Természetes szemantika

Dr. Horpácsi Dániel
ELTE Informatikai Kar
2023-2024-2

Az előadás témája

Természetes (big-step) műveleti szemantika

Emlékeztető: formális szemantikadefiníciók

- A programozási nyelvek szemantikája általában informálisan kerül leírásra, továbbá praktikusan a nyelv fordítóprogramja definiálja
- Ezek közül egyiket sem tekintjük formális definíciónak, nem használhatóak bizonyításhoz

Megoldás: használjuk a jó öreg matematikát és logikát!

Két alapvető megközelítés:

- Operációs (műveleti) — átmenetrelációval
  - Strukturális

    Minden lépés modellezése
  - **Természetes**

    A kezdő- és végállapotok közötti reláció felállítása
- Denotációs (leíró) — matematikai objektumokkal

  A jelentést denotációk hozzárendelésével adja meg

- Az előző előadáson definiáltuk az alapvető imperatív konstrukciók strukturális operációs szemantikáját, amelyben minden végrehajtási lépést modelleztünk

- Most definiálunk egy másik jellegű operációs szemantikát, amely a kezdő- és végkonfigurációk közötti átmenetrelációt definiálja
- A módszer hasonló (konfigurációk relációjaként adjuk meg a jelentést), az absztrakciós szint különbözik (az átmenetreláció mindig egyetlen lépéssel megadja a végállapotot)
- Az absztrakt szintaxis és a konfigurációk nem változnak, de az átmenetrelációt másképp adjuk meg

Emlékeztető: az absztrakt szintaxis

Szintaktikus kategóriák és azok definíciói, amelyek a nyelv absztrakt szintaxisfáit reprezentálják

Szintaktikus kategóriák

n	$\in$	Num	(számliterálok)
x	$\in$	Var	(változószimbólumok)
a	$\in$	Aexp	(aritmetikai kifejezések)
b	$\in$	Bexp	(logikai kifejezések)
S	$\in$	Stm	(utasítások)

Produkciós szabályok

$$a \ ::= \ n \mid x \mid a_1 + a_2 \mid a_1 - a_2 \mid \text{-}a$$

$$b \ ::= \ \textbf{true} \mid \textbf{false} \mid a_1 = a_2 \mid a_1 < a_2 \mid \neg b \mid b_1 \wedge b_2$$

$$S \ ::= \ \textbf{skip} \mid x := a \mid S_1 ; S_2 \mid \textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2 \mid \textbf{while } b \textbf{ do } S$$

- A kifejezések és utasítások szemantikáját az állapot függvényében definiáljuk

$$s \in \mathrm{State} = \mathrm{Var} \to \mathbb{Z}$$

- Listaként formázzuk, pl.: $[x \mapsto 1, y \mapsto 2, z \mapsto 3]$
- Ha hivatkozunk egy változó értékére, ki kell olvasnunk a "memóriából"

$s[x]$ megadja az x változó értékét az s állapotban

- Amikor értéket adunk egy változónak, frissíteni kell az állapotot

$s[y \mapsto v]$ megad egy olyan állapotot, amely megegyezik az s állapottal, de y helyen az értéke v

A természetes szemantika műveleti úton definiálja a kezdő- és végkonfigurációk közötti relációt

- Itt is konfigurációkat és közöttük lévő relációt definiálunk
- Az átmenetrelációt következtetési szabályokkal határozzuk meg
- A szabályokban megjelenő konfiguráció-sémák tetszőleges szintaktikus elemmel példányosíthatóak

- A small-step szemantikával ellentétben itt a kikövetkeztetett átmenet mindig megadja a végállapotot, tehát csak egyetlen átmenetet kell bizonyítani (de azt nehezebb)

- A végrehajtás állapotai (konfigurációk) két típusból kerülnek ki: vagy egy utasítás és egy állapot párja, vagy pedig egy állapot (a végállapot)
- A konfigurációátmeneteket a következőképp jelöljük:

  Az S utasítás végrehajtása az s' állapotot eredményezi:

$$\langle S, s\rangle \to s' \qquad\qquad s, s' \in \mathrm{State}$$

Vegyük észre, hogy a stukturális operációs szemantikával ellentétben itt nincsenek köztes átmenetek, továbbá beragadt konfigurációba sem juthat a rendszer (a beragadt konfiguráció itt tulajdonképp a kiértékelhetetlen program).

Skip és értékadás hasonlóan a small-step definícióhoz:

Skip

$$\frac{}{\langle \mathbf{skip}, s\rangle \to s}$$

Értékadás

$$\frac{}{\langle x := a, s\rangle \to s[x \mapsto \mathcal{A}[\![a]\!]s]}$$

A szekvencia big-step esetben egyetlen szabállyal megadható:

Szekvencia

$$\frac{\langle S_1, s\rangle \to s' \qquad \langle S_2, s'\rangle \to s''}{\langle S_1; S_2, s\rangle \to s''}$$

Elágazás

$$\frac{\langle S_1, s\rangle \to s'}{\langle \textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2, s\rangle \to s'} \; \mathcal{B}[\![b]\!]s = tt$$

$$\frac{\langle S_2, s\rangle \to s'}{\langle \textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2, s\rangle \to s'} \; \mathcal{B}[\![b]\!]s = ff$$

Ciklus

$$\frac{\langle S, s\rangle \to s' \qquad \langle \textbf{while } b \textbf{ do } S, s'\rangle \to s''}{\langle \textbf{while } b \textbf{ do } S, s\rangle \to s''} \; \mathcal{B}[\![b]\!]s = tt$$

$$\frac{}{\langle \textbf{while } b \textbf{ do } S, s\rangle \to s} \; \mathcal{B}[\![b]\!]s = ff$$

Az S program az s állapotból indítva

- terminál
  ha létezik s' állapot, amelyre $\langle S, s \rangle \to s'$
- divergál
  ha nem létezik s' állapot, amelyre $\langle S, s \rangle \to s'$

Azt mondjuk, hogy az S utasítás

- mindig terminál, ha minden s állapotból indítva terminál
- mindig divergál, ha minden s állapotból indítva divergál

$$\begin{array}{ll}
\textbf{while } \neg(x = 1) & \textbf{do } (y := y * x \,;\; x := x - 1) \\
\textbf{while } \neg(x < 1) & \textbf{do } (y := y * x \,;\; x := x - 1) \\
\textbf{while } \neg(x < 1 \wedge 1 < x) & \textbf{do } (y := y * x \,;\; x := x - 1)
\end{array}$$

- Ahogy korábban is, a fenti következtetési szabályokkal definiáltuk a lehetséges konfigurációátmeneteket
- A small-step szemantikával ellentétben itt nem “ágak” a levezetések, hanem általában fák (szekvencia, ciklus)

- A fa **gyökerében** a levezetni kívánt átmenet szerepel, míg a **levelek**et mindig axiómák adják
- A **köztes csúcsok** levezetési szabályok konklúziói úgy, hogy közvetlen gyerekeik a premisszáik
- A levezetési fa helyességéhez a szabályok feltételeinek teljesülése is szükséges

Hogyan építsük fel az S programhoz és s állapothoz tartozó levezetési fát?

A fát a gyökerétől építjük, alulról felfelé; olyan szabályt (vagy axiómát) keresünk, amelyben a konklúzió baloldala illeszkedik az $\langle S, s \rangle$ konfigurációra:

- Ha van ilyen axióma és a feltételei teljesülnek, akkor a végállapotot meghatározza a konklúzió jobb oldala, a fa (részfa) elkészült.
- Ha van ilyen következtetési szabály, akkor a premisszáihoz is készítünk levezetési fákat; ha sikerül, továbbá a feltételek is teljesülnek, akkor a végállapotot meghatározza a konklúzió jobb oldala és a fa (részfa) építése kész.

Példa levezetés

Vegyük az előző előadáson látott példát:

$\textbf{while}\ x < 42\ \textbf{do}\ x := x+1$

A végrehajtás az $s = [x \mapsto 41]$ állapotból indul.

$$\frac{\langle x := x+1, s\rangle \to s' \qquad \langle\ \textbf{while}\ x < 42\ \textbf{do}\ x := x+1, s'\ \rangle \to s'}{\langle\ \textbf{while}\ x < 42\ \textbf{do}\ x := x+1, s\ \rangle \to s'}$$

Nyilvánvalóan, $s' = s[x \mapsto 42]$.

Látható, hogy a small-step szemantikához képest sokkal tömörebb, absztraktabb a jelentés levezetése. Átgondolandó, hogy mely pontokon absztraktabb a leírás.

A természetes szemantika tulajdonságai

- Belátható, hogy a fent definiált természetes szemantika determinisztikus
- Érdemes észrevenni, hogy a ciklusszemantika még mindig rekurzív (vö. denotációs szemantika)
- A szemantikára vonatkozó tulajdonságok a levezetési fák alakja szerinti indukcióval bizonyíthatóak:
  - Bizonyítsuk, hogy a tulajdonság minden egyszerű fára (axiómára) tejesül
  - Lássuk be, hogy minden összetett fára teljesül: minden szabály esetében tegyük fel, hogy a részfa premisszáira teljesül (indukciós hipotézis), majd lássuk be a konklúzióra (feltéve, hogy a feltételek is teljesülnek)

Ez lényegében a $\rightarrow$ reláció levezetése szerinti indukció.

A szemantikus ekvivalencia megadja, hogy két utasításnak megegyezik-e a hatása.

S_1 és S_2 szemantikusan ekvivalensek ($S_1 \equiv S_2$) ha minden s és s' állapotra

- $\langle S_1, s \rangle \rightarrow s'$ akkor és csak akkor, ha $\langle S_2, s \rangle \rightarrow s'$

Belátható, hogy a ciklus ekvivalens a kicsomagoltjával:

$$\textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S \quad \equiv \quad \textbf{if}\ b\ \textbf{then}\ \big(S; \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S\big)\ \textbf{else}\ \textbf{skip}$$

$$\langle \textbf{while } b \textbf{ do } S, s\rangle \to s'' \implies \langle \textbf{if } b \textbf{ then } (S; \textbf{while } b \textbf{ do } S) \textbf{ else } \textbf{skip}, s\rangle \to s''$$

$$\langle \textbf{while } b \textbf{ do } S, s\rangle \to s'' \implies \langle \textbf{if } b \textbf{ then } (S; \textbf{while } b \textbf{ do } S) \textbf{ else skip}, s\rangle \to s''$$

- $$\frac{\langle S, s\rangle \to s' \qquad \langle \textbf{while } b \textbf{ do } S, s'\rangle \to s''}{\langle \textbf{while } b \textbf{ do } S, s\rangle \to s''} \; \mathcal{B}[\![b]\!]s = tt$$

$$\langle \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S, s\rangle \to s'' \implies \langle \textbf{if}\ b\ \textbf{then}\ (S; \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S)\ \textbf{else skip}, s\rangle \to s''$$

- $$\frac{\langle S, s\rangle \to s' \qquad \langle \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S, s'\rangle \to s''}{\langle \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S, s\rangle \to s''}\ \mathcal{B}[\![b]\!]s = tt$$

$$\frac{\dfrac{\langle S, s\rangle \to s' \qquad \langle \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S, s'\rangle \to s''}{\langle S; \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S, s\rangle \to s''}\ \text{(szekvencia)}}{\langle \textbf{if}\ b\ \textbf{then}\ (S; \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S)\ \textbf{else skip}, s\rangle \to s''}\ \mathcal{B}[\![b]\!]s = tt$$

$$\langle \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S, s\rangle \to s'' \implies \langle \textbf{if}\ b\ \textbf{then}\ (S; \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S)\ \textbf{else skip}, s\rangle \to s''$$

- $$\frac{\langle S, s\rangle \to s' \qquad \langle \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S, s'\rangle \to s''}{\langle \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S, s\rangle \to s''}\ \mathcal{B}[\![b]\!]s = tt$$

$$\frac{\dfrac{\langle S, s\rangle \to s' \qquad \langle \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S, s'\rangle \to s''}{\langle S; \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S, s\rangle \to s''}\ \text{(szekvencia)}}{\langle \textbf{if}\ b\ \textbf{then}\ (S; \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S)\ \textbf{else skip}, s\rangle \to s''}\ \mathcal{B}[\![b]\!]s = tt$$

- $$\frac{}{\langle \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S, s\rangle \to s''}\ \mathcal{B}[\![b]\!]s = ff, s = s''$$

$$\langle \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S, s\rangle \to s'' \implies \langle \textbf{if}\ b\ \textbf{then}\ (S; \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S)\ \textbf{else}\ \textbf{skip}, s\rangle \to s''$$

- $$\frac{\langle S, s\rangle \to s' \qquad \langle \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S, s'\rangle \to s''}{\langle \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S, s\rangle \to s''}\ \mathcal{B}[\![b]\!]s = tt$$

$$\frac{\dfrac{\langle S, s\rangle \to s' \qquad \langle \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S, s'\rangle \to s''}{\langle S; \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S, s\rangle \to s''}\ \text{(szekvencia)}}{\langle \textbf{if}\ b\ \textbf{then}\ (S; \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S)\ \textbf{else}\ \textbf{skip}, s\rangle \to s''}\ \mathcal{B}[\![b]\!]s = tt$$

- $$\frac{}{\langle \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S, s\rangle \to s''}\ \mathcal{B}[\![b]\!]s = ff, s = s''$$

$$\frac{\dfrac{}{\langle \textbf{skip}, s\rangle \to s''}\ s = s''}{\langle \textbf{if}\ b\ \textbf{then}\ (S; \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S)\ \textbf{else}\ \textbf{skip}, s\rangle \to s''}\ \mathcal{B}[\![b]\!]s = ff$$

$$\langle \textbf{if}\ b\ \textbf{then}\ (S; \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S)\ \textbf{else skip}, s\rangle \to s'' \implies \langle \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S, s\rangle \to s''$$

$$\langle \textbf{if } b \textbf{ then } (S; \textbf{while } b \textbf{ do } S) \textbf{ else skip}, s\rangle \to s'' \implies \langle \textbf{while } b \textbf{ do } S, s\rangle \to s''$$

- $$\dfrac{\dfrac{\langle S, s\rangle \to s' \qquad \langle \textbf{while } b \textbf{ do } S, s'\rangle \to s''}{\langle S; \textbf{while } b \textbf{ do } S, s\rangle \to s''}\ \text{(szekvencia)}}{\langle \textbf{if } b \textbf{ then } (S; \textbf{while } b \textbf{ do } S) \textbf{ else skip}, s\rangle \to s''}\ \mathcal{B}[\![b]\!]s = tt$$

$$\langle \textbf{if } b \textbf{ then } (S; \textbf{while } b \textbf{ do } S) \textbf{ else skip}, s\rangle \to s'' \implies \langle \textbf{while } b \textbf{ do } S, s\rangle \to s''$$

- $$\cfrac{\cfrac{\langle S, s\rangle \to s' \qquad \langle \textbf{while } b \textbf{ do } S, s'\rangle \to s''}{\langle S; \textbf{while } b \textbf{ do } S, s\rangle \to s''}\ \text{(szekvencia)}}{\langle \textbf{if } b \textbf{ then } (S; \textbf{while } b \textbf{ do } S) \textbf{ else skip}, s\rangle \to s''}\ \mathcal{B}[\![b]\!]s = tt$$

$$\frac{\langle S, s\rangle \to s' \qquad \langle \textbf{while } b \textbf{ do } S, s'\rangle \to s''}{\langle \textbf{while } b \textbf{ do } S, s\rangle \to s''}\ \mathcal{B}[\![b]\!]s = tt$$

$$\langle \textbf{if } b \textbf{ then } (S; \textbf{while } b \textbf{ do } S) \textbf{ else skip}, s\rangle \to s'' \implies \langle \textbf{while } b \textbf{ do } S, s\rangle \to s''$$

- $$\cfrac{\cfrac{\langle S, s\rangle \to s' \qquad \langle \textbf{while } b \textbf{ do } S, s'\rangle \to s''}{\langle S; \textbf{while } b \textbf{ do } S, s\rangle \to s''}\ \text{(szekvencia)}}{\langle \textbf{if } b \textbf{ then } (S; \textbf{while } b \textbf{ do } S) \textbf{ else skip}, s\rangle \to s''}\ \mathcal{B}[\![b]\!]s = tt$$

$$\frac{\langle S, s\rangle \to s' \qquad \langle \textbf{while } b \textbf{ do } S, s'\rangle \to s''}{\langle \textbf{while } b \textbf{ do } S, s\rangle \to s''}\ \mathcal{B}[\![b]\!]s = tt$$

- $$\cfrac{\cfrac{}{\langle \textbf{skip}, s\rangle \to s''}\ s = s''}{\langle \textbf{if } b \textbf{ then } (S; \textbf{while } b \textbf{ do } S) \textbf{ else skip}, s\rangle \to s''}\ \mathcal{B}[\![b]\!]s = ff, s = s''$$

$$\langle \textbf{if } b \textbf{ then } (S; \textbf{while } b \textbf{ do } S) \textbf{ else skip}, s\rangle \to s'' \implies \langle \textbf{while } b \textbf{ do } S, s\rangle \to s''$$

- $$\cfrac{\cfrac{\langle S, s\rangle \to s' \qquad \langle \textbf{while } b \textbf{ do } S, s'\rangle \to s''}{\langle S; \textbf{while } b \textbf{ do } S, s\rangle \to s''}\ \text{(szekvencia)}}{\langle \textbf{if } b \textbf{ then } (S; \textbf{while } b \textbf{ do } S) \textbf{ else skip}, s\rangle \to s''}\ \mathcal{B}[\![b]\!]s = tt$$

$$\frac{\langle S, s\rangle \to s' \qquad \langle \textbf{while } b \textbf{ do } S, s'\rangle \to s''}{\langle \textbf{while } b \textbf{ do } S, s\rangle \to s''}\ \mathcal{B}[\![b]\!]s = tt$$

- $$\cfrac{\cfrac{}{\langle \textbf{skip}, s\rangle \to s''}\ s = s''}{\langle \textbf{if } b \textbf{ then } (S; \textbf{while } b \textbf{ do } S) \textbf{ else skip}, s\rangle \to s''}\ \mathcal{B}[\![b]\!]s = ff, s = s''$$

$$\frac{}{\langle \textbf{while } b \textbf{ do } S, s\rangle \to s''}\ \mathcal{B}[\![b]\!]s = ff, s = s''$$

A szemantikus függvény

Az utasítások jelentését egy parciális függvény karakterizálja:

$$\mathcal{S}_{ns} : \mathrm{Stm} \to (\mathrm{State} \hookrightarrow \mathrm{State})$$

Tehát minden egyes utasításhoz van egy ilyen parciális függvény:

$$\mathcal{S}_{ns}[\![S]\!] \in \mathrm{State} \hookrightarrow \mathrm{State}$$

Ha a végrehajtás terminál az s állapotból, akkor a levezetett s' állapot adja meg az utasítás “eredményét”.

$$\mathcal{S}_{ns}[\![S]\!]s = \begin{cases} s' & \text{ha } \langle S, s\rangle \to s' \\ \textit{undefined} & \text{egyébként} \end{cases}$$

Ha a kiértékelés végtelen ciklust/rekurziót eredményez, akkor a szemantika “nem definiált”.

- Az elmúlt két előadáson definiáltunk strukturális és természetes szemantikát is a While nyelvhez

- A szekvencia, elágazás és ciklus leírásakor alapvetően különböző megközelítést alkalmaz a small-step és a big-step leírás
- Mindazonáltal belátható, hogy a két szemantika ekvivalens, azaz

Minden S utasításra: $\mathcal{S}_{sos}[\![S]\!] = \mathcal{S}_{ns}[\![S]\!]$.

Emlékeztetőül: $\mathcal{S}_{sos}[\![S]\!], \mathcal{S}_{ns}[\![S]\!] \in \mathrm{State} \hookrightarrow \mathrm{State}$.

Az ekvivalencia állítása, azaz $\forall S : \mathcal{S}_{sos}[\![S]\!] = \mathcal{S}_{ns}[\![S]\!]$, átfogalmazható a következőképp:

- Ha az S utasítás végrehajtása terminál az egyik szemantikában, terminálnia kell a másikban is, ugyanazzal a végállapottal
- Ha az S utasítás végrehajtása az egyik szemantikában divergál, akkor a másikban is divergálnia kell

Megjegyzés: az eddig tárgyalt szemantikák determinisztikusak voltak; továbbá zsákutca konfiguráció nem jelent meg a small-step szemantikában sem, így a terminálás alatt most sikeres terminálást értünk.

Az ekvivalencia a következőkkel belátható:

- Minden S utasításra, továbbá s és s' állapotra:

  $$\langle S, s\rangle \Rightarrow^* s' \text{ implikálja, hogy } \langle S, s\rangle \rightarrow s'$$

  Ha a végrehajtás terminál a stukturális szemantikában, akkor a természetes szemantikában is, ugyanazzal a végállapottal.

- Minden S utasításra, továbbá s és s' állapotra:

  $$\langle S, s\rangle \rightarrow s' \text{ implikálja, hogy } \langle S, s\rangle \Rightarrow^* s'$$

  Tehát ha a végrehajtás terminál a természetes szemantikában, akkor a strukturális szemantikában is, ugyanazzal a végállapottal.

Következésképp ugyanazon pontokon, ugyanúgy definiált a szemantika. Azaz, $\mathcal{S}_{sos}$ és $\mathcal{S}_{ns}$ mint szemantikus függvények minden pontban megegyeznek, ekvivalensek.

Ha $\langle S, s \rangle \Rightarrow^* s'$ akkor $\langle S, s \rangle \rightarrow s'$

Bizonyítás a levezetés hossza szerinti indukcióval:

1. 1 hosszú levezetésre: $\langle S, s \rangle \Rightarrow s' \implies \langle S, s \rangle \rightarrow s'$
   Esetszétválasztás a szabály szerint: skip vagy értékadás, a következmény a definíciókból triviálisan adódik.

Bizonyítás a levezetés hossza szerinti indukcióval:

1. 1 hosszú levezetésre: $\langle S, s\rangle \Rightarrow s' \implies \langle S, s\rangle \to s'$
   Esetszétválasztás a szabály szerint: skip vagy értékadás, a következmény a definíciókból triviálisan adódik.
2. Feltesszük, hogy $\langle S, s\rangle \Rightarrow^k s' \implies \langle S, s\rangle \to s'$ és megmutatjuk, hogy $\langle S, s\rangle \Rightarrow^{k+1} s' \implies \langle S, s\rangle \to s'$

Ha $\langle S, s \rangle \Rightarrow^* s'$ akkor $\langle S, s \rangle \to s'$

Bizonyítás a levezetés hossza szerinti indukcióval:

1. 1 hosszú levezetésre: $\langle S, s \rangle \Rightarrow s' \implies \langle S, s \rangle \to s'$
   Esetszétválasztás a szabály szerint: skip vagy értékadás, a következmény a definíciókból triviálisan adódik.
2. Feltesszük, hogy $\langle S, s \rangle \Rightarrow^k s' \implies \langle S, s \rangle \to s'$ és megmutatjuk, hogy $\langle S, s \rangle \Rightarrow^{k+1} s' \implies \langle S, s \rangle \to s'$
   Esetszétválasztás S szerint:
   - skip, értékadás nem tud 1-nél több lépésben kiértékelődni

Bizonyítás a levezetés hossza szerinti indukcióval:

1. 1 hosszú levezetésre: $\langle S, s\rangle \Rightarrow s' \implies \langle S, s\rangle \rightarrow s'$
   Esetszétválasztás a szabály szerint: skip vagy értékadás, a következmény a definíciókból triviálisan adódik.
2. Feltesszük, hogy $\langle S, s\rangle \Rightarrow^k s' \implies \langle S, s\rangle \rightarrow s'$ és megmutatjuk, hogy $\langle S, s\rangle \Rightarrow^{k+1} s' \implies \langle S, s\rangle \rightarrow s'$
   Esetszétválasztás S szerint:
   - skip, értékadás nem tud 1-nél több lépésben kiértékelődni
   - $\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow^{k+1} s'$, ekkor a korábbi lemma szerint létezik k_1 és k_2 $(k_1 + k_2 = k + 1)$ és s^* hogy $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow^{k_1} s^*$ és $\langle S_2, s^*\rangle \Rightarrow^{k_2} s'$. Ezekre az indukciós hipotézist alkalmazva $\langle S_1, s\rangle \rightarrow s^*$ és $\langle S_2, s^*\rangle \rightarrow s'$, amikből a szekvencia big-step szabályával $\langle S_1; S_2, s\rangle \rightarrow s'$

2

- $\langle \textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2, s\rangle \Rightarrow^{k+1} s'$
  - $\mathcal{B}[\![b]\!]s = tt$ eset: $\langle \textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_1, s\rangle \Rightarrow^k s'$. A második felére alkalmazva az indukciós hipotézist: $\langle S_1, s\rangle \rightarrow s'$, majd a big-step szemantika elágazás/igaz szabályával $\langle \textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2, s\rangle \rightarrow s'$
  - $\mathcal{B}[\![b]\!]s = ff$ eset: hasonlóan

Ha $\langle S, s\rangle \Rightarrow^* s'$ akkor $\langle S, s\rangle \to s'$

2

- $\langle \textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2, s\rangle \Rightarrow^{k+1} s'$
  - $\mathcal{B}[\![b]\!]s = tt$ eset: $\langle \textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_1, s\rangle \Rightarrow^k s'$. A második felére alkalmazva az indukciós hipotézist: $\langle S_1, s\rangle \to s'$, majd a big-step szemantika elágazás/igaz szabályával $\langle \textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2, s\rangle \to s'$
  - $\mathcal{B}[\![b]\!]s = ff$ eset: hasonlóan
- $\langle \textbf{while } b \textbf{ do } S, s\rangle \Rightarrow$ $\langle \textbf{if } b \textbf{ then } (S; \textbf{while } b \textbf{ do } S) \textbf{ else skip}, s\rangle \Rightarrow^k s'$
  - $\mathcal{B}[\![b]\!]s = tt$ eset: $\langle \textbf{if } b \textbf{ then } (S; \textbf{while } b \textbf{ do } S) \textbf{ else skip}, s\rangle \Rightarrow$ $\langle S; \textbf{while } b \textbf{ do } S, s\rangle \Rightarrow^{k-1} s'$. A korábbi lemma szerint felbontható, tehát létezik k_1 és k_2 ($k_1 + k_2 = k - 1$) és s^*, hogy $\langle S, s\rangle \Rightarrow^{k_1} s^*$ és $\langle \textbf{while } b \textbf{ do } S, s^*\rangle \Rightarrow^{k_2} s'$, ezekre indukciós hipotézis alkalmazva $\langle S, s\rangle \to s^*$ és $\langle \textbf{while } b \textbf{ do } S, s^*\rangle \to s'$, amiből a ciklus big-step szabályával $\langle \textbf{while } b \textbf{ do } S, s\rangle \to s'$

2

- $\langle \textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2, s\rangle \Rightarrow^{k+1} s'$
  - $\mathcal{B}[\![b]\!]s = tt$ eset: $\langle \textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_1, s\rangle \Rightarrow^k s'$. A második felére alkalmazva az indukciós hipotézist: $\langle S_1, s\rangle \rightarrow s'$, majd a big-step szemantika elágazás/igaz szabályával $\langle \textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2, s\rangle \rightarrow s'$
  - $\mathcal{B}[\![b]\!]s = ff$ eset: hasonlóan
- $\langle \textbf{while } b \textbf{ do } S, s\rangle \Rightarrow$ $\langle \textbf{if } b \textbf{ then } (S; \textbf{while } b \textbf{ do } S) \textbf{ else skip}, s\rangle \Rightarrow^k s'$
  - $\mathcal{B}[\![b]\!]s = tt$ eset: $\langle \textbf{if } b \textbf{ then } (S; \textbf{while } b \textbf{ do } S) \textbf{ else skip}, s\rangle \Rightarrow$ $\langle S; \textbf{while } b \textbf{ do } S, s\rangle \Rightarrow^{k-1} s'$. A korábbi lemma szerint felbontható, tehát létezik k_1 és k_2 ($k_1 + k_2 = k - 1$) és s^*, hogy $\langle S, s\rangle \Rightarrow^{k_1} s^*$ és $\langle \textbf{while } b \textbf{ do } S, s^*\rangle \Rightarrow^{k_2} s'$, ezekre indukciós hipotézis alkalmazva $\langle S, s\rangle \rightarrow s^*$ és $\langle \textbf{while } b \textbf{ do } S, s^*\rangle \rightarrow s'$, amiből a ciklus big-step szabályával $\langle \textbf{while } b \textbf{ do } S, s\rangle \rightarrow s'$
  - $\mathcal{B}[\![b]\!]s = ff$ eset: $\langle \textbf{if } b \textbf{ then } (S; \textbf{while } b \textbf{ do } S) \textbf{ else skip}, s\rangle \Rightarrow \langle \textbf{skip}, s\rangle \Rightarrow^{k-1} s'$. Utóbbiból definíció szerint $s = s'$, így a big-step szemantika ciklus/hamis szabályával $\langle \textbf{while } b \textbf{ do } S, s\rangle \rightarrow s'$

A levezetés szerinti indukcióval:

- skip és értékadás triviálisan adódik

Ha $\langle S, s\rangle \to s'$ akkor $\langle S, s\rangle \Rightarrow^* s'$

A levezetés szerinti indukcióval:

- skip és értékadás triviálisan adódik
- $$\frac{\langle S_1, s\rangle \to s' \qquad \langle S_2, s'\rangle \to s''}{\langle S_1; S_2, s\rangle \to s''}$$
  Indukciós hipotézisből: $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow^* s'$ és $\langle S_2, s'\rangle \Rightarrow^* s''$ Korábbi lemma alapján $\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow^* \langle S_2, s'\rangle$, majd tranzitivitással adódik, hogy $\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow^* s''$

A levezetés szerinti indukcióval:

- skip és értékadás triviálisan adódik
- $$\frac{\langle S_1, s\rangle \to s' \qquad \langle S_2, s'\rangle \to s''}{\langle S_1; S_2, s\rangle \to s''}$$
  Indukciós hipotézisből: $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow^* s'$ és $\langle S_2, s'\rangle \Rightarrow^* s''$ Korábbi lemma alapján $\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow^* \langle S_2, s'\rangle$, majd tranzitivitással adódik, hogy $\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow^* s''$
- $$\frac{\langle S_1, s\rangle \to s'}{\langle \textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2, s\rangle \to s'} \ \mathcal{B}[\![b]\!]s = tt$$
  A small-step szabály szerint $\langle \textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_1, s\rangle$, az indukciós hipotézisből: $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow^* s'$, tranzitivitással pedig $\langle \textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2, s\rangle \Rightarrow^* s'$
- Elágazás hamis szabálya hasonlóan

- $$\frac{\langle S, s\rangle \to s' \qquad \langle \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S, s'\rangle \to s''}{\langle \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S, s\rangle \to s''}\ \mathcal{B}[\![b]\!]s = tt$$

  Indukciós hipotézisből: $\langle S, s\rangle \Rightarrow^* s'$ és $\langle \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S, s'\rangle \Rightarrow^* s''$, korábbi lemma alapján $\langle S; \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S, s\rangle \Rightarrow^* \langle \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S, s'\rangle$, tranzitivitással $\langle S; \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S, s\rangle \Rightarrow^* s''$. A small-step elágazás/igaz szabály alapján $\langle \textbf{if}\ b\ \textbf{then}\ (S; \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S)\ \textbf{else}\ \textbf{skip}, s\rangle \Rightarrow^* s''$. A ciklus small-step szabálya alapján $\langle \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S, s\rangle \Rightarrow \langle \textbf{if}\ b\ \textbf{then}\ (S; \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S)\ \textbf{else}\ \textbf{skip}, s\rangle$, majd tranzitivitással adódik a szükséges levezetési lánc.

- $$\frac{\langle S, s\rangle \to s' \qquad \langle \textbf{while } b \textbf{ do } S, s'\rangle \to s''}{\langle \textbf{while } b \textbf{ do } S, s\rangle \to s''}\ \mathcal{B}[\![b]\!]s = tt$$
  Indukciós hipotézisből: $\langle S, s\rangle \Rightarrow^* s'$ és $\langle \textbf{while } b \textbf{ do } S, s'\rangle \Rightarrow^* s''$, korábbi lemma alapján $\langle S; \textbf{while } b \textbf{ do } S, s\rangle \Rightarrow^* \langle \textbf{while } b \textbf{ do } S, s'\rangle$, tranzitivitással $\langle S; \textbf{while } b \textbf{ do } S, s\rangle \Rightarrow^* s''$. A small-step elágazás/igaz szabály alapján $\langle \textbf{if } b \textbf{ then } (S; \textbf{while } b \textbf{ do } S) \textbf{ else skip}, s\rangle \Rightarrow^* s''$. A ciklus small-step szabálya alapján $\langle \textbf{while } b \textbf{ do } S, s\rangle \Rightarrow \langle \textbf{if } b \textbf{ then } (S; \textbf{while } b \textbf{ do } S) \textbf{ else skip}, s\rangle$, majd tranzitivitással adódik a szükséges levezetési lánc.
- $$\frac{}{\langle \textbf{while } b \textbf{ do } S, s\rangle \to s}\ \mathcal{B}[\![b]\!]s = ff$$
  A small-step szemantika definíciójából (skip és elágazás/hamis szabályok) egyszerűen adódik, hogy $\langle \textbf{if } b \textbf{ then } (S; \textbf{while } b \textbf{ do } S) \textbf{ else skip}, s\rangle \Rightarrow^* s$, majd a szemantika small-step szabályát és tranzitivitást alkalmazva $\langle \textbf{while } b \textbf{ do } S, s\rangle \Rightarrow^* s$

- Természetes szemantika átmenetrendszerekkel
- Levezetési fák
- A természetes szemantika tulajdonságai
- A természetes szemantikus függvény
- A strukturális és természetes szemantika ekvivalenciája