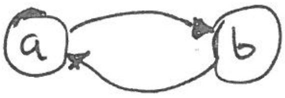
Övn 4

$\Phi = \forall x\, (\neg (x = s(x)))$

- Find a model where Φ holds, and another model where it doesn't.

Hitta två modeller i vilka Φ är sann.

$$\mathcal{M}_1 \begin{cases} A^{\mathcal{M}_1} = \{a, b\} \\ s^{\mathcal{M}_1} = \{(a,b), (b,a)\} \end{cases}$$



$s^{\mathcal{M}_1}(a) = b$, $s^{\mathcal{M}_1}(b) = a$

$\mathcal{M}_1 \models \Phi$ (Φ är sann i $\mathcal{M}_1$) eftersom det gäller för alla x i A att $x \neq s^{\mathcal{M}_1}(x)$: $a \neq s^{\mathcal{M}_1}(a) = b$

$b \neq s^{\mathcal{M}_1}(b) = a$.

$$\mathcal{M}_2 \begin{cases} A^{\mathcal{M}_2} = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\} \\ s^{\mathcal{M}_2}(x) = \{(0,1), (1,2), (2,3), \dots\} = x + 1 \end{cases}$$

$\mathcal{M}_2 \models \Phi$ eftersom $x \neq x+1$ för alla $x \in \mathbb{N}$.

<u>Studenterna gör</u>:

- The same; a model where Φ holds and another one where ...

Hitta två modeller som gör Φ falsk.

T. ex
$$\mathcal{M}_3 = \begin{cases} A^{\mathcal{M}_3} = \{a, b\} \\ s^{\mathcal{M}_3} = \{(a,b), (b,b)\} \end{cases}$$

$\mathcal{M}_3 \not\models \Phi$ eftersom $b = s(b)$.

$$\mathcal{M}_4 = \begin{cases} A^{\mathcal{M}_4} = \mathbb{N} \\ s^{\mathcal{M}_4}(x) = x \quad \text{(identitets-funktionen)} \end{cases}$$

$\mathcal{M}_4 \not\models \Phi$ eftersom t. ex $0 = s^{\mathcal{M}_4}(0)$

Visa att $\exists x \forall y (P(x,y))$ <u>inte</u> är en <u>logisk konsekvens</u> av $\forall y \exists x (P(x,y))$.

$\not\models$

logical consequence of $\models$
(logical entailment)

Det räcker att vi hittar en modell $\mathcal{M}$ som gör premissen $\forall y \exists x (P(x,y))$ sann, men slutsatsen $\exists x \forall y (P(x,y))$ falsk, t.ex följande modell:

$$\mathcal{M} : \begin{cases} A^{\mathcal{M}} = \mathbb{N} \\ P^{\mathcal{M}} = \text{"större än"} = \{(1,0), (2,1), (2,0), (3,2), (3,1), \ldots \end{cases}$$

För varje naturligt tal n finns det ett annat tal som är större (t.ex. $n+1$), dvs premissen är sann.

Men det finns inget tal som är större än alla tal.

Alltså: $\forall y \exists x (P(x,y)) \not\models \exists x \forall y (P(x,y))$

<u>Or:</u>

$=|$

Är $\forall y \exists x (P(x,y))$ en logisk konsekvens av $\exists x \forall y (P(x,y))$

<u>Ja!</u> Informellt resonemang:

Låt $\mathcal{M}$ vara en modell i vilken $\exists x \forall y (P(x,y))$ är sann.

Då finns ett element $a \in A$ som är relaterat till alla $y \in A$ under relationen P. Men detta innebär ju att alla $y \in A$ har något element som är relaterat till y, nämligen a. Alltså är

$$\mathcal{M} \models \forall y \exists x (P(x,y))$$

Natural deduction would be the way to make a formal proof, via <u>soundness</u>!

Om det finns tid kvar:

Studenterna gör:

1. Visa att $\forall x\,(0+x=x) \not\models 1+0=1$

2. Visa att $\forall x\,(0\cdot x=0) \not\models 1\cdot 0=0$

---

(1) T.ex $\mathcal{M} = \begin{cases} A = \mathbb{N} \\ x+y=y & \text{(dvs en funktion som returnerar sitt andra argument)} \\ 0,1 = \text{siffrorna } 0 \text{ resp. } 1 \end{cases}$

(2) T.ex $\mathcal{M} = \begin{cases} A = \mathbb{N} \\ x\cdot y = x & \text{(en funktion som returnerar sitt första argument)} \\ 0,1 = \text{siffrorna } 0 \text{ resp. } 1 \end{cases}$

- A formula which is only true in infinite models?

One solution:

$$\boxed{\begin{array}{l} (1)\ \forall x\, \neg(c=f(x)) \\ (2)\ \forall x \forall y\, (f(x)=f(y) \to x=y) \end{array}}$$

Consider the set $c^{\mathcal{M}}, f^{\mathcal{M}}(c^{\mathcal{M}}), f^{\mathcal{M}}(f^{\mathcal{M}}(c^{\mathcal{M}})), \ldots$

$f^{\mathcal{M}}(c^{\mathcal{M}}) \neq c^{\mathcal{M}}$ because of (1)

$f^{\mathcal{M}}(f^{\mathcal{M}}(c^{\mathcal{M}})) \neq c^{\mathcal{M}}$ because of (1)

$f^{\mathcal{M}}(f^{\mathcal{M}}(c^{\mathcal{M}})) \neq f^{\mathcal{M}}(c^{\mathcal{M}})$ because of (2)

$\vdots$