# 递归函数

## 递归（Recursion）

在函数中有个理解门槛比较高的概念：**递归函数**（Recursive Functions）—— 那些**在自身内部调用自身的函数**。说起来都比较拗口。

先看一个例子，我们想要有个能够计算 `n` 的_阶乘_（factorial） `n!` 的函数，`f()`，规则如下：

> - `n! = n × (n-1) × (n-2)... × 1`
> - 即，`n! = n × (n-1)!`
> - 且，`n >= 1`
>
> **注意**：以上是数学表达，不是程序，所以，`=` 在这一小段中是 "*等于*" 的意思，**不是程序语言中的赋值符号**。

于是，计算 `f(n)` 的 Python 程序如下：

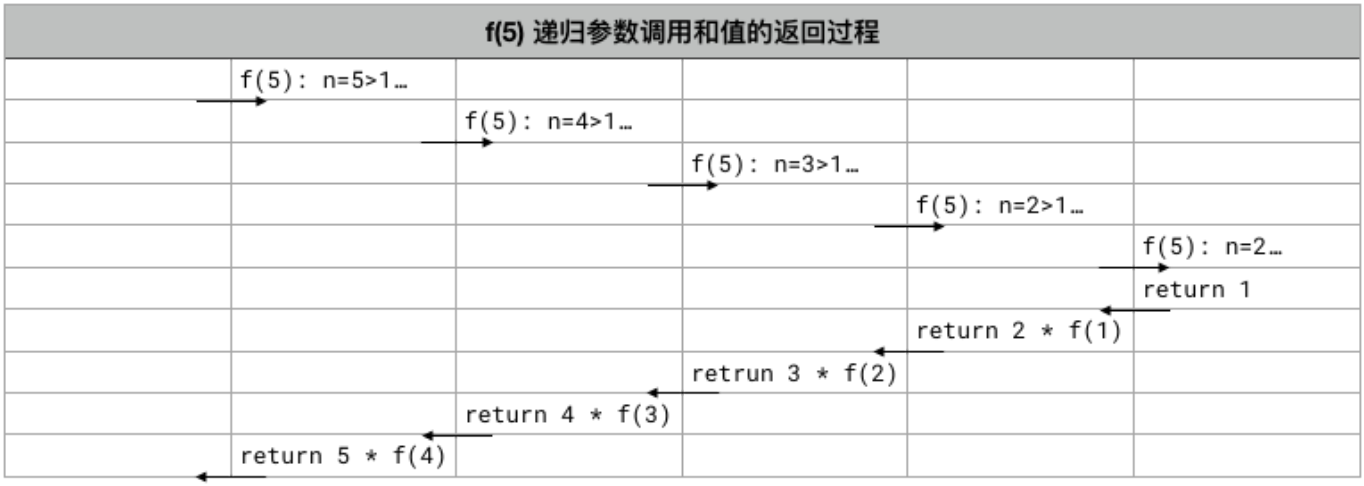
```
def f(n):
    if n == 1:
        return 1
    else:
        return n * f(n-1)

print(f(5))
```

```
120
```

## 递归函数的执行过程

以 factorial(5) 为例，让我们看看程序的流程（注意，图片里的诸如 `n=5>1` 之类的标注，并不是程序语言表达式，只是对读者的说明）：



当 f(5) 被调用之后，函数开始运行……

- 因为 `5 > 1`，所以，在计算 `n * f(n-1)` 的时候要再次调用自己 `f(4)`；所以必须等待 `f(4)` 的值返回；
- 因为 `4 > 1`，所以，在计算 `n * f(n-1)` 的时候要再次调用自己 `f(3)`；所以必须等待 `f(3)` 的值返回；
- 因为 `3 > 1`，所以，在计算 `n * f(n-1)` 的时候要再次调用自己 `f(2)`；所以必须等待 `f(2)` 的值返回；
- 因为 `2 > 1`，所以，在计算 `n * f(n-1)` 的时候要再次调用自己 `f(1)`；所以必须等待 `f(1)` 的值返回；
- 因为 `1 == 1`，所以，这时候不会再次调用 `f()` 了，于是递归结束，开始返回，这次返回的是 `1`；
- 下一步返回的是 `2 * 1`；
- 下一步返回的是 `3 * 2`；
- 下一步返回的是 `4 * 6`；
- 下一步返回的是 `5 * 24` ——至此，外部调用 `f(5)` 的最终返回值是 `120`……

加上一些输出语句之后，能更清楚地看到大概的执行流程：

```
def f(n):
    print('\tn =', n)
    if n == 1:
        print('Returning...')
        print('\tn =', n, 'return:', 1)
        return 1
    else:
        r = n * f(n-1)
        print('\tn =', n, 'return:', r)
        return r

print('Call f(5)...')
print('Get out of f(n), and f(5) =', f(5))
```

```
Call f(5)...
        n = 5
        n = 4
        n = 3
        n = 2
        n = 1
Returning...
        n = 1 return: 1
        n = 2 return: 2
        n = 3 return: 6
        n = 4 return: 24
        n = 5 return: 120
Get out of f(n), and f(5) = 120
```

有点烧脑…… 不过，分为几个层面去逐个突破，你会发现它真的很好玩。

## 递归的终点

递归函数在内部必须有一个能够让自己停止调用自己的方式，否则永远循环下去了……

其实，我们所有人很小就见过递归应用，只不过，那时候不知道那就是递归而已。听过那个无聊的故事罢？

> 山上有座庙，庙里有个和尚，和尚讲故事，说.....
>
> > 山上有座庙，庙里有个和尚，和尚讲故事，说.....
> >
> > > 山上有座庙，庙里有个和尚，和尚讲故事，说.....

写成 Python 程序大概是这样：

```
def a_monk_telling_story():
    print('山上有座庙，庙里有个和尚，和尚讲故事，他说.....')
    return a_monk_telling_story()

a_monk_telling_story()
```

这是个_无限循环_的递归，因为这个函数里_没有设置中止自我调用的条件_。无限循环还有个不好听的名字，叫做 “死循环”。

在著名的电影**盗梦空间**（*2010*）里，从整体结构上来看，“入梦” 也是个 “递归函数”。只不过，这个函数和 a_monk_telling_story() 不一样，它并不是死循环 —— 因为它设定了_中止自我调用的条件_：

> 在电影里，醒过来的条件有两个
>
> > - 一个是在梦里死掉；
> > - 一个是在梦里被 kicked 到.....
>
> 如果这两个条件一直不被满足，那就进入 limbo 状态 —— 其实就跟死循环一样，出不来了.....

为了演示，我把故事情节改变成这样：

> - 入梦，`in_dream()`，是个递归函数；
> - 入梦之后醒过来的条件有两个：
>
> > - 一个是在梦里死掉，`dead is True`；
> > - 一个是在梦里被 kicked，`kicked is True`.....
> >
> > 以上两个条件中任意一个被满足，就苏醒.....

至于为什么会死掉，如何被 kick，我偷懒了一下：管它怎样，管它如何，反正，每个条件被满足的概率是 1/10..... (也只有这样，我才能写出一个简短的，能够运行的 “*盗梦空间程序*”。）

把这个很抽象的故事写成 Python 程序，看看一次入梦之后能睡多少天，大概是这样：

```
import random

def in_dream(day=0, dead=False, kicked=False):
    dead = not random.randrange(0,10) # 1/10 probability to be dead
    kicked = not random.randrange(0,10) # 1/10 probability to be kicked
    day += 1
    print('dead:', dead, 'kicked:', kicked)
```

```
    if dead:
        print((f"I slept {day} days, and was dead to wake up..."))
        return day
    elif kicked:
        print(f"I slept {day} days, and was kicked to wake up...")
        return day

    return in_dream(day)

print('The in_dream() function returns:', in_dream())
```

```
dead: False kicked: False
dead: False kicked: False
dead: False kicked: False
dead: False kicked: False
dead: False kicked: False
dead: False kicked: False
dead: False kicked: False
dead: True kicked: True
I slept 8 days, and was dead to wake up...
The in_dream() function returns: 8
```

如果疑惑为什么 `random.randrange(0,10)` 能表示 1/10 的概率，请返回去重新阅读第一部分中关于布尔值的内容。

另外，在 Python 中，若是需要将某个值于 True 或者 False 进行比较，尤其是在条件语句中，推荐写法是（参见 PEP8）：

```
if condition:
    pass
```

就好像上面代码中的 `if dead:` 一样。

而不是（虽然这么写通常也并不妨碍程序正常运行[1]）：

```
if condition is True:
    pass
```

抑或：

```
if condition == True:
    pass
```

让我们再返回来接着讲递归函数。正常的**递归函数一定有个退出条件**。否则的话，就_无限循环_下去了..... 下面的程序在执行一会儿之后就会告诉你：`RecursionError: maximum recursion depth exceeded`（上面那个“山上庙里讲故事的和尚说”的程序，真要跑起来，也是这样）：

```
def x(n):
    return n * x(n-1)
x(5)
```

```
---------------------------------------------------------------------------
RecursionError                            Traceback (most recent call last)
<ipython-input-3-daa4d33fb39b> in <module>
      1 def x(n):
      2     return n * x(n-1)
----> 3 x(5)

<ipython-input-3-daa4d33fb39b> in x(n)
      1 def x(n):
----> 2     return n * x(n-1)
      3 x(5)
... last 1 frames repeated, from the frame below ...
<ipython-input-3-daa4d33fb39b> in x(n)
      1 def x(n):
----> 2     return n * x(n-1)
      3 x(5)
RecursionError: maximum recursion depth exceeded
```

不用深究上面盗梦空间这个程序的其它细节，不过，通过以上三个递归程序 —— 两个很扯淡的例子，一个正经例子 —— 你已经看到了递归函数的共同特征：

1. 在 `return` 语句中返回的是_自身的调用_（或者是_含有自身的表达式_）
2. 为了避免死循环，_一定要有至少一个条件_下返回的不再是自身调用.....

## 变量的作用域

再回来看计算阶乘的程序 —— 这是正经程序。这次我们把程序名写完整，`factorial()`：

```
def factorial(n):
    if n == 1:
        return 1
    else:
        return n * factorial(n-1)

print(factorial(5))
```

```
120
```

最初的时候，这个函数的执行流程之所以令人迷惑，是因为初学者对_变量_的**作用域**把握得不够充分。

变量根据作用域，可以分为两种：全局变量（Global Variables）和局部变量（Local Variables）。

可以这样简化理解：

> - 在函数内部被赋值而后使用的，都是*局部变量*，它们的作用域是_局部_，无法被函数外的代码调用；
> - 在所有函数之外被赋值而后开始使用的，是*全局变量*，它们的作用域是_全局_，在函数内外都可以被调用。

定义如此，但通常程序员们会严格地遵守一条原则：

> 在函数内部绝对不调用全局变量。即便是必须改变全局变量，也只能通过函数的返回值在函数外改变全局变量。

你也必须遵守同样的原则。而这个原则同样可以在日常的工作生活中“调用”：

> 做事的原则：自己的事自己做，别人的事，最多通过自己的产出让他们自己去搞……

再仔细观察一下以下代码。当一个变量被当做参数传递给一个函数的时候，这个变量本身并不会被函数所改变。比如，`a = 5`，而后，再把 `a` 当作参数传递给 `f(a)` 的时候，这个函数当然应该返回它内部任务完成之后应该传递回来的值，但 `a` 本身不会被改变。

```
def factorial(n):
    if n == 1:
        return 1
    else:
        return n * factorial(n-1)

a = 5
b = factorial(a)   # a 并不会因此改变；
print(a, b)
a = factorial(a)   # 这是你主动为 a 再一次赋值……
print(a, b)
```

```
5 120
120 120
```

理解了这一点之后，再看 `factorial()` 这个递归函数的递归执行过程，你就能明白这个事实：

> 在每一次 factorial(n) 被调用的时候，它都会形成一个作用域，`n` 这个变量作为参数把它的值传递给了函数，*但是*，`n` 这个变量本身并不会被改变。

我们再修改一下上面的代码：

```
def factorial(n):
    if n == 1:
        return 1
    else:
        return n * factorial(n-1)

n = 5               # 这一次，这个变量名称是 n
m = factorial(n)    # n 并不会因此改变；
print(n, m)
```

```
5 120
```

在 `m = factorial(n)` 这一句中，`n` 被 `factorial()` 当做参数调用了，但无论函数内部如何操作，并不会改变变量 `n` 的值。

关键的地方在这里：在函数内部出现的变量 `n`，和函数外部的变量 `n` 不是一回事 —— **它们只是名称恰好相同而已**，函数参数定义的时候，用别的名称也没什么区别：

```
def factorial(x): # 在这个语句块中出现的变量，都是局部变量
    if x == 1:
        return 1
    else:
        return x * factorial(x-1)

n = 5           # 这一次，这个变量名称是 n
m = factorial(n)    # n 并不会因此改变；
print(n, m)
# 这个例子和之前再之前的示例代码有什么区别吗？
# 本质上没区别，就是变量名称换了而已……
```

```
5 120
```

函数开始执行的时候，`x` 的值，是由外部代码（即，函数被调用的那一句）传递进来的。即便函数内部的变量名称与外部的变量名称相同，它们也不是同一个变量。

```
# 观察一下名称相同的一个全局变量和局部变量的不同内存地址
def f(n):
    return id(n)

n = 5
print(id(n))     # 全局变量 n 的内存地址
print(id(f(n))) # 局部变量 n 的内存地址。
```

```
4430918896
4467206608
```

## 递归函数三原则

现在可以小小总结一下了。

一个递归函数，之所以是一个有用、有效的递归函数，因为它要遵守递归三原则。正如，一个机器人之所以是个合格的机器人，因为它遵循阿莫西夫三铁律（Three Laws of Robotics）一样[2]。

> 1. 根据定义，递归函数必须在内部调用自己；
> 2. 必须设定一个退出条件；
> 3. 递归过程中必须能够逐步达到退出条件……

从这个三原则望过去，`factorial()` 是个合格有效的递归函数，满足第一条，满足第二条，尤其还满足第三条中的“*逐步达到*”！

而那个扯淡的盗梦空间递归程序，说实话，不太合格，虽然它满足第一条，也满足第二条，第三条差点蒙混过关：它不是*逐步达到*，而是*不管怎样肯定能达到* —— 这明显是两回事…… 原谅它罢，它的作用就是当例子，一次正面的，一次负面的，作为例子算是功成圆满了！

刚开始的时候，初学者好不容易搞明白递归函数究竟是怎么回事之后，就不由自主地想“我如何才能学会递归式思考呢？” —— 其实吧，这种想法本身可能并不是太正确或者准确。

准确地讲，递归是一种解决问题的方式。当我们需要解决的问题，可以被逐步拆分成很多越来越小的模块，然后每个小模块还都能用同一种算法处理的时候，用递归函数最简洁有效。所以，只不过是在遇到可以用递归函数解决问题的时候，才需要去写递归函数。

从这个意义上来看，递归函数是程序员为了自己方便而使用的，并不是为了计算机方便而使用 —— 计算机么，你给它的任务多一点或者少一点，对它来讲无所谓，反正有电就能运转，它自己又不付电费……

理论上来讲，所有用递归函数能完成的任务，不用递归函数也能完成，只不过代码多一点，啰嗦一点，看起来没有那么优美而已。

还有，递归，不像“序列类型”那样，是某个编程语言的特有属性。它其实是一种特殊算法，也是一种编程技巧，任何编程语言，都可以使用递归算法，都可以通过编写递归函数巧妙地解决问题。

但是，学习递归函数本身就很烧脑啊！这才是最大的好事。从迷惑，到不太迷惑，到清楚，到很清楚，再到特别清楚 —— 这是个非常有趣，非常有成就感的过程。

这种过程锻炼的是脑力 —— 在此之后，再遇到大多数人难以理解的东西，你就可以使用这一次积累的经验，应用你已经磨炼过的脑力。有意思。

至此，封面上的那个“伪代码”应该很好理解了：

```
def teach_yourself(anything):
    while not create(something):
        learn()
        practice()
```

```
        return teach_yourself(another)

    teach_yourself(coding)
```

自学还真的就是递归函数呢.....

## 思考与练习

普林斯顿大学的一个网页，有很多递归的例子

https://introcs.cs.princeton.edu/java/23recursion/

---

脚注

[1]：参见 Stackoverflow 上的讨论：Boolean identity == True vs is True

↑Back to Content↑

[2]：关于阿莫西夫三铁律（Three Laws of Robotics）的类比，来自著名的 Python 教程，Think Python: How to Think Like a Computer Scientist

↑Back to Content↑