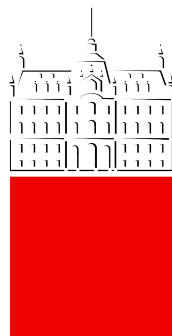


Univerza v Ljubljani
Fakulteta za *matematiko in fiziko*



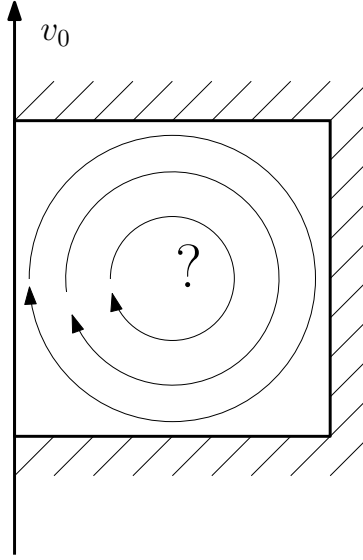
Modelska analiza 2
12. naloga - Navier-Stokesov sistem

Študent: Pšeničnik Tomaž

15. julij 2019

Navier-Stokesov sistem

Eden od standardnih problemov za testiranje računskih shem za Navier-Stokesov sistem je vsiljeni tok v votlini (Driven Cavity). V neskončni posodi s presekom kvadrata vlečemo z neko hitrostjo pokrov posode in opazujemo, kako se spreminja hitrostni profil tekočine v posodi. Shemo poskusa prikazuje slika 1, le da vlečemo levo stranico s konstantno hitrostjo.



Slika 1: Shema poskusa. ? \rightarrow iščemo hitrostni profil tekočine v neskončni posodi.

Gibanje nestisljive tekočine v opisuje Navier-Stokesova enačba, pri kateri uvedemo brezdimenzijske količine $\vec{v}/v_0 = (u, v)$, $\vec{r}/a = (x, y)$, $p/\rho v_0^2 \rightarrow p'$ in $\text{Re} = a\rho v_0/\eta$, pri čemer nimamo zunanjih sil $\vec{f} = 0$:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = \vec{f} - \nabla p + \eta \nabla^2 \vec{v} \rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p' + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{v}. \quad (1)$$

Pri pogoju, da je tekočina nestisljiva $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, lahko sistem (1) rešujemo direktno. Elegantnejše reševanje je, če vpeljemo vrtinčnost

$$\zeta = \nabla \times \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2)$$

in uporabimo rotor na enačbi (1). Tako dobimo v 2D sistem treh enačb, kjer ni več členov s tlakom

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial u \zeta}{\partial x} - \frac{\partial v \zeta}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right). \quad (3)$$

Pri tem vse krajevne odvode zapišemo v centralni obliki

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_{i,j}}{\partial x} &= \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x} \\ \frac{\partial^2 f_{i,j}}{\partial y^2} &= \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{(\Delta x)^2}.\end{aligned}\tag{4}$$

Hitrostno polje dobimo iz tokovne funkcije

$$\vec{v} = \nabla \times \psi,$$

tokovna funkcija pa je povezana z vrtinčnostjo s Poissonovo enačbo

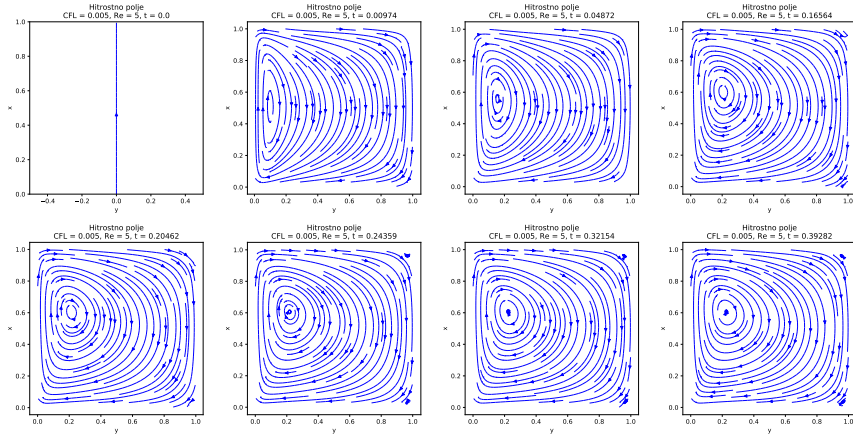
$$\nabla^2 \psi = \zeta.$$

Numeričen postopek si sledi po korakih:

- Nastavimo začetne pogoje
- Iz trenutne hitrosti u in v ter trenutne vrtinčnosti ζ_t določimo vrtinčnost ob novem času $\zeta_{t+\Delta t}$ preko diferenčne oblike enačbe (3)
- Iz doblene vrtinčnosti izračunamo hitrostni potencial ψ preko Poissonove enačbe. Za reševanje te enačbe bomo uporabili SOR.
- Iz hitrostnega potenciala ψ lahko določimo hitrosti u in v .
- postopek ponavljamo do stacionarnega stanja

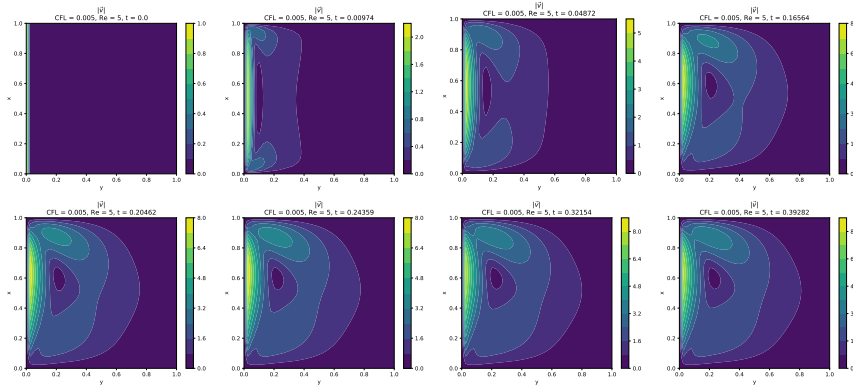
Pomembno je določiti časovni korak reševanja. Časovni korak smiselno omejimo z Courant–Friedrichs–Lewyjevim pogojem (CFL) $\Delta t < 0.4\Delta x/v_{max}$, pri čemer je CFL=0.4.

Sedaj imamo vse sestavine za izračun hitrostnega polja. Poglejmo si rezultate. Najprej si pogledjmo hitrostno polje za $Re=5$, pri čemer smo razdelili mrežo na 40x40 točk in uporabili CFL=0.005 za izračun časovnega koraka. Časovno spreminjanje hitrostnega polja je prikazano na sliki 2. Ko dosežemo stacionarno stanje se v dveh vogalih pojavita dva mala vrtinca. Pričakujemo, da bosta pri večjih Re številih vrtinca večja.



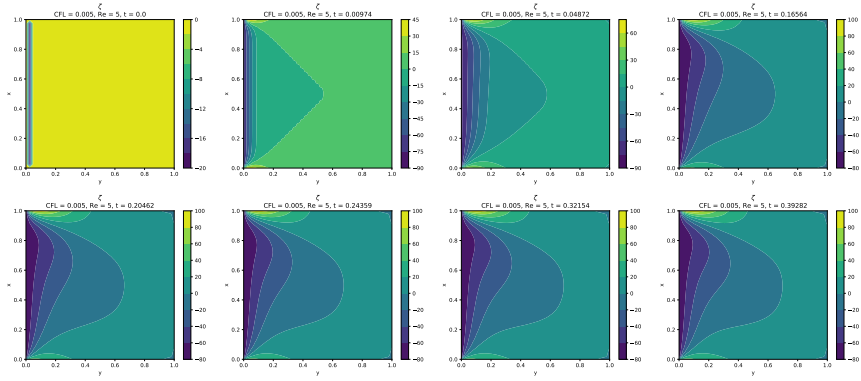
Slika 2: Hitrostni profil za $Re=5$ pri $dt = 0.00013$.

Poglejmo si še hitrosti $|\vec{v}| = \sqrt{u^2 + v^2}$ hitrostnega polja. Rešitve so prikazane na sliki 3. Preseneča, da so hitrosti znotraj preseka cevi večje od v_0 .

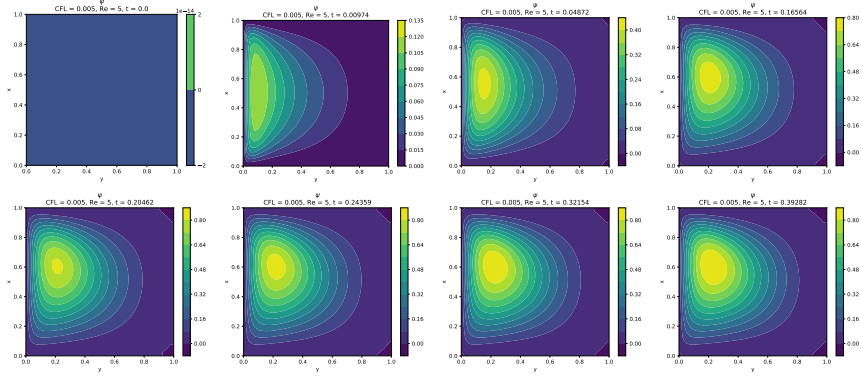


Slika 3: Hitrosti za $Re=5$ pri $dt = 0.00013$.

Pogledamo si lahko še funkciji ζ in ψ na slikah 4 in 5.

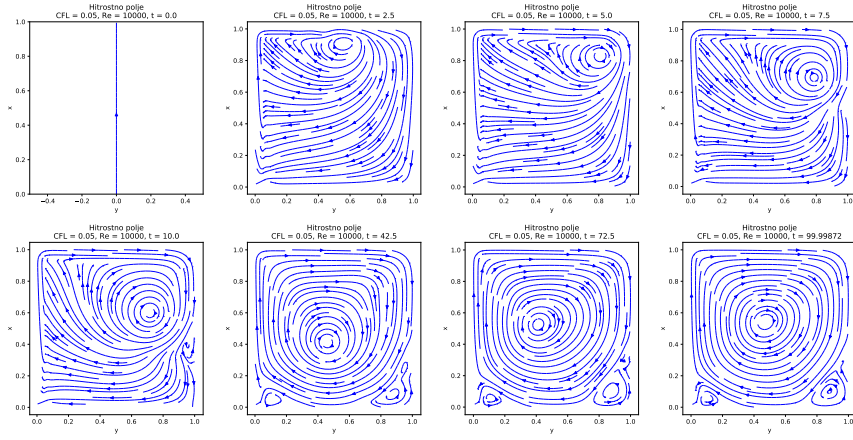


Slika 4: ζ za $Re=5$ pri $dt = 0.00013$.

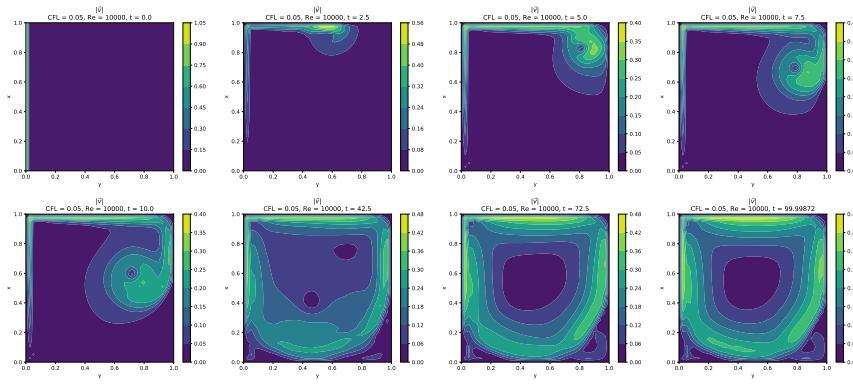


Slika 5: ψ za $Re=5$ pri $dt = 0.00013$.

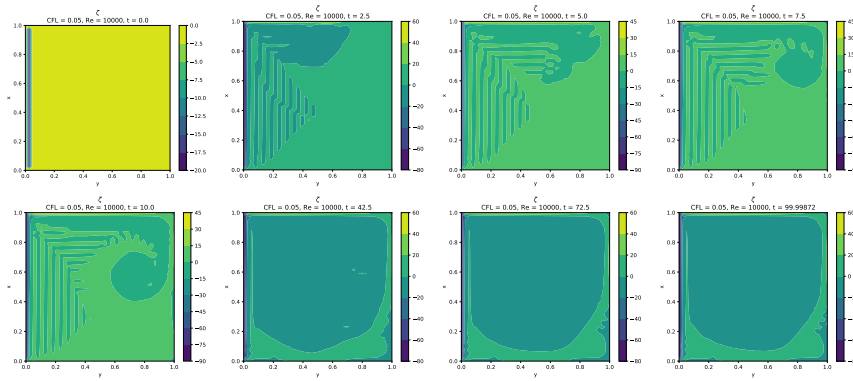
Nekoliko bolj zanimivo dogajanje je, če si pogledamo hitrostno polje in ostale funkcije pri $Re=10000$. Računanje pri tako veliki številki je postalo že precej dolgotrajno. Hitrostno polje, hitrost, ζ in ψ so prikazane na slikah 6, 7, 8 in 9. Opazimo da vrtnica nista več prisotna v desnih vogalih, temveč se preselita na spodnja dva vogala. Sredinski vrtnec, ki je bil pri $Re=5$ bliže stranici s konstantno hitrostjo, se je preselil v sredino.



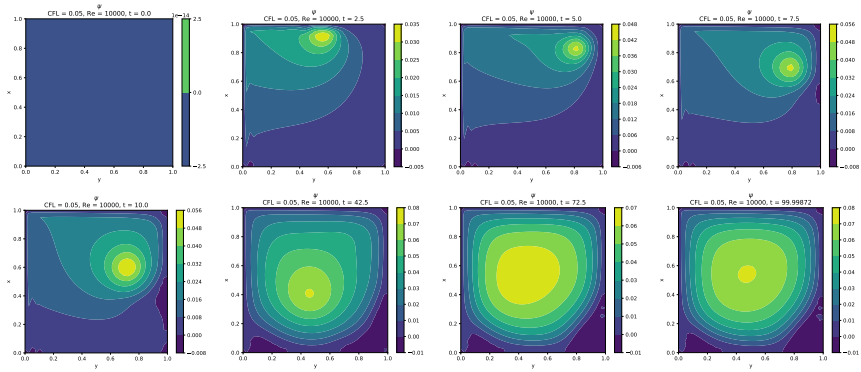
Slika 6: Hitrostni profil za $Re=10000$ pri $dt = 0.00128$.



Slika 7: Hitrosti za $Re=10000$ pri $dt = 0.00128$.

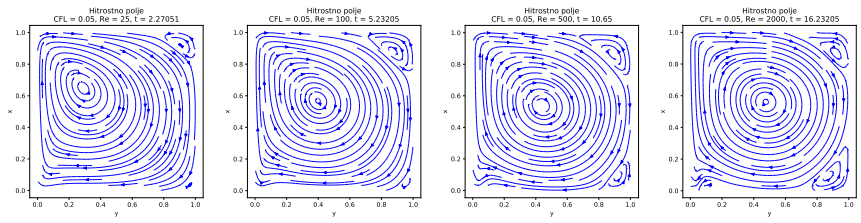


Slika 8: ζ za $Re=10000$ pri $dt = 0.00128$.

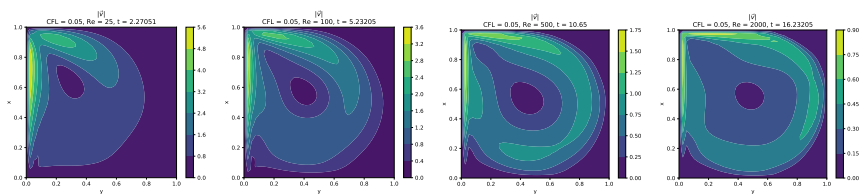


Slika 9: ψ za $Re=10000$ pri $dt = 0.00128$.

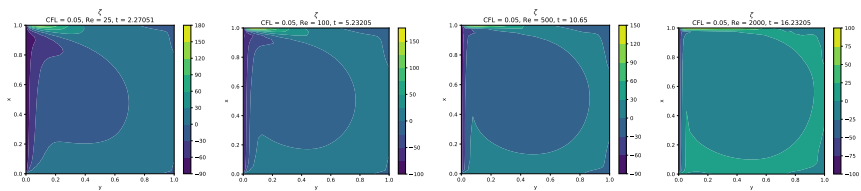
Poglejmo si še nekatera stacionarna stanja za vmesne Re .



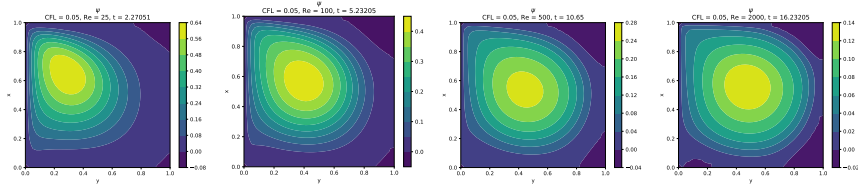
Slika 10: Hitrostno polje za $Re=25,100,500,2000$ pri $dt = 0.00128$.



Slika 11: Hitrosti za $Re=25,100,500,2000$ pri $dt = 0.00128$.



Slika 12: ζ za $Re=25,100,500,2000$ pri $dt = 0.00128$.

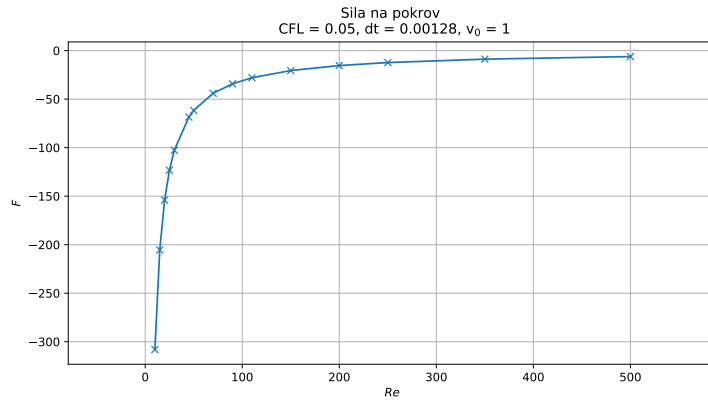


Slika 13: ψ za $Re=25,100,500,2000$ pri $dt = 0.00128$.

Za konec si pogledjmo še silo na stranico, ki jo vlečemo s konstantno hitrostjo v odvisnosti od Re . Sila deluje v nasprotni smeri vlečenja in se izračuna po enačbi:

$$F = \frac{1}{Re} \int_0^a \zeta(x, y=0) dx = \frac{\Delta x}{Re} \left(\frac{1}{2} \zeta_{0,0} + \sum_{i=1}^{N-1} \zeta_{i,0} + \frac{1}{2} \zeta_{N,0} \right). \quad (5)$$

Rešitev je prikazana na sliki 14.



Slika 14: Potrebna sila vlečenja, da je hitrost vlečene stranice konstanta.

Po pričakovanjih se z višanjem Re zmanjšuje sila na premikajočo se stranico, ker se z večanjem Re zmanjšuje viskoznost. Sile se tako eksponentno zmanjšujejo proti ničli. To je pričakovano, ker za zelo viskozne tekočine potrebujemo neskončno silo, da premaknemo tekočino, za zelo neviskozne tekočine pa že z zelo malo silo lahko premaknemo in zavrtimo tekočino.