October 2023

Theoretische Physik 1: Mathematische Ergänzungen zur Vorlesung

Philipp Schicho[a,*]

[a] *Institute for Theoretical Physics, Goethe Universität Frankfurt, 60438 Frankfurt, Germany*

Abstrakt

Dieses Manuskript ist Teil der Vorlesung “Mathematische Ergänzungen zur Theoretischen Physik 1”. Das Ziel dieser Vorlesung sind Vertiefung und Anwendung der mathematischen Methoden, die in der Vorlesung “Theoretische Physik” benötigt werden.

[*] schicho@itp.uni-frankfurt.de

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkungen

Dr. Philipp Schicho, Phys 02.131

Skript website: `pschicho.github.io/lectures/metp1.pdf`

Das vorliegende Manuskript basiert auf mehreren Quellen und Skripten:

Literatur

[1] H. van Hees, *Mathematische Ergänzungen zur Theoretischen Physik 1*.

[2] C. B. Lang and N. Pucker, *Mathematische Methoden in der Physik*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 3 ed., 2016.

[3] K. Hefft, *Mathematischer Vorkurs zum Studium der Physik*. Springer Spektrum, Berlin, 2 ed., 2018.

[4] S. Großmann, *Mathematischer Einführungskurs für die Physik*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 10 ed., 2012.

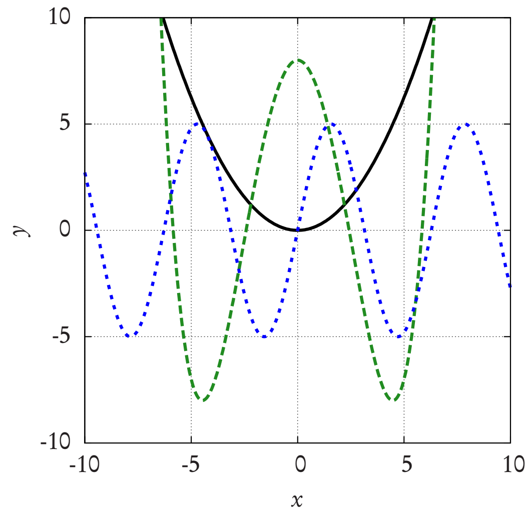

Abbildung 1: Beispiel Funktionen: $y = x^2/4$ (schwarz), $y = (0.2x^2 - 1)^2 - 8$ (grün), $y = 5 \sin x$ (blau).

1. Einführung

1.1. Elementare Funktionen

Referenzen: [1] Anhang B.

Um physikalische Systeme zu beschreiben benutzen und analysieren wir Funktionen. Dazu betrachten wir vorerst Funktionen einer **reellen**[1] Variablen,

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto f(x) \quad \text{(zum Beispiel} \quad t \mapsto x(t))\,, \tag{1.1}$$

$$f : D \to Z\,, \quad x \mapsto f(x)\,. \tag{1.2}$$

Diese sind eindeutige Abbildungen der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ oder einer Definitionsmenge ($D \subseteq \mathbb{R}$) in die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ oder einer Zielmenge ($Z \subseteq \mathbb{R}$). Jeder Zahl $x \in D$ wird eine Zahl $y \in \mathbb{R}$ zugeordnet, nämlich $y = f(x)$. Die Menge der Punkte in $\mathbb{R}^2$ mit den Koordinaten $(x, f(x))$ heisst **Graph der Funktion** f; siehe Abb. 1. Folgende Definitionen sind relevant für reelle Funktionen:

[1] Struktur von $\mathbb{R}$:
$\exists$ zwei Verknüpfungen: $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a + b \in \mathbb{R}\,, a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a \times b \in \mathbb{R}$.
$\exists$ Nullelement: $a + 0 = a \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$.
$\exists$ Einselement: $a \times 1 = a \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$
$\exists$ Inversion: $\forall\, a \in \mathbb{R}\ \exists - a \in \mathbb{R}$ mit $a + (-a) = 0$, $\forall\, a \neq 0\ \exists \frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ mit $a \times \frac{1}{a} = 1$.
Andere Operationen: $a - b := a + (-b)$, $\frac{a}{b} := a \times \frac{1}{b}$.

Polynom. Die (un)endliche Summe von m Monomen heisst Polynom:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m \,, \tag{1.3}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n (x - x_0)^n \,, \quad x_0 \in \mathbb{R} \,. \tag{1.4}$$

Komposition. Die Hintereinanderausführung zweier (oder mehrerer) Funktionen folgt:

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)) \,. \tag{1.5}$$

Beispiel 1.

$$\begin{aligned} f(x) &= x - x_0 \,, & g(x) &= b_n x^n \,, \\ (g \circ f)(x) &= b_n (x - x_0)^n \,, & (f \circ g)(x) &= b_n x^n - x_0 \,. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Umkehrfunktion. Falls die Funktion $f(x)$ bijektiv ist, also die Gleichung $y = f(x)$ eindeutig als $x = g(y)$ gelöst werden kann, nennen wir g die Umkehrfunktion zu f. Bezeichnung üblicherweise: f^{-1} (n.b. nicht $\frac{1}{f}$!). Konkret bedeutet das:

$$\begin{aligned} y &= f(x) = f(f^{-1}(y)) = (f \circ f^{-1})(y) \quad \forall y \\ &\Rightarrow f \circ f^{-1} = \mathbb{1} := \text{Identität} \,, \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned} x &= f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = (f^{-1} \circ f)(x) \quad \forall x \\ &\Rightarrow f^{-1} \circ f = \mathbb{1} \,. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Beispiel 2.

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \,, \quad x \mapsto 2x^2 \,, \\ f^{-1} &: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \,, \quad x \mapsto \sqrt{\frac{x}{2}} \,. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Beispiel 3.

$$f(x) = x^m \Rightarrow \exists\, f^{-1}(x) =: \sqrt[m]{x} \stackrel{!}{=} x^{\frac{1}{m}} \quad \text{für } x > 0 \,. \tag{1.10}$$

Die Definition einer allgemeinen Potenz (z.B. $x^\mu \,, \mu \in \mathbb{R}$) folgt später.

Weitere elementare Funktionen werden durch unendliche Reihen definiert. Eine spezielle Funktion die so definiert werden kann, ist die Exponentialfunktion:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n x^n \,, \quad \text{mit} \quad a_n := \frac{1}{n!} := \frac{1}{n(n-1)\ldots 1} \,, \quad \text{und} \quad m \to \infty \,,$$

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \,, \quad e := \exp(1) \approx 2.718\ldots \,. \tag{1.11}$$

Diese Darstellung konvergiert erstaunlicherweise für $\forall x$, z.B.:

$$\begin{aligned} \exp(-10) &= 1 - 10 + \frac{1}{2}100 - \frac{1}{6}1000 + \frac{1}{24}10000 - \ldots \\ &= 1 - 10 + 50 - 166.7 + 416.7 - \ldots \\ &\approx 0.0000453999 \,. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Die Umkehrfunktion von $\exp(x)$ wird mit $\ln(x)$ bezeichnet:

$$\begin{aligned} \exp(\ln(x)) &= x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+ \,, \\ \ln(\exp(x)) &= x \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow \ln e = 1 \,, \end{aligned} \tag{1.13}$$

$$\ln(x) = \ln(1 + x - 1) = \ln(1 - [1 - x]) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(1-x)^n \,, \tag{1.14}$$

wobei die Reihendarstellung für $0 < x \leq 2$ konvergiert.

Weitere elementare Funktionen sind:

- Allgemeine Potenz und Umkehrfunktion:

$$a^x := \exp(x \ln a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n a}{n!} x^n \,, \quad \text{für} \quad a \in \mathbb{R}_+ \,, \tag{1.15}$$

$$\log_a x := \frac{\ln x}{\ln a} \,. \tag{1.16}$$

Beweis: $y = a^x$, $\ln y = \ln \exp(x \ln a) = x \ln a$. Es gilt: $e^x = \exp(x)$, denn $\ln e = 1$.

- Hyperbolische Funktionen

$$\text{Sinus Hyperbolicus:} \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,, \quad \sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \,, \tag{1.17}$$

$$\text{Cosinus Hyperbolicus:} \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,, \quad \cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \,, \tag{1.18}$$

$$\text{Tangens Hyperbolicus:} \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,, \quad \tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \,. \tag{1.19}$$

Umkehrfunktionen (nur für bestimmte x): $\operatorname{arsinh}(x)$, $\operatorname{arcosh}(x)$, $\operatorname{artanh}(x)$.

- Trigonometrische Funktionen

$$\text{Sinus:} \quad \sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \,, \tag{1.20}$$

$$\text{Cosinus:} \quad \cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \,, \tag{1.21}$$

$$\text{Tangens:} \quad \tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \,. \tag{1.22}$$

Umkehrfunktionen (nur für bestimmte x): $\arcsin(x)\,, \arccos(x)\,, \arctan(x)$.

Literatur

[1] C. B. Lang and N. Pucker, *Mathematische Methoden in der Physik.* Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 3 ed., 2016.

[2] H. v. Hees, *Mathematische Ergänzungen zur Theoretischen Physik 1.* 2018.