Analytische Zahlentheorie

Übungsblatt 12

Aufgabe 1. Zeigen Sie die folgenden Identitäten für $\tau \in \mathfrak{H}$ und $q = e^{2\pi i\tau}$.

(a) $\frac{\eta(\tau)^2}{\eta(2\tau)} = \prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{2n+1})^2(1-q^{2n+2}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{n^2}$,

(b) $\frac{\eta(2\tau)^5}{\eta(\tau)^2\eta(4\tau)^2} = \prod_{n=0}^{\infty}(1+q^{2n+1})^2(1-q^{2n+2}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2}$,

(c) $\eta(\tau) = q^{1/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) = q^{1/24}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{\frac{1}{2}n(3n+1)}$.

Hinweis: Folgern Sie aus dem Jacobi-Tripelprodukt die Identitäten

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{2kn+k-\ell})(1-q^{2kn+k+\ell})(1-q^{2kn+2k}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{kn^2+\ell n}$$

und

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+q^{2kn+k-\ell})(1-q^{2kn+k+\ell})(1-q^{2kn+2k}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{kn^2+\ell n}$$

und wählen Sie die Parameter $k, \ell \in \mathbb{Q}$ geeignet, um die Identitäten oben zu erhalten.

Aufgabe 2. Folgern Sie aus dem Satz von Dedekind über das Transformationsverhalten der η-Funktion das *Dedekind'sche Reziprozitätsgesetz*: Für $c, d \in \mathbb{N}$, $\operatorname{ggT}(c,d) = 1$ gilt

$$s(d,c) + s(c,d) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\left(\frac{d}{c} + \frac{1}{cd} + \frac{c}{d}\right).$$

Hinweis: Für $\tau \in \mathfrak{H}$ und $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $c, d > 0$ setze man $\tau' = -\frac{1}{\tau}$ und $\tau'' = \frac{a\tau'+b}{c\tau'+d}$. Man berechne daraus einmal $\eta(\tau'')$, indem man nacheinander die hier durchgeführten Transformationen anwendet, und einmal, indem man direkt $\tau'' = \frac{b\tau-a}{d\tau-c}$, sowie die Beziehung $s(-d,c) = -s(d,c)$ verwendet.

Aufgabe 3. Wir definieren für $z \in \mathbb{C}$, $\tau \in \mathfrak{H}$ die *Jacobi'schen Thetafunktionen* vom *Index m* durch

$$\vartheta_{\ell,m}(z,\tau) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ n\equiv\ell \pmod{2m}}} q^{\frac{n^2}{4m}}\zeta^n, = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ n\equiv\ell(2m)}} e^{\frac{\pi i n^2\tau}{2m} + 2\pi i n z}$$

wo $q = e^{2\pi i\tau}$ und $\zeta = e^{2\pi i z}$. Bestimmen Sie die Transformationen von $\vartheta_{\ell,m}$ unter den folgenden Transformationen

$$\vartheta_{\ell,m}(z+1,\tau) = \sum e^{\frac{\pi i n^2\tau}{2m} + 2\pi i n z} \cdot \underbrace{e^{2\pi i n}}_{=1} = \vartheta_{\ell,m}(z,\tau)$$

$$\vartheta_{\ell,m}(z+\tau,\tau) = \sum e^{\frac{\pi i n^2\tau}{2m} + 2\pi i n z + 2\pi i n\tau}$$

$$1 = \sum e^{\pi i\left(\frac{n^2}{2m}+n\right)\tau + 2\pi i n z}$$

(a) $z \mapsto z + 1$,

(b) $z \mapsto z + \tau$,

(c) $\tau \mapsto \tau + 1$,

(d) $\tau \mapsto -\frac{1}{\tau}$.

Aufgabe 4. Zwei gekürzte Brüche a/b und c/d heißen *ähnlich angeordnet*, falls $(c-a)(d-b) \geq 0$ gilt. Seien $a_1/b_1 < a_2/b_2 < ...$ die Farey-Brüche in $\mathcal{F}_n$.

(a) Zeigen Sie, dass zwei Nachbarn a_i/b_i und a_{i+1}/b_{i+1} ähnlich angeordnet sind.

(b) Zeigen Sie, dass auch zwei mittelbare Nachbarn a_i/b_i und a_{i+2}/b_{i+2} ähnlich angeordnet sind.

Abgabe: Dienstag, 22.01.2019 zu Beginn der Übung.
Bitte geben Sie in Zweiergruppen ab und versehen Sie die Abgabe deutlich lesbar mit beiden Namen.