Теорија апроксимација

Робустна метода најмањих квадрата

Студент:
Петар Самарџић
010/21

Професор:
проф. др. Зорица Станимировић

Асистент:
Кристина Костић

27.01.2024.

Садржај

1 Уводна теорија **2**
1.1 Апроксимација у нормираном векторском простору 2
1.2 Апроксимација у Хилбертовом простору 4

2 Апроксимација функције на основу скупа измерених вредности **8**
2.1 Конструкција одговарајућег Хилбертовог простора 8
2.2 Робустна метода најмањих квадрата 10

1

Уводна теорија

1.1 Апроксимација у нормираном векторском простору

Подсећање 1. *Нека је V векторски простор над пољем $\mathbb{C}$.* ***Норма*** *је пресликавање $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^+$ са следећим својствима:*

1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

где су x и y произвољни вектори из V, а λ произвољан скалар из $\mathbb{C}$.

Подсећање 2. ***Нормирани векториски простор*** *је векторски над пољем $\mathbb{C}$ на ком је дефинисана нека норма.*

Подсећање 3. *Нека су $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ две норме на векторском простору V. Оне су* ***еквивалентне*** *ако постоје константе $c, C \in \mathbb{R}$ такве да важи $(\forall x \in V)$ $c\|x\|_1 \leq C\|x\|_2 \leq \|x\|_1$. Специјално, ако је V коначнодимензиони вектроски простор, онда су* ***сваке*** *две норме еквивалентне.*

Нека је V нормирани векторски простор. Нама су дати линеарно независни елементи $\{g_i\}_{i=1}^n$ и наш задатак ће бити да њиховом линеарном комбинацијом апроксимирамо неки елемент f. Једноставан пример може бити да смо у нормираном векторском простору непрекидних функција и покушавамо да апркосмирамо неку функцију f полиномом степена највише n, тј. као линеарну комбинацију линеарно независних функција $1, x, ..., x^n$.

Дефиниција 1. *Ако постоји, **елемент најбоље апроксимације** ће бити линеарна комбинација линеарно независних елемената* $\{g_i\}_{i=1}^n$ *која је најближа елементу* f *по норми простора* V*, тј. линеарну комбинација за коју важи:*

$$E_f^o = \|f - F_f^o\| = \|f - \sum_{i=1}^n c_i^o g_i\| = \inf_{(c_1,...,c_n)\in\mathbb{C}^n} \|f - \sum_{i=1}^n c_i g_i\|$$

Са F_f^o *означавамо елемент најбоље апроксимације, а са* E_f^o *његову **грешку**.*

Покажимо сада две теореме које ће нам бити од значаја.

Теорема 1. *У нормираном векторском простору постоји елемент најбоље апроксимације.*

Доказ. Дефинишимо функцију $E_f(c_1, ..., c_n) = \|f - \sum_{i=1}^n c_i g_i\|$. Из:

$$|E_f(b_1,...,b_n) - E_f(a_1,...,a_n)| = |\|f - \sum_{i=1}^n b_i g_i\| - \|f - \sum_{i=1}^n a_i g_i\|| \leq$$
$$\leq \|f - \sum_{i=1}^n b_i g_i - f + \sum_{i=1}^n a_i g_i\| = \|\sum_{i=1}^n (b_i - a_1) g_i\| \leq \sum_{i=1}^n |b_i - a_1|\|g_i\| \leq$$
$$\leq M \sum_{i=1}^n |b_i - a_i|$$

где је $M = \max_{i\in\{j\}_{j=1}^n} \|g_i\|$, следи да је E_f Липшиц[1] непрекидна по L_1 норми, па самим тим и по произвољној норми јер имамо коначнодимензиони домен. Пошто је E_f Липшиц непрекидна, онда је и непрекидна. Такође, како ово важи за свако f, тако ће и функција $E_0 = \|\sum_{i=1}^n c_i g_i\|$ бити непрекидна, као и њена рестрикција на јединичну сферу по L_2 норми. Пошто је јединична сфера компактан скуп, онда функција E_0 достиже минимум E_0^o, и то је $E_0^o \neq 0$, због линеарне независности $\{g_i\}_{i=1}^n$. Приметимо да онда можемо да ограничимо E_0 за ненула векторе на следећи начин:

$$E_0(c_1,...,c_n) = \|\sum_{i=1}^n c_i g_i\| = \|\mathbf{c}\|_2 \|\sum_{i=1}^n \frac{c_i}{\|c\|_2} g_i\| = \|\mathbf{c}\|_2 E_0(\frac{\mathbf{c}}{\|\mathbf{c}\|_2}) \geq \|\mathbf{c}\|_2 E_0^o$$

Тривијално се проверава да прошла неједнакост важи и за нула вектор, па тиме важи и свуда на домену.

[1]Липшиц - Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832-1903)

Приметимо да је $E_f(0, ..., 0) = \|f\|$. E_f је непрекидна функција, па је и непрекидна на затвореној лопти око нуле полупречника $r = \frac{2\|f\|}{E_0^o}$. Затворена лопта је компакт, па E_f достиже минимум $E_f^o = E_f(c_1^o, ..., c_n^o)$. Пошто $(0, ..., 0)$ припада овој лопти, самим тим је $E_f^o \leq F_f(0, ..., 0) = \|f\|$. За крај, посматрајмо $\|\mathbf{c}\|_2 > \gamma$:

$$E_f(\mathbf{c}) = \|(\sum_{i=1}^{n} c_i g_i) - f\| \geq \|\sum_{i=1}^{n} c_i g_i\| - \|f\| \geq \|\mathbf{c}\|_2 E_0^o - \|f\| >$$
$$> \tfrac{2\|f\|}{E_0^o} E_0^o - \|f\| = \|f\| \geq E_f^o$$

Дакле, $(c_1^o, ..., c_n^o)$ заиста јесте елемент најбоље апроксимације. □

Дефиниција 2. *Нормирани векторски простор V је* ***строго нормиран*** *ако важи $(\forall x, y \in V \backslash \{0\})$ $\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \Rightarrow y = cx, c \in \mathbb{R}^+ \backslash \{0\}$.*

Теорема 2. *Ако је нормирани векторски простор V строго нормиран, онда је елемент најбоље апроксимације јединствен.*

Доказ. Претпоставимо супротно. Постоје два елемента најбоље апроксимације F_1 и F_2, $F_1 \neq F_2$, $F_j = \sum_{i=1}^{n} c_i^j g_i$ за $j \in \{1, 2\}$. Приметимо да је $E_f^o = \|f - F_1\| = \|f - F_2\| \neq 0$, јер би иначе било $F_1 = f = F_2$. Даље:

$$\|f - \tfrac{F_1+F_2}{2}\| = \|\tfrac{f-F_1}{2} + \tfrac{f-F_2}{2}\| \leq \tfrac{1}{2}\|f - F_1\| + \tfrac{1}{2}\|f - F_1\| = E_f^o$$

Пошто је по дефиницији $E_f^o \leq \|f - \frac{F_1+F_2}{2}\|$ (јер је и $\frac{F_1+F_2}{2}$ линеарна комбинација $\{g_i\}_{i=1}^n$), у прошлом изразу се сви знакови претварају у једнакост, па важи $\|\frac{f-F_1}{2} + \frac{f-F_2}{2}\| = \|\frac{f-F_1}{2}\| + \|\frac{f-F_2}{2}\|$. Како су обе вредности са десне стране различите од нуле, због строге нормираности следи да је $\frac{f-F_1}{2} = \lambda \frac{f-F_2}{2}$ за неко $\lambda \in \mathbb{R}^+ \backslash \{0\}$. Мора бити $\lambda \neq 1$, јер је у том случају $F_1 = F_2$. У супротном случају је $f = \frac{F_1 - \lambda F_2}{1-\lambda}$, што значи да се f може представити као линеарна комбинација $\{g_i\}_{i=1}^n$, што значи да је $E_f^o = 0$, а већ је констатовано зашто тај случај није могућ. Из контрадикције следи да нам је претпоставка да постоје два различита решења нетачна. □

1.2 Апроксимација у Хилбертовом простору

Подсећање 4. *Нека је V векторски простор над пољем $\mathbb{C}$.* ***Скаларни производ*** *је пресликавање $(\cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$ са следећим својствима:*

1) $x \neq 0 \Rightarrow (x, x) \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$

2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$

3) $(\alpha x+\beta y,z)=\alpha(x,z)+\beta(y,z)$

где су x,y и z произвољни вектори из V, а α и β произвољни скалари из $\mathbb{C}$. Такође, приметимо да важи $(x,\alpha y+\beta z)=\overline{\alpha}(x,y)+\overline{\beta}(x,z)$.

Подсећање 5. ***Хилбертов[2] простор*** *је комплетан нормирани векторски чија је норма генерисана скаларним производом преко релације $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$.*

Нама ће од мањег значаја бити комплетност, док ће веза норме и скаларног производа довести до занимљивих својстава. Наш задатак ће бити исти као и малопре, само се сада налазимо у Хилбертовом простору.

Пошто је у Хилбертовом простору норма индукована скаларним производом и пошто је $f(x)=x^2$ растућа функција за $x>0$, онда је практично тражити минимум од $\|f-\sum\limits_{i=1}^{n}c_ig_i\|^2=(f-\sum\limits_{i=1}^{n}c_ig_i,f-\sum\limits_{i=1}^{n}c_ig_i)$.

Означаваћемо са G (n-димензиони) векторски потпростор простора V генерисан векторима $\{g_i\}_{i=1}^{n}$. Покажимо сада три теореме које нам говоре доста о елементу најбоље апроксимације у Хилбертовим просторима.

Теорема 3. *Сваки Хилбертов простор је строго нормиран.*

Доказ. Претпоставимо да имамо два ненулта вектора x и y за које важи једнакост $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$. Приметимо следеће:

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2=(x+y,x+y)=(x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)=\\=\|x\|^2+(x,y)+\overline{(y,x)}+\|y\|^2=\|x\|^2+2Re(x,y)+\|y\|^2\leq\\\leq\|x\|^2+2|(x,y)|+\|y\|^2\leq\|x\|^2+2\|x\|\|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2\end{aligned}$$

где је прва неједнакост последица $Re(z)\leq|z|$, а друга Коши[3]-Швароцве[4] неједнакости. Због наше претпоставке, све неједнакости у прошлом постају једнакости, па из Коши-Шварца следи $y=\lambda x$, а из прве неједнакости следи $(x,y)\in\mathbb{R}^+$. Кад искомбинујемо ове две добијамо следеће:

$$(x,y)=(x,\lambda x)=\overline{\lambda}(x,x)\in\mathbb{R}^+$$

Пошто $x\neq0$, онда је (x,x) строго позитиван реалан број, па мора бити $\lambda\in\mathbb{R}^+$. Како је $y\neq0$, тако је и $\lambda\neq0$, па је λ строго позитиван реалан број.

□

[2]Хилберт - David Hilbert (1862-1943)
[3]Коши - Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)
[4]Шварц - Hermann Schwarz (1843-1921)

Последица 1. *У Хилебртовом простору постоји јединствени елемент најбоље апроксимације.*

Доказ. Директна последица прошле три теореме. □

Теорема 4. *Нека је F_f^o елемент најбоље апроксимације за $f \in V$. Тада ће важити $(\forall g \in G)$ $(f - F_f^o, g) = 0$.*

Доказ. Претпоставимо супротно. Постоји елемент $g \in G$ такав да важи $(f - F_f^o, g) = \alpha \neq 0$. Одавде је јасно да је $g \neq 0$. Такође, можемо претпоставити да је $\|g\| = 1$, јер у супротном можемо посматрати елемент $\frac{g}{\|g\|}$ због:

$$(f - F_f^o, \tfrac{g}{\|g\|}) = \overline{\|g\|}(f - F_f^o, g) = \tfrac{\alpha}{\|g\|} \neq 0$$

Посматрајмо сада елемент $F_f^o + \alpha g$:

$$\begin{gathered}\|f - F_f^o - \alpha g\|^2 = (f - F_f^o - \alpha g, f - F_f^o - \alpha g) = \\ = (f - F_f^o, f - F_f^o) - \alpha(g, f - F_f^o) - \overline{\alpha}(f - F_f^o, g) + \alpha\overline{\alpha}(g, g) = \\ = \|f - F_f^o\|^2 - \alpha\overline{\alpha} - \overline{\alpha}\alpha + \alpha\overline{\alpha} = \|f - F_f^o\|^2 - |\alpha| < \|f - F_f^o\|^2\end{gathered}$$

Ово је контрадикција са чињеницом да је F_f^o елемент најбоље апроксимације. □

Теорема 5. *Ако за $F \in G$ важи да је $(\forall g \in G)$ $(f - F, g) = 0$, онда је F елемент најбоље апроксимације.*

Доказ. Нека је g произвољан елемент из G. Онда је:

$$\begin{gathered}\|f - g\|^2 = (f - g, f - g) = (f - F + F - g, f - F + F - g) = \\ = (f - F, f - F) + (F - g, f - F) + (f - F, F - g) + (F - g, F - g)\end{gathered}$$

Пошто $F, g \in G$, онда и $F - g \in G$, па су други и трећи сабирци једнаки нули:

$$\|f - g\|^2 = (f - F, f - F) + (F - g, F - g) = \|f - F\|^2 + \|F - g\|^2$$

Одавде директно следи да је F елемент најбоље апроксимације. □

Дакле, кад саберемо све закључке, да бисмо нашли елемент најбоље апроксимације у Хилбертовом простору (за који знамо да постоји и да је јединствен), довољно (и неопходдно) је наћи вектор $F_f^o = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i^o g_i$ такав да за свако $i \in \{j\}_{j=1}^n$ важи $(f - F_f^o, g_i) = 0$, тј. $(F_f^o, g_i) = (f, g_i)$, тј. $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j^o (g_j, g_i) = (f, g_i)$. Ово је линеарни систем једначина који, као последица прошлих теорема, има јединствено решење.

Корисно би било да $\{g_1\}_{i=1}^n$ чине ортонормирану базу векторског простора G, јер у том случају се наш систем своди на $c_i^o = (f, g_i)$. Међутим, није увек лако и ефикасно наћи ортонормирану базу векотрског простора.

2

Апроксимација функције на основу скупа измерених вредности

2.1 Конструкција одговарајућег Хилбертовог простора

Све што покажемо у овом одељку се може и сузити са $\mathbb{C}$ на $\mathbb{R}$. Сад ћемо бити што општији, док у ћемо се у следећем одељку (2.2) бавити проблемом апроксимације реалне функције.

Нека је $p : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ функција скоро свуда различита од нуле, $\mathcal{B}_{[a,b]}$ Борелова[5] σ-алгебра на $[a, b]$, а m Лебегова мера. Посмтрајмо Хилбертов простор $L^2([a, b], \mathcal{B}_{[a,b]}, p\ dm) = \{f : [a, b] \to C \mid \int_a^b p|f|^2\ dm < \infty\}$ на ком је скаларни производ дефинисан са $(f_1, f_2) = \int_a^b pf_1\overline{f_2}\ dm$. Ако нам је дата функција f, ми бисмо могли да њу апроксимирамо неким линеарно независним функцијама $\{g_i\}_{i=1}^n$ горњом методом. Међутим, у пракси нам није дата цела функција f, већ само неке информације о њој; на пример, знамо да је периодична или знамо њену вредност у неким тачкама. Ми ћемо се бавити овим другим случајем.

Претпоставимо да покушавамо да апроксимирамо функцију f, али све што знамо о њој је њена вредност у n тачака. Дакле имамо скупове $X = \{x_i\}_{i=1}^n$ и $Y = \{y_i\}_{i=1}^n$ такве да је $(\forall i \in \{j\}_{j=1}^n)\ f(x_i) = y_i$.

Посматрајмо сада скуп $M_{[a,b]}$ свих функција $g : [a, b] \to C$ и уочимо релацију еквиваленције $g_1 \sim_X g_2 \Leftrightarrow (\forall i \in \{j\}_{j=1}^n)\ g_1(x_i) = g_2(x_i)$. Лако се проверава да ово заиста јесте релација еквиваленције. Количнички скуп $M_{[a,b]}/\sim_X$ ће бити изоморфан векторском простору $\mathbb{C}^n$ Заиста, нека се $(z_1, ..., z_n)$ слика у класу еквиваленције функција која је таква да

[5] Борел - Émile Borel (1871-1956)

важи $(\forall i \in \{j\}_{j=1}^{n})\ g(x_i) = z_i$. Лако се проверава да ово заиста јесте изоморфизам. Због овог изоморфизма следи да је $M_{[a,b]}/\sim_X$ комплетан векторски простор ($\mathbb{C}$ је комплетан, као и коначан производ комплетних простора). Даље, на овом векторском простору дефинишимо скаларни производ $(\cdot,\cdot)_X : M_{[a,b]}/\sim_X \to C$, $([f_1]_{\sim_X}, [f_2]_{\sim_X})_X = \sum_{i=1}^{n} p(x_i) f_1(x_i) \overline{f_2(x_i)}$, где је $p : X \to \mathbb{R}^+ \backslash \{0\}$ функција коју називамо **тежинска функција**. Лако се проверава да је ово добро дефинисан скаларни производ.

Кад саберемо све закључке, $M_{[a,b]}/\sim_X$ је комплетан векторски простор на ком имамо дефинисан скаларни производ. Дакле, $M_{[a,b]}/\sim_X$ је Хилбертов простор. Овај простор има смисла користити за наше потребе јер изван тачака скупа X ми не знамо вредност функције f, па ни не можемо да ставимо икакву тежину на тај остатак скупа. Дакле, ми ћемо апроксимирати функцију f на овим тачкама преко линеарне комбинације неких класа еквиваленција, а потом ћемо "генерализовати"нашу апроксимацију одабиром погодних припадника сваке класе. Углавном се заправо крећемо уназад: одаберемо функције преко којих желимо апроксимирати функцију f (углавном алгебарски и тригонометријски полиноми), уочимо њихове класе еквиваленција, проверимо да су класе еквиваленција линеарно независне, нађемо коефицијенте линеарне комбинације класа еквиваленција преко горње методе, и на крају ће наш резултат бити линеарна комбинација полазних функција са коефицијентима добијеним у прошлом кораку.

Нека нам је дата функција f и скупови X и Y. Дато нам је n тачака, па је количнички скуп $M_{[a,b]}/\sim_X$ исто димензије n. Нема смисла покушавати да апроксимирамо линеарном комбинацијом више од n функција, јер њихове класе еквиваленције никако не могу бити линеарно независне. Покушајмо следеће, да f апроксимирамо полиномом степена m, где је $m < n$. Дакле, наш скуп $\{g_i\}_{i=1}^{m+1}$ је заправо скуп $\{[x^i]_\sim\}_{i=0}^{m}$.

Теорема 6. *Ако је $m < n$, онда је скуп $\{[x^i]_\sim\}_{i=0}^{m}$ скуп линеарно независних елемента у Хилбертовом простору $M_{[a,b]}/\sim_X$.*

Доказ. Претпоставимо супротно. Постоје коефицијенти a_i такви да је бар један различит од нула и да је $\sum_{i=0}^{m} a_i [x^i]_{\sim_X} = [0]_{\sim_X}$. То би значило да важи $(\forall j \in \{k\}_{k=1}^{n})\ \sum_{i=0}^{m} a_i x_j^i = 0$, што значи да полином $\sum_{i=0}^{m} a_i x^i = 0$ има бар n нула. Међутим, то није могуће с обзиром да је тај полином степена m, а важи $m < n$. $\square$

Из ове теореме следи да ако нам је дата вредност неке функције у n

тачака, да њу можемо да апроксимирамо полиномима степена мањег од n користећи објашњени процес.

Последње питање је како одабрати функцију p. Ми хоћемо да минимизујемо израз $(Y - [\sum_{j=0}^{m} c_j x^j]_{\sim X}, Y - [\sum_{j=0}^{m} c_j x^j]_{\sim X})_X = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)|y_i - \sum_{j=0}^{m} c_i x_i^j|^2$ (у овом случају Y третирамо као вектор са координатама $(y_1, ..., y_n)$). Често ћемо бирати $p(x) = 1$; у том случају решавамо проблем **методом најмањих квадрата**. Проблем је што ако моделирамо неку појаву из правог света, вероватно смо вредности из Y добили мерењем, и увек се може задесити да су нам спољашње околности пореметиле пар мерења до границе да та мерења нису репрезентативна реалној ситуацији (на пример, у скоку у даљ је светски рекорд $8.95m$ иако је пар атлетичара скочило даље; њихови резултати се не рачунају јер је дувао прејак ветар који их је "гурнуо" даље). Штавише, пошто је наша функција грешке квадратна, наша апроксимација може бити тотално погрешна у случају да имамо пар изузетно лоших мерења. Било би боље кад бисмо некако одузели од вредности тих лоших мерења и постоји више начина којим ово можемо постигнути, на пример:

- Можемо из X и Y и избацимо мерења која по неком критеријуму одступају од осталих

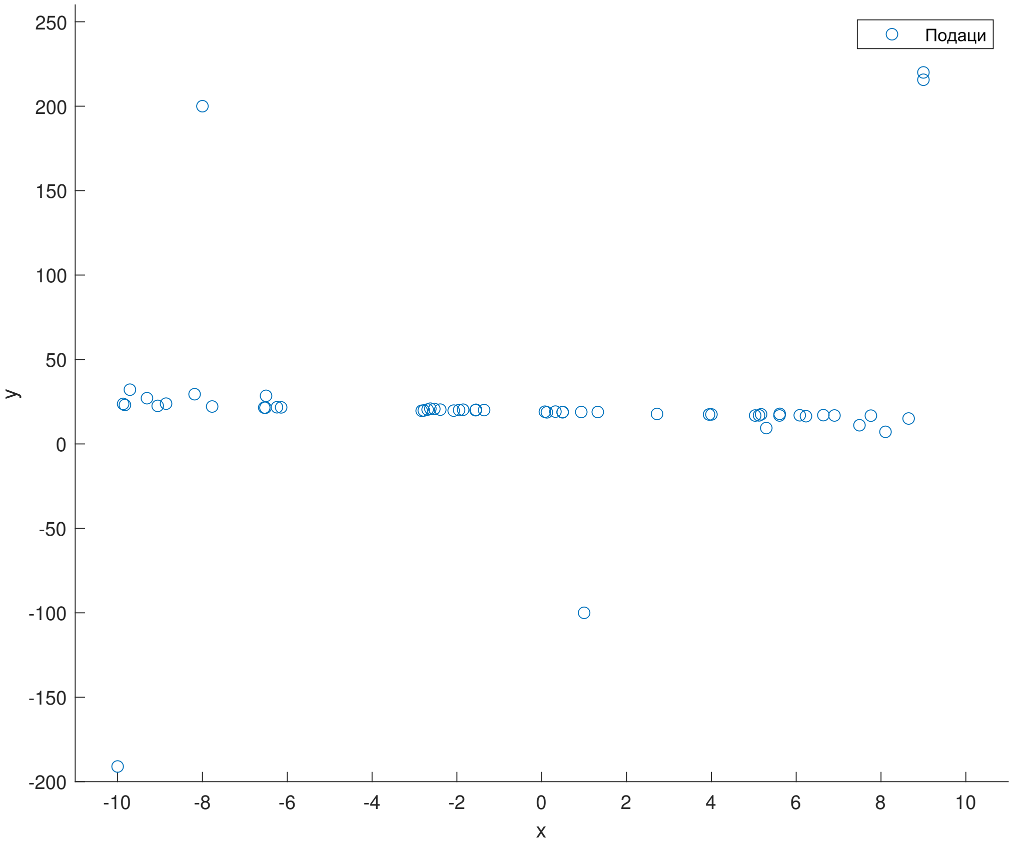
- Можемо да сами подесимо тежинску функцију тако да мање вреднује критичне тачке

- Можемо да смислимо итеративан метод који ће из корака у корак подешавати тежине тако да апроксимација исконвергира у нешто што боље представља циљану функцију

Сада ћемо представити једну методу која узима трећи приступ и упоредити ефективност обичне и модификоване методе најмањих квадрата.

2.2 Робустна метода најмањих квадрата

Скупови X и Y су нам представљени на слици 2.1, а у табели 2.1 су вредности ова два скупа заокружене на две децимале. Ову зависност ћемо покушати да апроксимирамо линеарном функцијом. Јасно је из података да би ова функција требала да има благ негативан нагиб, али имамо пет тачака које представљају изузетно лоша мерења и оне ће нам правити проблем.



Слика 2.1: Координате на графику

x	-8.65	0.12	-0.07	-1.56	-9.83	0.32	-2.39	3.95	-2.83
y	15.06	18.71	19.08	19.98	23.07	19.15	20.30	17.44	19.63
x	-1.36	6.23	5.61	-2.63	-2.69	-8.86	-2.78	0.49	-6.54
y	20.06	16.43	17.81	20.89	20.36	23.85	19.81	18.74	21.52
x	6.08	-6.24	-6.51	7.76	-9.06	5.03	-9.87	-7.77	-1.95
y	16.98	21.73	21.45	16.75	22.54	16.83	23.70	22.16	20.07
x	4.00	5.17	-2.08	-1.55	-6.14	5.61	6.64	2.72	0.50
y	17.47	17.55	19.72	20.21	21.66	16.85	17.05	17.76	18.90
x	5.12	-1.85	6.90	-2.53	1.32	0.93	-8.19	-9.31	-9.71
y	16.92	20.26	16.85	20.72	18.91	18.91	29.45	27.09	32.12
x	-6.50	7.49	5.30	8.11	9.00	-10.00	-8.00	9.00	1.00
y	28.49	11.07	9.40	7.17	215.66	-191.00	200.00	220.00	-100.00

Табела 2.1: Табела координата

Робустни метод најмањих квадрата је итеративан метод и у сваком кораку мењамо тежине и добијамо нове коефицијенте наше линеарне комбинације (тј. коефицијенте полинома). Пре него што кренемо са тежинама, уведимо вектор "полуга" (енг. leverage) $h = (h_1, ..., h_n)$, где h_i дефинишемо као $(X(X^T X)^{-1} X^T)_{ii}$ (у овом случају X третирамо као вертикалан вектор са координатама $(x_1, ..., x_n)$). Тежине мењамо на следећи начин:

1. Израчунамо коефицијенте за тренутне тежине и тиме добијамо полином $F^o_{[f]\sim x}$ (скраћено F^o_f).
2. Израчунамо вектор резидуала $r = (r_1, ..., r_n)$, где r_i дефинишемо као $(y_i - F^o_f(x_i))^2$.
3. Израчунамо вектор подешених резидуала $r^{adj} = (r^{adj}_1, ..., r^{adj}_n)$, где r^{adj}_i дефинишемо као $\frac{r_i}{\sqrt{1-h_i}} \frac{0.6745}{4.685\ MAD}$, где је MAD медијана скупа $\{|y_i - F^o_f(x_i)|\}^n_{i=1}$.
4. Израчунамо вектор нових тежина $p = (p_1, ..., p_n)$, где p_i дефинишемо као $(1 - (\min\{1, r^{adj}_i\})^2)^2$.

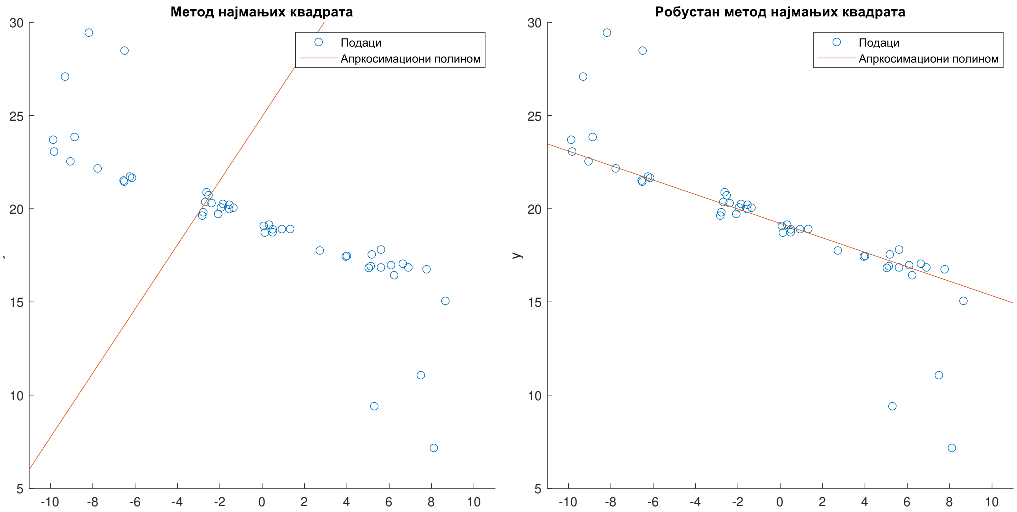
Из овог алгоритма можемо приметити да веће одступање тачке од апроксимације повећава r_i, па и r^{adj}_i, што на крају смањује p_i.

Памтићемо тренутне и прошле коефицијенте, а услов за излаз из петље нам је њихово поклапање на унапред одређен број децимала. Иницијалне вредности за тренутне тежине су $(1, ..., 1)$, за прошле коефицијенте су $(NaN, ..., NaN)$ (недефисана вредност), док тренутне срачунамо пре петље решавањем проблема апроксимације у одговарајућем Хилбертовом простору за тренутне тежине. У петљи се ради следеће:

1. Провера да ли се прошли и тренутни коефицијенти поклапају на тражени број децимала; ако се поклапају онда излазимо из петље.
2. Преместимо тренутне коефицијенте у прошле.
3. Подесимо тежине користећи објашњен процес.
4. У тренутне коефицијенте убацимо решење проблема апроксимације и идемо назад на први корак

Кад изађемо из петље, тренутни коефицијенти нам представљају коефицијенте апроксимационог полинома који занемарује лоша мерења.

На слици 2.2 видимо два решења за наш скуп података, један стандардном методом најмањих квадрата, други робустном методом најмањих квадрата.



Слика 2.2: Поређење два приступа

Јасно се види да је друга слика много боље апроксимирала релевантне податке и да нерепрезентативни подаци уопште не утичу на коефицијенте.

Литература

[1] Десанка П. Радуновић, *Нумеричке методе*, Академска Мисао, Београд, 2003.