Metody Numeryczne - Projekt nr 2

Raport

Julia Przybytniowska (313523)

styczeń 2022

Spis treści

1 Wprowadzenie

Celem otrzymanego przeze mnie zadania było znalezienie rozwiązania układu równań $Ax = B$ blokową metodą Crouta.

Zakładając, że $A \in \mathbb{R}^{(n\,x\,n)}$ jest macierzą o postaci : $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ -I & A_{22} \end{pmatrix}$, gdzie $A_{ij} \in \mathbb{R}^{(p\,x\,p)}$ oraz $n = 2p$.

2 Opis matematyczny

Rozwiązanie rozpoczęłam od scalenia trzech danych macierzy w główną macierz A, a następnie przeszłam do analizy wykorzystywanej matody.

Blokowa metoda Crouta pozwoliła mi w prostszy sposób obliczyć rozwiazanie badanego równania. Opiera się ona na wyznaczeniu dwóch macierzy, których iloczyn jest toższamy z macierzą A. Wspomniane macierze mają postać:

L - macierz dolnotrójkatna, U - macierz górnotrójkatna z "jedynkami" na gównej przekątnej.

Wyznaczanie kolejnych elementów macierzy L i U, wykonywałam naprzemiennie. Najpierw wyznaczyłam pierwszą kolumnę macierzy L, następnie pierwszy wiersz macierzy U, a w następnym kroku czynności powtarzałam dla kolejnych kolumn macierzy L i wierszy U. Do obliczania kolejnych elementów macierzy wykorzystałam poniższe wzory:

(dla wszystkich $i \in \{1,\ 2, \ldots,\ n\}$)

$$l_{ji} = a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk}u_{ki}, \qquad (dla j \in \{i,\ i+1, \ldots,\ n\}) \tag{1}$$

$$u_{ij} = \frac{1}{l_{ii}}(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{kj}l_{ik}) \qquad (dla j \in \{i+1,\ i+2, \ldots,\ n\}) \tag{2}$$

Może się zdarzyć przypadek, że na przykątnej macierzy L pojawi się wartość zero, wtedy metoda Crouta zawodzi i nie możemy wyznaczyć nastepnej kolumny z macierzy U.

Po ich wyznaczeniu mogłam zająć się wyznaczaniem rozwiazania układu równań dla danego B. Dzieki wcześniejszemu wyznaczeniu macierzy L i U przekształciłam równanie na dwa zależne od siebie równania:

$$Ax = B \Leftrightarrow LUx = B \Leftrightarrow (Ly = B \wedge Ux = y)$$

Zatem skorzystałam z równań:

(dla wszystkich $i \in \{1, \ldots, \ n\}$, $j \in \{1, \ldots, \ liczbaKolumnB\}$

$$y_{ij} = \frac{1}{l_{ii}}(b_{ij} - \sum_{k=1}^{i} y_{kj} l_{ik}) \tag{3}$$

$$x_{ij} = y_{ij} - \sum_{k=i+1}^{n} x_{kj} u_{ik} \tag{4}$$

3 Opis działania programu

Program składa się z 3 funkcji:

1. "CreateMatrix" - przyjmująca 3 argumenty:

   (a) macierz A_{11}

   (b) macierz A_{12}

   (c) macierz A_{22}

   Korzystając z wbudowanych w Matlab'a funkcji tworzy macierz A.

2. "Crout" - przyjmująca 1 argument - macierz A.

   Funkcja za pomocą wzorów (1) i (2) wyznacza szukane macierze L i U.

3. "SolveEquation" - przyjmuje 3 argumenty:

   (a) L, U - macierze wyznaczone przez funkcję "Crout"

   (b) B - macierz będąca cześcią równania

   Funkcja wylicza za za pomocą równań (3) i (4) rozwiązanie badanego równania.

Ostatnim znaczącym plikiem w programie jest "Commands". W nim zadeklarowane są wszytkie dane i polecenia wywołujące funkcje w odpowiedniej kolejności, aby otrzymać szukany wynik. jest w nim również kod pozwalający na zbadanie poprawności przeprowadzonych obliczeń za pomocą wbudowanych narzędzi w Matlab.

4 Przykłady obliczeniowe

Dla każdego przykładu wypisałam wyliczone macierze L i U (aby pokazać że ich założenia są spełnione) oraz dwa rozwiazania (jedno wyliczone za pomocą metody Crouta, a drugie za pomocą wbudowanych funckji MATLAB'a).

Przy bardziej wymagających wyrażeniach załączyłam również macierz A, aby lepiej zobrazować jak przedstawiają się jej wartości.

Przykład 1: $A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $A_{12} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ $A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

```
Macierz L:
     1     0     0     0
     3    -2     0     0
    -1     2    -2     0
     0    -1     6     8
```

```
Macierz U:
     1     2     3     4
     0     1     3     3
     0     0     1     0
     0     0     0     1
```

```
Rozwiązanie za pomocą metody:
   -1.1250
   -0.0625
   -1.5000
    1.6875
```

```
Rozwiązanie za pomocą A\B:
   -1.1250
   -0.0625
   -1.5000
    1.6875
```

Przykład 2: $A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $A_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \\ 5 & 3 \\ 3 & 4 \\ 5 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$

```
Macierz L:
    1.0000         0         0         0         0         0
    1.0000   -1.0000         0         0         0         0
    7.0000   -6.0000  -12.0000         0         0         0
   -1.0000    2.0000    3.0000    0.5000         0         0
         0   -1.0000         0    4.0000    2.0000         0
         0         0   -1.0000    1.5000    3.0000   25.0000
```

```
Macierz U:
    1.0000    2.0000    3.0000    1.0000    2.0000    3.0000
         0    1.0000         0         0    1.0000         0
         0         0    1.0000    0.5000    0.5000    1.5000
         0         0         0    1.0000    1.0000    7.0000
         0         0         0         0    1.0000  -11.0000
         0         0         0         0         0    1.0000
```

```
Rozwiązanie za pomocą metody:
   -3.8400    3.8800
    3.3600   -3.1867
    0.4800   -0.3600
    3.6800   -4.7600
   -0.3600    2.1867
   -0.7600    1.6533
```

```
Rozwiązanie za pomocą A\B:
   -3.8400    3.8800
    3.3600   -3.1867
    0.4800   -0.3600
    3.6800   -4.7600
   -0.3600    2.1867
   -0.7600    1.6533
```

Przykład 3: $\mathrm{A}_{11} = \begin{pmatrix} 0.0462 & 0.3171 & 0.3816 & 0.4898 \\ 0.0971 & 0.9502 & 0.7655 & 0.4456 \\ 0.8235 & 0.0344 & 0.7952 & 0.6463 \\ 0.6948 & 0.4387 & 0.1869 & 0.7094 \end{pmatrix}$ $A_{12} = \begin{pmatrix} 0.7547 & 0.1626 & 0.3404 & 0.2551 \\ 0.2760 & 0.1190 & 0.5853 & 0.5060 \\ 0.6797 & 0.4984 & 0.2238 & 0.6991 \\ 0.6551 & 0.9597 & 0.7513 & 0.8909 \end{pmatrix}$

$$\mathrm{A}_{22} = \begin{pmatrix} 0.9593 & 0.2575 & 0.2435 & 0.2511 \\ 0.5472 & 0.8407 & 0.9293 & 0.6160 \\ 0.1386 & 0.2543 & 0.3500 & 0.4733 \\ 0.1493 & 0.8143 & 0.1966 & 0.3517 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0.8308 \\ 0.5853 \\ 0.5497 \\ 0.9172 \\ 0.2858 \\ 0.7572 \\ 0.7537 \\ 0.3804 \end{pmatrix}$$

```
Macierz L:
    0.0462         0         0         0         0         0         0         0
    0.0971    0.2831         0         0         0         0         0         0
    0.8235   -5.6210   -6.7479         0         0         0         0         0
    0.6948   -4.3333   -6.1241    2.2662         0         0         0         0
   -1.0000    6.8679    9.1657   -1.9636    0.2516         0         0         0
         0   -1.0000   -0.1313   -1.6820   -0.0235    1.2456         0         0
         0         0   -1.0000    2.9190    0.1532   -1.0360    1.0290         0
         0         0         0   -1.0000    2.1151   -7.3293    6.6809   -5.3990

Macierz U:
    1.0000    6.8679    8.2640   10.6075   16.3453    3.5219    7.3722    5.5250
         0    1.0000   -0.1313   -2.0653   -4.6325   -0.7879   -0.4620   -0.1084
         0         0    1.0000    2.9190    5.7528    1.0123    1.2513    0.6609
         0         0         0    1.0000    1.9658    0.5726    0.5693    0.2779
         0         0         0         0    1.0000    4.1209    1.7378    4.0077
         0         0         0         0         0    1.0000    1.3085    0.9281
         0         0         0         0         0         0    1.0000    0.6517
         0         0         0         0         0         0         0    1.0000
```

```
Rozwiązanie za pomocą metody:     Rozwiązanie za pomocą A\B:
    1.0357                            1.0357
    0.2629                            0.2629
   -0.4496                           -0.4496
   -0.8154                           -0.8154
    1.3622                            1.3622
   -1.0198                           -1.0198
    1.3603                            1.3603
   -0.2143                           -0.2143
```

Przykład 4: $\mathrm{A}_{11} = \begin{pmatrix} cos(1) & cos(2) & cos(3) \\ cos(0) & cos(1) & cos(0) \\ cos(2) & cos(2) & cos(2) \end{pmatrix}$ $A_{12} = \begin{pmatrix} sin(1) & sin(3) & sin(1) \\ sin(3) & sin(3) & sin(3) \\ sin(0) & sin(1) & sin(-1) \end{pmatrix}$

$$\mathrm{A}_{22} = \begin{pmatrix} tan(2) & tan(3) & tan(1) \\ tan(-2) & tan(-3) & tan(-1) \\ tan(0) & tan(1) & tan(1) \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Macierz L:

0.5403	0	0	0	0	0
1.0000	1.3105	0	0	0	0
-0.4161	-0.7367	0.4134	0	0	0
-1.0000	-0.7702	-0.1677	-1.5200	0	0
0	-1.0000	2.1612	1.8781	-4.0613	0
0	0	-1.0000	-0.3580	3.5967	3.0236

Macierz U:

1.0000	-0.7702	-1.8323	1.5574	0.2612	1.5574
0	1.0000	2.1612	-1.0807	-0.0916	-1.0807
0	0	1.0000	-0.3580	2.1349	-2.3933
0	0	0	1.0000	-0.2672	-1.2375
0	0	0	0	1.0000	-1.1963
0	0	0	0	0	1.0000

Rozwiązanie za pomocą metody:

5.4210	4.1837
-6.4210	-8.1837
0.5188	2.2645
-3.6674	-2.2844
1.8302	1.8073
-1.4970	0.2888

Rozwiązanie za pomocą A\B:

5.4210	4.1837
-6.4210	-8.1837
0.5188	2.2645
-3.6674	-2.2844
1.8302	1.8073
-1.4970	0.2888

Przykład 5: $\mathrm{A}_{11} = A_{22} = magic(5)$ $A_{12} = inv(magic(5))$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T$

Macierz A:

17.0000	24.0000	1.0000	8.0000	15.0000	-0.0049	0.0512	-0.0354	0.0012	0.0034
23.0000	5.0000	7.0000	14.0000	16.0000	0.0431	-0.0373	-0.0046	0.0127	0.0015
4.0000	6.0000	13.0000	20.0000	22.0000	-0.0303	0.0031	0.0031	0.0031	0.0364
10.0000	12.0000	19.0000	21.0000	3.0000	0.0047	-0.0065	0.0108	0.0435	-0.0370
11.0000	18.0000	25.0000	2.0000	9.0000	0.0028	0.0050	0.0415	-0.0450	0.0111
-1.0000	0	0	0	0	17.0000	24.0000	1.0000	8.0000	15.0000
0	-1.0000	0	0	0	23.0000	5.0000	7.0000	14.0000	16.0000
0	0	-1.0000	0	0	4.0000	6.0000	13.0000	20.0000	22.0000
0	0	0	-1.0000	0	10.0000	12.0000	19.0000	21.0000	3.0000
0	0	0	0	-1.0000	11.0000	18.0000	25.0000	2.0000	9.0000

Macierz L:

17.0000	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23.0000	-27.4706	0	0	0	0	0	0	0	0
4.0000	0.3529	12.8373	0	0	0	0	0	0	0
10.0000	-2.1176	17.9764	-9.3786	0	0	0	0	0	0
11.0000	2.4706	24.8608	-38.0567	90.1734	0	0	0	0	0
-1.0000	1.4118	0.3490	0.1401	-0.3064	17.0033	0	0	0	0
0	-1.0000	-0.2056	0.1751	-0.1329	22.9984	-27.4554	0	0	0
0	0	-1.0000	1.4145	-3.2832	4.0003	0.3527	12.8399	0	0
0	0	0	-1.0000	3.3353	9.9995	-2.1128	17.9763	-9.3666	0
0	0	0	0	-1.0000	10.9988	2.4773	24.8626	-38.0493	90.3033

Macierz U:

1.0000	1.4118	0.0588	0.4706	0.8824	-0.0003	0.0030	-0.0021	0.0001	0.0002
0	1.0000	-0.2056	-0.1156	0.1563	-0.0018	0.0039	-0.0016	-0.0004	0.0001
0	0	1.0000	1.4145	1.4345	-0.0022	-0.0008	0.0009	0.0002	0.0028
0	0	0	1.0000	3.3353	-0.0046	0.0015	-0.0012	-0.0040	0.0094
0	0	0	0	1.0000	-0.0012	0.0004	-0.0000	-0.0023	0.0033
0	0	0	0	0	1.0000	1.4114	0.0588	0.4705	0.8821
0	0	0	0	0	0	1.0000	-0.2057	-0.1158	0.1562
0	0	0	0	0	0	0	1.0000	1.4141	1.4343
0	0	0	0	0	0	0	0	1.0000	3.3391
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.0000

Rozwiązanie za pomocą metody:	Rozwiązanie za pomocą A\B:
0.0128	0.0128
0.0126	0.0126
0.1799	0.1799
0.0126	0.0126
0.0128	0.0128
0.0738	0.0738
0.0789	0.0789
-0.0865	-0.0865
0.0815	0.0815
0.0866	0.0866

Przykład 6: $$A_{11} = \begin{pmatrix} log(3) & log(2) & log(3) \\ log(1) & log(4) & log(2) \\ log(10) & log(3) & log(6) \end{pmatrix} \quad A_{12} = \begin{pmatrix} -log(3) & -log(2) & -log(3) \\ -log(1) & -log(4) & -log(2) \\ -log(10) & -log(3) & -log(6) \end{pmatrix}$$

$$A_{22} = \begin{pmatrix} sin(2) & sin(2) & sin(2) \\ sin(4) & sin(4) & sin(4) \\ sin(3) & sin(3) & sin(3) \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} log(1) & log(2) & log(3) & log(4) & log(5) & log(6) \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ cos(1) & cos(2) & cos(3) & cos(4) & cos(5) & cos(6) \end{pmatrix}^T$$

```
Macierz A:
    1.0986    0.6931    1.0986   -1.0986   -0.6931   -1.0986
         0    1.3863    0.6931         0   -1.3863   -0.6931
    2.3026    1.0986    1.7918   -2.3026   -1.0986   -2.0794
   -1.0000         0         0    0.9093    0.9093    0.9093
         0   -1.0000         0   -0.7568   -0.7568   -0.7568
         0         0   -1.0000    0.1411    0.1411    0.1411

Macierz L:
    1.0986         0         0         0         0         0
         0    1.3863         0         0         0         0
    2.3026   -0.3542   -0.3337         0         0         0
   -1.0000    0.6309    0.6845   -0.0907         0         0
         0   -1.0000    0.5000   -0.7568   -9.3438         0
         0         0   -1.0000    0.1411    1.5559   -0.1415

Macierz U:
    1.0000    0.6309    1.0000   -1.0000   -0.6309   -1.0000
         0    1.0000    0.5000         0   -1.0000   -0.5000
         0         0    1.0000         0         0   -0.1380
         0         0         0    1.0000  -10.0250   -3.5197
         0         0         0         0    1.0000    0.4122
         0         0         0         0         0    1.0000
```

```
Rozwiązanie za pomocą metody:
   -9.7754  -19.9010   10.1373
    5.3728    8.2343   -8.1769
   -3.0937   -8.4678    0.5117
  -15.1913   -4.7288   40.3881
    0.6865   17.8737   14.7168
    5.2788  -30.6319  -44.6752
```

```
Rozwiązanie za pomocą A\B:
   -9.7754  -19.9010   10.1373
    5.3728    8.2343   -8.1769
   -3.0937   -8.4678    0.5117
  -15.1913   -4.7288   40.3881
    0.6865   17.8737   14.7168
    5.2788  -30.6319  -44.6752
```

5 Podsumowanie

Po porównaniu wyników uzyskanych za pomocą metody blokowej Crouta i za pomocą wbudowanych funkcji MATLAB można wnioskować, że program działa prawidłowo.

Badana metoda nie jest jednak niezawodna, gdyż w niektórych przypadkach macierze L i U nie były możliwe do wyznaczenia, a prawidłowe rozwiazanie równania istniało. Wynika to w przypadku, gdy na głównej przekątnej macierzy L wystąpiła wartość 0, przez którą nie jesteśmy w stanie podzielić w następnych wyliczeniach.