DD1351 - DD1350 Logik för dataloger

LÖSNINGSFÖRSLAG TILL TENTAMEN 19-01-09

Johan Karlander
KTH EECS

1. Bevis:

1	$\neg q \to s$	Premiss
2	$s \to p$	Premiss
3	$\neg(p \lor q)$	Antagande
4	$\neg q$	Antagande
5	s	$\to_e$4,1
6	p	$\to_e$ 5, 2
7	$p \lor q$	$\lor_{i1}$ 6
8	$\bot$	$\neg_e$ 7, 3
9	$\neg\neg q$	$\neg_1$ 3-8
10	q	$\neg\neg_e$ 9
11	$p \lor q$	$\lor_{i2}$ 10
12	$\bot$	$\neg_e$ 11, 3
13	$\neg\neg(p \lor q)$	$\neg_i$ 3-12
14	$p \lor q$	$\neg\neg_e$ 13

2. Vi kan konstruera en modell med $U = \{Knatte, Tjatte, Fnatte]$. Vi sätter $F(Knatte, Tjatte)$ och $F(Tjatte, Knatte)$ sanna och inga andra relationer sanna. F2 är ekvivalent med $\forall x(\exists y V(x,y) \land \exists z F(x,z))$. Detta uttryck betyder att alla har minst en vän och minst en fiende. Det är inte sant i vår modell. (Ingen har någon vän.) Vi tittar nu på F1. Vilket x vi än tar så är $\exists y V(x,y)$ falsk. Det betyder att $\exists y V(x,y) \to \exists z F(x,z)$ sann för alla x. Det visar att F1 är sann i modellen. Formeln $\exists y V(x,y) \to \exists z F(x,z)$ betyder att *om* x har en vän *så* har x en fiende. Så (för) alla (x) som har en vän har (x) också en fiende. Det är A. Så F1 betyder samma sak som A.

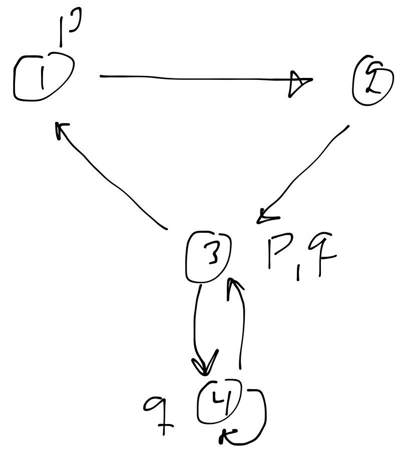
3. I samtliga fall kan man använda sanningsvärdestabeller. Vi visar ändå hur kortare semantiska resonemang kan se ut.

   (a) Är sann. Om $(p \lor q) \land r$ är sann måste p eller q vara sann. Dessutom måste r vara sann.. Om p är sann är $p \lor (q \land r)$ sann. Om q är sann så är $q \land r$ sann. Då är också $p \lor (q \land r)$ sann. I båda fall är $p \lor (q \land r)$ sann.

   (b) Är falsk. Ett motexempel är p : sann, q : falsk, r : sann. Då är vänsterledet sant men högerledet falskt.

   (c) Är sann. Om vänsterledet är sant måste $p \to (q \to r)$ vara falsk. Då måste p vara sann och $q \to r$ vara falsk. Enda sättet att få vänsterledet sant är att sätta p : sann, q : sann, r falsk. Då är högerledet $(p]$ sant.

4. Modellen ser ut så här:



   (a) $\mathcal{M}, s_i \models \mathsf{AG}\ p$ betyder att i alla tillstånd på alla vägar från s_i gäller p. Det går att se att $\mathsf{AG}\ p$ inte gäller i något tillstånd. $\mathcal{M}, s_i \models \mathsf{AF}\ \mathsf{AG}\ p$ betyder att på alla vägar från s_i finns det minsta ett tillstånd där $\mathsf{AG}\ p$ gäller. Men några sådana tillstånd finns ju inte. Så $\mathcal{M}, s_i \models \mathsf{AF}\ \mathsf{AG}\ p$ gäller inte i något tillstånd.

   (b) $\mathcal{M}, s_i \models \mathsf{EG}\ q$ betyder att det från s_i finns en väg sådan att det i alla tillstånd på vägen gäller att q är sant. Detta kan vi se är sant för s_3 och s_4. $\mathcal{M}, s_i \models \mathsf{EF}\ \mathsf{EG}\ q$ betyder att det från s_i finns något tillstånd på någon väg där $\mathsf{EG}\ q$ gäller. Eftersom s_3 (och s_4) kan nås från varje tillstånd gäller $\mathcal{M}, s_i \models \mathsf{EF}\ \mathsf{EG}\ q$ i varje tillstånd.

5. Förvillkor: $(\!| X = x_0 \wedge Y = y_0 \wedge Z = z_0 |\!)$
   Det egentliga problemet är att X kan byta värde under beräkningen så vi måste ange startvärdet. (Strikt taget är det bara $(\!| X = x_0 |\!)$ som behövs men det symmetriska uttrycket vi angivit är att föredra.)

   Eftervillkor: $(\!| (X = x_0 \wedge x_0 \geq y_0 \wedge x_0 \geq z_0) \vee (X = y_0 \wedge y_0 \geq x_0 \wedge y_0 \geq z_0) \vee (X = z_0 \wedge z_0 \geq x_0 \wedge z_0 \geq y_0) |\!)$
   X måste vara det största av x_0, y_0, z_0. Ett sätt att uttrycka det är att X är lika med något av x_0, y_0, z_0 och att detta tal är minsst lika stort som de andra. Det är innebörden av uttrycket. Ekvivalenta varianter finns förstås.

6. Ett möjligt bevis är:

1	$\forall x(P(x) \to \exists y\, G(x,y))$	Premiss
2	$\forall x\, \forall y(\neg G(x,y))$	Antagande
3	a	
4	$P(a)$	Antagande
5	$P(a) \to \exists y\, G(a,y)$	$\forall_{xe}$ 1
6	$\exists y\, G(a,y)$	$\to_e$ 4,5
7	$b\, G(a,b)$	Antagande
8	$\forall y\, \neg G(a,y)$	$\forall_{xe}$ 2
9	$\neg G(a,b)$	$\forall_{ye}$ 8
10	$\perp$	$\perp$ 7,9
11	$\perp$	$\exists_{xe}$ 6, 7-10
12	$\neg P(a)$	$\neg_i$ 4-11
13	$\forall x \neg P(x)$	$\forall_{xi}$ 3-12
14	$\forall x\, \forall y\, \neg G(x,y) \to \forall x\, \neg P(x)$	$\to_i$ 2-13

7. Version DD1351

   Svaret på varför den givna rättframma definitionen loopar är att

   Det första anropet till $app(L1, L2, Lt)$ har samtliga variabler obundna och då kan sökträdet växa obegränsat.

   En korrigerad variant är app3b med denna definition:

   $app3b(L1, L2, L3, L) : -append(Lt, L3, L), append(L1, L2, Lt).$

   På detta sätt binds variabeln Lt av det första anropet append(Lt,L3,L)

   och $append(L1, L2, Lt)$ ger då ett finit sökträd som vi önskar.

   Version DD1350

   $Halv([], [])$

   $Halv([a], [a])$

   $Halv([a|L_1], [a, b, |L_2])$ om $Halv(L_1, L_2)$.

8. Vi översätter alla påståendena:

   (a) $a \leftrightarrow b \wedge c \wedge d \wedge e \wedge f$

   (b) $b \leftrightarrow \neg c \wedge \neg d \wedge \neg e \wedge \neg f$

   (c) $c \leftrightarrow a \wedge b$

   (d) $d \leftrightarrow a \vee b \vee c$

   (e) $e \leftrightarrow \neg a \wedge \neg b \wedge \neg c \wedge \neg d$

   (f) $f \leftrightarrow \neg a \wedge \neg b \wedge \neg c \wedge \neg d \wedge \neg e$

Det rätta påståendet är e. Det kan visas så här:

(a) Antag att a är sann. Då är bl.a. b och c sanna. Men b säger bl.a. att c är falsk. Så b och c kan inte vara sanna samtidigt, som a säger. Så a måste vara falsk.

(b) Eftersom a är falsk kan inte c vara sann. Så c är falsk.

(c) Antag att d är sann. Eftersom a och c är falska måste då b vara sann. Men b säger bl.a. att d är falsk. Så d måste vara falsk.

(d) Föregående steg visar då också att $a \vee b \vee c$ måste vara falsk vilket medför att b är falsk.

(e) Vi kan nu direkt se att e är sann eftersom vi visat att a, b, c, d alla är falska.

(f) Vi ser slutligen att f måste vara falsk eftersom f bl.a. säger att e är falsk.

9. (a)

   $DT(T, T)$
   $DT(T, t < T_1, T_2 >)$ om $DT(T, T_1)$ eller $DT(T, T_2)$

   (b) För induktionsbeviset behöver vi definitionen av $n(T)$. Den är:
   $n(leaf) = 0$
   $n(t < A, B >) = n(A) + n(B) + 1$
   Vi gör induktion över T_2. $DT(T_2, T_2) = TRUE$ och $n(T_2) = n(T_2)$
   Antag nu att påståendet är sant för alla träd mindre än T_2. Antag att $T_2 = t(< A, B >$ och att $DT(T_1, t < A, B >) = TRUE$. Antag först att $DT(T_1, A) = TRUE$. Då gäller enligt induktionsantagandet $n(T_1) \leq n(A) \leq n(A)+n(B)+1 = n(T_2)$. Så $n(T_1) \leq n(T_2)$. Antag sedan att $DT(T_1, B) = TRUE$. På samma sätt får vi då också $n(T_1) \leq n(T_2)$. Så $n(T_1) \leq n(T_2)$ är alltid sant.

10. ...

En möjlig lösning med lämpliga för och eftervillkor

$(| X = x_0 \land x_0 \geq 0 \land Y = y_0 \land y_0 \geq 1 |)$

$(| X = 0 \cdot Y + X \land 0 \leq X |)$ $\quad \times$

$K = 0;$

$(| X = KY + X \land 0 \leq X |)$

$R = X;$ $\qquad$ (Med $\varphi(z): X = KY + z \land 0 \leq z$)

$(| X = KY + R \land 0 \leq R |)$

while $(R \geq Y)$ {

$\quad (| X = KY + R \land 0 \leq R \land R \geq Y |)$

$\quad (| X = (K+1)Y + R - Y \land 0 \leq R - Y |)$ $\quad \times$

$\quad R = R - Y;$

$\quad (| X = (K+1)Y + R \land 0 \leq R |)$

$\quad K = K+1$

$\quad (| X = KY + R \land 0 \leq R |)$

}

$(| X = KY + R \land 0 \leq R \land R < Y |)$

Slinginvarianten är $(| X = KY + R \land 0 \leq R |)$

Bevisförpliktelser är markerade med $\times$.

11. (a) Ett bevis för LEM kan se ut så här:

1	$\neg(\phi \vee \neg\phi)$	Antagande
2	ϕ	Antagande
3	$\phi \vee \neg\phi$	$\vee_{i1}$ 1
4	$\bot$	$\neg_e$ 3, 1
5	$\neg\phi$	$\neg_i$ 1-4
6	$\phi \vee \neg\phi$	$\vee_{i2}$ 5
7	$\bot$	$\neg_e$ 6, 1
8	$\neg\neg(\phi \vee \neg\phi)$	$\neg_i$ 1-7
9	$\phi \vee \neg\phi$	$\neg\neg_e$ 8

(b) Antag att vi kan härleda $\bot$ från ϕ. Genom att använda regeln $\bot_e$ kan vi då också härleda $\neg\phi$ från ϕ. Vi antar nu att vi kan använda LEM. Då kan vi *bevisa* $\phi \vee \neg\phi$. Vi kan nu starta ett delbevis med ϕ som antagande och komma fram till $\neg\phi$ sist i delbeviset. Vi kan sedan göra ett ”delbevis” med $\neg\phi$ som antagande *och* som slutresultat. Så både ϕ och $\neg\phi$ leder fram till $\neg\phi$. Om vi nu använder regeln $\vee_e$ på $\phi \vee \neg\phi$ och de båda delbevisen får vi ett bevis för $\neg\phi$.