Strukturális operációs szemantika

Dr. Horpácsi Dániel
ELTE Informatikai Kar
2023-2024-2

"Small-step" műveleti szemantika

imperatív programkonstrukciókhoz

Emlékeztető: formális szemantikadefiníciók

- A programozási nyelvek szemantikája általában informálisan kerül leírásra, továbbá részben a nyelv fordítóprogramja definiálja
- Ezek közül egyiket sem tekintjük formális definíciónak, nem használhatóak bizonyításhoz

Megoldás: használjuk a jó öreg matematikát és logikát!

Két alapvető megközelítés:

- **Operációs (műveleti)** — reláció, levezetés

  Megadja, hogyan kell végrehajtani a programot

- **Denotációs (leíró)** — kompozicionális függvény

  A jelentést denotációk hozzárendelésével adja meg

- Az előző előadáson definiáltuk egyszerű kifejezések szemantikáját, most továbblépünk: formálisan adjuk meg az alapvető imperatív nyelvi elemek jelentését (a példanyelv a “While”)
- Mostantól az állapotot (a számítás kontextusát) nem csak olvasni, módosítani is fogják majd a nyelvi elemek

- Míg a kifejezések adott értékekre értékelődnek ki és nem változtatták meg az állapotot, addig az utasításoknak nincs értéke, csak mellékhatása: megváltoztathatják a változók értékét
- Az utasítás eredménye nem egy érték, hanem az új állapot
- Valójában az utasítás szemantikája nem egy állapot, hanem állapotok közötti reláció: milyen állapotból melyik másik állapotba juthat a program az utasítás végrehajtásával

- A nyelvi elemek szerkezetét az absztrakt szintaxis definiálja
- Feltesszük, hogy a vizsgált kifejezések és utasítások statikus szemantikusan helyesek

- Az absztrakt szintaxis a szemantikadefiníció alapja
- A résznyelvek szintaktikus kategóriákat határoznak meg, amelyeket absztrakt produkciós szabályokkal induktívan definiálunk
- Tulajdonképp megadjuk az összes lehetséges absztrakt szintaxisfát, amelyek a nyelv mondataihoz tartoznak

Szintaktikus kategóriák és metaváltozóik

$S \in \mathrm{Stm}$ (utasítások halmaza)

$n \in \mathrm{Num}$ (számliterálok) (token)

$x \in \mathrm{Var}$ (változók) (token)

$a \in \mathrm{Aexp}$ (aritmetikai kifejezések)

$b \in \mathrm{Bexp}$ (logikai kifejezések)

Produkciós szabályok

$$S \quad ::= \quad \textbf{skip} \mid x := a \mid S_1; S_2 \mid \textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2 \mid \textbf{while } b \textbf{ do } S$$

$$a \quad ::= \quad n \mid x \mid a_1 + a_2 \mid a_1 - a_2 \mid \text{-}a$$

$$b \quad ::= \quad \textbf{true} \mid \textbf{false} \mid a_1 = a_2 \mid a_1 < a_2 \mid \neg b \mid b_1 \wedge b_2$$

Állapotok

- A kifejezések és utasítások változókat is tartalmazhatnak, tehát a jelentésük függhet a változókörnyezettől (az állapottól, amelyben kiértékeljük őket), és meg is változtathatják az állapotot
- Az egyszerűség kedvéért most csak egész számokat vehetnek fel a változók, de a modell általánosítható

- Az állapotokat függvényekkel reprezentáljuk:

$$s \in \mathrm{State} = \mathrm{Var} \to \mathbb{Z}$$

- Minden ilyen függvény értékeket rendel a változószimbólumokhoz
- Általában listaként formázzuk, pl.: $[x \mapsto 1, y \mapsto 2, z \mapsto 3]$

Állapotok műveletei: lekérdezés és módosítás

Vegyük a következő állapotot: $s \in \mathrm{State} = \mathrm{Var} \to \mathbb{Z}$

- Ha hivatkozunk egy változó értékére, ki kell olvasnunk a "memóriából"

  $s[x]$ megadja az x változó értékét az s állapotban

- Amikor értéket adunk egy változónak, frissíteni kell az állapotot

  $s[y \mapsto v]$ megad egy olyan állapotot, amely megegyezik az s állapottal, de y helyen az értéke v

  Következésképp teljesül, hogy $$(s[y \mapsto v])[x] = \begin{cases} v & \text{if } x = y \\ s[x] & \text{if } x \neq y \end{cases}$$

Strukturális operációs szemantika

A strukturális operációs szemantika megadja, hogyan lehet lépésről lépésre végrehajtani a programot egy absztrakt gépen.

- Átmenetrendszert definiálunk konfigurációk között
- Az átmeneteket következtetési szabályokkal határozzuk meg
- A szabályokban megjelenő konfiguráció-sémák tetszőleges szintaktikus elemmel példányosíthatóak
- Természetes levezetést használunk az átmenetek érvényességének bizonyítására

- A szabályok által leírt átmenetrendszer segítségével kiszámítható a szintaktikus elem szemantikája (esetleg normálformája)
- A levezetések sokszor szintaxis-vezéreltek

A következőkben definiálni fogjuk az alapvető imperatív utasítások strukturális operációs szemantikáját, amelyhez azonban felhasználjuk a kifejezések denotációs szemantikáját.

- A végrehajtás állapotai (konfigurációk) két típusból kerülnek ki: vagy egy utasítás és egy állapot párja, vagy pedig egy állapot (a végállapot)
- (vö. a szintézis és verifikációval: “memóriaállapot” kontra “programállapot”)
- A konfigurációátmeneteket a következőképp jelöljük:

  A számítás egy köztes lépése:

  $$\langle S, s\rangle \Rightarrow \langle S', s'\rangle \qquad s, s' \in \mathrm{State}$$

  Az S végrehajtása véget ér az s' állapotot eredményezve:

  $$\langle S, s\rangle \Rightarrow s' \qquad s, s' \in \mathrm{State}$$

- Egy $\langle S, s\rangle$ konfigurációt *beragadt (stuck)* konfigurációnak hívunk, ha nincsen olyan c konfiguráció, amelyre $\langle S, s\rangle \Rightarrow c$

Definiáltuk a konfiguráció fogalmát, most formálisan definiáljuk a megengedett átmeneteket a konfigurációk között.

- Következtetési szabályok (sémáinak) segítségével definiáljuk, mely konfigurációk között lehetséges átmenet
- A szabályok premisszából, konklúzióból és feltételekből állnak

$$\frac{Premises}{Conclusion}\ Conditions$$

A konklúzióban szereplő átmenet érvényes, ha a premisszában lévő átmenet levezethető és a feltétel teljesül.

- A premissza nélküli szabályok az axiómák.

$$\frac{}{Axiom}\ Conditions$$

A While nyelv természetes operációs szemantikája

Skip

$$[\mathit{Skip}]\ \frac{}{\langle \textbf{skip}, s\rangle \Rightarrow s}$$

Értékadás

$$[\mathit{Ass}]\ \frac{}{\langle x := a, s\rangle \Rightarrow s[x \mapsto \mathcal{A}[\![a]\!]s]}$$

Szekvencia

$$[\mathit{Seq1}]\ \frac{\langle S_1, s\rangle \Rightarrow \langle S_1', s'\rangle}{\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_1'; S_2, s'\rangle}$$

$$[\mathit{Seq2}]\ \frac{\langle S_1, s\rangle \Rightarrow s'}{\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_2, s'\rangle}$$

A While nyelv természetes operációs szemantikája

Skip

$$\text{[Skip]}\ \frac{}{\langle \mathbf{skip}, s\rangle \Rightarrow s}$$

Értékadás

$$\text{[Ass]}\ \frac{}{\langle x := a, s\rangle \Rightarrow s[x \mapsto \mathcal{A}[\![a]\!]s]}$$

Szekvencia

$$\text{[Seq1]}\ \frac{\langle S_1, s\rangle \Rightarrow \langle S_1', s'\rangle}{\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_1'; S_2, s'\rangle}$$

$$\text{[Seq2]}\ \frac{\langle S_1, s\rangle \Rightarrow s'}{\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_2, s'\rangle}$$

A While nyelv természetes operációs szemantikája

Skip

$$\text{[Skip]}\ \frac{}{\langle \mathbf{skip}, s\rangle \Rightarrow s}$$

Értékadás

$$\text{[Ass]}\ \frac{}{\langle x := a, s\rangle \Rightarrow s[x \mapsto \mathcal{A}[\![a]\!]s]}$$

Szekvencia

$$\text{[Seq1]}\ \frac{\langle S_1, s\rangle \Rightarrow \langle S_1', s'\rangle}{\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_1'; S_2, s'\rangle}$$

$$\text{[Seq2]}\ \frac{\langle S_1, s\rangle \Rightarrow s'}{\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_2, s'\rangle}$$

Elágazás

$$[IfT]\ \frac{}{\langle \textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_1, s\rangle}\ \mathcal{B}[\![b]\!]s = tt$$

$$[IfF]\ \frac{}{\langle \textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_2, s\rangle}\ \mathcal{B}[\![b]\!]s = ff$$

Mivel a kifejezésekhez definiált operációs és denotációs szemantika ekvivalens, így a $\langle b, s\rangle \Rightarrow^* tt$ is írható a $\mathcal{B}[\![b]\!]s = tt$ feltétel helyett.

Ciklus

$$[While]\ \frac{}{\langle \textbf{while } b \textbf{ do } S, s\rangle \Rightarrow \langle \textbf{if } b \textbf{ then } (S; \textbf{while } b \textbf{ do } S) \textbf{ else skip}, s\rangle}$$

Értelmes ez a rekurzív ciklusszemantika? Lehetne másképp?

Elágazás

$$[IfT] \frac{}{\langle \textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_1, s\rangle} \mathcal{B}[\![b]\!]s = tt$$

$$[IfF] \frac{}{\langle \textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_2, s\rangle} \mathcal{B}[\![b]\!]s = ff$$

Mivel a kifejezésekhez definiált operációs és denotációs szemantika ekvivalens, így a $\langle b, s\rangle \Rightarrow^* tt$ is írható a $\mathcal{B}[\![b]\!]s = tt$ feltétel helyett.

Ciklus

$$[While] \frac{}{\langle \textbf{while } b \textbf{ do } S, s\rangle \Rightarrow \langle \textbf{if } b \textbf{ then } (S; \textbf{while } b \textbf{ do } S) \textbf{ else skip}, s\rangle}$$

Értelmes ez a rekurzív ciklusszemantika? Lehetne másképp?

Az S programhoz és s állapothoz tartozó levezetési lánc vagy

- egy véges konfigurációsorozat

$$c_0, c_1, c_2 \dots c_k \qquad (k \geq 0)$$

ahol

$$c_0 = \langle S, s \rangle$$

$$c_i \Rightarrow c_{i+1} \quad (0 \leq i < k)$$

és c_k termináló vagy beragadt konfiguráció

- vagy pedig egy végtelen konfigurációsorozat

$$c_0, c_1, c_2 \dots$$

ahol

$$c_0 = \langle S, s \rangle$$

$$c_i \Rightarrow c_{i+1} \quad (0 \leq i)$$

- A $c_0 \Rightarrow^i c_i$ azt jelöli, hogy létezik i lépésből álló átmenetsorozat c_0 konfigurációból c_i konfigurációba
- $c_0 \Rightarrow^* c_i$ akkor áll fenn, ha létezik véges sok lépésből álló átmenetsorozat a konfigurációk között
- Fontos: $c_0 \Rightarrow^i c_i$ és $c_0 \Rightarrow^* c_i$ csak akkor levezetési lánc, ha c_i termináló vagy zsákutca konfiguráció

Ha $\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow^k s''$ akkor
létezik egy s' állapot és k_1, k_2 természetes számok,
hogy $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow^{k_1} s'$ és $\langle S_2, s'\rangle \Rightarrow^{k_2} s''$, továbbá $k = k_1 + k_2$.

Ha $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow^k s'$ akkor $\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow^k \langle S_2, s'\rangle$

$\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow^* \langle S_2, s'\rangle$ *nem* implikálja, hogy $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow^* s'$

Ha $\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow^k s''$ akkor létezik s' állapot és k_1, k_2 természetes számok, hogy $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow^{k_1} s'$ és $\langle S_2, s'\rangle \Rightarrow^{k_2} s''$ és $k = k_1 + k_2$.

A bizonyítást indukcióval végezzük. Az átmenetreláció lezártja ($\Rightarrow^*$) induktívan definiált, így a lépésszám szerinti indukcióval tetszőleges k hosszúságú levezetési láncra beláthatóak tulajdonságok.

Minden $c \Rightarrow^k c'$ láncra ($1 \leq k$) P

- Belátjuk, hogy 1 hosszú láncokra P
- Feltesszük, hogy maximum k hosszú láncokra P, majd belátjuk, hogy k+1 hosszúakra is teljesül P

Ha $\langle S_1;S_2,s\rangle \Rightarrow^k s''$ akkor létezik s' állapot és k_1, k_2 természetes számok, hogy $\langle S_1,s\rangle \Rightarrow^{k_1} s'$ és $\langle S_2,s'\rangle \Rightarrow^{k_2} s''$ és $k = k_1 + k_2$.

Minden k-ra bizonyítjuk, a levezetési lánc hossza szerinti indukcióval.

1. Nyilvánvalóan fennáll az 1 hosszú levezetési láncokra
2. Tegyük fel, hogy az összefüggés fennáll a maximum k hosszú levezetési láncokra, majd belátjuk, hogy a $k+1$ hosszú láncokra is teljesül

$$\langle S_1;S_2,s\rangle \Rightarrow^{k+1} s'' \quad \text{azaz} \quad \langle S_1;S_2,s\rangle \Rightarrow \gamma \Rightarrow^k s''$$

1. $\langle S_1;S_2,s\rangle \Rightarrow \langle S_1';S_2,s'\rangle \Rightarrow^k s''$ mert $\langle S_1,s\rangle \Rightarrow \langle S_1',s'\rangle$ *[Seq1]*

   $\langle S_1',s'\rangle \Rightarrow^{l_1} s^*$ és $\langle S_2,s^*\rangle \Rightarrow^{l_2} s''$ ahol $l_1 + l_2 = k$ (hipotézis)

   Ekkor $k_1 = l_1 + 1$ és $k_2 = l_2$, tehát

   $$k_1 + k_2 = (l_1 + 1) + l_2 = (l_1 + l_2) + 1 = k + 1$$

2. $\langle S_1;S_2,s\rangle \Rightarrow \langle S_2,s'\rangle \Rightarrow^k s''$ ugyanis $\langle S_1,s\rangle \Rightarrow s'$ *[Seq2]*

Ha $\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow^k s''$ akkor létezik s' állapot és k_1, k_2 természetes számok, hogy $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow^{k_1} s'$ és $\langle S_2, s'\rangle \Rightarrow^{k_2} s''$ és $k = k_1 + k_2$.

Minden k-ra bizonyítjuk, a levezetési lánc hossza szerinti indukcióval.

1. Nyilvánvalóan fennáll az 1 hosszú levezetési láncokra
2. Tegyük fel, hogy az összefüggés fennáll a maximum k hosszú levezetési láncokra, majd belátjuk, hogy a $k+1$ hosszú láncokra is teljesül

$$\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow^{k+1} s'' \quad \text{azaz} \quad \langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow \gamma \Rightarrow^k s''$$

1. $$\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_1'; S_2, s'\rangle \Rightarrow^k s'' \qquad \text{mert } \langle S_1, s\rangle \Rightarrow \langle S_1', s'\rangle \ \textit{[Seq1]}$$

   $$\langle S_1', s'\rangle \Rightarrow^{l_1} s^* \text{ és } \langle S_2, s^*\rangle \Rightarrow^{l_2} s'' \text{ ahol } l_1 + l_2 = k \text{ (hipotézis)}$$

   Ekkor $k_1 = l_1 + 1$ és $k_2 = l_2$, tehát

   $$k_1 + k_2 = (l_1 + 1) + l_2 = (l_1 + l_2) + 1 = k + 1$$

2. $$\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_2, s'\rangle \Rightarrow^k s'' \qquad \text{ugyanis } \langle S_1, s\rangle \Rightarrow s' \ \textit{[Seq2]}$$

Ha $\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow^k s''$ akkor létezik s' állapot és k_1, k_2 természetes számok, hogy $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow^{k_1} s'$ és $\langle S_2, s'\rangle \Rightarrow^{k_2} s''$ és $k = k_1 + k_2$.

Minden k-ra bizonyítjuk, a levezetési lánc hossza szerinti indukcióval.

1. Nyilvánvalóan fennáll az 1 hosszú levezetési láncokra
2. Tegyük fel, hogy az összefüggés fennáll a maximum k hosszú levezetési láncokra, majd belátjuk, hogy a $k+1$ hosszú láncokra is teljesül

$$\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow^{k+1} s'' \quad \text{azaz} \quad \langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow \gamma \Rightarrow^k s''$$

1. $\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_1'; S_2, s'\rangle \Rightarrow^k s''$ mert $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow \langle S_1', s'\rangle$ *[Seq1]*

   $\langle S_1', s'\rangle \Rightarrow^{l_1} s^*$ és $\langle S_2, s^*\rangle \Rightarrow^{l_2} s''$ ahol $l_1 + l_2 = k$ (hipotézis)

   Ekkor $k_1 = l_1 + 1$ és $k_2 = l_2$, tehát

   $$k_1 + k_2 = (l_1 + 1) + l_2 = (l_1 + l_2) + 1 = k + 1$$

2. $\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_2, s'\rangle \Rightarrow^k s''$ ugyanis $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow s'$ *[Seq2]*

Ha $\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow^k s''$ akkor létezik s' állapot és k_1, k_2 természetes számok, hogy $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow^{k_1} s'$ és $\langle S_2, s'\rangle \Rightarrow^{k_2} s''$ és $k = k_1 + k_2$.

Minden k-ra bizonyítjuk, a levezetési lánc hossza szerinti indukcióval.

1. Nyilvánvalóan fennáll az 1 hosszú levezetési láncokra
2. Tegyük fel, hogy az összefüggés fennáll a maximum k hosszú levezetési láncokra, majd belátjuk, hogy a $k+1$ hosszú láncokra is teljesül

$$\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow^{k+1} s'' \quad \text{azaz} \quad \langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow \gamma \Rightarrow^k s''$$

❶ $\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_1'; S_2, s'\rangle \Rightarrow^k s''$ mert $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow \langle S_1', s'\rangle$ *[Seq1]*

$$\langle S_1', s'\rangle \Rightarrow^{l_1} s^* \text{ és } \langle S_2, s^*\rangle \Rightarrow^{l_2} s'' \text{ ahol } l_1 + l_2 = k \text{ (hipotézis)}$$

Ekkor $k_1 = l_1 + 1$ és $k_2 = l_2$, tehát

$$k_1 + k_2 = (l_1 + 1) + l_2 = (l_1 + l_2) + 1 = k + 1$$

❷ $\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_2, s'\rangle \Rightarrow^k s''$ ugyanis $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow s'$ *[Seq2]*

Ha $\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow^k s''$ akkor létezik s' állapot és k_1, k_2 természetes számok, hogy $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow^{k_1} s'$ és $\langle S_2, s'\rangle \Rightarrow^{k_2} s''$ és $k = k_1 + k_2$.

Minden k-ra bizonyítjuk, a levezetési lánc hossza szerinti indukcióval.

1. Nyilvánvalóan fennáll az 1 hosszú levezetési láncokra
2. Tegyük fel, hogy az összefüggés fennáll a maximum k hosszú levezetési láncokra, majd belátjuk, hogy a $k+1$ hosszú láncokra is teljesül

$$\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow^{k+1} s'' \quad \text{azaz} \quad \langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow \gamma \Rightarrow^k s''$$

❶ $$\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_1'; S_2, s'\rangle \Rightarrow^k s'' \qquad \text{mert } \langle S_1, s\rangle \Rightarrow \langle S_1', s'\rangle \ \textit{[Seq1]}$$

$$\langle S_1', s'\rangle \Rightarrow^{l_1} s^* \text{ és } \langle S_2, s^*\rangle \Rightarrow^{l_2} s'' \text{ ahol } l_1 + l_2 = k \text{ (hipotézis)}$$

Ekkor $k_1 = l_1 + 1$ és $k_2 = l_2$, tehát

$$k_1 + k_2 = (l_1 + 1) + l_2 = (l_1 + l_2) + 1 = k + 1$$

❷ $$\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_2, s'\rangle \Rightarrow^k s'' \qquad \text{ugyanis } \langle S_1, s\rangle \Rightarrow s' \ \textit{[Seq2]}$$

Ha $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow^k s'$, akkor $\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow^k \langle S_2, s'\rangle$

Minden k-ra belátjuk, a levezetési lánc hossza szerinti indukcióval.

1. Belátható, hogy az összefüggés fennáll az 1 hosszú levezetési láncokra
   - Vegyük észre, hogy ez a szekvencia *[Seq1]* szabálya
2. Tegyük fel, hogy az összefüggés fennáll a maximum k hosszú levezetési láncokra, majd belátjuk, hogy a $k+1$ hosszú láncokra is teljesül

   $$\langle S_1, s\rangle \Rightarrow^{k+1} s' \quad \text{azaz} \quad \langle S_1, s\rangle \Rightarrow \langle S_1', s''\rangle \Rightarrow^k s'$$

   Kompozícióval:

   - $\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_1'; S_2, s''\rangle$ *[Seq2]*
   - $\langle S_1'; S_2, s''\rangle \Rightarrow^k \langle S_2, s'\rangle$ (hipotézis)

Ha $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow^k s'$, akkor $\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow^k \langle S_2, s'\rangle$

Minden k-ra belátjuk, a levezetési lánc hossza szerinti indukcióval.

1. Belátható, hogy az összefüggés fennáll az 1 hosszú levezetési láncokra
   - Vegyük észre, hogy ez a szekvencia *[Seq1]* szabálya
2. Tegyük fel, hogy az összefüggés fennáll a maximum k hosszú levezetési láncokra, majd belátjuk, hogy a $k+1$ hosszú láncokra is teljesül

$$\langle S_1, s\rangle \Rightarrow^{k+1} s' \quad \text{azaz} \quad \langle S_1, s\rangle \Rightarrow \langle S_1', s''\rangle \Rightarrow^k s'$$

Kompozícióval:

- $\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_1'; S_2, s''\rangle$ *[Seq2]*
- $\langle S_1'; S_2, s''\rangle \Rightarrow^k \langle S_2, s'\rangle$ (hipotézis)

Ha $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow^k s'$, akkor $\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow^k \langle S_2, s'\rangle$

Minden k-ra belátjuk, a levezetési lánc hossza szerinti indukcióval.

1. Belátható, hogy az összefüggés fennáll az 1 hosszú levezetési láncokra
   - Vegyük észre, hogy ez a szekvencia *[Seq1]* szabálya
2. Tegyük fel, hogy az összefüggés fennáll a maximum k hosszú levezetési láncokra, majd belátjuk, hogy a $k+1$ hosszú láncokra is teljesül

$$\langle S_1, s\rangle \Rightarrow^{k+1} s' \quad \text{azaz} \quad \langle S_1, s\rangle \Rightarrow \langle S_1', s''\rangle \Rightarrow^k s'$$

Kompozícióval:

- $\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_1'; S_2, s''\rangle$ *[Seq2]*
- $\langle S_1'; S_2, s''\rangle \Rightarrow^k \langle S_2, s'\rangle$ (hipotézis)

Ha $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow^k s'$, akkor $\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow^k \langle S_2, s'\rangle$

Minden k-ra belátjuk, a levezetési lánc hossza szerinti indukcióval.

1. Belátható, hogy az összefüggés fennáll az 1 hosszú levezetési láncokra
   - Vegyük észre, hogy ez a szekvencia *[Seq1]* szabálya
2. Tegyük fel, hogy az összefüggés fennáll a maximum k hosszú levezetési láncokra, majd belátjuk, hogy a $k+1$ hosszú láncokra is teljesül

$$\langle S_1, s\rangle \Rightarrow^{k+1} s' \quad \text{azaz} \quad \langle S_1, s\rangle \Rightarrow \langle S_1', s''\rangle \Rightarrow^k s'$$

Kompozícióval:

- $\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_1'; S_2, s''\rangle$ *[Seq2]*
- $\langle S_1'; S_2, s''\rangle \Rightarrow^k \langle S_2, s'\rangle$ (hipotézis)

Ha $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow^k s'$, akkor $\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow^k \langle S_2, s'\rangle$

Minden k-ra belátjuk, a levezetési lánc hossza szerinti indukcióval.

1. Belátható, hogy az összefüggés fennáll az 1 hosszú levezetési láncokra
   - Vegyük észre, hogy ez a szekvencia *[Seq1]* szabálya
2. Tegyük fel, hogy az összefüggés fennáll a maximum k hosszú levezetési láncokra, majd belátjuk, hogy a $k+1$ hosszú láncokra is teljesül

$$\langle S_1, s\rangle \Rightarrow^{k+1} s' \quad \text{azaz} \quad \langle S_1, s\rangle \Rightarrow \langle S_1', s''\rangle \Rightarrow^k s'$$

Kompozícióval:

- $\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_1'; S_2, s''\rangle$ *[Seq2]*
- $\langle S_1'; S_2, s''\rangle \Rightarrow^k \langle S_2, s'\rangle$ (hipotézis)

Levezetési láncokhoz kapcsolódó fogalmak

Azt mondjuk, hogy az S program az s állapotból

- terminál

  ha létezik az $\langle S, s \rangle$ konfigurációból véges levezetési lánc

  - sikeresen terminál

    ha létezik olyan s' állapot, amelyre $\langle S, s \rangle \Rightarrow^* s'$
  - elakad (abortál)

    ha van olyan S' maradékprogram és s' állapot, amelyre $\langle S, s \rangle \Rightarrow^* \langle S', s' \rangle$ és $\langle S', s' \rangle$ egy beragadt konfiguráció
- divergál (nem terminál)

  ha létezik $\langle S, s \rangle$ konfigurációból induló végtelen levezetési lánc

  - a következőképp jelöljük: $\langle S, s \rangle \Rightarrow^* \infty$

Azt mondjuk, hogy az S program végrehajtása

- (mindig) terminál, ha minden s állapotból terminál
- (mindig) divergál, ha minden s állapotból divergál

Tegyük fel, hogy $s = [x \mapsto 41]$.

$$
\begin{array}{lr}
\langle\ \textbf{while}\ x < 42\ \textbf{do}\ x := x+1, & s\ \rangle \Rightarrow \\
\langle\ \textbf{if}\ x < 42\ \textbf{then}\ (x := x+1; \textbf{while}\ x < 42\ \textbf{do}\ x := x+1)\ \textbf{else skip}, & s\ \rangle \Rightarrow \\
\langle\ x := x+1; \textbf{while}\ x < 42\ \textbf{do}\ x := x+1, & s\ \rangle \Rightarrow \\
\langle\ \textbf{while}\ x < 42\ \textbf{do}\ x := x+1, & s[x \mapsto 42]\rangle \Rightarrow \\
\langle\ \textbf{if}\ x < 42\ \textbf{then}\ (x := x+1; \textbf{while}\ \ldots\ \textbf{do}\ \ldots)\ \textbf{else skip}, & s[x \mapsto 42]\rangle \Rightarrow \\
\langle\ \textbf{skip}, & s[x \mapsto 42]\rangle \Rightarrow \\
\quad s[x \mapsto 42] & = \\
\quad [x \mapsto 42] &
\end{array}
$$

Az egyes átmenetek helyessége a következtetési szabályokkal bizonyítható.

A harmadik átmenet például két levezetési lépéssel belátható:

$s = [x \mapsto 41]$
$LOOP = \textbf{while}\ x < 42\ \textbf{do}\ x := x+1$

$$\dfrac{\dfrac{}{\langle x := x+1, s \rangle \Rightarrow s[x \mapsto 42]}\ \textit{[Ass]}}{\left\langle\ x := x+1; LOOP, s\ \right\rangle\ \Rightarrow \left\langle\ LOOP, s[x \mapsto 42]\right\rangle}\ \textit{[Seq2]}$$

Megjegyzések

- Minden nemterimináló konfigurációhoz létezik legalább egy levezetési lánc
- A fent definiált operációs szemantika determinisztikus, tehát minden konfigurációhoz pontosan egy levezetési lánc tartozik
- A While nyelv ezen változata determinisztikus és sosem kerül zsákutcába a programok végrehajtása (tehát ha egy program terminál, akkor sikeresen terminál)

- A következő előadásokon bővítjük majd a nyelvet olyan elemekkel, amelyek eredményezhetnek beragadt vagy nemdeterminisztikus számításokat

A szemantikus ekvivalencia megadja, hogy két utasítás jelentése megegyezik-e.

S_1 és S_2 szemantikusan ekvivalensek ($S_1 \equiv S_2$) , ha minden s állapotra

- $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow^* c$ akkor és csak akkor $\langle S_2, s\rangle \Rightarrow^* c$
- $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow^* \infty$ akkor és csak akkor $\langle S_2, s\rangle \Rightarrow^* \infty$

ahol c terimnáló vagy zsákutca konfiguráció.

Következésképp, ha egy program egy adott állapotból terminál, akkor a másiknak is terminálnia kell ugyanabban a konfigurációban (akár beragadt, akár sikeres), illetve, ha az egyik nem terminál, akkor a másik sem.

A szemantikus függvény

Az utasítások jelentését egy parciális függvénnyel karakterizáljuk (v.ö. korábbi tárgyakban programfüggvény és viselkedési reláció):

$$S_{sos} : \mathrm{Stm} \to (\mathrm{State} \hookrightarrow \mathrm{State})$$

Ha a végrehajtás sikeresen terminál az s állapotból, akkor a termináló konfiguráció s' állapota adja a szemantikus függvény értékét:

$$\mathcal{S}_{sos}[\![S]\!]s = \begin{cases} s' & \text{ha } \langle S, s \rangle \Rightarrow^* s' \\ \mathit{undefined} & \text{egyébként} \end{cases}$$

Ha a számítás egy s állapotban elakad vagy divergál, akkor ott a szemantikus függvény nem definiált.

Kérdés: mi az $S_1 \equiv S_2$ és $\mathcal{S}_{sos}[\![S_1]\!] = \mathcal{S}_{sos}[\![S_2]\!]$ közötti összefüggés?

- Imperatív nyelvi elemek absztrakt szintaxisa
- Konfigurációk és átmenetek
- Strukturális operációs szemantika
- A szemantika tulajdonságai
- Levezetési láncok, terminálás
- Szemantikus ekvivalencia, szemantikus függvény

$\mathbb{K}$

A While nyelv (továbbá a foreach-jellegű ciklus) végrehajtható szemantikája elérhető a kurzus anyagai között. A small-step stílusú operációs szemantikát a $\mathbb{K}$ keretrendszerben definiáltuk, kipróbálható a 3.5 és a 3.6 verziókkal.