

Максимизација профита “UMANLP”

Петар Самарџић

15.12.2024.

1 Опис проблема

Ефикасно пројектовање мрежа представља кључни аспект разних индустрија (нпр. транспорт, телекомуникације, итд.). Чворишне мреже (hub networks) представљају тип мреже у којој диференцирамо два врсте чворова: централне (hub nodes) и споредне (non-hub nodes). Централне чворове можемо посматрати као централе са напредном инфраструктуром за ефикасно дистрибуирање саобраћаја, а споредне као мање локације које се ослањају на централне да би задовољили свој проток. Пут између споредног и централног чвора називамо путем алокације (allocation arc), а пут између два централна чвора називамо централним путем (hub arc). Централни путеви су посебно значајни јер побољшана инфраструктура на оба краја имплицира ниже трошкове транспорта.

Проблем пројектовања чворишних мрежа (HNDP) представља проблем оптимизације који укључује одређивање локација централних чворова, алоцирање путева (arcs) између чворова, усмеравање токова ради оптимизације одређеног циља, итд. Када путевима и чворовима не намећемо горњу границу за проток, кажемо да је проблем без капацитета (uncapacitated). Када је дозвољено да споредни чвор има више путева алокације, кажемо да је проблем са вишеструком алокацијом (with multiple allocation), а у супротном са једноструком алокацијом (with single allocation).

Углавном је циљ HNDP-а да се конструише мрежа која задовољава тражене протоке уз минималне трошкове. Алтернативно томе се јављају проблеми максимизације профита (PMHNDP), где је допуштено и да се не задовоље захтевани протоци у случају да су неки захтеви непрофитабилни. У овом раду ћемо се бавити проблемом из [1], PMHNDP-ом без капацитета са вишеструком алокацијом. Кренувши од скупа чворова, сматраћемо да су сви чворови нивоа споредног и да су међусобно повезани. Питање које решавамо је које чворове и путеве треба надоградити до нивоа централних да би профит био максимизован. Додатно, намећемо још следећа 4 услова:

- 1) није обавезно да сви централни чворови буду међусобно повезани
- 2) директан транспорт између два споредна чвора није дозвољен
- 3) модел одређује колико и које централне чворове и путеве је профитабилно надоградити
- 4) трошкови надоградње до централних чворова и путева су фиксни

2 Математичка формулација

Да бисмо формулисали проблем, морамо да уочимо разне променљиве. За њих користимо следеће ознаке:

- N - скуп (потенцијалних централних) чворова

- ω_{ij} - тражени проток између чворова $i \in N$ и $j \in N$
- r_{ij} - зарада од јединичне трансакције између чворова $i \in N$ и $j \in N$
- c_{ij} - трошак јединичног транспорта између чворова $i \in N$ и $j \in N$
- α - “попуст” за транспорт по централном путу
- s_i - трошак надоградње чвора $i \in N$
- h_i - индикатор да је чвор $i \in N$ централан
- g_{ij} - трошак надоградње пута између чворова $i \in N$ и $j \in N$
- z_{ij} - индикатор да је пут између чворова $i \in N$ и $j \in N$ централан
- a_{ijk} - проценат протока ω_{ij} чији је први централни чвор $k \in N$
- b_{ijk} - проценат протока ω_{ij} чији је последњи централни чвор $k \in N$
- x_{ijkl} - проценат протока ω_{ij} који пролази кроз централни пут између чворова $k \in N$ и $l \in N$

Сада кад смо разјаснили ознаке можемо да напишемо проблем:

$$\text{Максимизуј:} \quad \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} r_{ij} \omega_{ij} a_{ijk} - \left[\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} c_{ik} \omega_{ij} a_{ijk} + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} c_{kj} \omega_{ij} b_{ijk} + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} \sum_{\substack{l \in N \\ l \neq k}} \alpha c_{kl} \omega_{ij} x_{ijkl} + \sum_{i \in N} s_i h_i + \sum_{i \in N} \sum_{\substack{j \in N \\ j \neq i}} g_{ij} z_{ij} \right] \quad (1)$$

$$\text{Уз ограничења:} \quad \sum_{k \in N} a_{ijk} \leq 1 \quad i, j \in N \quad (2)$$

$$\sum_{k \in N} b_{ijk} \leq 1 \quad i, j \in N \quad (3)$$

$$a_{ijk} + \sum_{\substack{l \in N \\ l \neq k}} x_{ijlk} = b_{ijk} + \sum_{\substack{l \in N \\ l \neq k}} x_{ijkl} \quad i, j, k \in N \quad (4)$$

$$a_{ijk} \leq h_k \quad i, j, k \in N \quad (5)$$

$$b_{ijk} \leq h_k \quad i, j, k \in N \quad (6)$$

$$x_{ijkl} \leq z_{kl} \quad i, j, k, l \in N; k \neq l \quad (7)$$

$$z_{ij} \leq h_i \quad i, j \in N; i \neq j \quad (8)$$

$$z_{ij} \leq h_j \quad i, j \in N; i \neq j \quad (9)$$

$$x_{ijkl} \geq 0 \quad i, j, k, l \in N; k \neq l \quad (10)$$

$$a_{ijk} \geq 0 \quad i, j, k \in N \quad (11)$$

$$b_{ijk} \geq 0 \quad i, j, k \in N \quad (12)$$

$$h_i \in \{0, 1\} \quad i \in N \quad (13)$$

$$z_{ij} \in \{0, 1\} \quad i, j \in N; i \neq j \quad (14)$$

Једначина (1) је наш профит. Добијамо формулу тако што прво додамо приходе од свих активних токова, а затим одузимамо редом цене транспорта на улазном путу у “мрежу централних чворова”¹, цене транспорта на излазном путу из “мреже централних чворова”²,

¹У случају да је полазна тачка i већ централни чвор, онда ће заправо a_{iji} служити као проценат захтева који шаљемо од i до j . Тиме ћемо и урачунати приход од транспорта на рути i - j , “улазни” трошак неће бити урачунат јер је $c_{ii} = 0$ и касније наметнуте рестрикције (2)-(6) задржавају своје значење.

²Аналогно прошлој фусноти b_{ijj} служи за случај кад је крајња тачка j већ централни чвор.

цене транспорта на централним путевима и на крају фиксне трошкове надоградње чворова и путева.

Остале једначине представљају рестрикције. (2) и (3) се старају о томе да од чвора i до чвора j не шаљемо више од траженог протока. Једначина (4) је једначина одржања протока на рути $i-j$ у чвору k . (5) и (6) осигуравају да су надограђени до централних одговарајући чворови дуж којих желимо да пустимо проток ω_{ij} . (7) гарантује да се проток између централних чворова одвија по централном путу. (8) и (9) говоре да пут може бити централан једино ако су централни и почетни и крајњи чвор. (10)-(14) нам говоре о домену одговарајућих непознатих.

3 Опис инстанци

Улазне податке набављамо из Australian Post (AP) скупа података, уведен у [2]. Дат је скуп са ω_{ij} и x и y координате за $|N| = 200$. Трошкове c_{ij} дефинишемо као еуклидску дистанцу између два чвора коју рачунамо из њихових координата. Такође су дата и два скупа за s_i , са ознакама T и L (означимо их са S_T и S_L). У овом раду је такође представљен и алгоритам (може се пронаћи и на [овој страници](#)) за смањивање кардиналности ових скупова, који функционише тако што почетних 200 чворова подели у више група са истим бројем чланова, и затим групе третира као нове чворове чије вредности споменутих променљивих рачуна као тежинске средине својих чланова.

У тоталу ћемо представити $2*3*3*2 = 36$ инстанци. Вредности за s_i ћемо узети прво из S_T , а затим из S_L . $|N|$ узима вредности из скупа $\{20, 25, 40\}$, r из скупа $\{2000, 3000, 5000\}$ и α из скупа $\{0.4, 0.8\}$. Представићемо податке у две табеле, где једна табела одговара једном изворном скупу вредности s_i . Инстанце именујемо преко вредности остала три алгоритма, онда нпр. $N20-r2000-\alpha0.4$ представља инстанцу где је $N = 20$, $r = 2000$ и $\alpha = 0.4$ (изворни скуп вредности је јасан пошто је табела подељена по том аргументу).

4 Резултати и дискусија

Табела 1 представља резултате за описане инстанце на скупу S_T . Приметимо прво да је (за фиксно $|N|$) број централних чворова позитивно корелисан са профитом. То има смисла с обзиром да чворове надограђујемо једино ако испада да уштеда коју бисмо добили јефтинијим транспортом надјачава трошкове надоградње. Даље уочимо да ако одржавамо $|N|$ и r , а повећамо α са 0.4 на 0.8, да профит и број централних чворова опадне (или остане једнак). То се такође логички уклапа, пошто повећавањем α имплицитно повећавамо трошкове транспорта робе, што опет имплицитно говори о профитабилности надоградње неких чворова. За крај приметимо да како r расте (за фиксне остале параметре) расту и профит и број централних чворова, јер веће r повлачи већу зараду и тиме већу исплативост неких надоградњи.

Табела 2 представља резултате за описане инстанце на скупу S_L . Одмах уочимо да можемо да извучемо исте закључке као што смо извукли из прошле табеле. Даље, пошто су цене у S_L благо веће од цена у S_T , видимо како је профит (а тиме и број централних чворова) у другој табели мањи него у првој за исте $|N|$, r и α . Због тога у овој табели можемо боље да уочимо појаву малог броја надоградњи. Надоградња чвора, поред потенцијалног попуста у транспорту, има и улогу да заобиђе наметнут услов забране транспорта између два споредна чвора. У случајевима кад имамо само пар централних чворова, углавном немамо ниједан централни пут (дакле нема попуста у транспорту), већ профитабилност тих чворева зависи искључиво од добијене могућности да се између суседних споредних чворова транспорт (а тиме и зарада) може вршити кроз тај један чвор. Више од једног чвора имамо јер чворови нису равномерно удаљени већ можемо уочити више група “ближих” чворова, па испадне најисплативије да имамо један велик аеродром по групи.

Инстанца	Оптимално решење	Време извршавања [s]	Број итерација	Број централних чворова
$N20-r2000-\alpha0.4$	563838.0	22.44	166349	6
$N20-r2000-\alpha0.8$	425053.7	20.41	168929	6
$N20-r3000-\alpha0.4$	1322993.0	22.25	155044	13
$N20-r3000-\alpha0.8$	766414.3	24.62	164719	10
$N20-r5000-\alpha0.4$	4089299.0	25.41	127652	20
$N20-r5000-\alpha0.8$	2251949.0	26.68	149404	19
$N25-r2000-\alpha0.4$	442986.2	77.66	403526	7
$N25-r2000-\alpha0.8$	276874.6	81.24	408837	6
$N25-r3000-\alpha0.4$	1238492.0	91.57	385604	12
$N25-r3000-\alpha0.8$	644459.7	90.22	398435	12
$N25-r5000-\alpha0.4$	3943655.0	89.76	324090	23
$N25-r5000-\alpha0.8$	2049194.0	86.57	376109	18
$N40-r2000-\alpha0.4$	282132.1	3454.49	2641048	5
$N40-r2000-\alpha0.8$	173384.0	1229.75	2663780	3
$N40-r3000-\alpha0.4$	903466.0	2459.48	2595456	10
$N40-r3000-\alpha0.8$	420751.5	2489.75	2651623	5
$N40-r5000-\alpha0.4$	3186708.0	2248.93	2368657	30
$N40-r5000-\alpha0.8$	1525727.0	3133.16	2598315	11

Табела 1

Инстанца	Оптимално решење	Време извршавања [s]	Број итерација	Број централних чворова
$N20-r2000-\alpha0.4$	275429.6	27.08	168417	4
$N20-r2000-\alpha0.8$	175094.0	25.58	171429	3
$N20-r3000-\alpha0.4$	944297.7	31.59	160397	9
$N20-r3000-\alpha0.8$	438855.2	27.45	168865	5
$N20-r5000-\alpha0.4$	3562046.0	28.24	130427	20
$N20-r5000-\alpha0.8$	1829583.0	25.84	152951	18
$N25-r2000-\alpha0.4$	0.0	92.43	417578	0
$N25-r2000-\alpha0.8$	0.0	89.34	417844	0
$N25-r3000-\alpha0.4$	561693.6	99.10	397727	7
$N25-r3000-\alpha0.8$	152865.4	85.65	412641	3
$N25-r5000-\alpha0.4$	2782931.0	94.77	354216	19
$N25-r5000-\alpha0.8$	1250642.0	85.33	394488	11
$N40-r2000-\alpha0.4$	0.0	2594.68	2675231	0
$N40-r2000-\alpha0.8$	0.0	2665.23	2676916	0
$N40-r3000-\alpha0.4$	42287.20	3541.59	2664839	2
$N40-r3000-\alpha0.8$	33053.8	3286.30	2669459	2
$N40-r5000-\alpha0.4$	1449909.0	3849.40	2571492	13
$N40-r5000-\alpha0.8$	664691.8	3193.77	2664269	3

Табела 2

5 Код

На [овој страници](#) можете пронаћи код који сам користио. Такође су прикачени текстуални фајлови које сам добио применом споменутог алгоритма на AP скуп података, и које сам користио за добијање презентованих резултата.

Литература

- [1] F.A. Oliveira, E.M de Sá, S.R. de Souza, M.J.F. Souza. *ILS-based algorithms for the profit maximizing uncapacitated hub network design problem with multiple allocation*. [ScienceDirect](#), 2023.
- [2] A.T. Ernst, M. Krishnamoorthy. *Efficient algorithms for the uncapacitated single allocation p -hub median problem*. [ScienceDirect](#), 1996.