O poprawnym formułowaniu zadań optymalnego rozkroju

1 author:

Przemysław Kowalik
Lublin University of Technology

PITWIN

Portal Innowacyjnego Transferu Wiedzy w Nauce

www.pitwin.edu.pl

2/2012

Rola informatyki w naukach ekonomicznych i społecznych

Innowacje i implikacje interdyscyplinarne

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Wyższa Szkoła Handlowa im. Bolesława Markowskiego w Kielcach

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rola informatyki w naukach ekonomicznych i społecznych
Innowacje i implikacje interdyscyplinarne

redakcja
ZBIGNIEW E. ZIELIŃSKI

Wydawnictwo
Wyższej Szkoły Handlowej
Kielce 2012

Publikacja wydrukowana została zgodnie z materiałem dostarczonym przez Autorów. Wydawca nie ponosi odpowiedzialności za treść, formę i styl artykułów.

Wydawca publikacji
Wyższa Szkoła Handlowa im. B. Markowskiego w Kielcach
Projekt PITWIN – Portal Innowacyjnego Transferu Wiedzy w Nauce
ul. Peryferyjna 15
25-562 Kielce
www.pitwin.edu.pl
biuro@pitwin.edu.pl

ISSN 2081-478X

Nakład 300 egz.

Publikacja została wydana w ramach realizacji projektu PITWIN – Portal Innowacyjnego Transferu Wiedzy w Nauce. Publikacja jest współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego. Publikacja jest dystrybuowana bezpłatnie dla osób, które zarejestrują się na stronie internetowej projektu www.pitwin.edu.pl (dostępna także w wersji elektronicznej).

Przemysław Kowalik*

O poprawnym formułowaniu zadań optymalnego rozkroju

Streszczenie: *Prezentacja przykładowych zastosowań programowania liniowego jest nieodłącznym elementem zawartości wielu podręczników dotyczących tematyki badań operacyjnych. Jednym z takich zastosowań jest minimalizacja kosztów zużycia materiałów ciętych na mniejsze elementy zwane zadaniami optymalnego rozkroju. Dla celów edukacyjnych, wprowadzenie do tematyki optymalizacji rozkrojów jest zwykle (pomimo niekiedy ograniczonej przydatności praktycznej takiego podejścia) oparte o zadania programowania liniowego całkowitoliczbowego, których parametrami są między innymi jawnie wymienione wszystkie dostępne tzw. sposoby rozkroju. Niestety, zdarza się, iż przedstawiane modele cechują się pewnymi - łatwymi do uniknięcia - wadami takimi jak warunki ograniczające sprzeczne dla niektórych wartości parametrów czy nawet funkcje celu skutkujące nieoptymalnym rozwiązaniem. Praca zawiera przegląd wybranych modeli optymalnego rozkroju występujących w polskiej literaturze przedmiotu wraz z opisem wyżej wymienionych ich wad.*

Słowa kluczowe: programowanie liniowe, programowanie liniowe całkowitoliczbowe, zadanie optymalnego rozkroju, funkcja celu, warunki ograniczające

1. Wprowadzenie – modelowanie przy użyciu programowania liniowego

Nieodłącznym elementem edukacji w zakresie badań operacyjnych jest przegląd przykładowych praktycznych zastosowań nauczanych metod matematycznych, w tym oczywiście programowania liniowego. Porównanie zawartości różnych podręczników pokazuje, iż istnieje pewien „standardowy” zestaw zastosowań programowania liniowego używany do celów edukacyjnych, choć oczywiście różni autorzy wykorzystują pewne jego „warianty”. Oczywiście owe modele „edukacyjne” mogą być niejednokrotnie bardzo uproszczone w stosunku do problemów występujących w realnym świecie. Niemniej jednak nawet bardzo uproszczone modele nie powinny zawierać nieścisłości. Niniejsza praca jest poświęcona spotykanym w podręcznikach błędom w formułowaniu zadań optymalnego rozkroju jako zadań programowania liniowego całkowitoliczbowego, których parametrami są między innymi jawnie wymienione wszystkie dostępne tzw. sposoby rozkroju (wzory rozkroju materiału na mniejsze fragmenty - detale). Praktyczna przydatność takiego podejścia jest niekiedy poważnie ograniczona ze względu na liczbę możliwych sposobów rozkroju, ale nie powinno to być powodem, dla którego prezentowane modele matematyczne miałyby być obarczone wadami, zwłaszcza łatwymi do uniknięcia.

W pracy omówiono spotykane w literaturze modele zarówno dla „standardowego” zadania optymalnego rozkroju (minimalizacja zużycia materiału przy wycięciu zadanej liczby detali) jak też dla wariantu polegającego na maksymalizacji liczby kompletów detali wykonanych z ustalonej ilości materiału. Modele te zilustrowano przykładowymi zadaniami wraz z rozwiązaniami. Obliczenia zostały wykonane przy pomocy Microsoft Excel 2007 i dodatku Solver z włączoną opcją *Przyjmij model liniowy* (wymuszenie stosowania algorytmu simpleks). Dla uproszczenia zarówno

* Autor jest adiunktem w Katedrze Metod Ilościowych w Zarządzaniu na Wydziale Zarządzania Politechniki Lubelskiej. Wykłada przedmiot „Badania operacyjne” oraz prowadzi laboratoria i ćwiczenia z badań operacyjnych oraz innych przedmiotów z zakresu metod ilościowych. Jego zainteresowania to badania operacyjne, modelowanie w arkuszach kalkulacyjnych oraz inżynieria taryfowa – zasady konstrukcji taryf transportowych, telekomunikacyjnych i bankowych.

w ogólnych modelach jak i w przykładowych zadaniach pominięto kwestię ewentualnej niezerowej szerokości cięcia. Celem uproszczenia obliczeń wszystkie zadania przykładowe są zadaniami dotyczącymi optymalizacji rozkrojów jednowymiarowych tzn. zarówno kawałki materiału jak i wycięte detale są obiektami, w których jedynym istotnym wymiarem ze względu na warunki wykonywania cięć jest ich długość.

2. Zadanie optymalnego rozkroju – minimalizacja liczby pociętych półfabrykatów

Zakładamy, że są dostępne w nieograniczonej liczbie jednakowe (ze względu na parametry techniczne oraz cenę) fragmenty materiału takie jak: druty, deski, listwy, rury, arkusze blachy, tworzyw sztucznych, papieru etc. zwane dalej półfabrykatami.

Półfabrykaty te można pociąć na *n* różnych sposobów (wzorów rozkroju) na mniejsze fragmenty – detale m różnych typów. Ponadto z każdym sposobem cięcia (lub przynajmniej z niektórymi z nich) jest związane powstawanie odpadów, ponieważ rozmiary i kształty detali nie pozwalają na pełne wykorzystanie materiału. Należy zadecydować, ile półfabrykatów należy pociąć na każdy ze sposobów, aby zminimalizować łączną liczbę pociętych półfabrykatów produkując przy tym co najmniej zadaną liczbę detali wszystkich wymaganych typów.

Parametrami w modelu matematycznym zagadnienia są:

- a_{ij} - liczba detali *i*-tego typu otrzymywana po pocięciu półfabrykatu na j-ty sposób ($i = 1,2,...,m$, $j = 1,2,...,n$);
- b_i - wymagana liczba detali i-tego typu, która ma powstać po pocięciu półfabrykatów ($i = 1,2,...,m$).

Zmiennymi decyzyjnymi w tym zagadnieniu są:

- x_j - liczba półfabrykatów pociętych na *j*-ty sposób.

Model matematyczny przedstawia się następująco:

$x_1 + x_2 + ... + x_n \rightarrow \min$ łączna liczba pociętych półfabrykatów

przy ograniczeniach

liczby wyprodukowanych detali		wymagane liczby detali
$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n$	$\geq$	b_1
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n$	$\geq$	b_2
$\vdots$		$\vdots$
$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n$	$\geq$	b_m

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$,...., $x_n \geq 0$ liczba pociętych półfabrykatów nie może być ujemna

x_1, x_2,...., x_n - całkowite – liczba pociętych półfabrykatów musi być całkowita.

Powyższy model matematyczny jest zatem po prostu zadaniem minimalizacji kosztów, choć koszty te nie są wyrażone jawnie w jednostkach pieniężnych, ale poprzez ilość zakupionych materiałów (liczbę sztuk pociętych półfabrykatów).

Podany powyżej model charakteryzuje się dwoma cechami. Po pierwsze, zbiór dopuszczalny jest niepusty, a zatem istnieje rozwiązanie zadania. Po drugie, model ten dopuszcza powstawanie tzw. detali nadmiarowych tzn. produkowanie większej ich liczby niż jest wymagana. Nie jest to jednak wada, ponieważ detale nadmiarowe należy traktować wyłącznie jako wynik obliczeń, natomiast w praktyce można po prostu ich nie wycinać, a zaoszczędzony w ten sposób materiał może być potencjalnie wykorzystany w przyszłości.

3. Zadanie optymalnego rozkroju – minimalizacja łącznej ilości odpadów

Często spotykane, alternatywne sformułowanie zadania optymalnego rozkroju polega na minimalizacji łącznej ilości odpadów zamiast łącznej liczby półfabrykatów. Wymagane jest wprowadzenie dodatkowych parametrów:

- c_j - ilość odpadów przypadająca na *j*-ty sposób rozkroju ($j = 1,2,...,n$). Wartości te *de facto* nie są niezależnymi parametrami, ale są wyliczane przez odjęcie od masy/ długości/powierzchni/objętości półfabrykatu łącznego rozmiaru detali wycinanych na każdy ze sposobów.

Funkcja celu wygląda wówczas następująco

$$c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \min \text{ (łączna ilość odpadów)}$$

a warunki ograniczające pozostają niezmienione[1].

Pozornie oba te podejścia wydają się równoważne, ponieważ minimalna ilość odpadów powinna oznaczać jak najlepsze wykorzystanie materiału. Łatwo jest jednakże podać kontr-przykład do powyższej tezy.

Zadanie 1

Znaleźć plany rozkroju belek o długości 5,6 m minimalizujące 1) łączną ilość odpadów, 2) łączną ilość półfabrykatów dla danych poniżej.

Tabela 1. Dane liczbowe do zadania 1.

Długości detali (m)	Sposoby rozkroju									Wymagane liczby detali (sztuki)
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1,9	2	2	1	1	1	0	0	0	0	100
1,6	1	0	2	1	0	3	2	1	0	300
1,2	0	1	0	1	3	0	2	3	4	200
	Ilości odpadów przypadające na każdy ze sposobów rozkroju (m)									
	0,2	0,6	0,5	0,9	0,1	0,8	0	0,4	0,8	

Źródło: opracowanie własne na podstawie literatury[2]

Rozwiązanie

Model matematyczny

Ad 1) $0{,}2x_1 + 0{,}6x_2 + 0{,}5x_3 + 0{,}9x_4 + 0{,}1x_5 + 0{,}8x_6 + 0x_7 + 0{,}4x_8 + 0{,}8x_9 \to \min$ łączna ilość odpadów

Ad 2) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 \to \min$ łączna liczba pociętych półfabrykatów

przy ograniczeniach (wspólne dla obu funkcji celu)

liczby wyprodukowanych detali — wymagane liczby detali

$$2x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 1x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 0x_9 \geq 100$$

$$1x_1 + 0x_2 + 2x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 3x_6 + 2x_7 + 1x_8 + 0x_9 \geq 300$$

$$0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 3x_5 + 0x_6 + 2x_7 + 3x_8 + 4x_9 \geq 200$$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$,...., $x_9 \geq 0$ liczba pociętych półfabrykatów nie może być ujemna

[1] Modele optymalnego rozkroju z minimalizacją ilości odpadów można znaleźć np. w Jędrzejczyk Z., Kukuła K., Skrzypek J., Walkosz A.: *Badania operacyjne w przykładach i zadaniach,* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2011, str. 46-47 lub Radzikowski W.: *Badania operacyjne w zarządzaniu przedsiębiorstwem,* Toruńska Szkoła Zarządzania, Toruń 1997, str. 142

[2] Jędrzejczyk Z., Kukuła K., Skrzypek J., Walkosz A. op.cit,: str. 51 – przykład jest oparty na zadaniu 29, ale zawiera jawnie wypisane sposoby rozkroju, których znalezienie w oryginalnym zadaniu zostało pozostawione czytelnikowi; ponadto polecenie zostało uzupełnione o minimalizację łącznej liczby półfabrykatów (belek).

$x_1,\ x_2,...,\ x_9$ - całkowite

Ad 1) Minimalna łączna ilość odpadów wynosi 10 metrów. Optymalny plan rozkroju to [3]:

$x_1^* = 50,\ x_2^* = 0,\ x_3^* = 0,\ x_4^* = 0,\ x_5^* = 0,\ x_6^* = 0,\ x_7^* = 125,\ x_8^* = 0, x_9^* = 0.$

Łączna liczba pociętych półfabrykatów dla powyższego planu rozkroju wynosi 175 sztuk, a liczba nadmiarowych detali to 50 sztuk typu 3 (1,2 m). Rezygnacja z ich wyprodukowania oznacza, że 25 sztuk półfabrykatów należy pociąć zmodyfikowanym sposobem 7 (0-2-0 zamiast 0-2-2). Oczywiście w rezultacie niewykorzystany materiał będzie „powiększony" o 60 metrów (25 fragmentów o długości 2,4 m każdy odpowiadających niewyprodukowanym nadmiarowym detalom). Zasadniczo ten materiał nie musi być traktowany jako odpad, ponieważ ze względu na swoje rozmiary będzie mógł być wykorzystany do realizacji przyszłych zamówień. Niemniej jednak jego rzeczywista użyteczność (wykorzystanie materiału) będzie zależała od rozmiarów i liczby detali w przyszłych zamówieniach, a mniejsze rozmiary niewykorzystanych fragmentów (2,4 m) niż standardowych półfabrykatów (5,6 m) utrudniają „dopasowanie" wycinanych detali do fragmentów materiału. Co więcej, nawet jeżeli w przyszłych zamówieniach nadmiarowy materiał uda się wykorzystać bez żadnych strat (co pozwoli zaoszczędzić 60/5,6≈10,71 półfabrykatów), to nie zmienia to faktu, iż aby wykonać wszystkie potrzebne detale, trzeba pociąć 175 półfabrykatów.

Dokładniejsza analiza pokazuje, że zadanie to ma także rozwiązania alternatywne, które są jeszcze gorsze np. $x_1^* = 0,\ x_2^* = 0,\ x_3^* = 0,\ x_4^* = 0,\ x_5^* = 100,\ x_6^* = 0,\ x_7^* = 150,\ x_8^* = 0, x_9^* = 0$ czyli 250 sztuk pociętych półfabrykatów przy 10 metrach odpadów i 400 sztukach nadmiarowych detali typu 3 (1,2 m).

Ad 2) Minimalna łączna liczba pociętych półfabrykatów wynosi 167 sztuk. W tym przypadku istnieją rozwiązania wielokrotne o różnej liczbie odpadów oraz nadmiarowych detali. Poniżej podane są niektóre z tych rozwiązań.

Tabela 2. Przykładowe rozwiązania zadania 1 w wariancie z minimalizacją łącznej liczby pociętych półfabrykatów.

Liczba pociętych półfabrykatów									Odpady (m)	Liczba detali nadmiarowych dla danego rozwiązania (sztuki)		
x_1^*	x_2^*	x_3^*	x_4^*	x_5^*	x_6^*	x_7^*	x_8^*	x_9^*		Typ 1 (1,9 m)	Typ 2 (1,6 m)	Typ 3 (1,2 m)
30	0	38	0	2	0	97	0	0	25,2	0	0	0
33	0	34	0	0	0	99	1	0	24	0	0	1
50	0	0	0	0	17	100	0	0	23,6	0	1	0
50	0	1	0	0	16	100	0	0	23,3	1	0	0
34	0	32	0	0	0	101	0	0	22,8	0	0	2

Źródło: obliczenia własne (wykorzystano Excel 2007/Solver)

Jak widać, rozmiar niepotrzebnego materiału (odpady + nadmiarowe detale) w każdym przypadku wynosi 25,2 m. Jest to po prostu rozmiar wszystkich pociętych półfabrykatów pomniejszony o rozmiar detali: 5,6·167-(1,9·100+1,6·100+1,2·100)=935,2-910=25,2. Jednakże nawet jeżeli wybrany zostanie plan z największą ilością odpadów 25,2 m (czyli bez nadających się do późniejszego użycia „długich" fragmentów niewykorzystanego materiału odpowiadających nadmiarowym detalom), to i tak do jego realizacji trzeba użyć jedynie 167 półfabrykatów zamiast 175 w przypadku planu rozkroju z ilością odpadu równą 10 m. W najlepszym przypadku, przy ilości odpadów równej 22,8 m powstają 2 detale nadmiarowe, rezygnacja z których pozwala uzyskać fragment materiału o długości 2,4 m do późniejszego użycia. Minimalizacja ilości odpadów byłaby

[3] Ibidem, str. 379 – jest to rozwiązanie oryginalnego zadania; minimalna ilość odpadów jest identyczna, ale kolejność wartości optymalnych zmiennych jest inna, co wynika z innej kolejności sposobów rozkroju a zatem i przypisania ich do zmiennych.

korzystniejsza jedynie w przypadku, gdyby z nadmiarowego materiału (w rozważanym przypadku 60 m) dałoby się wykorzystać podczas realizacji przyszłych zamówień ilość odpowiadającą co najmniej różnicy 175-167=8 sztuk półfabrykatów. Uczynienie takiego założenia może być zasadne, jeżeli chodzi o praktykę działania firmy, ale wydaje się zbędną komplikacją w procesie edukacji. Ostatecznym wnioskiem powinno być stwierdzenie, że sformułowanie zadania optymalnego rozkroju z funkcją celu wyrażoną jako minimalizacja łącznej ilości odpadów jest błędne z punktu widzenia zasadniczego celu tego zadania czyli minimalizacji kosztów użytego materiału.

4. Zadanie optymalnego rozkroju – warunki ograniczających dotyczących liczby detali w postaci równościowej

Rozważania związane z „zagospodarowaniem" ewentualnego nadmiarowego materiału pochodzącego z zaplanowanych, ale faktycznie niewykonanych nadmiarowych detali sugerują inne możliwe podejście do zadania optymalnego rozkroju, mianowicie wprowadzenie warunków ograniczających dotyczących liczby detali w postaci równościowej, które siłą rzeczy eliminują rozwiązania optymalne „generujące" nadmiarowe detale a zatem i ewentualne problemy związane z ich wykorzystaniem. Model matematyczny z takimi warunkami przedstawia się następująco:

$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \rightarrow \min$ łączna liczba pociętych półfabrykatów

przy ograniczeniach

liczby wyprodukowanych detali		wymagane liczby detali
$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n$	$=$	b_1
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n$	$=$	b_2
$\vdots$		$\vdots$
$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n$	$=$	b_m

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$,...., $x_n \geq 0$ liczba pociętych półfabrykatów nie może być ujemna

x_1, x_2,...., x_n - całkowite – liczba pociętych półfabrykatów musi być całkowita

Model ten może występować też w wariancie z minimalizacją ilości odpadów[4]. Nie jest to jednak w tym przypadku podejście błędne, ponieważ przy warunkach równościowych na liczby detali minimalizacja liczby pociętych półfabrykatów jest równoważna minimalizacji łącznej ilości odpadów.

Użycie warunków równościowych jest jednak obarczone dwoma istotnymi wadami. Po pierwsze, czas obliczeń może być znacząco dłuższy ze względu na fakt, iż warunki równościowe są znacznie bardziej „restrykcyjne" niż nierównościowe, co utrudnia dobór odpowiednich wartości zmiennych. Znacznie istotniejszą wadą jest jednak potencjalna sprzeczność warunków ograniczających. Sprzeczność może sugerować (zwłaszcza osobom dopiero zapoznającym się z tematyką optymalizacji), iż wykonanie pewnych kombinacji liczb detali jest niemożliwe. Przy założeniu nieograniczonej dostępności półfabrykatów, jest to oczywiście pogląd całkowicie błędny.

Zadanie 2

Znaleźć plany rozkroju prętów o długości 10 m minimalizujące 1) łączną ilość odpadów, 2) łączną ilość półfabrykatów dla danych poniżej.

Tabela 3. Dane liczbowe do zadania 2

Długości detali (m)	Sposoby rozkroju						Wymagane liczby detali (szt)
	1	2	3	4	5	6	
2,5	0	2	0	1	2	4	18

[4] Nowak E.: *Decyzyjne rachunki kosztów. Kalkulacje menedżera*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1994, str. 152

3,5	1	0	0	2	1	0	47
4,5	1	1	2	0	0	0	12
	Ilości odpadów przypadające na każdy ze sposobów rozkroju (m)						
	2,0	0,5	1,0	0,5	1,5	0,0	

Źródło: opracowanie własne na podstawie literatury[5]

Rozwiązanie

Model matematyczny

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 \to \min$ łączna liczba pociętych półfabrykatów

albo

$2x_1 + 0{,}5x_2 + 1x_3 + 0{,}5x_4 +{,}51x_5 + 0x_6 \to \min$ łączna ilość odpadów

przy ograniczeniach (wspólne dla obu funkcji celu)

liczby wyprodukowanych detali — wymagane liczby detali

$$0x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 2x_5 + 4x_6 = 18$$

$$1x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 2x_4 + 1x_5 + 0x_6 = 47$$

$$1x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 12$$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$,...., $x_6 \geq 0$ liczba pociętych półfabrykatów nie może być ujemna

x_1, x_6,...., x_6 - całkowite

Jak się okazuje, zadanie to nie ma rozwiązania z powodu sprzeczności warunków ograniczających. Należy jednak stwierdzić, że brak rozwiązania nie dotyczy braku możliwości technicznych wykonania detali, a jedynie wynika ze zbyt restrykcyjnych warunków ograniczających modelu. Co więcej, ta restrykcyjność nie wiąże się bezpośrednio ze zbyt małymi lub wielkimi liczbami detali do wykonania. Jeżeli np. w rozważanym zadaniu wartość parametru b_2 zostanie zmieniona w dół jak bądź w górę o 1 (tzn. do 46 albo 48), to zadanie to będzie już miało niesprzeczne warunki ograniczające, a zatem i rozwiązanie.

Po „poluzowaniu" warunków ograniczających (czyli ich zamianie z = na ≥) zadanie ma już rozwiązanie (a nawet rozwiązania wielokrotne) - jest to po prostu powrót do wariantu opisanego w poprzednim rozdziale.

Minimalizacja liczby pociętych półfabrykatów po „poluzowaniu" warunków ograniczających pokazuje, że trzeba pociąć 30 półfabrykatów. Tym razem minimalizacja ilości odpadów prowadzi do rozwiązania, w którym również trzeba pociąć 30 półfabrykatów. Tak więc w tym przypadku użycie obu funkcji celu jest równoważne, choć oczywiście plan rozkroju, w którym jest najmniej odpadów a najwięcej detali jest potencjalnie najatrakcyjniejszy ze względu na największą ilość materiału z niewyprodukowanych detali do potencjalnego późniejszego wykorzystania. Plan rozkroju z minimalną ilością odpadów to $x_1^* = 0$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 6$, $x_4^* = 24$, $x_5^* = 0$, $x_6^* = 0$. Ilość odpadów wynosi 18 m, a liczba nadmiarowych detali to 6 sztuk typu 1 oraz 1 sztuka typu 2. Oznacza to, że przy modyfikacji sposobu rozkroju 4 (18 półfabrykatów pociętych zgodnie z tym rozkrojem, czyli 1-2-0, 1 pocięty 0-1-0 oraz 5 pociętych 0-2-0) pozostanie łącznie dodatkowo 21,5 m niewykorzystanego materiału (1 fragment 6,5 m oraz 5 fragmentów po 3 m).

W tym, ale i w poprzednim rozdziale pojawiły się rozważania dotyczące zalet rozwiązań z minimalną ilością odpadów. Mała ilość odpadów idzie w parze z większymi liczbami detali nadmiarowych, które mogą być traktowane jako relatywnie „duże" fragmenty półfabrykatów nadające się do późniejszego wykorzystania, z drugiej jednak strony minimalizacja ilości odpadów

[5] Zadanie pochodzi z Nowak E., op. cit., str. 153. W zadaniu tym zmienione zostały wymagane liczby detali poszczególnych typów z 40, 50, 80 sztuk odpowiednio na 18, 47, 12 sztuk, Ponadto został skorygowany błąd drukarski w jednym z parametrów.

może prowadzić do rozwiązań wymagających pocięcia większej liczby półfabrykatów niż jest to rzeczywiście niezbędne. Kompromis może polegać na optymalizacji dwuetapowej[6].

1) Minimalizacja łącznej liczby pociętych półfabrykatów z warunkami ograniczającymi na liczbę detali z nierównościami (≥).
2) Minimalizacja łącznej ilość odpadów z warunkami ograniczającymi na liczbę detali z nierównościami (≥) i dodatkowym warunkiem „suma zmiennych (czyli liczba pociętych półfabrykatów) = minimalna liczba pociętych półfabrykatów obliczona w kroku 1",

Taki sposób przeprowadzenia obliczeń jest kompromisem pomiędzy minimalizacją łącznej liczby pociętych półfabrykatów (czyli kosztem zakupu materiałów) a wykorzystaniem materiału nadmiarowego pozostałego po wykonaniu rozkroju (czyli wykorzystaniem materiału już posiadanego, co pozwoli na oszczędności związane z zakupami materiału w przyszłości).

Na koniec należy jeszcze wspomnieć o jednej, ściśle edukacyjnej zalecie wariantu zadania optymalnego rozkroju z równościowymi warunkami ograniczającymi. W sytuacji, gdy w ramach prowadzonych zajęć nie ma możliwości skorzystania z komputera z oprogramowaniem optymalizacyjnym, zadanie z równościowymi warunkami ograniczającymi może być potencjalnie rozwiązane graficznie nawet, gdy ma więcej niż 2 zmienne, ponieważ równości wiążące zmienne pozwalają na wyeliminowanie niektórych z tych zmiennych. Jeżeli po wyeliminowaniu pozostaną 2 lub 1 jedna zmienna, rozwiązanie zadania staje się stosunkowo proste (przynajmniej w liczbach rzeczywistych, gdyż znalezienie rozwiązania całkowitoliczbowego może być nadal kłopotliwe).

5. Zadanie optymalnego rozkroju – maksymalizacja liczby kompletów detali

Jeżeli liczba dostępnych półfabrykatów jest ograniczona i wynosi *M*, możliwe jest inne podejście do zadania optymalnego rozkroju. Polega ono na zmaksymalizowaniu liczby detali produkowanych z dostępnego materiału. Ponieważ jednak detale są różne, naturalnie rodzi się pytanie, czy lepiej jest wyprodukować np. 10 szt. detali o długości 20 cm czy 19 szt. po 11 cm. Ponieważ nie można udzielić jednoznacznej odpowiedzi na tak postawione pytanie, zatem ten wariant zadania optymalnego rozkroju „zawężono" do maksymalizacji jednokryterialnej poprzez wprowadzenie pojęcia tzw. kompletów detali.

Określenie *komplet detali* oznacza zestaw detali wszystkich produkowanych typów, gdzie każdy z typów jest reprezentowany przez ustalona liczbę sztuk np. komplet detali może się składać z: 5 szt. detali typu 1, 1 szt. typu 2, 4 szt. typu 3 oraz 2 szt. typu 4.

Wymagana liczba detali każdego z typów jest zatem całkowitą wielokrotnością powyższych liczb tzn. iloczynem liczby kompletów i jednej z powyższych liczb.

Zakładamy, że są dostępne w liczbie *M* jednakowe (ze względu na parametry techniczne oraz cenę zakupu) półfabrykaty. Półfabrykaty te można pociąć na *n* różnych sposobów na mniejsze fragmenty – detale *m* różnych typów. Detale każdego z typów wchodzą (w ustalonej liczbie) w skład kompletów. Należy obliczyć, ile półfabrykatów należy pociąć na każdy ze sposobów, aby zmaksymalizować liczbę kompletów detali, które można wyprodukować z co najwyżej *M* sztuk półfabrykatów.

Parametrami w modelu matematycznym zagadnienia są:

- a_{ij} - liczba detali *i*-tego typu otrzymywana po pocięciu półfabrykatu na *j*-ty sposób ($i = 1,2,\ldots,m$, $j = 1,2,\ldots,n$) (identyczne jak w standardowym zadaniu optymalnego rozkroju);
- $d_1,\ldots,d_m$ - liczby sztuk detali typów $i = 1,2,\ldots,m$, jakie wchodzą w skład kompletu;

[6] Kowalik P., *Optymalizacja zużycia materiałów w procesie produkcji rolet antywłamaniowych - studium przypadku*, [w:] *Rola informatyki w naukach ekonomicznych i Społecznych*, Tom 2, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Handlowej, Kielce 2009, str. 244-245

- M - liczba dostępnych półfabrykatów

Zmiennymi decyzyjnymi w tym zagadnieniu są liczby półfabrykatów:

- x_j - liczba półfabrykatów pociętych na *j*-ty sposób.

Występuje też „dodatkowa” zmienna:

- Z - liczba wyprodukowanych kompletów detali.

Model matematyczny zadania to

$z \to \max$ - liczba wyprodukowanych kompletów detali

przy ograniczeniach

liczby wyprodukowanych detali — wymagane liczba detali (liczby kompletów mnożone przez liczbę sztuk w komplecie)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = d_1 z$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = d_m z$$

$x_1 + x_2 + \ldots + x_m \leq M$ - łączna liczba półfabrykatów nie może przekroczyć liczby dostępnych półfabrykatów *M;*

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$,...., $x_n \geq 0$ - liczba półfabrykatów nie może być ujemna.

x_1, x_2,...., x_n - całkowite - liczba półfabrykatów musi być całkowita.

Odpowiednikiem parametrów b_i ze standardowego zadania optymalnego rozkroju (wymagana liczba detali *i*-tego typu, która ma powstać po pocięciu półfabrykatów) są iloczyny $d_i z$ (liczba sztuk detalu *i*-tego typu przypadająca na komplet pomnożona przez liczbę kompletów, $i = 1,2,\ldots, m$). Nieujemność oraz całkowitoliczbowość liczby kompletów wynika z równościowych warunków ograniczających (a dokładniej, z nieujemności i całkowitoliczbowości ich lewych stron oraz dodatniości i całkowitoliczbowości d_i).

Podany powyżej model matematyczny występuje również w wersji z „wymuszonym” użyciem wszystkich półfabrykatów tzn. z warunkiem ograniczającym $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = M$ [7]. Warunek taki może jednak prowadzić do sprzeczności i braku rozwiązań,

Zadanie 3

Z prętów o długości 3 m należy sporządzić komplety detali według opisu w tabeli. Zmaksymalizować liczbę detali, jaką można wykonać 1) z dokładnie 50 sztuk prętów, 2) co najwyżej 50 sztuk prętów.

Tabela 4. Dane liczbowe do zadania 3

Długości detali (m)	Sposoby rozkroju				Liczba sztuk w komplecie
	1	**2**	**3**	**4**	
0,6	5	2	0	0	2
1,5	0	1	2	0	1
2,5	0	0	0	1	3

Źródło: opracowanie własne na podstawie literatury[8]

[7] Nowak E., op. cit., str. 154

[8] Zadanie pochodzi z: Nowak E., op. cit., str. 155-156 (a pierwotnie z: Kalichman I.L., *Zadania z algebry liniowej i programowania liniowego*, PWN, Warszawa 1974). W zadaniu tym zmieniona została liczba dostępnych półfabrykatów z 1000 na 50.

Rozwiązanie

Model matematyczny

$z \to \max$ - liczba wyprodukowanych kompletów detali

przy ograniczeniach

liczby wyprodukowanych detali — wymagane liczba detali (liczby kompletów mnożone przez liczbę sztuk w komplecie)

$$5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 2z$$

$$0x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 0x_4 = 1z$$

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1x_4 = 3z$$

Ad 1) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 50$ - łączna liczba półfabrykatów wynosi 50

Ad 2) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 50$ - łączna liczba półfabrykatów nie może przekroczyć 50

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$ - liczba półfabrykatów nie może być ujemna

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$ - całkowite - liczba półfabrykatów musi być całkowita.

Ad 1) Przy „wymuszonym" użyciu wszystkich 50 sztuk półfabrykatów warunki ograniczające są sprzeczne. Niemniej jednak, jak można łatwo sprawdzić, jeżeli liczba sztuk detali typu 3 w komplecie wynosi 2 albo 4 sztuki zamiast 3, to wtedy warunki ograniczające nie są sprzeczne, a maksymalna liczba kompletów wynosi odpowiednio 17 i 10. Oznacza to, iż gdy liczba sztuk detali typu 3 w komplecie wynosi 3, to maksymalna liczba kompletów powinna być liczbą całkowitą z przedziału [10,17].

Ad 2) Przy użyciu „luźniejszego" warunku ograniczającego $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 50$ zadanie ma rozwiązanie optymalne $x_1^* = 4$, $x_2^* = 2$, $x_3^* = 5$, $x_4^* = 36$, $z^* = 12$. Oznacza to, że można wyprodukować maksymalnie 12 kompletów z 4+2+5+36=47 sztuk półfabrykatów.

Jak widać więc, używanie warunku $x_1 + x_2 + ... + x_m = M$ jest błędne, ponieważ może on uniemożliwiać znalezienie rozwiązania, gdy ono faktycznie istnieje.

Podsumowanie

Zaprezentowane w niniejszej pracy kwestie związane z formułowaniem różnych wariantów zadania optymalnego rozkroju nie wyczerpują oczywiście tematu. W rozważaniach pominięto uwzględnianie szerokości cięć czy też planowanie rozkrojów z półfabrykatów o różnych rozmiarach. Ponieważ również inne modele programowania liniowego bywają prezentowane w literaturze służącej celom edukacyjnym pod pewnym względami nieprawidłowo, z pewnością warto kontynuować prace nad ulepszaniem przekazywanych czytelnikom treści.

Bibliografia

1. Jędrzejczyk Z., Kukuła K., Skrzypek J., Walkosz A.,: *Badania operacyjne w przykładach i zadaniach,* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2011.
2. Kalichman I.L., *Zadania z algebry liniowej i programowania liniowego*, PWN, Warszawa 1974.
3. Kowalik P., *Optymalizacja zużycia materiałów w procesie produkcji rolet antywłamaniowych - studium przypadku*, [w:] *Rola informatyki w naukach ekonomicznych i Społecznych*, Tom 2, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Handlowej, Kielce 2009, 238-248.
4. Nowak E.: *Decyzyjne rachunki kosztów. Kalkulacje menedżera,* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1994.
5. Radzikowski W.: *Badania operacyjne w zarządzaniu przedsiębiorstwem,* Toruńska Szkoła Zarządzania, Toruń 1997.

On Correct Formulation of Cutting-stock Problems

Presentation of the linear programming model applications is an indispensable contents part of many operational research textbooks. One of such applications is the so-called cutting-stock problem – waste cost minimisation of raw materials pieces which are cut into smaller fragments. For educational purposes, an introduction to cutting-stock problems is usually based (despite potentially limited practical usability of such an approach) on integer linear programming problems, whose parameters are – among others – all the possible cutting patterns listed explicitly. Unfortunately, it happens that the models presented are characterised by some – easy to avoid – shortcomings such as constraints contradictory for some parameters or even objective functions which result in non-optimal solutions. The paper contains a review of the selected cutting-stock models existing in the Polish literature on the subject, including descriptions of their shortcomings.

Keywords: linear programming, integer linear programming, cutting-stock problem, objective function, constraints