1 Der große Primzahlsatz

1.1 Elementare Primzahlverteilung

Satz 1.5: Die Menge $\mathbb{P}$ ist unendlich.
Beweis: Ang. $\mathbb{P} = \{p_1, \dots, p_r\}$ endlich. $N = p_1 + \dots + p_r + 1$ $\lightning$ Fund. der Arithmetik

Satz 1.7: Die Reihe $\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}$ divergiert.
Beweis: Ang. Reihe konvergiert $\lightning$ Divergenz harmonische Reihe.

Lemma 1.9: $n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{P}, 0 \le j \le n$. Dann gilt:
(i) $v_p(n!) = \sum_{k=1}^{\infty} \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{\log n}{\log p} \rfloor} \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor$ (Legendre) (ii) $v_p(\binom{n}{j}) \le \frac{\log n}{\log p}$
(iii) $p^{v_p(\binom{n}{j})} \le n$ (iv) $\binom{n}{j} \le n^{\pi(n)}$ (v) $2^n \le \binom{2n}{n} \le 4^n$

Korollar 1.10: $\pi(2n) - \pi(n) < \log 4 \cdot \frac{n}{\log n}$
Beweis: $\pi(2n) - \pi(n) = \#\{p | n < p \le 2n\}$ und jedes dieser p taucht nur im Zähler von $\binom{2n}{n}$ auf. Beh. folgt mit Lemma 1.9.

Proposition 1.11: (i) $n \ge 3 : \pi(n) > \frac{2}{3} \frac{n}{\log n}$ (ii) $n \ge 2 : \pi(n) < 2\frac{n}{\log n}$

1.2 Das Bertrandsche Postulat

Lemma 2.1: Zu $n \in \mathbb{N}$ gibt es n aufeinanderfolgende Zahlen, die nicht prim sind.

Lemma 2.6: $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}_{\ge 0}$: (i) $\log n = \sum_{d|n} \Lambda(d)$ (ii) $\Psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \theta\left(x^{\frac{1}{k}}\right)$

Satz 2.7: Für $x > 1$ gibt es eine Primzahl in $(x, 2x]$
Beweis: $\theta(x) = \sum_{p \le x} \log p$ und zeigen: $\theta(x) - \theta\left(\frac{x}{2}\right) > 0$ für $x \ge 2$. $\log(\lfloor x \rfloor !) = \sum_{e \le x} \Psi\left(\frac{x}{e}\right)$, $\Psi(x) - \Psi\left(\frac{x}{2}\right) \le \frac{x}{2} \log 6$ und $\Psi(x) - \Psi\left(\frac{x}{2}\right) \ge (x-1)\log 2 - \log(x+1) - \frac{x}{3}\log 6$. Nach Lemma 2.6(ii) gilt $\Psi(x) \le \theta(x) + 2\Psi\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$. Beh. folgt, wenn $e^{\sqrt{x}} > 1 + x$ für $x > 36$.

1.3 Zahlentheoretische Funktionen

Definition 3.1: zt./arithmetische Funktion: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $\mathfrak{A}$ Menge der zt. Funktionen

Beispiel 3.2: (i) $e(n) = \lfloor \frac{1}{n} \rfloor = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ (ii) $\mathbb{1}(n) = 1$ (iii) $\tau(n) = \#\{d : d|n\}$
(iv) $\sigma_k(n) = \sum\limits_{d|n} d^k$ (v) $\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & n = p^k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ (Mangoldt)$\to$ $\Psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n)$
(vi) $\varphi(n) = \#\{k \in \mathbb{N} | 1 \le k \le n, \mathrm{ggT}(n,k) = 1\}$ (Eulersche φ-Funktion)
(vii) $\mu(1) = 1, \mu(n) = \begin{cases} (-1)^k & n \text{ quadratfrei} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ (Möbiussche μ-Funktion)

Definition 3.3: $f, g \in \mathfrak{A}$, Dirichletfaltung: $(f * g)(n) = \sum_{ab=n} f(a)g(b) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$

Proposition 3.6: (i) $\mu * \mathbb{1} = e$ (ii) $\varphi * \mathbb{1} = id$ (iii) $\mu * id = \varphi$ (iv) $\Lambda * \mathbb{1} = \log$

Definition 3.7: $0 \ne f \in \mathfrak{A}$ multiplikativ, falls $f(mn) = f(m)f(n)$, $\mathrm{ggT}(n,m) = 1$ und falls für alle strikt multiplikativ. (Bsp.: σ_k, μ, φ mult.)

Bemerkung 3.8: (i) f invertierbar $\Leftrightarrow$ $f(1) \ne 0$ (ii) $(\mathfrak{A}, +, *)$ nullteilerfreier Ring mit neutr.Element e (iii) f, g mult. $\Rightarrow$ $f * g$ mult. $f(1) = 1$, f^{-1} mult.

Definition 3.10: $f \in \mathfrak{A} : F = f * \mathbb{1}$ Summatorfunktion (f mult. $\Leftrightarrow$ F mult.)

Satz 3.12: (Möbiusscher Umkehrsatz) $F(n) = \sum_{d|n} f(d) \Leftrightarrow f(n) = \sum_{d|n} F(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right)$

Definition 3.13: formale Ableitung: $f'(n) = f(n)\log n \Rightarrow (f+g)' = f'+g', (\alpha f)' = \alpha f', (f*g)' = f'*g+f*g', (f^{-1})' = -f'*(f'*f)^{-1}, f' \equiv 0 \Leftrightarrow f \in \mathbb{C}e$

1.4 Wachstumsverhalten zt. Funktionen

Definition 4.1: $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$, falls $\exists\, C > 0$ mit $|f(x)| \leq C|g(x)|\ \forall x$
$f(x) = g(x) + \mathcal{O}(h(x))$, falls $f(x) - g(x) = \mathcal{O}(h(x))$
$f(x) = \mathcal{O}(g(x))$,$g(x) = \mathcal{O}(f(x))$ und $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Rightarrow f \sim g$ (asymptotisch gleich)

Lemma 4.2: $f_1 = \mathcal{O}(h) = f_2 \Rightarrow \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = \mathcal{O}(h)$, $f = g + \mathcal{O}(h) \Rightarrow fp = gp + \mathcal{O}(hp)$

Lemma 4.3: Euler-Mascheroni-Konstante: $\gamma_E = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \log N\right) \approx \frac{1}{\sqrt{3}}$
Beweis: $a_N = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \log N$, $a_N - a_{N+1} > 0, a_N > 0$

Satz 4.6: (Eulersche Summenformel:) $0 < a < b, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig diffbar $\Rightarrow \sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_a^b (t - \lfloor t \rfloor) f'(t)\mathrm{d}t - f(b)(b - \lfloor b \rfloor)(a - \lfloor a \rfloor)$
Beweis: $m = \lfloor a \rfloor + 1, M = \lfloor b \rfloor, n, n+1 \in [a,b] \cap \mathbb{N} : \int_{n-1}^{n} \lfloor t \rfloor f'(t)\mathrm{d}t = nf(n) - (n-1)f(n-1) - f(n) \Rightarrow \int_m^M \lfloor t \rfloor f'(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=m}^{M}(nf(n) - (n-1)f(n-1) - f(n)) = Mf(M) - (m-1)f(m) - \sum_{a<n\leq b} f(n)$ und $\int_a^m \lfloor t \rfloor f'(t)\mathrm{d}t = (m-1)(f(m) - f(a))$, $\int_M^b \lfloor t \rfloor f'(t)\mathrm{d}t = M(f(b) - f(M)) \Rightarrow \sum_{a<n\leq b} f(n) = -\int_a^b \lfloor t \rfloor f'(t)\mathrm{d}t + \lfloor b \rfloor f(b) - \lfloor a \rfloor f(a)$. Partielle Integration: $\int_a^b \lfloor t \rfloor f'(t)\mathrm{d}t = bf(b) - af(a) - \int_a^b tf'(t)\mathrm{d}t$.

Satz 4.7: (i) $\sum_{n\leq x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma_E + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$ (ii) $\sum_{n\leq x} n^{-s} = \frac{x^{1-s}}{1-s} + \zeta(s) + \mathcal{O}(x^{-s}), s > 1$
(iii) $\sum_{n>x} n^{-s} = \mathcal{O}(x^{1-s}), s \in \mathbb{R}, s > 1$ (iv) $\sum_{n\leq x} = \frac{x^{1-s}}{1-s} + \mathcal{O}(x^{\beta}), \beta = \max\{0, -s\}, s < 1$
Beweis: Eulersche Summenformel und $\int_1^{\infty} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2}\mathrm{d}t = 1 - \gamma_E$

Satz 4.8: $\sum_{n\leq x} \tau(n) = x\log x + (2\gamma_E - 1)x + \mathcal{O}(\sqrt{x})$
Beweis: $\sum_{n\leq x} \tau(n) = \sum_{n\leq x} \sum_{qd=n} 1 = 2\sum_{qd\leq x, q\leq d} 1 - \lfloor \sqrt{x} \rfloor$ (Quadratzahlen doppelt gezählt und unterhalb von x $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$ Quadratzahlen).

Satz 4.10: $x \geq 2 : \sum_{n\leq x} \sigma_1(n) = \frac{1}{2}\zeta(2)x^2 + \mathcal{O}(x\log x)$
Beweis: $n = qd$ und Summen umformen mit Satz 4.7: $\sum_{n\leq x} \sum_{d|n} d = \sum_{q\leq x} \sum_{d\leq \frac{x}{q}} d = \sum_{q\leq x} \left(\frac{x^2}{2q^2} + \mathcal{O}\left(\frac{x}{q}\right)\right) = \frac{1}{2}x^2 \sum_{x\leq q} q^{-2} + \mathcal{O}\left(x\sum_{q\leq x} q^{-1}\right)$.

Satz 4.11: $\alpha > 0, \alpha \neq 1, \beta = \max\{1, \alpha\}, \delta = \max\{1, 1-\alpha\}, x \geq 2 :$
(i) $\sum_{n\leq x} \sigma_\alpha(n) = \frac{\zeta(\alpha+1)}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + \mathcal{O}(x^{\beta})$ (ii) $\sum_{n\leq x} \sigma_{-\alpha}(n) = \zeta(\alpha+1)x + \mathcal{O}(x^{\delta})$
(iii) $\sum_{n\leq x} \sigma_{-1}(n) = \zeta(2)x + \mathcal{O}(\log x)$

Proposition 4.12: $F, G : [1,\infty) \to \mathbb{C} : G(x) = \sum_{n\leq x} F\left(\frac{n}{x}\right), x \geq 1 \Leftrightarrow F(x) = \sum_{n\leq x} \mu(n) G\left(\frac{n}{x}\right)$

Korollar 4.13: Wahrscheinlichkeit, dass n natürliche Zahlen teilerfremd sind: $\frac{1}{\zeta(n)}$

1.5 Analytische Theorie der Dirichlet-Reihen

Definition 5.1: f zt. Fkt., Dirichlet-Reihe: $D_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$

Definition 5.2: Winkelbereich: $s_0 \in \mathbb{C}, 0 \leq \alpha \leq \pi : W(s_0, \alpha) := \{s_0 + re^{it} | r \geq 0, -\alpha \leq t \leq \alpha\}$

Lemma 5.3: (Abelsches Lemma:) (i) f zt. Fkt., $F:[0,\infty)\to\mathbb{C}, F(x)=\sum_{n\leq x}f(n), g:(a,b]\to\mathbb{C}$ stetig und stückweise diffbar: $\sum_{a\leq n\leq b}f(n)g(n)=F(b)g(b)-F(a)g(a)-\int_a^b F(t)g'(t)\mathrm{d}t$
(ii) partielle Summation: f,g zt. Fkt., $F(M,N)=\sum_{n=M}^N f(n), N\geq M : \sum_{n=M}^N f(n)g(n)=\sum_{n=M}^{N-1}F(M,n)(g(n)-g(n+1))+F(M,N)g(N)$
Beweis: (ii) nachrechnen (i) mit (ii) ($M=\lfloor a\rfloor+1, N=\lfloor b\rfloor$) und $F(0)=0$ nachrechnen

Satz 5.4: (i) Existiert $s_0\in\mathbb{C}$, s.d. $D_f(s_0)$ konvergiert, so konvergiert die Reihe auf jedem Kompaktum und jedem Winkelbereich in $\{s\in\mathbb{C}:\Re(s)>\Re(s_0)\}$ gleichmäßig. Außerdem: $W(s_0,\alpha)$, $\alpha<\frac{\pi}{2}$
(ii) Konvergenzabszisse der beschränkten Konvergenz: $\exists\ \sigma_b$, s.d $D_f(s)$ für alle s mit $\begin{cases}\Re(s)>\sigma_b \text{ konv.}\\ \Re(s)<\sigma_b \text{ div.}\end{cases}$
(iii) $D_f(s)$ ist auf Halbebene $\{s\in\mathbb{C}|\Re(s)>\sigma_b\}$ holomorph, Ableitungen gegeben durch $D_f^{(k)}(s)=(-1)^k\sum_{n=1}^\infty f(n)(\log n)^k n^{-s}$ und insbesondere $D'_f(s)=-D_{f'}(s)$
Beweis: (i) Œ$s_0=0\Rightarrow D_f(0)$ konvergiert. Beh. für Winkelbereiche $W(s_0,\alpha)$: Partielle Summation für $g(n)=n^{-s}$ und $|n^{-s}-(n+1)^{-s}|\leq\frac{1}{\cos\alpha}(n^{-\sigma}-(n+1)^{-\sigma})$, dann folgt glm. Konvergenz mit Cauchy-Kriterium (ii),(iii) alle Summanden holomorph $\Rightarrow$ nach Satz von Weierstraass $D_f(s)$ und damit Ableitungen holomorph

Korollar 5.6: f zt. Fkt., $\sigma_b(f)<\infty$, dann gilt für $t\in\mathbb{R}$: $\lim_{\sigma\to\infty}D_f(\sigma+it)=f(1)$

Satz 5.7: (i) Existiert $s_0\in\mathbb{C}$, s.d. $D_f(s_0)$ absolut konvergiert, so konvergiert $D_f(s)$ in der Halbebene $\{s\in\mathbb{C}|\Re(s)\geq\Re(s_0)\}$ absolut gleichmäßig
(ii) Konvergenzabszisse der absoluten Konvergenz: $\exists\ \sigma_a$, s.d $D_f(s)$ für alle s mit
$\begin{cases}\Re(s)>\sigma_a \text{ abs. konv.}\\ \Re(s)<\sigma_a \text{ nicht abs. konv.}\end{cases}$ Dabei gilt $\sigma_b(f)\leq\sigma_a(f)\leq\sigma_b(f)+1$
Beweis: (i) $s_0=\sigma_0+it_0$, $s=\sigma+it$ einsetzen und abschätzen (ii) $\sigma_b\leq\sigma_a$, da aus absoluter Konvergenz auch Konvergenz folgt. Sei $\sigma>\sigma_b+1:\sum_{n=1}^\infty f(n)n^{-(\sigma-1)}$ konvergiert, $f(n)n^{-(\sigma-1)}$ Nullfolge und beschränkt durch c. zzg.: $D_f(\sigma+\varepsilon)$ absolut konvergent $\Rightarrow\sigma_a\leq\sigma_b+1$

Satz 5.9: f zt. Fkt., $F(x)=\sum_{n\leq x}f(x)$, $x\geq 0$. Wenn $D_f(s)$ an der Stelle 0 divergiert, dann gilt: $\sigma_b(f)=\limsup_{n\to\infty}\frac{\log|f(N)|}{\log N}=\inf\{\alpha\in\mathbb{R}:F(x)=\mathcal{O}(x^\alpha)\}$ $(\log(0)=-\infty)$
Beweis: $\gamma:=\inf\{\alpha\in\mathbb{R}:F(x)=\mathcal{O}(x^\alpha)\}\Rightarrow\gamma,\sigma_b\geq 0$, da $D_f(0)$ divergiert und $(f(N))_N$ keine Nullfolge. 3 Schritte: (1) $\sigma_b\geq\gamma$ (2) $\gamma\geq\sigma_b$ (3) $\gamma=\limsup_{n\to\infty}\frac{\log|f(N)|}{\log N}$

Satz 5.10: (Satz von Landau:) $f:\mathbb{N}\to[0,\infty)$ nichtnegative zt. Fkt. mit $\sigma_a=\sigma_b\in\mathbb{R}$. Dann hat $D_f(s)$ in $s_0=\sigma_a$ keine hebbare Singularität, d.h. es gibt keinen Kreis um σ_a, in den $D_f(s)$ holomorph fortgesetzt werden kann.

Lemma 5.11: Für $k\in\mathbb{N},\sigma>\sigma_a<\infty$ gilt: $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^T D_f(\sigma+it)k^{\sigma+it}\mathrm{d}t=f(k)$

Lemma 5.12: f,g zt. Fkt. mit $\sigma_a(f),\sigma_a(g)$, dann gilt für $\Re(s)>\max\{\sigma_a(f),\sigma_a(g)\}$: $D_f(s)D_g(s)=\sum_{n=1}^\infty\frac{f*g(n)}{n^s}=D_{f*g}(s)$. Insbesondere für $f(1)\neq 0$: $D_f(s)D_{f^{-1}}(s)=1$ für $\Re(s)>\max\{\sigma_a(f),\sigma_a(f^{-1})\}$

Korollar 5.13: (i) $\frac{1}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^\infty\frac{\mu(n)}{n^s},\Re(s)>1$ (ii) $\sum_{n=1}^\infty\varphi(n)n^{-s}=\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)},\Re(s)>2$
(iii) $\sum_{n=1}^\infty\sigma_\alpha(n)n^{-s}=\zeta(s)\zeta(s-\alpha),\alpha\in\mathbb{C},\Re(s)>\max\{1,\Re(\alpha)+1\}$

Satz 5.14: (Identitätssatz für Dirichlet-Reihen:) f,g zt. Fkt. mit konv. Dirichletreihe für $\Re(s)>c$:
(i) Existiert nicht diskrete Teilmenge $N\subseteq\{s\in\mathbb{C}:\Re(s)>c\}$ mit $D_f(s)=D_g(s)\ \forall\ s\in N$, so gilt $f(n)=g(n)\ \forall\ n\in\mathbb{N}$
(ii) Gilt $D_f(s_k)=D_g(s_k)$ für $(s_k)_k\in\mathbb{C}$ mit $\sigma_k=\Re(s_k)\to\infty,k\to\infty$, dann $f(n)=g(n)\ \forall\ n\in\mathbb{N}$

<u>Beweis:</u> (i) Id.Satz für holomorphe Fkt. und (ii) (ii) $h(n) = f(n) - g(n) \Rightarrow D_h(s_k) = 0 \;\forall\; k$, Annahme: $h \not\equiv 0$ und Widerspruch

Korollar 5.15: $\sigma_b(f) < \infty$. Existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $f(n_0) \neq 0$ oder $s_0 \in \mathbb{C}$ mit $D_f(s_0) \neq 0$, so existiert $c > \sigma_b$ mit $D_f(s) \neq 0 \;\forall\; s \in \mathbb{C}, \Re(s) > c$.
<u>Beweis:</u> Ang. c existiert nicht $\Rightarrow \exists\; s_k \in \mathbb{C}, \Re(s_k) > k, D_f(s_k) = 0 \Rightarrow D_f(s) = 0 \;\forall\; \Re(s) > \sigma_b \Rightarrow f(n) = 0 \;\forall\; n \in \mathbb{N}$.

Satz 5.16: $f \not\equiv 0, \sigma_a(f) < \infty$: f multiplikativ $\Leftrightarrow$ Dirichlet-Reihe $D_f(s)$ besitzt absolut konvergente Produktdarstellung $D_f(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} f(p^\nu)p^{-\nu s}\right), \sigma > \sigma_a$ (Euler-Produkt) besitzt.
<u>Beweis:</u> $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - 1|$ konvergiert.

Korollar 5.17: (i) $\zeta(s) = \prod_p (1-p^{-s})^{-1}, \sigma > 1$ (ii) $\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_p (1-p^{-s}), \sigma > 1$
(iii) $\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \prod_p \frac{1-p^{-s}}{1-p^{1-s}}, \sigma > 2$
(iv) $\zeta(s)\zeta(s-\alpha) = \prod_p [(1-p^{-s})(1-p^{\alpha-s})]^{-1}, \alpha \in \mathbb{C}, \Re(s) > \max\{1, \Re(\alpha)+1\}$
<u>Beweis:</u> Korollar 5.13, Satz 5.16 und $\sum_{\nu=0}^{\infty} p^{-\nu s} = (1-p^{-s})^{-1}$

1.6 Der große Primzahlsatz

Lemma 6.1: Für $x > 0$ gilt: $0 \leq \frac{\Psi(x)}{x} - \frac{\theta(x)}{x} \leq \frac{(\log x)^2}{2\sqrt{x}\log 2}$. Insb.: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\Psi(x)}{x} - \frac{\theta(x)}{x}\right) = 0$.

Lemma 6.2: Für $x \geq 2$ gilt: (i) $\theta(x) = \pi(x)\log x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t}\mathrm{d}t$ (ii) $\pi(x) = \frac{\theta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\theta(t)}{t}(\log t)^2\mathrm{d}t$
<u>Beweis:</u> (i) Abelsche Summation: $f(n) = \chi_{\mathbb{P}}(n), F(x) = \pi(x), g(n) = \log n, a = 1, b = x$
(ii) Abelsche Summation: $f(n) = \chi_{\mathbb{P}}(n)\log n, F(x) = \theta(x), g(n) = \log n, a = \frac{3}{2}, b = x$

Satz 6.3: (i) $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \Leftrightarrow$ (ii) $\theta(x) \sim x \Leftrightarrow$ (iii) $\Psi(x) \sim x$
<u>Beweis:</u> mit Lemma 6.2

Satz 6.4: $\zeta(s)$ besitzt meromorphe Fortsetzung in die Halbebene $\Re(s) > 0$. Die Fortsetzung ist holomorph bis auf einen einfachen Pol mit Residuum 1 in $s = 1$. Es gilt $\zeta(s) \neq 0$ für $\Re(s) > 1$ und $\zeta(s) > 0$ für $0 < \sigma < 1$.

Lemma 6.5: Für $\sigma > 1, t \in \mathbb{R}: \zeta^3(\sigma) \cdot |\zeta(\sigma+it)|^4 \cdot |\zeta(\sigma+it)| \geq 1$

Satz 6.6: Für $t \in \mathbb{R}\setminus 0$ gilt $\zeta(1+it) \neq 0$

Bemerkung 6.7: Nullstellen von $\zeta(s)$ eng mit $\pi(x)$ verbunden: $\pi(x) = \frac{x}{\log x} + \mathcal{O}(x^\beta \log x), \beta = \sup\{\Re(s)|\zeta(s) = 0\} \rightarrow$ Riemannsche Vermutung: $\beta = \frac{1}{2}$

Lemma 6.8: Für $\Re(s) > 1$ gilt: $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=2}^{\infty} \Lambda(s)n^{-s} = s\int_1^{\infty} \frac{\Psi(t)}{t^{s+1}}\mathrm{d}t$
<u>Beweis:</u> $\Re(s) > 1: \zeta(s) = e^{G(s)}, G(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log n}n^{-s} \Rightarrow \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -G(s) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log n}n^{-s}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} \Lambda(n)n^{-s}$ und $\Psi(x) = \Lambda(x) \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \Lambda(n)n^{-s} = s\int_1^{\infty} \frac{\Psi(t)}{t^{s+1}}\mathrm{d}t$.

Satz 6.9: (von Tauber:) $F : [0,\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ beschränkt und auf jedem Intervall $[0,R]$ Riemannintbar für $R > 0$. $\Rightarrow G(s) = \int_0^{\infty} F(x)e^{-xs}\mathrm{d}x, \Re(s) > 0$ ist holomorph. Hat G in jeden Punkt der imaginären Achse eine holomorphe Fortsetzung in eine Umgebung des Punktes, dann existiert das uneigentl. Integral $\int_0^{\infty} F(x)\mathrm{d}x = G(0)$.

Satz 6.10: Sei $f : [1,\infty) \rightarrow [0,\infty)$ monoton steigend und $f(x) = \mathcal{O}(x)$. Dann ist $g(s) := s\int_1^{\infty} f(x)x^{-s-1}\mathrm{d}x$ holomorph für $\Re(s) > 1$. Es gebe $\gamma > 0$, s.d. $g(s) - \frac{\gamma}{s-1}$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ eine holomorphe Fortsetzung in $1+it$ besitzt, dann gilt $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \gamma$.

Satz 6.11: (Großer Primzahlsatz:) Es gilt $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, x \to \infty$.

1.7 Der Dirichlet'sche Primzahlsatz

Definition 7.1: Sei $N \in \mathbb{N}$. $\chi : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ heißt Dirichlet'scher Charakter modulo N, wenn ein Gruppenhom. $\tilde{\chi} : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \to \mathbb{C}^*$ existiert mit $\chi(n) = \begin{cases} \tilde{\chi}(n+N\mathbb{Z}) & \mathrm{ggT}(n,N)=1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Bemerkung 7.2: G endl. abelsche Gruppe, $\tilde{\chi} : G \to \mathbb{C}^*$: (i) $G \simeq \hat{G} := \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$
(ii) zu $g \in G \setminus \{1\}$ existiert ein $\tilde{\chi} \in \hat{G}$ mit $\tilde{\chi}(g) \neq 1$ (iii) G kanonisch isomorph zu $\hat{\hat{G}}$ via $g \mapsto (\tilde{\chi} \mapsto \tilde{\chi}(g))$ (iv) für $\tilde{\chi} \in G$ gilt: $\sum_{g \in G} \chi(g) = \begin{cases} \#G & \tilde{\chi} \equiv 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

(v) für $g \in G$ gilt: $\sum_{\tilde{\chi} \in \hat{G}} \tilde{\chi}(g) = \begin{cases} \#G & g = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$\chi_0(n) = \begin{cases} 1 & \mathrm{ggT}(n,N)=1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ Hauptcharakter modulo N.

Satz 7.3: (i) $\sum_{n(N)} \chi(n) = \begin{cases} \varphi(N) & \chi = \chi_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ (ii) $\frac{1}{\varphi(N)} \sum_{n(N)} \chi_1(n)\overline{\chi_2(n)} = \begin{cases} 1 & \chi_1 = \chi_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

(iii) $n \in \mathbb{Z} : \sum_{\chi(N)} \chi(n) = \begin{cases} \varphi(N) & n \equiv 1(N) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

(iv) $\mathrm{ggT}(n,N) = 1 : \frac{1}{\varphi(n)} \sum_{\chi(N)} \chi(n)\overline{\chi(n')} = \begin{cases} 1 & n \equiv n'(N) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Definition 7.4: Sei χ ein Charakter modulo N. Dann heißt $L(\chi, s) := D_\chi(s) = \sum_{n=1}^\infty \chi(n)n^{-s}$ die Dirichlet'sche L-Reihe zu χ.

Proposition 7.5: Es gilt $\sigma_a(\chi_0) = \sigma_b(\chi_0) = 1$ und $L(\chi_0, s) = \prod_{p|N}(1-p^{-s})\zeta(s) = \prod_{p\nmid N}(1-p^{-s})^{-1} \neq 0$ für $\Re(s) > 1$. $L(\chi_0, s)$ besitzt meromorphe Fortsetzung für $\Re(s) > 0$ mit genau einem einfachen Pol in $s = 1$ mit Residuum $\frac{\varphi(N)}{N}$.

Proposition 7.6: Für $\chi \neq \chi_0$ gilt $\sigma_a(\chi) = 1, \sigma_b(\chi) = 0$. $L(\chi, s)$ ist für $\Re(s) > 0$ holomorph und es gilt $L(\chi, s) = \prod_{p\nmid N}(1-\chi(p)p^{-s})^{-1}$ für $\Re(s) > 1$.

Lemma 7.7: Sei χ Charakter mod N. Für $\Re(s) > 1$ gilt: $-\frac{L'(\chi,s)}{L(\chi,s)} = \sum_{n=2}^\infty \Lambda(n)\chi(n)n^{-s}$ und $L(\chi, s) = \exp(G_\chi(s)), G_\chi(s) = \sum_{n=2}^\infty \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{\log n} n^{-s}$.

Lemma 7.8: Sei χ reeller Charakter mod N. Dann gilt für $\Re(s) > 1 : \zeta(s)L(\chi, s) = \sum_{n=1}^\infty a(n)n^{-s}$ mit $a(n) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \; \forall \, n$ und $a(m^2) \geq 1 \; \forall \, m$.

Satz 7.9: (i) $L(\chi, 1 + it) \neq 0 \; \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (ii) $\chi \neq \chi_0$: $L(\chi, 1) \neq 0$

Definition 7.10: Für $\mathrm{ggT}(r,N) = 1$ sei $\pi_{r,N}(x) := \#\{p \in \mathbb{P} : p \leq x, p \equiv r(N)\}$, $\theta_{r,N}(x) := \sum_{p \leq x, p \equiv r(N)} \log p$ und $\Phi_{r,N}(x) = \sum_{n \leq x, n \equiv r(N)} \Lambda(n)$

Proposition 7.11: $\lim_{x\to\infty} \frac{\Phi_{r,N}(x)}{x} = \frac{1}{\varphi(N)}$

Satz 7.12: (Dirichlet'scher Primzahlsatz:) $\pi_{r,N}(x) \sim \frac{1}{\varphi(N)} \frac{x}{\log x}$

1.8 Aufgaben

Aufgabe 1.1: Menge der PZ der Form $4n+3, n \in \mathbb{N}$ ist unendlich: Ang. $\tilde{\mathbb{P}} = \{p_1, \dots, p_k\}, k < \infty \Rightarrow N = 4p_1 \cdots p_k - 1, N \equiv 3(4)$, ungerade und $p_i \nmid N$. Sei $N = q_1 \cdots q_r$ Primfaktorzerlegung. Ang. $q_i \equiv 1(4) \Rightarrow N \equiv 1(4) \lightning \Rightarrow \exists j$ mit $q_j \equiv 3(4)$ und $q_j \notin \tilde{\mathbb{P}}$.

Aufgabe 2.1: (i) $\frac{n}{\varphi(n)} = \sum_{d|n} \frac{|\mu(d)|}{\varphi(d)}$: $f = \frac{|\mu|}{\varphi}, g = \frac{id}{\varphi}$, zzg.: $f * \mathbb{1} = g$. f, g mult. $\Rightarrow$ Beh. für Primzahlpotenzen. (ii) $\tau(n^a) = \sum_{d|n} a^{\omega(d)}$ (iii) $2^{\omega(d)} = \sum_{d|n} |\mu(d)|$

Aufgabe 3.1: Konv. von Dirichletreihen ganz normal mit Majoranten- oder Wurzelkriterium.

Aufgabe 3.2: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ zt. Fkt. und für $x \geq 1, F(x) := \sum_{n \leq x} f(n)$. Wenn $D_f(s)$ in $s = 0$ divergiert, gilt für $s \in \mathbb{C}, \Re(s) > \sigma_b$: $D_f(s) = s \int_1^\infty \frac{F(x)}{x^{s+1}} \mathrm{d}x$.

Aufgabe 3.3: $\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \sim \log\log x, x \to \infty : \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} \sim \int_1^x \frac{1}{t} \mathrm{d}t = \log x$

Aufgabe 3.4: (i) $\sum_{n=1}^\infty \tau(n^2) n^{-s} = \frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)}, \Re(s) > 1$: Euler-Produkt und geometrische Reihe (ii) $\sum_{n=1}^\infty \tau^2(n) n^{-s} = \frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)}, \Re(s) > 1$: analog

Aufgabe 3.5: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}, f(1) \neq 0, \sigma_a < \infty, D_f(s) \neq 0$, dann gilt für $\sigma > c \geq \sigma_a : D_f(s) = \exp(D_g(s)), D_g(s) = \log(f(1)) + \sum_{n=2}^\infty \frac{f' * f^{-1}}{\log n} n^{-s}$. $G(s)$, s.d. $\zeta(s) = e^{G(s)}$: Sei $f = i \equiv 1 \Rightarrow f'(n) = \ln(n), f^{-1}(n) = \mu(n) \Rightarrow G(s) = \sum_{n=2}^\infty \frac{\ln * \mu)(n)}{\ln(n)} n^{-s} = \sum_{n=2}^\infty \frac{\Lambda(n)}{\ln(n)} n^{-s}, \sigma > \sigma_b(i) = 1$.

Aufgabe 4.2: $Li(x) = \int_2^x \frac{1}{\log t} \mathrm{d}t \sim \frac{x}{\log x}$

Aufgabe 5.1: Dirichlet'sche Charaktere mod N angeben: 1. $\#(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times = \#$ Dirichlet'sche Charaktere mod N 2. immer Hauptcharakter 3. andere Charaktere: eind. bestimmt durch Werte in $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$, $\chi(g) \in \mathbb{C}^\times = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, $\sum_{g(N)} \chi(g) = 0$, Multiplikativität ausnutzen

2 Die Riemannsche ζ-Funktion und Dirichlet'sche L-Reihen

2.1 Die Γ-Funktion

Definition 1.1: Die Γ-Funktion ist für $\Re(s) > 0$ definiert durch $\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\mathrm{d}t$.

Proposition 1.2: Das Integral $\Gamma(s)$ konvergiert für $\Re(s) > 0$ absolut und stellt dort eine holomorphe Funktion dar.

Satz 1.4: Die Γ-Funktion besitzt eine meromorphe Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$. Diese ist holomorph bis auf einfache Pole in $s = -m, m \in \mathbb{N}_0$ mit $Res_{-m}\Gamma(s) = \frac{(-1)^m}{m!}$. Sie ist gegeben durch die Partialbruchentwicklung $\Gamma(s) = \int_1^\infty t^{s-1}e^{-t}\mathrm{d}t + \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{m!}\frac{1}{s+m}$. Es gilt $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ für $s \in \mathbb{C}\setminus\{-\mathbb{N}_0\}$ und $\Gamma(m+1) = m!, m \in \mathbb{N}_0$. $\Gamma(s)$ ist auf jedem $\nu_{a,b} := \{s \in \mathbb{C} : a \leq \Re(s) \leq b\}, 0 < a < b$ beschränkt.

Satz 1.5: (Eindeutigkeitssatz von Wielandt:) Sei $F : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $F(s+1) = sF(s)$ und beschränkt auf jedem Vertikalstreifen $\nu_{a,b}$. Dann gilt $F(s) = F(1)\Gamma(s)$.

Lemma 1.6: Sei $\sum_{n=1}^\infty f_n(z)$ eine absolut gleichmäßig konvergente Reihe holomorpher Funktionen auf dem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$. Dann definiert $F(z) = \prod_{n=1}^\infty(1 + f_n(z))$ eine holomorphe Funktion auf D. Die Nullstellenmenge von F ist die Vereinigung der Nullstellenmengen von $1 + f_n(z), n \in \mathbb{N}$

Lemma 1.7: Die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \left(\left(1 + \frac{s}{n}\right)e^{-\frac{s}{n}} - 1\right)$ konvergiert absolut lokal gleichm. auf $\mathbb{C}$, damit auch $\prod_{n=1}^\infty \left(1 + \frac{s}{n}\right)e^{-\frac{s}{n}}$, was damit eine ganze Funktion mit Nullstellen in $-\mathbb{N}$ darstellt.

Satz 1.8: Für $s \in \mathbb{C}$ ist $g(s) := \frac{1}{\Gamma(s)} = se^{\gamma_E s}\prod_{n=1}^\infty \left(1 + \frac{s}{n}\right)e^{-\frac{s}{n}}$ ganze Funktion.

Korollar 1.9: $\Gamma(s)$ nullstellenfrei auf $\mathbb{C}$.

Korollar 1.10: (Produktsatz von Gauß:) Für $s \in \mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}_0\}$ gilt: $\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^s}{s(s+1)\ldots(s+n)}$.

Satz 1.11: (Eulers Reflektionsformel:) Für $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$: $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$.

Korollar 1.12: Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \sqrt{\pi}\prod_{k=0}^{n-1}\left(k + \frac{1}{2}\right)$.

Korollar 1.13: Für $s \in \mathbb{C}$ gilt: $\frac{\sin(\pi s)}{\pi} = s\prod_{n=1}^\infty\left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right)$

Satz 1.14: (Legendre'sche Verdopplungsf.:) Für $s \notin \left(-\frac{1}{2}\mathbb{N}_0\right)$ gilt: $\Gamma(2s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}2^{2s-1}\Gamma(s)\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right)$.

2.2 Die Riemann'sche ζ-Funktion

Satz 2.1: (Partialbruchzerlegung des Cotangens:) Für $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ gilt: $\pi\cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^\infty \frac{2z}{z^2 - n^2}$.

Definition 2.2: Sei $g(z) = \frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}B_n z^n, 0 < |z| < 2\pi$. Dann heißt $B_n, n \in \mathbb{N}_0$ die n-te Bernoulli-Zahl.

Lemma 2.3: (i) $B_n \in \mathbb{Q}\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0$ (ii) $B_1 = -\frac{1}{2}$ und $B_{2n+1} = 0$ für $n \in \mathbb{N}$
(iii) $B_0 = 1, B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}$ (iv) $B_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}B_k, n \in \mathbb{N}$

Satz 2.4: Für $k \in \mathbb{N}$ gilt: $\zeta(2k) = (-1)^{k+1}\frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}B_{2k} \in \mathbb{Q}\cdot\pi^{2k}$.

Definition 2.6: Für $u, v \in \mathbb{C}, \tau \in \mathbb{H}$ heißt $\theta(u, v; \tau) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i(n+u)^2\tau + 2\pi i(n+u)v}$ die Theta-Reihe in τ mit Charakteristik (u, v).

Lemma 2.7: Die Theta-Reihe konvergiert absolut kompakt gleichmäßig auf $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{H}$ und ist holomorph als Funktion von $u \in \mathbb{C}, v \in \mathbb{C}, \tau \in \mathbb{H}$.

Satz 2.8: (Theta-Transformationsformel:) Es gilt: $\theta\left(-v, u; -\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{\tau}{i}} e^{-2\pi i u v} \theta(u, v; \tau)$.

Bemerkung 2.9: (Poisson'sche Summenformel:) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Schwartzfunktion (alle Ableitungen fallen schnell ab) und $\hat{(f)}(\omega) = \int < --\infty^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \omega t} \mathrm{d}t$ ihre Fouriertransformierte, dann gilt $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(m)$.

Korollar 2.10: Es sei $\vartheta(iy) = \theta(0, 0; iy)$ Theta-Nullwert, dann gilt für $y > 0$: $\vartheta\left(\frac{1}{y}\right) = \sqrt{y}\vartheta(y)$.

Satz 2.11: Sei $\xi(s) := \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$. Dann besitzt $\xi(s)$ eine meromorphe Fortsetung in die gesamte s-Ebene, die bis auf einfache Pole in $s = 0, 1$ mit Residuen $Res_{s=1}(\xi) = 1, Res_{s=0}(\xi) = -1$ holomorph ist. Es gilt die Funktionalgleichung $\xi(1 - s) = \xi(s)$ und wir haben die Integraldarstellung $\xi(s) = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} (\vartheta(y) - 1)(y^{\frac{s}{2}} + y^{\frac{1-s}{2}}) \frac{\mathrm{d}y}{y} + \frac{1}{1-s} - \frac{1}{s}$.

Korollar 2.12: Es gilt $\xi\left(\frac{1}{2} + it\right) \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$.

Korollar 2.13: Die ζ-Funktion besitzt eine meromorphe Fortsetzung in die gesamte s-Ebene. Diese ist holomorph bis auf einen einfachen Pol in $s = 1$ mit Residuum $Res_{s=1}(\zeta) = 1$. Wir haben $\zeta(1 - s) = 2^{1-s}\pi^{-s} \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(s)$ und $\zeta(0) = \frac{1}{2}, \zeta(1 - 2n) = -\frac{B_n}{2n}, n \in \mathbb{N}$ und triviale Nullstellen $\zeta(-2n) = 0, n \in \mathbb{N}$.

2.3 Dirichlet'sche Charaktere und Gauß'sche Summen

Definition 3.1: Sei χ ein Dirichlet'scher Charakter mod N. Ein Teiler M von N heißt induzierter Modul von χ, falls gilt: $\chi(m) = \chi(n)\ \forall\ m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \equiv n(M), \mathrm{ggT}(m, N) = \mathrm{ggT}(n, N) = 1$. Der kleinste induzierte Modul heißt der Führer von χ. Hat χ Führer N, so nennen wir χ primitiv

Satz 3.3: Seien χ, χ_0 Charaktere mod N. Für $M|N$ gilt: M induzierter Modul von $\chi \Leftrightarrow \forall\ n \in \mathbb{Z}, n \equiv 1(M), \mathrm{ggT}(n, N) = 1$ gilt $\chi(n) = 1 \Leftrightarrow$ Es gibt einen Charakter Ψ mod M mit $\chi = \chi_0\Psi$, wobei Ψ eindeutig bestimmt.

Korollar 3.4: Für einen Charakter χ mod N gilt: χ primitiv $\Leftrightarrow$ zu $M|N, M < N$ existieren $m, n \in \mathbb{Z}, \mathrm{ggT}(m, N) = \mathrm{ggT}(n, N) = 1, m \equiv n(N)$ und $\chi(m) \neq \chi(n) \Leftrightarrow$ zu jedem $M|N, M < N$ existiert $n \in \mathbb{Z}, \mathrm{ggT}(n, N) = 1, n \equiv 1(M)$ und $\chi(n) = 1$.

Korollar 3.5: χ Charakter mod N, Führer M. Dann existiert Ψ Charakter mod M mit $\chi = \chi_0\Psi$. Ψ ist eindeutig bestimmt und primitiv.

Definition 3.6: Wenn χ ein Charakter mod $N, m \in \mathbb{Z}$, dann heißt $G(m, \chi) := \sum_{n(N)} \chi(n) e\left(\frac{mn}{N}\right)$, wobei $e(\alpha) = e^{2\pi i\alpha}$, die Gauß'sche Summe zu m und χ ($G(1, \chi) = G(\chi)$).

Lemma 3.8: Sei χ Charakter mod N. Für $m \in \mathbb{Z}, \mathrm{ggT}(m, N) = 1$ gilt: $G(m, \chi) = \overline{\chi(m)} G(\chi)$.

Satz 3.10: Sei χ primitiver Charakter mod N, dann gilt: (i) $G(m, \chi) = \overline{\chi(m)} G(\chi)\ \forall\ m \in \mathbb{Z}$
(ii) $G(\chi)G(\overline{\chi}) = \chi(-1)N$ (iii) $|G(m, \chi)| = \sqrt{N}$, falls $\mathrm{ggT}(m, N) = 1$.

Lemma 3.11: χ Charakter mod N, Ψ Charakter mod M, $\mathrm{ggT}(N, M) = 1 \Leftrightarrow \chi\Psi$ Charakter mod MN und $G(\chi\Psi) = \chi(M)\Psi(N)G(\chi)G(\Psi)$.

Lemma 3.12: Sei Ψ Charakter mod $M, m \in \mathbb{Z}, N \in \mathbb{Z}, M|N$, dann gilt:

(i) $\sum_{n(N)} \Psi(n) e\left(\frac{mn}{N}\right) = \begin{cases} 0 & \frac{N}{M} \nmid m \\ \frac{N}{M} G\left(\frac{mM}{N}, \Psi\right) & \frac{N}{M} \mid m \end{cases}$
(ii) Ist $\chi = \chi_0 \Psi \bmod N$, Ψ primitiv: $G(m,\chi) = G(\Psi) \sum_{d \mid \mathrm{ggT}\left(\frac{N}{M}, m\right)} d\mu\left(\frac{N}{Md}\right) \Psi\left(\frac{N}{Md}\right) \overline{\Psi}\left(\frac{m}{d}\right)$. Für $g := \mathrm{ggT}\left(\frac{N}{M}, m\right)$ gilt: $G\left(\frac{N}{M}, \chi\right) = G(\Psi) g \frac{\varphi\left(\frac{N}{M}\right)}{\varphi(g)}$.

Korollar 3.13: χ Charakter mod N: χ primitiv $\Leftrightarrow G(m,\chi) = \overline{\chi(m)} G(\chi) \; \forall\, m \in \mathbb{Z}$

Definition 3.14: $n \in \mathbb{N}_0$, n-tes Bernoulli-Polynom: $B_n(x) = \sum_{k=0}^n B_{n-k} \binom{n}{k} x^k \in \mathbb{Q}[x]$.

Satz 3.16: (i) $B_n(0) = B_n, n \in \mathbb{N}_0$ (ii) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} B_n(x) = n B_{n-1}(x), n \in \mathbb{N}$
(iii) $\sum_{n=0}^\infty B_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{te^{xt}}{e^t - 1}, x \in \mathbb{C}, |t| \leq 2\pi$ (iv) $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$
(v) $B_n(x+1) = B_n(x) + nx^{n-1}$ (vi) $\sum_{k=1}^N k^n = \frac{B_{n+1}(N+1) - B_{n+1}(0)}{n+1} = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} B_j \frac{N}{n+1-j}$

Definition 3.18: Ist χ Charakter mod N, dann heißt $B_{n,\chi} = N^{n-1} \sum_{k=0}^{N-1} \chi(k) B_n\left(\frac{k}{N}\right) \in \mathbb{Q}(\chi)$ die n-te verallgemeinerte Bernoulli-Zahl.

Lemma 3.19: χ Charakter mod N, dann gilt: (i) $B_{0,\chi} = \begin{cases} \frac{\varphi(N)}{N} & \chi = \chi_0 \\ 0 & sonst \end{cases}$
(ii) für $\chi(-1) = 1$ (χ gerade): $B_{n,\chi} = 0$, falls n ungerade
(iii) für $\chi(-1) = -1$ (χ ungerade): $B_{n,\chi} = 0$, falls n gerade

2.4 Dirichlet'sche L-Reihen

Lemma 4.1: Charakter χ mod N induziert von Charakter Ψ mod $M|N$, dann gilt: $L(\chi, s) = \prod_{p|n} (1 - \Psi(p) p^{-s}) L(\Psi, s), \Re(s) = 1$.

Proposition 4.2: Sei χ_0 der Hauptcharakter mod $N > 1$. Dann besitzt $L(\chi_0, s) = \prod_{p|N}(1 - p^{-s}) \zeta(s)$ eine meromorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C}$. Diese ist holomorph bis auf einen einfachen Pol in $s = 1$ mit Residuum $\frac{\varphi(N)}{N}$ und es gilt $L(\chi_0, -2n) = 0, n \in \mathbb{N}_0$

Satz 4.3: Sei χ ein Charakter mod $N > 1$. Ist χ primitiv und gerade, so besitzt $\Lambda(\chi, s) := \left(\frac{\pi}{N}\right)^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) L(\chi, s)$ eine Fortsetzung als ganze Funktion in s mit Funktionalgleichung $\Lambda(\chi, s) = \varepsilon \Lambda\left(\overline{\chi}, 1-s\right)$, $\varepsilon = \frac{G(\chi)}{\sqrt{N}}$. Es gilt $\Lambda(\chi, s) \neq 0$ für $\Re(s) \geq 1$ oder $\Re(s) \leq 0$. $L(\chi, s)$ ist eine ganze Funktion mit Nullstellen $L(\chi, -2n) = 0, n \in \mathbb{N}_0$.

Satz 4.4: Sei χ ein Charakter mod $N > 1$. Ist χ primitiv und ungerade, so besitzt $\Lambda(\chi, s) := \left(\frac{\pi}{N}\right)^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) L(\chi, s)$ eine Fortsetzung als ganze Funktion in s mit Funktionalgleichung $\Lambda(\chi, s) = -\frac{iG(\chi)}{\sqrt{N}} \Lambda\left(\overline{\chi}, 1-s\right)$. Es gilt $\Lambda(\chi, s) \neq 0$ für $\Re(s) \geq 1$ oder $\Re(s) \leq 0$. $L(\chi, s)$ ist eine ganze Funktion mit Nullstellen $L(\chi, 1-2n) = 0, n \in \mathbb{N}$.

Korollar 4.5: Sei χ ein Charakter mod $N > 1$, $\chi \neq \chi_0$, dann besitzt $L(\chi, s)$ eine Fortsetzung als ganze Funktion und für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $\chi(-1) = (-1)^n$ gilt $L(\chi, -n) = 0$.

Satz 4.6: Sei χ ein Charakter mod $N > 1$, $\chi \neq \chi_0$, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$. $L(\chi, -n) = -\frac{N^n}{n+1} \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) B_{n+1}\left(\frac{k}{N}\right) = -\frac{1}{n+1} B_{n+1,\chi}$.

Satz 4.7: Sei χ ein primitiver Charakter mod $N > 1$, $n \in \mathbb{N}_0$: (i) χ ungerade: $L(\chi, 2n+1) = \frac{G(\chi)}{2N} \frac{(2\pi i)^{2n+1}}{(2n+1)!} \sum_{k=1}^{N-1} \overline{\chi(k)} B_{2n+1}\left(\frac{k}{N}\right) = \frac{G(\chi)}{2(2n+1)!} \left(\frac{2\pi i}{N}\right)^{2n+1} B_{2n+1,\overline{\chi}}$.
(ii) χ gerade: $L(\chi, 2n) = -\frac{G(\chi)}{2N} \frac{(2\pi i)^{2n}}{(2n)!} \sum_{k=1}^{N-1} \overline{\chi(k)} B_{2n}\left(\frac{k}{N}\right) = -\frac{G(\chi)}{2(2n)!} \left(\frac{2\pi i}{N}\right)^{2n} B_{2n,\overline{\chi}}$.

Korollar 4.8: χ ungerader primitiver Charakter mod $N > 1 \Leftrightarrow L(\chi, 1) = \frac{\pi i G(\chi)}{N^2} \sum_{k=1}^{N-1} \overline{\chi(k)} \cdot k$.

2.5 Aufgaben

Aufgabe 6.1: $A \subseteq \mathbb{P} : \nu(A) := \lim_{x\to\infty} \frac{\#\{p\in A : p\leq x\}}{\pi(x)}$ natürliche Dichte

Aufgabe 6.2: $A \subseteq \mathbb{P} : \alpha(A) := \lim_{s\searrow 1} \frac{\sum_{p\in A} p^{-s}}{\log(1/(1-s))}$ analytische Dichte

Aufgabe 6.5: $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}, F(x+1) = xF(x), F(1) = 1$ und $\log(F(x))$ konvex $\Rightarrow F(x) = \Gamma$: zzg.: $\Gamma(1) = 1, \log(\Gamma(x))$ konvex, Eindeutigkeit

Aufgabe 7.1: $\pi \cot(\pi z) = \frac{\sin'(z)}{\sin(z)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left(\log \left(\pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)\right)\right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$

Aufgabe 7.2: $(-1)^{n+1} B_{2n} > 0, n \in \mathbb{N} : 0 < \zeta(2k) = (-1)^{k+1} B_{2k} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}$ und $\frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} > 0$

Aufgabe 7.3: $\zeta(2) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi^2}{6}$

Aufgabe 8.1: $\sum_{n=0}^{\infty} B_{n,\chi} \frac{t^n}{n!} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\chi(k) t e^{kt}}{e^{Nt} - 1}, \chi$ Charakter mod N, $|t| < \frac{2\pi}{N}$

3 Klassenzahlen quadratischer Formen

3.1 Binäre quadratische Formen und Reduktionstheorie

Definition 1.1: $a, b, c \in \mathbb{Z}$, nicht alle 0: $Q = [a, b, c] := aX^2 + bXY + cY^2 \in \mathbb{Z}[X, Y]$ quadratische Form mit Koeffizienten a, b, c. Die Zahl $D := b^2 - 4ac$ heißt Diskriminante von Q ($D \equiv 0, 1(4)$, im Folgenden: $D \neq 0, D \neq \square$). Mit $A_Q = \left(\begin{smallmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{smallmatrix}\right)$ bezeichnet man die Gram-Matrix von Q.Grundform: $Q_0 = \begin{cases} \left[1, 0, -\frac{D}{2}\right] & D \equiv 0(4) \\ \left[1, 1, \frac{1-D}{2}\right] & D \equiv 1(4) \end{cases}$

Definition 1.4: Zwei q.F. Q, Q' mit $Q(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y) = Q'(x, y)$ für gewisse $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ mit $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ heißen äquivalent oder ähnlich ($Q \sim Q'$). Ähnliche Formen haben die selbe Diskriminante.

Bemerkung 1.6: Für $Q = [a, b, c]$ mit $D < 0$ ab sofort $a > 0$ (Q positiv definit). Für $Q = [a, b, c]$ mit $D > 0$ ist Q indefinit.

Satz 1.7: Die Anzahl der Ähnlichkeitsklassen q.F. von Diskriminante D ist endlich.

Bemerkung 1.8: $[a, b, c] \sim [a', b', c']$ dann gilt $\mathrm{ggT}(a, b, c) = \mathrm{ggT}(a', b', c')$

Definition 1.9: Eine q.F. heißt $Q = [a, b, c]$ heißt primitiv, falls $\mathrm{ggT}(a, b, c) = 1$.

Definition 1.10: Zu eine Diskriminante D heißt
$h(D) := \begin{cases} \#\{\text{Ähnlichkeitskl. primitiver q.F. mit Diskr. } D\} & D > 0 \\ \#\{\text{Ähnlichkeitskl. primitiver, pos. def. q.F. mit Diskr. } D\} & D < 0 \end{cases}$ Klassenzahl von D.

Satz 1.11: Sei $D < 0$ Diskriminante, dann ist jede pos. def. q.F. mit Diskr. D zu genau einer q.F. $[a, b, c]$ mit $D = b^2 - 4ac$, $\begin{cases} -a < b \leq a < c \\ \text{oder } 0 \leq b \leq a = c \end{cases}$ (reduzierte q.F.).

Bemerkung 1.13: $h(D)$ für $D < 0$ bestimmen: primitive reduzierte q.F. mit $a \leq \sqrt{\frac{|D|}{3}}$ und für mögliche a zugehörige b mit $-a < b \leq a$ oder $0 \leq b \leq a$ bestimmen. Dann $c = \frac{b^2 - D}{4a}$ bestimmen. Wichtig: $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

3.2 Der Kronecker-Charakter

Definition 2.1: Für $m > 0, D \equiv 0, 1(4), D \neq \square$ definiert man den Kronecker-Charakter durch $\chi_D(m) = \left(\frac{D}{m}\right)$ via $\chi_D(p) = 0, p \in \mathbb{P}, p \neq 2, p | D$, $\chi(2) = \begin{cases} 1 & D \equiv 1(8) \\ -1 & D \equiv 5(8) \end{cases}$.
Für $m = \prod_{j=1}^{r} p_j^{\nu_j}$ gilt $\chi_D(m) = \prod_{j=1}^{r} (\chi_D(p_j))^{\nu_j}$ mit $\chi_D(p) = \left(\frac{D}{p}\right) \equiv D^{\frac{p-1}{2}}(p)$.

Lemma 2.2: (i) $\chi_D(m) = 0, \mathrm{ggT}(D, m) > 1$ (ii) $\chi_D(m) = \pm 1, \mathrm{ggT}(D, m) = 1$ (iii) $\chi_D(m_1 m_2) = \chi_D(m_1)\chi_D(m_2)$

Satz 2.3: (Quadratisches Reziprozitätsgesetz:) $p, q \in \mathbb{P} \setminus \{2\}$, dann gilt: (i) $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$
(ii) $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$ (iii) $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$

Proposition 2.4: $D \equiv 0, 1(4), D \neq \square$, dann ist χ_D ein reeller Charakter mod $|D|$.

Definition 2.5: $D \equiv 0, 1(4), D \neq \square$ heißt Fundamentaldiskriminante, falls D ungerade und quadratfrei oder D gerade und $\frac{D}{4}$ quadratfrei. Jede Diskriminante D ist von der Form $D = f^2 D_0, f \in \mathbb{N}, D_0$ Fundamentaldiskr.

Satz 2.6: Jeder primitive reelle Dirichlet'sche Charakter ist von der Form χ_D für eine Fundamentaldiskr. D.

Definition 2.7: Für $n, m \in \mathbb{N}$ teilerfremd sei $S(n, m) := \sum_{x(m)} e\left(\frac{x^2 n}{m}\right)$ die quadratische Gauß-Summe von m, n.

Lemma 2.8: (i) $\operatorname{ggT}(m, m') = 1 : S(n, mm') = S(nm', m)S(nm, m')$ (ii) $p \in \mathbb{P}, \delta = \begin{cases} 1 & p \text{ ungerade} \\ 2 & p \text{ gerade} \end{cases}$, für $\ell \geq 2\delta, p \nmid n$: $S(n, p^\ell) = pS(n, p^{\ell-2})$

Lemma 2.9: Für $2 \nmid n$ gilt: (i) $S(n, 2) = 0$ (ii) $S(n, 4) = 2(1 + i^n)$ (iii) $S(n, 8) = 4e\left(\frac{n}{8}\right)$

Lemma 2.10: $p \in \mathbb{P} \setminus \{2\}, p \nmid n : S(n, p) = \left(\frac{n}{p}\right) S(1, p) = \left(\frac{n}{p}\right) G(\chi_{p'}), p' = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p$

Satz 2.11: $S(1, p) = \begin{cases} \sqrt{p} & p \equiv 1(4) \\ i\sqrt{p} & p \equiv 3(4) \end{cases}$

Satz 2.12: Sei D Fundamentaldiskr., dann gilt: $G(\chi_D) = \begin{cases} \sqrt{D} & \chi(-1) = 1 \Leftrightarrow D > 0 \\ i\sqrt{|D|} & \chi_D(-1) = -1 \Leftrightarrow D < 0 \end{cases}$

Lemma 2.13: Sei $n > 0, D \equiv 0, 1(4), \operatorname{ggT}(n, D) = 1$. Dann ist die Anzahl der mod $4n$ verschiedenen Lösungen von $x^2 \equiv D(4n)$ genau $2 \sum_{f|n, f\ \square-\text{frei}} \chi_D(f)$.

3.3 Darstellungen ganzer Zahlen durch quadratische Formen

Lemma 3.1: Es seien $\operatorname{ggT}(x, y) = 1, Q = [a, b, c]$, Diskr. $D \neq \square$. Ist (x, y) eine Lösung von $Q(x, y) = n$, dann gibt es eindeutig bestimmte $r, s \in \mathbb{Z}$ mit $sx - ry = 1$, s.d. $\ell = (2ax + by)r + (bx + 2cy)s$ eine Lösung von $\ell^2 \equiv D(4n), 0 \leq \ell < 2n$ ist.

Satz 3.2: Seien $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ Lösungen von $Q(x, y) = n$, die zum selben ℓ korrespondieren, dann gilt $2ax_1 + (b + \sqrt{D})y_1 = (2ax_2 + (b + \sqrt{D})y_2)\left(\frac{t+u\sqrt{D}}{2}\right)$, wobei $t, u \in \mathbb{Z}$ mit $t^2 - Du^2 = 4$ (Pell'sche Gleichung)

Definition 3.3: Ist (x, y) eine Lösung von $Q(x, y) = n$, dann auch $(x, y)g^T$ mit $g^T A_Q g = A_Q, g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Dann heißt g ein Automorphismus von Q. $Aut(Q)$ bezeichnet die Automorphismengruppe von Q.

Satz 3.4: (i) Sei Q eine primitive q.F. mit Diskriminante $D < 0$, dann gilt

$$\omega_D := \#Aut(Q) = \begin{cases} 6 & D = -3 \\ 4 & D = -4 \\ 2 & \text{sonst} \end{cases}$$

(ii) Es gibt genau ω_D Lösungen von $Q(x, y)$ zum selben ℓ.

Lemma 3.5: Sei $Q = [a, b, c]$ eine primitive q.F. mit Diskriminante $D \neq \square$, dann liefert $(t, u) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{t-bu}{2} & -cu \\ au & \frac{t+bu}{2} \end{pmatrix}$ eine Bijektion zwischen den Lösungen (t, u) der Pell'schen Gleichung und $Aut(Q)$ (Gruppenisomorphismus bzgl. $(t_1, u_1)(t_2, u_2) = \left(\frac{t_1 t_2 + D u_1 u_2}{2}, \frac{t_1 u_2 + t_2 u_1}{2}\right)$)

Satz 3.6: Sei Q eine primitive q.F. mit Diskriminante $D > 0, D \neq \square$, dann gilt $Aut(Q) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Definition 3.7: $\varepsilon_0 = \frac{t_0 + \sqrt{D}u_0}{2}$ (minimal) heißt eine Grundeinheit von Q bzw. D.

Definition 3.9: Sei Q eine q.F. mit Diskriminante $D \neq \square$, dann definiert man für $n \in \mathbb{Z}$ die Darstellungsanzahl von n durch Q als $R(n,Q) = \#Aut(Q) \setminus \{(x,y) \in \mathbb{Z} | Q(x,y) = n\}$. Gesamtdarstellungsanzahl: $R(n) = \sum_{n=1}^{h(D)} R(n, Q_j)$, Q_j Vertreter der Ähnlichkeitsklassen.

Satz 3.10: Sei D eine Fundamentaldiskr., $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, dann gilt $R(n) = \sum_{d|n} \chi_D(d)$. Insbesondere ist $R(n)$ und damit alle $R(n, Q_j)$ endlich.

Korollar 3.12: Sei D eine Fundamentaldiskr., dann gilt $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} R(n) \to L(\chi_D, 1), N \to \infty$.

Satz 3.13: Sei Q eine primitive q.F. mit Diskriminante $D > 0, D \neq \square$, dann gilt:
$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} R(n,Q) = \begin{cases} \frac{2\pi}{\omega_D \sqrt{|D|}} & D < 0 \\ \frac{\log \varepsilon_0}{\sqrt{D}} & D > 0. \end{cases}$

3.4 Klassenzahlformeln

Satz 4.1: (Dirichlet'sche Klassenzahlformel:) Für $D \neq \square$ Diskriminante gilt:
$h(D) = \begin{cases} \frac{\omega_D \sqrt{|D|}}{2\pi} L(\chi_D, 1) & D < 0 \\ \frac{\sqrt{D}}{\log \varepsilon_0} & D > 0. \end{cases}$

Lemma 4.2: Für $0 < \theta < 2\pi$ gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} = -\log\left(2\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\right) + i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)$.

Satz 4.3: Für einen primitiven Dirichlet'schen Charakter χ mod $N > 1$ gilt: $L(\chi, 1) = -\frac{1}{G(\chi)} \sum_{n=1}^{N-1} \overline{\chi}(n) \log\left(\sin\left(\frac{\pi n}{N}\right)\right) + \frac{i\pi}{NG(\chi)} \sum_{n=1}^{N-1} \overline{\chi}(n) n$

Satz 4.4: (Klassenzahlformel:) Sei D Fundamentaldiskr., dann gilt:
$h(D) = \begin{cases} -\frac{\omega_D}{2|D|} \sum_{n=1}^{|D|-1} \chi_D(n) n & D < 0 \\ -\frac{1}{\log \varepsilon_0} \sum_{n=1}^{D-1} \chi_D(n) \log\left(\sin\left(\frac{\pi n}{D}\right)\right) & D > 0. \end{cases}$

Satz 4.6: Sei $D < -4$ Furndamentaldiskr.: $h(D) = \frac{1}{2-\chi_D(2)} \sum_{0<k<\frac{|D|}{2}} \chi_D(k)$, d.h. es gibt im Intervall $\left[0, \frac{|D|}{2}\right]$ mehr Zahlen mit $\chi_D(k) = 1$ als mit $\chi_D(k) = -1$ und der Überschuss ist genau
$\begin{cases} h(D) & D \equiv 1(8) \\ 2h(D) & D \equiv 0(4) \\ 3h(D) & D \equiv 5(8). \end{cases}$

3.5 Wachstum von Klassenzahlen

Lemma 5.1: Für $\Re(s) > 0 : \left|\zeta(s) - \frac{1}{1-s}\right| \leq \frac{|s|}{\Re(s)}$.

Lemma 5.3: Für $\sigma > 0$: $|L(\chi_D, s)| \leq \frac{|Ds|}{\sigma}$ und $0 < L(\chi_D, 1) < 2 + \log(|D|)$.

Lemma 5.4: (Cauchy'sche Ungleichung:) Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ eine holomorphe Funktion für $|z - z_0| \leq r$ und sei dort $|f(z)| \leq M$, dann gilt $|a_n| \leq M r^{-n}$.

Proposition 5.5: Seien D_1, D_2 Diskr., $Z(s) := \zeta(s) L(\chi_{D_1}, s) L(\chi_{D_2}, s) L(\chi_{D_1 D_2}, s)$. Dann gilt für $\Re(s) > 1 : Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}, a_1 = 1, a_n \geq 0, n \geq 2$.

Proposition 5.7: Seien D_1, D_2 Fundamentaldiskr., $|D_1| > |D_2| > 1$. Sei $Z(s)$ wie oben und $\rho := L(\chi_{D_1}, s) L(\chi_{D_2}, s) L(\chi_{D_1 D_2}, s)$. Für $0 < \delta < a < 1$ gilt dann: $Z(a) > \frac{1}{2} - \frac{c_1 \rho}{1-a} |D_1 D_2|^{c_2(1-a)}, c_1 = c_1(\delta), c_2 = c_2(\delta) > 0$.

Satz 5.8: (Siegel:) Sei D Fundamentaldiskr. und $\varepsilon > 0$, dann: $(L(\chi_D, 1))^{-1} = \mathcal{O}(|D|^{\varepsilon}), |D| \to \infty$.

Satz 5.10: (Siegel:) Für Diskr. $D \neq \square$ gilt: $\lim_{D\to-\infty} \frac{\log h(D)}{|D|} = \frac{1}{2}$, $\lim_{D\to\infty} \frac{\log(h(D)\log(\varepsilon_0))}{\log D} = \frac{1}{2}$.

3.6 Aufgaben

Aufgabe 9.1: Q, Q' ähnlich? 1. Diskr. gleich? 2. $[a,b,c]\circ T^n = [a, 2an+b, an^2+bn+c]$, $[a,b,c]\circ J = [c,-b,a]$ und ähnliche reduzierte Form finden. 3. Gleiche reduzierte Form?

Aufgabe 10.4: Kettenbruchentw. für $\alpha \in \mathbb{R}$: $\alpha_0 = \alpha, a_0 = \lfloor \alpha_0 \rfloor, \alpha_{n+1} = (\alpha_n - a_n)^{-1}, a_n = \lfloor \alpha_n \rfloor \Rightarrow \alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2+\dots}} = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ abbrechend , wenn $\alpha \in \mathbb{Q}$ und periodisch, wenn $\exists A, B, C \in \mathbb{Z}, B^2 - 4AC \neq \square : A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$.

Aufgabe 10.5: n-ter Näherungsbruch: $\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, \dots, a_n]$, $\mathrm{ggT}(p_n, q_n) = 1 : p_{-2} = 0, p_{-1} = 1, p_i = a_i p_{i-1} + p_{i-2}, q_{-2} = 1, q_{-1} = 0, q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2} \Rightarrow \exists\, n : (t,u) = (2p_n, 2q_n)$ Lösung von $t^2 - Du^2 = 4$.

Aufgabe 11.1: $h(D)$ mit Klassenzahlformeln berechnen für $D > 0 :$
$\varepsilon_0^{h(D)} = \left(\prod_{1\le n\le D-1, \chi_D(n)=-1} \sin\left(\frac{\pi n}{D}\right)\right)\left(\prod_{1\le n\le D-1, \chi_D(n)=1} \sin\left(\frac{\pi n}{D}\right)\right)^{-1}$.

4 Partitionen und die Kreismethode

4.1 Definition, elementare Eigenschaften und erzeugende Funktion

Definition 1.1: Als Partition einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet man eine endliche Folge $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$, $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r \geq 1, \lambda_i \in \mathbb{N}$ und schreibt $\lambda \vdash n$. λ_i heißen Teile der Partition und r Länge. # Partitionen von $n := p(n)$ $(p(0) = 1)$.

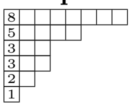
Definition 1.3: Unter der erzeugenden Funktion einer Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ versteht man die (formale) Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \in \mathbb{C}[q]$ (konvergent mindestens für $|q| < 1$).

Definition 1.5: $H \subseteq \mathbb{N}, d \in \mathbb{N}$,dann definiert man für $n \in \mathbb{N}$ (i) $p(H;n) := \#\{\lambda \vdash n | \lambda_j \in H\}$ (ii) $p(H,d;n) := \#\{\lambda \vdash n | \lambda_j \in H, \lambda_j \neq \lambda_{j+d+1}, j = 1, \dots, r-d-1\}$

Satz 1.6: Seien $F(q) = \sum_{n=0}^{\infty} p(H;n)q^n, F_d(q) = \sum_{n=0}^{\infty} p(H,d;n)q^n$. Für $|q| < 1$ gilt: $F(q) = \prod_{n \in H}(1-q^n)^{-1}, F_d(q) = \prod_{n \in H} \frac{(1-q^{(d+1)n})}{(1-q^n)}$.

Korollar 1.7: Die Anzahl der Partitionen von n in ungerade Teile ist gleich der Anzahl der Partitionen in verschiedene Teile.

Beispiel 1.9: Ferrers-Diagramm: $(8,5,3,3,2,1) \vdash 22$



Definition 1.10: Für eine Partition $\lambda = (\lambda_1, \dots \lambda_r)$ ist die konjugierte Partition $\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_s)$ gegeben dadurch, dass λ'_i die Anzahl der Teile von λ größer gleich i ist (Konjugieren = Transponieren des Ferrers-Diagramms).

Satz 1.12: Die Anzahl der Partitionen von n in höchstens m Teile ist gleich der Anzahl der Partitionen von n, wo kein Teil größer als m ist.

Satz 1.13: $p_e(\mathbb{N},1;n) - p_o(\mathbb{N},1;n) = \begin{cases} (-1)^m & n = \frac{1}{2}m(3m \pm 1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ mit p_e Partition gerader Länge und p_o Partition ungerader Länge.

Korollar 1.14: (Pentagonalzahlensatz:) Für $|q| < 1$ gilt: $\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m q^{\frac{1}{2}m(3m-1)}$ $(1+q^m) = \sum_{m \in \mathbb{Z}}(-1)^m q^{\frac{1}{2}m(3m-1)}$.

Korollar 1.15: (Euler:) Für $n > 0$ gilt die Rekursion
$p(n) = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\left[p\left(n - \frac{1}{2}m(3m-1)\right) + p\left(n - \frac{1}{2}m(3m+1)\right)\right]$.

4.2 Die Dedekind'sche η-Funktion und Thetafunktion

Satz 2.1: (Jacobi-Tripelprodukt:) $\tau \in \mathbb{H}, z \in \mathbb{C}$ und $\vartheta(z;\tau) = \Theta(0,z;\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 \tau + 2\pi i n z}$ (Jacobi-Thetafunktion), dann gilt: $\vartheta(z;2\tau) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1}\zeta)(1-q^{2n})(1+q^{2n-1}\zeta^{-1})$ mit $q := e^{2\pi i \tau}$ und $\zeta := e^{2\pi i z}$.

Definition 2.2: Für $\tau \in \mathbb{H}$ ist die Dedekind'sche η-Funktion definiert durch
$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n), q = e^{2\pi i \tau}$.

Lemma 2.3: (i) Für $\tau \in \mathbb{H}$ gilt $\eta(\tau) = \frac{1}{2}\sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi_{12}(n) q^{\frac{n^2}{24}}$ (ii) $\eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{\tau}{i}}\eta(\tau)$
(iii) $\eta(\tau+1) = e\left(\frac{1}{24}\right)\eta(\tau)$

Definition 2.4: Für $h, k \in \mathbb{Z}, k > 0$, $\mathrm{ggT}(h,k) = 1$ heißt $s(h,k) = \sum_{\mu=1}^{k} \left(\left(\frac{\mu}{k}\right)\right) \left(\left(\frac{h\mu}{k}\right)\right)$ mit $((x)) = \begin{cases} x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2} & x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ die Dedekind-Summe von h und k.

Satz 2.5: Für $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), c > 0, \tau \in \mathbb{H}$ gilt: $\eta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \sqrt{\frac{c\tau+d}{i}} e\left(\frac{1}{24}\left(\frac{a+d}{c} + 12s(-d,c)\right)\right) \eta(\tau)$.

Bemerkung 2.6: $F(q) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^{-1} = \frac{q^{\frac{1}{24}}}{\eta(\tau)}, q = e^{2\pi i \tau}$.

Satz 2.7: $x = \exp\left(\frac{2\pi i h}{k} - \frac{2\pi z}{k^2}\right), x' = \exp\left(\frac{2\pi i H}{k} - \frac{2\pi}{z}\right), \Re(z) > 0, k \in \mathbb{N}, h \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{ggT}(h,k) = 1, hH \equiv -1(k)$, dann gilt $F(x) = e^{\pi i s(h,k)} \left(\frac{z}{k}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\pi}{12z} - \frac{\pi z}{12k^2}\right) F(x')$.

Bemerkung 2.8: $|z|$ klein $\Rightarrow x \approx e\left(\frac{h}{k}\right), x' \approx 0 \Rightarrow F\left(e\left(\frac{h}{k}\right)\right) \approx z^{\frac{1}{2}} e\left(\frac{\pi}{12z}\right)$ bis auf konstanten Faktor.

4.3 Eine asymptotische Formel für $p(n)$ und ein Plan des Beweises

Satz 3.1: Für $n \to \infty$ gilt $p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}$.

Bemerkung 3.2: Kreismethode: Ziel: Asymptotisches Verhalten für zt. Fkt. $a(n)$ Vorgehen: (i) betrachte erzeugende Funktion $A(q) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) q^n, |q| < 1$ (ii) bestimme Singularitäten von $A(q)$ (iii) $a(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{A(q)}{q^{n+1}} \mathrm{d}q$ (iv) teile Kontur C auf, s.d. $A(q)$ gut abgeschätzt werden kann
Hier: $F(q)$ hat Singularität $\Leftrightarrow q = e\left(\frac{h}{k}\right)$

4.4 Farey-Brüche und Ford-Kreise

Definition 4.1: Die Menge $\mathcal{F}_n$ der Farey-Brüche von Ordnung n ist die Menge aller gekürzten Brüche in $[0,1]$ mit Nenner $\leq n$, sortiert nach aufsteigender Größe.

Lemma 4.3: Gilt $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$, dann liegt ihre Mediante $\frac{a+c}{b+d}$ dazwischen: $\frac{a}{b} \leq \frac{a+c}{b+d} \leq \frac{c}{d}$.

Lemma 4.4: Seien $0 \leq \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \leq 1$ mit $bc - ad = 1$. Dann sind $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ in $\mathcal{F}_n$ aufeinanderfolgend für $\max\{b,d\} \leq n \leq b+d-1$.

Lemma 4.5: Seien $0 \leq \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \leq 1$ mit $bc - ad = 1$ und sei $\frac{h}{k}$ die Mediante. Dann gilt $\frac{a}{b} < \frac{h}{k} < \frac{c}{d}$ und $bh - ak = 1 = ck - dh$.

Proposition 4.6: (i) Es gilt $\mathcal{F}_{n+1} \supsetneq \mathcal{F}_n$. Jeder Bruch in $\mathcal{F}_{n+1} \setminus \mathcal{F}_n$ ist Mediante zweier aufeinanderfolgender Brüche in $\mathcal{F}_n$. (ii) Sind $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ aufeinanderfolgende Brüche in $\mathcal{F}_n$, so gilt $bc - ad = 1$.

Definition 4.7: Für $\frac{h}{k} \in \mathbb{Q}$, $\mathrm{ggT}(h,k) = 1$, heißt der Kreis in $\mathbb{C}$ mit Radius $\frac{1}{2k^2}$ und Mittelpunkt $\frac{h}{k} + \frac{i}{2k^2}$ der zugehörige Ford-Kreis ($\mathcal{C}(h,k)$).

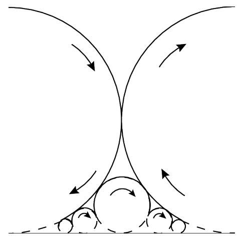
Lemma 4.8: Zwei verschieden Ford-Kreise $\mathcal{C}(a,b), \mathcal{C}(c,d)$ berühren sich entweder in genau einem Punkt oder schneiden sich nicht. Sie berühren sich gdw. $bc - ad = \pm 1$, also insbesondere, wenn $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ aufeinanderfolgende Farey-Brüche sind.

Proposition 4.9: Seien $\frac{h_1}{k_1} < \frac{h}{k} < \frac{h_2}{k_2}$ drei aufeinanderfolgende Farey-Brüche. Dann sind die beiden Berührpunkte $\alpha_1 = \alpha_1(h,k)$ und $\alpha_2 = \alpha_2(h,k)$ von $\mathcal{C}(h,k)$ mit $\mathcal{C}(h_1,k_1)$ bzw. $\mathcal{C}(h_2,k_2)$ genau gegeben durch $\alpha_1 = \frac{h}{k} - \frac{k_1}{k(k^2+k_1^2)} + \frac{i}{k^2+k_1^2}$, $\alpha_2 = \frac{h}{k} + \frac{k_2}{k(k^2+k_2^2)} + \frac{i}{k^2+k_2^2}$. Der Punkt α_1 liegt auf dem Halbkreis mit Durchmesser $\left[\frac{h_1}{k_1}, \frac{h}{k}\right]$.

4.5 Der Rademacher-Pfad und eine Reihendarstellung für $p(n)$

Bemerkung 5.1: Idee: Ford-Kreise für Integrationsweg von $p(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(q)}{q^{n+1}}\mathrm{d}q$. Statt in $|q| < 1$ lässt sich auch beliebiger Pfad $i \mapsto i+1$ in τ-Ebene wählen. Unter $\tau \mapsto e^{2\pi i\tau} = q$ geht dieser über geschlossenen Weg um $q = 0$.

Definition 5.2: Für $N \in \mathbb{N}$ definiert man den Rademacher-Pfad $P(N)$ von i nach $i+1$ wie folgt: Für aufeinanderfolgende Farey-Brüche $\frac{h_1}{k_1} < \frac{h}{k} < \frac{h_2}{k_2}$ in $\mathcal{F}_N$ teilen die Berührpunkte der Fordkreise $\mathcal{C}(h_1, k_1)$, $\mathcal{C}(h, k)$ und $\mathcal{C}(h_2, k_2)$ den Kreis $\mathcal{C}(h, k)$ in einen oberen und einen unteren Bogen. $P(N)$ ist die Vereinigung der oberen Bögen, wobei für $\frac{0}{1}, \frac{1}{1} \in \mathcal{F}_N$ nur obere Bögen im Intervall $[0, 1]$ gewählt werden.



Lemma 5.3: Die Abbildung $\tau \mapsto z := -ik^2\left(\tau - \frac{h}{k}\right)$, $\mathrm{ggT}(h, k) = 1$ bildet $\mathcal{C}(h, k)$ auf den Kreis K mit Radius $\frac{1}{2}$ und Mittelpunkt $\frac{1}{2}$ ab. Die Berührpunkte α_1 und α_2 aus Prop. 4.9 werden abgebildet auf $z_1(h, k) = \frac{k^2}{k^2+k_1^2} + i\frac{kk_1}{k^2+k_1^2}$, $z_2(h, k) = \frac{k^2}{k^2+k_2^2} - i\frac{kk_2}{k^2+k_2^2}$. Der obere Bogen, der α_1 mit α_2 verbindet, bildet auf den Bogen ab, der nicht die imaginäre Achse berührt.

Lemma 5.4: (i) Es gilt $|z_1| = \frac{k}{\sqrt{k^2+k_1^2}}$, $|z_2| = \frac{k}{\sqrt{k^2+k_2^2}}$ (ii) Sei z ein beliebiger Punkt auf der Sehne, die z_1 und z_2 gerade verbindet, dann gilt $|z| < \frac{\sqrt{2}k}{N}$ wenn $\frac{h_1}{k_1} < \frac{h}{k} < \frac{h_2}{k_2}$ drei aufeinanderfolgende Farey-Brüche in $\mathcal{F}_N$ sind. Die Länge der Sehne ist $\leq \frac{2\sqrt{2}k}{N}$.

Satz 5.5: (Rademacher) Für $n \geq 1$ gilt $p(n) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)\sqrt{k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\left(\frac{\sinh\left(\frac{\pi}{k}\sqrt{\frac{2}{3}\left(n-\frac{1}{24}\right)}\right)}{\sqrt{n-\frac{1}{24}}}\right)$,

wo $A_k(n) := \sum_{h(k)^*} e^{\pi i s(h,k) - 2\pi i n\frac{h}{k}}$.