November 2023

Theoretische Physik 1: Mathematische Ergänzungen zur Vorlesung

Philipp Schicho[a,*]

[a] *Institute for Theoretical Physics, Goethe Universität Frankfurt, 60438 Frankfurt, Germany*

Abstrakt

Dieses Manuskript ist Teil der Vorlesung "Mathematische Ergänzungen zur Theoretischen Physik 1". Das Ziel dieser Vorlesung sind Vertiefung und Anwendung der mathematischen Methoden, die in der Vorlesung "Theoretische Physik" benötigt werden.

*schicho@itp.uni-frankfurt.de

Contents

Vorbemerkungen

Dr. Philipp Schicho, Phys 02.131

Skript website: `pschicho.github.io/lectures/metp1.pdf`

Das vorliegende Manuskript basiert auf mehreren Quellen und Skripten:

References

[1] H. van Hees, *Mathematische Ergänzungen zur Theoretischen Physik 1*.

[2] C. B. Lang and N. Pucker, *Mathematische Methoden in der Physik*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 3 ed., 2016.

[3] R. Adams and C. Essex, *Calculus: A Complete Course*. Pearson, 10 ed., 2022.

[4] K. Hefft, *Mathematischer Vorkurs zum Studium der Physik*. Springer Spektrum, Berlin, 2 ed., 2018.

[5] S. Großmann, *Mathematischer Einführungskurs für die Physik*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 10 ed., 2012.

[6] M. Ganster, *Differential- und Integralrechnung*. 2011.

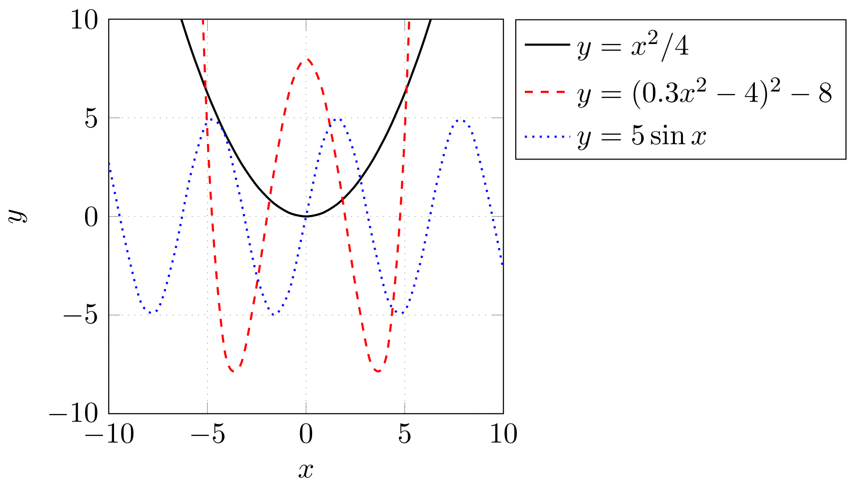

Figure 1: Elementare Beispielfunktionen.

1. Einführung

1.1. Elementare Funktionen

Referenzen: [1] Anhang B.

Um physikalische Systeme zu beschreiben benutzen und analysieren wir Funktionen. Dazu betrachten wir vorerst Funktionen einer **reellen**[1] Variablen,

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto f(x) \quad (\text{zum Beispiel} \quad t \mapsto x(t))\,, \tag{1.1}$$

$$f : D \to Z\,, \quad x \mapsto f(x)\,. \tag{1.2}$$

Diese sind eindeutige Abbildungen der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ oder einer Definitionsmenge ($D \subseteq \mathbb{R}$) in die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ oder einer Zielmenge ($Z \subseteq \mathbb{R}$). Jeder Zahl $x \in D$ wird eine Zahl $y \in \mathbb{R}$ zugeordnet, nämlich $y = f(x)$. Die Menge der Punkte in $\mathbb{R}^2$ mit den Koordinaten $(x, f(x))$ heisst **Graph der Funktion** f; siehe Abb. 1. Folgende Definitionen sind relevant für reelle Funktionen:

Polynom. Die (un)endliche Summe von m Monomen heisst Polynom:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m\,, \tag{1.3}$$

[1] Struktur von $\mathbb{R}$:
$\exists$ zwei Verknüpfungen: $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a + b \in \mathbb{R}\,, a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a \times b \in \mathbb{R}$.
$\exists$ Nullelement: $a + 0 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$.
$\exists$ Einselement: $a \times 1 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$
$\exists$ Inversion: $\forall a \in \mathbb{R}\, \exists -a \in \mathbb{R}$ mit $a + (-a) = 0$, $\forall a \neq 0\, \exists \frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ mit $a \times \frac{1}{a} = 1$.
Andere Operationen: $a - b := a + (-b)$, $\frac{a}{b} := a \times \frac{1}{b}$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n (x - x_0)^n\,, \quad x_0 \in \mathbb{R}\,. \tag{1.4}$$

Komposition. Die Hintereinanderausführung zweier (oder mehrerer) Funktionen folgt:

$$(g \circ f)(x) := g(f(x))\,. \tag{1.5}$$

Beispiel 1.

$$\begin{aligned} f(x) &= x - x_0\,, & g(x) &= b_n x^n\,, \\ (g \circ f)(x) &= b_n (x - x_0)^n\,, & (f \circ g)(x) &= b_n x^n - x_0\,. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Umkehrfunktion. Falls die Funktion $f(x)$ bijektiv ist, also die Gleichung $y = f(x)$ eindeutig als $x = g(y)$ gelöst werden kann, nennen wir g die Umkehrfunktion zu f. Bezeichnung üblicherweise: f^{-1} (n.b. nicht $\frac{1}{f}$!). Konkret bedeutet das:

$$\begin{aligned} &y = f(x) = f(f^{-1}(y)) = (f \circ f^{-1})(y) \quad \forall y \\ &\quad \Rightarrow f \circ f^{-1} = \mathbb{1} := \text{Identität}\,, \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned} &x = f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = (f^{-1} \circ f)(x) \quad \forall x \\ &\quad \Rightarrow f^{-1} \circ f = \mathbb{1}\,. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Beispiel 2.

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+\,, \quad x \mapsto 2x^2\,, \\ f^{-1} &: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+\,, \quad x \mapsto \sqrt{\frac{x}{2}}\,. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Der Definitionsbereich der Funktion ist $D(f) = \mathbb{R}_+$, da diese bijektiv sein muss für die Existenz einer Umkehrfunktion.

Beispiel 3.

$$f(x) = x^m \Rightarrow \exists\, f^{-1}(x) =: \sqrt[m]{x} \stackrel{!}{=} x^{\frac{1}{m}} \quad \textit{für}\; x > 0\,. \tag{1.10}$$

Die Definition einer allgemeinen Potenz (z.B. $x^\mu\,, \mu \in \mathbb{R}$) folgt später.

Reihen. Weitere elementare Funktionen werden durch unendliche Reihen definiert. Eine spezielle Funktion die so definiert werden kann, ist die Exponentialfunktion:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n x^n \,, \quad \text{mit} \quad a_n := \frac{1}{n!} := \frac{1}{n(n-1)\dots 1} \,, \quad \text{und} \quad m \to \infty \,,$$

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \,, \quad e := \exp(1) \approx 2.718\dots \,. \tag{1.11}$$

Diese Darstellung konvergiert erstaunlicherweise für $\forall x$, z.B.:

$$\begin{aligned} \exp(-10) &= 1 - 10 + \frac{1}{2}100 - \frac{1}{6}1000 + \frac{1}{24}10000 - \dots \\ &= 1 - 10 + 50 - 166.7 + 416.7 - \dots \\ &\approx 0.0000453999 \,. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Die Umkehrfunktion von $\exp(x)$ wird mit $\ln(x)$ bezeichnet:

$$\begin{aligned} \exp(\ln(x)) &= x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+ \,, \\ \ln(\exp(x)) &= x \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow \ln e = 1 \,, \end{aligned} \tag{1.13}$$

$$\ln(x) = \ln(1 + x - 1) = \ln(1 - [1 - x]) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (1 - x)^n \,, \tag{1.14}$$

wobei die Reihendarstellung für $0 < x \leq 2$ konvergiert.

Weitere elementare Funktionen sind:

- Allgemeine Potenz und Umkehrfunktion:

$$a^x := \exp(x \ln a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n a}{n!} x^n \,, \quad \text{für} \quad a \in \mathbb{R}_+ \,, \tag{1.15}$$

$$\log_a x := \frac{\ln x}{\ln a} \,. \tag{1.16}$$

Beweis: $y = a^x$, $\ln y = \ln \exp(x \ln a) = x \ln a$. Es gilt: $e^x = \exp(x)$, denn $\ln e = 1$.

- Hyperbolische Funktionen

$$\text{Sinus Hyperbolicus:} \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,, \qquad \sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \,, \tag{1.17}$$

$$\text{Cosinus Hyperbolicus:} \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,, \qquad \cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \,, \tag{1.18}$$

$$\text{Tangens Hyperbolicus:} \quad f : \mathbb{R} \to [-1, 1] \,, \quad \tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \,. \tag{1.19}$$

Umkehrfunktionen (nur für bestimmte x): $\operatorname{arsinh}(x)\,, \operatorname{arcosh}(x)\,, \operatorname{artanh}(x)$.

- Trigonometrische Funktionen

$$\text{Sinus:} \qquad f:\mathbb{R}\to[-1,1]\,, \qquad \sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}\,, \tag{1.20}$$

$$\text{Cosinus:} \qquad f:\mathbb{R}\to[-1,1]\,, \qquad \cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\,, \tag{1.21}$$

$$\text{Tangens:} \qquad f:\mathbb{R}\setminus\left\{(\mathbb{Z}+\frac{1}{2})\pi\right\}\to\mathbb{R}\,, \qquad \tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,. \tag{1.22}$$

Umkehrfunktionen (nur für bestimmte x): $\arcsin(x)\,,\arccos(x)\,,\arctan(x)$.

1.2. Komplexe Zahlen und Funktionen

Referenzen: [1] Abschn. (2.1)–(2.2), [2] Abschn. 4.

Die Erweiterung von den reellen zu den **komplexen Zahlen** ist durch die Forderung nach der Lösbarbkeit von **Polynomgleichungen** motiviert. Bei der Lösung quadratischer Gleichungen der Form

$$x^2 + px + q = 0\,, \tag{1.23}$$

stossen wir auf das Problem, dass für $x \in \mathbb{R}$ stets $x^2 \geq 0$ gilt, d.h. im Rahmen der reellen Zahlen können wir keine Quadratwurzeln aus negativen Zahlen ziehen. Die Lösungungsstrategie für Gl. (1.23) besteht darin, eine **quadratische Ergänzung** auszuführen. Offenbar gilt nämlich

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q. \tag{1.24}$$

Die Gl. (1.23) ist also äquivalent zu der Gleichung

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q. \tag{1.25}$$

Wollen wir diese Gleichung nach x auflösen, müssen wir die Wurzel aus der rechten Seite ziehen können. Im Bereich der reellen Zahlen ist das offensichtlich nur möglich, wenn $p^2/4 - q \geq 0$ ist. Dann besitzt die Gleichung entweder eine doppelte (falls $p^2/4-q=0$) oder zwei unterschiedliche (falls $p^2/4-q>0$) Lösungen. Die Allgemeine Lösung dafür lautet

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \tag{1.26}$$

Wir erweitern nun die reellen Zahlen durch eine neue, zunächst rein symbolisch zu verstehende, “Zahl” i, die **imaginäre Einheit**, für die

$$i^2 = -1\,, \tag{1.27}$$

gelten soll. Dann hätte für $a > 0$ die Gleichung $x^2 = -a$ die beiden Lösungen $x = \pm i\sqrt{a}$, wobei wir voraussetzen, dass die **komplexen Zahlen**, die allgemein von der Form

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}\,, \tag{1.28}$$

sein sollen, die gewöhnlichen Rechenregeln wie für reelle Zahlen gelten, also die sogenannten Axiome eines **Zahlenkörpers** erfüllen. Dabei soll eine komplexe Zahl definitionsgemäss durch ihren **Realteil** x und **Imaginärteil** y eindeutig bestimmt sein. Wir schreiben

$$\mathrm{Re}\, z = x, \quad \mathrm{Im}\, z = y\,. \tag{1.29}$$

Nehmen wir dies an, so folgt für die beiden Verknüpfungen zweier komplexer Zahlen

$$\textbf{Summe:} \qquad z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)\,, \tag{1.30}$$

$$\textbf{Produkt:} \qquad z_1 \times z_2 = (x_1 + iy_1) \times (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)\,, \tag{1.31}$$

wobei wir mehrfach das Assoziativ-, Kommutativ-, und Distributivgesetz verwendet haben und wir i wie eine gewöhnliche Variable behandelt haben. Das Produkt folgt ebenso durch formales Ausmultiplizieren, wobei wir im zweiten Term des Realteils die definierende Eigenschaft (1.27) der imaginären Einheit benutzt haben.

Es existieren auch "neutrale Elemente" ($z + 0 = z$, $z \times 1 = z$) und "inverse Elemente" ($z + (-z) = 0$, $z \times z^{-1} = 1$). bezüglich beider Verknüpfungen. Dies macht die Menge aller komplexen Zahlen, $\mathbb{C}$, zu einem **Körper**. Weiters können wir auch noch definieren:

$$\textbf{Subtraktion:} \qquad z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)\,, \tag{1.32}$$

$$\begin{aligned} \textbf{Division:} \qquad z_1/z_2 &= z_1 \times z_2^{-1} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} \\ &= \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right) + i\left(\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right)\,. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Hier haben wir uns für die Definition des inversen z_2^{-1}, der Operation der komplexen Konjugation bedient (z^* oder $\bar{z}$)

$$z^* = x - iy\,, \tag{1.34}$$

wodurch das Produkt einer komplexen Zahl mit ihrem konjugiert Komplexen

$$zz^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 + i(xy - yx) \in \mathbb{R}_+\,. \tag{1.35}$$

Daher folgt

$$z^{-1} = \frac{z^*}{zz^*} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}\,. \tag{1.36}$$

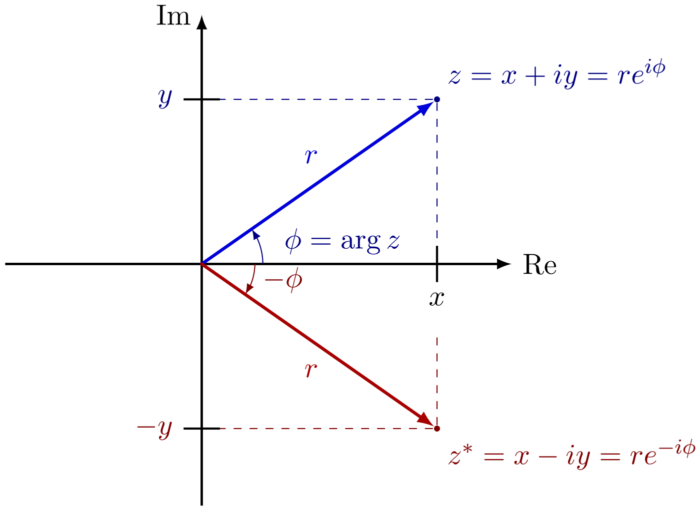

Figure 2: Die Gaußsche Zahlenebene und Polarform einer komplexen Zahl, wobei gilt $r = |z| = \sqrt{zz^*}$.

Den **Betrag** bzw. Modul, das **Argument**, und die **polare Form** einer komplexen Zahl z definieren wir als

$$|z| = \quad \mathrm{mod}\, z := \sqrt{zz^*} = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \tag{1.37}$$

$$\arg z := \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \tag{1.38}$$

$$z = x + iy = |z|\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = |z|\Big(\cos\phi + i\sin\phi\Big)\,. \tag{1.39}$$

Die reellen Zahlen können wir geometrisch durch eine Zahlengerade veranschaulichen. Entsprechend kann man die komplexen Zahlen geometrisch interpretieren, wenn man das Zahlenpaar $(x, y) = (\mathrm{Re}\, z, \mathrm{Im}\, z)$ als Komponenten bzgl. eines kartesischen Koordinatensystems in der Euklidischen Ebene interpretiert. Dies ist die **Gaußsche Zahlenebene**. Es ist klar, dass $|z|$ geometrisch die Länge des entsprechenden z repräsentierenden Ortsvektors in der Gaußschen Zahlenebene ist (s. Abb. 2).

Offensichtlich ist $(z^*)^* = z$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Weiter ist $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, denn die komplexen Zahlen mit verschwindendem Imaginärteil sind umkehrbar eindeutig auf $\mathbb{R}$ abbildbar. Offenbar ist $z \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $\mathrm{Im}\, z = 0$, was zugleich $z^* = z$ impliziert. Wir haben weiter

$$\mathrm{Re}\, z = \frac{z + z^*}{2}, \quad \mathrm{Im}\, z = \frac{z - z^*}{2i}. \tag{1.40}$$

Die komplexe Konjugation ist auch additiv und multiplikativ

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*, \quad (z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*\,. \tag{1.41}$$

Weil die beiden Verknüpfungen von Addition und Multiplikation zur Verfügung stehen, können wir die beiden kombinieren und **komplexe Polynome** definieren:

$$P_m(z) := \sum_{k=0}^{m} a_k z^k = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m\,. \tag{1.42}$$

Die Koeffizienten könnten reell ($a_k \in \mathbb{R}$) oder komplex ($a_k \in \mathbb{C}$) sein. Wiederum existieren

- Komposition $[(g \circ f)(z) := g(f(z))]$
- Umkehrfunktion $[f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathbb{1}]$.
- Unendliche Reihen $[P_n(z)$ mit $n \to \infty]$, die zu weiteren Funktionen führen.

Wir beginnen mit der Exponentialfunktion und übernehmen die entsprechende Potenzreihe einfach von der entsprechenden reellen Funktion als Definition für die Exponentialfunktion (1.11) im Komplexen

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k\,, \quad e := \exp(1)\,. \tag{1.43}$$

Auch sie konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

Weiter benötigen wir noch die trigonometrischen Funktionen. Auch ihre Potenzreihen übernehmen wir aus dem Reellen, d.h. mit (1.20) bzw. (1.21) folgt (*nachrechnen!*)

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}\,, \tag{1.44}$$

$$\sin z = x - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\,. \tag{1.45}$$

Berechnen wir nun

$$\begin{aligned} \exp(iz) &= 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \ldots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \cdots\right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}\right) + i\left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\right). \end{aligned} \tag{1.46}$$

Dabei haben wir die Reihe so umgeordnet, dass wir in einem Term den Faktor i ausklammern konnten. Das ist bei Potenzreihen erlaubt, da sie in jedem kompakten Bereich der komplexen Ebene absolut konvergiert.

Vergleichen wir nun die Reihen in den Klammern der Gl. (1.46) mit 1.44 und (1.45), erhält man die **Eulersche Formel** (1707–1783)

$$\exp(iz) = \cos z + i \sin z. \tag{1.47}$$

Für die Polardarstellung der komplexen Zahl (1.39) folgt damit

$$z = |z| \exp(i\varphi). \tag{1.48}$$

Für die Exponentialfunktion gilt auch im Komplexen die Formel

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2)\,. \tag{1.49}$$

Beweis. Dies kann man mit Hilfe der Reihe (1.43), dem Binomischen Lehrsatz und dem Cauchy Produkt beweisen,

$$\begin{aligned}\exp(z_1 + z_2) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{z_1^k z_2^{n-k}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k z_2^{n-k}}{k!(n-k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z_1)^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_2)^n}{n!} = \exp(z_1)\exp(z_2)\,.\end{aligned}$$

□

Diese Eigenschaft erleichtert die Rechnung mit trigonometrischen Funktionen erheblich. Es folgt z.B. genau wie (1.47) auch die Gleichung

$$\exp(-iz) = \cos z - i \sin z. \tag{1.50}$$

Wir haben damit

$$\cos z = \frac{1}{2}[\exp(iz) + \exp(-iz)], \quad \sin z = \frac{1}{2i}[\exp(iz) - \exp(-iz)]. \tag{1.51}$$

Dies erinnert an die Definition der Hyperbelfunktionen

$$\cosh z = \frac{1}{2}[\exp(z) + \exp(-z)], \quad \sinh z = \frac{1}{2}[\exp(z) - \exp(-z)]. \tag{1.52}$$

Vergleicht man (1.51) mit diesen Definitionen folgt sofort, dass

$$\cosh(iz) = \cos z, \quad \sinh(iz) = i \sin z \tag{1.53}$$

gilt. Die trigonometrischen und Hyperbelfunktionen sind im Komplexen also bis auf Konstanten im wesentlichen die gleichen Funktionen, und beide sind durch die Exponentialfunktion definiert.

Genauso folgt aus (1.51)

$$\cos(iz) = \cosh z, \quad \sin(iz) = i \sinh z. \tag{1.54}$$

Als Anwendungsbeispiel leiten wir noch die Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen für reelle Argumente aus (1.49) ab. Es gilt nämlich einerseits wegen der Eulerschen Formel (1.47) und (1.48)

$$\exp[i(\varphi_1+\varphi_2)] = \cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\,, \tag{1.55}$$

$$\begin{aligned}\exp[i(\varphi_1+\varphi_2)] &= \exp(i\varphi_1)\exp(i\varphi_2) = (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\\ &= (\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\,.\end{aligned} \tag{1.56}$$

Vergleicht man nun Real- und Imaginärteil von (1.55) und (1.56), folgen die bekannten Additionstheoreme

$$\cos(\varphi_1+\varphi_2) = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2\,, \tag{1.57}$$

$$\sin(\varphi_1+\varphi_2) = \sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2\,. \tag{1.58}$$

Es ist leicht zu zeigen, dass diese Additionstheoreme auch allgemein für beliebige komplexe Argumente gelten (*Übung*).

2. Analysis in einer Dimension

2.1. Grenzwert und Stetigkeit

Referenzen: [2] A.5, [3] Abschn. 1.5.

Definition 2.1. *$f(x)$ hat bei $x = x_0$ den Grenzwert f_0 wenn gilt, dass*

$$\forall\,\epsilon > 0\;\exists\,\delta_\epsilon > 0 \quad : \quad |f(x) - f_0| < \epsilon \quad \textit{falls} \quad |x - x_0| < \delta_\epsilon\,. \tag{2.1}$$

Bezeichnung: $f(x) \to f_0$ für $x \to x_0$, oder $\lim_{x\to x_0} f(x) = f_0$.

Der Grenzwert kann auch von links oder rechts genommen werden, z.B.: $f(x) \to f_0$ für $x \to x_0^+$, oder $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f_0$ bedeutet, dass nur $0 < x - x_0 < \delta_\epsilon$ betrachtet werden. Für **unendliche** Grenzwerte folgt dann $\lim_{x\to\infty} f(x) = f_0$, so dass $\forall\,\epsilon > 0\;\exists\,\delta_\epsilon > 0 \,:\, |f(x) - f_0| < \epsilon$ falls $x > \delta_\epsilon$.

Beispiel 4. *Die Funktion $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ scheint an $x_0 = 0$ nicht definiert und $f(0) = \frac{0}{0}$. Aus der Definition aus Gl. (1.20) wissen wir aber*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \ldots\,, \tag{2.2}$$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 \underbrace{- \frac{x^2}{6} + \ldots}_{\to 0 \textit{ für } x\to 0^+}\,. \tag{2.3}$$

Daher gilt $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$.

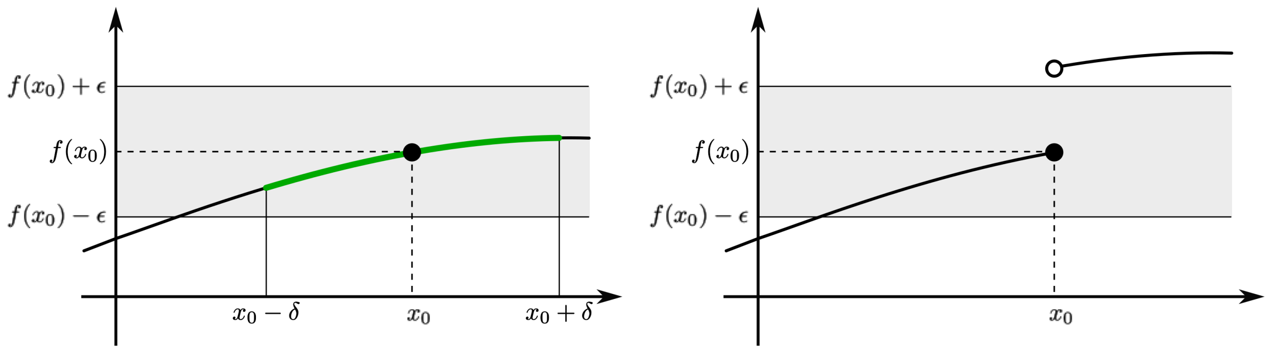

Figure 3: Beispiel einer stetigen (links) und unstetigen Funktionen (rechts), nach Definition 2.2 (cf. [4]).

Weiters können wir folgende Grenzwertsätze (ohne Beweis) benutzen:

$$\lim_{x\to x_0} cf(x) = c \lim_{x\to x_0} f(x)\,, \tag{2.4}$$

$$\lim_{x\to x_0} \Big[f(x)+g(x)\Big] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)\,, \tag{2.5}$$

$$\lim_{x\to x_0} \Big[f(x)\times g(x)\Big] = \Big[\lim_{x\to x_0} f(x)\Big] \times \Big[\lim_{x\to x_0} g(x)\Big]\,, \tag{2.6}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}\,, \quad \text{falls} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0\,. \tag{2.7}$$

In den Beispielen in Abb. 1 sind alle Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Ausserdem weist ihr Graph keinerlei Unterbrechungen oder ähnliche Anomalien auf. Die mathematische Voraussetzung dafür ist, dass eine Funktion stetig ist. Anschaulich bedeutet die **Stetigkeit einer Funktion** an der Stelle x_0, dass sich der Funktionswert um x_0 nur wenigeändert, wenn man sie in einer kleinen Umgebung um x_0 betrachtet. Formal lässt sich dies so definieren:

Definition 2.2. *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heisst stetig an der Stelle $x_0 \in D$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein zugehöriges $\delta_\epsilon > 0$ gibt (δ_ϵ hängt von ϵ und x_0 ab!), sodass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta_\epsilon$ stets $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ gilt.*

Mit Def. 2.1 ist eine Funktion dann stetig an x_0, wenn ihr Grenzwert dort existiert

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\,. \tag{2.8}$$

Wenn der Grenzwert nicht existiert, oder existiert aber nicht gegen $f(x_0)$ geht, dann ist die Funktion **unstetig** an x_0.

Informelle Definition: Wird ein beliebiges ϵ-Intervall um $f(x_0)$ vorgegeben, dann existiert dazu ein δ_ϵ-Intervall um x_0, welches zur Gänze in das ϵ-Intervall um $f(x_0)$ abgebildet wird.
In anderen Worten: Die Funktionswerte für hinreichend kleine Umgebungen um x_0 weichen beliebig

wenig von dem Funktionswert $f(x_0)$ bei x_0 ab. Oder man die Funktion ohne Absetzen des Stifts skizzieren kann.

Beispiel 5.

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\,, & x \leq 1\,, \\ +\frac{1}{2}\,, & x > 1\,. \end{cases} \tag{2.9}$$

Die Funktion ist stetig von links aber nicht von rechts: $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\frac{1}{2}$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\frac{1}{2}$, $f(1) = -\frac{1}{2}$.

Beispiel 6. *Die Funktion* $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ *ist an der Stelle* $x_0 = 2$ *nicht definiert. Offenbar gilt aber* $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 4$*. Dies ist auch ersichtlich da* $f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = (x+2)$*. Obwohl die Funktion nicht definiert ist an* x_0*, können wir damit an der Stelle* $x_0 = 2$ *den Funktionswert* $f(2) = 4$ *setzen und erhalten eine in* $x_0 = 2$ *stetige Funktion.*

Satz 2.3. *Sind zwei Funktionen* f *und* g *stetig in* x_0*, dann sind auch deren folgende Verknüpfungen stetig:*

(i) cf, $f+g$, $f\times g$, $\frac{f}{g}$ *vorausgesetzt* $g(x_0) \neq 0$,

(ii) die Komposition $g \circ f$,

(iii) die Umkehrfunktion f^{-1}.

Beweis. Für zwei in x_0 stetige Funktionen f und g ist auch die Funktion $f+g$ stetig. Voraussetzungsgemäss gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein

$$\begin{aligned} &\delta_1 > 0\,, \quad \text{so dass } |f(x) - f(x_0)| < \epsilon/2 && \forall x \in D \quad \text{mit} \quad |x - x_0| < \delta_1\,, \\ &\delta_2 > 0\,, \quad \text{so dass } |g(x) - g(x_0)| < \epsilon/2 && \forall x \in D \quad \text{mit} \quad |x - x_0| < \delta_2\,. \end{aligned}$$

Setzen wir nun $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, dann gilt wegen der Dreiecksungleichung[2] für alle $|x - x_0| < \delta$

$$\begin{aligned} |[f(x)+g(x)] - [f(x_0)+g(x_0)]| &= |[f(x)-f(x_0)] + [g(x)-g(x_0)]| \\ &\leq |f(x)-f(x_0)| + |g(x)-g(x_0)| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\,, \end{aligned} \tag{2.10}$$

d.h. zu jedem $\epsilon > 0$ können wir ein $\delta > 0$ finden, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ stets

$$|[f(x)+g(x)] - [f(x_0)+g(x_0)]| < \epsilon \tag{2.11}$$

gilt. Das bedeutet aber gemäss der Definition, dass die Funktion $f+g$ stetig ist. □

[2] Dreiecksungleichung (ohne Beweis): $|a+b| \leq |a| + |b|$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

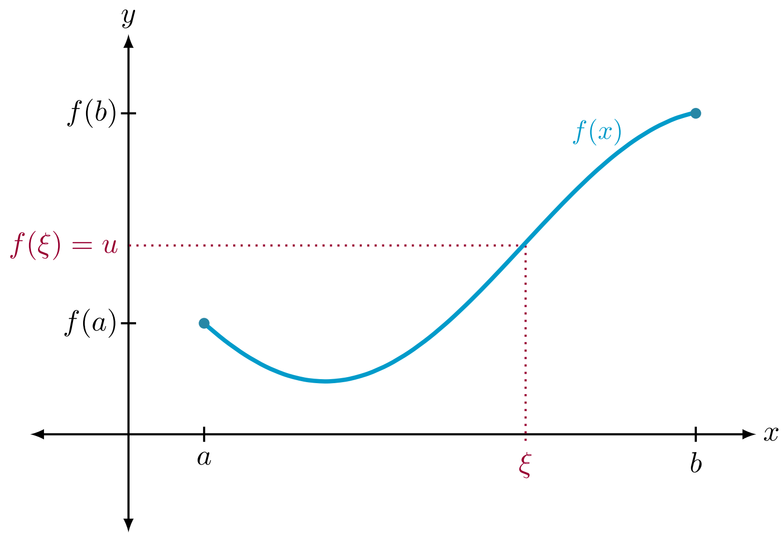

Figure 4: Zwischenwertsatz 2.5 am Beispiel einer Funktion [4].

Offensichtlich sind eine konstante Funktion $f(x) = A = \text{const}$ sowie die Funktion $f(x) = x$ in allen $x \in \mathbb{R}$ definiert und stetig. Aus den oben angegebenen Sätzen folgt dann, dass auch jedes Polynom

$$f(x) = P_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m = \sum_{n=0}^{m} a_n x^n \,, \tag{2.12}$$

stetig ist.

Satz 2.4 (Nullstellensatz von Bolzano (1781–1848)). *Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig auf dem Intervall $[a, b]$ und es gelte $f(a) \cdot f(b) < 0$ (d.h. $f(a)$ und $f(b)$ haben unterschiedliches Vorzeichen). Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = 0$, i.e. f hat in (a, b) mindestens eine Nullstelle.*

Beweis. oBdA sei $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Wir setzen $I_0 = [a, b]$. Durch Halbierung von I_0 erhalten wir zwei Teilintervalle $[a, \frac{a+b}{2}]$, $[\frac{a+b}{2}, b]$, von denen bei einem, etwa $I_1 = [a_1, b_1]$, gilt, dass $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$. Durch fortwährende Intervallhalbierung erhalten wir eine Folge $I_n = [a_n, b_n]$ von Intervallen mit $I_{n+1} \subseteq I_n$, $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$ und $|b_n - a_n| = \frac{b-a}{2^n}$. Dies ist eine Nullfolge: $\lim_{n\to\infty} |b_n - a_n| = 0$.

Die Folge (a_n) ist monoton wachsend und nach oben beschränkt, (durch b), die Folge (b_n) ist monoton fallend und nach unten beschränkt, (durch a). Also sind beide Folgen konvergent. Da aber $\lim_{n\to\infty} |b_n - a_n| = 0$, müssen beide Grenzwerte gleich sein, i.e. $\exists\, \xi \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi$. Da beide Folgen gegen denselben Grenzwert ξ konvergieren und da weiter f voraussetzungsgemäss im ganzen Intervall $[a, b]$ stetig ist, muss folglich $f(\xi) = 0$ sein. □

Satz 2.5 (Zwischenwertsatz). *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Weiter sei $f(a) < f(b)$. Dann gibt es zu jedem $u \in [f(a), f(b)]$ ein $\xi \in [a, b]$, so dass $f(\xi) = u$ i.e. $f(a) < u < f(b)$ ist (entsprechendes gilt auch falls $f(a) > f(b)$ ist). Das heisst jeder Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ wird angenommen.*

Beweis. Dies ist ein Sonderfall des Nullstellensatzes. Sei $g(x) = f(x) - u$. Dann ist g stetig auf $[a, b]$ mit $g(a) < 0$ und $g(b) > 0$. Nach dem Nullstellensatz existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $g(\xi) = 0$, i.e. $f(\xi) = u$. □

Satz 2.6 (Satz vom Maximum und Minimum). *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f an wenigstens einer Stelle $\xi \in [a, b]$ ein Maximum (Minimum) an. Dabei ist das Maximum durch $\sup_{x\in[a,b]} f(x)$ (das Minimum durch $\inf_{x\in[a,b]} f(x)$) definiert.*

Beweis. Wir beweisen den Satz für das Maximum. Der Beweis für das Minimum folgt analog. Da die Funktion im gesamten (abgeschlossenen!) Intervall definiert ist, ist ihr Bildbereich $f([a, b])$ eine beschränkte Menge und besitzt demnach ein Supremum, d.h. es gilt $f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$ mit $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Dadurch existiert dann eine Zahlenfolge $x_n \in [a, b]$, so dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = M$.

2.2. Differentialrechnung für Funktionen einer reellen Veränderlichen

In der Physik wollen wir untersuchen, wie sich Funktionen in kleinen Umgebungen eines beliebigen Punktes im Definitionsbereich der Funktion ändern. Die gesuchte Funktion $f'(x)$ beschreibt dann kleine Änderungen um $\Delta x = x - x_0$ für $f(x)$, sodass der mögliche Fehler von zumindest quadratischer Ordnung in Δx ist

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \mathcal{O}((\Delta x)^2)\,. \tag{2.13}$$

Das ist eine lineare Näherung. Indem man $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$ einführt, bedeutet dies

$$\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + \mathcal{O}((\Delta x)^2)\,, \tag{2.14}$$

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} - f'(x) = \mathcal{O}((\Delta x))\,. \tag{2.15}$$

Der Bruch $\Delta f/\Delta x$ ist der **Differenzenquotient**. Im Limes $\Delta x \to 0$ verschwindet die rechte Seite von Gl. (2.15), da $\lim_{\Delta x\to 0} \Delta x = 0$.

Definition 2.7. *Die* **Ableitung** *der Funktion f an der Stelle x_0 ist dann definiert als*

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{(x + \Delta x) - x} = f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x_0)\,, \tag{2.16}$$

vorausgesetzt, dieser Grenzwert existiert. Der Bruch $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ ist der **Differentialquotient**. *In dem Fall heisst die Funktion f* **differenzierbar** *an der Stelle x_0. Sie heisst differenzierbar in einem Bereich $D' \subseteq D$ falls $f'(x)$ in jedem Punkt $x \in D'$ differenzierbar ist.*

Wichtige Beispiele sind:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = c = \text{const}$. Dann gilt für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \equiv 0 \tag{2.17}$$

  Die konstante Funktion ist also in ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und ihre Ableitung verschwindet.

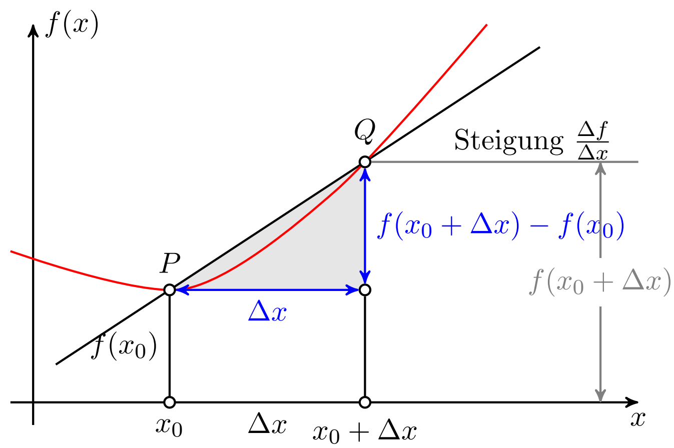

Figure 5: Graphische Darstellung der Ableitung.

- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=x$. Dann folgt

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}1=1\,. \tag{2.18}$$

- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=x^2$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x+x_0)=2x_0. \tag{2.19}$$

- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=ax^n$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{ax^n-ax_0^n}{x-x_0}=a\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)\overbrace{\left(x^{n-1}+x^{n-2}x_0+\cdots+x_0^{n-1}\right)}^{n-\text{Terme}}}{x-x_0}=anx_0^{n-1}\,. \tag{2.20}$$

- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=\sum_{n=0}^{m}a_nx^n$. Die Ableitung eines Polynoms ist wieder ein Polynom und somit ist ein Polynom beliebig oft differenzierbar (mindestens zur Ordnung m):

$$f'(x_0)=\sum_{n=0}^{m}na_nx_0^{n-1}\,. \tag{2.21}$$

Die Ableitung besitzt auch eine **geometrische Bedeutung**. Betrachten wir dazu den Graphen einer Funktion $y=f(x)$. Dann bedeutet $[f(x)-f(x_0)]/(x-x_0)$ die Steigung der Sekante durch die Punkte $[x,f(x)]$ und $[x_0,f(x_0)]$. Die Ableitung ergibt, falls sie existiert, entsprechend die Steigung der **Tangente** an die durch den Funktionsgraphen gegebenen Kurve am Punkt $[x_0,f(x_0)]$. In der Physik wird oft auch $\mathrm{d}f/\mathrm{d}t=:\dot f$ für Zeitkoordinaten verwendet.

2.2.1. Ableitungsregeln

Die Ableitung kann immer folgend der Definition bestimmt werden, aber in der Praxis werden Regeln bestimmt, die einmal bewiesen werden. Dabei nehmen wir an, dass alle beteiligten Funktionen im Punkt x_0 ihres Definitionsbereichs differenzierbar sind.

Summenregel. Die Ableitung ist eine **lineare Operation** ist, d.h. für beliebigen Funktionen f, g, die bei x_0 differenzierbar sind und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(af)(x_0) = af'(x_0)\,, \tag{2.22}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f+g)(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)\,, \tag{2.23}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(af+bg)(x_0) = af'(x_0) + bg'(x_0)\,. \tag{2.24}$$

Beweis. Zum Beweis der allgemeinsten Form, nämlich Gl. (2.24), müssen wir wir den entsprechenden Limes betrachten,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(af+bg)(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{af(x)+bg(x)-[af(x_0)+bg(x_0)]}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0}\left[\frac{af(x)-af(x_0)}{x-x_0} + \frac{bg(x)-bg(x_0)}{x-x_0}\right] \\ &= af'(x_0) + bg'(x_0)\,.\end{aligned} \tag{2.25}$$

Produktregel.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(fg)(x_0) = f'(x_0)\times g(x_0) + f(x_0)\times g'(x_0)\,. \tag{2.26}$$

Beweis. Wir verwenden die Definition der Ableitung (2.16) und addieren im Nenner $0 = g(x_0 + \Delta x)f(x_0) - g(x_0+\Delta x)f(x_0)$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(fg)(x_0) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{[f(x_0+\Delta x_0)-f(x_0)]}{\Delta x} g(x_0+\Delta x) + f(x_0)\frac{[g(x_0+\Delta x)-g(x_0)]}{\Delta x}\right]\,.\end{aligned} \tag{2.27}$$

Nun ist eine Funktion, die in x_0 differenzierbar ist, dort auch stetig, und damit ergibt sich aus (2.27) im Limes $\Delta x \to 0$ die Produktregel (2.26).

Um zu zeigen, dass eine in x_0 **differenzierbare Funktion** f auch **stetig** ist, gehen wir auf die Definition des Limes 2.1 zurück. Da f in x_0 differenzierbar ist muss der Grenzwert $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$

existieren. Demnach gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta_\epsilon > 0$, so dass

$$\Big|\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0)\Big| < \epsilon \quad \text{falls} \quad |\Delta x| < \delta_\epsilon\,. \tag{2.28}$$

Wir können nun diese Ungleichung mit $|\Delta x|$ multiplizieren:

$$|f(x_0+\Delta x) - f(x_0) - \Delta x f'(x_0)| < \epsilon|\Delta x|. \tag{2.29}$$

Für $\Delta x \to 0$ strebt die rechte Seite der Ungleichung sowie $\Delta x f'(x_0)$ unter dem Betrag auf der linken Seite gegen 0. Damit ist aber

$$\lim_{\Delta x\to 0} |f(x_0+\Delta x) - f(x_0)| = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{\Delta x \to x_0} f(x_0+\Delta x) = f(x_0), \tag{2.30}$$

d.h. f ist an der Stelle x_0 stetig (der Grenzwert existiert). □

Kettenregel. Seien f und g Funktionen, wobei g bei x_0 und f bei $g(x_0)$ differenzierbar seien, dann gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(g\circ f)(x_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g[f(x_0)] = g'[f(x_0)]f'(x_0)\,. \tag{2.31}$$

Beweis. Wir verwenden die Definition der Ableitung (2.16) und erweitern mit der Einheit $1 = (f(x_0+\Delta x) - f(x_0))/(f(x_0+\Delta x) - f(x_0))$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(g\circ f)(x_0) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g[f(x_0+\Delta x)] - g[f(x_0)]}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g[f(x_0+\Delta x)] - g[f(x_0)]}{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}\,\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x, y\to 0}\frac{g(y_0+\Delta y)-g(y_0)}{\Delta y}\,\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\,,\end{aligned} \tag{2.32}$$

wo wir $f(x_0) =: y_0$ und $f(x_0+\Delta x) =: y_0 + \Delta y$ definiert haben. Da nach der gerade durchgeführten Überlegung g an der Stelle x_0 stetig ist, folgt daraus für $\Delta x \to 0$ die Kettenregel (2.31).

Quotientenregel. Wenden wir weiter die Produkt- und die Kettenregel auf die Funktion $f/g = f\cdot 1/g$ an, wobei f und g in x_0 differenzierbar und $g(x_0)\neq 0$ sei, erhalten wir die **Quotientenregel**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}. \tag{2.33}$$

Beweis. Wir verwenden hintereinander die Definitionen der Produkt- (2.26) und Kettenregel (2.31)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f(x_0)\frac{1}{g(x_0)}\right) &= \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} + f(x_0)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g^{-1}(x_0)\\ &= \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - f(x_0)\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}\,.\end{aligned} \tag{2.34}$$

wobei mit $g^{-1} = 1/g$ und nicht die Umkehrfunktion gemeint ist.

Differentiation der Umkehrfunktion.

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'[f^{-1}(y)]}\,. \tag{2.35}$$

Dazu betrachten wir noch eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, die in einem Intervall I strikt monoton ist, d.h. es gilt für alle $x_1 < x_2 \in I$ stets $f(x_1) < f(x_2)$ (**strikt monoton wachsende**) oder $f(x_1) > f(x_2)$ (**strikt monoton fallende**) Funktion. Es ist dann klar, dass in diesem Intervall die Zuordnung des Funktionswertes $y = f(x)$ zum Bildpunkt x umkehrbar eindeutig ist, d.h. zu jedem Wert y im Wertebereich der Funktion existiert genau ein $x \in I$ mit $f(x) = y$, d.h. diese Gleichung ist eindeutig nach x auflösbar. Dies ermöglicht die Definition der **Umkehrfunktion** der Funktion f: $f^{-1} : f(I) \to I$. Dabei ist $f(I) = \{y | \text{es gibt ein } x \in I \text{ mit } f(x) = y\}$ die **Wertemenge** der Funktion f. Wir nehmen nun an, die Funktion f sei differenzierbar im Intervall I.

Beweis. Aufgrund der Definition der Umkehrfunktion gilt für alle $x \in I$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}[f(x)] = x\,. \tag{2.36}$$

Da die rechte Seite differenzierbar und auch f differenzierbar ist, ist demnach auch f^{-1} differenzierbar und nach der Kettenregel gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{-1}[f(x)] = (f^{-1})'[f(x)]f'(x) = 1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x\,, \tag{2.37}$$

$$(f^{-1})'[f(x)] = \frac{1}{f'(x)}\,. \tag{2.38}$$

Mit Hilfe dieser Formel können wir die Ableitung der Umkehrfunktionen monotoner Funktionen finden, wenn wir die Ableitung der Funktion selbst kennen. Das erkennt man einfacher, indem man $y = f(x)$ und $x = f^{-1}(y)$ schreibt. Dann ergibt Gl. (2.38) wiederum die zu zeigenden Gl. (2.35).

Beispiel 7. *Betrachten wir als Beispiel $f(x) = x^2$. Setzen wir dann $y = f(x) = x^2$, folgt $x = \sqrt{y}$ (für $y > 0$). Mit Gl. (2.35) folgt daraus*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\sqrt{y} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}. \tag{2.39}$$

Nennen wir jetzt y wieder x, folgt die Ableitungsformel für die Wurzelfunktion

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x} = \sqrt{x}' = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \tag{2.40}$$

Beispiel 8. *Differentiation von trigonometrischen Funktionen. Dazu verwenden wir die Definition der Ableitung* (2.16)

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin x\cos\Delta x+\cos x\sin\Delta x-\sin x}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin x(\cos\Delta x-1)+\cos x\sin\Delta x}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\sin x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\cos x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\\
&= (\sin x)\times(0)+(\cos x)\times(1)=\cos x\,,
\end{aligned}
\tag{2.41}
$$

wobei wir im zweiten Schritt das trigonometrische Additionstheorem (1.58) *verwenden.*

Dasselbe können wir auch über die Reihendarstellung aus Gl. (1.45) *und der individuellen Differentiation der Polynome zeigen,*

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k+1)\frac{z^{2k}}{(2k+1)!}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!}=\cos x\,.
\end{aligned}
\tag{2.42}
$$

was wiederum Gl. (1.44) *entspricht.*

Aus den obigen Regeln und den Definitionen der entsprechenden Funktionen, erstellen wir folgende Ableitungsliste:

$$
\begin{array}{lll}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}c=0 & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh x=\cosh x & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x=\cos x\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x=e^x & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh x=\sinh x & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x=-\sin x\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|x|=\frac{1}{x} & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tanh x=1-\tanh^2 x=\frac{1}{\cosh^2 x} & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x=1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^\mu=\mu x^{\mu-1} & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{arsinh}x=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arcsin x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{f(x)}=f'(x)e^{f(x)} & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{arcosh}x=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arccos x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|f(x)|=\frac{f'(x)}{f(x)} & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{artanh}x=\frac{1}{1-x^2} & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan x=\frac{1}{1+x^2}
\end{array}
\tag{2.43}
$$

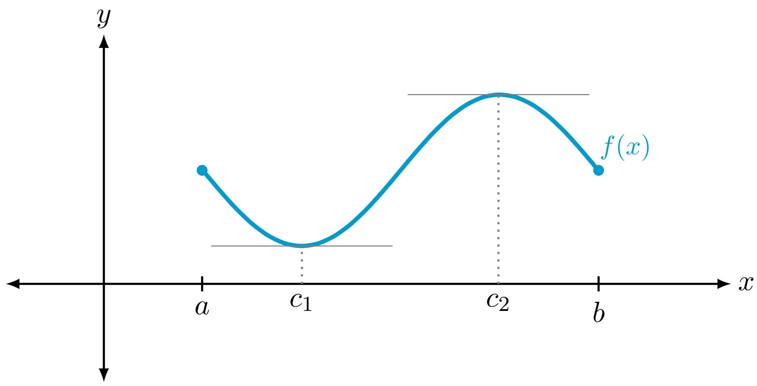

Figure 6: Graphische Darstellung des Sates von Rolle mit zwei Extremstellen $f(c_1) = f(c_2) = 0$.

2.3. Hauptsätze der Differentialrechnung

Referenzen: [1] Abschn. (4.1), [2] Abschn. A.6.3.
Globale Eigenschaften von differenzierbaren Funktionen können oftmals durch *lokale* Eigenschaften, wie der Ableitung, beschränkt werden. Die folgenden Sätze sind die Grundlage zur Minimierung, Maximierung und Kurvendiskussion von Funktionen.

Satz 2.8 (Satz von Fermat). *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ an $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar. Hat f an der Stelle x_0 ein lokales Maximum oder Minimum, gilt notwendigerweise $f'(x_0) = 0$.*

Beweis. Für ein lokales Maximum beweisen wir dies, indem wir die Folgen (x_n) und (x'_n) betrachten, wobei gilt

$$x_n = x_0 + \frac{1}{n}\,, \qquad x'_n = x_0 - \frac{1}{n}\,. \tag{2.44}$$

Hat f an x_0 ein lokales Maximum, dann gilt

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 + \frac{1}{n}) - f(x_0)}{\frac{1}{n}} \leq 0\,, \\ f'(x_0) &= \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 - \frac{1}{n}) - f(x_0)}{-\frac{1}{n}} \geq 0\,. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Damit ist $f'(x_0) = 0$, da dies für alle $f'(x_0) \neq 0$ einen Widerspruch zur Folge hat. □

Satz 2.9 (Satz von Rolle (Michel Rolle 1652–1719)). *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $x \in (a, b)$ differenzierbar. Gilt dann $f(a) = f(b)$, existiert mindestens eine Stelle $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$; cf. Abb. 6.*

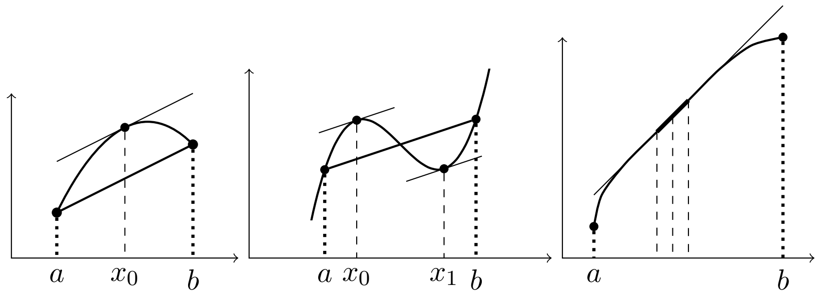

Figure 7: Beispiele für den Satz 2.10 Ein (links), zwei (mitte), unendlich viele Stellen für x_0.

Beweis. Ist $f(x) = \text{const}$, ist die Behauptung trivial, denn dann ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$. Falls dies nicht der Fall ist, gibt es wenigstens eine Stelle x_0 mit $f(x_0) > f(a) = f(b)$ oder $f(x_0) < f(a) = f(b)$. Da die Funktion f in dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ voraussetzungsgemäss stetig ist, nimmt sie nach dem Satz vom Maximum und Minimum (cf. Satz 2.6) irgendwo in diesem Intervall das Infimum $f(\xi) = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ oder das Supremum $f(\xi) = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ ihres Bildbereiches an. Im ersten Fall muss offenbar das Supremum und im zweiten Fall das Infimum an wenigstens einer Stelle ξ im offenen Intervall (a, b) angenommen werden, d.h. es liegt zumindest ein Extremum in (a, b) vor, und nach dem eben bewiesenen Satz 2.8 ist $f'(\xi) = 0$.

Satz 2.10 (1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung). *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann gibt es eine Stelle $\xi \in (a, b)$ mit, cf. Abb. 7*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)\,. \tag{2.46}$$

Dies ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Rolle.

Beweis. Wir wenden den Satz von Rolle 2.9 auf folgende Funktion an:

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \tag{2.47}$$

Diese Funktion erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von Rolle. Da f auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar ist, gilt dies sicher auch für g. Ausserdem ist $g(a) = g(b) = f(a)$. Folglich gibt es eine Stelle $\xi \in (a, b)$ mit $g'(\xi) = 0$. Nun ist aber

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \;\Rightarrow\; 0 = g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,. \tag{2.48}$$

□

Folge 2.10.1. *Man kann folgende Überlegungen anstellen:*

(i) f sei differenzierbar und monoton wachsend auf $]a,b[$. dann ist $f'(x) \geq 0 \; \forall\, x \in]a,b[$. Aus dem ersten Mittelwertsatzes (2.46)

$$\underbrace{f(b) - f(a)}_{>0} = f'(\xi)\,\underbrace{(b-a)}_{>0}\,, \tag{2.49}$$

folgt daher, dass $f'(\xi) > 0$ Gleichsam für monoton fallende Funktionen.

(ii) Es gebe eine Unsicherheit in der Lagebestimmung des Messgeräts, i.e. in der Koordinate Δx. Dies führt zu einem systematischen Fehler im Messwert: $\Delta f = f'(x_0)\Delta x$.

Satz 2.11 (2. Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Cauchy 1789–1857)). *Seien die Funktionen $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann existiert mindestens eine Stelle $\xi \in (a,b)$ mit*

$$g'(\xi)[f(b) - f(a)] = f'(\xi)[g(b) - g(a)]\,. \tag{2.50}$$

Ist weiterhin $g'(x) \neq 0$ auf (a,b), so ist $g'(\xi) \neq 0$ und $g(b) \neq g(a)$, und es folgt

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\,. \tag{2.51}$$

Beweis. Wir wenden den Satz von Rolle 2.9 auf folgende Funktion an:

$$\begin{aligned}
\zeta(x) &= g(x)[f(b) - f(a)] - f(x)[g(b) - g(a)]\,,\\
\zeta(b) &= g(b)[f(b) - f(a)] - f(b)[g(b) - g(a)] = -g(b)f(a) + g(a)f(b)\,,\\
\zeta(a) &= g(a)[f(b) - f(a)] - f(a)[g(b) - g(a)] = +g(a)f(b) - g(b)f(a) = \zeta(b)\,,\\
\Longrightarrow\; \zeta'(\xi) &= g'(x)[f(b) - f(a)] - f'(x)[g(b) - g(a)] = 0.
\end{aligned} \tag{2.52}$$

□

Satz 2.12 (Regel von de l'Hospital (Marquis de l'Hospital 1661–1704)). *Seien die Funktionen f und g (geeignet) differenzierbar auf und gelte $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ mit $\lim_{x\to a} g'(x) \neq 0$. Dann folgt aus $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ oder ∞, die Aussage*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l\,. \tag{2.53}$$

Beweis. Laut erweitertem Mittelwertsatz 2.11 mit $f(a) = g(a) = 0$ gilt:

$$\frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\,, \quad \text{mit } a < \xi < b\,. \tag{2.54}$$

Jetzt betrachtet man $b \to a^+$, was wiederum $\xi \to a^+$ inkludiert.

Die Regel von de l'Hospital erleichtert in vielen Fällen die Bestimmung eines Grenzwertes. Hat man nach einmaliger Anwendung wiederum einen unbestimmten Ausdruck, kann der Satz wiederum auf die Funktionen f'und g' angewendet werden, sofern die entsprechenden Voraussetzungen vorliegen.

- Grenzwerte der Form $(\frac{\infty}{\infty})$ oder $(0 \times \infty)$ können genommen werden, weil sie in die Form $(\frac{0}{0})$ übergeführt werden können:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} \overset{(2.53)}{=} \lim_{x\to a} \frac{\frac{-g'(x)}{g^2(x)}}{\frac{-f'(x)}{f^2(x)}} = \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \frac{f^2(x)}{g^2(x)}\,,$$
$$1 = \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \frac{f(x)}{g(x)} \Leftrightarrow (2.53). \tag{2.55}$$

- Die Aussage gilt auch, falls $a = \pm\infty$ ist. Wir setzen $x = \frac{1}{y}$ und erhalten

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{f(\frac{1}{y})}{g(\frac{1}{y})} \overset{(2.53)}{=} \lim_{y\to 0^+} \frac{f'(\frac{1}{y})(-y^2)}{g'(\frac{1}{y})(-y^2)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{f'(\frac{1}{y})}{g'(\frac{1}{y})} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,. \tag{2.56}$$

- Ausdrücke der Form $f(x)^{g(x)} = (1^\infty), (0^0), (\infty^0)$ können durch $\lim f(x)^{g(x)} = \lim e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim g(x)\ln f(x)}$ auf zuvor diskutierte Fülle zurückgeführt werden.

- Ausdrücke der Form $f(x) - g(x) = (\infty - \infty)$ mußen zuerst in eine der zuvor erwähnten Formen gebracht werden, um damit weiter arbeiten zu können.

Beispiel 9. *Grenzwerte der Form $(\frac{0}{0})$; cf. Bsp. 4:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1\,, \tag{2.57}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1\,. \tag{2.58}$$

Beispiel 10. *Der Logarithmus wächst bei $x \to 0$ langsamer als jede Potenz für $n > 0$:*

$$\underbrace{\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x}_{(0\times\infty)} = \underbrace{\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-n}}}_{(\frac{\infty}{\infty})} \overset{(2.53)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-nx^{-n-1}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^n}{n} = 0. \tag{2.59}$$

Beispiel 11. *Die Exponentialfunktion wächst bei $x \to \infty$ schneller als jede Potenz:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \cdots = \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{e^x} = 0. \tag{2.60}$$

2.4. Weitere Begriffe der Differentialrechnung

Referenzen: [1] Abschn. (4.2–3),
Falls eine Funktion, $y(x)$, als Lösung der Gleichung $F(x, y) = \text{const.}$ definiert wird, nennt man sie eine *implizite Funktion.* Die explizite Lösung $y(x)$ ist eine *explizite Funktion.*

Partielle Ableitung. Funktioniert gleicht der "Ableitung nach einem Parameter", ist aber symmetrisch mit Bezug auf alle Variablen, die als Koordinaten betrachtet werden:

$$\frac{\partial f(x,a)}{\partial x} := \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{a=\text{const.}}, \tag{2.61}$$

$$\frac{\partial f(x,a)}{\partial a} := \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}a}\right|_{x=\text{const.}}. \tag{2.62}$$

Beispiel 12.

$$f(x) = ax^2\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 2ax\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial a} = x^2\,. \tag{2.63}$$

Implizite Differentiation.

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} \Delta F = F(x_0+\Delta x, y(x_0+\Delta x)) - F(x_0, y(x_0)) \\ 0 &= \frac{F(x_0+\Delta x, y(x_0+\Delta x)) - F(x_0, y(x_0+\Delta x))}{\Delta x} + \frac{F(x_0, y(x_0+\Delta x)) - F(x_0, y(x_0))}{\Delta x} \\ &\overset{\Delta x \to 0}{=} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\,, \end{aligned} \tag{2.64}$$

wo wir im letzten Schritt die Kettenregel 2.31 verwendet haben. Daraus folgt, dass

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}\,, \qquad \text{falls } \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0\,. \tag{2.65}$$

Beispiel 13.

$$F(x,y) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}\,, \qquad y'(x) = -\frac{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}}{\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{2.66}$$

Beispiel 14.

$$c = \frac{1}{2}mv^2\,, \qquad v = \sqrt{\frac{2c}{m}}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}m} = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2c}}{m^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2}\frac{v}{m}\,, \tag{2.67}$$

$$F(v,m) = \frac{1}{2}mv^2\,, \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}m} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial m}}{\frac{\partial F}{\partial v}} = -\frac{\frac{1}{2}v^2}{mv} = -\frac{1}{2}\frac{v}{m}\,. \tag{2.68}$$

Höhere Ableitungen.

$$(f')' =: f'' =: f^{(2)}\,, \qquad f^{(n)} := (f^{(n-1)})'\,, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial a}\,, \qquad \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial a^n}\,, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial x}\,. \tag{2.69}$$

2.5. Taylor Entwicklung

Referenzen: [1] Abschn. (1.2), [2] Abschn. A.7.6.

Die Kenntnis von f' liefert gewisse Rückschlüsse auf die Funktion f selbst, z.B. Monotonie, mögliche lokale Extrema. Die Kenntnis von f'' liefert darüberhinaus eine Information, ob dieses Wachsen bzw. Fallen von f' zunimmt oder abnimmt. Dies führt zur Überlegung, ob bei Kenntnis aller Ableitungen an einer Stelle x_0 die Funktion global oder zumindest auf einem Intervall rekonstruierbar ist.

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit offenem Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Funktion, für die $f^{(n)}$ in einem abgeschlossenen Intervall $I \subset D$ stetig und daher mindestens $(n+1)$-mal ($n \in \{0, \dots, n\}$) stetig differenzierbar sei. Sei $a \in D$. Wir suchen dann eine Näherung von f durch ein **Polynom** n-ten Grades für Argumente "in der Nähe" von a. Sei $x \in I$. Dann gibt es Koeffizienten $c_k \in \mathbb{R}$, so dass

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k + R_n(x,a) \,. \tag{2.70}$$

Der erste Term ist das "Taylor Polynom" und der zweite Term das "Lagrange-Restglied", für das gilt $R_n(x,a) = \mathcal{O}[(x-a)^{n+1}]$ und daher

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_n(x,a)}{(x-a)^{n+1}} = \text{const.} \tag{2.71}$$

Um die Koeffizienten c_k in (2.70) zu bestimmen, leiten wir diese Gleichung k-mal ($k \in \{0, 1, \dots, n\}$) ab und setzen danach $x = a$:

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} f(x)\Big|_{x=a} =: f^{(k)}(a) = k! c_k \,, \tag{2.72}$$

denn wegen (2.71) verschwindet die k-te Ableitung des Restglieds für $x = a$. Damit wird

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x,a). \tag{2.73}$$

Dies ist die **Taylorsche Formel**:

$$T_n(x,a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad \text{heisst Tyalorpolynom } n\text{-ter Ordnung}\,, \tag{2.74}$$

$$R_n(x,a) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad \text{heisst Restglied nach Lagrange}\,. \tag{2.75}$$

Beweis. ObdA sei $x > a$, und x fest. Betrachte die Hilfsfunktion und deren Ableitung an ξ

$$g(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k - m\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\,, \tag{2.76}$$

$$\begin{aligned} g'(\xi) &= 0 - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(\xi)}{(k-1)!}(x-\xi)^{k-1} + m\frac{(x-\xi)^n}{n!} \\ &= -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k + m\frac{(x-\xi)^n}{n!} \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + m\frac{(x-\xi)^n}{n!}\,, \end{aligned} \tag{2.77}$$

mit $t \in [a, x]$ wobei $m = m(x, a)$ so gewählt wird, dass $g(a) = 0$. Nachdem auch $g(x) = 0$ ist, sind die Voraussetzung des Satzes von Rolle 2.9 erfüllt, daher $\exists\, \xi \in (a, x)$ mit $g'(\xi) = 0$. Sodass aus (2.77) folgt $m = f^{(n+1)}(\xi)$, das nun dem Lagrangeschen Restglied entspricht. Setzt man nun in $g(t)$ für $t = a$, so erhalten wir die Taylor-Formel. □

Falls nun f im Intervall (a, x) bzw. (x, a) sogar beliebig oft stetig differenzierbar ist und ein $S > 0$ existiert, so dass $|f^{(n+1)}(\xi)| < S$ für alle $\xi \in (a, x)$ bzw. $\xi \in (x, a)$ ist, folgt aus (2.75)[3]

$$|R_n(x, a)| < S\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty\,, \tag{2.78}$$

dass das Restglied verschwindet. In diesem Fall besitzt f die **Taylor-Reihe**

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-a)^k}{k!}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)^k f(a) = \exp\Big[(x-a)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big] f(a)\,, \tag{2.79}$$

wobei wir im letzten Schritt die Exponentialfunktion des Differentialoperators durch eine formale Reihe schreiben konnten.

[3]Um zu zeigen, dass für beliebige $y > 0$ $\lim_{n\to\infty} y^n/n! = 0$ gilt, bemerken wir, dass für $n > 2y$ und $N \in \mathbb{N}$ die Abschätzung $0 \le y^{n+N}/(n+N)! \le y^n y^N/((2y)^N n!) = y^n/n!(1/2)^N$ gilt. Der letzte Ausdruck strebt aber für $N \to \infty$ gegen 0 für fixes n.

References

[1] C. B. Lang and N. Pucker, *Mathematische Methoden in der Physik*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 3 ed., 2016.

[2] H. v. Hees, *Mathematische Ergänzungen zur Theoretischen Physik 1*. 2018.

[3] R. Adams and C. Essex, *Calculus: A Complete Course*. Pearson, 10 ed., 2022.

[4] *Analysis Eins*. Serlo Education, 1 ed., 2017.

[5] J. Weidmann, *Linear Operators in Hilbert Space*. Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1980.