

# Tema 6

## Modelos de distribuciones discretas y continuas

---

### 6.1. Modelos de distribuciones discretas

#### 6.1.1. Distribución uniforme sobre $n$ puntos

**Definición 6.1.2** Se dice que una v.a.  $X$  sigue una distribución uniforme en  $n$  puntos si toma  $n$  valores,  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , con igual probabilidad.

**Función masa de probabilidad**

$$p(x_i) = P(X = x_i) = \frac{1}{n}, \quad i = 1, \dots, n$$

**Función de distribución**

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ 1/n & x_1 \leq x < x_2 \\ 2/n & x_2 \leq x < x_3 \\ \vdots & \vdots \\ (n-1)/n & x_{n-1} \leq x < x_n \\ 1 & x \geq x_n \end{cases}$$

**Esperanza**

$$E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$$

## Varianza

$$\sigma_X^2 = \text{Var}(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2$$

### 6.1.3. Distribución binomial

Consideremos un experimento que sólo puede presentar 2 posibles resultados que llamaremos éxito (si ocurre el suceso de interés) o fracaso (en caso contrario). Las probabilidades de estos sucesos suelen denotarse por  $p = P(\text{éxito})$  y  $q = 1 - p = P(\text{fracaso})$ . Este tipo de experimento se conoce como *ensayo de Bernoulli*. Si el experimento se repite  $n$  veces siempre en las mismas condiciones, entonces cada una de estas realizaciones es independiente de las demás y la probabilidad de éxito,  $p$ , permanece constante.

**Definición 6.1.4** La v.a.  $X$  que representa el “número de éxitos obtenidos en los  $n$  ensayos” se dice que sigue una *distribución binomial* de parámetros  $n$  y  $p$ ,  $X \sim B(n, p)$ , siendo  $n$  el número de veces que se repite el experimento y  $p$  la probabilidad de éxito.

**Nota 6.1.5** Observe que la v.a.  $X$  sólo puede tomar los valores  $0, 1, 2, \dots, n$ .

## Función masa de probabilidad

$$p(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x q^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n$$

La Figura 6.1 muestra la representación gráfica de la f.m.p. para distintos valores de los parámetros de la distribución binomial.

## Función de distribución

$$F(x) = P[X \leq x] = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sum_{i=0}^{[x]} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} & \text{si } 0 \leq x < n \\ 1 & \text{si } x \geq n \end{cases}$$

con  $[x]$  la parte entera de  $x$ .

## Esperanza

$$E(X) = np$$

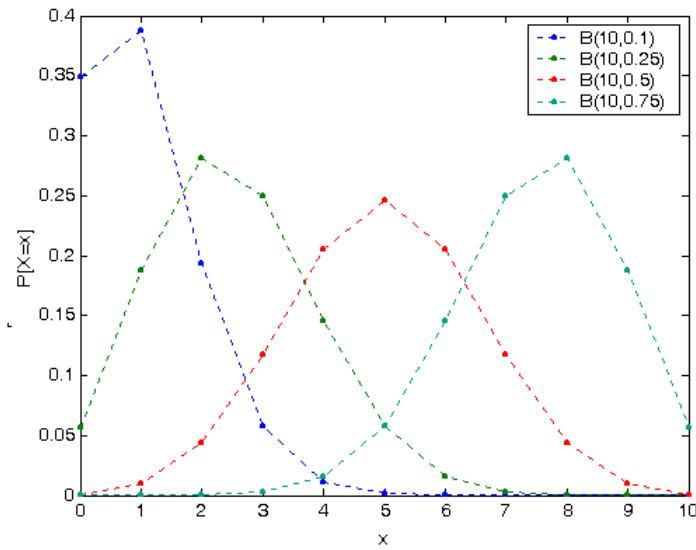


Figura 6.1: F.m.p. de la distribución binomial

### Varianza

$$\sigma_X^2 = \text{Var}(X) = npq$$

#### 6.1.6. Distribución de Poisson

La distribución de Poisson fue obtenida por el matemático francés Simeon Poisson (1781-1840) como límite de la distribución binomial. La distribución de Poisson proporciona el número de resultados o sucesos que ocurren de manera independiente y aleatoria durante un intervalo de tiempo dado o en una región específica. Por ejemplo:

**Definición 6.1.7** Se dice que una v.a.  $X$  tiene distribución de Poisson de parámetro  $\lambda$ ,  $X \sim P(\lambda)$  cuando puede tomar los valores enteros positivos  $0, 1, 2, 3, \dots$  con la siguiente probabilidad

$$p(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

donde:

- $\lambda$  es el número medio de ocurrencias del suceso por unidad de tiempo (o espacio),
- $x$  es el número de veces que ocurre el suceso

**Nota 6.1.8** La distribución de Poisson se caracteriza por:

1. La probabilidad de que ocurra un suceso es constante para dos intervalos de tiempo o espacio cualesquiera.

2. *La aparición de un suceso en cualquier intervalo es independiente de su aparición en cualquier otro intervalo.*
3. *El promedio de ocurrencias del suceso en cada unidad temporal o espacial, representado por  $\lambda$ , permanece constante.*

Algunos ejemplos de variables aleatorias con distribución de Poisson son:

- Número de llegadas a una tienda en una hora
- de veces que una planta de energía nuclear emite gases radiactivos en el período de tres meses
- Número de glóbulos blancos en una gota de sangre
- Número de bacterias en un determinado cultivo que son resistentes a un fármaco
- Número de conejos por hectárea de monte

Observe que el intervalo de tiempo dado puede ser de cualquier magnitud (un minuto, una hora, un día, etc.); y la región especificada puede ser un intervalo de una recta, una superficie, un volumen, etc.

### **Función masa de probabilidad**

$$p(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

La Figura 6.2 muestra la representación gráfica de la f.m.p. para distintos valores de los parámetros de la distribución de Poisson.

### **Función de distribución**

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sum_{i=0}^{[x]} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^i}{i!} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

donde  $[x]$  es la parte entera de  $x$ .

### **Esperanza**

$$E(X) = \lambda$$

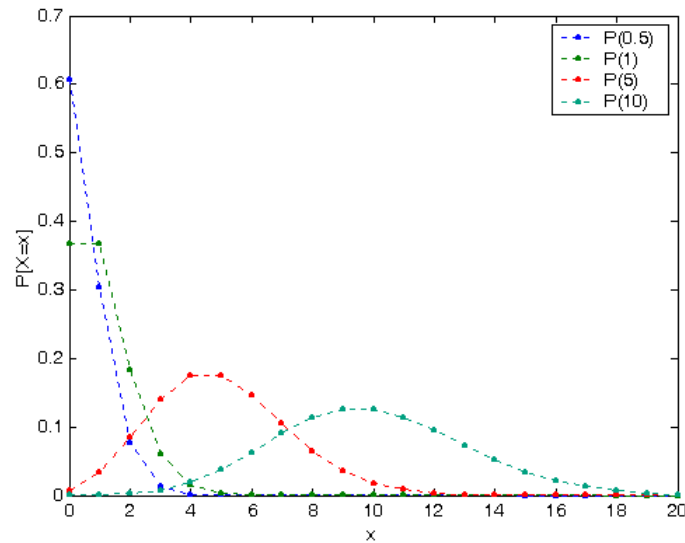


Figura 6.2: F.m.p. de la distribución de Poisson

### Varianza

$$\sigma_X^2 = \text{Var}(X) = \lambda$$

**Nota 6.1.9** Cuando  $n \rightarrow \infty$ ,  $p \rightarrow 0$  y  $np$  permanece constante la distribución binomial puede aproximarse mediante una distribución de Poisson.

#### 6.1.10. Distribución hipergeométrica

Vimos que la distribución binomial sólo es adecuada si la probabilidad de obtener un éxito permanece constante en cada repetición del experimento. Sin embargo, hay casos en que las repeticiones del experimento no son independientes. Por ejemplo, la probabilidad de elegir una mujer en un grupo de 30 personas que conste de 10 mujeres y 20 hombres es de  $10/30$ , la probabilidad de elegir otra mujer sin restitución en la segunda extracción es  $9/29$ , si la primera fue una mujer o  $10/29$  si la primera persona fue un hombre, en cualquier caso es distinto de  $10/30$ .

La distribución hipergeométrica es de gran utilidad en estos casos donde la probabilidad de éxito no permanece constante.

**Definición 6.1.11** Sean  $N$  el número total de objetos de una población finita, de forma que  $k$  de éstos son de un tipo y los  $N - k$  restantes de otro. Si se selecciona una muestra de la población constituida por  $n$  objetos, la v.a.  $X$  que representa el “número de objetos del primer tipo en la muestra” se dice que tiene distribución hipergeométrica de parámetros  $N, n$  y  $k$ ,  $X \sim H(N, n, k)$ .

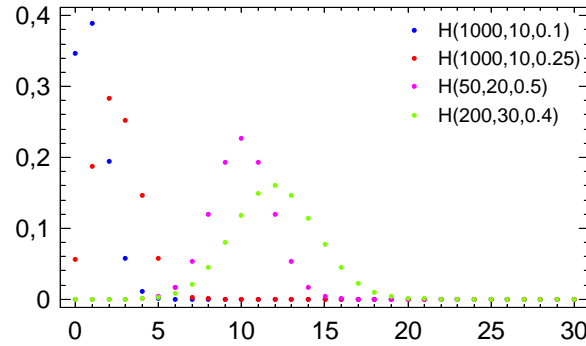


Figura 6.3: F.m.p. de la distribución hipergeométrica

### Función masa de probabilidad

$$p(x) = P(X = x) = \frac{\binom{k}{x} \binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\frac{k!}{x!(k-x)!} \frac{(N-k)!}{(n-x)!(N-k-n+x)!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \min\{n, k\}$$

La Figura 6.3 muestra la representación gráfica de la f.m.p. de la distribución hipergeométrica para distintos valores de los parámetros.

### Función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \max\{0, n - N + k\} \\ \sum_{i=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{\binom{k}{i} \binom{N-k}{n-i}}{\binom{N}{n}} & \text{si } \max\{0, n - N + k\} \leq x < \min\{n, k\} \\ 1 & \text{si } x \geq \min\{n, k\} \end{cases}$$

### Esperanza

$$E(X) = \frac{nk}{N}$$

### Varianza

$$\sigma_X^2 = \text{Var}(X) = \frac{nk(N-k)}{N^2} \cdot \frac{(N-n)}{(N-1)}$$

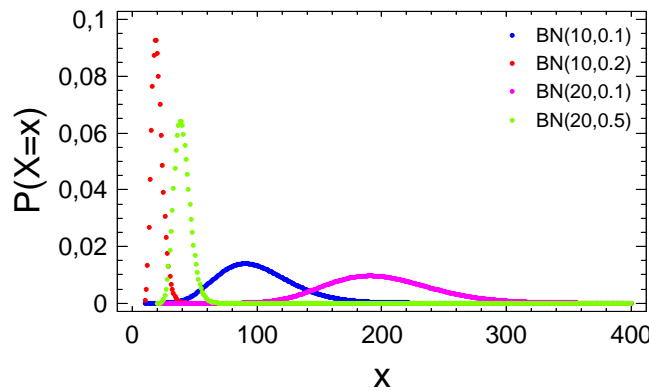


Figura 6.4: F.m.p. de la distribución binomial negativa

**Nota 6.1.12** Cuando el tamaño de la muestra,  $n$ , es sólo una pequeña fracción de un lote de tamaño  $N$ , la distribución hipergeométrica se puede aproximar a una distribución binomial.

### 6.1.13. Distribución binomial negativa

En las mismas condiciones en las que se definió la distribución binomial, imaginemos que en lugar de realizar  $n$  ensayos, repetimos el experimento hasta encontrar  $k$  éxitos.

**Definición 6.1.14** Sea  $X$  el número de fracasos hasta obtener de manera exacta  $k$  éxitos en un experimento binomial, donde la probabilidad de éxito en cada ensayo es  $p$ . Entonces, se dice que la v.a.  $X$  sigue una distribución binomial negativa con parámetros  $k$  y  $p$ ,  $X \sim BN(k, p)$ .

#### Función masa de probabilidad

$$p(x) = P(X = x) = \binom{k+x-1}{x} p^k (1-p)^x, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

La Figura 6.4 muestra la representación gráfica de la f.m.p. de la distribución binomial negativa para distintos valores de los parámetros.

#### Función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sum_{i=0}^{\lfloor x \rfloor} \binom{k+i-1}{i} p^k (1-p)^i & x \geq 0 \end{cases}$$

donde  $[x]$  es la parte entera de  $x$ .

### Esperanza

$$E(X) = \frac{k(1-p)}{p}$$

### Varianza

$$\sigma_X^2 = \text{Var}(X) = \frac{k(1-p)}{p^2}$$

**Nota 6.1.15** Cuando  $k = 1$ , la distribución binomial negativa,  $BN(1, p)$ , se denomina distribución geométrica de parámetro  $p$ ,  $Ge(p)$ .

**Nota 6.1.16** La binomial, Poisson y binomial negativa son distribuciones en las que se hace muestreo con reemplazamiento, por lo tanto los ensayos son independientes. Sin embargo, en la hipergeométrica el muestreo es sin reemplazo, por lo tanto los ensayos no son independientes.

## 6.2. Modelos de distribuciones continuas

### 6.2.1. Distribución uniforme

Esta distribución es la más sencilla de las distribuciones continuas, surge al considerar una variable aleatoria que toma valores equiprobables en un intervalo finito y su nombre se debe al hecho de que la densidad de probabilidad de esta variable aleatoria es uniforme sobre todo el intervalo de definición.

**Definición 6.2.2** Se dice que una v.a.  $X$  se distribuye según una uniforme en el intervalo  $[a, b]$ ,  $X \rightsquigarrow U[a, b]$ , si la probabilidad de que tome cualquier subintervalo de valores es proporcional a la longitud de dicho subintervalo.

**Nota 6.2.3** El intervalo de definición de la distribución uniforme puede ser abierto, semiabierto o cerrado.

### Función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



**Función de distribución**

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

**Esperanza**

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

**Varianza**

$$\sigma_X^2 = Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

**6.2.4. Distribución exponencial**

Esta distribución suele ser modelo de aquellos fenómenos aleatorios que miden el tiempo que transcurre entre dos sucesos. Por ejemplo, entre la puesta en marcha de un cierto componente y su fallo o el tiempo que transcurre entre dos llegadas consecutivas a un cajero automático.

**Definición 6.2.5** Sea  $X$  una v.a. continua que puede tomar valores  $x \geq 0$ . Se dice que  $X$  sigue una distribución exponencial de parámetro  $\lambda$  (y se nota  $X \sim \exp(\lambda)$ ) si su función de densidad está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

**Función de distribución**

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

**Esperanza**

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

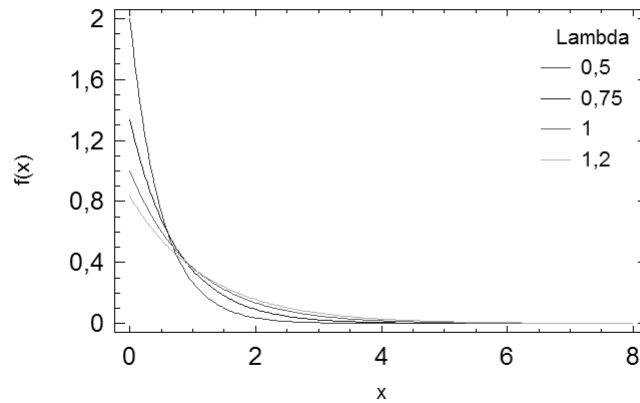


Figura 6.5: Función de densidad de la distribución exponencial

### Varianza

$$E(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

La Figura 6.5 muestra la representación gráfica de la distribución exponencial para distintos valores del parámetro  $\lambda$ .

#### 6.2.6. Distribución normal

La distribución normal fue descrita, por primera vez, en 1773 por De Moivre como límite de la distribución Binomial cuando el número de ensayos tiende a infinito. Este hecho no llamó la atención y la distribución normal fue “redescubierta” por Laplace (1812) y Gauss (1809). Ambos se ocupaban de problemas de Astronomía y Geodesia; cada uno obtuvo empíricamente la distribución normal (también llamada distribución gaussiana) como modelo que describe el comportamiento de los errores en las medidas astronómicas y geodésicas.

La distribución normal o de Gauss es la distribución continua más importante y de mayor aplicación. Es adecuada para describir el comportamiento de muchos conjuntos de datos en Ciencias, Medicina, Ingeniería, Economía, . . . De hecho, la mayoría de los métodos estadísticos básicos que estudiaremos en los próximos capítulos se apoyan en la distribución normal.

**Definición 6.2.7** Se dice que una v.a.  $X$  tiene una distribución normal de parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ ,  $X \rightsquigarrow N(\mu, \sigma)$ , si su función de densidad tiene la siguiente forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

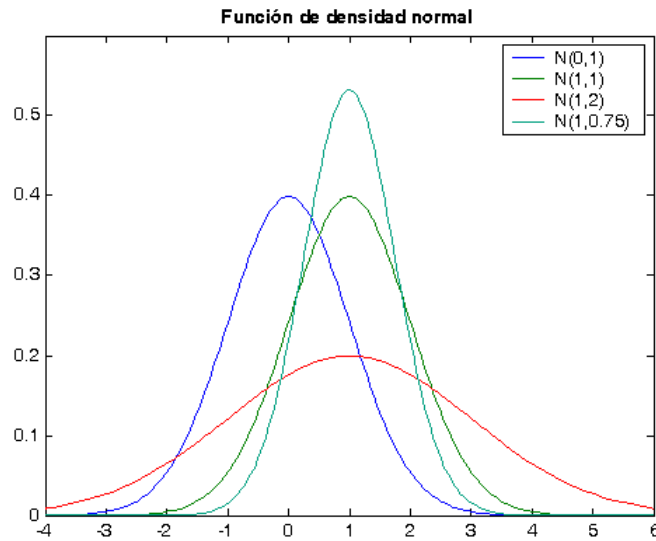


Figura 6.6: Función de densidad de la distribución normal

donde  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  y  $\sigma > 0$ .

### Esperanza

$$E(X) = \mu$$

### Varianza

$$\sigma_X^2 = Var(X) = \sigma^2$$

### Representación gráfica de la función de densidad normal

Si representamos gráficamente la función de densidad,  $f(x)$ , de la distribución normal, la curva resultante tiene una forma peculiar acampanada y simétrica (de ahí que se denomine *curva o campana de Gauss*). La Figura 6.6 muestra la representación gráfica de la función de densidad para distintos valores de los parámetros de la distribución normal. Se pueden demostrar (ejercicio propuesto) las siguientes propiedades de  $f(x)$ :

- Es continua en todo  $\mathbb{R}$ .
- La moda (punto donde se alcanza el máximo) es  $Mo = \mu$  y el valor de la función en este punto es  $f(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ .
- Es estrictamente creciente para  $x < \mu$  y estrictamente decreciente para  $x > \mu$ .

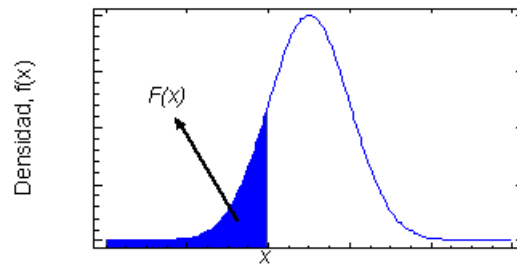


Figura 6.7: La zona coloreada representa el valor,  $F(x)$ , de la función de distribución en el punto  $x$

- Posee dos puntos de inflexión:  $\mu + \sigma$  y  $\mu - \sigma$ . La situación de estos puntos determina la forma de la curva de modo que cuanto mayor es  $\sigma$  más lejos de la moda están los puntos de inflexión y más plana será la curva.
- Tiene como asíntota horizontal el eje de abscisas, ya que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

- Es simétrica respecto a  $x = \mu$ , esto es

$$f(x - \mu) = f(x + \mu), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por tanto, la mediana es también  $\mu$ .

**Nota 6.2.8**  $F(x)$  coincide con el área que encierra la curva  $f(x)$  respecto al eje de abscisas desde  $-\infty$  a  $x$ . Véase la Figura 6.7.

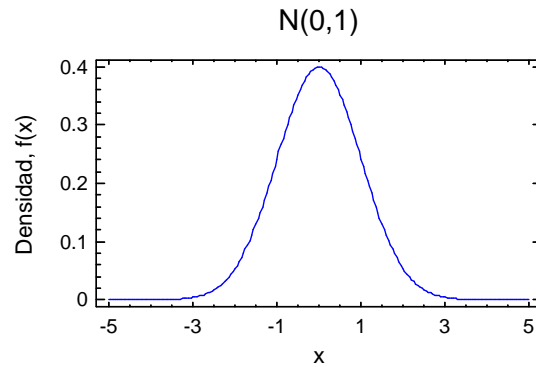
**Nota 6.2.9** En muchas ocasiones encontraremos que un conjunto de valores se corresponde con una distribución normal o muy aproximada a la normal. Además, veremos que, en determinadas circunstancias, el proceso de muestreo garantiza la normalidad aunque la población de la que se tome la muestra no sea normal. Esto aumenta más aún la importancia del papel de la normal en nuestro análisis estadístico.

### Normal estándar o tipificada

Como podemos imaginar, existe un número infinito de distribuciones normales, cada una de ellas con su media y desviación típica propias. Como no podemos trabajar con tal número de posibilidades, convertiremos todas estas distribuciones normales en una sola forma estándar, esto es, usaremos la  $N(0, 1)$  cuya función de densidad está dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

La Figura 6.8 muestra la representación gráfica de la función de densidad de una  $N(0, 1)$ . En ella podemos observar las siguientes características:

Figura 6.8: Función de densidad de una  $N(0,1)$ 

- Es simétrica respecto a  $x = 0$ .
- Alcanza un máximo en  $x = 0$  que vale  $f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.4$ .
- Es creciente para  $x < 0$  y decreciente para  $x > 0$ .
- $1, -1$  son puntos de inflexión.
- $y = 0$  es una asíntota horizontal.
- $F(-x) = 1 - F(x)$

La transformación a la distribución normal estándar se realiza tipificando la variable  $X \rightsquigarrow N(\mu, \sigma)$  mediante la expresión:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \rightsquigarrow N(0, 1)$$

Entonces

$$F_X(x) = F_Z\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

La función de distribución de la normal tipificada está tabulada de forma que, para trabajar con una v.a. normal arbitraria, la transformaremos siempre en una  $N(0, 1)$ .

### Resumen de utilización de tablas

Utilizaremos la tabla que proporciona probabilidades a la izquierda, es decir,  $F(z) = P(Z \leq z)$ . Con estos valores, podemos calcular cualquier probabilidad asociada a una  $N(0, 1)$ . Así pues, sea  $a > 0$ , entonces:

- $P(Z \leq a) = F(a)$
- $P(Z \geq a) = 1 - P(Z < a) = 1 - F(a)$

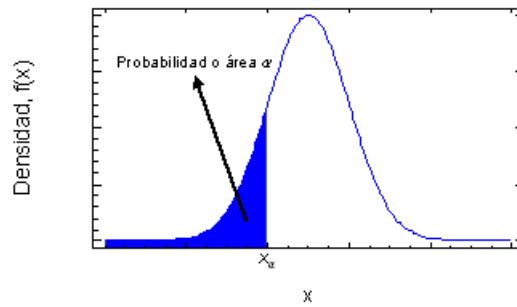


Figura 6.9: Cálculo del cuantil de orden  $\alpha$  de una distribución normal

- $P(Z \leq -a) = F(-a) = 1 - F(a)$
- $P(a \leq Z \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq Z < b) = P(a < X < b) = F(b) - F(a)$

### Cálculo de un valor de $x_\alpha$ a partir de una probabilidad conocida

Hasta ahora hemos calculado una probabilidad dado cualquier valor de  $X$ , es decir, se tenía un valor concreto de la variable aleatoria  $X$  y se deseaba hallar el área que queda por debajo de este valor. Pero a veces ocurre que se conoce la probabilidad y hay que determinar el valor de  $X$  que da lugar a dicha probabilidad.

Llamamos **cuantil de orden**  $\alpha$ ,  $x_\alpha$ , al punto de la distribución que deja por debajo de sí una probabilidad  $\alpha$  (Figura 6.9).

Estos valores se calculan utilizando las tablas de forma inversa.

### Relaciones entre las distribuciones binomial, Poisson, hipergeométrica y normal

Las distribuciones binomial, Poisson, hipergeométrica y normal están relacionadas entre sí, de forma que unas pueden aproximarse mediante otras cuando los parámetros cumplen una serie de condiciones. Específicamente:

1. La distribución hipergeométrica,  $H(N, n, k)$ , puede aproximarse mediante una binomial,  $B(n, p)$ , cuando  $\frac{n}{N} < 0.1$ , tomando  $p = \frac{k}{N}$ .
2. La distribución binomial,  $B(n, p)$ , puede aproximarse mediante:
  - una distribución de Poisson,  $P(\lambda)$ , cuando  $p < 0.1$ , tomando  $\lambda = np$ .
  - una distribución normal,  $N(\mu, \sigma)$ , cuando  $np > 10$ , tomando  $\mu = np$  y  $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ .
3. La distribución de Poisson,  $P(\lambda)$ , puede aproximarse mediante una distribución normal,  $N(\mu, \sigma)$ , cuando  $\lambda > 15$ , tomando  $\mu = \lambda$  y  $\sigma = \sqrt{\lambda}$ .

En resumen, se tiene el gráfico de la Figura 6.10.

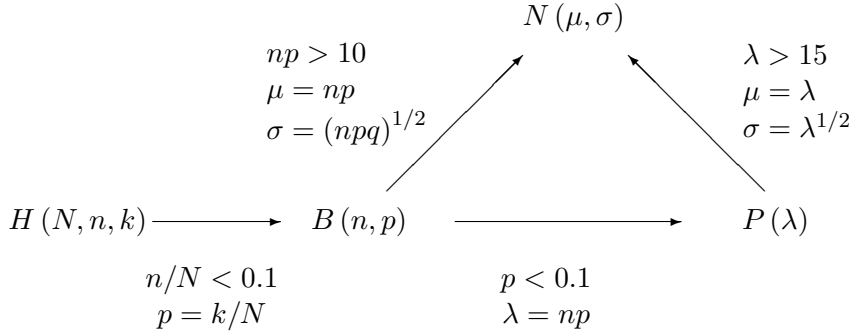


Figura 6.10: Aproximaciones entre distintas distribuciones

**Nota 6.2.10** Es importante tener en cuenta que en el caso continuo la probabilidad asociada a un valor concreto de la variable es nula, por tanto, cuando se aproxima una distribución discreta a una distribución normal, que es continua, se debe utilizar la corrección de continuidad de Fisher o corrección de medio intervalo. Esta corrección consiste en considerar cada valor discreto  $x$  como un intervalo de amplitud 1 de la forma  $[x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}]$ . Así pues:

- $P(X = x) \cong P(x - \frac{1}{2} \leq X' \leq x + \frac{1}{2})$
- $P(X \leq x) \cong P(X' \leq x + \frac{1}{2})$  (así se asegura que el valor  $x$  está siendo considerado)
- $P(X < x) \cong P(X' \leq x - \frac{1}{2})$  (así se asegura que el valor  $x$  no está siendo considerado)
- $P(X \geq x) \cong P(X' \geq x - \frac{1}{2})$  (así se asegura que el valor  $x$  está siendo considerado)
- $P(X > x) \cong P(X' \geq x + \frac{1}{2})$  (así se asegura que el valor  $x$  no está siendo considerado)