Metody Numeryczne - Projekt nr 1

Raport

Julia Przybytniowska (313523)

grudzień 2021

Spis treści

1 Wprowadzenie

Celem otrzymanego przeze mnie zadania było znalezienie miejsc zerowych wielomianu za pomocą metody Newtona. Ważnym kryterium wielomianu było przedstawienie go w bazie wielomianów Czebyszewa I-ego rodzaju.
W odpowiedzi na zadane pytanie wykorzystałam zależności poznane na dotychczasowych zajęciach z tego przedmiotu.

2 Opis matematyczny

Analizę zadania rozpoczęłam od stworzenia wielomianu. Potrzebny był mi do tego wzór rekurencyjny definiujący ciąg wielomianów Czebyszewa I-ego rodzaju.

$$T_0 = 1, \qquad T_1 = x, \qquad T_n = 2T_{\text{n-1}} - T_{\text{n-2}}$$

Po uwzględnieniu w wielomianie współczynników a = [$\mathrm{a_0}$, $\mathrm{a_1}$, ... , $\mathrm{a_n}$] przedstawiał sie następująco:

$$w(x) = a_0 * T_0 + a_1 * T_1 + ... + a_n * T_n$$

Dla ustalonych przedziałów $x \in [a, b]$, sprawdzam warunki potrzebne do zaimplementowania iteracyjnej metody Newtona (inaczej znanej jako metoda Stycznych):

(a) f jest funkcją klasy $C^2([a, b])$,

(b) f(a) * f(b) < 0,

(c) f' i f" nie zmieniają znaku w [a,b],

(d) $x_0 \in [a, b]$ jest przybliżeniem początkowym takim, że $f(x_0) * f"(x_0) > 0$,

Poprzez kolejne iteracje tworzę ciag o wzorze rekurencyjnym $x_{\text{k+1}} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, którego granica wyznacza miejsce zerowe wielomianu w podanym przedziale.

3 Opis działania programu

Program składa się z 5 funkcji:

1. ”Czebyszew” - przyjmująca 2 argumenty:
   (a) wektor punktów z badanego przedziału
   (b) wektor współczynników badanego wielomianu

   Korzystając z macierzy i zależności rekurencyjnej wielomianów Czebyszewa I-ego stopnia ($T_0 = 1, \quad T_1 = x, \quad T_n = 2T_{\text{n-1}} - T_{\text{n-2}}$) wylicza wartość wielomianu w szukanych punktach.

2. ”przedzialy” - przyjmująca 4 argumenty:
   (a) a - poczatek badanego przedziału,
   (b) b - koniec badanego przedziału,
   (c) wektor współczynników a,
   (d) wstępną liczbę przedziałów na które trzeba podzielić [a,b] aby wyznaczyc wszystkie miejsca zerowe.

   Funkcja dzieli przedział główny na określoną liczbę równych przedziałów, i dla każdego z nich sprawdza czy funkcja na ich końcach zmieniła znak. Jeśli tak, to zapisuje je do macierzy zwracanej.

3. ”pochodna1” - przyjmuje 2 argumenty:
   (a) punkt z którym pochodna ma być wyznaczona,
   (b) wektor współczynników badanego wielomianu.

   Wylicza pierwszą pochodną w punkcie korzystając ze wzoru na różnice progresywną.

4. ”pochodna2” - przyjmuje 2 argumenty:
   (a) punkt z którym pochodna ma być wyznaczona,
   (b) wektor współczynników badanego wielomianu.

   Wylicza drugą pochodną w punkcie korzystając ze wzoru na różnice progresywną.

5. ”Newton” - przyjmuje 4 argumenty:

   (a) a - początek przedziału na końcachh którego funkcja zmienia znak,

   (b) b - koniec tego przedziału,

   (c) zadaną liczbę iteracji,

   (d) wektor współczynników badanego wielomianu.

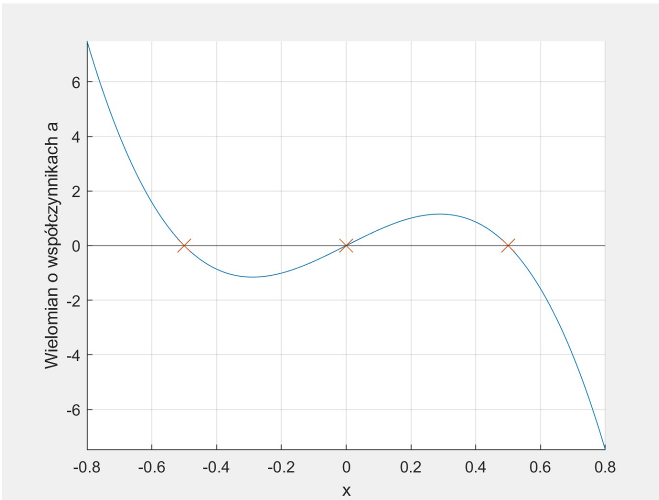
   Funkcja sprawdza z którego punktu (a, czy b) najlepiej zacząć szukanie zer wielomianu (aby zooptymalizować czas działania programu), a następnie ze wzoru rekurencyjnego $x_{\mathrm{k}+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ wyznacza przybliżoną wartość miejsca zerowego.

Ostatnim plikiem znaczącym w programie jest ”SkryptGlowny”. W nim zadeklarowane są wszytkie dane i polecenia wywołujące funkcje, aby otrzymać szukany wynik. Jest w nim również kod umożliwiający wizualizaję przebiegu badanego wielomianu na podanym przedziale.

4 Przykładowe wielomiany i ich miejsca zerowe

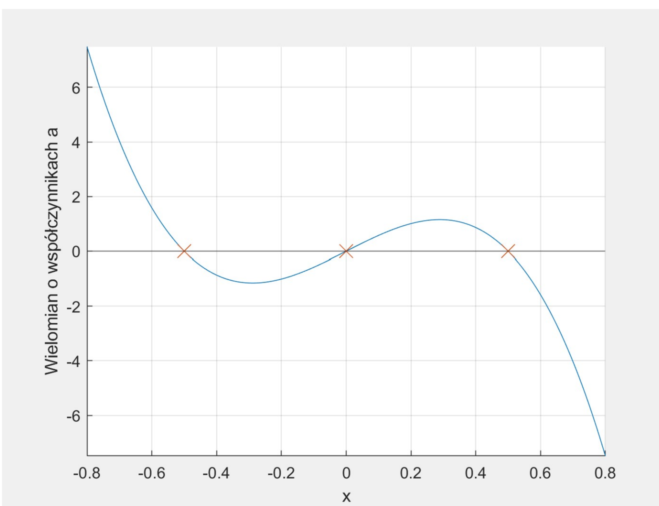
W każdym przykładzie, jest przedstawiony wykres obrazujący obliczone wyniki. Nebieska linia przedstawia przebieg badanej funkcji, a czerwone X zaznaczają na wykresie punkty wyznaczone przez program. Jeśli punty X są w miejscu przeciecia linii niebieskiej z osią X to znaczy że program obliczył poprawnie miejsca zerowe. Po lewej od wykresów wypisane są również dokładne wyniki [x, y = f(x)] obliczone w MATLAB.

4.1 $a = [0, 3, 1, 2]$ dla 6 iteracji



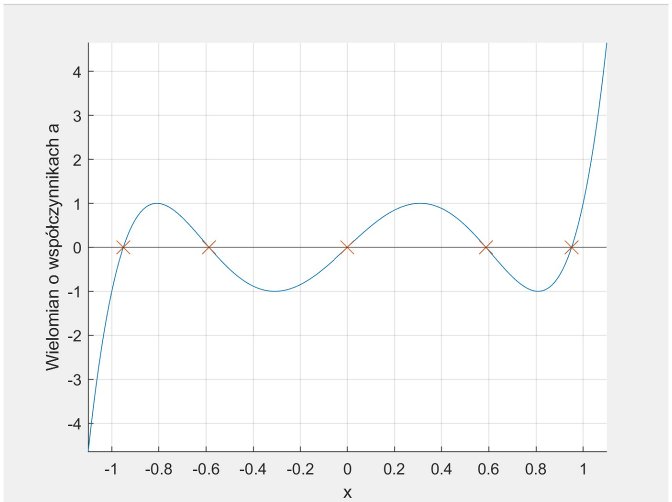

```
[          x,           y]
[       -0.5,           0]
[1.01127e-88, 6.06764e-88]
[        0.5,           0]
```

4.2 $a = [0, 3, 1, 2]$ dla 30 iteracji



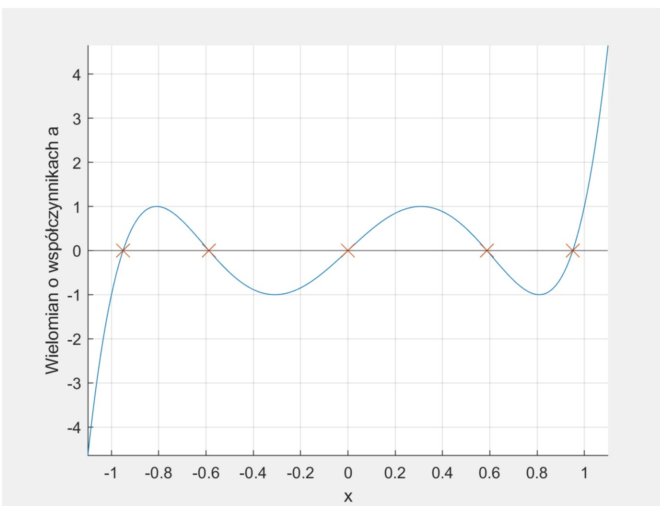

```
[   x, y]
[-0.5, 0]
[   0, 0]
[ 0.5, 0]
```

4.3 $a = [1, 1, 1, 1]$ dla 6 iteracji



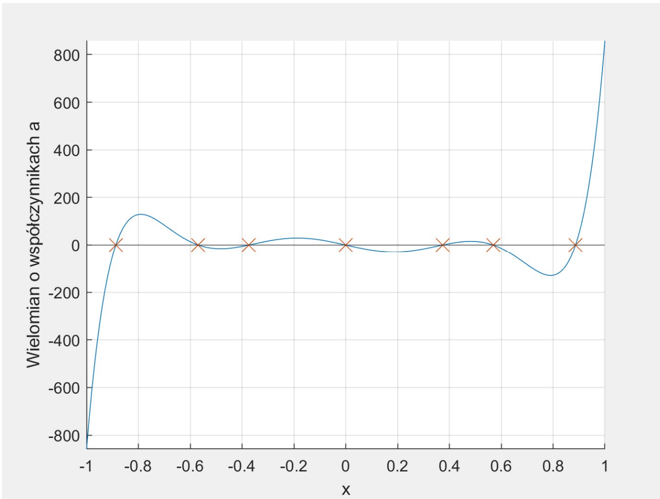
x	y
-0.951057	4.44089e-16
-0.587785	0
1.31753e-60	6.58765e-60
0.587785	0
0.951057	-4.44089e-16

4.4 $a = [1, 1, 1, 1]$ dla 30 iteracji



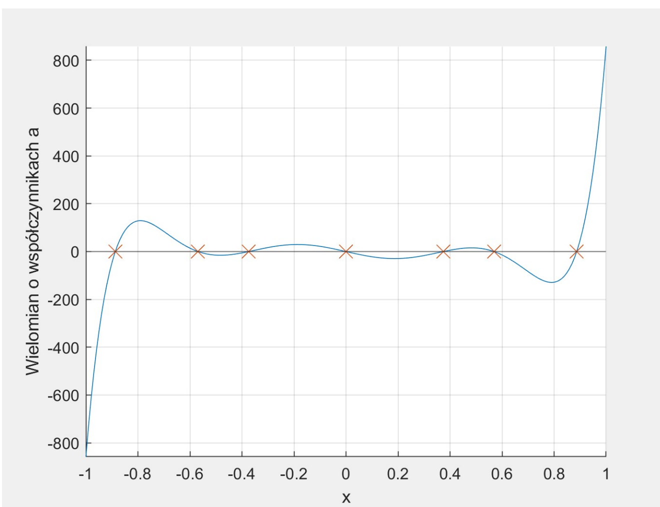
x	y
-0.951057	4.44089e-16
-0.587785	0
0	0
0.587785	0
0.951057	-4.44089e-16

4.5 $a = [1, 3, 2, 6, 1, 3]$ dla 8 iteracji



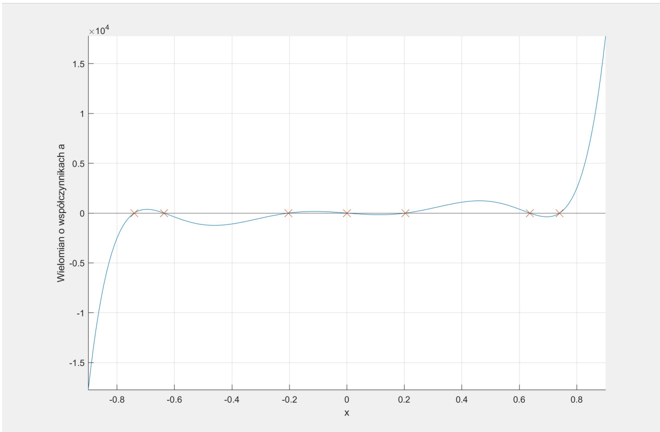

```
[            x,             y]
[   -0.886955,   8.95117e-14]
[   -0.568714,   1.06581e-14]
[   -0.373999,   2.66454e-15]
[1.65051e-80, -4.06026e-78]
[    0.373999, -2.66454e-15]
[    0.568714, -1.06581e-14]
[    0.886955, -8.95117e-14]
```

4.6 $a = [1, 3, 2, 6, 1, 3]$ dla 30 iteracji



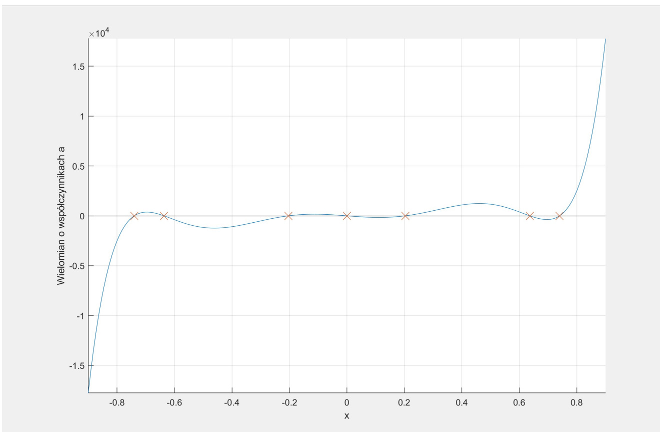

```
[         x,             y]
[-0.886955,   8.95117e-14]
[-0.568714,   1.06581e-14]
[-0.373999,   2.66454e-15]
[        0,             0]
[ 0.373999, -2.66454e-15]
[ 0.568714, -1.06581e-14]
[ 0.886955, -8.95117e-14]
```

4.7 $a = [6, 9, 1, 2, 5, 7]$ dla 8 iteracji



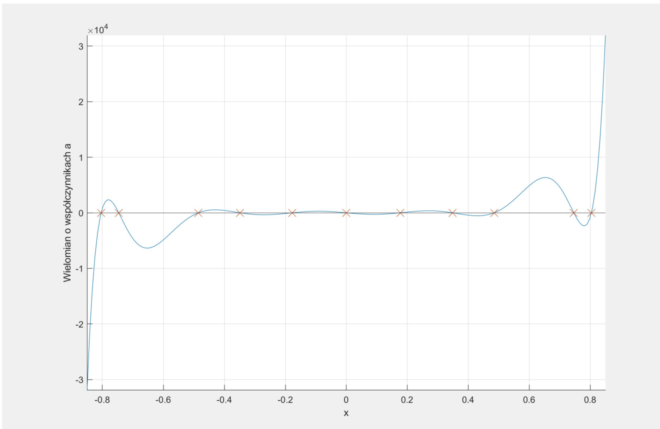

```
[           x,             y]
[  -0.740189,  2.26152e-13]
[  -0.636481, -3.97904e-13]
[   -0.20361,  -4.9738e-14]
[3.90483e-78, -8.69215e-75]
[    0.20361,   4.9738e-14]
[   0.636481,  3.97904e-13]
[   0.740189, -2.26152e-13]
```

4.8 $a = [6, 9, 1, 2, 5, 7]$ dla 30 iteracji



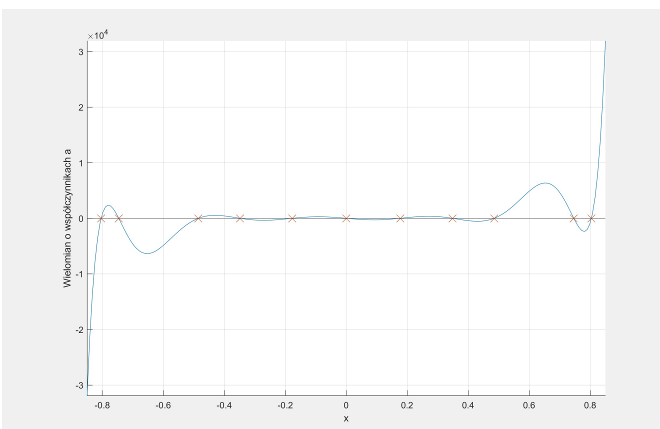

```
[        x,             y]
[-0.740189,   2.26152e-13]
[-0.636481,  -3.97904e-13]
[ -0.20361,   -4.9738e-14]
[        0,             0]
[  0.20361,    4.9738e-14]
[ 0.636481,   3.97904e-13]
[ 0.740189,  -2.26152e-13]
```

4.9 $a = [5, 4, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 4, 5]$ dla 8 iteracji




```
[           x,            y]
[   -0.804068, -7.28306e-12]
[   -0.746197,  6.26166e-13]
[   -0.485194,  1.42109e-13]
[   -0.348572, -2.13163e-13]
[   -0.177245, -7.10543e-14]
[8.45023e-81, -4.03076e-77]
[    0.177245,  7.10543e-14]
[    0.348572,  2.13163e-13]
[    0.485194, -1.42109e-13]
[    0.746197, -6.26166e-13]
[    0.804068,  7.28306e-12]
```

4.10 $a = [5, 4, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 4, 5]$ dla 30 iteracji




```
[         x,            y]
[-0.804068, -7.28306e-12]
[-0.746197,  6.26166e-13]
[-0.485194,  1.42109e-13]
[-0.348572, -2.13163e-13]
[-0.177245, -7.10543e-14]
[         0,            0]
[ 0.177245,  7.10543e-14]
[ 0.348572,  2.13163e-13]
[ 0.485194, -1.42109e-13]
[ 0.746197, -6.26166e-13]
[ 0.804068,  7.28306e-12]
```

5 Podsumowanie

Ze zbadanych przykładów widać, że program działa poprawnie i wylicza wszystkie miejsca zerowe wielomianu. Podczas zajęć przybliżając wykres widać było, że wyniki nie są idealnie dokładne (wartość funkcji rzędu e^{-15}). Zwiekszając liczbę iteracji jesteśmy w stanie obliczyć punkty nieco dokładniej, niestety kosztem czasu wykonywania programu.