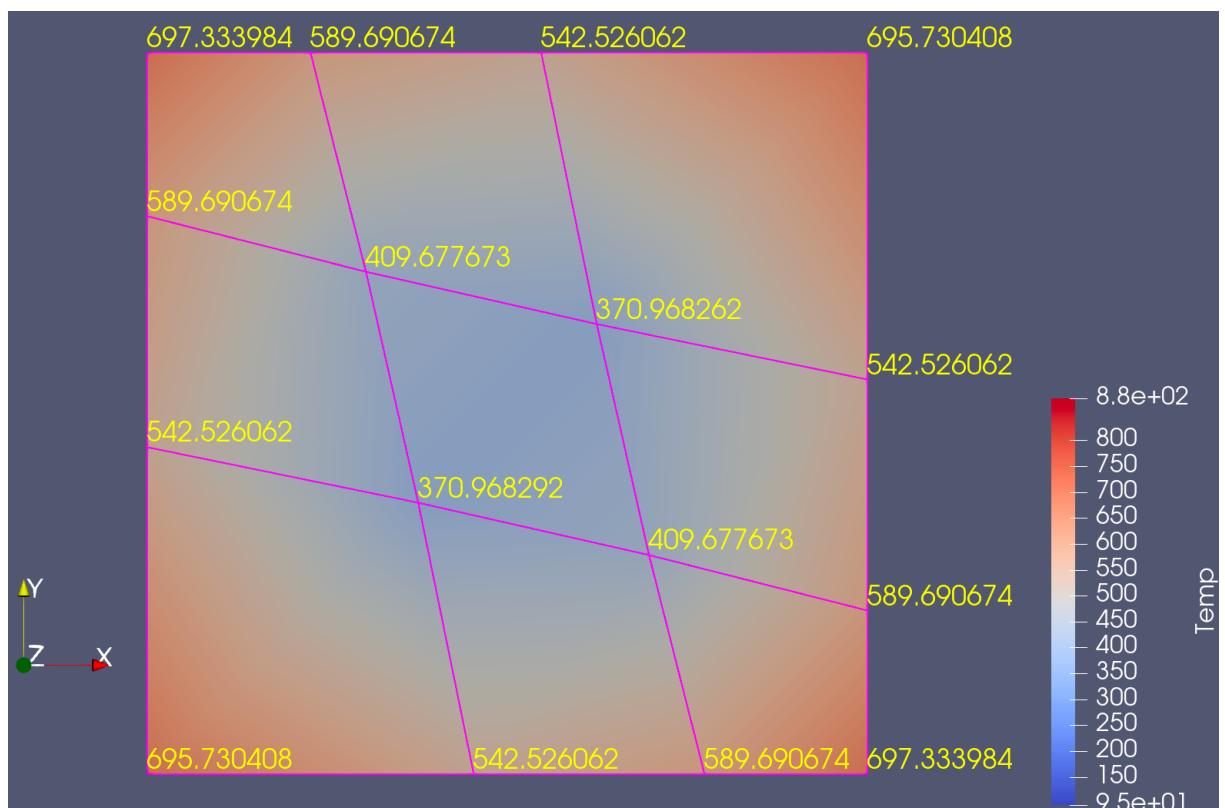
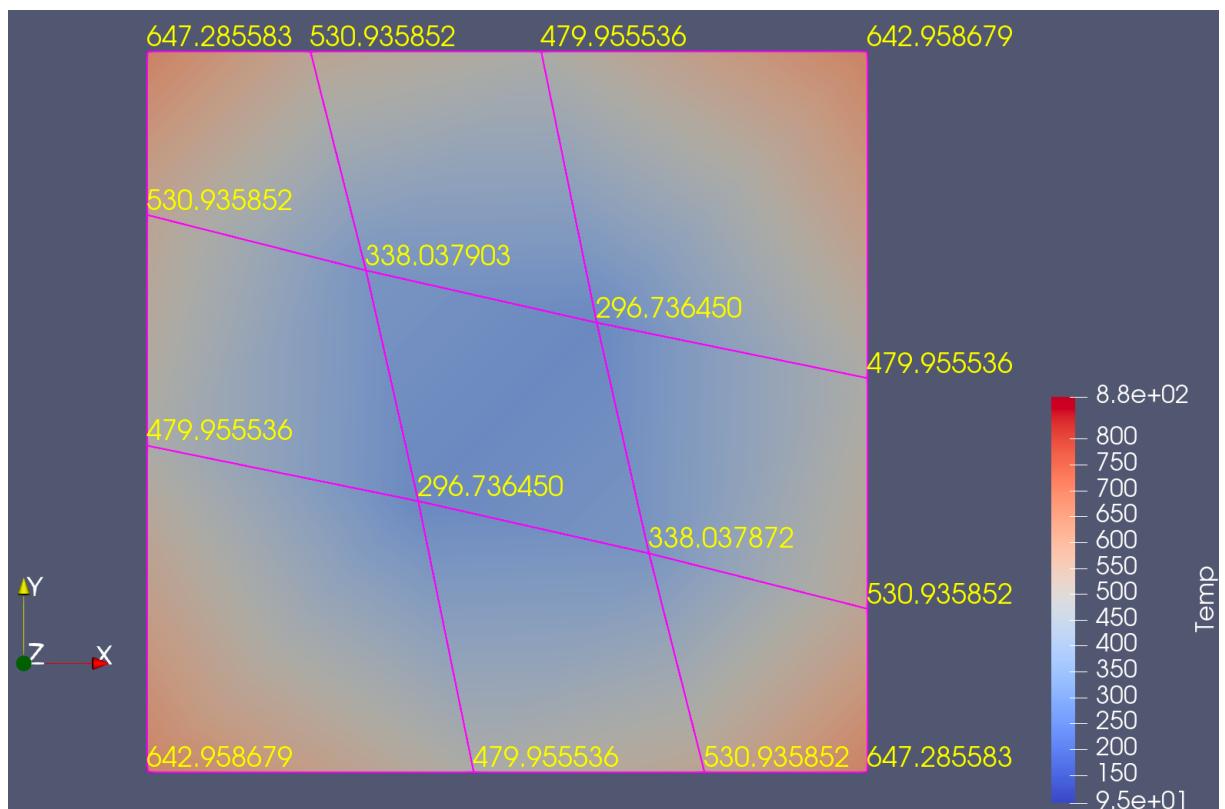
W związku z tym, konieczne jest dobranie odpowiedniego schematu, w zależności od potrzeb (dla obliczeń webowych lepiej postawić na szybkość (kosztem dokładności), zaś do obliczeń krytycznych (np. w przemyśle lotniczym) lepiej postawić na optymalniejsze rozwiązanie.

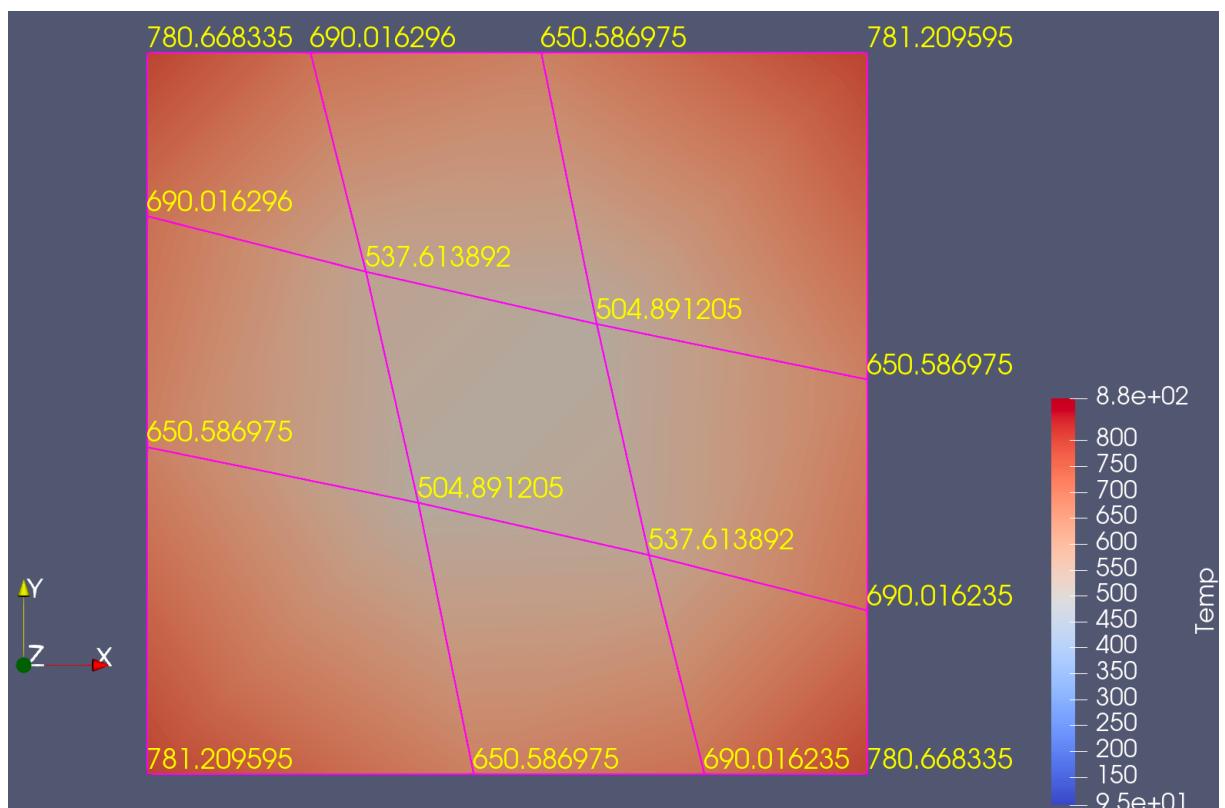
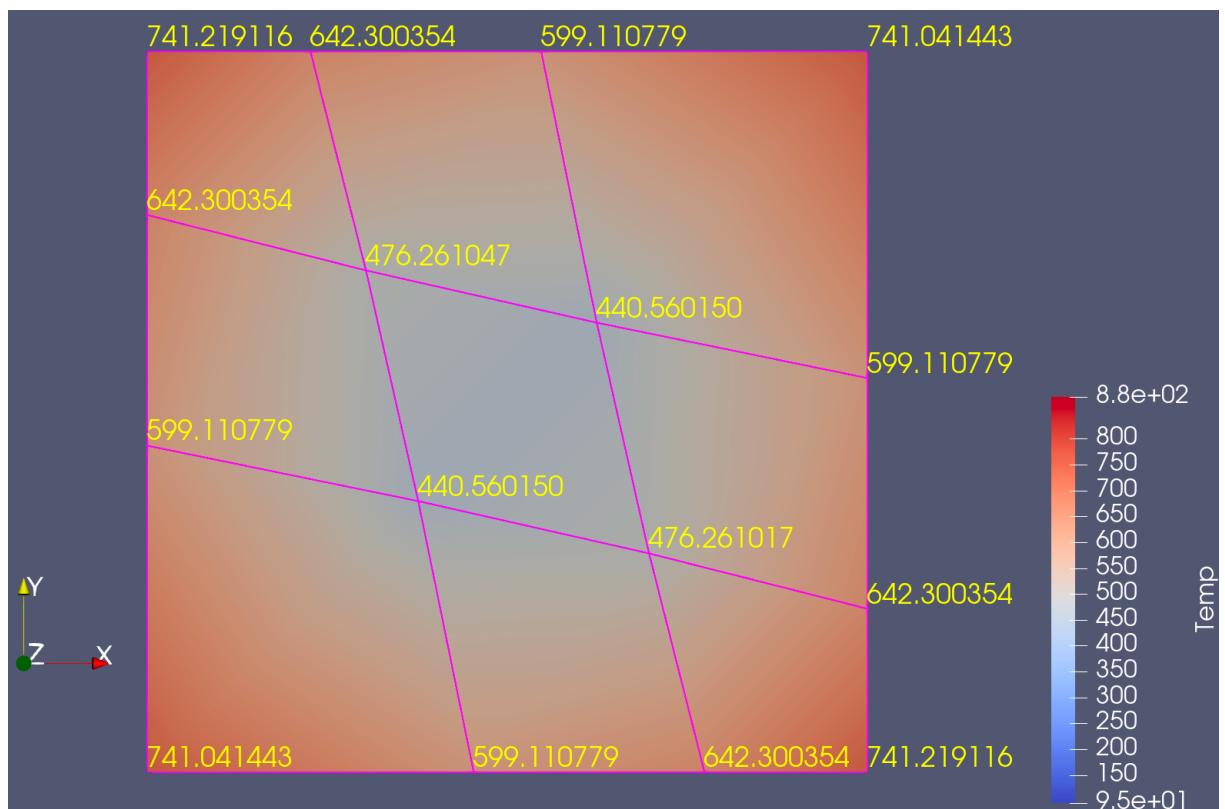
- Uzyskane czasy obliczeń są względnie niewielkie, co zostało osiągnięte, dzięki użyciu biblioteki sparse, która jak już wcześniej wspomniałem optymalizuje czas obliczeń na macierzach rzadkich.

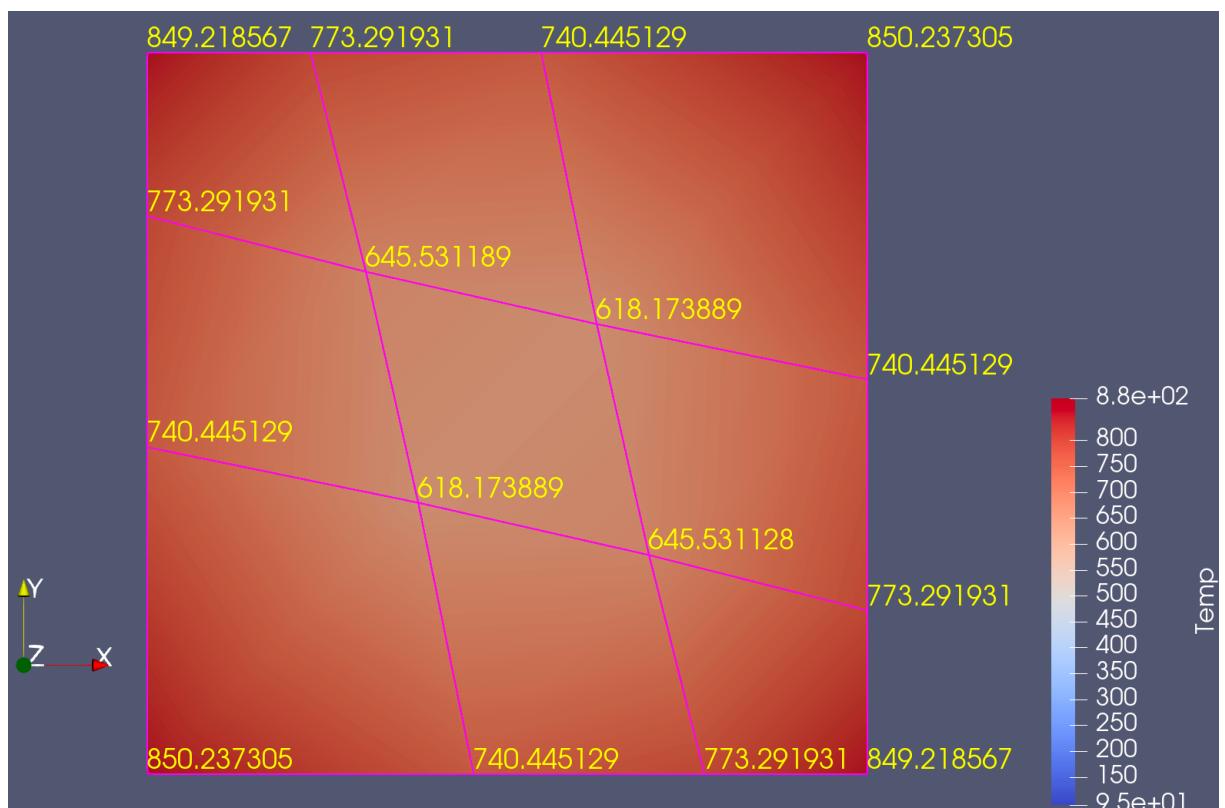
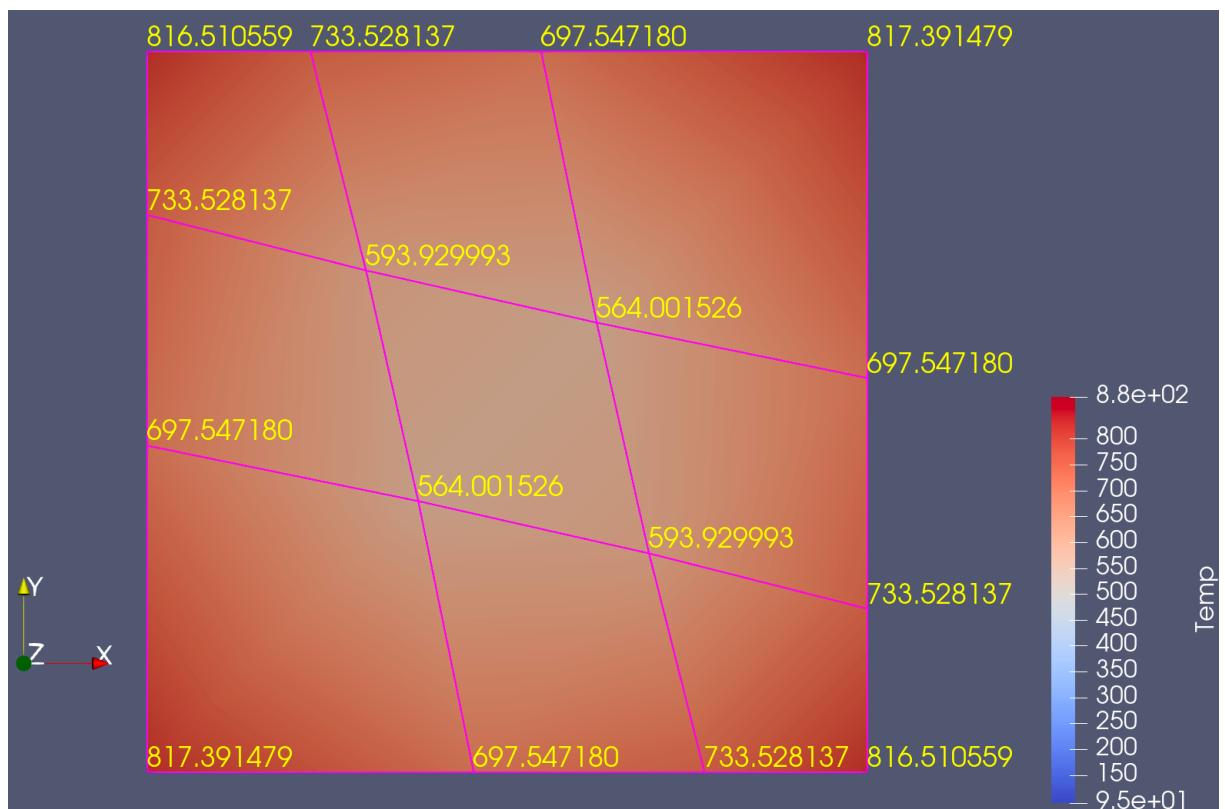
### Symulacja (siatka 4\_4\_mix):

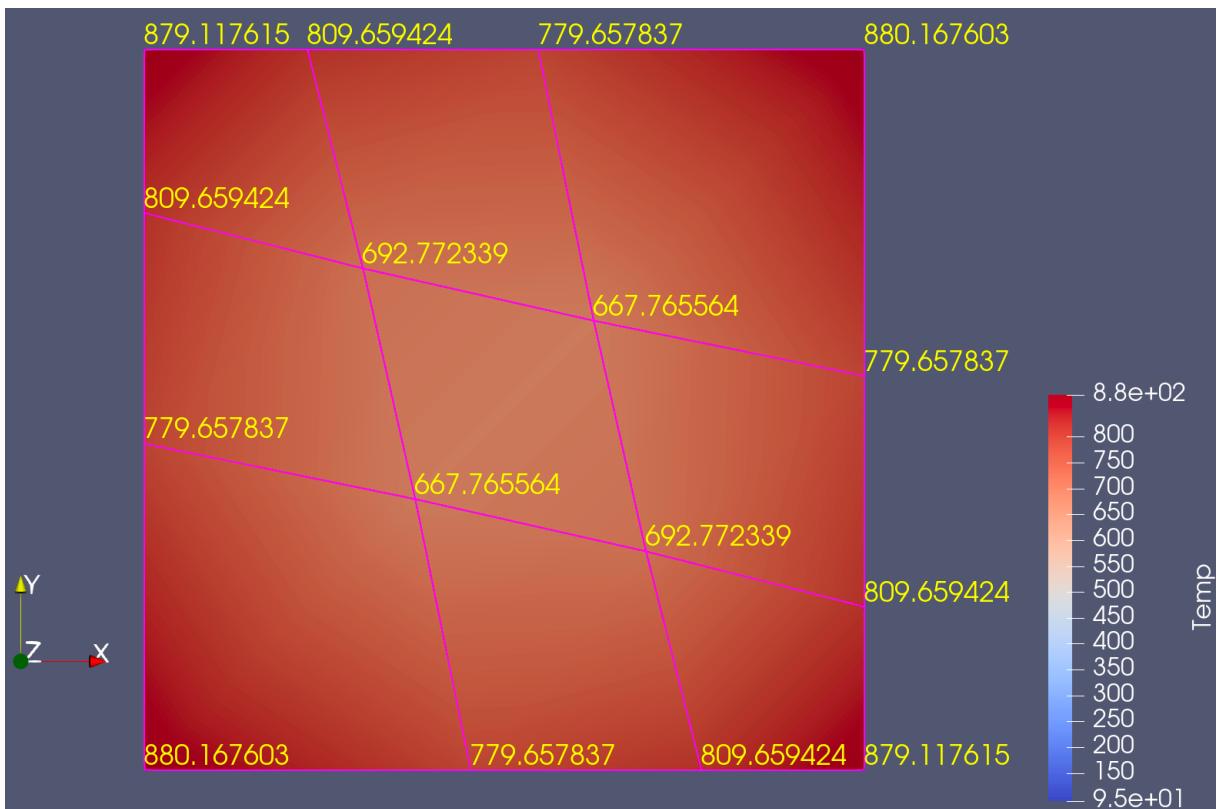












Rozwiązanie własne:

#### Opis problemu

Analizowany przeze mnie problem polegał na zbadaniu wpływu izolacji termicznej na ochładzania się wewnętrznej powierzchni ściany mieszkania podczas niestacjonarnego procesu wymiany ciepła.

Na początku zakładamy, że wszystkie trzy warstwy (składające się na ścianę) nagrzane są równomiernie do 20 °C (temperatura pokojowa). Na zewnątrz panować będzie temperatura 0 °C, a intensywność wymiany ciepła między ścianką zewnętrzną, a zimnym powietrzem określać będzie  
 $\alpha = 7 \text{ W/m}^2\text{K}$ .

Temperatury dla węzłów wyliczane będą co 900 sekund przez 2 dni (172800 sekund).

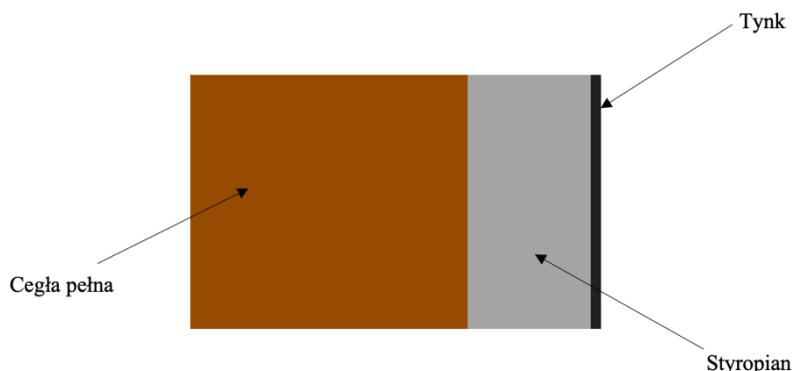
## Charakterystyka danych materiałowych

Analizowany przekrój składa się z trzech warstw:

- 1) Cegła pełna - Materiał konstrukcyjny, przyjmujący formę (najczęściej) prostopadłościanu. Jest tworzony z różnych surowców mineralnych, takich jak glina, wapno, piasek, cement. Uzyskuje ona swoją wytrzymałość mechaniczną i odporność na warunki atmosferyczne dzięki procesowi suszenia i/lub wypalania.
- 2) Styropian - porowate tworzywo sztuczne, otrzymane poprzez spienienie litych granulek polistyrenu, zawierających rozpuszczony porofor (np. pentan). Strukturę spienioną uzyskuje się zazwyczaj przez jednokrotne lub wielokrotne podgrzanie granulek parą wodną. Z racji na jego niską przewodność cieplną, używany jest do termoizolacji w postaci płyt lub luźnych granulek wtłaczanych w wolne przestrzenie ścian budowli.
- 3) Tynk - warstwa z zaprawy lub gipsu pokrywająca powierzchnie ścian, sufitów, kolumn, filarów itp. wewnętrz i na zewnątrz budynku. Jej zadaniem jest zabezpieczenie powierzchni przed działaniem czynników atmosferycznych (w przypadku tynków zewnętrznych).



Ułożonych względem siebie w poniższy sposób:



Każda z nich posiada nieco odmienne właściwości termofizyczne:

nazwa	Gęstość kg/m <sup>3</sup>	Współczynnik przewodzenia ciepła λ W/(m · K)	Ciepło właściwe J/(kg·K)
cegła pełna	1800	0,77	880
Styropian	12	0,043	1460
Tynk cementowy	2000	1,00	840

[https://www.certyfikat-energetyczny.powiat.pl/CE\\_P/wspolczynniki\\_przewodzenia.html](https://www.certyfikat-energetyczny.powiat.pl/CE_P/wspolczynniki_przewodzenia.html)  
<http://if.pk.edu.pl/tabele/wPrzejC.htm>

## Realizacja obliczeń

Do rozwiązania tego zagadnienia wykorzystałem siatkę testową (31x31) po uprzednim zmodyfikowaniu niektórych jej parametrów oraz przeskalowaniu położenia węzłów:

Następnie dokonałem dekompozycji macierzy H oraz C na 3 warstwy posiadające odmienne współczynniki przewodności cieplnej:

- warstwa ceglana [23 \* 30 elementów] ~ **30.67 cm**
- warstwa styropianowa [9 \* 30 elementów] ~ **12 cm**
- warstwa tynkowa [1\* 30 elementów] ~ **1.33 cm**

```
row = np.sqrt(self.num_elem)
for nr,vec_4 in enumerate(grid.elements):
    if 0 <= nr < 1 * row:
        H_matrix = self.generate_H_matrix_for_element(vec_el_ksi, vec_el_eta, vec_4, self.k_plaster)
        self.H_matrices.append(H_matrix)
    elif 1 * row <= nr < 10 * row:
        H_matrix = self.generate_H_matrix_for_element(vec_el_ksi, vec_el_eta, vec_4, self.k_styrofoam)
        self.H_matrices.append(H_matrix)
    else: # 7 * row <= nr <= 30 * row
        H_matrix = self.generate_H_matrix_for_element(vec_el_ksi, vec_el_eta, vec_4, self.k_brick)
        self.H_matrices.append(H_matrix)

self.cp_brick = global_data["SpecificHeat_brick"]
self.rho_brick = global_data["Density_brick"]
self.cp_styrofoam = global_data["SpecificHeat_styrofoam"]
self.rho_styrofoam = global_data["Density_styrofoam"]
self.cp_plaster = global_data["SpecificHeat_plaster"]
self.rho_plaster = global_data["Density_plaster"]
self.num_elem = global_data["Elements_number"]

self.C_matrices = [] # Lista macierzy C dla wszystkich elementów vec4

row = np.sqrt(self.num_elem)
for nr,vec_4 in enumerate(grid.elements):
    if 0 <= nr < 1 * row:
        C_matrix = self.generate_C_matrix_for_element(vec_el_ksi, vec_el_eta, vec_4, self.cp_plaster, self.rho_plaster)
        self.C_matrices.append(C_matrix)
    elif 1 * row <= nr < 15 * row:
        C_matrix = self.generate_C_matrix_for_element(vec_el_ksi, vec_el_eta, vec_4, self.cp_styrofoam, self.rho_styrofoam)
        self.C_matrices.append(C_matrix)
    else: # 7 * row <= nr <= 30 * row
        C_matrix = self.generate_C_matrix_for_element(vec_el_ksi, vec_el_eta, vec_4, self.cp_brick, self.rho_brick)
        self.C_matrices.append(C_matrix)
```

Kolejna dokonana zmiana polegała na założeniu warunku brzegowego tylko na część ściany pokrytej tynkiem. Niwelujemy w ten sposób oddziaływanie cieplne pochodzące z pozostałych kierunków, dzięki hipotetycznej doskonalszej izolacji i znaczco upraszczamy model.

Zabieg ten zakłada pominięcie zjawiska konwekcji zachodzącej wewnętrz mieszkania pomiędzy znajdującym się w nim powietrzem a ścianom [dla celów badawczych, zakłada się, że mieszkanie izolowane jest również „doskonale” od wewnętrz.]

```

if self.points == 2:
    for nr,vec_4 in enumerate(self.grid.elements):
        if 0 <= nr < 30:
            self.HBC_matrices.append(self.generate_HBC_for_element(edges_2,vec_4))
        else :
            self.HBC_matrices.append(np.zeros((4, 4)))
elif self.points == 3:
    for nr,vec_4 in enumerate(self.grid.elements):
        if 0 <= nr < 30:
            self.HBC_matrices.append(self.generate_HBC_for_element(edges_3, vec_4))
        else :
            self.HBC_matrices.append(np.zeros((4, 4)))
elif self.points == 4:
    for nr,vec_4 in enumerate(self.grid.elements):
        if 0 <= nr < 30:
            self.HBC_matrices.append(self.generate_HBC_for_element(edges_4, vec_4))
        else :
            self.HBC_matrices.append(np.zeros((4, 4)))

```

Wyniki i ich interpretacja:

Maksymalna i minimalna temperatura w ścianie – (z warstwą izolacyjną) po 48h :

```

----- VectorT // time=172800 -----
min: [3.1469298725268797] ; max: [10.645942384534393]

-----
Czas obliczeń: 6.866012096405029 s

```

Maksymalna i minimalna temperatura w ścianie – (warstwa izolacyjna zastąpiona cegłą) po 48h :

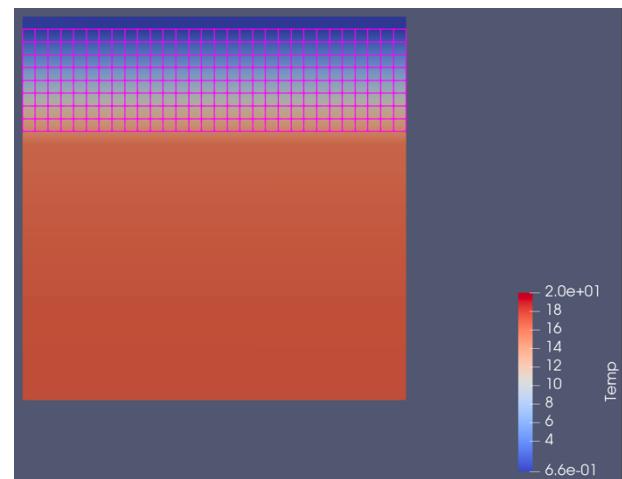
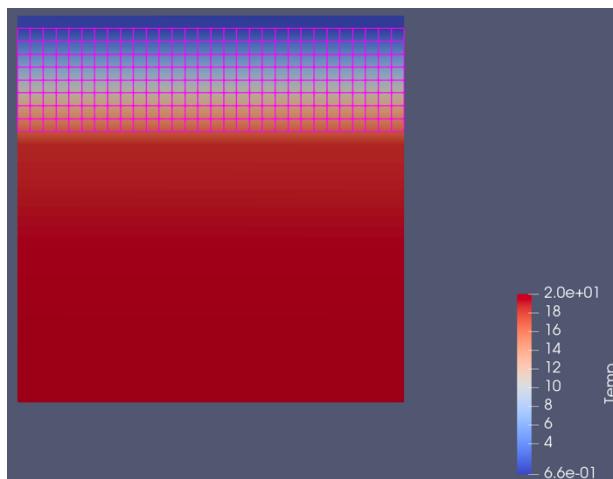
```

----- VectorT // time=172800 -----
min: [0.6623662056498268] ; max: [17.110629842533385]

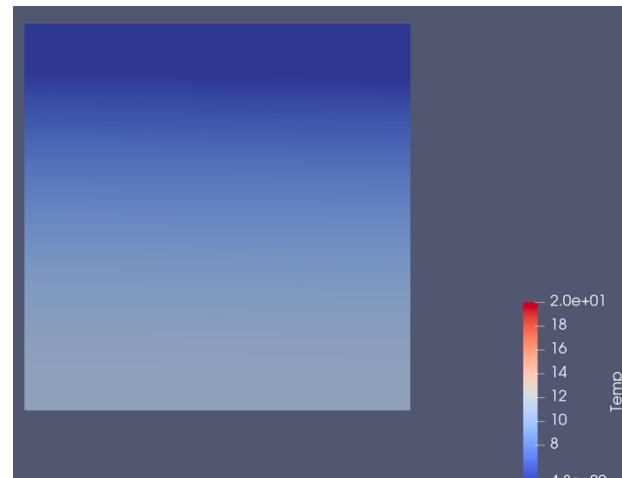
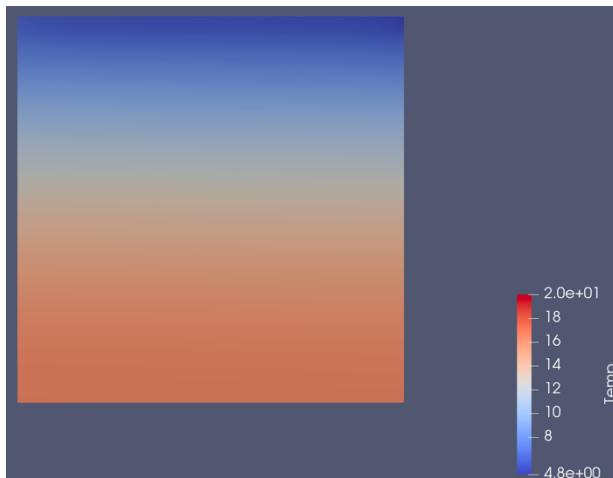
-----
Czas obliczeń: 6.905712842941284 s

```

- Zastosowanie cieńszej warstwy cegły (bezpiecznej pod względem konstrukcyjnym), w połączeniu z warstwą izolacyjną z styropianu, zapewnia wyższą efektywność termiczną w porównaniu do użycia jedynie cegły. Dzięki temu pomimo zmian temperatury na zewnętrz, temperatura wewnętrz budynku pozostaje na stałym poziomie, co przekłada się na większy komfort mieszkańców i mniejsze koszty ogrzewania.
- Minimalna temperatura badanego przekroju jest wyższa w pierwszym przypadku co spowodowane jest ogrzewaniem warstw zewnętrznych budynku, przez uciekające intensywniej ciepło.



Widoczna warstwa izolacyjna zatrzymująca uciekające ciepło



Brak warstwy izolacyjnej

## Wnioski

- Warstwa izolacyjna ma znaczący wpływ na proces wychładzania się mieszkania. Dobrze ocieplony budynek pomaga utrzymać stałą temperaturę wewnętrz, niezależnie od warunków na zewnątrz, co przekłada się na większy komfort dla mieszkańców.
- Istotne jest również odpowiednie dobranie grubości poszczególnych warstw, aby zminimalizować koszty i maksymalizować efektywność izolacji