Egy egyszerű kifejezésnyelv

Dr. Horpácsi Dániel
ELTE Informatikai Kar
2023-2024-2

Egyszerű kifejezések formális szemantikája

— Az első lépés a programozási nyelvek szemantikájának megadása felé

Konkrét szintaxis kontra absztrakt szintaxis

- A **konkrét szintaxis** definiálja, hogyan lehet a tárgyalt programozási nyelven jól formázott **mondatok**at leírni
- Megadja a nyelvi elemek precíz, konkrét leírását; milyen más elemekből, hogyan konstruálhatunk összetett szerkezeteket
- Szintaktikus elemzőt (parsert) tudunk ezen definíció alapján készíteni a nyelvhez

```
<add_expr> ::= <add_expr> '+' <mul_expr>
```

- Az **absztrakt szintaxis** csak azt írja le, milyen nyelvi szerkezetek vannak, és azok milyen minták mentén épülnek fel
- Megadja, hogyan épülnek majd fel az absztrakt szintaktikus termek, szintaxis**fák**, de parsert nem tudnánk ez alapján készíteni

$$e ::= add(e_1, e_2) \qquad add : expr \to expr \to expr$$

Konkrét szintaxis kontra absztrakt szintaxis

Az absztrakt szitaxisból kimaradnak például

- Konkrét kulcsszavak
- Precedenciák, asszociativitási szabályok
- Zárójelek
- A szintaktikus elemzést segítő elválasztó és termináló szimbólumok
- Az olvasást (megértést) segítő szimbólumok, jelek

Vajon hogyan reprezentálhatjuk az absztrakt szintaxist?

Visszaalakítható az absztrakt konkréttá?

Emlékeztető: formális szemantikadefiníciók

- A programozási nyelvek szemantikája általában informálisan kerül leírásra, továbbá részben a nyelv fordítóprogramja definiálja
- Ezek közül egyiket sem tekintjük formális definíciónak, nem használhatóak bizonyításhoz

Megoldás: használjuk a jó öreg matematikát és logikát!

Alapvető megközelítések:

- **Operációs (műveleti)** — reláció, átmenetrendszer, levezetés

  Megadja, hogyan kell végrehajtani a programot

- **Denotációs (leíró)** — kompozicionális függvény

  A jelentést denotációk hozzárendelésével adja meg

- *Axiomatikus — Hoare-hármasok*

  Nem viselkedést, hanem tulajdonságokat vezet le

Kifejezések mint egyszerűbb nyelvi elemek

A formális szemantikadefiníciók alapvető fogalmainak tisztázására először olyan egyszerű aritmetikai és logikai kifejezések jelentését adjuk meg, amelyek a legtöbb programozási nyelvben megtalálhatóak.

- Operációs és denotációs szematikát is definiálunk, hogy felfedjük a két megközelítés közötti alapvető különbségeket
- A formális szemantika definiálásakor feltesszük, hogy a kifejezések szintaktikusan és statikus szemantikusan is helyesek, tehát biztosan van jelentésük (az állapot egy totális függvény, továbbá a kifejezések típushelyessége szintaktikusan eldönthető)

A szintaktikus kategóriák és metaváltozóik

n	$\in$	Num	(számliterálok)	(token)
x	$\in$	Var	(változó szimbólumok)	(token)
a	$\in$	Aexp	(aritmetikai kifejezések)	
b	$\in$	Bexp	(logikai kifejezések)	

Absztrakt produkciós szabályok

$$a \quad ::= \quad n \mid x \mid a_1 + a_2 \mid a_1 - a_2 \mid \text{-}a$$

$$b \quad ::= \quad \mathbf{true} \mid \mathbf{false} \mid a_1 = a_2 \mid a_1 < a_2 \mid \neg b \mid b_1 \wedge b_2$$

- Feltesszük, hogy *n* és *x* már definiáltak
- Az *AExp* és *BExp* halmazokat induktívan definiáljuk
- Konkrét vs. absztrakt: “$a_1 + a_2$” vagy $add(a_1, a_2)$?

- A kifejezésekben szerepelhetnek változószimbólumok, tehát függhetnek a környezetüktől, az állapottól, amelyben kiértékeljük őket
- Az egyszerűsítés végett csak egész változókat engedünk meg, de a módszer általánosítható (ld. statikus szemantika, típushelyesség)

- A lehetséges állapotokat függvényekkel reprezentáljuk

$$s \in \mathrm{State} = \mathrm{Var} \to \mathbb{Z}$$

- Minden ilyen függvény egy lehetséges állapotot ad meg: a változókhoz rendelt értékeket
- Jelölni listaként/leképezésként szoktuk: $[x \mapsto 1, y \mapsto 2, z \mapsto 3]$

Állapotok műveletei: lekérdezés és módosítás

Vegyük a következő állapotot: $s \in \mathrm{State} = \mathrm{Var} \to \mathbb{Z}$

- Ha hivatkozunk egy változó értékére, ki kell olvasnunk a “memóriából”

  $s[x]$ megadja az x változó értékét az s állapotban

- Amikor értéket adunk egy változónak, frissíteni kell az állapotot

  $s[y \mapsto v]$ megad egy olyan állapotot, amely megegyezik az s állapottal, de y helyen az értéke v

  Következésképp teljesül, hogy $$(s[y \mapsto v])[x] = \begin{cases} v & \text{if } x = y \\ s[x] & \text{if } x \neq y \end{cases}$$

- “Hogyan értékelnénk ki egy ideális, absztrakt gépen?”
- Valójában átmeneteket definiál megfelelő konfigurációk között
- Az átmeneteket általános következtetési szabályokkal adjuk meg (ezek tulajdonképp sémák, amelyeket tetszőleges szintaktikus elemmel példányosíthatunk)
- Az így definiált átmenetrendszert használjuk a kifejezések eredményének (vagy normálformájának) meghatározására

- A levezetések/kiértékelések sokszor szintaxis-vezéreltek

A következő pár dián strukturális operációs szematikát definiálunk kifejezéseknek, amellyel megadjuk a részletes kiértékelési lépéseket.

- Ahogy már említettük, a kiértékelés függ a környezettől — az állapotot egy függvénnyel adjuk meg
- A konfigurációknak két megengedett formája lesz: egy kifejezés és egy állapot párja, vagy pedig a kifejezés eredménye (szemantikája)
- A **heterogén** átmeneteket kétféleképp jelöljük (az indexeket a későbbiekben elhagyjuk):

Egy köztes lépés a számításban:

$$\langle a, s\rangle \Rightarrow_a \langle a', s\rangle \qquad \langle b, s\rangle \Rightarrow_b \langle b', s\rangle$$

Egy (rész)kifejezés kiértékelése végén a végkonfiguráció az érték:

$$\langle a, s\rangle \Rightarrow_a v \quad \text{ahol } v \in \mathbb{Z} \qquad \langle b, s\rangle \Rightarrow_b v \quad \text{ahol } v \in \{tt, ff\}$$

(Vegyük észre, hogy ezekben a számításokban az állapotokat még nem változtatjuk, tehát csak lemásolódnak az egyes átmenetekkel.)

Következtetési szabályok

Definiáltuk, mit értünk konfiguráció alatt, most azt kellene megadnunk, hogyan viselkedik az átmenet-reláció: mely konfigurációkból mely más konfigurációkba léphet az absztrakt gép.

- Következtetési szabályokkal (azok sémáival) adjuk meg
- A szabályok három részből állnak: premissza (előfeltétel, hipotézis), konklúzió és kiegészítő feltételek

$$\frac{\mathit{Premises}}{\mathit{Conclusion}}\ \mathit{Conditions}$$

A szabály szerint a konklúzió akkor érvényes, ha a premissza levezethető és a feltételek teljesülnek.

- A premissza nélküli szabályok az axiómák (axióma-sémák)

$$\frac{}{\mathit{Axiom}}\ \mathit{Conditions}$$

Az axiómák példányai lesznek a levezetések levelein.

Kifejezések operációs szemantikája (1)

Számliterálok

$$[Num] \ \frac{}{\langle n, s \rangle \Rightarrow \mathcal{N}[\![n]\!]}$$

Változók

$$[Var] \ \frac{}{\langle x, s \rangle \Rightarrow s[x]}$$

Bináris műveletek

$$[LHS] \ \frac{\langle a_1, s \rangle \Rightarrow \langle a_1', s \rangle}{\langle a_1 \circ a_2, s \rangle \Rightarrow \langle a_1' \circ a_2, s \rangle} \quad \circ \in \{+, -, <, =\}$$

$$[LHSLast] \ \frac{\langle a_1, s \rangle \Rightarrow i}{\langle a_1 \circ a_2, s \rangle \Rightarrow \langle n \circ a_2, s \rangle} \quad \circ \in \{+, -, <, =\}, \mathcal{N}[\![n]\!] = i \in \mathbb{Z}$$

Kifejezések operációs szemantikája (2)

Bináris műveletek

$$\text{[RHS]}\ \frac{\langle a_2, s\rangle \Rightarrow \langle a_2', s\rangle}{\langle n \circ a_2, s\rangle \Rightarrow \langle n \circ a_2', s\rangle} \quad \circ \in \{+, -, <, =\}$$

Bináris műveletek (utolsó lépés)

$$\text{[RHSLast]}\ \frac{\langle a_2, s\rangle \Rightarrow i}{\langle n \circ a_2, s\rangle \Rightarrow \mathcal{N}[\![n]\!] \circ i} \quad \circ \in \{+, -, <, =\}, i \in \mathbb{Z}$$

- Az utolsó szabályban az $\mathcal{N}[\![n]\!] \circ i$ a művelet tényleges végrehajtása az egész számok körében ($<$ és $=$ a *tt* vagy *ff* logikai értékek valamelyikét eredményezik)

Aritmetikai negáció

$$\text{[Neg]}\ \frac{\langle a, s\rangle \Rightarrow \langle a', s\rangle}{\langle \text{-}a, s\rangle \Rightarrow \langle \text{-}a', s\rangle} \qquad \text{[NegLast]}\ \frac{\langle a, s\rangle \Rightarrow i}{\langle \text{-}a, s\rangle \Rightarrow \mathbf{0} - i} \quad i \in \mathbb{Z}$$

Kifejezések operációs szemantikája (3)

Logikai literálok

$$\frac{}{\langle \mathit{true}, s\rangle \Rightarrow \mathit{tt}} \qquad \frac{}{\langle \mathit{false}, s\rangle \Rightarrow \mathit{ff}}$$

Negáció

$$\frac{\langle b, s\rangle \Rightarrow \langle b', s\rangle}{\langle \neg b, s\rangle \Rightarrow \langle \neg b', s\rangle} \qquad \frac{\langle b, s\rangle \Rightarrow l}{\langle \neg b, s\rangle \Rightarrow \neg l} \quad l \in \{\mathit{tt}, \mathit{ff}\}$$

Megjegyzés: vegyük észre, hogy az utolsó szabály konklúziójában szereplő $\neg$ szimbólum különböző jelentéssel bír az átmenet jobb és bal oldalán: a bal oldalon az absztrakt szintaxis egy szimbóluma, a jobb oldalon a logikai tagadás művelete. Hasonló megjegyzés igaz a legtöbb művelet leírására.

Az utolsó szabályt helyettesíthetnénk ezzel a kettővel:

$$\frac{\langle b, s\rangle \Rightarrow \mathit{tt}}{\langle \neg b, s\rangle \Rightarrow \mathit{ff}} \qquad \frac{\langle b, s\rangle \Rightarrow \mathit{ff}}{\langle \neg b, s\rangle \Rightarrow \mathit{tt}}$$

Kifejezések operációs szemantikája (4)

Konjunkció (LHS)

$$\frac{\langle b_1, s\rangle \Rightarrow \langle b_1', s\rangle}{\langle b_1 \wedge b_2, s\rangle \Rightarrow \langle b_1' \wedge b_2, s\rangle}$$

$$\frac{\langle b_1, s\rangle \Rightarrow tt}{\langle b_1 \wedge b_2, s\rangle \Rightarrow \langle true \wedge b_2, s\rangle} \qquad \frac{\langle b_1, s\rangle \Rightarrow ff}{\langle b_1 \wedge b_2, s\rangle \Rightarrow \langle false \wedge b_2, s\rangle}$$

Konjunkció (RHS)

$$\frac{\langle b_2, s\rangle \Rightarrow \langle b_2', s\rangle}{\langle b \wedge b_2, s\rangle \Rightarrow \langle b \wedge b_2', s\rangle} \quad b \in \{true, false\}$$

Konjunkció (utolsó átmenet)

$$\frac{\langle b_2, s\rangle \Rightarrow l}{\langle true \wedge b_2, s\rangle \Rightarrow l} \qquad \frac{\langle b_2, s\rangle \Rightarrow l}{\langle false \wedge b_2, s\rangle \Rightarrow ff} \quad l \in \{tt, ff\}$$

A számliterálokról

- A formális szemantikában éles különbséget teszünk a számliterálok és azok jelentése között.
- A számokat sokféle formában le lehet írni (pl. különböző számrendszerekben), de a jelentésük minden esetben egy egész szám. Ezt a jelentést az $\mathcal{N}$ függvény adja meg, amelyről feltesszük, hogy definiált.
- Például, ha a számliterálokat decimális számrendszerben írjuk, akkor a leképezés triviális: $\mathcal{N}[\![n]\!] = \mathbf{n}$ minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén.
- A szemantikus számokat félkövéren szedjük, a nem félkövér számok szintaktikus elemek.
- Az $\mathcal{N}[\![n]\!]$ formulában használt speciális zárójeleket gyakran használják szemantika definíciókban; ami a zárójelek között van, azt szintaktikus egységként (vagy annak mintájaként) kell kezelni.

Bizonyos irodalmakban és a gyakorlatban kiterjesztik a szintaxist a szemantikus értékekkel, ezzel egyszerűsítve a leírást.

Számoljuk ki az "$(y+5)+z$" kifejezés értékét abban az állapotban, ahol y értéke 12 és z értéke 34!

A lineáris levezetés (konfigurációsorozat) a következőképp néz ki:

$$
\begin{array}{lll}
\langle\ (y+5)+z, & [y \mapsto 12, z \mapsto 34]\ \rangle & \Rightarrow \\
\langle\ (12+5)+z, & [y \mapsto 12, z \mapsto 34]\ \rangle & \Rightarrow \\
\langle\ 17+z, & [y \mapsto 12, z \mapsto 34]\ \rangle & \Rightarrow \\
\quad \mathbf{51} & & \checkmark
\end{array}
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\langle y, s\rangle \Rightarrow \mathbf{12}}\textit{[Var]}}{\langle y+5, s\rangle \Rightarrow \langle 12+5, s\rangle}\textit{[LHSLast]}}{\langle (y+5)+z, s\rangle \Rightarrow \langle (12+5)+z, s\rangle}\textit{[LHS]}
$$

Érdekesség

Ha tranzitívvá tesszük az átmenetrelációt,

$$\frac{c_1 \Rightarrow c_2 \qquad c_2 \Rightarrow c_3}{c_1 \Rightarrow c_3}$$

a small-step relációból big-step-szerű lesz:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\langle y, s\rangle \Rightarrow \mathbf{12}}{\langle y+5, s\rangle \Rightarrow \langle 12+5, s\rangle} \qquad \dfrac{\langle 5, s\rangle \Rightarrow \mathbf{5}}{\langle 12+5, s\rangle \Rightarrow \mathbf{12+5}}}{\langle y+5, s\rangle \Rightarrow \mathbf{17}}}{\langle (y+5)+z, s\rangle \Rightarrow \langle 17+z, s\rangle} \qquad \dfrac{\langle z, s\rangle \Rightarrow \mathbf{34}}{\langle 17+z, s\rangle \Rightarrow \mathbf{17+34}}}{\langle (y+5)+z, s\rangle \Rightarrow \mathbf{51}}$$

Denotációs szemantika

- Csakúgy, mint eddig, az absztrakt szintaxison definiáljuk
- Matematikai objektumokat (pl. számokat, n-eseket, függvényeket) rendelünk a nyelvi szerkezetekhez
- Az ún. szemantikus függvény egy rekurzív definíció az induktívan definiált szintaxis felett (vö. definitional interpreter)

- A szemantikus függvény minden lehetséges szintaktikus elem értékét megadja (vö. mintaillesztés)
- Általában totálisak és kompozicionálisak a definíciók

Szemantikus tartományok (semantic domains)

A szintaktikus szerkezeteket szemantikus objektumokra képezzük le.

Az értékhalmazaink

$$\text{Integer} = \mathbb{Z}$$

$$\text{Boolean} = \{\mathit{tt}, \mathit{ff}\}$$ *(igazságértékek halmaza)*

- A jelentést úgy adjuk meg, hogy definiáljuk a kifejezések értékét az állapot függvényében
- Az aritmetikai kifejezések értéke egy egész szám, a logikai kifejezések értéke egy igazságérték
- Vegyük észre, hogy a szemantikus értékek (tt, ff) itt is megkülönböztetésre kerültek a szintaktikus elemektől (**true** és **false**)

Szemantikus függvények

$$\mathcal{A} : \mathrm{Aexp} \to (\mathrm{State} \to \mathrm{Integer})$$
$$\mathcal{B} : \mathrm{Bexp} \to (\mathrm{State} \to \mathrm{Boolean})$$

- Minden szintaktikus kategóriához (nemterminálishoz) készítünk egy szemantikus függvényt
- A szintaktikus kategória szabályaihoz függvényklózokat írunk fel
- A függvényeket a szintaktikus objektum és az állapot függvényében adjuk meg: a szemantikus függvény egy függvényt határoz meg, amely az állapotokhoz értékeket rendel

A szemantikus függvényt definiáljuk az adott szintaktikus kategória minden bázis elemére és összetett elemére (ügyelve arra, hogy a definíciók kompozicionálisak legyenek).

Szemantikus megfeleltetések (aritmetikai kifejezések)

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}[\![n]\!]s &= \mathcal{N}[\![n]\!] \\
\mathcal{A}[\![x]\!]s &= s[x] \\
\mathcal{A}[\![a_1 + a_2]\!]s &= \mathcal{A}[\![a_1]\!]s + \mathcal{A}[\![a_2]\!]s \\
\mathcal{A}[\![a_1 - a_2]\!]s &= \mathcal{A}[\![a_1]\!]s - \mathcal{A}[\![a_2]\!]s \\
\mathcal{A}[\![\text{-}a]\!]s &= \mathbf{0} - \mathcal{A}[\![a]\!]s
\end{aligned}$$

Az “$a_1 + a_2$” jelentése csak a részkifejezéseitől (a_1 és a_2) függ, ahogy a többi klóz esetében is, tehát a definíció kompozicionális.

Kifejezések denotációs szemantikája (2)

Szemantikus megfeleltetések (logikai kifejezések)

$$\mathcal{B}[\![true]\!]s = tt$$

$$\mathcal{B}[\![false]\!]s = ff$$

$$\mathcal{B}[\![a_1 = a_2]\!]s = \begin{cases} tt & \text{ha } \mathcal{A}[\![a_1]\!]s = \mathcal{A}[\![a_2]\!]s \\ ff & \text{ha } \mathcal{A}[\![a_1]\!]s \neq \mathcal{A}[\![a_2]\!]s \end{cases}$$

$$\mathcal{B}[\![a_1 < a_2]\!]s = \begin{cases} tt & \text{ha } \mathcal{A}[\![a_1]\!]s < \mathcal{A}[\![a_2]\!]s \\ ff & \text{ha } \mathcal{A}[\![a_1]\!]s \geq \mathcal{A}[\![a_2]\!]s \end{cases}$$

$$\mathcal{B}[\![\neg b]\!]s = \begin{cases} tt & \text{ha } \mathcal{B}[\![b]\!]s = ff \\ ff & \text{ha } \mathcal{B}[\![b]\!]s = tt \end{cases}$$

$$\mathcal{B}[\![b_1 \wedge b_2]\!]s = \begin{cases} tt & \text{ha } \mathcal{B}[\![b_1]\!]s = tt \quad \text{és} \quad \mathcal{B}[\![b_2]\!]s = tt \\ ff & \text{ha } \mathcal{B}[\![b_1]\!]s = ff \quad \text{vagy} \quad \mathcal{B}[\![b_2]\!]s = ff \end{cases}$$

Számítsuk ki a denotációs szemantikában ugyanannak a kifejezésnek az értékét, amelynek az operációsban már kiszámoltuk!

Legyen az s állapot $[y \mapsto 12, z \mapsto 34]$, ekkor

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}[\![(y+5)+z]\!]s &= \mathcal{A}[\![y+5]\!]s + \mathcal{A}[\![z]\!]s \\
&= \mathcal{A}[\![y+5]\!]s + \mathbf{34} \\
&= (\mathcal{A}[\![y]\!]s + \mathcal{A}[\![5]\!]s) + \mathbf{34} \\
&= (\mathbf{12} + \mathcal{N}[\![5]\!]) + \mathbf{34} \\
&= (\mathbf{12} + \mathbf{5}) + \mathbf{34} \\
&= \mathbf{51}
\end{aligned}$$

A megadott denotációs szemantika kompozicionálisan definiált:

- Minden szintaktikus konstrukcióhoz megadtunk egy szemantikus függvényklózt
- Az összetett kifejezések jelentése a közvetlen részkifejezések jelentésének függvényében került megadásra

- Érdemes megfigyelni az aritmetikai negációt, amelyet tipikusan rosszul szoktak definiálni (pl. $\mathcal{A}[\![\text{-}a]\!]s = \mathcal{A}[\![0 - a]\!]s$)

- A kompozicionalitásnak nagy jelentősége lesz a későbbiekben, hiszen szükséges ahhoz, hogy strukturális indukciós bizonyításokat végezhessünk a szemantikára vonatkozóan

Továbbá: indukcióval bizonyítható, hogy

- A megadott szemantikadefiníciók teljesek: minden lehetséges kifejezésnek (egyértelműen) megadtuk a jelentését
- A strukturális operációs szemantika egy determinisztikus és termináló átmenetrendszer

- A kifejezésekre definiált operációs és a denotációs szemantika ekvivalens

A denotációs szemantika esetében a kifejezés szerkezete szerint, az operációs esetén általában a levezetés hossza vagy alakja szerinti indukciót végzünk.

Állítás: a kifejezések kiértékelése determinisztikus.

$$\text{Ha } \langle a, s\rangle \Rightarrow \gamma \text{ és } \langle a, s\rangle \Rightarrow \gamma' \text{ akkor } \gamma = \gamma'$$

(γ lehet köztes konfiguráció vagy érték is.)

Nem a kifejezések szerkezete szerinti indukcióval látjuk be, hanem az átmenetreláció szerkezete szerinti indukcióval.

- Mikor egyenlő két konfiguráció? És két állapotfüggvény?
- Erősebb vagy gyengébb állítás, hogy a kiértékelés konfluens?
- Mi a helyzet, ha a szemantikák ekvivalenciáját már beláttuk?

Alakítsuk át a kifejezést az összeadás egységelemének elhagyásával:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}[\![n]\!] &= n \\
\mathcal{O}[\![x]\!] &= x \\
\mathcal{O}[\![0 + a_2]\!] &= \mathcal{O}[\![a_2]\!] \\
\mathcal{O}[\![a_1 + a_2]\!] &= \mathcal{O}[\![a_1]\!] + \mathcal{O}[\![a_2]\!] \\
\mathcal{O}[\![a_1 - a_2]\!] &= \mathcal{O}[\![a_1]\!] - \mathcal{O}[\![a_2]\!] \\
\mathcal{O}[\![-a]\!] &= -\mathcal{O}[\![a]\!]
\end{aligned}
$$

Az optimalizáció helyes, ha nem változatja meg a kifejezések jelentését:

$$\forall a \in \mathrm{Aexp} : \mathcal{A}[\![a]\!] = \mathcal{A}[\![\mathcal{O}[\![a]\!]]\!]$$

Bizonyítás a kifejezés szerkezete szerinti indukcióval!

...Függvények egyenlősége?

- Konkrét szintaxis kontra absztrakt szintaxis
- Kifejezések absztrakt szintaxisa, metaváltozók
- Strukturális operációs szemantika
- Denotációs szemantika
- A szemantikadefiníciók tulajdonságai

Szóba fog kerülni például:

- Definíció: kifejezésnyelv megadása Coq-ban (szintaxis + mindkét fajta szemantika)
- Bizonyítás: konkrét kifejezések kiértékelése
- Bizonyítás: szemantikák determinisztikussága
- Bizonyítás: szemantikák ekvivalenciája
- Definíciók: szabad és kötött változók, zárt kifejezések
- Bizonyítás: kifejezés értéke csak az előforduló változóktól függ
- Definíció: kifejezések optimalizálása
- Bizonyítás: optimalizáció helyessége

$\mathbb{K}$

Egy egyszerű kifejezéseket leíró nyelv szemantikája elérhető a kurzus anyagai között, amely segít megérteni a konfiguráció és az állapot fogalmát. (A példában a szintaktikus és a szemantikus számok nincsenek különválasztva.) A small-step stílusú operációs szemantikát a $\mathbb{K}$ keretrendszerben definiáltuk, kipróbálható a 3.5 és a 3.6 verziókkal.