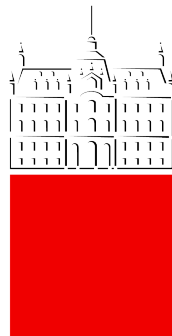


Univerza v Ljubljani
Fakulteta za *matematiko in fiziko*



Modelska analiza 2

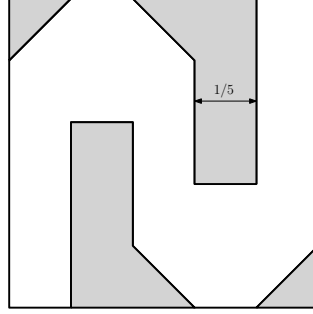
6. naloga - Parcialne diferencialne enačbe:
lastne rešitve

Študent: Pšeničnik Tomaž

10. april 2019

Nihanje kvadratne opne

Določiti želimo nekaj najnižjih lastnih frekvenc in lastnih nihanj kvadratne opne prikazane na sliki 1.



Slika 1: Kvadratna opna z različno obtežitvijo

Preden se lotimo zastavljenega problema, si pogledjmo izračun lastnih nihajnih načinov navadne homogene opne.

Splošno nihanje v dveh dimenzijah opisuje valovna enačba v ravnini, ki jo zapišemo kot

$$\nabla^2 = \frac{1}{c(x,y)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad c(x,y)^2 = \frac{\gamma}{\rho(x,y)d} = \frac{\gamma}{\sigma(x,y)}, \quad (1)$$

kjer je c hitrost valovanja v točki (x, y) , γ površinska napetost opne, ρ gostota opne, d debelina opne in σ ploskovna gostota opne. Kot poznamo, lahko na enačbi (1) uporabimo separacijo spremenljivk

$$u = u_0(x, y)T(t) \rightarrow u_0(x, y)e^{-i\omega t}.$$

Naša enačba se s tem poenostavi in dobimo

$$\nabla^2 u = \frac{\omega^2}{c^2} u = k^2 u = \lambda u. \quad (2)$$

Z *Dirichletovimi* robnimi pogoji ubistvu iščemo lastne vrednosti λ_n zastavljenega problema. Lastne vrednosti v tem primeru niso nič drugega kot lastne frekvence iskanih nihajnih načinov.

Analitične rešitve niso vedno možne, zato prevedemo problem na numerično reševanje. Kot poznamo iz prejšnje naloge, zapišemo enačbo (2) v diferenčni obliki:

$$\nabla^2 u \approx \frac{4u_{i,j} - u_{i-1,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1}}{h^2} = k^2 u_{i,j}. \quad (3)$$

Če nam uspe skonstruirati operator ∇^2 kot matriko in u kot vektor, lahko rešujemo matrični problem lastnih vrednosti

$$\mathbf{A}\vec{u} = k^2\vec{u} = \lambda\vec{u}. \quad (4)$$

Najprej zapišemo u kot vektor

$$\vec{u} = (u_{0,0}, u_{0,1}, u_{0,2}, \dots, u_{0,N}, u_{1,0}, u_{1,1}, \dots, u_{1,N}, u_{2,0}, \dots, u_{N,N}, \quad (5)$$

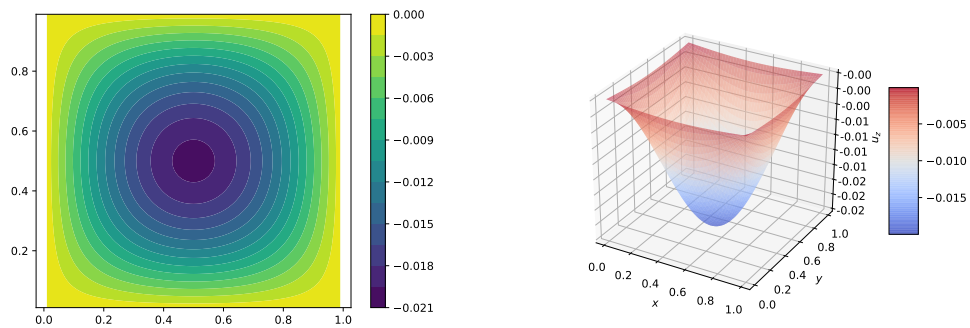
pri čemer so $u_{i,j}$ elementi matrike odmikov \mathbf{U} . Zaradi Dirichletovega robnega pogoja so robni elementi matrike \mathbf{U} enaki 0. Rešujemo problem, kjer nas zanimajo le notranji elementi. Z danim vektorjem \vec{u} , zapišemo operator ∇^2 kot matriko \mathbf{A} kot:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} T & -I & 0 & 0 \\ -I & T & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & -I \\ 0 & 0 & -I & T \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad (6)$$

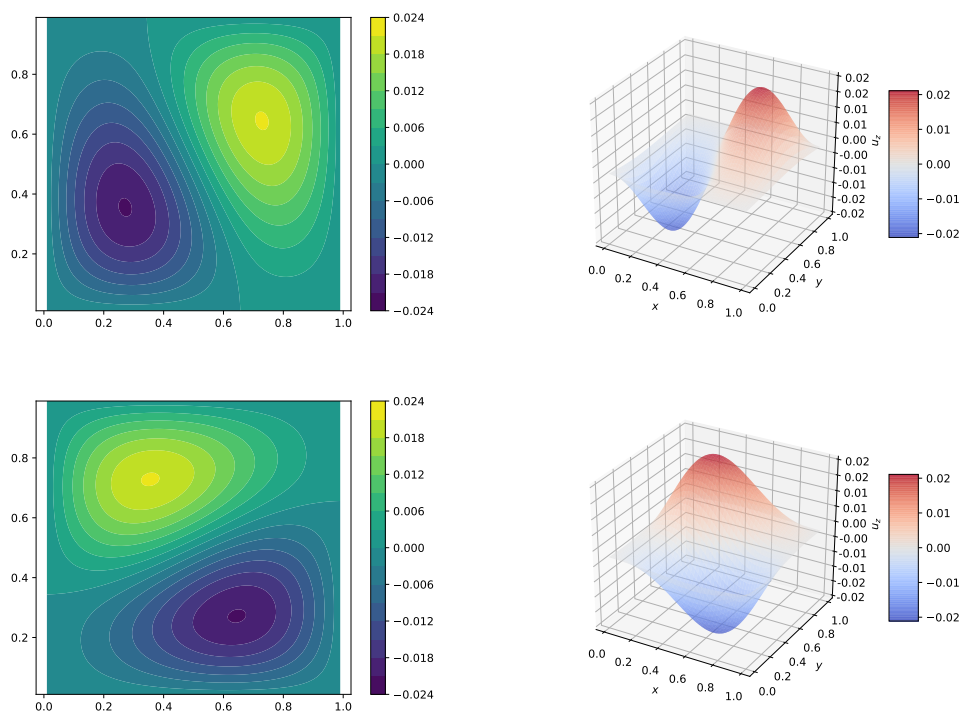
Za primer $N = 3$, dobimo 9x9 matriko:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

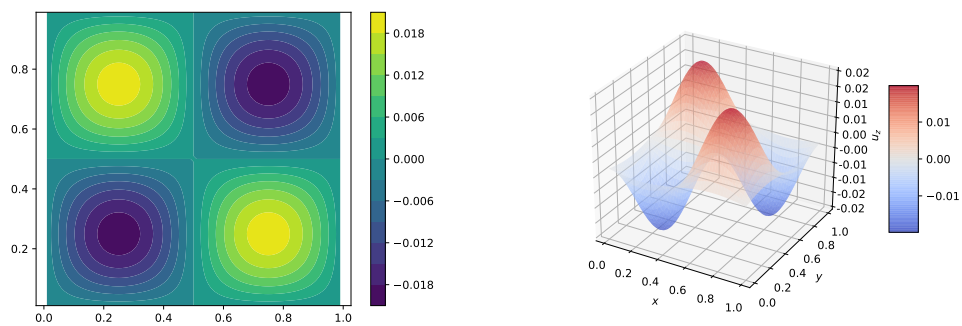
Lastne vrednosti in lastne vektorje poiščemo s pomočjo uporabniku prijaznima knjižicama `scipy.sparse.linalg.eigsh` ali `scipy.linalg.eigh`. Če zapišemo lastne vektroje nazaj kot matriko \mathbf{U} , dobimo rešitev za lastni nihajni način. Poglejmo si prvih nekaj rešitev.



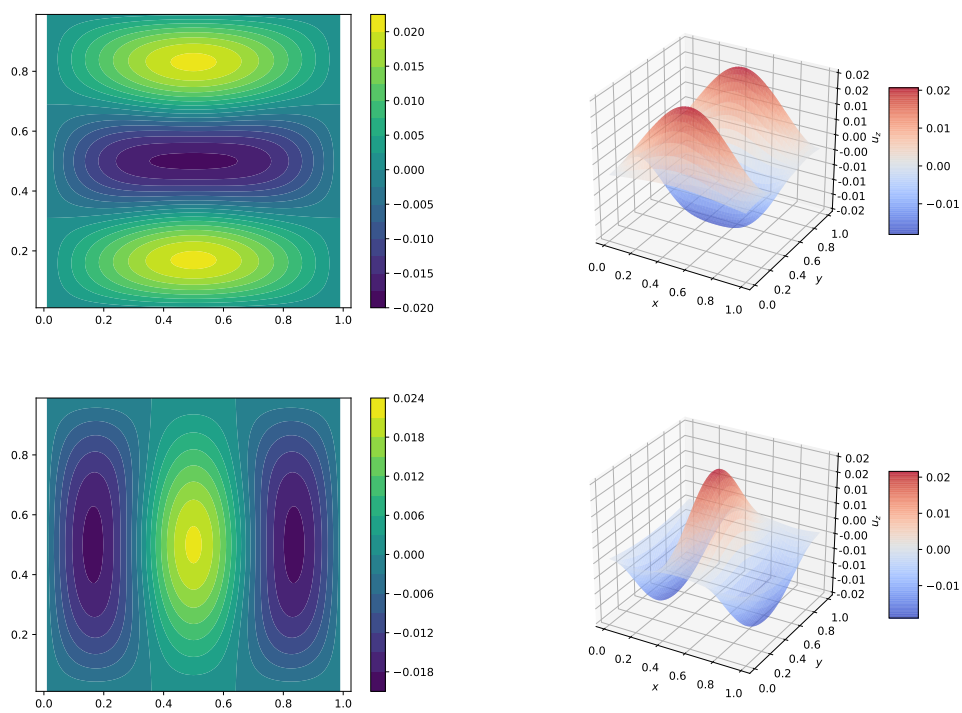
Slika 2: Prvi nihajni način.



Slika 3: Drugi nihajni način.



Slika 4: Tretji nihajni način.

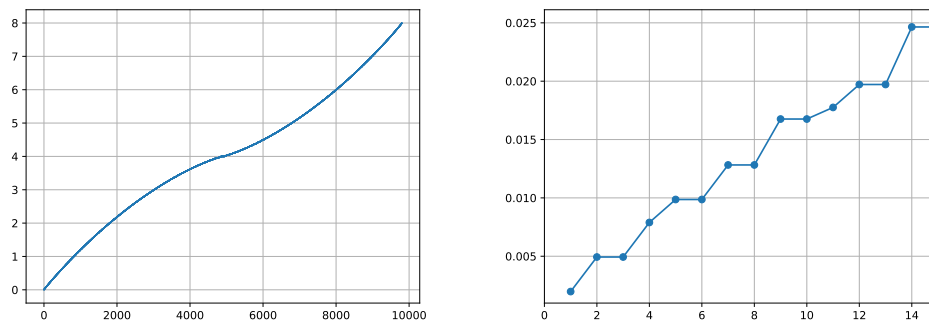


Slika 5: Četrty nihajni način.

n	i j	$\pi^2(i^2 + j^2)$	$\lambda_n \cdot (N + 1)^2$
1	1 1	19.7392	19.7376
2	1 2 2 1	49.3480	49.3342
3	2 2	78.9568	78.9309
4	3 1 3 1	98.6960	98.6295
5	3 2 3 2	128.3049	128.2261
6	4 1 1 4	167.7833	167.5748

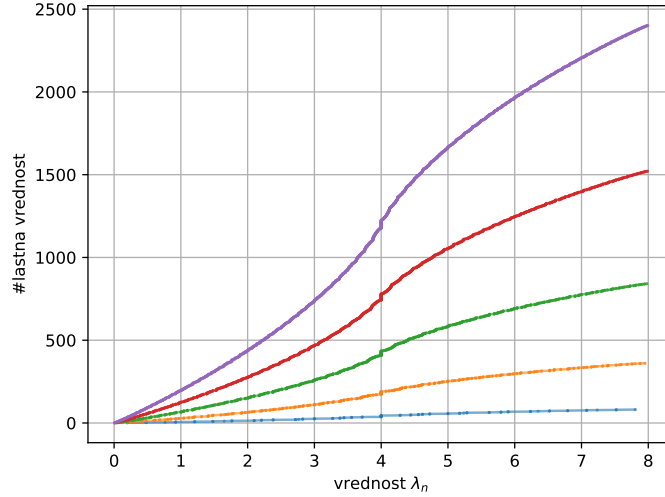
Tabela 1: Prvih 6 izračunanih lastnih vrednosti za homogeno opno za $N = 99$.

Poglejmo si še, kako naraščajo lastne vrednosti za $N = 99$.



Slika 6: Naraščanje lastnih vrednosti za $N = 99$.

Graf ki ga dobimo na sliki 6 levo, ima enako obliko za katerikoli N . Rezultat za različne N je prikazan na sliki 7. Na grafu na desni na sliki 6 so lepo razvidne enojne in dvojne lastne vrednosti.



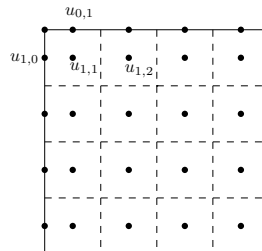
Slika 7: Lastne vrednosti za homogeno opno za različne N

Sedaj se posvetimo danemu problemu: izračunu lastnih nihanj obtežene opne. Rešujemo bolj splošen problem lastnih vrednosti in lastnih vektorjev:

$$\mathbf{A}\vec{u} = \lambda B\vec{u}, \quad (7)$$

kjer je B matrika in je krajevno odvisna. V matriki B imamo podano gostoto opne na mestih x, y . Na našo srečo je matrika B diagonalna zaradi našega zapisa vektorja \vec{u} . Tako lahko za reševanje enostavno uporabimo knjižici `scipy.sparse.linalg.eigsh` ali `scipy.linalg.eigh`.

Pojavi se problem, kako izbrati točke, kjer bomo odbrali gostoto opne. Odločimo se, da bomo odbirali točke po območju, kot prikazuje slika 8. V prejšnjem primeru za nihanje opne smo imeli točke postavljene na rob območja.



Slika 8: Točke izbiramo po območju

Zaradi te postavitve točk, se spremeni Poissonova enačba v diferenčni obliki. Izračunajmo drugi odvod v x smeri najbolj zgornje leve točke na sliki 8. Odvod v y smeri dobimo na enak način. Za prvi odvod dobimo:

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=(j-.5)h} \approx \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h/2}, \quad \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=(j-.5)h} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h}, \quad (8)$$

kjer je potrebno paziti na razmik med točkami h in $h/2$. V primeru zgornje leve točke imamo $i = j = 1$ in $u_{1,0} = 0$. Da dobimo drugi odvod samo odštejemo enačbi (8) in delimo s h :

$$\left. \frac{d^2u}{dx^2} \right|_{1,1} \approx \frac{3u_{1,1} - u_{1,2}}{h^2}. \quad (9)$$

Z upoštevanjem še odvoda y dobimo spremenjeno matriko \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} T_1 & -I & 0 & \dots & 0 \\ -I & T_2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & -I & T_2 & -I \\ 0 & \dots & 0 & -I & T_1 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

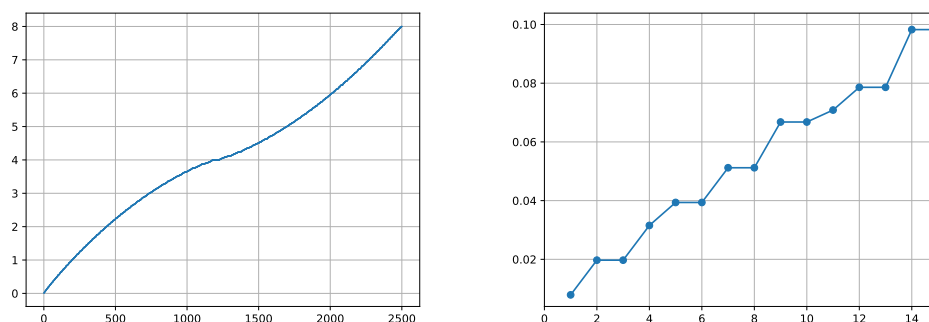
pri čemer sta

$$T_2 = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 4 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 4 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad T_1 = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 5 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 5 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

Za primer $N = 3$, dobimo 9x9 matriko:

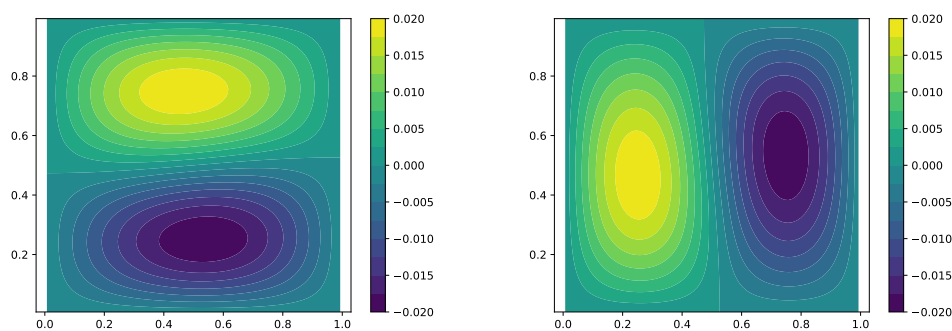
$$\begin{bmatrix} 6 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 5 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 5 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

Fizika se zaradi spremembe odbiranja območja ne bi smela spremeniti. V to se hitro prepričamo, če pogledamo lastne vrednosti in lastne nihajne načine.



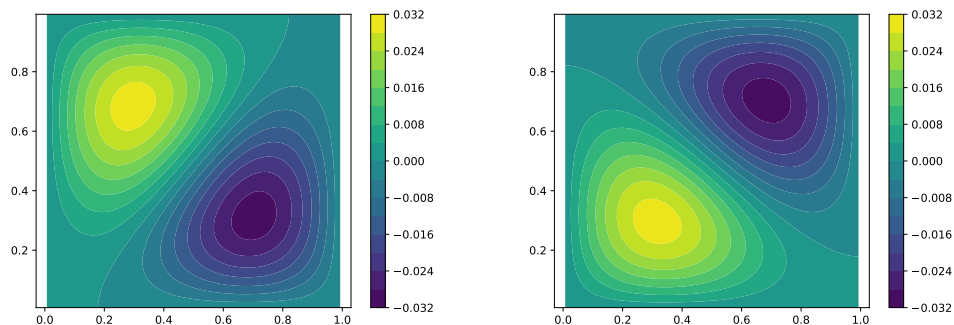
Slika 9: Naraščanje lastnih vrednosti za $N = 50$ za odbiranje točk po območju.

Lastni načini tudi ostanejo isti. Ugotovili pa smo nekaj, na kar prej nismo bili pozorni. Druga nihajna načina na sliki 3 nista osnovna nihajna načina, temveč linearna kombinacija nihajnih načinov, prikazanih na sliki 10.



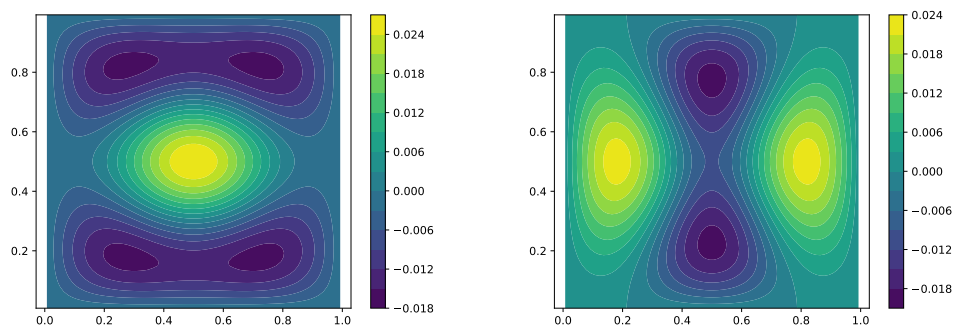
Slika 10: Druga lastna nihajna načina za $N = 72$.

S kombinacijo slik 10 $(1. + 2.)/2$ oz. $(1. - 2.)/2$ dobimo še dve lastna nihajna načina, prikazana na sliki 11. Omeniti je mogoče še potrebno, da smo za različne N dobivali različne linearne kombinacije drugega nihajnega načina in za le posebej dobro izbran N smo dobili željene rešitve.



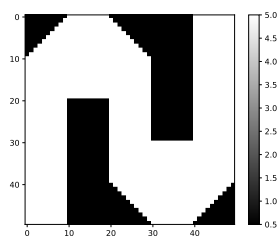
Slika 11: Linearna kombinacija načinov iz 10 za $N = 72$.

Podobno dobimo linearno kombinacijo tudi za četrti nihajni način prikazan na sliki 12 iz slike 5



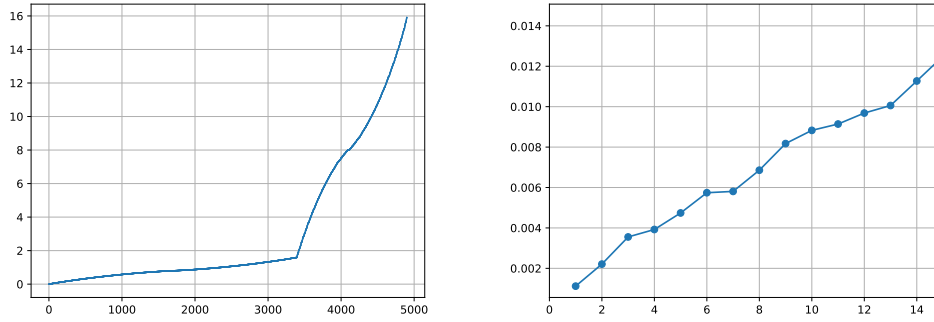
Slika 12: Linearna kombinacija načinov iz 5 za $N = 70$.

Sedaj si pogledjmo, ko imamo opno z različno gostoto. Problema se lotimo tako, da najprej zapišemo matriko B s pomočjo elementov $b_{i,j}$, prikazanimi na sliki 13.



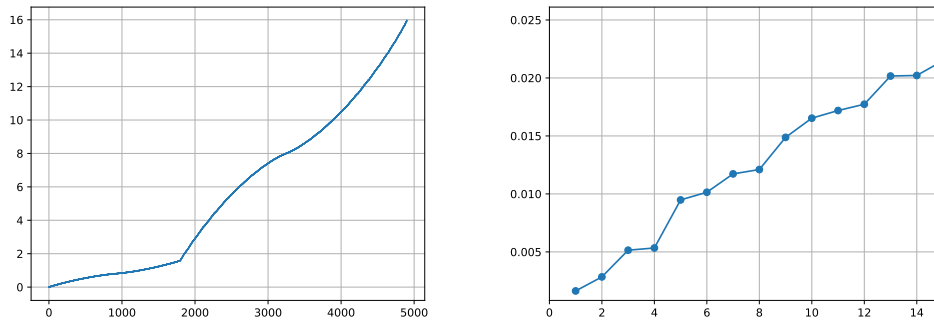
Slika 13: Izbrana gostota po območju.

Za prvi primer si izberemo gostoto belega območja $\rho_1 = 0.5$ in črnega območja $\rho_2 = 5$. Za začetek si pogledimo lastne vrednosti za $N = 70$, prikazane na sliki 14.



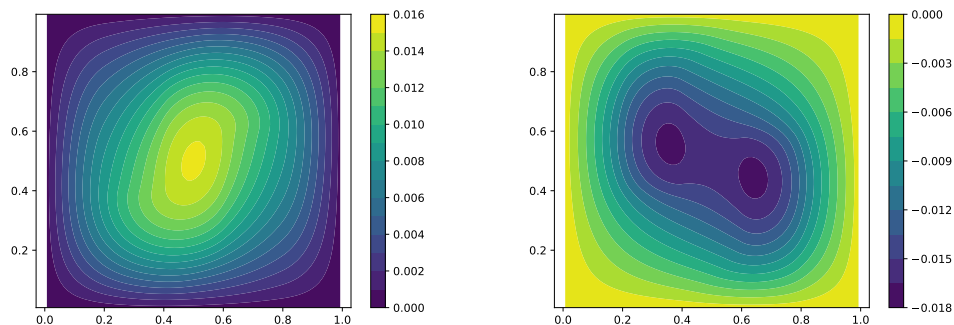
Slika 14: Lastne vrednosti za $\rho_1 = 0.5$, $\rho_2 = 5$ za $N = 70$.

V drugem primeru samo zamenjamo gostoto opne in imamo gostoto belega območja $\rho_1 = 5$ in črnega območja $\rho_2 = 0.5$. Lastne vrednosti za ta primer so prikazane na sliki 15.



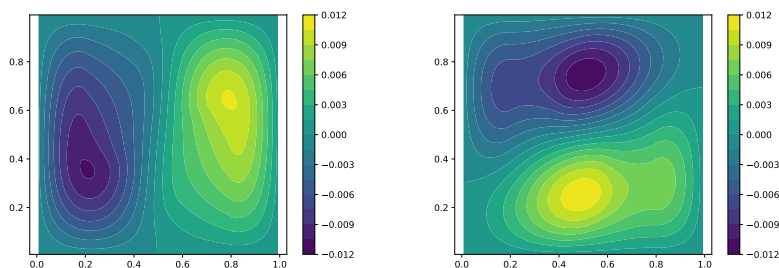
Slika 15: Lastne vrednosti za $\rho_1 = 5$, $\rho_2 = 0.5$ za $N = 70$.

Prvi lastni nihajni način za oba primera je prikazan na sliki 16

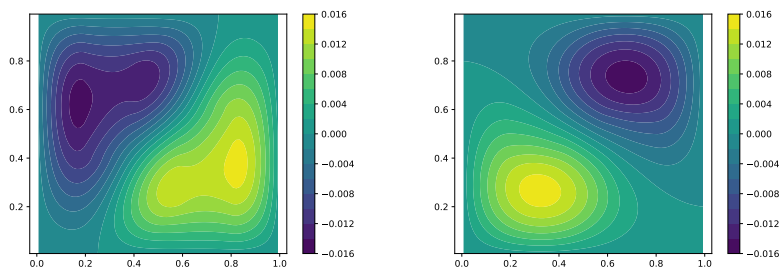


Slika 16: Prvi lastni nihajni način. Levo za $\rho_1 = 0.5$, $\rho_2 = 5$ in desno za $\rho_1 = 5$, $\rho_2 = 0.5$ pri $N = 70$.

Podobno kot pri homogeni opni, tudi pri nehomogeni opni dobimo 2 lastna načina drugega nihanega načina. Ponovno naredimo linerani kombinaciji za pridobitev še dodatnih dveh nihajnih načinov. Za prvi primer so prikazani rezultati drugega nihajnega načina na sliki 17 in 18.

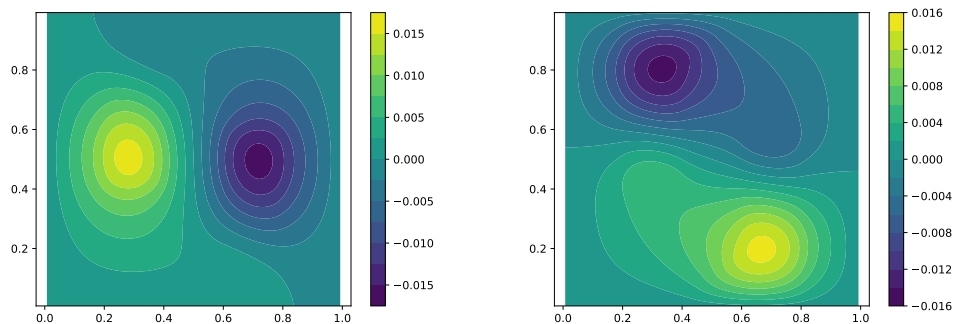


Slika 17: Drugi lastni nihajni način za $\rho_1 = 0.5$, $\rho_2 = 5$ pri $N = 70$.

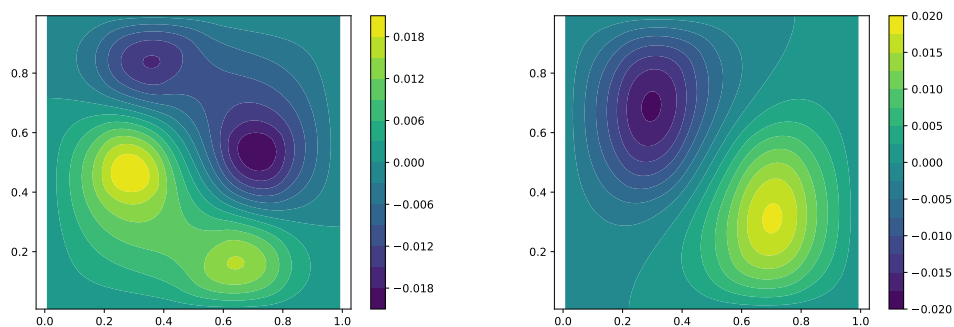


Slika 18: Linearna kombinacija načinov iz 17 $\rho_1 = 0.5$, $\rho_2 = 5$ pri $N = 70$.

Drugi primer drugih lastnih nihajnih načinov in njihovih linearnih kombinacij vidimo na slikah 19 in 20.



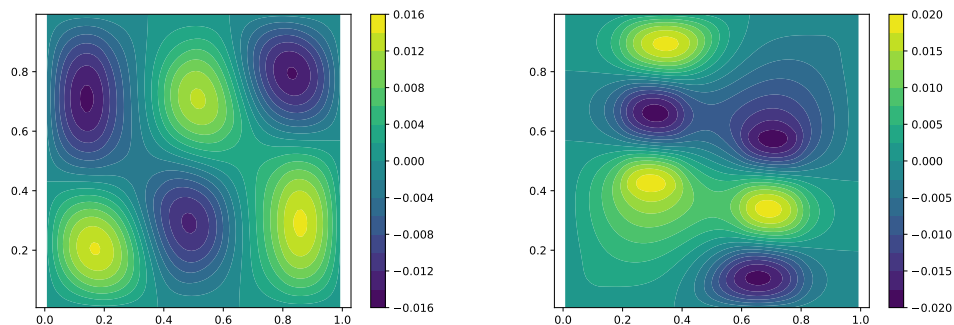
Slika 19: Drugi lastni nihajni način za $\rho_1 = 5$, $\rho_2 = 0.5$ pri $N = 70$.



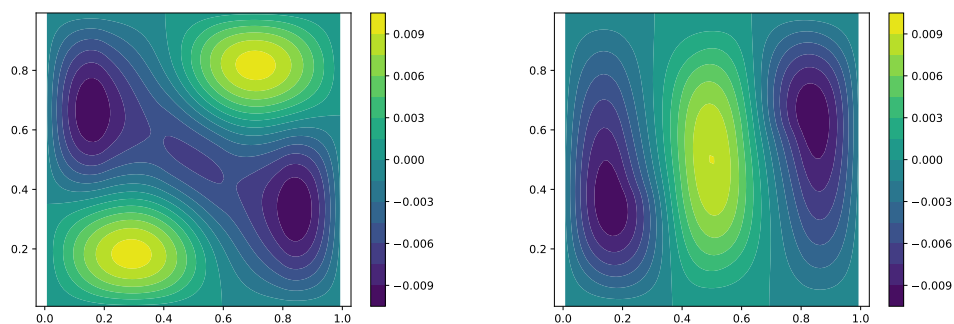
Slika 20: Linearna kombinacija načinov iz 19 za $\rho_1 = 5$, $\rho_2 = 0.5$ pri $N = 70$.

Kot primeren komentar k dozdajšnjim slikam, dodamo, da najbolj nihajo oz. imajo največjo amplitudo nihanja gostejši- težji deli. To najlažje vidimo tako, da si na vseh slikah z različno gostoto predstavljamo sliko 13.

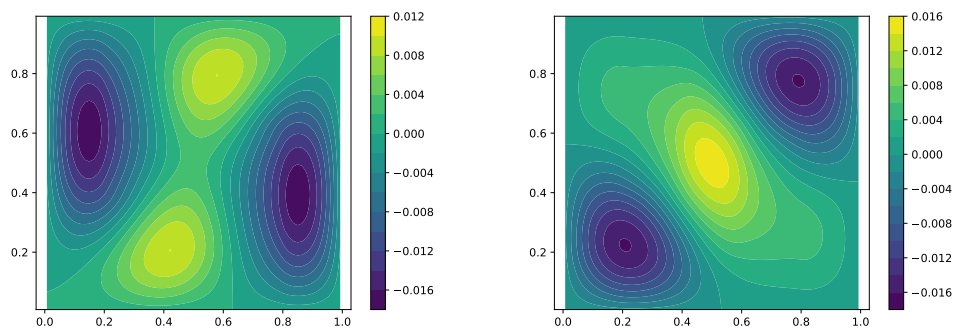
Kot zanimivost si pogledjmo še tretji in četrta nihajna načina. Primeri so prikazani na slikah 21, 22, 23, 24 in 25.



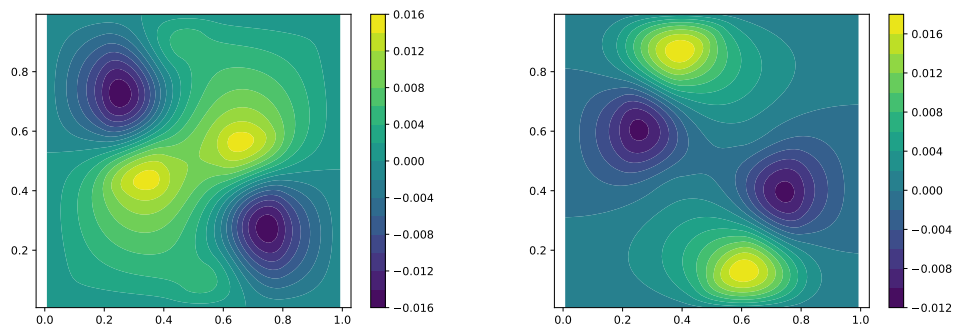
Slika 21: Tretji lastni nihajni način. Levo za $\rho_1 = 0.5$, $\rho_2 = 5$ in desno za $\rho_1 = 5$, $\rho_2 = 0.5$ pri $N = 70$.



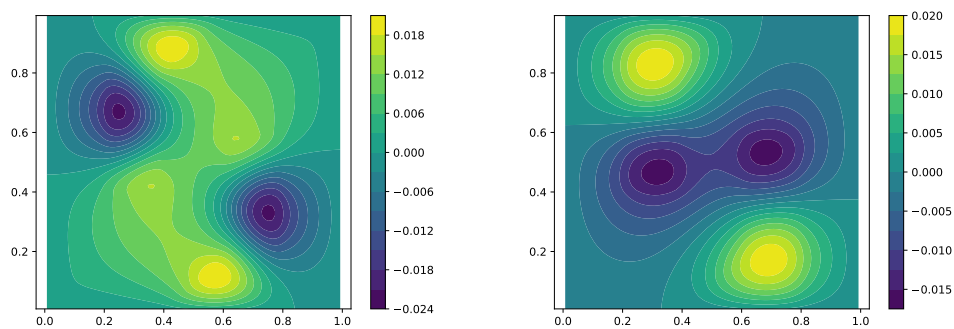
Slika 22: Četrty lastni nihajni način za $\rho_1 = 0.5$, $\rho_2 = 5$ pri $N = 70$.



Slika 23: Linearna kombinacija načinov iz 22 $\rho_1 = 0.5$, $\rho_2 = 5$ pri $N = 70$.



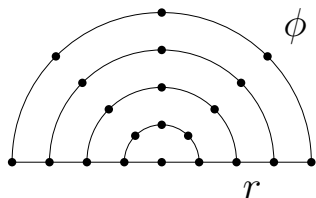
Slika 24: Četrty lastni nihajni način za $\rho_1 = 5$, $\rho_2 = 0.5$ pri $N = 70$.



Slika 25: Linearna kombinacija načinov iz 24 $\rho_1 = 5$, $\rho_2 = 0.5$ pri $N = 70$.

Nihanje homogene polkrožne opne

Določiti želimo nekaj lastnih nihajnih časov in lastnih nihajnih načinov homogene polkrožne opne. Rešujemo problem v polarnih koordinatah. Najprej si izberemo razporeditev točk. Razporeditev točk prikazuje slika 26.



Slika 26: Primer razporeditve točk na polkrožni opni za $N=3$.

Poissonova enačba v polarnih koordinatah se glasi:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = k^2 u. \quad (11)$$

Prevesti jo želimo v diferenčno obliko. Pri tem upoštevamo

$$u(r, \phi) \rightarrow u(x_i, \phi_j) = u_{i,j}, \quad h_r = r/(N_r+1), \quad h_\phi = \pi/(N_\phi+1), \quad N_\phi = N_r = N,$$

pri čemer je N število nerobnih točk, in

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &= \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - 2u_{i,j}}{h_r^2} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{h_r \cdot i} \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_r} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} &= \frac{1}{(h_r \cdot i)^2} \frac{u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 2u_{i,j}}{h_\phi^2} \end{aligned}$$

in vstavimo v enačbo (11). Tako dobimo

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= u_{i+1,j} \left(\frac{1}{h_r^2} + \frac{1}{2ih_r^2} \right) \\ &+ u_{i,j} \left(-\frac{2}{h_r^2} - \frac{2}{(h_r \cdot i \cdot h_\phi)^2} \right) \\ &+ u_{i-1,j} \left(\frac{1}{h_r^2} - \frac{1}{2ih_r^2} \right) \\ &+ (u_{i,j-1} + u_{i,j+1}) \frac{1}{h_r^2 i^2 h_\phi^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Če sedaj zapišemo operator ∇^2 kot matriko A :

$$A = \begin{bmatrix} T & T_1 & 0 & 0 \\ T_2 & T & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & T_1 \\ 0 & 0 & T_2 & T \end{bmatrix}, \quad (13)$$

pri čemer so:

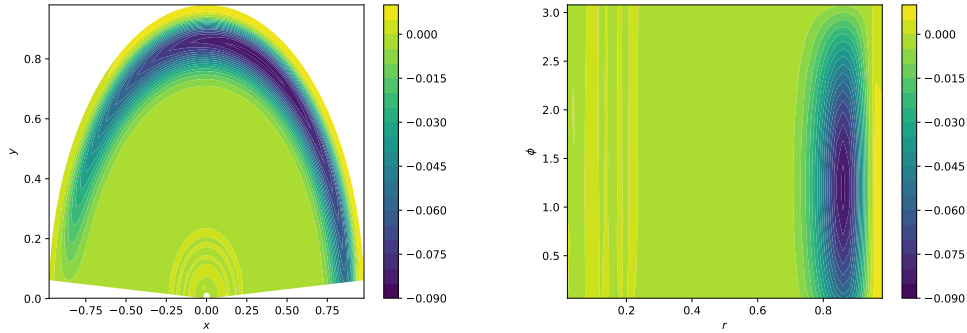
$$T = \begin{bmatrix} \star & \bullet & & \\ \bullet & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \bullet \\ & & \bullet & \star \end{bmatrix}, \quad \star = \frac{2}{h_r^2} + \frac{2}{(h_r \cdot i \cdot h_\phi)^2}, \quad \bullet = 1/(h_r i h_\phi)^2$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} \diamond & & \\ & \ddots & \\ & & \diamond \end{bmatrix}, \quad \diamond = -\left(\frac{1}{h_r^2} + \frac{1}{2ih_r^2}\right)$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} \square & & \\ & \ddots & \\ & & \square \end{bmatrix}, \quad \square = -\left(\frac{1}{h_r^2} - \frac{1}{2ih_r^2}\right).$$

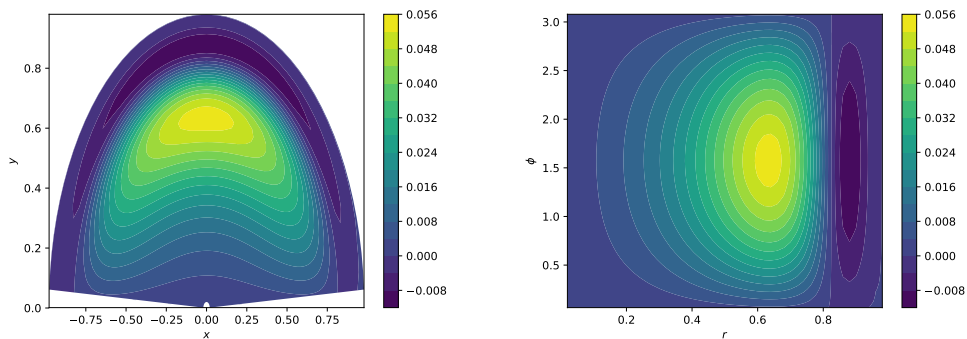
Matrika A sedaj ni več simetrična. Tako ne moremo uporabiti istih knjižic kot prej za simetrične matrike. Poleg tega reševanje postane počasnejše. Za reševanje bomo tako uporabili knjižico `scipy.sparse.linalg.eigs`.

Poglejmo si rezultate, ki smo jih izračunali za $N = 49$. Načeloma presenečajo vsi rezultati lastnih nihajnih načinov, saj ne dobimo vseh. Najbolj preseneča rezultat za prvo lastno nihanje, prikazan na sliki 27. Vidimo, da rešitev ni čisto simetrična. Poleg tega smo opazili, da se lastna vrednost tega načina zmanjšuje precej več z večanjem števila N , kot ostale lastne vrednosti in ni videti, da konvergira h končni vrednosti. Mogoče bi se stvari spremenile če bi število N še povečali.

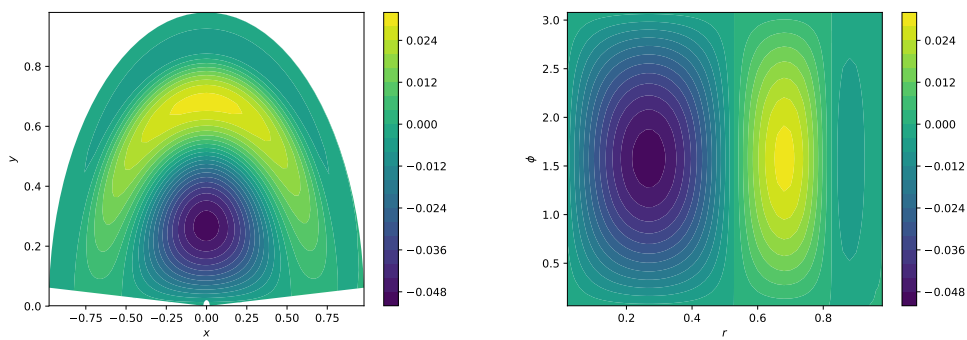


Slika 27: Prvi nihajni način.

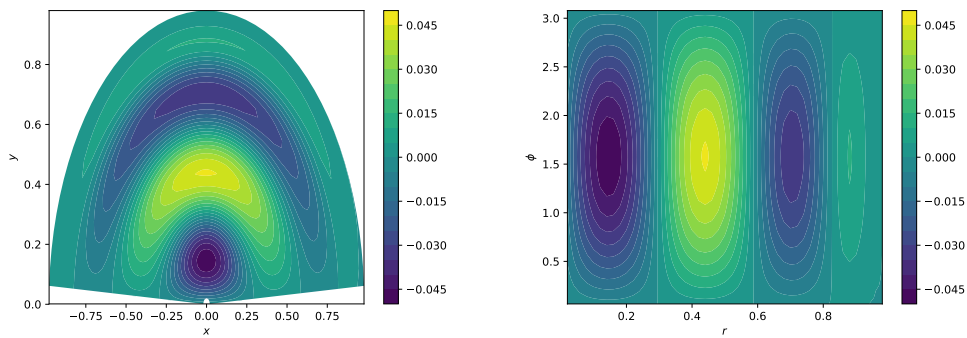
Rešitve za višje lastne nihajne načine zgledajo precej bolj smiselne, vendar še vedno pogrešamo nekatere lastne nihajne načine, ki jih poznamo iz literature. Rešitve za drugo, tretjo, četrto, peto in šesto lastno nihanje so prikazane na slikah 28, 29, 30, 31 in 32.



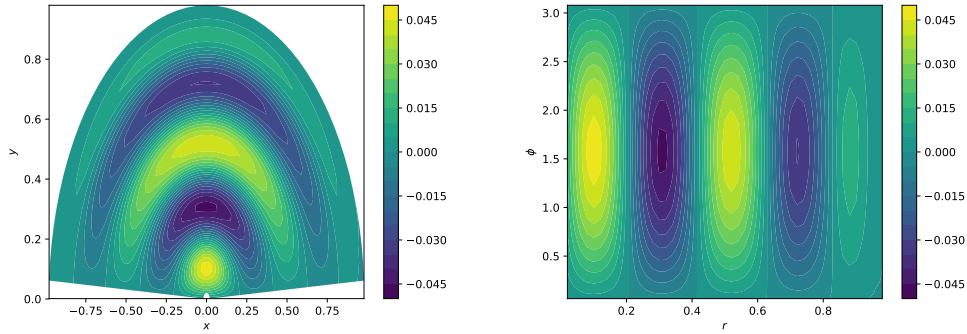
Slika 28: Drugi nihajni način.



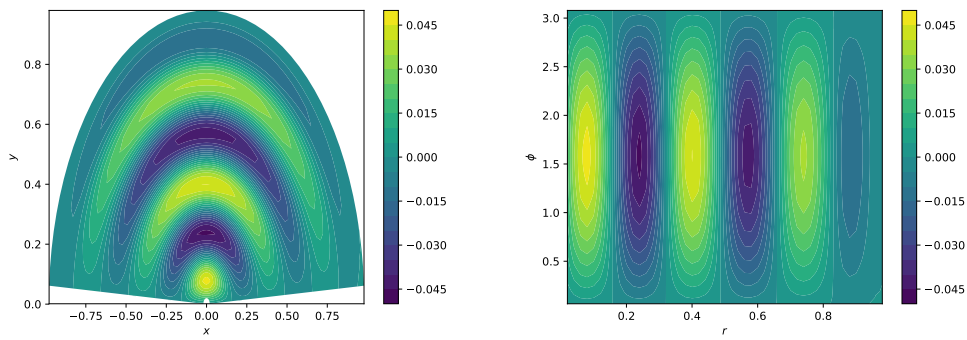
Slika 29: Tretji nihajni način.



Slika 30: Četrty nihajni način.



Slika 31: Peti nihajni način.



Slika 32: Šesti nihajni način.

Reševali smo v polarnih koordinatah, zanimivo pa bi si bilo ogledati rešitve v kartezičnih koordinatah, kjer bi območje opne obravnavali z gostoto 1 in območje, kjer ni opne z gostoto 0.