DD1351 Tenta 2020-01-08

1.

1.	$p \vee r \to q$	Premiss
2.	$q \to s$	Premiss
3.	p	Premiss
4.	$p \to r$	Antagande
5.	r	$\to_e$ 3,4
6.	$p \vee r$	$\vee_{i2}$ 5
7.	q	$\to_e$ 6,1
8.	s	$\to_e$ 7,2
9.	$(p \to r) \to s$	$\to_i$ 4-8

2. Vi kan enkelt se att det måste vara så att ett och endast ett alternativ är korrekt. Det korrekta alternativet är 6. Det kan visas på följande

sätt: Först visar vi $F_1 \models F_2$. Det kan vi visa genom att visa $F_1 \vdash F_2$

1.	$\forall x \exists y\, G(x,y)$	Premiss
2.	$\exists y\, G(a,y)$	$\forall x e$ 1
3.	$\exists x \exists y\, G(x,y)$	$\exists x i$ 2

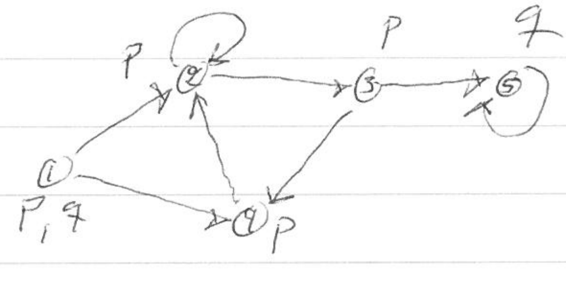
Vi visar sedan att $F_2 \not\models F_1$ genom att konstruera en modell där F_2 är sann men F_1 inte är det. En enkel sådan modell är att vi sätter $\mathcal{U} = \{a, b\}$ och $G(a,a)$ till sann och $G(a,b)$, $G(b,a)$ och $G(b,b)$ till falska.

3. a) A är inte satisfierbar. Om $\neg p \wedge \neg q$ är sann är $p \vee q$ falsk.

b) A är inte satisfierbar. Om $\neg q \wedge \neg r$ är sann är $q \vee r$ falsk.

c) A är satisfierbar. Vi kan t.ex. sätta q sann och p och r falska.

4. Modell kan ritas som:



$s_i \models EG\,p$ betyder att det finns en oändlig väg från s_i på vilken p är sann överallt. Vi ser att $s_2 \to s_3 \to s_4$ är en sådan väg. Denna väg kan också nås från s_1 där p är sann. Däremot finns det ingen väg från s_5 där p är sann.

Så EGP gäller i s_1, s_2, s_3, s_4

$s_i \models AFq$ betyder att om vi följer vilken oändlig väg som helst från s_i måste vi förr eller senare hamna i ett tillstånd där q är sant. Vi ser att s_1 och s_5 är de enda tillstånd där q gäller. I dessa tillstånd är då AFq också sant. Men från s_2, s_3, s_4 finns det en oändlig väg som undviker s_1, s_5 och därmed också q.

Så AFq gäller i s_1, s_5

5. Vad vi behöver är en formel

$\varphi(x)$ sådan att $\varphi(z/x) = [z = h(y,z)]$

och $\varphi(y/x) = [z = h(y,y)]$

Den enda möjliga formeln är

$\varphi(x) = [z = h(y,x)]$

6.

1.	$\exists x \forall y \forall z\, R(x,y,z)$	Premiss
2.	$x_0 \quad \forall y \forall z\, R(x_0,y,z)$	Antagande
3.	$a \quad \forall z\, R(x_0,a,z)$	$\forall y_e$ 2
4.	$b \quad R(x_0,a,b)$	$\forall z_e$ 3
5.	$\exists z\, R(z,a,b)$	$\exists z_i$ 4
6.	$\forall y \exists z\, R(z,a,y)$	$\forall y_i$ 4–5
7.	$\forall x \forall y \exists z\, R(z,x,y)$	$\forall x_i$ 3–6
8.	$\forall x \forall y \exists z\, R(z,x,y)$	$\exists x_e$ 1, 2–7

7. Version DD1351

Ett förslag är

```
tree(t(L,R)) :- tree(L), tree(R).

tree(E) :- \+ E=t(_,_).

tree_member(E, t(L,R)) :- tree_member(E,L)
        ; tree_member(E,R).

tree_member(E,E) :- \+ E=t(_,_).

elements_in_tree(T,E) :- elements_in_tree(T,E,[]).

elements_in_tree(t(L,R), A, C) :-
    elements_in_tree(L,A,B), elements_in_tree
                                        (R,B,C)

elements_in_tree(E,[E|B],B) :- \+ E=t(_,_)
```

8. a) Falskt. Om vi till exempel tar ett system i vilket man kan härleda allting så är det fullständigt men å andra sidan kan man då härleda φ och $\neg\varphi$ för vilken formel φ som helst, så systemet är inte konsistent.

b) Falskt. Om vi t.ex i satslogik använder enbart regeln $\frac{p \wedge q}{p}$ så är systemet konsistent men det finns tautologier vi inte kan härleda som t.ex $p \vee \neg p$. Så systemet är inte fullständigt.

c) Falskt. Vi kan t.ex ta satslogik med de två reglerna $\frac{}{p}$ och $\frac{}{\neg p}$. Systemet är inkonsistent men vi kan fortfarande inte härleda tautologin $q \vee \neg q$. Så systemet är ofullständigt.

(svaret sant kan godkännas om resonemanget går så här: Om systemet är en utvidgning av satslogik så är det känt att om systemet är inkonsistent så går vad som helst att härleda i systemet. Så systemet är fullständigt.)

d) Falskt. Detta påstående är logiskt ekvivalent med påstående b som vi redan har visat att det är falskt.

9. Vi kan t.ex sätta

$PU(\bar{X})=1$ om $\bar{X}=[\,]$

eller $\bar{X}=[(\,|\,[L,[)]]]$

och $PU(L)=1$

eller $\bar{X}=Append(L_1, L_2)$

och $PU(L_1)=PU(L_2)=1$

och

$PU(\bar{X})=0$ annars

11
~~10.~~ Ett satslogisk uttryck som bara kan innehålla → som konnektiv kan beskrivas rekursivt på följande sätt:

~~Impexp := <Variabel> | <Variabel> → <Impexp> | | <Impexp> → <~~

Impexp := <Variabel> | <Impexp> → <Impexp>

Det går att visa att formler av Impexp-typ har en speciell egenskap. Om vi sätter alla variabler till sanna så måste formeln vara sann. Det går att visa med strukturell induktion på följande sätt:

Basfall: $\psi = p$ (en variabel)

Om alla variabler sätts sanna så blir ψ sann.

Antag nu att $\psi = \varphi_1 \to \varphi_2$ och att påståendet är sant för φ_1 och φ_2. Om alla variabler sätts till sanna så blir φ_1 och φ_2 och därmed också ψ sanna.

Eftersom inte alla formler har denna egenskap (t.ex inte $\neg p$) så kan inte alla formler skrivas på Impexp-form.

0. Vi kan välja förvillkor $(\!| k \geq 1 \wedge n \geq 1 |\!)$
och eftervillkor $(\!| (z=1 \wedge k \mid n) \vee (z=0 \wedge k \nmid n) |\!)$
Programmet avgör om k delar n eller inte.
Vi kallar slutvillkoret för SV.

$(\!| k \geq 1 \wedge n \geq 1 |\!)$

If (K>N) {

$(\!| k \geq 1 \wedge n \geq 1 \wedge k > n |\!)$

$(\!| 0=0 \wedge k \nmid n |\!)$ *

Z=0;

$(\!| z=0 \wedge k \nmid n |\!)$ Tilldelning

SV*

$(\!| [(a-1) * k < n \wedge a \cdot k \geq n] \vee SV |\!)$ *

} Else {

$(\!| k \geq 1 \wedge n \geq 1 \wedge k \leq n |\!)$

$(\!| k \geq 1 \wedge n \geq 1 \wedge k \leq n \wedge 1 = 1 |\!)$ *

A=A+1;

$(\!| k \geq 1 \wedge n \geq 1 \wedge k \leq n \wedge a=1 |\!)$ Tilldelning

$(\!| (a-1) \cdot k < n |\!)$ * Slinginvariant

While (A*K<N) {

$(\!| (a-1) \cdot k < n \wedge a \cdot k < n |\!)$

$(\!| ((a+1)-1) k < n |\!)$ *

A=A+1;

$(\!| (a-1) \cdot k < n |\!)$

}

$(\!| (a-1) \cdot k < n \wedge a \cdot k \geq n |\!)$ Part-while

$(\!| [(a-1) \cdot k < n \wedge a \cdot k \geq n] \vee SV |\!)$ *

}

$(\!| [(a-1) \cdot k < n \wedge a \cdot k \geq n] \vee SV |\!)$ If-else

If (A*K=N) {

$(| \big[[(a-1)*k \land a \cdot k \geq n] \lor SV \big] \land a \cdot k = n |)$

$(| [1 = 1 \land k | n] \lor SV |)$

z=1;

$(| [z = 1 \land k | n] \lor SV |)$

SV^*

} Else {

$(| \big[[(a-1) \cdot k < n \land a \cdot k \geq n] \lor SV \big] \land a \cdot k \neq n |)$

$(| [0 = 0 \land k \nmid n] \lor SV |)$

z=0;

$([z = 0 \land k \nmid n] \lor SV |)$

SV^*

}

SV

If-else