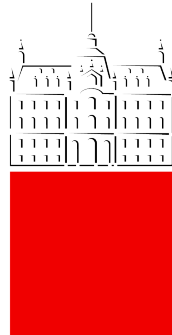


Univerza v Ljubljani  
Fakulteta za *matematiko in fiziko*



**Modelska analiza 2**  
9. naloga - Metoda robnih elementov

Študent: Pšeničnik Tomaž

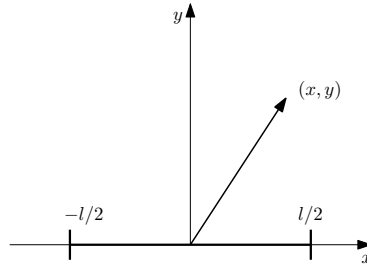
13. maj 2019

## Elektrostatsko polje nabitega traku

Želimo najti elektrostatični potencial nabitega neskončno dolgega traku. S tem smo problem prevedli na 2D. Potencial takšnega traku širine  $l$  nabitega z enotsko gostoto naboja, postavljenega v izhodišče koordinatnega sistema, opišemo z *Greenovo* funkcijo  $G_{0,r} = u(x, y)$ :

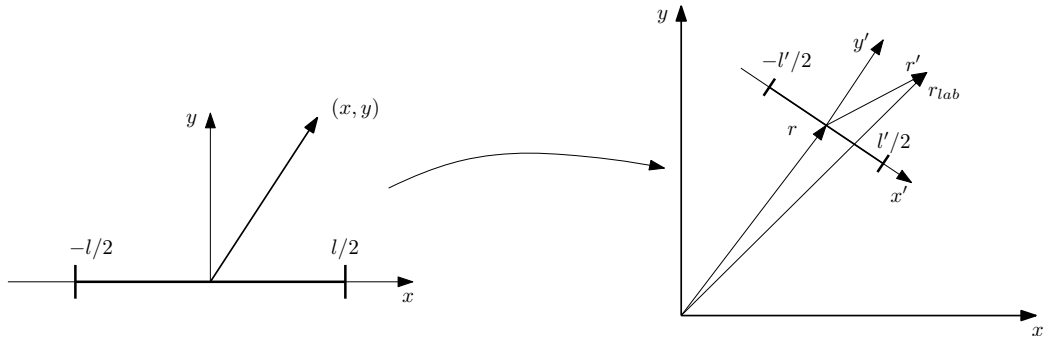
$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \log((x - \xi)^2 + y^2) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( -y \arctan\left(\frac{x - l/2}{y}\right) + y \arctan\left(\frac{x + l/2}{y}\right) - l \right) \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \left( (x + l/2) \log(y^2 + (x + l/2)^2) - (x - l/2) \log(y^2 + (x - l/2)^2) \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Trak širine  $l$  in potencialno polje v točki  $u(x, y)$  v lastnem sistemu je prikazan na sliki 1.



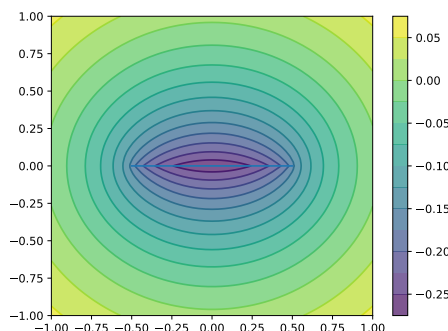
Slika 1: Greenova funkcija panela v lastnem sistemu  $G_0(0, x, y)$ .

Ideja tokratne naloge je, opisati neko poljubno obliko s končno mnogimi trakovi dolžin  $l_i$  oz. tako imenovanimi “paneli”. Pri tem je potrebno panele ustrezno prestaviti in rotirati, kot prikazano na sliki 2. Potencial laboratorijskega sistema je tako potrebno poračunati v ustreznem lastnem sistemu panela.



Slika 2: Prestavljen in rotiran panel in njegov lastni sistem. Dobimo  $G_{r,r'}$ .

Za začetek si poglejmo potencialno polje enakomerno nabitega panela prikazao na sliki 3, ki predstavlja izolator, kateri ima nanešeno konstantno gostoto naboja.



Slika 3: Izolator s konstantno gostoto naboja.

Rezultat je seveda pričakovan. Potrebno je opomniti, da rezultat je le približek zelo dolgega traku in nima fizikalnega pomena, saj potencial, za katerega *Greenova* funkcija za ravnino  $u(r) = \frac{1}{2\pi} \log(r)$  divergira, ko  $u(r \rightarrow \infty) \rightarrow \infty$ , kar seveda fizikalno nima interpretacije.

Poglejmo si sedaj polje prevodnega traku. Trak razdelimo na panele. Želimo imeti konstanten potencial na traku. To dosežemo tako, da poračunamo prispevek  $j$ -tega panela v središču  $i$ -tega, kar je element  $G_{ij}$  matrike  $G$ . Takšna matrika je simetrična. Želimo, da velja

$$u_i = \sum_j G_{ij} \sigma_j = \text{konst.} \quad (2)$$

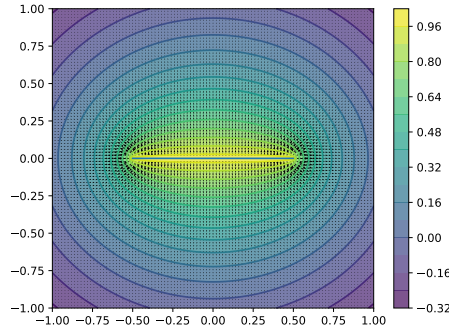
kjer je  $u_i$  potencial  $i$ -tega panela in ga postavimo na konstantno vrednost. Torej iščemo površinske gostote naboja  $\sigma_i$  panelov. Z izračunano matriko  $G$  je iskanje vektorja  $\sigma$  trivialno. Z izračunanimi gostotami naboja  $\sigma$  je potem naša rešitev v poljubni točki laboratorijskega sistema kar

$$u(x, y) = \sum_i G_{ij} \sigma_i,$$

seveda v smislu, da so paneli ustrezno rotirani in translatirani. Na sliki 4 je prikazan rezultat elektrostatskega polja za raven prevoden trak, razdeljen na 100 panelov. Robne točke panelov smo določili s funkcijo

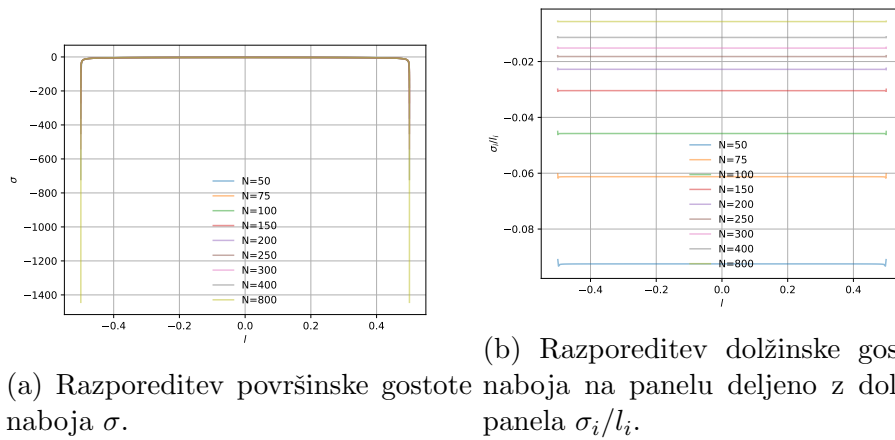
$$f = 0.5 \cos(\pi x),$$

kjer je  $x$  enakomerno porazdeljen med 0 in 1. Tako dobimo bolj gosto razporeditev točk na robovih traku.



Slika 4: Potencial prevodnega traku razdeljenega na 100 panelov.

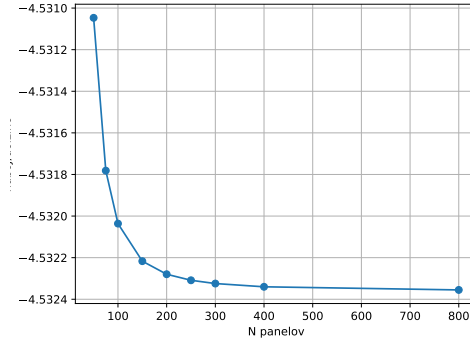
Poglejmo si še razporeditev naboja po traku. Razporeditev prikazujeta sliki 5



(a) Razporeditev površinske gostote naboja na panelu deljeno z dolžino naboja  $\sigma$ .  
(b) Razporeditev dolžinske gostote naboja na panelu deljeno z dolžino naboja  $\sigma_i/l_i$ .

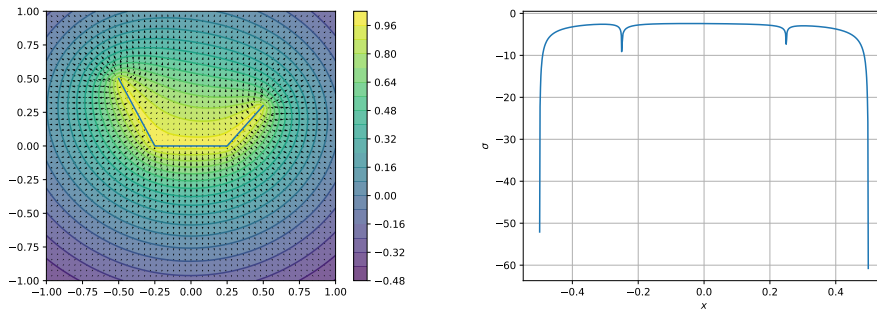
Slika 5: Razporeditev naboja po traku, glede na število panelov

Slike 5 niso ravno zelo pregledne, vidimo pa, da se naboj nabira na vsakem od vogalov traku in z večanjem števila panelov divergira (je  $\infty$ ). Celoten naboj mora ostati konstanten. Konvergenco celotnega naboja na širino traku glede na število panelov prikazuje slika 6.



Slika 6:  $\sum_i \sigma_i \cdot l_i$

Podobno analizo bi lahko napravili še za bolj poljubno postavitev elektrod s konstantnim potencialom. Primer je prikazan na sliki 7, kjer imamo enakomerno razporejenih 400 panelov.



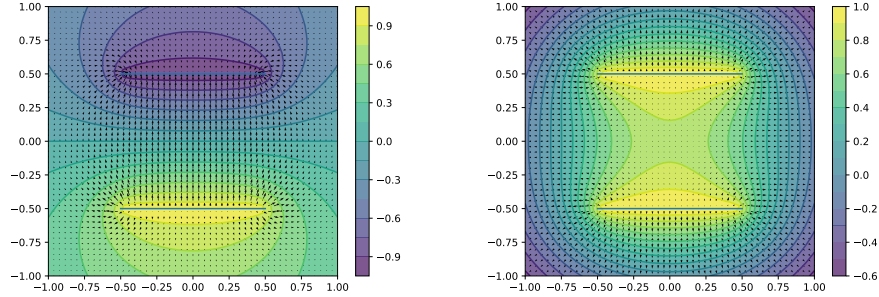
(a) Elektrostatki potencial.

(b) Porazdelitev naboja.

Slika 7: Poljubna postavitev treh elektrod s konstantnim potencialom za 200 panelov.

Vidimo, da se naboj nabira na vogalih elektrod, kar je seveda pričakovano.

Kot zanimivost si oglejmo še kvazi kondenzator priključen na elektrodi s potencialoma 1 in -1 ter 1 in 1. Podrobne analize ne bomo naredili. Razporeditev naboja je zelo podobna razporeditvi prikazani na sliki 5a. Rezultate prikazujeta sliki 8.



Slika 8: Kondenzator in anti-kondenzator :D.

## Obtekanje vitkih teles

Metoda je zelo popularna v hidrodinamiki za obtekanje idealne tekočine okoli vitkih teles, kjer imamo podan vektor hitrosti v neskončnosti, robni pogoj na površini telesa pa zahteva, da je normalna hitrost enaka 0. Količine  $\sigma_i$  predstavljajo gostoto izvirov, ki jih vpeljemo na meji telesa, da z njimi kompenziramo zunanji tok. Enačba (1) sedaj predstavlja hitrostni potencial enega panela v lastnem sistemu. Na enačbo (1) delujemo z  $\nabla_{x,y}$  in dobimo komponenti hitrosti

$$v_{\parallel} = \frac{1}{4\pi} \log \left( \frac{(x + l/2)^2 + y^2}{(x - l/2)^2 + y^2} \right) \quad (3)$$

$$v_{\perp} = \frac{1}{2\pi} \left( \arctan \left( \frac{x + l}{y} \right) - \arctan \left( \frac{x - l}{y} \right) \right). \quad (4)$$

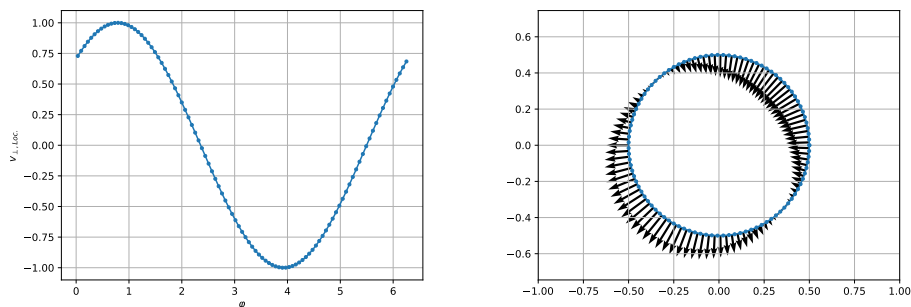
V dobljenih enačbah je potrebno paziti, saj vzporedna komponenta divergira na vogalih, pravokotna komponenta pa ima v limiti  $y \rightarrow 0$  končno vrednost

$$\lim_{y \rightarrow 0} v_{\perp} = \begin{cases} 1/2 & ; -l/2 \leq x \leq l/2 \\ 0 & ; \text{sicer.} \end{cases}$$

Najprej si pogledjmo metodo na neskončnem valju, okroglega preseka, kjer bomo za vektor hitosti v neskončnosti vzeli

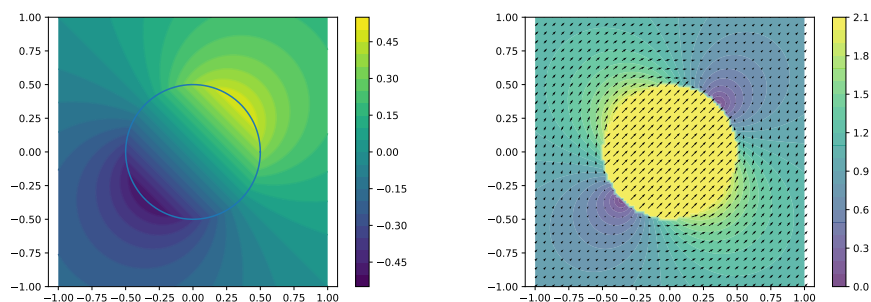
$$\vec{v}_{\infty} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2).$$

Najprej razdelimo okrogel presek na panele in izračunamo smerne vektorje  $\vec{t}_i$  in normalne vektorje  $\vec{n}_i = (-t_{yi}, t_{xi})$  panelov. Nato poračunamo normalne komponente hitrosti, ki jih povzroča tok. Profil in velikost komponent je prikazan na slikah 9



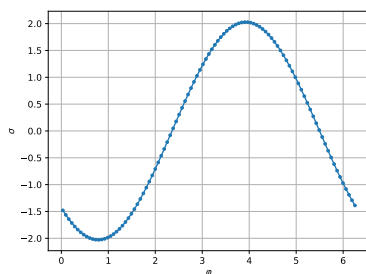
Slika 9: Profil normalnih komponent hitrosti panelov.

Poračunati moramo matriko  $V$  in rešiti sistem  $V\sigma = v_{\perp}$ . Tokrat imamo opravka z vektorji, zato je potrebno biti previden z rotacijami. Rezultate prikazujeta spodnji sliki 10 za primer 99 enakomerno razporejenih panelov.



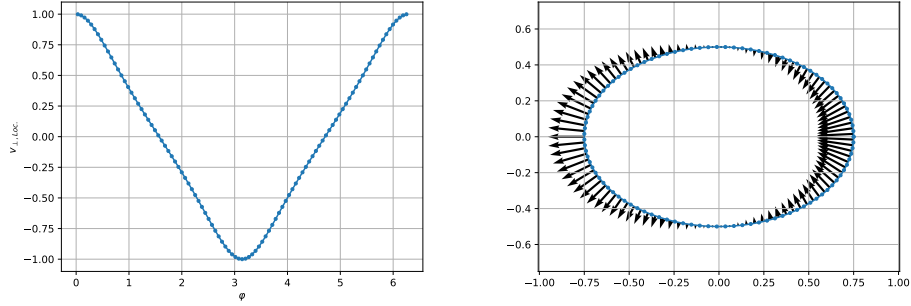
Slika 10: Hitrostno potencialno polje levo in vektorsko hitrostno polje desno.

Prikažemo lahko še razporejenost izračunanih izvirov gostote. Kot razberemo iz slike 11, so izviri gostote raporejeni ravno obratno, kot profil normalnih hitrosti panelov.

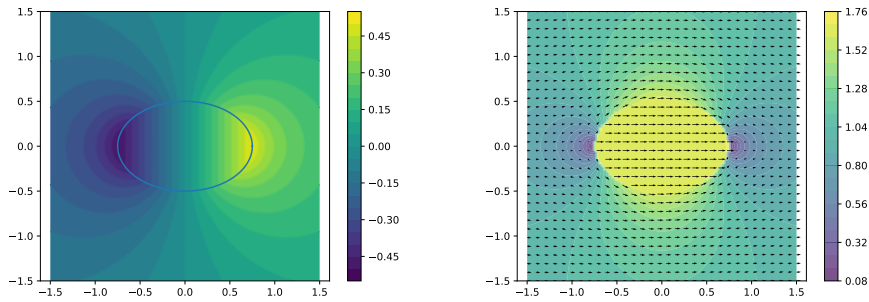


Slika 11: Razporejenost gostote izvirov.

Poglejmo si sedaj valj s presekom elipse na sto in en način. Prvi primer za vektor hitrosti  $\vec{v}_\infty = (1, 0)$ , rezultate prikazujejo slike 12 in 13.

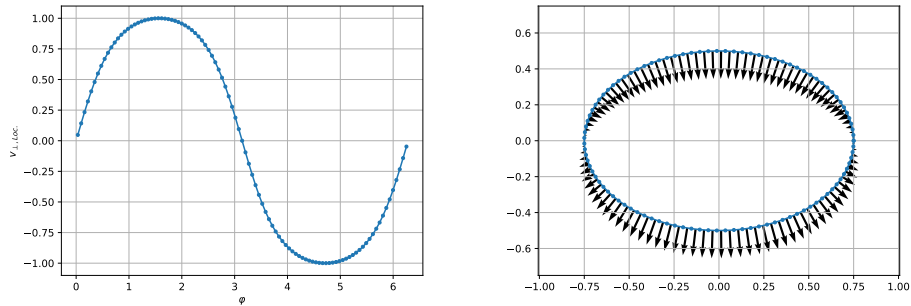


Slika 12: Profil normalnih komponent hitrosti panelov za elipso.



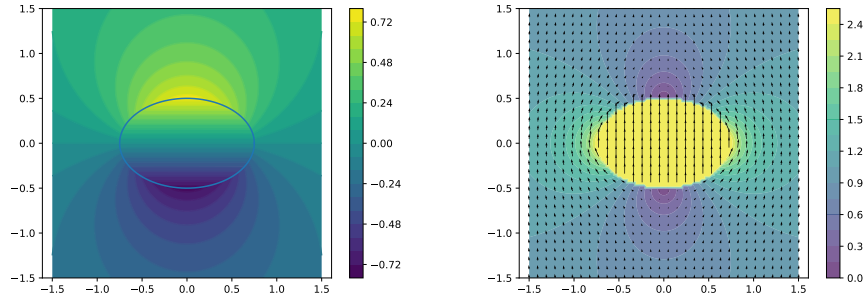
Slika 13: Hitrostno potencialno polje levo in vektorsko hitrostno polje desno za elipso.

Sledi primer z  $\vec{v}_\infty = (0, 1)$  na slikah 14 in 15.



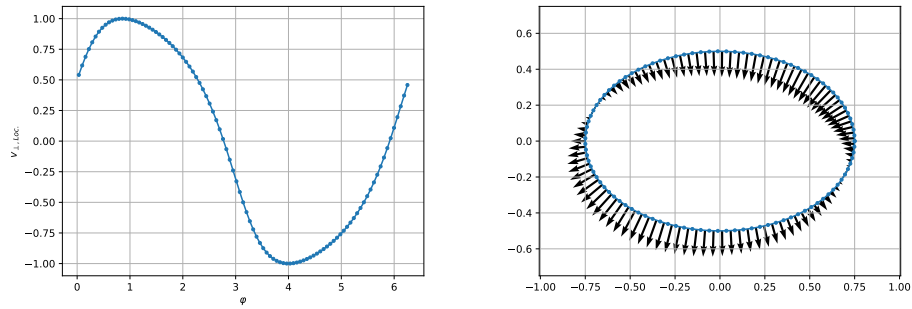
Slika 14: Profil normalnih komponent hitrosti panelov za elipso.



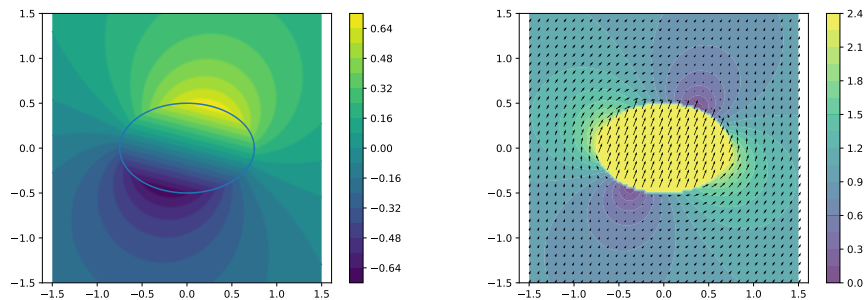


Slika 15: Hitrostno potencialno polje levo in vektorsko hitrostno polje desno za elipso.

Kot zadnji primer elipse imamo  $\vec{v}_\infty = (1/2, \sqrt{3}/4)$  na slikah 16 in 17.

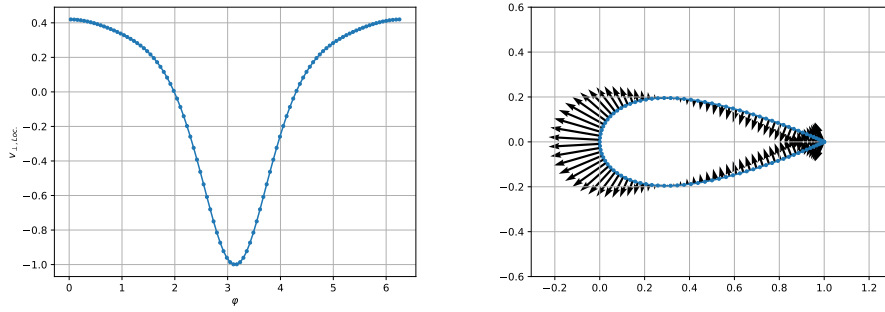


Slika 16: Profil normalnih komponent hitrosti panelov za elipso.

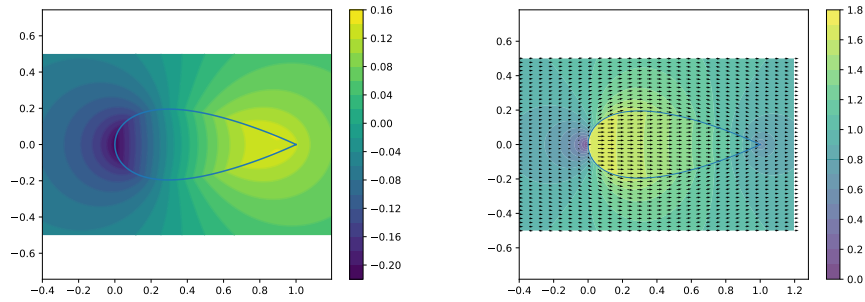


Slika 17: Hitrostno potencialno polje levo in vektorsko hitrostno polje desno za elipso.

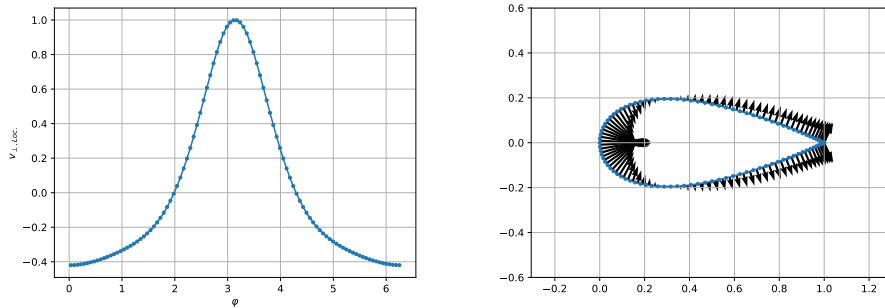
Podobno kratko analizo naredimo še za profil NACA-0020, kjer imamo rešitve v prvem primeru za  $\vec{v}_\infty = (1, 0)$  na slikah 18 in 19, in v drugem primeru  $\vec{v}_\infty = (-1, 0)$  na slikah 20 in 21.



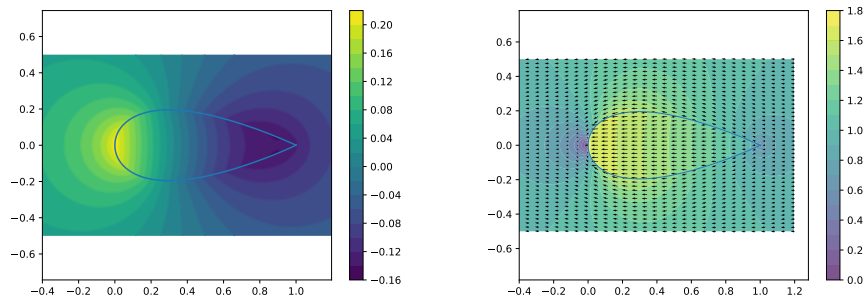
Slika 18: Profil normalnih komponent hitrosti panelov za NACA profil.



Slika 19: Hitrostno potencialno polje levo in vektorsko hitrostno polje desno za NACA profil.

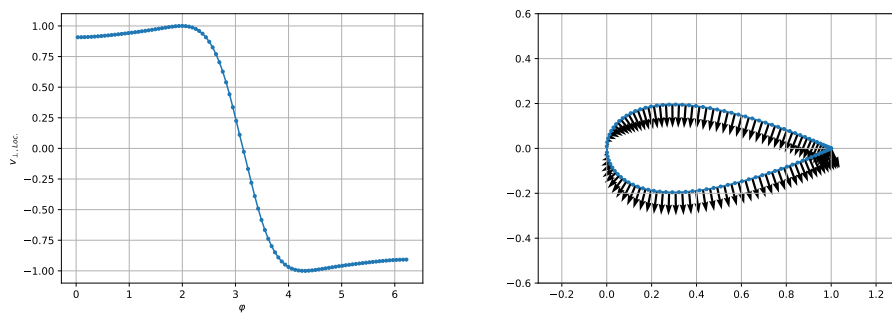


Slika 20: Profil normalnih komponent hitrosti panelov za NACA profil.

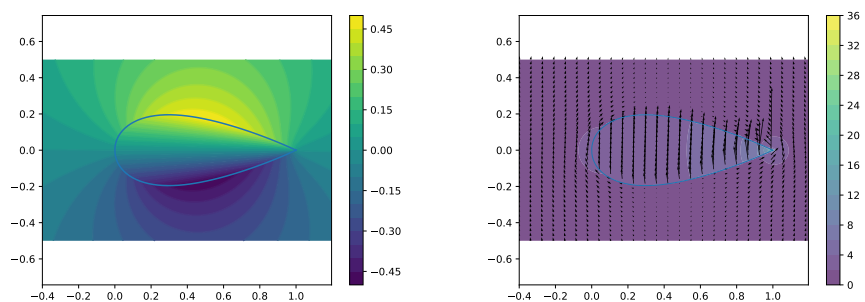


Slika 21: Hitrostno potencialno polje levo in vektorsko hitrostno polje desno za NACA profil.

Zanimiv rezultat dobimo, če podamo vektor  $\vec{v}_\infty = (0, 1)$ . V tem primeru imamo singularno točko v vogalu profila NACA. Rezultate prikazujejo slike 22, 23.

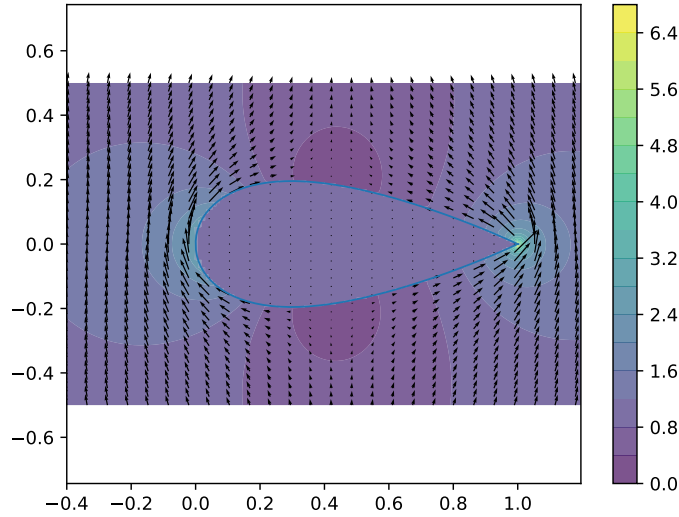


Slika 22: Profil normalnih komponent hitrosti panelov za NACA profil.



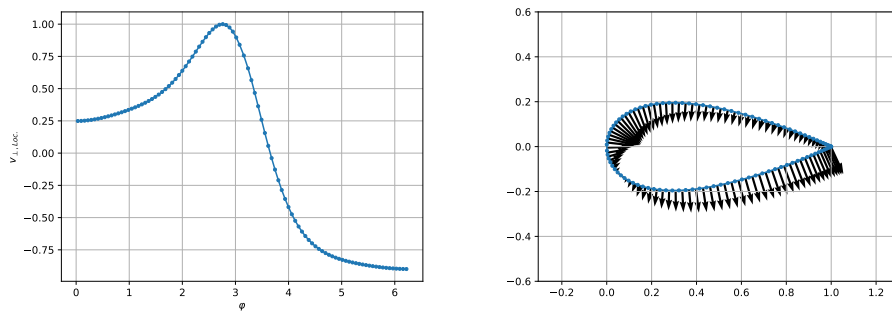
Slika 23: Hitrostno potencialno polje levo in vektorsko hitrostno polje desno za NACA profil.

Ker se na desni sliki 23 slabše vidi hitrostno polje zaradi singularne točke v vogalu, smo zaradi lepše preglednosti postavili vse hitrosti znotraj profila postavili na  $\vec{v}_\infty$ . Rezultat z lepšim zunanjim profilom toka, je prikazan na sliki 24

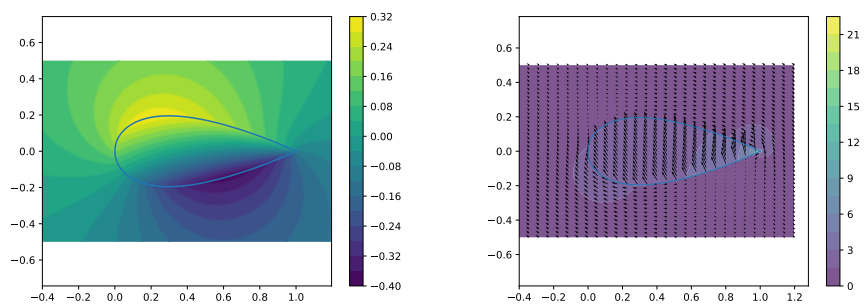


Slika 24: Vektorsko hitrostno polje za NACA profil.

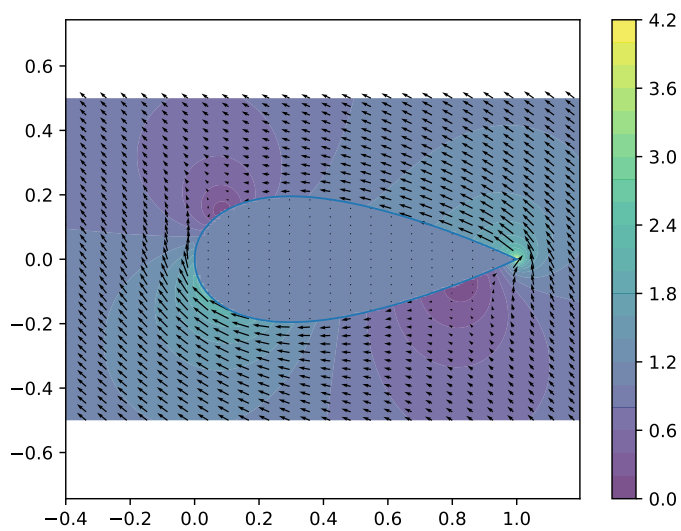
Za konec si pogledjmo še NACA profil na primeru  $\vec{v}_\infty = (-\sqrt{3/5}, \sqrt{2/5})$ . Rezultate prikažejo slike 25, 26 in zaradi lepše preglednosti hitrostnega profila 27.



Slika 25: Profil normalnih komponent hitrosti panelov za NACA profil.



Slika 26: Hitrostno potencialno polje levo in vektorsko hitrostno polje desno za NACA profil.



Slika 27: Vektorsko hitrostno polje za NACA profil.