Szemantikadefiníciók ekvivalenciája

Dr. Horpácsi Dániel
ELTE Informatikai Kar
2023-2024-2

A denotációs és az operációs szemantika ekvivalenciája

Emlékeztető: formális szemantikadefiníciók

- A programozási nyelvek szemantikája általában informálisan kerül leírásra, továbbá praktikusan a nyelv fordítóprogramja definiálja
- Ezek közül egyiket sem tekintjük formális definíciónak, nem használhatóak bizonyításhoz

Megoldás: használjuk a jó öreg matematikát és logikát!

Két alapvető megközelítés:

- Operációs (műveleti)
  - **Strukturális**

    Minden lépés modellezése
  - Természetes

    A kezdő- és végállapotok közötti reláció felállítása
- **Denotációs (leíró)**

  A jelentést matematikai objektumok hozzárendelésével adja meg

A szemantikadefiníciók kapcsolata

- A *While* magnyelvnek definiáltunk egy operációs és egy leíró szemantikát is
- Az alapvető imperatív programkonstrukcióknak (szekvencia, elágazás, ciklus) különbözőképp adtuk meg a jelentését a különböző módszerekkel

- A **leíró szemantika** absztraktabb, magasabb szintű leírás
- A **műveleti szemantika** közelebb áll a tényleges végrehajtáshoz, leírja, hogyan hajtanánk végre a programot lépésről lépésre

- *Összehasonlíthatóak ezek a különböző szemantikadefiníciók?*
- *Belátható, hogy ugyanazt a jelentést definiálják, csak másképp?*

A szemantikák ekvivalenciája

- Bizonyítani fogjuk, hogy

  minden S utasításra $\mathcal{S}_{sos}[\![S]\!] = \mathcal{S}_{ds}[\![S]\!]$

- Az utasításokhoz rendelt szemantikus domain a $(\mathrm{State} \hookrightarrow \mathrm{State}, \sqsubseteq, \perp)$ részbenrendezett halmaz
- A denotációk egyenlőségéhez ($g_1 = g_2$) elég belátni, hogy $g_1 \sqsubseteq g_2$ és $g_2 \sqsubseteq g_1$.

- Tehát a két szemantika ekvivalenciájának belátásához belátjuk, hogy

  $\mathcal{S}_{sos}[\![S]\!] \sqsubseteq \mathcal{S}_{ds}[\![S]\!]$ és $\mathcal{S}_{ds}[\![S]\!] \sqsubseteq \mathcal{S}_{sos}[\![S]\!]$

$$\mathcal{S}_{sos}[\![S]\!]s = \begin{cases} s' & \text{ha } \langle S, s\rangle \Rightarrow^* s' \\ \mathit{undef} & \text{egyébként} \end{cases}$$

Az $\mathcal{S}_{sos}$ szemantikus függvény definíciója szerint be kell látni, hogy

$$\langle S, s\rangle \Rightarrow^* s' \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{ds}[\![S]\!]s = s'$$

Ez belátható a levezetési láncok hossza szerinti indukcióval: megmutatjuk, hogy az 1 hosszú láncokra (egy lépéses levezetésekre) teljesül, majd feltesszük, hogy maximum k hosszú láncokra teljesül, és a $k+1$ hosszúakra belátjuk.

Azt kell belátni, hogy

$$\langle S, s\rangle \Rightarrow^k s' \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{ds}[\![S]\!]s = s'$$

- Megmutatjuk, hogy 1 hosszú láncokra teljesül:

$$\langle S, s\rangle \Rightarrow s' \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{ds}[\![S]\!]s = s'$$

- Feltesszük, hogy maximum k hosszú láncokra teljesül, és $k+1$ hosszúakra belátjuk.

$$\langle S, s\rangle \Rightarrow \langle S', s''\rangle \Rightarrow^k s' \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{ds}[\![S]\!]s = s'$$

Az indukciós hipotézis szerint $\mathcal{S}_{ds}[\![S']\!]s'' = s'$, tehát csak az kell, hogy

$$\langle S, s\rangle \Rightarrow \langle S', s''\rangle \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{ds}[\![S]\!]s = \mathcal{S}_{ds}[\![S']\!]s''$$

Azt kell belátni, hogy

$$\langle S, s\rangle \Rightarrow^k s' \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{ds}[\![S]\!]s = s'$$

- Megmutatjuk, hogy 1 hosszú láncokra teljesül:

$$\langle S, s\rangle \Rightarrow s' \qquad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{ds}[\![S]\!]s = s'$$

- Feltesszük, hogy maximum k hosszú láncokra teljesül, és $k+1$ hosszúakra belátjuk.

$$\langle S, s\rangle \Rightarrow \langle S', s''\rangle \Rightarrow^k s' \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{ds}[\![S]\!]s = s'$$

Az indukciós hipotézis szerint $\mathcal{S}_{ds}[\![S']\!]s'' = s'$, tehát csak az kell, hogy

$$\langle S, s\rangle \Rightarrow \langle S', s''\rangle \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{ds}[\![S]\!]s = \mathcal{S}_{ds}[\![S']\!]s''$$

Azt kell belátni, hogy

$$\langle S, s\rangle \Rightarrow^k s' \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{ds}[\![S]\!]s = s'$$

- Megmutatjuk, hogy 1 hosszú láncokra teljesül:

$$\langle S, s\rangle \Rightarrow s' \qquad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{ds}[\![S]\!]s = s'$$

- Feltesszük, hogy maximum k hosszú láncokra teljesül, és $k+1$ hosszúakra belátjuk.

$$\langle S, s\rangle \Rightarrow \langle S', s''\rangle \Rightarrow^k s' \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{ds}[\![S]\!]s = s'$$

Az indukciós hipotézis szerint $\mathcal{S}_{ds}[\![S']\!]s'' = s'$, tehát csak az kell, hogy

$$\langle S, s\rangle \Rightarrow \langle S', s''\rangle \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{ds}[\![S]\!]s = \mathcal{S}_{ds}[\![S']\!]s''$$

- $\langle \textbf{skip}, s\rangle \Rightarrow s$

$$\mathcal{S}_{ds}[\![\textbf{skip}]\!]s = s$$

- $\langle x := a, s\rangle \Rightarrow s[x \mapsto \mathcal{A}[\![a]\!]s]$

$$\mathcal{S}_{ds}[\![x := a]\!]s = s[x \mapsto \mathcal{A}[\![a]\!]s]$$

- $\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_1'; S_2, s'\rangle$ mert $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow \langle S_1', s'\rangle$

$$\mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!]s = \mathcal{S}_{ds}[\![S_1']\!]s' \quad \text{(indukciós hipotézis)}$$

$$\mathcal{S}_{ds}[\![S_1; S_2]\!] = \mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!] \circ \mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!] \quad \text{(a szekvencia szemantikája)}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{ds}[\![S_1; S_2]\!]s &= \mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!](\mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!]s) = \mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!](\mathcal{S}_{ds}[\![S_1']\!]s') \\ &= \mathcal{S}_{ds}[\![S_1'; S_2]\!]s'\end{aligned}$$

- $\langle \textbf{skip}, s\rangle \Rightarrow s$

$$\mathcal{S}_{ds}[\![\textbf{skip}]\!]s = s$$

- $\langle x := a, s\rangle \Rightarrow s[x \mapsto \mathcal{A}[\![a]\!]s]$

$$\mathcal{S}_{ds}[\![x := a]\!]s = s[x \mapsto \mathcal{A}[\![a]\!]s]$$

- $\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_1'; S_2, s'\rangle$ mert $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow \langle S_1', s'\rangle$

$$\mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!]s = \mathcal{S}_{ds}[\![S_1']\!]s' \quad \text{(indukciós hipotézis)}$$

$$\mathcal{S}_{ds}[\![S_1; S_2]\!] = \mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!] \circ \mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!] \quad \text{(a szekvencia szemantikája)}$$

$$\mathcal{S}_{ds}[\![S_1; S_2]\!]s = \mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!](\mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!]s) = \mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!](\mathcal{S}_{ds}[\![S_1']\!]s') \\ = \mathcal{S}_{ds}[\![S_1'; S_2]\!]s'$$

- $\langle \mathbf{skip}, s\rangle \Rightarrow s$

$$\mathcal{S}_{ds}[\![\mathbf{skip}]\!]s = s$$

- $\langle x := a, s\rangle \Rightarrow s[x \mapsto \mathcal{A}[\![a]\!]s]$

$$\mathcal{S}_{ds}[\![x := a]\!]s = s[x \mapsto \mathcal{A}[\![a]\!]s]$$

- $\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_1'; S_2, s'\rangle$ mert $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow \langle S_1', s'\rangle$

$$\mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!]s = \mathcal{S}_{ds}[\![S_1']\!]s' \quad \text{(indukciós hipotézis)}$$

$$\mathcal{S}_{ds}[\![S_1; S_2]\!] = \mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!] \circ \mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!] \quad \text{(a szekvencia szemantikája)}$$

$$\mathcal{S}_{ds}[\![S_1; S_2]\!]s = \mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!](\mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!]s) = \mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!](\mathcal{S}_{ds}[\![S_1']\!]s')$$
$$= \mathcal{S}_{ds}[\![S_1'; S_2]\!]s'$$

- $\langle \textbf{skip}, s \rangle \Rightarrow s$

$$\mathcal{S}_{ds}[\![\textbf{skip}]\!]s = s$$

- $\langle x := a, s \rangle \Rightarrow s[x \mapsto \mathcal{A}[\![a]\!]s]$

$$\mathcal{S}_{ds}[\![x := a]\!]s = s[x \mapsto \mathcal{A}[\![a]\!]s]$$

- $\langle S_1; S_2, s \rangle \Rightarrow \langle S_1'; S_2, s' \rangle$ mert $\langle S_1, s \rangle \Rightarrow \langle S_1', s' \rangle$

$$\mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!]s = \mathcal{S}_{ds}[\![S_1']\!]s' \quad \text{(indukciós hipotézis)}$$

$$\mathcal{S}_{ds}[\![S_1; S_2]\!] = \mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!] \circ \mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!] \quad \text{(a szekvencia szemantikája)}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{ds}[\![S_1; S_2]\!]s &= \mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!](\mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!]s) = \mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!](\mathcal{S}_{ds}[\![S_1']\!]s') \\ &= \mathcal{S}_{ds}[\![S_1'; S_2]\!]s'\end{aligned}$$

- $\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_2, s'\rangle$ mert $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow s'$

  $\mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!]s = s'$ (indukciós hipotézis)

  $\mathcal{S}_{ds}[\![S_1; S_2]\!]s = \mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!](\mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!]s) = \mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!]s'$

- $\langle \textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_1, s\rangle$ mert $\mathcal{B}[\![b]\!]s = tt$

  $$\mathcal{S}_{ds}[\![\textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2]\!]s = cond(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!], \mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!])s = \mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!]s$$

- $\langle \textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_2, s\rangle$ mert $\mathcal{B}[\![b]\!]s = ff$

  $$\mathcal{S}_{ds}[\![\textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2]\!]s = cond(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!], \mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!])s = \mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!]s$$

- $\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_2, s'\rangle$ mert $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow s'$

$\mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!]s = s'$ (indukciós hipotézis)

$\mathcal{S}_{ds}[\![S_1; S_2]\!]s = \mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!](\mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!]s) = \mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!]s'$

- $\langle \textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_1, s\rangle$ mert $\mathcal{B}[\![b]\!]s = tt$

$$\mathcal{S}_{ds}[\![\textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2]\!]s = cond(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!], \mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!])s$$
$$= \mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!]s$$

- $\langle \textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_2, s\rangle$ mert $\mathcal{B}[\![b]\!]s = ff$

$$\mathcal{S}_{ds}[\![\textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2]\!]s = cond(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!], \mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!])s$$
$$= \mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!]s$$

- $\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_2, s'\rangle$ mert $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow s'$

$\mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!]s = s'$ (indukciós hipotézis)

$$\mathcal{S}_{ds}[\![S_1; S_2]\!]s = \mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!](\mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!]s) = \mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!]s'$$

- $\langle \textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_1, s\rangle$ mert $\mathcal{B}[\![b]\!]s = tt$

$$\mathcal{S}_{ds}[\![\textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2]\!]s = cond(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!], \mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!])s \\ = \mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!]s$$

- $\langle \textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_2, s\rangle$ mert $\mathcal{B}[\![b]\!]s = ff$

$$\mathcal{S}_{ds}[\![\textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2]\!]s = cond(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!], \mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!])s \\ = \mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!]s$$

- $\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_2, s'\rangle$ mert $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow s'$

$$\mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!]s = s' \quad \text{(indukciós hipotézis)}$$

$$\mathcal{S}_{ds}[\![S_1; S_2]\!]s = \mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!](\mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!]s) = \mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!]s'$$

- $\langle \textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_1, s\rangle$ mert $\mathcal{B}[\![b]\!]s = tt$

$$\mathcal{S}_{ds}[\![\textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2]\!]s = cond(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!], \mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!])s$$
$$= \mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!]s$$

- $\langle \textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_2, s\rangle$ mert $\mathcal{B}[\![b]\!]s = ff$

$$\mathcal{S}_{ds}[\![\textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2]\!]s = cond(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!], \mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!])s$$
$$= \mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!]s$$

$\mathcal{S}_{sos}[\![S]\!] \sqsubseteq \mathcal{S}_{ds}[\![S]\!]$

- $\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_2, s'\rangle$ mert $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow s'$

$$\mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!]s = s' \quad \text{(indukciós hipotézis)}$$

$$\mathcal{S}_{ds}[\![S_1; S_2]\!]s = \mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!](\mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!]s) = \mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!]s'$$

- $\langle \textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_1, s\rangle$ mert $\mathcal{B}[\![b]\!]s = tt$

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{ds}[\![\textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2]\!]s &= cond(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!], \mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!])s \\ &= \mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!]s\end{aligned}$$

- $\langle \textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_2, s\rangle$ mert $\mathcal{B}[\![b]\!]s = ff$

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{ds}[\![\textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2]\!]s &= cond(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!], \mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!])s \\ &= \mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!]s\end{aligned}$$

- $\langle \textbf{while } b \textbf{ do } S, s\rangle \Rightarrow \langle \textbf{if } b \textbf{ then } (S; \textbf{while } b \textbf{ do } S) \textbf{ else skip}, s\rangle$

A leíró szemantika szerint:

$\mathcal{S}_{ds}[\![\textbf{while } b \textbf{ do } S]\!] = \text{FIX } F$

ahol $F\ g = cond(\mathcal{B}[\![b]\!], g \circ \mathcal{S}_{ds}[\![S]\!], id_{\text{State}})$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{ds}[\![\textbf{while } b \textbf{ do } S]\!] &= \text{FIX } F \\
&= F\ (\text{FIX } F) \\
&= F\ (\mathcal{S}_{ds}[\![\textbf{while } b \textbf{ do } S]\!]) \\
&= cond(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}_{ds}[\![\textbf{while } b \textbf{ do } S]\!] \circ \mathcal{S}_{ds}[\![S]\!], id_{\text{State}}) \\
&= cond(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}_{ds}[\![S \ ;\ \textbf{while } b \textbf{ do } S]\!], \mathcal{S}_{ds}[\![\textbf{skip}]\!]) \\
&= \mathcal{S}_{ds}[\![\textbf{if } b \textbf{ then } (S; \textbf{while } b \textbf{ do } S) \textbf{ else skip}]\!]
\end{aligned}$$

A bizonyítás fele kész. Viszont a leíró szemantika még lehet olyan állapotokban definiálva, ahol a műveleti nincs. A bizonyítást a másik irányra is elvégezzük.

- $\langle \textbf{while } b \textbf{ do } S, s\rangle \Rightarrow \langle \textbf{if } b \textbf{ then } (S; \textbf{while } b \textbf{ do } S) \textbf{ else skip}, s\rangle$

  A leíró szemantika szerint:

  $\mathcal{S}_{ds}[\![\textbf{while } b \textbf{ do } S]\!] = \mathrm{FIX}\ F$

  ahol $F\ g = cond(\mathcal{B}[\![b]\!], g \circ \mathcal{S}_{ds}[\![S]\!], id_{\mathrm{State}})$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_{ds}[\![\textbf{while } b \textbf{ do } S]\!] &= \mathrm{FIX}\ F \\
&= F\ (\mathrm{FIX}\ F) \\
&= F\ (\mathcal{S}_{ds}[\![\textbf{while } b \textbf{ do } S]\!]) \\
&= cond(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}_{ds}[\![\textbf{while } b \textbf{ do } S]\!] \circ \mathcal{S}_{ds}[\![S]\!], id_{\mathrm{State}}) \\
&= cond(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}_{ds}[\![S\ ;\ \textbf{while } b \textbf{ do } S]\!], \mathcal{S}_{ds}[\![\textbf{skip}]\!]) \\
&= \mathcal{S}_{ds}[\![\textbf{if } b \textbf{ then } (S; \textbf{while } b \textbf{ do } S) \textbf{ else skip}]\!]
\end{aligned}
$$

A bizonyítás fele kész. Viszont a leíró szemantika még lehet olyan állapotokban definiálva, ahol a műveleti nincs. A bizonyítást a másik irányra is elvégezzük.

- $\langle \textbf{while } b \textbf{ do } S, s\rangle \Rightarrow \langle \textbf{if } b \textbf{ then } (S; \textbf{while } b \textbf{ do } S) \textbf{ else skip}, s\rangle$

  A leíró szemantika szerint:
  $\mathcal{S}_{ds}[\![\textbf{while } b \textbf{ do } S]\!] = \text{FIX } F$
  ahol $F\ g = cond(\mathcal{B}[\![b]\!], g \circ \mathcal{S}_{ds}[\![S]\!], id_{\text{State}})$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_{ds}[\![\textbf{while } b \textbf{ do } S]\!] &= \text{FIX } F \\
&= F\ (\text{FIX } F) \\
&= F\ (\mathcal{S}_{ds}[\![\textbf{while } b \textbf{ do } S]\!]) \\
&= cond(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}_{ds}[\![\textbf{while } b \textbf{ do } S]\!] \circ \mathcal{S}_{ds}[\![S]\!], id_{\text{State}}) \\
&= cond(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}_{ds}[\![S\ ;\ \textbf{while } b \textbf{ do } S]\!], \mathcal{S}_{ds}[\![\textbf{skip}]\!]) \\
&= \mathcal{S}_{ds}[\![\textbf{if } b \textbf{ then } (S; \textbf{while } b \textbf{ do } S) \textbf{ else skip}]\!]
\end{aligned}
$$

A bizonyítás fele kész. Viszont a leíró szemantika még lehet olyan állapotokban definiálva, ahol a műveleti nincs. A bizonyítást a másik irányra is elvégezzük.

- $\langle \textbf{while } b \textbf{ do } S, s\rangle \Rightarrow \langle \textbf{if } b \textbf{ then } (S; \textbf{while } b \textbf{ do } S) \textbf{ else skip}, s\rangle$

  A leíró szemantika szerint:

  $\mathcal{S}_{ds}[\![\textbf{while } b \textbf{ do } S]\!] = \text{FIX } F$

  ahol $F\ g = cond(\mathcal{B}[\![b]\!], g \circ \mathcal{S}_{ds}[\![S]\!], id_{\text{State}})$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_{ds}[\![\textbf{while } b \textbf{ do } S]\!] &= \text{FIX } F \\
&= F\ (\text{FIX } F) \\
&= F\ (\mathcal{S}_{ds}[\![\textbf{while } b \textbf{ do } S]\!]) \\
&= cond(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}_{ds}[\![\textbf{while } b \textbf{ do } S]\!] \circ \mathcal{S}_{ds}[\![S]\!], id_{\text{State}}) \\
&= cond(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}_{ds}[\![S\ ;\ \textbf{while } b \textbf{ do } S]\!], \mathcal{S}_{ds}[\![\textbf{skip}]\!]) \\
&= \mathcal{S}_{ds}[\![\textbf{if } b \textbf{ then } (S; \textbf{while } b \textbf{ do } S) \textbf{ else skip}]\!]
\end{aligned}
$$

A bizonyítás fele kész. Viszont a leíró szemantika még lehet olyan állapotokban definiálva, ahol a műveleti nincs. A bizonyítást a másik irányra is elvégezzük.

Belátjuk, hogy

$$\mathcal{S}_{ds}[\![S]\!]s = s' \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{sos}[\![S]\!]s = s'$$

Azaz,

$$\mathcal{S}_{ds}[\![S]\!]s = s' \quad \Longrightarrow \quad \langle S, s \rangle \Rightarrow^* s'$$

Mivel a denotációs szemantikát kompozicionálisan definiáltuk, bizonyíthatunk strukturális indukció segítségével.

- Nyilvánvalóan $\mathcal{S}_{ds}[\![\textbf{skip}]\!]s = \mathcal{S}_{sos}[\![\textbf{skip}]\!]s$
- És $\mathcal{S}_{ds}[\![x := a]\!]s = s[x \mapsto \mathcal{A}[\![a]\!]s] = \mathcal{S}_{sos}[\![x := a]\!]s$
- $\mathcal{S}_{ds}[\![S_1; S_2]\!] = \mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!] \circ \mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!]$

$\mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!] \sqsubseteq \mathcal{S}_{sos}[\![S_2]\!]$ (indukciós hipotézis)
$\mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!] \sqsubseteq \mathcal{S}_{sos}[\![S_1]\!]$ (indukciós hipotézis)

$\mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!] \circ \mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!] \sqsubseteq \mathcal{S}_{sos}[\![S_2]\!] \circ \mathcal{S}_{sos}[\![S_1]\!]$
($\circ$ mindkét argumentumában monoton)

- Nyilvánvalóan $\mathcal{S}_{ds}[\![\textbf{skip}]\!]s = \mathcal{S}_{sos}[\![\textbf{skip}]\!]s$
- És $\mathcal{S}_{ds}[\![x := a]\!]s = s[x \mapsto \mathcal{A}[\![a]\!]s] = \mathcal{S}_{sos}[\![x := a]\!]s$
- $\mathcal{S}_{ds}[\![S_1; S_2]\!] = \mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!] \circ \mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!]$

$\mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!] \sqsubseteq \mathcal{S}_{sos}[\![S_2]\!]$ (indukciós hipotézis)
$\mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!] \sqsubseteq \mathcal{S}_{sos}[\![S_1]\!]$ (indukciós hipotézis)

$\mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!] \circ \mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!] \sqsubseteq \mathcal{S}_{sos}[\![S_2]\!] \circ \mathcal{S}_{sos}[\![S_1]\!]$
($\circ$ mindkét argumentumában monoton)

- Nyilvánvalóan $\mathcal{S}_{ds}[\![\mathbf{skip}]\!]s = \mathcal{S}_{sos}[\![\mathbf{skip}]\!]s$
- És $\mathcal{S}_{ds}[\![x := a]\!]s = s[x \mapsto \mathcal{A}[\![a]\!]s] = \mathcal{S}_{sos}[\![x := a]\!]s$
- $\mathcal{S}_{ds}[\![S_1; S_2]\!] = \mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!] \circ \mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!]$

$\mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!] \sqsubseteq \mathcal{S}_{sos}[\![S_2]\!]$ (indukciós hipotézis)
$\mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!] \sqsubseteq \mathcal{S}_{sos}[\![S_1]\!]$ (indukciós hipotézis)

$\mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!] \circ \mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!] \sqsubseteq \mathcal{S}_{sos}[\![S_2]\!] \circ \mathcal{S}_{sos}[\![S_1]\!]$
($\circ$ mindkét argumentumában monoton)

- Nyilvánvalóan $\mathcal{S}_{ds}[\![\textbf{skip}]\!]s = \mathcal{S}_{sos}[\![\textbf{skip}]\!]s$
- És $\mathcal{S}_{ds}[\![x := a]\!]s = s[x \mapsto \mathcal{A}[\![a]\!]s] = \mathcal{S}_{sos}[\![x := a]\!]s$
- $\mathcal{S}_{ds}[\![S_1 ; S_2]\!] = \mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!] \circ \mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!]$

$\mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!] \sqsubseteq \mathcal{S}_{sos}[\![S_2]\!]$ (indukciós hipotézis)
$\mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!] \sqsubseteq \mathcal{S}_{sos}[\![S_1]\!]$ (indukciós hipotézis)

$\mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!] \circ \mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!] \sqsubseteq \mathcal{S}_{sos}[\![S_2]\!] \circ \mathcal{S}_{sos}[\![S_1]\!]$
($\circ$ mindkét argumentumában monoton)

$$(\mathcal{S}_{sos}[\![S_2]\!] \circ \mathcal{S}_{sos}[\![S_1]\!])s = s'' \iff$$
$$\exists s' : \mathcal{S}_{sos}[\![S_1]\!]s = s' \text{ és } \mathcal{S}_{sos}[\![S_2]\!]s' = s''$$

- $\mathcal{S}_{sos}[\![S_1]\!]s = s' \implies \langle S_1, s\rangle \Rightarrow^* s'$ ($\mathcal{S}_{sos}[\![]\!]$ definíciója szerint)
- $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow^* s' \implies \langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow^* \langle S_2, s'\rangle$ (korábban beláttuk)
- $\mathcal{S}_{sos}[\![S_2]\!]s' = s'' \implies \langle S_2, s'\rangle \Rightarrow^* s''$

Kapjuk tehát, hogy

$$\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow^* s''$$

Azaz,

$$(\mathcal{S}_{sos}[\![S_1 \,;\, S_2]\!])s = s''$$

Következésképp,

$$\mathcal{S}_{sos}[\![S_2]\!] \circ \mathcal{S}_{sos}[\![S_1]\!] \sqsubseteq \mathcal{S}_{sos}[\![S_1 \,;\, S_2]\!]$$

$$(\mathcal{S}_{sos}[\![S_2]\!] \circ \mathcal{S}_{sos}[\![S_1]\!])s = s'' \iff$$
$$\exists s' : \mathcal{S}_{sos}[\![S_1]\!]s = s' \text{ és } \mathcal{S}_{sos}[\![S_2]\!]s' = s''$$

- $\mathcal{S}_{sos}[\![S_1]\!]s = s' \implies \langle S_1, s\rangle \Rightarrow^* s'$ ($\mathcal{S}_{sos}[\![]\!]$ definíciója szerint)
- $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow^* s' \implies \langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow^* \langle S_2, s'\rangle$ (korábban beláttuk)
- $\mathcal{S}_{sos}[\![S_2]\!]s' = s'' \implies \langle S_2, s'\rangle \Rightarrow^* s''$

Kapjuk tehát, hogy

$$\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow^* s''$$

Azaz,

$$(\mathcal{S}_{sos}[\![S_1 \ ; \ S_2]\!])s = s''$$

Következésképp,

$$\mathcal{S}_{sos}[\![S_2]\!] \circ \mathcal{S}_{sos}[\![S_1]\!] \sqsubseteq \mathcal{S}_{sos}[\![S_1 \ ; \ S_2]\!]$$

$$(\mathcal{S}_{sos}[\![S_2]\!] \circ \mathcal{S}_{sos}[\![S_1]\!])s = s'' \iff$$
$$\exists s' : \mathcal{S}_{sos}[\![S_1]\!]s = s' \text{ és } \mathcal{S}_{sos}[\![S_2]\!]s' = s''$$

- $\mathcal{S}_{sos}[\![S_1]\!]s = s' \implies \langle S_1, s\rangle \Rightarrow^* s'$ ($\mathcal{S}_{sos}[\![]\!]$ definíciója szerint)
- $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow^* s' \implies \langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow^* \langle S_2, s'\rangle$ (korábban beláttuk)
- $\mathcal{S}_{sos}[\![S_2]\!]s' = s'' \implies \langle S_2, s'\rangle \Rightarrow^* s''$

Kapjuk tehát, hogy

$$\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow^* s''$$

Azaz,

$$(\mathcal{S}_{sos}[\![S_1 \ ; \ S_2]\!])s = s''$$

Következésképp,

$$\mathcal{S}_{sos}[\![S_2]\!] \circ \mathcal{S}_{sos}[\![S_1]\!] \sqsubseteq \mathcal{S}_{sos}[\![S_1 \ ; \ S_2]\!]$$

$$(\mathcal{S}_{sos}[\![S_2]\!] \circ \mathcal{S}_{sos}[\![S_1]\!])s = s'' \iff$$
$$\exists s' : \mathcal{S}_{sos}[\![S_1]\!]s = s' \text{ és } \mathcal{S}_{sos}[\![S_2]\!]s' = s''$$

- $\mathcal{S}_{sos}[\![S_1]\!]s = s' \implies \langle S_1, s\rangle \Rightarrow^* s'$ ($\mathcal{S}_{sos}[\![]\!]$ definíciója szerint)
- $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow^* s' \implies \langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow^* \langle S_2, s'\rangle$ (korábban beláttuk)
- $\mathcal{S}_{sos}[\![S_2]\!]s' = s'' \implies \langle S_2, s'\rangle \Rightarrow^* s''$

Kapjuk tehát, hogy

$$\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow^* s''$$

Azaz,

$$(\mathcal{S}_{sos}[\![S_1 \ ; \ S_2]\!])s = s''$$

Következésképp,

$$\mathcal{S}_{sos}[\![S_2]\!] \circ \mathcal{S}_{sos}[\![S_1]\!] \sqsubseteq \mathcal{S}_{sos}[\![S_1 \ ; \ S_2]\!]$$

- $\mathcal{S}_{ds}[\![\textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2]\!] = cond(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!], \mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!])$

$\mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!] \sqsubseteq \mathcal{S}_{sos}[\![S_2]\!]$ (indukciós hipotézis)
$\mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!] \sqsubseteq \mathcal{S}_{sos}[\![S_1]\!]$ (indukciós hipotézis)

$cond(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!], \mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!]) \sqsubseteq cond(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}_{sos}[\![S_1]\!], \mathcal{S}_{sos}[\![S_2]\!])$
(*cond* monoton a második és harmadik argumentumában)

$\langle \textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_1, s\rangle$ ha $\mathcal{B}[\![b]\!]s = tt$
$\langle \textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_2, s\rangle$ ha $\mathcal{B}[\![b]\!]s = ff$

$$cond(p, g_1, g_2)s = \begin{cases} g_1\, s & \text{ha} \quad p\, s = tt \\ g_2\, s & \text{ha} \quad p\, s = ff \end{cases}$$

$cond(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}_{sos}[\![S_1]\!], \mathcal{S}_{sos}[\![S_2]\!]) = \mathcal{S}_{sos}[\![\textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2]\!]$

- $\mathcal{S}_{ds}[\![\textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2]\!] = cond(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!], \mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!])$

$\mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!] \sqsubseteq \mathcal{S}_{sos}[\![S_2]\!]$ (indukciós hipotézis)
$\mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!] \sqsubseteq \mathcal{S}_{sos}[\![S_1]\!]$ (indukciós hipotézis)

$cond(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!], \mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!]) \sqsubseteq cond(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}_{sos}[\![S_1]\!], \mathcal{S}_{sos}[\![S_2]\!])$
(*cond* monoton a második és harmadik argumentumában)

$\langle \textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_1, s\rangle$ ha $\mathcal{B}[\![b]\!]s = tt$
$\langle \textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_2, s\rangle$ ha $\mathcal{B}[\![b]\!]s = ff$

$$cond(p, g_1, g_2)s = \begin{cases} g_1\, s & \text{ha} \quad p\, s = tt \\ g_2\, s & \text{ha} \quad p\, s = ff \end{cases}$$

$cond(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}_{sos}[\![S_1]\!], \mathcal{S}_{sos}[\![S_2]\!]) = \mathcal{S}_{sos}[\![\textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2]\!]$

- $\mathcal{S}_{ds}[\![\textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2]\!] = cond(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!], \mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!])$

$\mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!] \sqsubseteq \mathcal{S}_{sos}[\![S_2]\!]$ (indukciós hipotézis)
$\mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!] \sqsubseteq \mathcal{S}_{sos}[\![S_1]\!]$ (indukciós hipotézis)

$cond(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!], \mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!]) \sqsubseteq cond(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}_{sos}[\![S_1]\!], \mathcal{S}_{sos}[\![S_2]\!])$
(*cond* monoton a második és harmadik argumentumában)

$\langle \textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_1, s\rangle$ ha $\mathcal{B}[\![b]\!]s = tt$
$\langle \textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_2, s\rangle$ ha $\mathcal{B}[\![b]\!]s = ff$

$$cond(p, g_1, g_2)s = \begin{cases} g_1\, s & \text{ha} \quad p\, s = tt \\ g_2\, s & \text{ha} \quad p\, s = ff \end{cases}$$

$cond(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}_{sos}[\![S_1]\!], \mathcal{S}_{sos}[\![S_2]\!]) = \mathcal{S}_{sos}[\![\textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2]\!]$

- $\mathcal{S}_{ds}[\![\textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2]\!] = cond(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!], \mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!])$

$\mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!] \sqsubseteq \mathcal{S}_{sos}[\![S_2]\!]$ (indukciós hipotézis)
$\mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!] \sqsubseteq \mathcal{S}_{sos}[\![S_1]\!]$ (indukciós hipotézis)

$cond(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}_{ds}[\![S_1]\!], \mathcal{S}_{ds}[\![S_2]\!]) \sqsubseteq cond(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}_{sos}[\![S_1]\!], \mathcal{S}_{sos}[\![S_2]\!])$
(*cond* monoton a második és harmadik argumentumában)

$\langle \textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_1, s\rangle$ ha $\mathcal{B}[\![b]\!]s = tt$
$\langle \textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_2, s\rangle$ ha $\mathcal{B}[\![b]\!]s = ff$

$$cond(p, g_1, g_2)s = \begin{cases} g_1\ s & \text{ha} \quad p\ s = tt \\ g_2\ s & \text{ha} \quad p\ s = ff \end{cases}$$

$cond(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}_{sos}[\![S_1]\!], \mathcal{S}_{sos}[\![S_2]\!]) = \mathcal{S}_{sos}[\![\textbf{if } b \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2]\!]$

- $\mathcal{S}_{ds}[\![\textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S]\!] = \text{FIX}\ F$
  ahol $F\ g = cond(\mathcal{B}[\![b]\!], g \circ \mathcal{S}_{ds}[\![S]\!], id_{\text{State}})$ és F folytonos

Elég belátni, hogy

$$F(\mathcal{S}_{sos}[\![\textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S]\!]) \sqsubseteq \mathcal{S}_{sos}[\![\textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S]\!]$$

mert akkor

$$FIX\ F \sqsubseteq \mathcal{S}_{sos}[\![\textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S]\!]$$

Trükk:

$$F\ g \sqsubseteq g \quad \Longrightarrow \quad FIX\ F \sqsubseteq g$$

- $\mathcal{S}_{ds}[\![\textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S]\!] = \mathrm{FIX}\ F$
  ahol $F\ g = cond(\mathcal{B}[\![b]\!], g \circ \mathcal{S}_{ds}[\![S]\!], id_{\mathrm{State}})$ és F folytonos

Elég belátni, hogy

$$F(\mathcal{S}_{sos}[\![\textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S]\!]) \sqsubseteq \mathcal{S}_{sos}[\![\textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S]\!]$$

mert akkor

$$FIX\ F \sqsubseteq \mathcal{S}_{sos}[\![\textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S]\!]$$

Trükk:

$$F\ g \sqsubseteq g \quad \Longrightarrow \quad FIX\ F \sqsubseteq g$$

- $\mathcal{S}_{ds}[\![\textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S]\!] = \mathrm{FIX}\ F$
  ahol $F\ g = cond(\mathcal{B}[\![b]\!], g \circ \mathcal{S}_{ds}[\![S]\!], id_{\mathrm{State}})$ és F folytonos

  Elég belátni, hogy

  $$F(\mathcal{S}_{sos}[\![\textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S]\!]) \sqsubseteq \mathcal{S}_{sos}[\![\textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S]\!]$$

  mert akkor

  $$FIX\ F \sqsubseteq \mathcal{S}_{sos}[\![\textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ S]\!]$$

  Trükk:

  $$F\ g \sqsubseteq g \quad \Longrightarrow \quad FIX\ F \sqsubseteq g$$

$\langle \textbf{while } b \textbf{ do } S, s\rangle \Rightarrow \langle \textbf{if } b \textbf{ then } (S; \textbf{while } b \textbf{ do } S) \textbf{ else skip}, s\rangle$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{S}_{sos}[\![\textbf{while } b \textbf{ do } S]\!] = \mathcal{S}_{sos}[\![\textbf{if } b \textbf{ then } (S; \textbf{while } b \textbf{ do } S) \textbf{ else skip}]\!] \\
&\quad = cond(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}_{sos}[\![S\ ;\ \textbf{while } b \textbf{ do } S]\!], id_{\mathrm{State}}) \\
&\quad \sqsupseteq cond(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}_{sos}[\![\textbf{while } b \textbf{ do } S]\!] \circ \mathcal{S}_{sos}[\![S]\!], id_{\mathrm{State}})
\end{aligned}$$

És az indukciós hipotézis használatával:

$$\mathcal{S}_{ds}[\![S]\!] \sqsubseteq \mathcal{S}_{sos}[\![S]\!]$$

A $\circ$ és *cond* monotonitása miatt:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{S}_{sos}[\![\textbf{while } b \textbf{ do } S]\!] \\
&\quad \sqsupseteq cond(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}_{sos}[\![\textbf{while } b \textbf{ do } S]\!] \circ \mathcal{S}_{sos}[\![S]\!], id_{\mathrm{State}}) \\
&\quad \sqsupseteq cond(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}_{sos}[\![\textbf{while } b \textbf{ do } S]\!] \circ \mathcal{S}_{ds}[\![S]\!], id_{\mathrm{State}}) \\
&\quad = F(\mathcal{S}_{sos}[\![\textbf{while } b \textbf{ do } S]\!])
\end{aligned}$$

$\langle \textbf{while } b \textbf{ do } S, s\rangle \Rightarrow \langle \textbf{if } b \textbf{ then } (S; \textbf{while } b \textbf{ do } S) \textbf{ else skip}, s\rangle$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{S}_{sos}[\![\textbf{while } b \textbf{ do } S]\!] = \mathcal{S}_{sos}[\![\textbf{if } b \textbf{ then } (S; \textbf{while } b \textbf{ do } S) \textbf{ else skip}]\!]\\
&\quad = cond(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}_{sos}[\![S \;;\; \textbf{while } b \textbf{ do } S]\!], id_{\mathrm{State}})\\
&\quad \sqsupseteq cond(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}_{sos}[\![\textbf{while } b \textbf{ do } S]\!] \circ \mathcal{S}_{sos}[\![S]\!], id_{\mathrm{State}})
\end{aligned}$$

És az indukciós hipotézis használatával:

$$\mathcal{S}_{ds}[\![S]\!] \sqsubseteq \mathcal{S}_{sos}[\![S]\!]$$

A $\circ$ és *cond* monotonitása miatt:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{S}_{sos}[\![\textbf{while } b \textbf{ do } S]\!]\\
&\quad \sqsupseteq cond(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}_{sos}[\![\textbf{while } b \textbf{ do } S]\!] \circ \mathcal{S}_{sos}[\![S]\!], id_{\mathrm{State}})\\
&\quad \sqsupseteq cond(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}_{sos}[\![\textbf{while } b \textbf{ do } S]\!] \circ \mathcal{S}_{ds}[\![S]\!], id_{\mathrm{State}})\\
&\quad = F(\mathcal{S}_{sos}[\![\textbf{while } b \textbf{ do } S]\!])
\end{aligned}$$

$\langle \textbf{while } b \textbf{ do } S, s\rangle \Rightarrow \langle \textbf{if } b \textbf{ then } (S; \textbf{while } b \textbf{ do } S) \textbf{ else skip}, s\rangle$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{S}_{sos}[\![\textbf{while } b \textbf{ do } S]\!] = \mathcal{S}_{sos}[\![\textbf{if } b \textbf{ then } (S; \textbf{while } b \textbf{ do } S) \textbf{ else skip}]\!] \\
&\quad = cond(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}_{sos}[\![S \;;\; \textbf{while } b \textbf{ do } S]\!], id_{\mathrm{State}}) \\
&\quad \sqsupseteq cond(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}_{sos}[\![\textbf{while } b \textbf{ do } S]\!] \circ \mathcal{S}_{sos}[\![S]\!], id_{\mathrm{State}})
\end{aligned}$$

És az indukciós hipotézis használatával:

$$\mathcal{S}_{ds}[\![S]\!] \sqsubseteq \mathcal{S}_{sos}[\![S]\!]$$

A $\circ$ és *cond* monotonitása miatt:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{S}_{sos}[\![\textbf{while } b \textbf{ do } S]\!] \\
&\quad \sqsupseteq cond(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}_{sos}[\![\textbf{while } b \textbf{ do } S]\!] \circ \mathcal{S}_{sos}[\![S]\!], id_{\mathrm{State}}) \\
&\quad \sqsupseteq cond(\mathcal{B}[\![b]\!], \mathcal{S}_{sos}[\![\textbf{while } b \textbf{ do } S]\!] \circ \mathcal{S}_{ds}[\![S]\!], id_{\mathrm{State}}) \\
&\quad = F(\mathcal{S}_{sos}[\![\textbf{while } b \textbf{ do } S]\!])
\end{aligned}$$

- Beláttuk, hogy

$$\mathcal{S}_{sos}[\![S]\!] \sqsubseteq \mathcal{S}_{ds}[\![S]\!] \qquad \text{és} \qquad \mathcal{S}_{ds}[\![S]\!] \sqsubseteq \mathcal{S}_{sos}[\![S]\!]$$

- Következésképp

$$\mathcal{S}_{ds}[\![S]\!] = \mathcal{S}_{sos}[\![S]\!]$$

  A leíró és a small-step műveleti szemantika ekvivalens

- A small-step és a big-step ekvivalenciája is belátható lenne, tehát hogy mindhárom definíciónk ekvivalens
- Viszont vegyük észre, hogy itt csak a magnyelvet vizsgáltuk