November 2023

Theoretische Physik 1:
Mathematische Ergänzungen zur Vorlesung

Philipp Schicho[a,*]

[a] *Institute for Theoretical Physics, Goethe Universität Frankfurt, 60438 Frankfurt, Germany*

Abstrakt

Dieses Manuskript ist Teil der Vorlesung "Mathematische Ergänzungen zur Theoretischen Physik 1". Das Ziel dieser Vorlesung sind Vertiefung und Anwendung der mathematischen Methoden, die in der Vorlesung "Theoretische Physik" benötigt werden.

*schicho@itp.uni-frankfurt.de

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkungen

Dr. Philipp Schicho, Phys 02.131

Skript website: `pschicho.github.io/lectures/metp1.pdf`

Das vorliegende Manuskript basiert auf mehreren Quellen und Skripten:

Literatur

[1] H. van Hees, *Mathematische Ergänzungen zur Theoretischen Physik 1.*

[2] C. B. Lang and N. Pucker, *Mathematische Methoden in der Physik.* Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 3 ed., 2016.

[3] R. Adams and C. Essex, *Calculus: A Complete Course.* Pearson, 10 ed., 2022.

[4] K. Hefft, *Mathematischer Vorkurs zum Studium der Physik.* Springer Spektrum, Berlin, 2 ed., 2018.

[5] S. Großmann, *Mathematischer Einführungskurs für die Physik.* Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 10 ed., 2012.

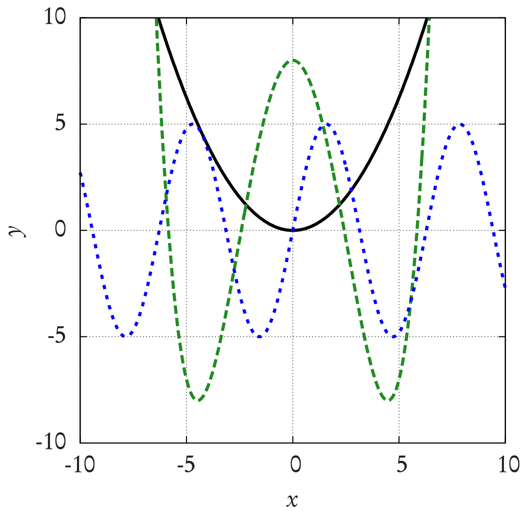

Abbildung 1: Beispiel Funktionen: $y = x^2/4$ (schwarz), $y = (0.2x^2 - 1)^2 - 8$ (grün), $y = 5 \sin x$ (blau).

1. Einführung

1.1. Elementare Funktionen

Referenzen: [1] Anhang B.

Um physikalische Systeme zu beschreiben benutzen und analysieren wir Funktionen. Dazu betrachten wir vorerst Funktionen einer **reellen**[1] Variablen,

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto f(x) \quad (\text{zum Beispiel} \quad t \mapsto x(t))\,, \tag{1.1}$$

$$f : D \to Z\,, \quad x \mapsto f(x)\,. \tag{1.2}$$

Diese sind eindeutige Abbildungen der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ oder einer Definitionsmenge ($D \subseteq \mathbb{R}$) in die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ oder einer Zielmenge ($Z \subseteq \mathbb{R}$). Jeder Zahl $x \in D$ wird eine Zahl $y \in \mathbb{R}$ zugeordnet, nämlich $y = f(x)$. Die Menge der Punkte in $\mathbb{R}^2$ mit den Koordinaten $(x, f(x))$ heisst **Graph der Funktion** f; siehe Abb. 1. Folgende Definitionen sind relevant für reelle Funktionen:

[1] Struktur von $\mathbb{R}$:
$\exists$ zwei Verknüpfungen: $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a + b \in \mathbb{R}\,, a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a \times b \in \mathbb{R}$.
$\exists$ Nullelement: $a + 0 = a \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$.
$\exists$ Einselement: $a \times 1 = a \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$
$\exists$ Inversion: $\forall\, a \in \mathbb{R}\, \exists - a \in \mathbb{R}$ mit $a + (-a) = 0$, $\forall\, a \neq 0\, \exists \frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ mit $a \times \frac{1}{a} = 1$.
Andere Operationen: $a - b := a + (-b)$, $\frac{a}{b} := a \times \frac{1}{b}$.

Polynom. Die (un)endliche Summe von m Monomen heisst Polynom:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m \,, \tag{1.3}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n (x - x_0)^n \,, \quad x_0 \in \mathbb{R} \,. \tag{1.4}$$

Komposition. Die Hintereinanderausführung zweier (oder mehrerer) Funktionen folgt:

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)) \,. \tag{1.5}$$

Beispiel 1.

$$f(x) = x - x_0 \,, \qquad\qquad g(x) = b_n x^n \,,$$

$$(g \circ f)(x) = b_n (x - x_0)^n \,, \qquad\qquad (f \circ g)(x) = b_n x^n - x_0 \,. \tag{1.6}$$

Umkehrfunktion. Falls die Funktion $f(x)$ bijektiv ist, also die Gleichung $y = f(x)$ eindeutig als $x = g(y)$ gelöst werden kann, nennen wir g die Umkehrfunktion zu f. Bezeichnung üblicherweise: f^{-1} (n.b. nicht $\frac{1}{f}$!). Konkret bedeutet das:

$$\begin{aligned} y &= f(x) = f(f^{-1}(y)) = (f \circ f^{-1})(y) \quad \forall y \\ &\Rightarrow f \circ f^{-1} = \mathbb{1} := \text{Identität} \,, \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned} x &= f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = (f^{-1} \circ f)(x) \quad \forall x \\ &\Rightarrow f^{-1} \circ f = \mathbb{1} \,. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Beispiel 2.

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \,, \quad x \mapsto 2x^2 \,, \\ f^{-1} &: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \,, \quad x \mapsto \sqrt{\frac{x}{2}} \,. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Der Definitionsbereich der Funktion ist $D(f) = \mathbb{R}_+$, da diese bijektiv sein muss für die Existenz einer Umkehrfunktion.

Beispiel 3.

$$f(x) = x^m \Rightarrow \exists\, f^{-1}(x) =: \sqrt[m]{x} \overset{!}{=} x^{\frac{1}{m}} \quad \textit{für } x > 0 \,. \tag{1.10}$$

Die Definition einer allgemeinen Potenz (z.B. $x^\mu \,, \mu \in \mathbb{R}$) folgt später.

Reihen. Weitere elementare Funktionen werden durch unendliche Reihen definiert. Eine spezielle Funktion die so definiert werden kann, ist die Exponentialfunktion:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n x^n \,, \quad \text{mit} \quad a_n := \frac{1}{n!} := \frac{1}{n(n-1)\ldots 1} \,, \quad \text{und} \quad m \to \infty \,,$$

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \,, \quad e := \exp(1) \approx 2.718\ldots \,. \tag{1.11}$$

Diese Darstellung konvergiert erstaunlicherweise für $\forall x$, z.B.:

$$\begin{aligned} \exp(-10) &= 1 - 10 + \frac{1}{2}100 - \frac{1}{6}1000 + \frac{1}{24}10000 - \ldots \\ &= 1 - 10 + 50 - 166.7 + 416.7 - \ldots \\ &\approx 0.0000453999 \,. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Die Umkehrfunktion von $\exp(x)$ wird mit $\ln(x)$ bezeichnet:

$$\begin{aligned} \exp(\ln(x)) &= x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+ \,, \\ \ln(\exp(x)) &= x \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow \ln e = 1 \,, \end{aligned} \tag{1.13}$$

$$\ln(x) = \ln(1 + x - 1) = \ln(1 - [1 - x]) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(1-x)^n \,, \tag{1.14}$$

wobei die Reihendarstellung für $0 < x \leq 2$ konvergiert.

Weitere elementare Funktionen sind:

- Allgemeine Potenz und Umkehrfunktion:

$$a^x := \exp(x \ln a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n a}{n!} x^n \,, \quad \text{für} \quad a \in \mathbb{R}_+ \,, \tag{1.15}$$

$$\log_a x := \frac{\ln x}{\ln a} \,. \tag{1.16}$$

Beweis: $y = a^x$, $\ln y = \ln \exp(x \ln a) = x \ln a$. Es gilt: $e^x = \exp(x)$, denn $\ln e = 1$.

- Hyperbolische Funktionen

$$\text{Sinus Hyperbolicus:} \quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,, \qquad \sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \,, \tag{1.17}$$

$$\text{Cosinus Hyperbolicus:} \quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,, \qquad \cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \,, \tag{1.18}$$

$$\text{Tangens Hyperbolicus:} \quad f: \mathbb{R} \to [-1, 1] \,, \quad \tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \,. \tag{1.19}$$

Umkehrfunktionen (nur für bestimmte x): $\operatorname{arsinh}(x)\,, \operatorname{arcosh}(x)\,, \operatorname{artanh}(x)$.

- Trigonometrische Funktionen

$$\text{Sinus:} \qquad f:\mathbb{R}\to[-1,1]\,, \qquad \sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}\,, \tag{1.20}$$

$$\text{Cosinus:} \qquad f:\mathbb{R}\to[-1,1]\,, \qquad \cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\,, \tag{1.21}$$

$$\text{Tangens:} \qquad f:\mathbb{R}\setminus\left\{(\mathbb{Z}+\frac{1}{2})\pi\right\}\to\mathbb{R}\,, \qquad \tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,. \tag{1.22}$$

Umkehrfunktionen (nur für bestimmte x): $\arcsin(x)\,, \arccos(x)\,, \arctan(x)$.

1.2. Komplexe Zahlen und Funktionen

Referenzen: [1] Abschn. (2.1)–(2.2), [2] Abschn. 4.
Die Erweiterung von den reellen zu den **komplexen Zahlen** ist durch die Forderung nach der Lösbarbkeit von **Polynomgleichungen** motiviert. Bei der Lösung quadratischer Gleichungen der Form

$$x^2 + px + q = 0\,, \tag{1.23}$$

stossen wir auf das Problem, dass für $x \in \mathbb{R}$ stets $x^2 \geq 0$ gilt, d.h. im Rahmen der reellen Zahlen können wir keine Quadratwurzeln aus negativen Zahlen ziehen. Die Lösungungsstrategie für Gl. (1.23) besteht darin, eine **quadratische Ergänzung** auszuführen. Offenbar gilt nämlich

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q. \tag{1.24}$$

Die Gl. (1.23) ist also äquivalent zu der Gleichung

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q. \tag{1.25}$$

Wollen wir diese Gleichung nach x auflösen, müssen wir die Wurzel aus der rechten Seite ziehen können. Im Bereich der reellen Zahlen ist das offensichtlich nur möglich, wenn $p^2/4 - q \geq 0$ ist. Dann besitzt die Gleichung entweder eine doppelte (falls $p^2/4 - q = 0$) oder zwei unterschiedliche (falls $p^2/4 - q > 0$) Lösungen. Die Allgemeine Lösung dafür lautet

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \tag{1.26}$$

Wir erweitern nun die reellen Zahlen durch eine neue, zunächst rein symbolisch zu verstehende, “Zahl” i, die **imaginäre Einheit**, für die

$$i^2 = -1\,, \tag{1.27}$$

gelten soll. Dann hätte für $a > 0$ die Gleichung $x^2 = -a$ die beiden Lösungen $x = \pm i\sqrt{a}$, wobei wir voraussetzen, dass die **komplexen Zahlen**, die allgemein von der Form

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}\,, \tag{1.28}$$

sein sollen, die gewöhnlichen Rechenregeln wie für reelle Zahlen gelten, also die sogenannten Axiome eines **Zahlenkörpers** erfüllen. Dabei soll eine komplexe Zahl definitionsgemäss durch ihren **Realteil** x und **Imaginärteil** y eindeutig bestimmt sein. Wir schreiben

$$\operatorname{Re} z = x, \quad \operatorname{Im} z = y\,. \tag{1.29}$$

Nehmen wir dies an, so folgt für die beiden Verknüpfungen zweier komplexer Zahlen

$$\textbf{Summe:} \qquad z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)\,, \tag{1.30}$$

$$\textbf{Produkt:} \qquad z_1 \times z_2 = (x_1 + iy_1) \times (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)\,, \tag{1.31}$$

wobei wir mehrfach das Assoziativ-, Kommutativ-, und Distributivgesetz verwendet haben und wir i wie eine gewöhnliche Variable behandelt haben. Das Produkt folgt ebenso durch formales Ausmultiplizieren, wobei wir im zweiten Term des Realteils die definierende Eigenschaft (1.27) der imaginären Einheit benutzt haben.

Es existieren auch "neutrale Elemente" ($z + 0 = z$, $z \times 1 = z$) und "inverse Elemente" ($z + (-z) = 0$, $z \times z^{-1} = 1$). bezüglich beider Verknüpfungen. Dies macht die Menge aller komplexen Zahlen, $\mathbb{C}$, zu einem **Körper**. Weiters können wir auch noch definieren:

$$\textbf{Subtraktion:} \qquad z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)\,, \tag{1.32}$$

$$\begin{aligned} \textbf{Division:} \qquad z_1/z_2 &= z_1 \times z_2^{-1} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} \\ &= \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right) + i\left(\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right)\,. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Hier haben wir uns für die Definition des inversen z_2^{-1}, der Operation der komplexen Konjugation bedient (z^* oder $\bar{z}$)

$$z^* = x - iy\,, \tag{1.34}$$

wodurch das Produkt einer komplexen Zahl mit ihrem konjugiert Komplexen

$$zz^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 + i(xy - yx) \in \mathbb{R}_+\,. \tag{1.35}$$

Daher folgt

$$z^{-1} = \frac{z^*}{zz^*} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}\,. \tag{1.36}$$

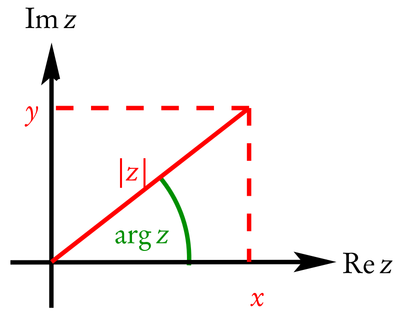

Abbildung 2: Die Gaußsche Zahlenebene und Polarform einer komplexen Zahl.

Den **Betrag** bzw. Modul, das **Argument**, und die **polare Form** einer komplexen Zahl z definieren wir als

$$|z| = \quad \bmod z := \sqrt{zz^*} = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \tag{1.37}$$

$$\arg z := \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \tag{1.38}$$

$$z = x + iy = |z|\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = |z|\Big(\cos\phi + i\sin\phi\Big)\,. \tag{1.39}$$

Die reellen Zahlen können wir geometrisch durch eine Zahlengerade veranschaulichen. Entsprechend kann man die komplexen Zahlen geometrisch interpretieren, wenn man das Zahlenpaar $(x, y) = (\mathrm{Re}\, z, \mathrm{Im}\, z)$ als Komponenten bzgl. eines kartesischen Koordinatensystems in der Euklidischen Ebene interpretiert. Dies ist die **Gaußsche Zahlenebene**. Es ist klar, dass $|z|$ geometrisch die Länge des entsprechenden z repräsentierenden Ortsvektors in der Gaußschen Zahlenebene ist (s. Abb. 2).

Offensichtlich ist $(z^*)^* = z$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Weiter ist $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, denn die komplexen Zahlen mit verschwindendem Imaginärteil sind umkehrbar eindeutig auf $\mathbb{R}$ abbildbar. Offenbar ist $z \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $\mathrm{Im}\, z = 0$, was zugleich $z^* = z$ impliziert. Wir haben weiter

$$\mathrm{Re}\, z = \frac{z + z^*}{2}, \quad \mathrm{Im}\, z = \frac{z - z^*}{2i}. \tag{1.40}$$

Die komplexe Konjugation ist auch additiv und multiplikativ

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*, \quad (z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*\,. \tag{1.41}$$

Weil die beiden Verknüpfungen von Addition und Multiplikation zur Verfügung stehen, können wir die beiden kombinieren und **komplexe Polynome** definieren:

$$P_m(z) := \sum_{k=0}^{m} a_k z^k = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m\,. \tag{1.42}$$

Die Koeffizienten könnten reell ($a_k \in \mathbb{R}$) oder komplex ($a_k \in \mathbb{C}$) sein. Wiederum existieren

- Komposition $[(g \circ f)(z) := g(f(z))]$
- Umkehrfunktion $[f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathbb{1}]$.
- Unendliche Reihen $[P_n(z)$ mit $n \to \infty]$, die zu weiteren Funktionen führen.

Wir beginnen mit der Exponentialfunktion und übernehmen die entsprechende Potenzreihe einfach von der entsprechenden reellen Funktion als Definition für die Exponentialfunktion (1.11) im Komplexen

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k\,, \quad e := \exp(1)\,. \tag{1.43}$$

Auch sie konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

Weiter benötigen wir noch die trigonometrischen Funktionen. Auch ihre Potenzreihen übernehmen wir aus dem Reellen, d.h. mit (1.20) bzw. (1.21) folgt (*nachrechnen!*)

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}\,, \tag{1.44}$$

$$\sin z = x - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\,. \tag{1.45}$$

Berechnen wir nun

$$\begin{aligned} \exp(iz) &= 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \ldots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \cdots\right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}\right) + i\left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\right). \end{aligned} \tag{1.46}$$

Dabei haben wir die Reihe so umgeordnet, dass wir in einem Term den Faktor i ausklammern konnten. Das ist bei Potenzreihen erlaubt, da sie in jedem kompakten Bereich der komplexen Ebene absolut konvergiert.

Vergleichen wir nun die Reihen in den Klammern der Gleichung (1.46) mit (1.44) und (1.45), erhält man die **Eulersche Formel** (1707–1783)

$$\exp(iz) = \cos z + i \sin z. \tag{1.47}$$

Für die Polardarstellung der komplexen Zahl (1.39) folgt damit

$$z = |z| \exp(i\varphi). \tag{1.48}$$

Für die Exponentialfunktion gilt auch im Komplexen die Formel

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2)\,. \tag{1.49}$$

Beweis. Dies kann man mit Hilfe der Reihe (1.43), dem Binomischen Lehrsatz und dem Cauchy Produkt beweisen,

$$\begin{aligned}\exp(z_1+z_2) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{z_1^k z_2^{n-k}}{n!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{z_1^k z_2^{n-k}}{k!(n-k)!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z_1)^k}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_2)^n}{n!} = \exp(z_1)\exp(z_2)\,.\end{aligned}$$

□

Diese Eigenschaft erleichtert die Rechnung mit trigonometrischen Funktionen erheblich. Es folgt z.B. genau wie (1.47) auch die Gleichung

$$\exp(-iz) = \cos z - i\sin z. \tag{1.50}$$

Wir haben damit

$$\cos z = \frac{1}{2}[\exp(iz)+\exp(-iz)], \quad \sin z = \frac{1}{2i}[\exp(iz)-\exp(-iz)]. \tag{1.51}$$

Dies erinnert an die Definition der Hyperbelfunktionen

$$\cosh z = \frac{1}{2}[\exp(z)+\exp(-z)], \quad \sinh z = \frac{1}{2}[\exp(z)-\exp(-z)]. \tag{1.52}$$

Vergleicht man (1.51) mit diesen Definitionen folgt sofort, dass

$$\cosh(iz) = \cos z, \quad \sinh(iz) = i\sin z \tag{1.53}$$

gilt. Die trigonometrischen und Hyperbelfunktionen sind im Komplexen also bis auf Konstanten im wesentlichen die gleichen Funktionen, und beide sind durch die Exponentialfunktion definiert.

Genauso folgt aus (1.51)

$$\cos(iz) = \cosh z, \quad \sin(iz) = i\sinh z. \tag{1.54}$$

Als Anwendungsbeispiel leiten wir noch die Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen für reelle Argumente aus (1.49) ab. Es gilt nämlich einerseits wegen der Eulerschen Formel (1.47) und (1.48)

$$\exp[i(\varphi_1+\varphi_2)] = \cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\,, \tag{1.55}$$

$$\begin{aligned}\exp[i(\varphi_1+\varphi_2)] &= \exp(i\varphi_1)\exp(i\varphi_2) = (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\\ &= (\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\,.\end{aligned} \tag{1.56}$$

Vergleicht man nun Real- und Imaginärteil von (1.55) und (1.56), folgen die bekannten Additionstheoreme

$$\begin{aligned}\cos(\varphi_1+\varphi_2) &= \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2,\\ \sin(\varphi_1+\varphi_2) &= \sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2.\end{aligned} \tag{1.57}$$

Es ist leicht zu zeigen, dass diese Additionstheoreme auch allgemein für beliebige komplexe Argumente gelten (*Übung*).

2. Analysis in einer Dimension

2.1. Grenzwert und Stetigkeit

Referenzen: [2] A.5, [3] Abschn. 1.5.

Definition 2.1. *$f(x)$ hat bei $x = x_0$ den Grenzwert f_0 wenn gilt, dass*

$$\forall\, \epsilon > 0\; \exists\, \delta_\epsilon > 0 \quad : \quad |f(x) - f_0| < \epsilon \quad \textit{falls} \quad |x - x_0| < \delta_\epsilon\,. \tag{2.1}$$

Bezeichnung: $f(x) \to f_0$ für $x \to x_0$, oder $\lim_{x\to x_0} f(x) = f_0$.

Der Grenzwert kann auch von links oder rechts genommen werden, z.B.: $f(x) \to f_0$ für $x \to x_0^+$, oder $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f_0$ bedeutet, dass nur $0 < x - x_0 < \delta_\epsilon$ betrachtet werden. Für **unendliche** Grenzwerte folgt dann $\lim_{x\to\infty} f(x) = f_0$, so dass $\forall\, \epsilon > 0\; \exists\, \delta_\epsilon > 0\, :\, |f(x) - f_0| < \epsilon$ falls $x > \delta_\epsilon$.

Beispiel 4. *Die Funktion $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ scheint an $x_0 = 0$ nicht definiert und $f(0) = \frac{0}{0}$. Aus der Definition aus Gl. (1.20) wissen wir aber*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots\,, \tag{2.2}$$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 \underbrace{- \frac{x^2}{6} + \dots}_{\to 0 \text{ für } x\to 0^+}\,. \tag{2.3}$$

Daher gilt $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Weiters können wir folgende Grenzwertsätze (ohne Beweis) benutzen:

$$\lim_{x\to x_0} c f(x) = c \lim_{x\to x_0} f(x)\,, \tag{2.4}$$

$$\lim_{x\to x_0} \Big[f(x) + g(x)\Big] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)\,, \tag{2.5}$$

$$\lim_{x\to x_0} \Big[f(x) \times g(x)\Big] = \Big[\lim_{x\to x_0} f(x)\Big] \times \Big[\lim_{x\to x_0} g(x)\Big]\,, \tag{2.6}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}\,, \quad \text{falls} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0\,. \tag{2.7}$$

In den Beispielen in Abb. 1 sind alle Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Außerdem weist ihr Graph keinerlei Unterbrechungen oder ähnliche Anomalien auf. Die mathematische Voraussetzung dafür ist, dass eine Funktion stetig ist. Anschaulich bedeutet die **Stetigkeit einer Funktion** an der Stelle x_0, dass sich der Funktionswert um x_0 nur wenig ändert, wenn man sie in einer kleinen Umgebung um x_0 betrachtet. Formal lässt sich dies so definieren:

Definition 2.2. *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt stetig an der Stelle $x_0 \in D$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein zugehöriges $\delta_\epsilon > 0$ gibt (δ_ϵ hängt von ϵ und x_0 ab!), sodass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta_\epsilon$ stets $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ gilt.*

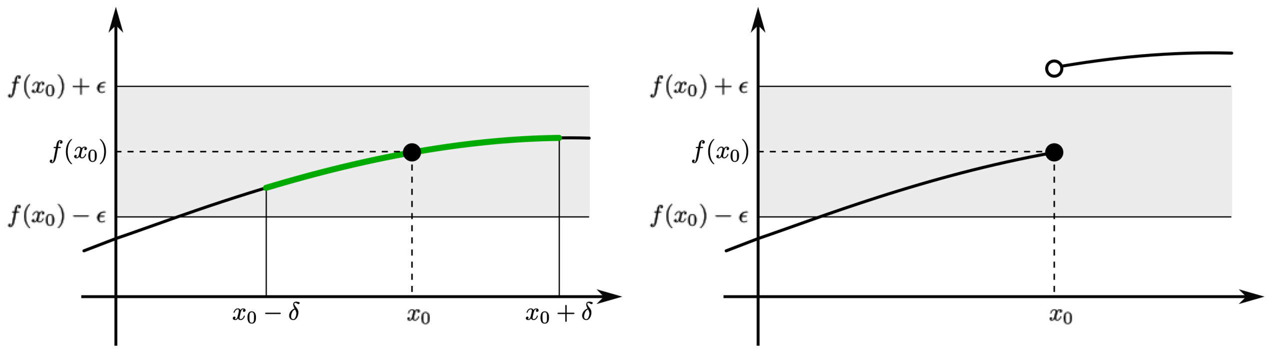

Abbildung 3: Beispiel einer stetigen (links) und unstetigen Funktionen (rechts), nach Definition 2.2 (cf. [4]).

Mit Def. 2.1 ist eine Funktion dann stetig an x_0, wenn ihr Grenzwert dort existiert

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\,. \tag{2.8}$$

Wenn der Grenzwert nicht existiert, oder existiert aber nicht gegen $f(x_0)$ geht, dann ist die Funktion **unstetig** an x_0.

Informelle Definition: Wird ein beliebiges ϵ-Intervall um $f(x_0)$ vorgegeben, dann existiert dazu ein δ_ϵ-Intervall um x_0, welches zur Gänze in das ϵ-Intervall um $f(x_0)$ abgebildet wird.
In anderen Worten: Die Funktionswerte für hinreichend kleine Umgebungen um x_0 weichen beliebig wenig von dem Funktionswert $f(x_0)$ bei x_0 ab. Oder man die Funktion ohne Absetzen des Stifts skizzieren kann.

Beispiel 5.

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\,, & x \leq 1\,, \\ +\frac{1}{2}\,, & x > 1\,. \end{cases} \tag{2.9}$$

Die Funktion ist stetig von links aber nicht von rechts: $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\frac{1}{2}$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\frac{1}{2}$, $f(1) = -\frac{1}{2}$.

Beispiel 6. *Die Funktion* $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ *ist an der Stelle* $x_0 = 2$ *nicht definiert. Offenbar gilt aber* $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 4$. *Dies ist auch ersichtlich da* $f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = (x+2)$. *Obwohl die Funktion nicht definiert ist an* x_0, *können wir damit an der Stelle* $x_0 = 2$ *den Funktionswert* $f(2) = 4$ *setzen und erhalten eine in* $x_0 = 2$ *stetige Funktion.*

Satz 2.3. *Sind zwei Funktionen* f *und* g *stetig in* x_0, *dann sind auch*

(i) cf, $f+g$, $f\times g$, $\frac{f}{g}$ *vorausgesetzt* $g(x_0) \neq 0$,

(ii) die Komposition $g \circ f$, und

(iii) die Umkehrfunktion f^{-1}

stetig.

Beweis. Für zwei in x_0 stetige Funktionen f und g ist auch die Funktion $f + g$ stetig. Voraussetzungsgemäß gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein

$$\begin{aligned} &\delta_1 > 0\,, \quad \text{so dass } |f(x) - f(x_0)| < \epsilon/2 && \forall x \in D \quad \text{mit} \quad |x - x_0| < \delta_1\,, \\ &\delta_2 > 0\,, \quad \text{so dass } |g(x) - g(x_0)| < \epsilon/2 && \forall x \in D \quad \text{mit} \quad |x - x_0| < \delta_2\,. \end{aligned}$$

Setzen wir nun $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, dann gilt wegen der Dreiecksungleichung[2] für alle $|x - x_0| < \delta$

$$\begin{aligned} |[f(x) + g(x)] - [f(x_0) + g(x_0)]| &= |[f(x) - f(x_0)] + [g(x) - g(x_0)]| \\ &\le |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\,, \end{aligned} \tag{2.10}$$

d.h. zu jedem $\epsilon > 0$ können wir ein $\delta > 0$ finden, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ stets

$$|[f(x) + g(x)] - [f(x_0) + g(x_0)]| < \epsilon \tag{2.11}$$

gilt. Das bedeutet aber gemäß der Definition, dass die Funktion $f + g$ stetig ist. □

Offensichtlich sind eine konstante Funktion $f(x) = A = \text{const}$ sowie die Funktion $f(x) = x$ in allen $x \in \mathbb{R}$ definiert und stetig. Aus den oben angegebenen Sätzen folgt dann, dass auch jedes Polynom

$$f(x) = P_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m = \sum_{n=0}^{m} a_n x^n\,, \tag{2.12}$$

stetig ist.

Satz 2.4 (Nullstellensatz von Bolzano (1781–1848)). *Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig auf dem Intervall $[a, b]$ und es gelte $f(a) \cdot f(b) < 0$ (d.h. $f(a)$ und $f(b)$ haben unterschiedliches Vorzeichen). Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = 0$, i.e. f hat in (a, b) mindestens eine Nullstelle.*

Beweis. oBdA sei $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Wir setzen $I_0 = [a, b]$. Durch Halbierung von I_0 erhalten wir zwei Teilintervalle $[a, \frac{a+b}{2}]$, $[\frac{a+b}{2}, b]$, von denen bei einem, etwa $I_1 = [a_1, b_1]$, gilt, dass $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$. Durch fortwährende Intervallhalbierung erhalten wir eine Folge $I_n = [a_n, b_n]$ von Intervallen mit $I_{n+1} \subseteq I_n$, $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$ und $|b_n - a_n| = \frac{b-a}{2^n} \to 0$.

Die Folge (a_n) ist monoton wachsend und nach oben beschränkt, (durch b), die Folge (b_n) ist monoton fallend und nach unten beschränkt, (durch a). Also sind beide Folgen konvergent. Man überlege sich, dass die Grenzwerte gleich sein müssen, i.e. $\exists\, \xi \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi$. Da beide Folgen gegen denselben Grenzwert ξ konvergieren und da weiter f voraussetzungsgemäß im ganzen Intervall $[a, b]$ stetig ist, muss folglich $f(\xi) = 0$ sein. □

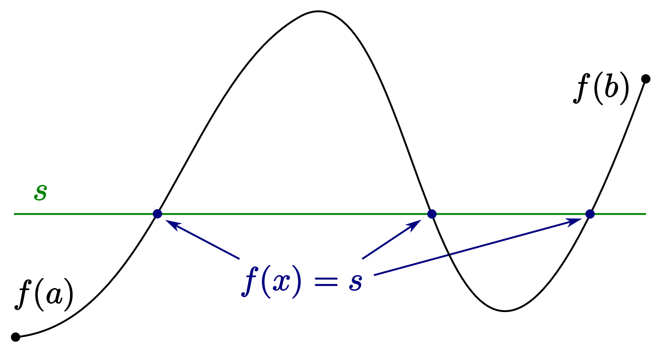

Abbildung 4: Zwischenwertsatz 2.5 am Beispiel einer Funktion [4].

Satz 2.5 (Zwischenwertsatz). *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Weiter sei $f(a) < f(b)$. Dann gibt es zu jedem $u \in [f(a), f(b)]$ ein $\xi \in [a, b]$, so dass $f(\xi) = u$ i.e. $f(a) < u < f(b)$ ist (entsprechendes gilt auch falls $f(a) > f(b)$ ist). Das heisst jeder Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ wird angenommen.*

Beweis. Dies ist ein Sonderfall des Nullstellensatzes. Sei $g(x) = f(x) - u$. Dann ist g stetig auf $[a, b]$ mit $g(a) < 0$ und $g(b) > 0$. Nach dem Nullstellensatz existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $g(\xi) = 0$, i.e. $f(\xi) = u$. $\square$

Satz 2.6 (Satz vom Maximum und Minimum). *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f an wenigstens einer Stelle $\xi \in [a, b]$ ein Maximum (Minimum) an. Dabei ist das Maximum durch $\sup_{x\in[a,b]} f(x)$ (das Minimum durch $\inf_{x\in[a,b]} f(x)$) definiert.*

Beweis. Wir beweisen den Satz für das Maximum. Der Beweis für das Minimum folgt analog. Da die Funktion im gesamten (abgeschlossenen!) Intervall definiert ist, ist ihr Bildbereich $f([a, b])$ eine beschränkte Menge und besitzt demnach ein Supremum, d.h. es gilt $f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$ mit $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Dadurch existiert dann eine Zahlenfolge $x_n \in [a, b]$, so dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = M$.

[2] Dreiecksungleichung (ohne Beweis): $|a + b| \leq |a| + |b|$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Literatur

[1] C. B. Lang and N. Pucker, *Mathematische Methoden in der Physik*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 3 ed., 2016.

[2] H. v. Hees, *Mathematische Ergänzungen zur Theoretischen Physik 1*. 2018.

[3] R. Adams and C. Essex, *Calculus: A Complete Course*. Pearson, 10 ed., 2022.

[4] *Analysis Eins*. Serlo Education, 1 ed., 2017.