



LINFO 1121
DATA STRUCTURES AND ALGORITHMS



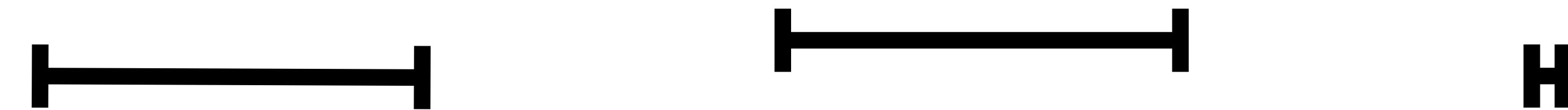
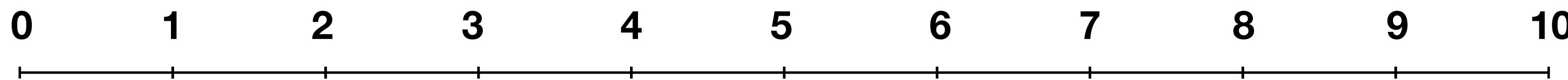
Algorithmes de tri et recherche dichotomique

Pierre Schaus

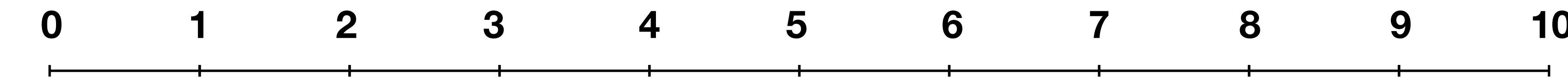
Union d'intervalles

```
public static Interval[] union(Interval[] intervals) {  
    // TODO  
    return new Interval[]{};  
}
```

Union of intervals: Example



Algo1: two steps



min=2 max=4



min=2 max=4



new Interval(2,4) min=5 max=6



min=5 max=8



min=5 max=9



new Interval(5,9) min=10,max=10

H

new Interval(10,10)



H

Step2: Considerer les intervalles triés un par un et mettre à jour les valeur min/max

Step1: trier les intervalles en fonction de leur minimum

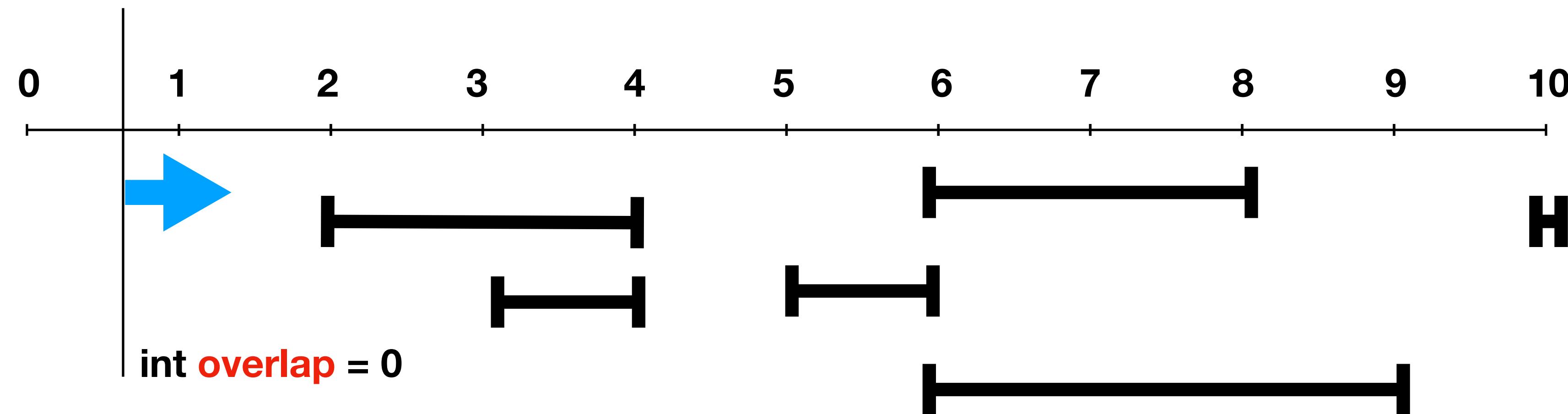
Algo1

```
public static Interval [] union(Interval [] intervals) {  
    if (intervals.length == 0) return new Interval[0];  
    ArrayList<Interval> res = new ArrayList<>();  
    Arrays.sort(intervals);  
    int min = intervals[0].min; ! We change the input (sort), not  
    always considered a good  
    practice  
    int max = intervals[0].max;  
    int i = 1;  
    while (i < intervals.length) {  
        if (intervals[i].min > max) {  
            res.add(new Interval(min,max));  
            min = intervals[i].min;  
            max = intervals[i].max;  
        } else {  
            max = Math.max(max,intervals[i].max);  
        }  
        i++;  
    }  
    res.add(new Interval(min,max));  
    return res.toArray(new Interval[0]);  
}
```

Complexité temporelle ?

- $O(n)$ où n est le nombre d'intervalles en input
- $\Theta(n)$ où n est le nombre d'intervalles en input
- $O(n \log(n))$ où n est le nombre d'intervalles en input
- $\Theta(n \log(n))$ où n est le nombre d'intervalles en input

Autre approche: Algorithme de Sweep (plus générique)



- Séquence d'événements *(time,increment)* en début et fin d'intervalle:
 - $events = \langle (I.start, +1) | \forall I \in Intervals \rangle + \langle (I.end, -1) | \forall I \in Intervals \rangle$
- Trier la séquence lexicographiquement selon *(time,-increment)*
 - $(2,+1), (3,+1), (4,-1), (4,-1), (5,+1), (6,+1), (6,-1), (8,-1), (9,-1), (10,+1), (10,-1)$
- Itérer sur la séquence en maintenant un compteur “**overlap**” représentant le nombre d’intervalles intersection la ligne de sweep.
 - Pour chaque nouveau pas de temps, on traite tous les événements un par un en mettant à jour le compteur.
 - Si lorsqu'on a traité tous les événements le compteur est à zero, on a détecté un nouvel intervalle.

Sweep Line Algo: pseudo code

```
public static List<int[]> computeUnion(int[] min, int[] max) {  
    int n = min.length;  
    Event[] S = new Event[2 * n + 1];  
  
    for (int i = 0; i < n; i++) {  
        S[2 * i] = new Event(min[i], 1);  
        S[2 * i + 1] = new Event(max[i] + 1, -1);  
    }  
  
    S[2 * n] = new Event(Integer.MAX_VALUE, 0);  
    Arrays.sort(S);  
  
    List<int[]> union = new ArrayList<>();  
    int start = S[0].x;  
    int overlap = S[0].delta;  
  
    int i = 1;  
    while (i < 2 * n) {  
        overlap += S[i].delta;  
        if (overlap == 0) {  
            union.add(new int[]{start, S[i].x});  
            start = S[i + 1].x;  
        }  
        i += 1;  
    }  
  
    return union;  
}
```

Creation des “event points”

Process des “event points” un à un

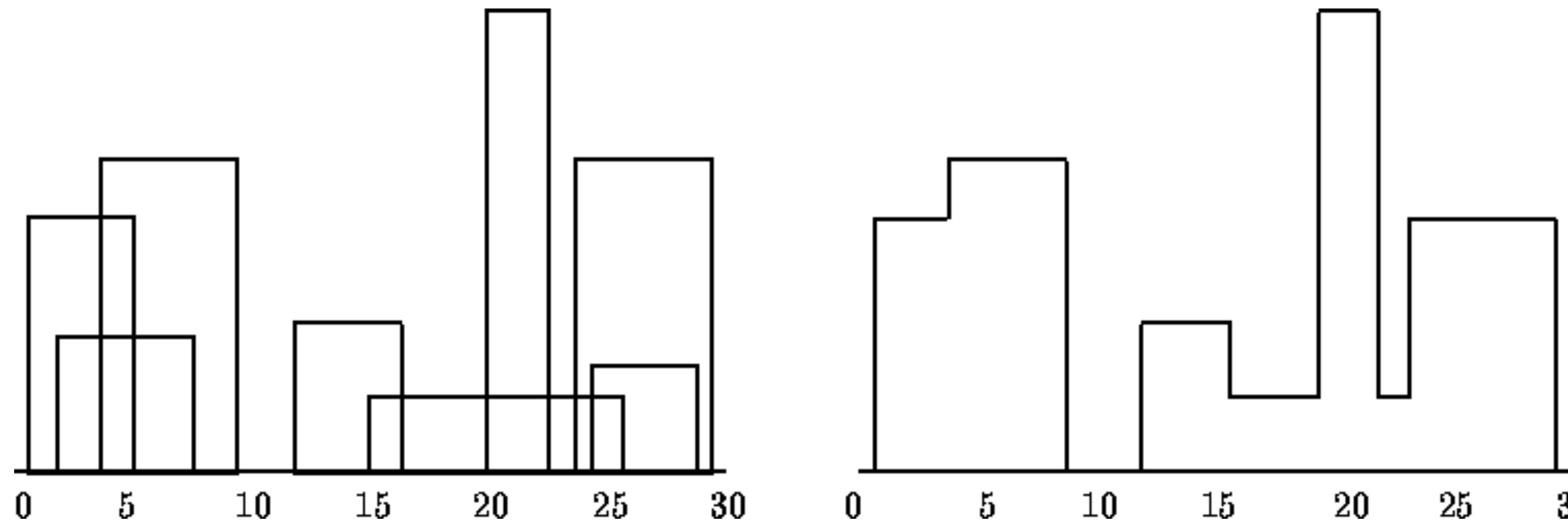
Detection d'un intervalle

```
class Event implements Comparable<Point> {  
    int x;  
    int delta;  
  
    Event(int x, int delta) {  
        this.x = x;  
        this.delta = delta;  
    }  
  
    @Override  
    public int compareTo(Event o) {  
        if (this.x != o.x) return Integer.compare(this.x, o.x);  
        return -Integer.compare(this.delta, o.delta);  
    }  
}
```

Tri lexicographique

Algorithme de Sweep

- Fréquemment utilisé en “computational geometry”, par exemple pour calculer une “skyline” au départ d’un ensemble de rectangles (laissé en exercice, on y reviendra).



Tri d'un très petit nombre de valeurs différentes

Vous devez trier un grand tableau qui a pour propriété qu'il ne contient que des valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, 2\}$.

- Quel algorithme de tri suggérez-vous?
- Ecrivez le code.
- Quelle sera la complexité pour trier le tableau?
- Discutez cette complexité par rapport à la borne inférieure d'un algorithme de tri (Proposition 1 pages 280-281).

Warmup

- Si je vous dis que je dois trier un ensemble qui contient
- $1 \times 0, 3 \times 1, 2 \times 5$, est-ce que vous êtes capables de reconstruire l'input trié ?
 - Oui bien sûr: $[0, 1, 1, 1, 5, 5]$
- L'algorithme “counting” sort consiste à reconstruire l'input trié sur base des compteurs

Reconstruction de l'input

- Quelle est la complexité pour reconstruire l'input trié pour des valeurs de compteur $k_1 \times 0$, $k_2 \times 1$, $k_3 \times 2$?
 - $O(k_1+k_2+k_3)$
 - $\Theta(k_1+k_2+k_3)$
 - $O(n \log(n))$ où $n=k_1+k_2+k_3$
 - $\Theta(n \log(n))$ où $n = k_1+k_2+k_3$

Counting sort

```
int [] input =  
    new int[]{0,1,2,0,0,2,0,1,0,2,1,0,1,1,0,0,2,2,2,2,0};  
int [] counters = new int[3];  
for (int i : input) counters[i]++;  
int [] ouput = new int[input.length];  
int j = 0;  
for (int i = 0; i <= 2; i++) {  
    while (counters[i] > 0) {  
        counters[i]--;  
        ouput[j] = i;  
        j++;  
    }  
}
```

Complexité Counting sort sur des valeurs {0,1,2}

- n = nombre de valeurs à trier

- $O(n)$
- $\Theta(n)$
- $O(n \log(n))$
- $\Theta(n \log(n))$
- $O(n^2)$
- $\Theta(n^2)$

Est-ce que le counting sort fonctionne toujours ?

- Si je dois trier des valeurs entre 0 et k ? Quelle est la complexité de Counting-sort pour trier n valeurs ?
 - $O(n)$
 - $\Theta(n)$
 - $O(n+k)$
 - $\Theta(n+k)$
 - $O(n \log(n))$
 - $\Theta(n \log(n))$

```
public static void countingSort(int[] values) {  
    int[] buckets = new int[100]; // k = 100  
    // Count occurrences of each value in the input array  
    for (int i : values) {  
        buckets[i]++;  
    }  
    int idx = 0;  
    for (int i = 0; i < 100; i++) {  
        for (int j = 0; j < buckets[i]; j++) {  
            values[idx] = i;  
            idx++;  
        }  
    }  
}
```

More Complex Counting Sort

- Suppose I have pairs $(a_i, b_i) \forall i \in [0..n - 1]$ to sort but $a_i \in [0..d - 1]$ with a small d
- I only want to sort the pairs based on a_i values ? How do I adapt my counting sort ?

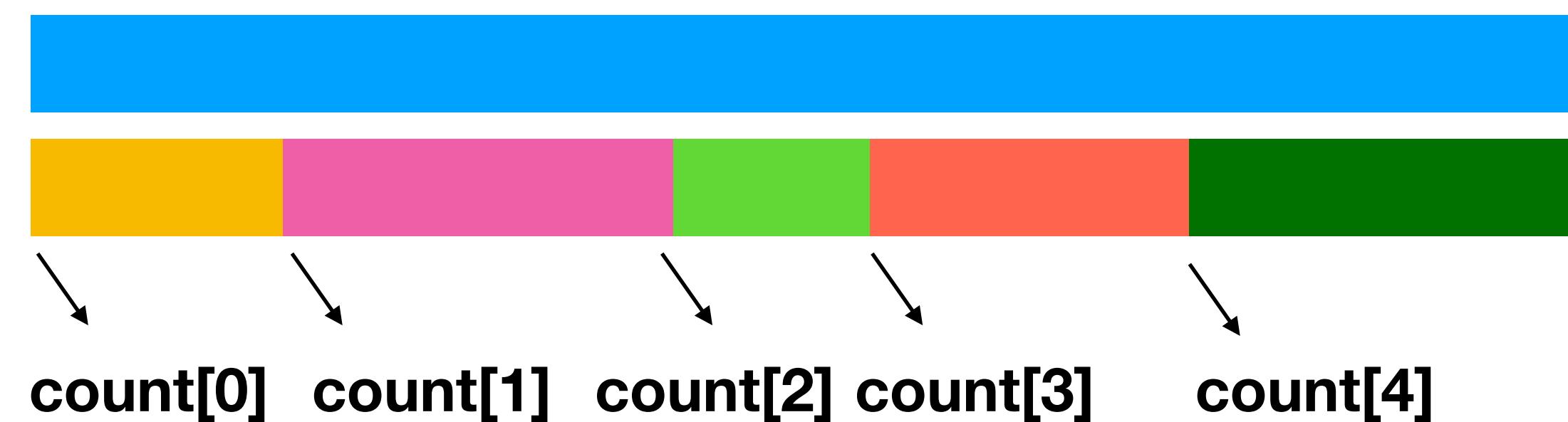
```
public static void countingSort(int[] values) {  
    int[] buckets = new int[100]; // k = 100  
    // Count occurrences of each value in the input array  
    for (int i : values) {  
        buckets[i]++;  
    }  
    int idx = 0;  
    for (int i = 0; i < 100; i++) {  
        for (int j = 0; j < buckets[i]; j++) {  
            values[idx] = i;  
            idx++;  
        }  
    }  
}
```

This does not work, because I'm not able to regenerate the corresponding b_i values

More Complex Counting Sort

- Suppose I have pairs $(a_i, b_i) \forall i \in [0..n - 1]$ to sort based on criterion a_i only. The set of different values is small: $a_i \in [0..d - 1]$ with a small d

```
public static void countingSort(int[][] arr) {  
    int n = arr.length;  
    int range = 0; // Since a_i can take values from 0 to 4  
  
    // Step 1: Create a count array to store the frequency of each a_i  
    int[] count = new int[range];  
  
    // Step 2: Count occurrences of each a_i  
    for (int i = 0; i < n; i++) {  
        count[arr[i][0]]++;  
    }  
  
    // Step 3: Modify count array to store cumulative sums  
    for (int i = 1; i < range; i++) {  
        count[i] += count[i - 1];  
    }  
  
    // Step 4: Create an output array to store sorted pairs  
    int[][] output = new int[n][2];  
  
    // Step 5: Place the elements in the sorted order in the output array  
    // Traverse the input array from right to left to maintain stable sorting  
    for (int i = n - 1; i >= 0; i--) {  
        int a_i = arr[i][0];  
        int b_i = arr[i][1];  
        output[count[a_i] - 1] = new int[]{a_i, b_i};  
        count[a_i]--;  
    }  
  
    // Step 6: Copy the sorted pairs back to the original array  
    for (int i = 0; i < n; i++) {  
        arr[i] = output[i];  
    }  
}
```



Counting sort with sparse values ?

- Mon input contient seulement trois valeurs possibles {20007,1368910,900045}, est-ce que je peux adapter counting-sort pour obtenir une complexité de $\Theta(n)$?

- Discutez cette complexité par rapport à la borne inférieure d'un algorithme de tri (Proposition 1 pages 280-281).

Prop1: Aucun algorithme basé sur les comparaisons ne peut garantir pouvoir trier N objets en moins que $\sim N \lg N$ comparaisons.

- Le counting sort n'est pas basé sur les comparaisons.
- Il fonctionne bien uniquement s'il y a peu de valeurs différentes à trier (= la différence entre la plus grande et la plus petite n'est pas trop grande $\leq N$).

Le mode d'un tableau

Le mode d'un tableau de nombres est le nombre qui apparaît le plus fréquemment dans le tableau.

Exemple $\text{mode}([4, 6, 2, 4, 3, 1]) = 4$.

- Donnez un algorithme efficace pour calculer le mode d'un tableau de n nombres.
- Quid si on sait que le tableau ne contient que des valeurs de 0 à k ?

Mode d'un tableau: Solution 1

1. Trier les éléments
2. Trouver l'élément qui se répète avec le plus de fois consécutivement en parcourant le tableau trié
 - Complexité ?
 - $O(n \log(n))$
 - $\Theta(n \log(n))$
 - $\Theta(n)$
 - $O(n)$
 - $\Theta(n^2)$

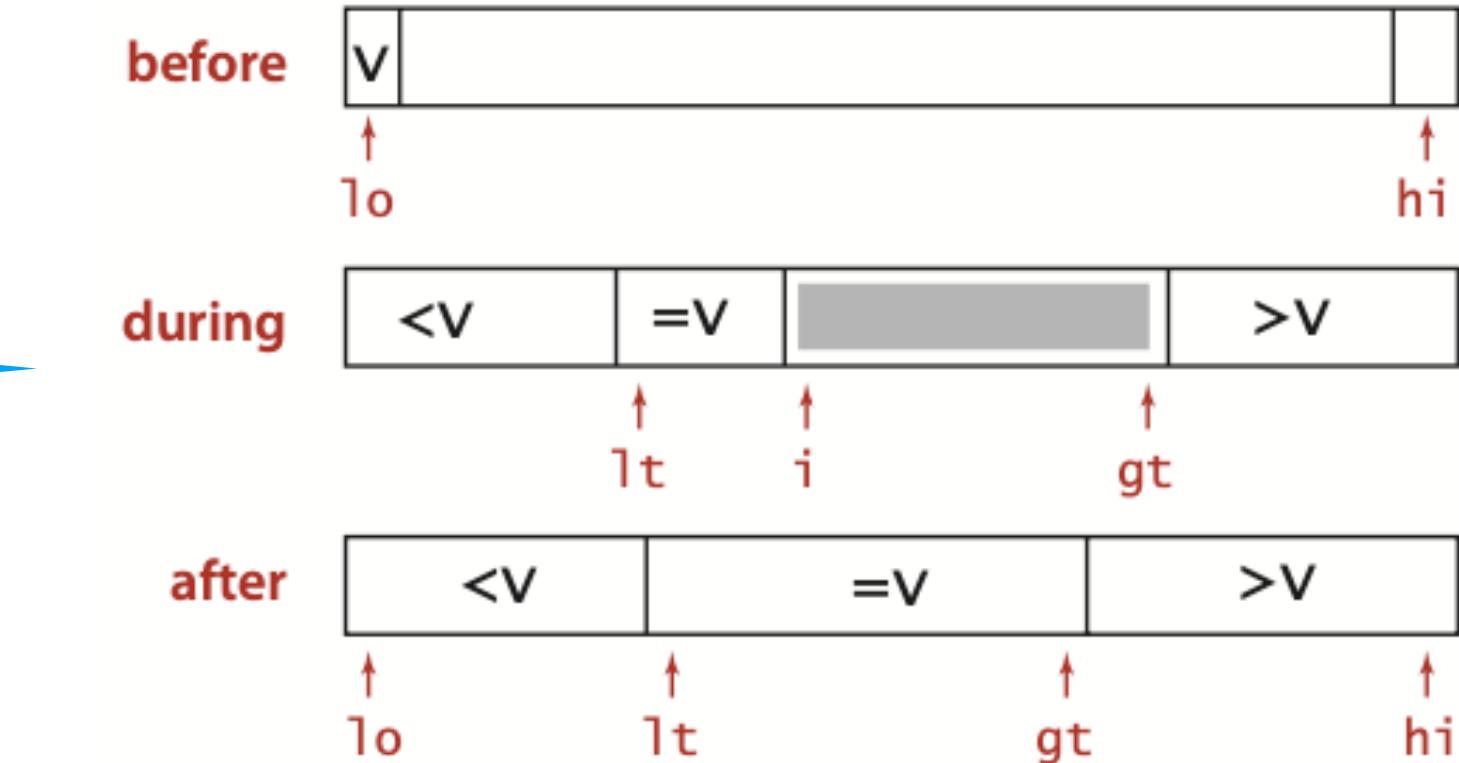
Mode d'un tableau:💡 utiliser QuickSort

- Lors de l'étape du pivoting (méthode partition), nous pouvons compter le nombre d'éléments qui sont égaux au pivot et maintenir le meilleur *candidat mode* ainsi que sa fréquence.
- Cette information peut être utilisée pour éviter des appels récursifs dans quick sort:
 - Un appel récursif est lancé seulement si le sous-tableau à partitioner est plus grand que la fréquence du mode courant.

Concrètement:

$v = gt - lt + 1$

```
public class Quick3way
{
    private static void sort(Comparable[] a, int lo, int hi)
    { // See page 289 for public sort() that calls this method.
        if (hi <= lo) return;
        int lt = lo, i = lo+1, gt = hi;
        Comparable v = a[lo];
        while (i <= gt)
        {
            int cmp = a[i].compareTo(v);
            if      (cmp < 0) exch(a, lt++, i++);
            else if (cmp > 0) exch(a, i, gt--);
            else                i++;
        } // Now a[lo..lt-1] < v = a[lt..gt] < a[gt+1..hi].
        sort(a, lo, lt - 1);
        sort(a, gt + 1, hi);
    }
}
```



3-way partitioning overview

Do not call if $lt - lo < bestMode$

Calcul du Mode si les range des valeurs est entre 0 et k ?

- Dans ce cas simplement compter les valeurs dans un tableau de taille k. Si $k < n$, complexité $\Theta(n)$

Trouver une paire qui somme à x

Étant donné deux ensembles S_1 et S_2 (chacun de taille n), et un nombre x .

- Décrivez un algorithme efficace pour trouver s'il existe une paire (a,b) avec $a \in S_1, b \in S_2$ telle que $a+b=x$.

Trouver une paire qui somme à x

```
public static boolean findPairWithSum(int[] S1, int[] S2, int x) {  
    // Sort both arrays if they are not already sorted  
    Arrays.sort(S1);  
    Arrays.sort(S2);  
  
    for (int a : S1) {  
        int b = x - a;  
        if (binarySearch(S2, b)) {  
            System.out.println("Pair found: (" + a + ", " + b + ")");  
            return true; // Pair (a, b) exists such that a + b = x  
        }  
    }  
    // If no such pair is found  
    System.out.println("No pair found.");  
    return false;  
}
```

```
// Binary search method to search for 'target' in sorted array S2  
public static boolean binarySearch(int[] arr, int target) {  
    int left = 0, right = arr.length - 1;  
    while (left <= right) {  
        int mid = left + (right - left) / 2;  
  
        if (arr[mid] == target) {  
            return true;  
        } else if (arr[mid] < target) {  
            left = mid + 1;  
        } else {  
            right = mid - 1;  
        }  
    }  
    return false;  
}
```

Trouver une paire qui somme à X: S1 et S2 non triés et taille n

- Algo:
 - Trier le premier ensemble S1
 - Pour chaque valeur v de S2, on cherche une valeur $x-v$ dans S1 trié avec une recherche dichotomique.
- Complexité ?
 - $O(n \log(n))$
 - $\Theta(n \log(n))$
 - $\Theta(n)$
 - $O(n)$
 - $\Theta(n^2)$

Trouver une paire qui somme à X: les deux ensembles sont déjà triés

- Dans ce cas quelques optimisations peuvent être mises en place mais cela ne change pas la complexité.
- Si pour une valeur v de S_1 , $v + \min(S_2) > x$, il ne faut pas lancer la recherche dichotomique pour les valeurs suivantes plus grandes que v .
- Cela consiste à réduire à l'avance les bornes des deux tableaux
- Exemple: $x = 100$
- $S_1=[10,13,46,70,80,\textcolor{red}{101},108]$
- $S_2=[10,22,30,70,82,\textcolor{red}{104},111]$

Trouver une paire qui somme à x: un seul tableau

- Trouver deux entrées dont la somme fait x ?
- Exemple [5,10,1,150,151,155,**18,50**,30] x=68
- Quid si le tableau est déjà trié ?
 - [1,5,10,**18**,30,**50**,150,151,155] x=68

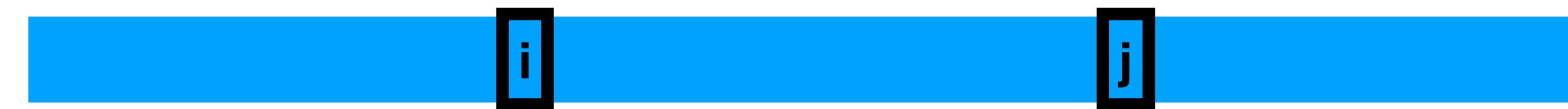
Trouver une paire qui somme à x: un seul tableau déjà trié

```
/**  
 * Find a pair (i, j) in array T such that T[i] + T[j] = x.  
 *  
 * @param T An array of integers, sorted in non-decreasing order.  
 * @param x The target sum.  
 * @return An array of two integers i and j if a pair is found, or null otherwise.  
 */  
public static int[] findPair(int[] T, int x) {  
    int i = 0;  
    int j = T.length - 1;  
  
    while (i < j) {  
        if (T[i] + T[j] > x) {  
            j--;  
        } else if (T[i] + T[j] < x) {  
            i++;  
        } else {  
            return new int[] {i, j}; // Pair found  
        }  
    }  
  
    return null; // Pair not found  
}
```

Complexité ?

Trouver une paire qui somme à x: Pourquoi cet algorithme fonctionne-t-il ?

- Preuve par induction



- Hypothèse (n'importe quelle paire avec un élément avant (<) i ou après (>) j ne fonctionne pas)
- Algo: $T[i] + T[j] > x \Rightarrow j = j - 1$
 - * Il faut montrer qu'il n'existe pas de paire valable avec $T[j]$.
 - * $T[j]$ ne peut être apparié avec un élément après i car les valeurs sont triées et ça ne ferait qu'éloigner davantage de x.
 - * Par hypothèse, $T[j]$ ne peut être apparié avec un élément avant i non plus.

Union de deux tableaux

- Donnez un algorithme pour calculer l'union de deux ensembles A et B qui sont représentés par des tableaux
- $A = \{10, 20, 15, 12, 30\}$, $B = \{10, 15, 20, 35, 13\}$
- $A \text{ union } B = \{10, 30, 35, 12, 20, 15, 13\}$

Union de deux tableaux: solution 1

1. Tout mettre dans un grand tableau
 2. Trier le grand tableau
 3. Ensuite retirer les doublons.
-
- Complexité ? $O((m+n) \log(m+n))$ si m et n sont les tailles des deux tableaux

Union de deux tableaux: solution 1

```
public static int[] union(int[] arr1, int[] arr2) {  
    int n1 = arr1.length;  
    int n2 = arr2.length;  
  
    // Step 1: Concatenate the arrays  
    int[] combined = new int[n1 + n2];  
    System.arraycopy(arr1, 0, combined, 0, n1);  
    System.arraycopy(arr2, 0, combined, n1, n2);  
  
    // Step 2: Sort the array  
    Arrays.sort(combined);  
  
    // Step 3: Remove duplicates  
    int[] temp = new int[n1 + n2];  
    int j = 0;  
  
    for (int i = 0; i < n1 + n2 - 1; i++) {  
        if (combined[i] != combined[i + 1]) {  
            temp[j++] = combined[i];  
        }  
    }  
    temp[j++] = combined[n1 + n2 - 1]; // Adding the last element  
  
    // Trim temp array to actual size  
    int[] result = new int[j];  
    System.arraycopy(temp, 0, result, 0, j);  
  
    return result;  
}
```

Union de deux tableaux: solution 2

- Trier chaque ensemble séparément
- Collecter les éléments en retirant les doublons.
- Complexité ? $O(m \log(m) + n \log(n))$.
 - Si $m = n$, Solution1 a la même complexité temporelle que Solution2

Union de deux tableaux: solution 2

```
public static int[] union(int[] arr1, int[] arr2) {  
    Arrays.sort(arr1);  
    Arrays.sort(arr2);  
    int[] temp = new int[arr1.length + arr2.length];  
    int i = 0, j = 0, k = 0;  
    while (i < arr1.length && j < arr2.length) {  
        // Skip duplicates in arr1  
        while (i < arr1.length - 1 && arr1[i] == arr1[i + 1]) i++;  
        // Skip duplicates in arr2  
        while (j < arr2.length - 1 && arr2[j] == arr2[j + 1]) j++;  
        if (arr1[i] < arr2[j]) {  
            temp[k++] = arr1[i++];  
        } else if (arr1[i] > arr2[j]) {  
            temp[k++] = arr2[j++];  
        } else {  
            temp[k++] = arr1[i];  
            i++;  
            j++;  
        }  
    }  
    while (i < arr1.length) {  
        if (i < arr1.length - 1 && arr1[i] == arr1[i + 1]) {  
            i++;  
            continue;  
        }  
        temp[k++] = arr1[i++];  
    }  
    while (j < arr2.length) {  
        if (j < arr2.length - 1 && arr2[j] == arr2[j + 1]) {  
            j++;  
            continue;  
        }  
        temp[k++] = arr2[j++];  
    }  
    int[] result = new int[k];  
    System.arraycopy(temp, 0, result, 0, k);  
  
    return result;  
}
```

Union de deux tableaux: solution 3

- Trier seulement un des deux tableaux, pour chaque élément du tableau non trié, faire une recherche dichotomique sur le tableau trié pour vérifier s'il faut l'ajouter.
- Est-ce que le tableau qu'il faut trier a de l'importance ?
- Supposons une grosse différence de tailles sur les tableaux, par exemple de taille n et n^k
 - Pour chaque élément du petit, on fait une recherche dichotomique sur le grand: $O(n \log(n^k))$. Mais il faut trier le grand: $O(n^k \log(n^k))$. Donc au total $O(kn^k \log(n))$
 - Pour chaque élément du grand, on fait une recherche dichotomique sur le petit $O(n^k \log(n))$. Mais il faut trier le petit: $O(n \log(n))$. Donc au total $O(n^k \log(n))$.
 - Conclusion: si grosses différences de tailles, il vaut mieux trier le petit seulement.

Union de deux tableaux: solution 3

```
public static int[] union(int[] arr1, int[] arr2) {
    Arrays.sort(arr1);

    int[] temp = new int[arr1.length + arr2.length];
    int k = 0, i;

    // Add unique elements from arr1 to result
    for (i = 0; i < arr1.length; i++) {
        if (i == 0 || arr1[i] != arr1[i - 1]) {
            temp[k++] = arr1[i];
        }
    }

    // Check arr2 elements against arr1
    for (int val : arr2) {
        if (!binarySearch(arr1, val)) {
            temp[k++] = val;
        }
    }

    int[] result = new int[k];
    System.arraycopy(temp, 0, result, 0, k);

    return result;
}
```

```
public static boolean binarySearch(int[] arr, int target) {
    int left = 0;
    int right = arr.length - 1;

    while (left <= right) {
        int mid = left + (right - left) / 2;

        if (arr[mid] == target) return true;
        if (arr[mid] < target) left = mid + 1;
        else right = mid - 1;
    }

    return false;
}
```

Variante du problème de l'union de deux tableaux

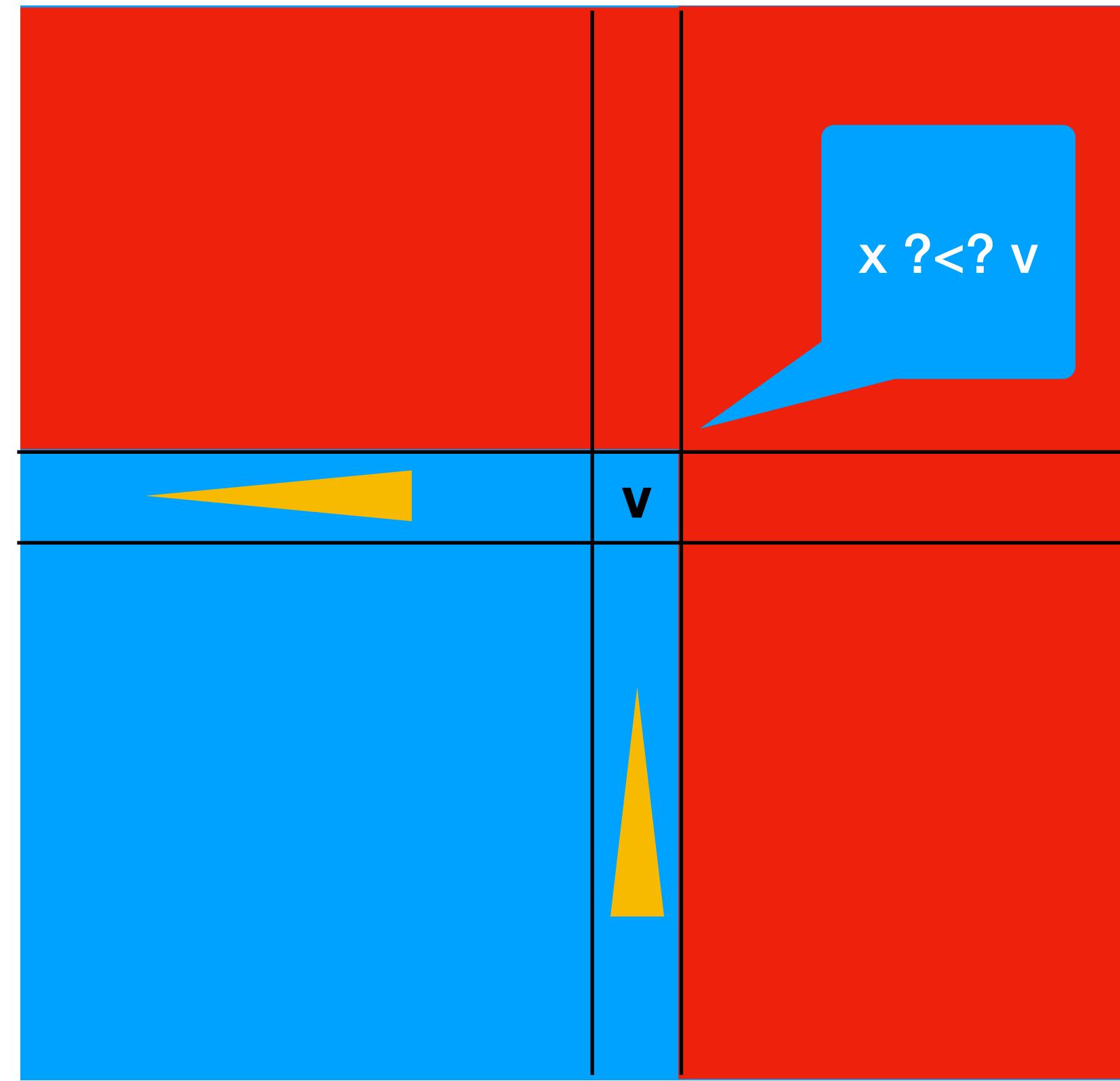
- A déjà trié à une taille n et
- B également trié à une taille n^2 .
- Quelle seraient la complexité pour faire l'union ?
- Réponse: $O(n^2 + n)$ -> similar to merge operation in a merge sort

Recherche d'un nombre dans une matrice doublement triée

- Étant donné une matrice de nombres entiers qui sont **triés le long des lignes et des colonnes**, comment **trouver un nombre donné** dans la matrice de manière efficace ?
- Indice: Il existe un algorithme en temps $O(n+m)$ pour une matrice $n \times m$.

Recherche d'un nombre dans une matrice doublement triée

- Pour cela commencez dans le coin supérieur droit et comparez avec le nombre recherché x .
- Quelles parties de la matrice pouvez-vous élaguer dans votre recherche en fonction du résultat?



- Recherche de 4

1	5	10	11
3	7	12	14
4	8	13	17
8	10	20	25
13	14	22	26

- Recherche de 20

1	5	10	11
3	7	12	14
4	8	13	17
8	10	20	25
13	14	22	26

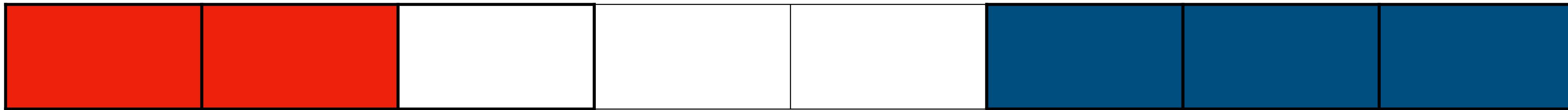
Problème Bonus: Dutch Flag

Réorganiser un tableau d'éléments identifiés par leur couleur, sachant que seules trois couleurs sont présentes (par exemple, rouge, blanc, bleu, dans le cas du drapeau des Pays-Bas).

Input



Output



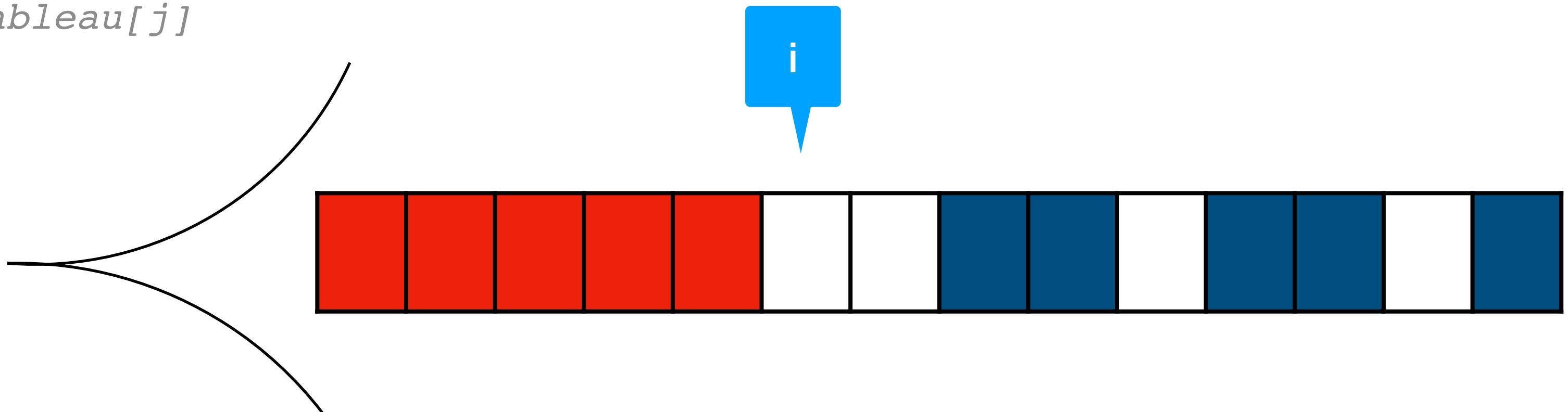
Si possible, votre algorithme doit être “in place” (ne peut créer de nouveau tableau)

- Est-il stable ? l'ordre relatif des éléments de mêmes couleurs est-il conservé ?



Dutch Flag: Solution 1: Quicksort partition 2 times

```
public static void flagSort(Couleur[] tableau) {  
    int i = 0;  
  
    // Partition pour ROUGE  
    for (int j = 0; j < tableau.length; j++) {  
        if (tableau[j] == Couleur.ROUGE) {  
            // échanger tableau[i] et tableau[j]  
            Couleur temp = tableau[i];  
            tableau[i] = tableau[j];  
            tableau[j] = temp;  
            i++;  
        }  
    }  
  
    // Partition pour BLANC  
    for (int j = i; j < tableau.length; j++) {  
        if (tableau[j] == Couleur.BLANC) {  
            // échanger tableau[i] et tableau[j]  
            Couleur temp = tableau[i];  
            tableau[i] = tableau[j];  
            tableau[j] = temp;  
            i++;  
        }  
    }  
}
```



In place OK, stable for red and white but not for blue

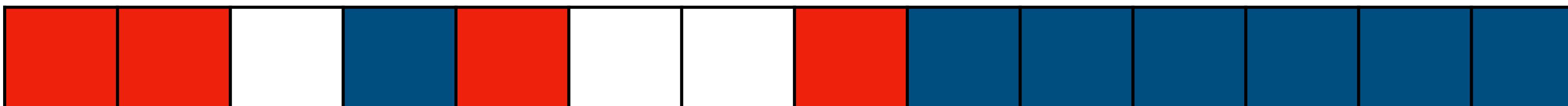
Dutch Flag: Solution 2

```
public static void flag(Couleur[ ] tableau) {  
    int n = tableau.length;  
    int indexRouge = 0; // Position to insert the next ROUGE color  
    int indexBleu = n - 1; // Position to insert the next BLEU color  
    int i = 0;  
    while (i <= indexBleu) {  
        if (tableau[i] == Couleur.ROUGE && i > indexRouge) {  
            swap(tableau, i, indexRouge);  
            indexRouge++;  
        } else if (tableau[i] == Couleur.BLEU && i < indexBleu) {  
            swap(tableau, i, indexBleu);  
            indexBleu--;  
        } else {  
            i++;  
        }  
    }  
}
```

```
public static void swap(Couleur[ ] tableau, int i, int j) {  
    Couleur temp = tableau[i];  
    tableau[i] = tableau[j];  
    tableau[j] = temp;  
}
```

indexRouge

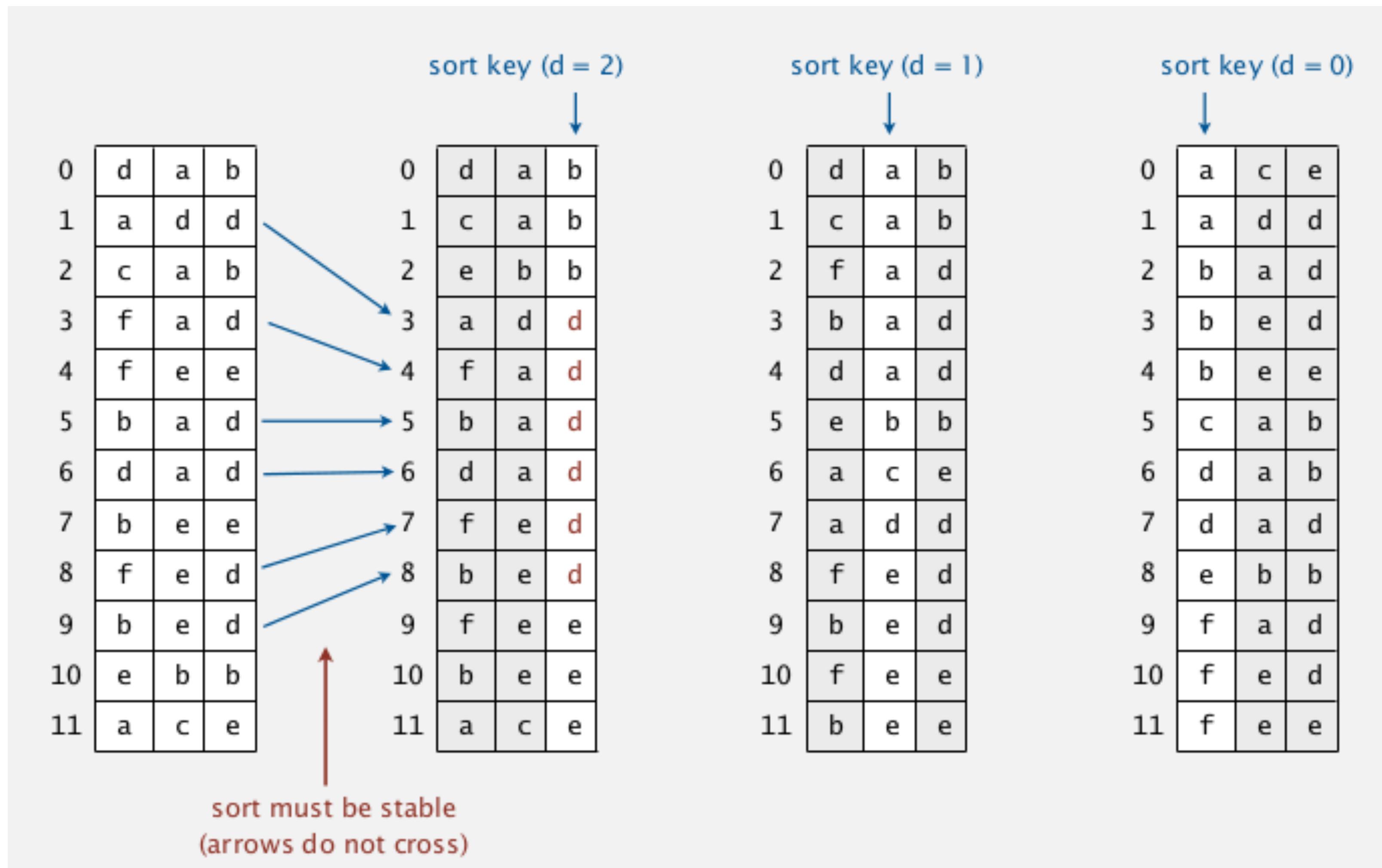
indexBleu



In place OK, stable KO

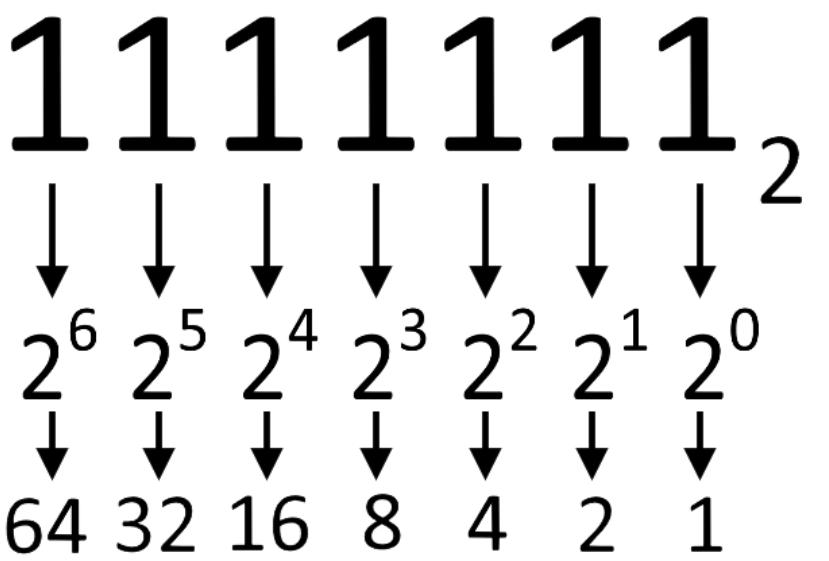
Rappel LSD String Sort

- Consider characters from right to left
- Stable-sort using the d^{th} character as the key (using counting sort)



Binary Number = Fixed length string on alphabet of size two

- Length of int = 31 bits



- 💡 Could we use LDS algorithm for sorting numbers ?
- Yes and this algorithm is called *Radix-sort*.

Preliminary on int and binary representation

- How do we know if the i^{th} bit is 0 or 1 ?

- Like this:

```
private static int getBit(int number, int bitPosition) {  
    return (number >> bitPosition) & 1;  
}
```

- Example:

- 42 (decimal) = 101010 (binary)
- 1 (decimal) = 000000 (binary)
- $42 \gg 3$ = 000101 (binary)
- $42 \gg 3 \& 1$ = 000001 (binary) = 1 (decimal)

-

Radix Sort = LDS Sort

```
private static void stableSortOnBit(int[] A, int bitPosition, int[] aux) {  
  
    int n = A.length;  
    int[] count = new int[2]; // Since bits can be 0 or 1  
  
    // Store count of occurrences in count[]  
    for (int i = 0; i < n; i++) {  
        int bit = getBit(A[i], bitPosition);  
        count[bit]++;  
    }  
  
    count[1] += count[0];  
    for (int i = n - 1; i >= 0; i--) {  
        int bit = getBit(A[i], bitPosition);  
        count[bit]--;  
        aux[count[bit]] = A[i];  
    }  
  
    System.arraycopy(aux, 0, A, 0, n);  
}
```

What is the time-complexity of radix-sort ?

Be careful, with negative numbers

- Negative number are represented in complement two
- Assuming 4 bit long numbers:
 - -5: Steps: 0101 -> (invert) -> 1010 -> (add 1) -> 1011
 - -3: Steps: 0011 -> (invert) -> 1100 -> (add 1) -> 1101
 - -2: Steps: 0010 -> (invert) -> 1101 -> (add 1) -> 1110
- Conclusion: negative numbers always start with 1, therefore if you have both positive and negative numbers, the left most bit must be sorted decreasingly.

Merge (example on first column)

1	4	6
2	1	4
2	2	4
1	4	7
3	3	5
1	5	7

1	4	6
1	4	7
1	5	7
Mode	4	7

2	1	4
2	2	4
Mode	1	4

3	3	5
Mode	3	5

Result

1	4	7
2	1	4
3	3	5

Mode Computation

- Time Complexity: $O(|\text{to-from}|)$

```
public static int mode(int[][] array, int from, int to, int column) {  
    HashMap<Integer, Integer> occurrence = new HashMap<>();  
    int maxOccurrences = -1;  
    int mostFrequentValue = -1;  
    for (int i = from; i <= to; i++) {  
        if (occurrence.containsKey(array[i][column]))  
            occurrence.put(array[i][column], occurrence.get(array[i][column])+1);  
        else  
            occurrence.put(array[i][column], 1);  
  
        if (occurrence.get(array[i][column]) > maxOccurrences) {  
            maxOccurrences = occurrence.get(array[i][column]);  
            mostFrequentValue = array[i][column];  
        }  
  
        if (occurrence.get(array[i][column]) == maxOccurrences && array[i][column] < mostFrequentValue)  
            mostFrequentValue = array[i][column];  
    }  
    return mostFrequentValue;  
}
```

Aggregate Computation

- Step 1: sort the line:

```
Arrays.sort(input, Comparator.comparingInt(a -> a[column])); //O(n.log(n))
```

Step 2: Ranges

1	4	6
2	1	4
2	2	4
1	4	7
3	3	5
1	5	7

0

1

2

3

4

5

1	4	6
1	4	7
1	5	7
2	1	4
2	2	4
3	3	5

- Step 3: compute the mode based on ranges

```
mode(arraySorted, 0 /*from*/, 2 /*to*/, 1 /*column*/)
```

1	4	7
2	1	4
3	3	5



LINFO 1121
DATA STRUCTURES AND ALGORITHMS



Les arbres de recherches

Pierre Schaus

Les tables de symboles

- Type abstrait de données permettant:
 - D'**insérer** une valeur avec une clef 
 - Etant donné la clef  de **retrouver** la valeur correspondante

Quelques exemples

Application	Objectif de la recherche	clef	Valeur
Web search	Trouver des pages intéressantes	Mot-clefs	Liste de pages
DNS inversé	Trouver l'adresse IP	Nom de domaine	Adresse IP
Système de fichier	Trouver un fichier	Nom du fichier	Localisation sur le disque
Compilateur	Trouver les propriété d'une variable	Nom de la variable	Type et valeur
Table de routage	Trouver un chemin de routage pour un paquet	Destination	Interface de sortie du routeur (meilleure route)

Un tableau peut être vu comme une table de symboles

- Les clefs sont les indices
- Les valeurs sont les entrées du tableau
- Python adopte cette convention. `tab[i]` fonctionne pour les tableaux et les dictionnaires

Convention du livre

- Une clef ne peut se retrouver qu'une seule fois dans la table de symbole.
- Les clefs sont différentes de null et les valeurs également.
 - En effet get(key) retourne null si la clef n'est pas présente
- Etant donné que l'égalité des clefs est basée sur la méthode “equals”, il est plus prudent que les clefs soient des objets immuables.

Rappel sur l'égalité et equals

- Propriété demandées:
 - Réflexivité: $x.equals(x)$ est vrai
 - Symétrique: $x.equals(y) \Leftrightarrow y.equals(x)$
 - Transitivité: $x.equals(y)$ et $y.equals(z) \Rightarrow x.equals(z)$
 - Non null: $x.equals(y)$ est faux

Exemple

```
public final class Date implements Comparable<Date>
{
    private final int month;
    private final int day;
    private final int year;

    public boolean equals(Object y)
    {
        if (y == this) return true;
        if (y == null) return false;
        if (y.getClass() != this.getClass())
            return false;
        Date that = (Date) y;
        if (this.day != that.day) return false;
        if (this.month != that.month) return false;
        if (this.year != that.year) return false;
        return true;
    }
}
```

Contrat de base

La classe est final donc la question ne se pose pas

Le cast ne peut pas échouer

On teste tous les champs.
!!! Ici ce sont des types primitifs !!!
Sinon il aurait fallu utiliser equals et si c'était un tableau, il faudrait tester l'égalité sur chaque élément du tableau (deepEqual)

Implémentation possible des tables de symboles

- Implémentations possibles pour une tables de symboles:
 - Sequential Search = simple liste chainée qui contient les clefs et les valeurs
 - * insert(key,value) en $O(n)$,
 - * get(key)/delete(key) en $O(n)$
- En partie 4 nous verrons une autre structure (table de hashage) qui permet $O(1)$ amortie pour toutes les opérations. Patience ...

Relation d'ordre entre les clefs

- Il existe souvent une relation d'ordre entre les clefs. On parle alors généralement de dictionnaire

public class ST<Key	extends Comparable<Key>, Value>
...	
Key min()	<i>smallest key</i>
Key max()	<i>largest key</i>
Key floor(Key key)	<i>largest key less than or equal to key</i>
Key ceiling(Key key)	<i>smallest key greater than or equal to key</i>
int rank(Key key)	<i>number of keys less than key</i>
Key select(int k)	<i>key of rank k</i>
void deleteMin()	<i>delete smallest key</i>
void deleteMax()	<i>delete largest key</i>
int size(Key lo, Key hi)	<i>number of keys between lo and hi</i>
Iterable<Key> keys()	<i>all keys, in sorted order</i>
Iterable<Key> keys(Key lo, Key hi)	<i>keys between lo and hi, in sorted order</i>

Utilisation de l'ordre

- Pour améliorer les complexités grâce à la recherche binaire (= dichotomique)

	sequential search	binary search
search	N	$\log N$
insert / delete	N	N
min / max	N	1
floor / ceiling	N	$\log N$
rank	N	$\log N$
select	N	1
ordered iteration	$N \log N$	N

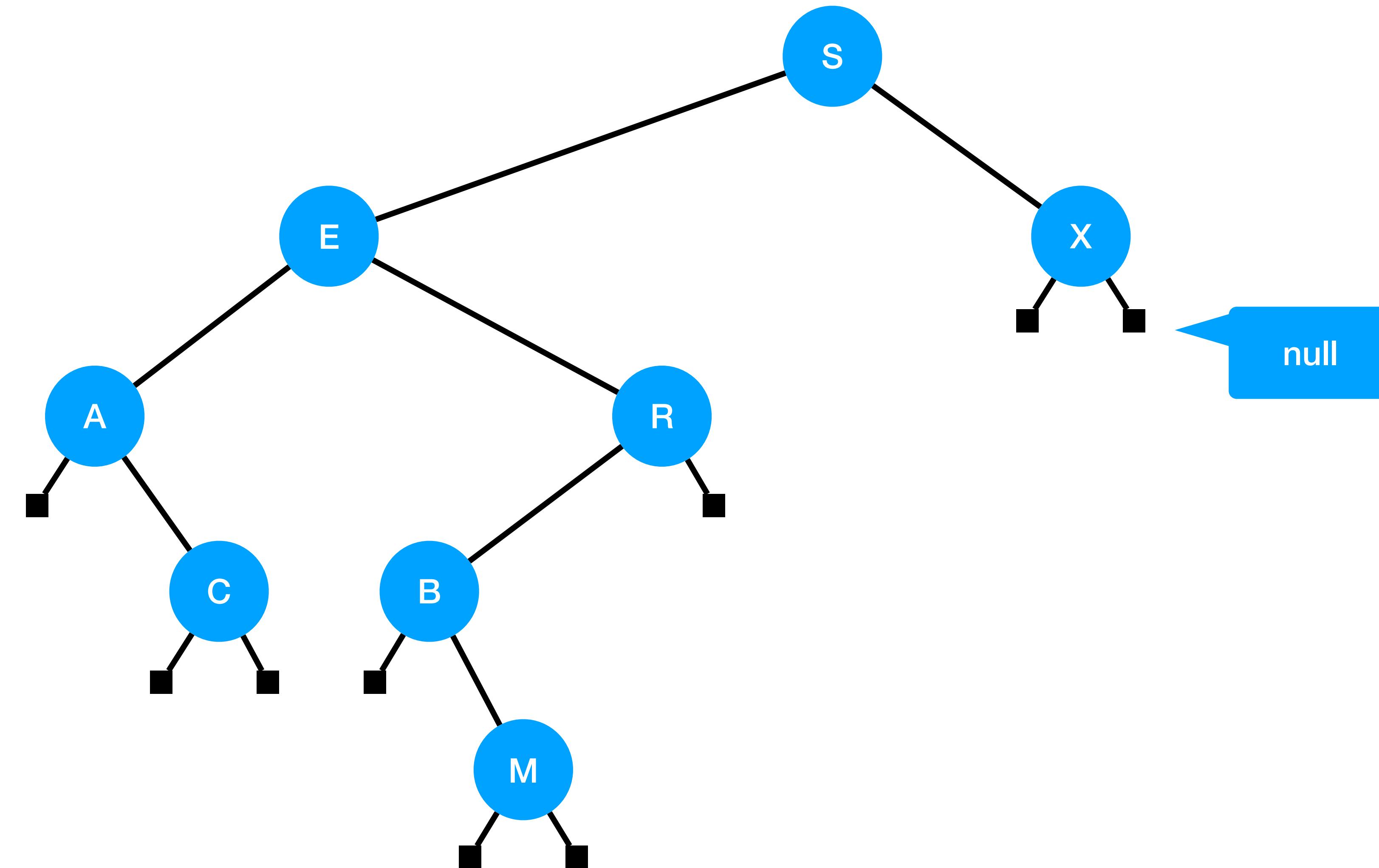
On peut encore améliorer grâce à une nouvelle structure de données: Les arbres de recherche

Les arbres de recherche

- Arbre binaire:
 - * Vide
 - * Non-vide: Il contient deux arbres binaire (gauche et droit)
- Arbre binaire de recherche = arbre binaire avec une clef-valeur dans chaque noeud telle que
 - * Cette clef est plus grande que **toutes** les clefs dans le sous arbre de gauche
 - * Cette clef est plus petite que **toutes** les clefs dans le sous arbre de droite

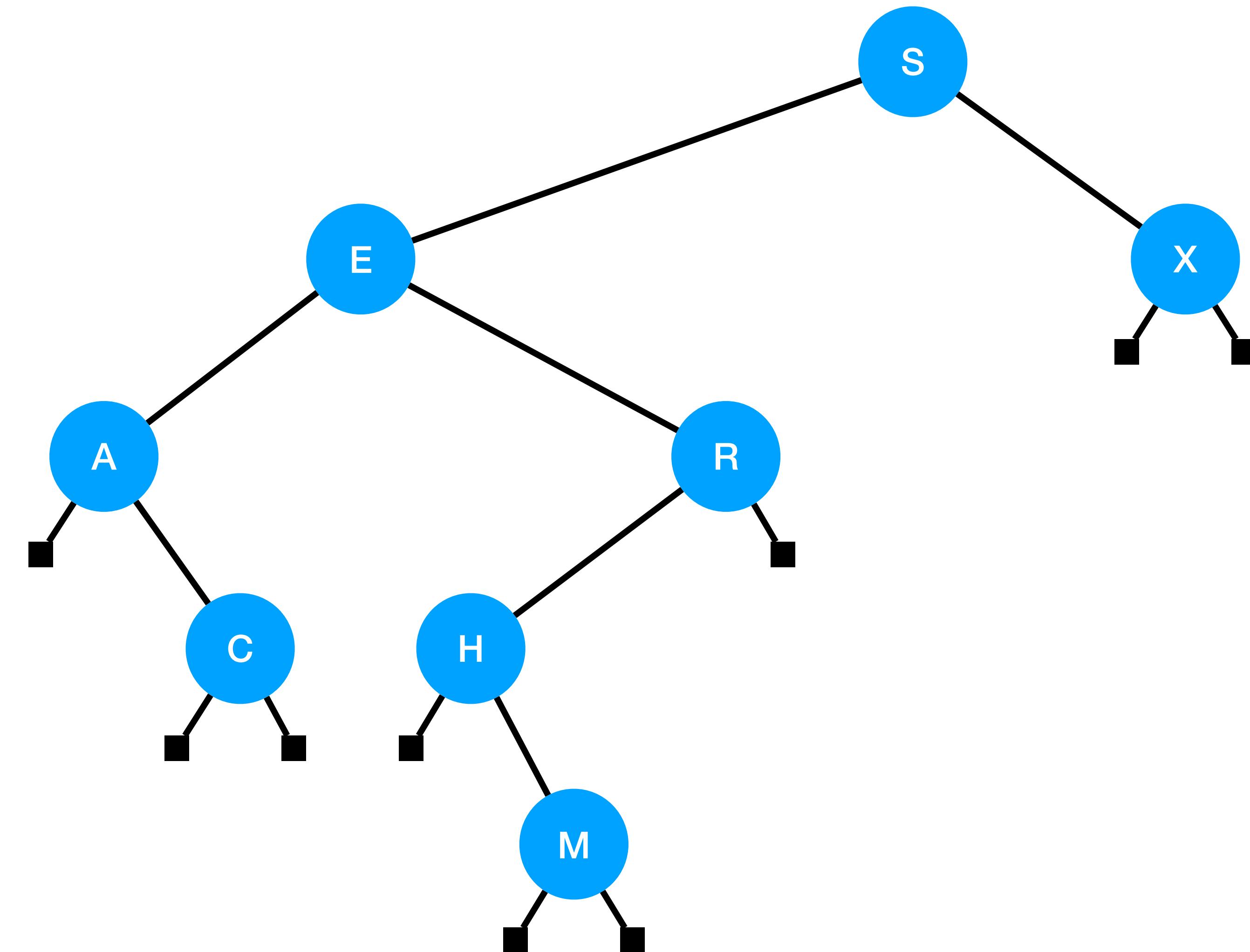
Exemple

- Arbre de recherche valide ?



Exemple

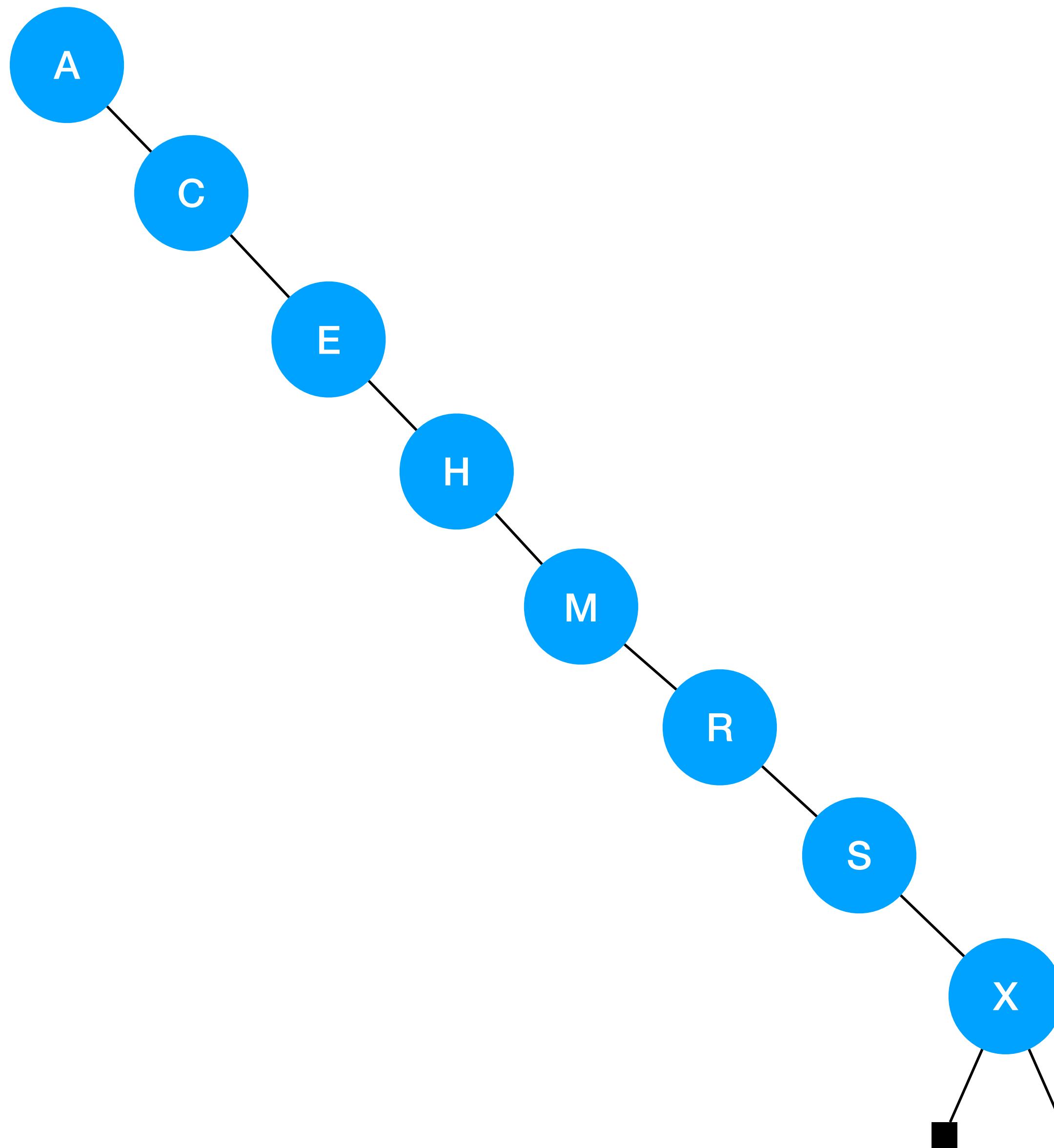
- Arbre de recherche valide ?



Recherche d'une clef dans un arbre de recherche

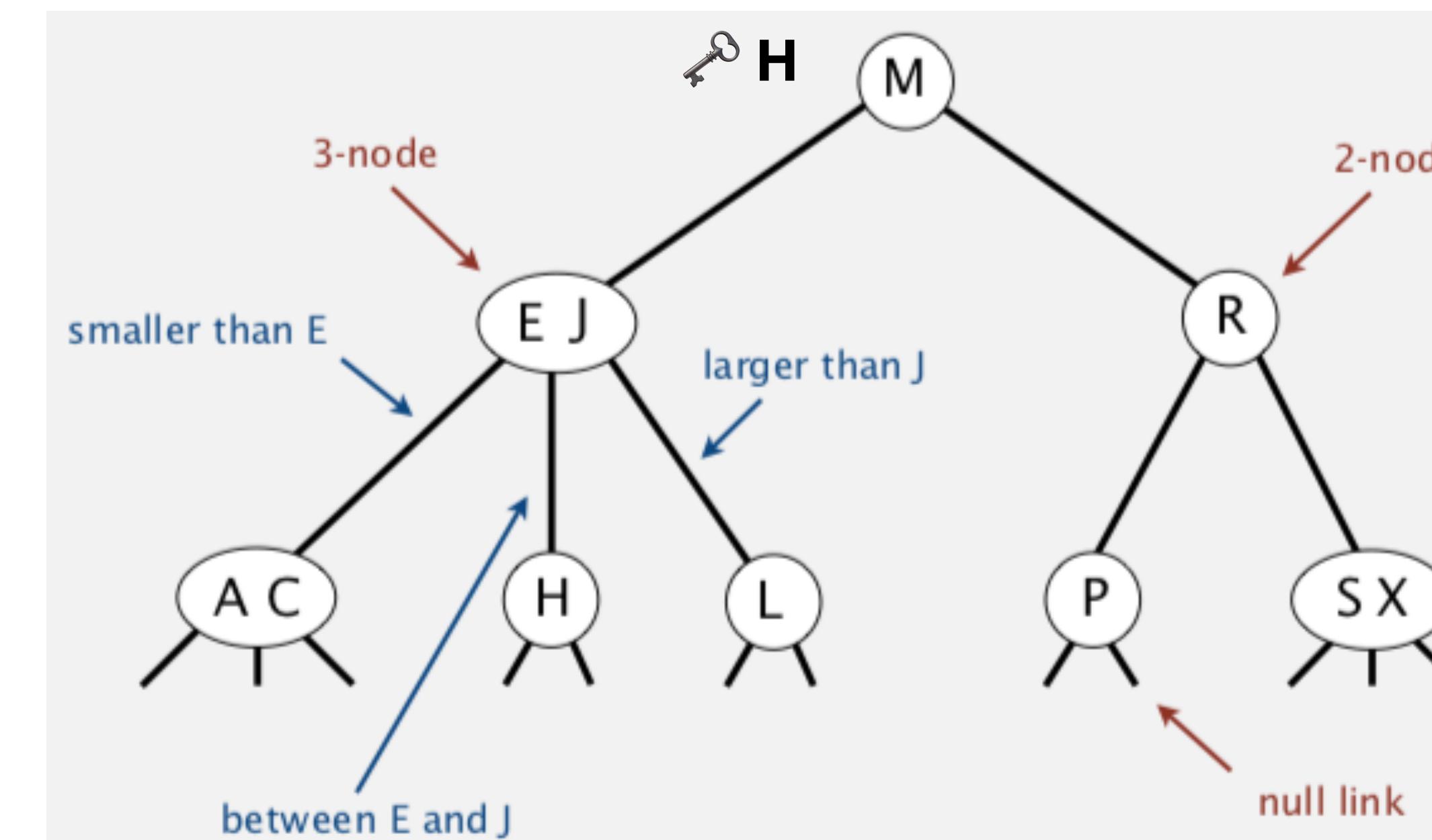
- Complexité
 - $O(n)$ où n est le nombre de noeuds
 - $\Theta(n)$ où n est le nombre de noeuds
 - $O(\log n)$ où n est le nombre de noeuds
 - $\Theta(\log n)$ où n est le nombre de noeuds
 - $O(h)$ où h est la hauteur de l'arbre
 - $\Theta(h)$ où h est la hauteur de l'arbre

Le pire cas pour la hauteur



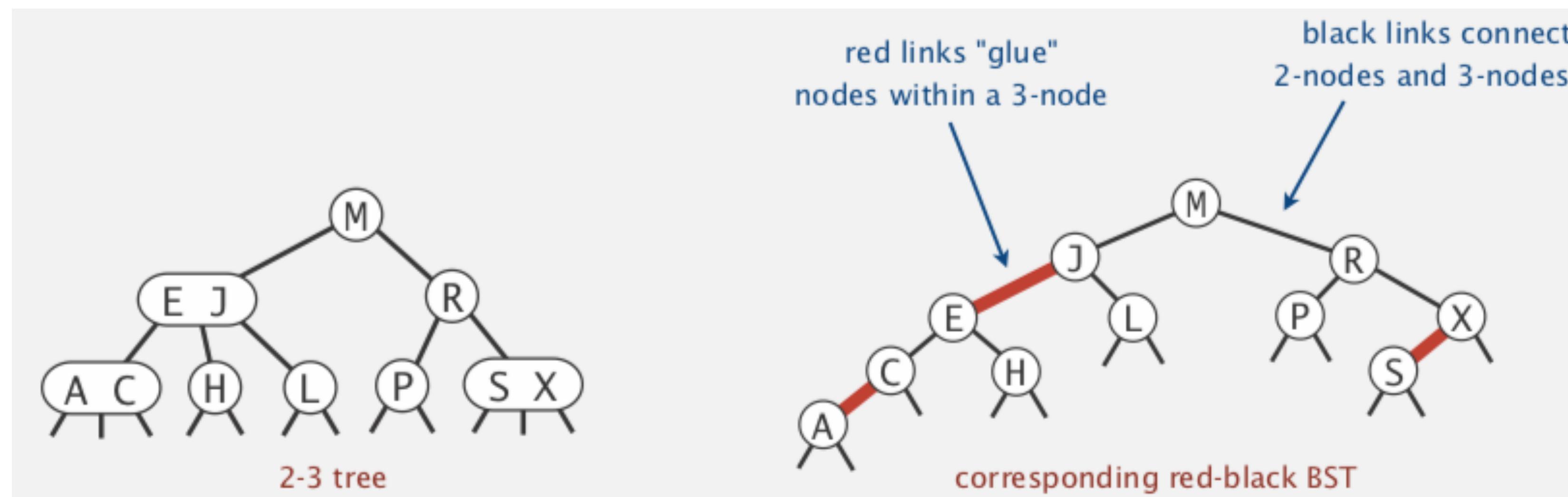
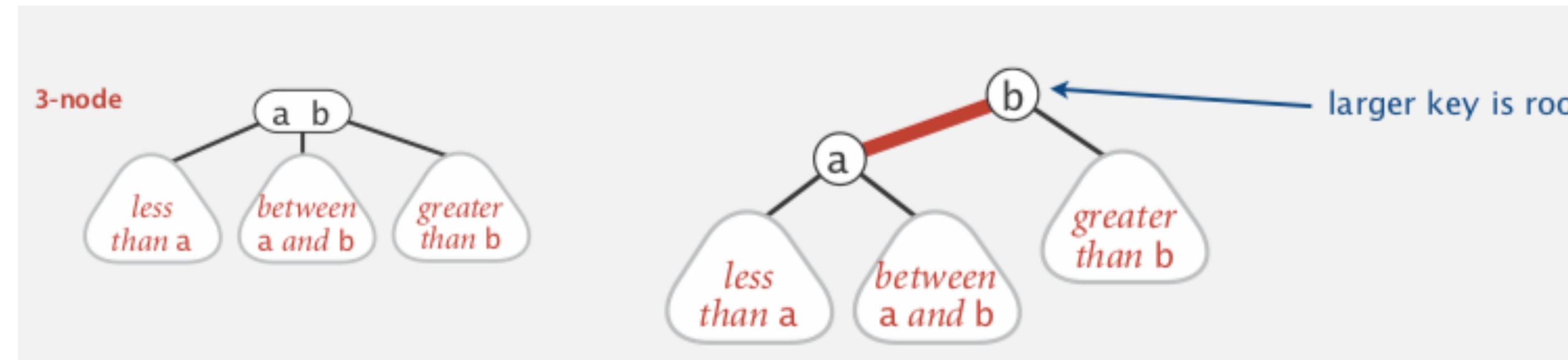
Arbre équilibré $O(h) = O(\log(n))$

- Arbres 2-3, 1 ou 2 clefs par noeud
 - Equilibre parfait: Chaque chemin depuis la racine vers une feuille (lien null) a exactement la même longueur.
 - L'intérêt c'est que les complexités sont garanties $O(\log(n))$. Effet de la “liste chainée” plus possible.



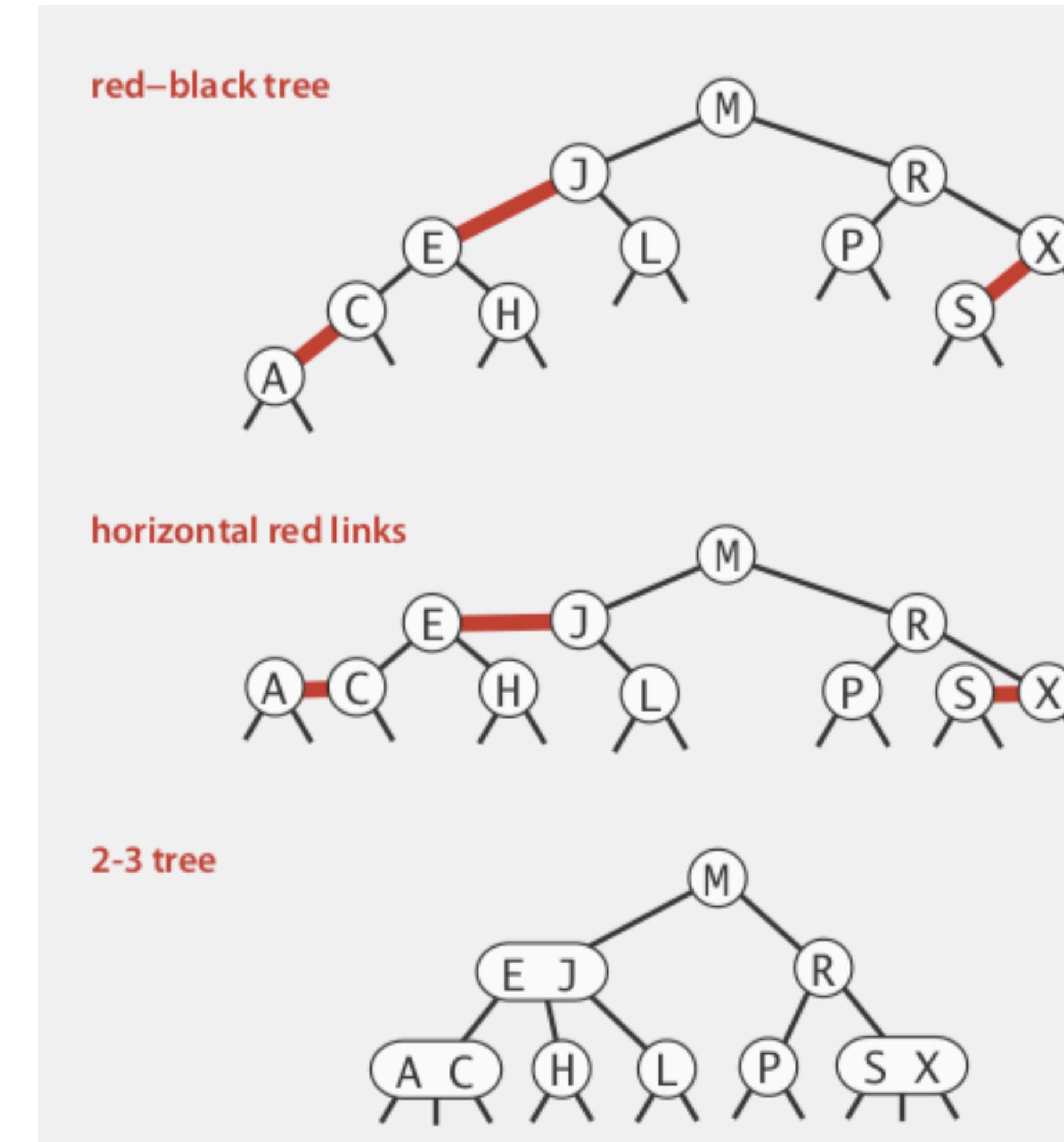
Arbre équilibré binaire

- Arbre red-black penchant à droite
 - = representation d'un arbre 2-3 mais avec un arbre binaire.



Red-black vs 2-3

- La correspondance est parfaite
 - Il suffit de mettre les liens rouge à l'horizontal



Résumé des complexité

implementation	guarantee		
	search	insert	delete
sequential search (unordered list)	N	N	N
binary search (ordered array)	$\lg N$	N	N
BST	N	N	N
2-3 tree	$c \lg N$	$c \lg N$	$c \lg N$
red-black BST	$2 \lg N$	$2 \lg N$	$2 \lg N$

Dans les deux semaines qui viennent

- Lecture approfondie des chapitres 3.1, 3.2 et 3.3,
- Exercices théoriques pour maîtriser les arbres de recherche et les arbres de recherches équilibrés
- Exercices d'implémentation (part 1-3)
- Mid term test, ne compte dans la note finale que pour 2 points et uniquement s'il fait remonter la note.
 - Sur Inginious le mercredi 6 novembre de 19h à 21h
 - Individuellement et sans IA: **toute tentative de tricherie ou détection de plagiat sera sanctionnée d'un zero pour le cours.**

Agenda Reminder

- Lecture next week, feedback exercises by Alice (24h vélo mais on maintient)