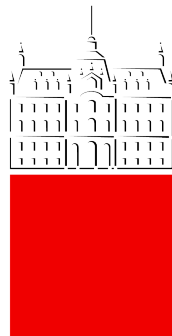


Univerza v Ljubljani
Fakulteta za *matematiko in fiziko*



Modelska analiza 2
10. naloga - Direktno reševanje Poissonove
enačbe

Študent: Pšeničnik Tomaž

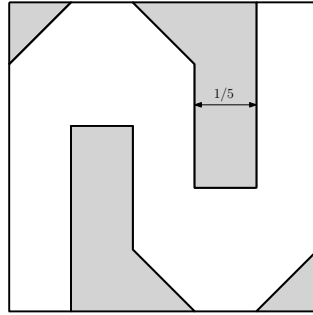
23. maj 2019

Poves kvadratne opne

Tokratna naloga je najti poves kvadratne opne, ki je obtežena kot prikazuje slika 1. Problem že znamo rešiti z iteracijsko *Jacobijevo* metodo ali podobnim postopkom in nato prevesti na postopek pospešene relaksacije, kot v nalogi 5. Na hitro se spomnimo *Jacobijeve* iteracije:

$$u_{j,k}^{n+1} = [h^2 g_{j,k} + u_{j+1,k}^n + u_{j-1,k}^n + u_{j,k+1}^n + u_{j,k-1}^n] / 4, \quad (1)$$

kjer je h razmik med dvema sosednjima točkama, $g_{j,k}$ pa obtežitev območja v dani točki. Razmik h privzamemo, da je enak med vsemi sosednjimi točkami.



Slika 1: Obtežitev po območju

Toda tokratno nalogo lahko rešimo z bolj učinkovito metodo, in sicer s *Fourierovo* transformacijo oz. FFT (*Fast Fourier Transform*). *Fourierovo* metodo lahko uporabimo vedno takrat, kadar so meje področja koordinatne črte katerega od separabilnih koordinatnih sistemov (npr. pravokotnik), robni problemi pa linearni. V tokratnem primeru, ko gre za kvadrat, razvijemo območje in odmike z 2D *Fourierovo* transformacijo:

$$u_{j,k} = \sum_{j=0, k=0}^{N-1} U^{m,n} e^{2\pi i m j / N} e^{2\pi i n k / N}, \quad (2)$$

$$g_{j,k} = \sum_{j=0, k=0}^{N-1} G^{m,n} e^{2\pi i m j / N} e^{2\pi i n k / N}, \quad (3)$$

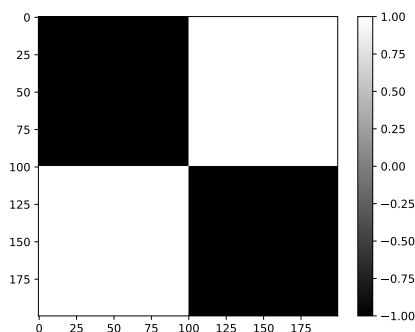
kjer so u odmiki, g pa funkcija obtežitve. Z vstavitvijo enačb (2) in (3) v enačbo (1), pridemo do koristne zveze

$$U^{m,n} = \frac{h^2 G^{m,n}}{2 \cos(2\pi m / N) \cos(2\pi n / N) - 4}, \quad (4)$$

katera pa ne velja za $m = n = 0$. Ker morajo biti vsi odmiki v našem primeru na robovih nič, sledi

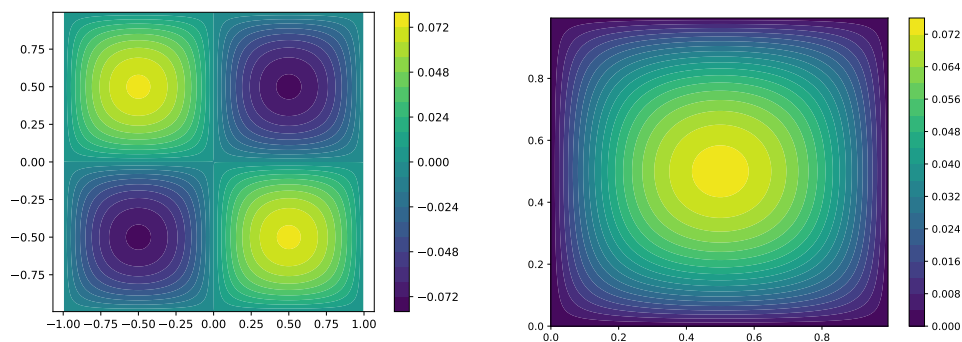
$$u_{0,0} = 0 = \sum_{m=0, j=0}^{N-1} U^{m,n} \rightarrow U^{0,0} = - \sum_{\text{ostali}} U^{m,n}. \quad (5)$$

Rešitev enakomerno obtežene kvadratne opne poznamo že iz naloge 5. Zato si najprej pogledjmo rešitev s *Fourierovo* metodo. Da zadostimo robnim pogojem ($u = 0$ na robu), je potrebno območje liho razširiti v obe strani. Razširitev je prikazana na sliki 2



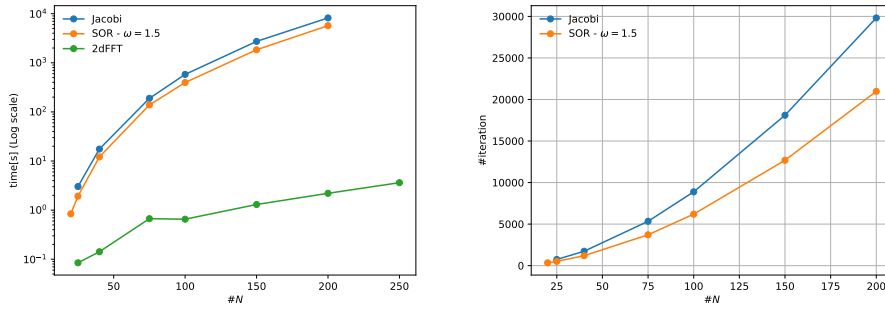
Slika 2: Obtežitev po območju.

Tako dobimo že znano rešitev, prikazano na slikah 3. Pri obratni transformaciji $U \rightarrow u$ dobimo skoraj povsem realne rešitve, imaginarni deli so zanemarljivo majhni.



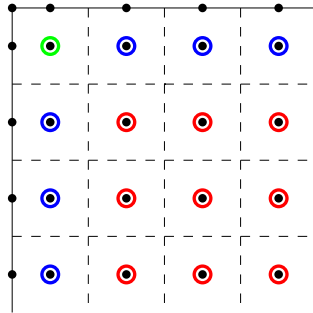
Slika 3: Na levi rešitvi so prikazani le realni deli, na desni rešitvi so prikazani absolutni odmiki leve rešitve zgornje desne slike.

Naredimo hitrostno primerjavo med obema metodama. Kako se dokopati do števila iteracij v knjižici `scipy.fftpack.fft2` nam žal ni uspelo, zato si pogledjmo le časovno primerjavo med metodami. Seveda je potrebno vzeti v zakup, da je število iteracij pri metodi SOR toliko večje, kolikor je zahtevana natančnost. Rezultate prikazujeta sliki 4.



Slika 4: Časovna primerjava metod levo in primerjava s številom iteracij med *Jacobi*jevo iteracijsko metodo in SOR desno.

Sedaj se lotimo reševanja različno obteženega območja. Za referenco najprej rešimo z metodo SOR. Območje razdelimo, kot je prikazano na sliki 5.



Slika 5: Točke podane po območju, obkrožene točke so notranje točke območja, po katerih računamo.

Tako bomo uporabili malenkost modificirano enačbo 1 in sicer:

- Vogalne točke (obkrožene zeleno - so štiri):

$$\tilde{u}_{j,k}^n = u_{j,k}^{n+1} = [h^2 g_{j,k} + u_{j+1,k}^n + u_{j-1,k}^n + u_{j,k+1}^n + u_{j,k-1}^n] / 6,$$

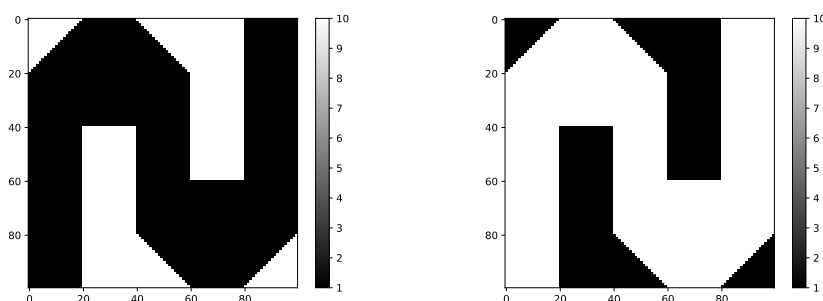
- Robne točke (obkrožene z modro):

$$\tilde{u}_{j,k}^n = u_{j,k}^{n+1} = [h^2 g_{j,k} + u_{j+1,k}^n + u_{j-1,k}^n + u_{j,k+1}^n + u_{j,k-1}^n] / 5,$$

- Vse ostale - notranje točke (obkrožene z rdečo):

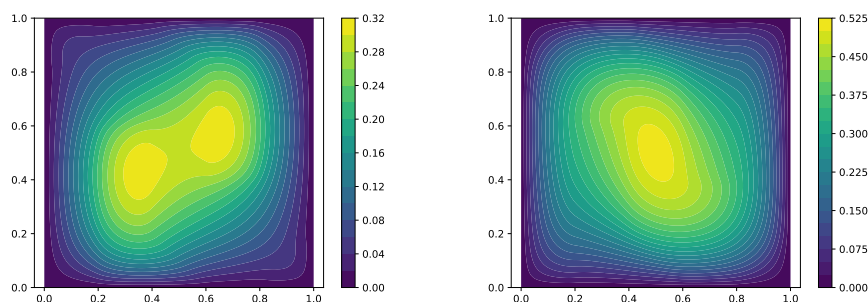
$$\tilde{u}_{j,k}^n = u_{j,k}^{n+1} = [h^2 g_{j,k} + u_{j+1,k}^n + u_{j-1,k}^n + u_{j,k+1}^n + u_{j,k-1}^n] / 4.$$

Računali bomo le po notranjih točkah območja. Zunanje točke odmikov fiksiramo $u = 0$. Računali bomo po območju prikazanem na slikah 6.



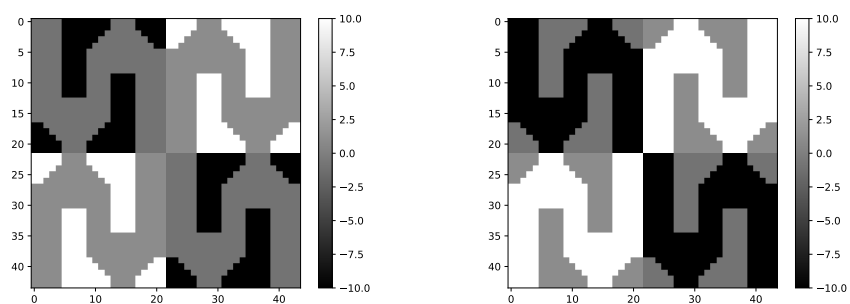
Slika 6: Prvi primer levo in drugi primer desno.

Tako dobimo referenčni rešitvi prikazani na slikah 7.



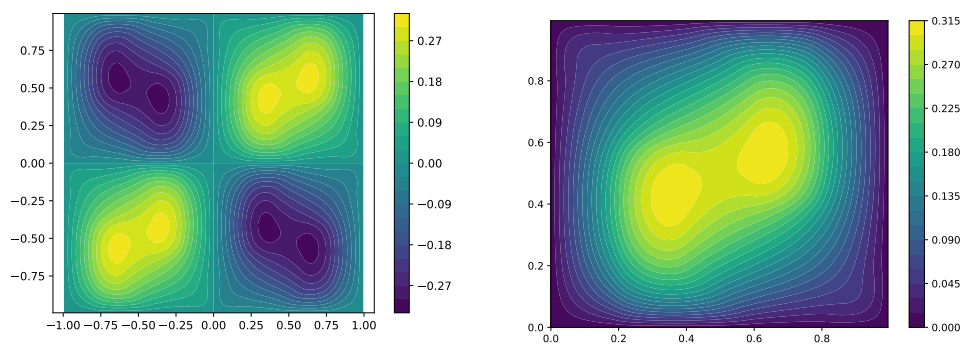
Slika 7: Prvi primer levo in drugi primer desno za 100x100 veliko bomočje.

Najprej si pogledjmo, kako razširiti območje za *Fourierovo* transformacijo. Razširitev območja je prikazana na sliki 8. Območju smo dodali še zunanje točke, kateri smo pripisali vrednost obteženega območja na tej meji.

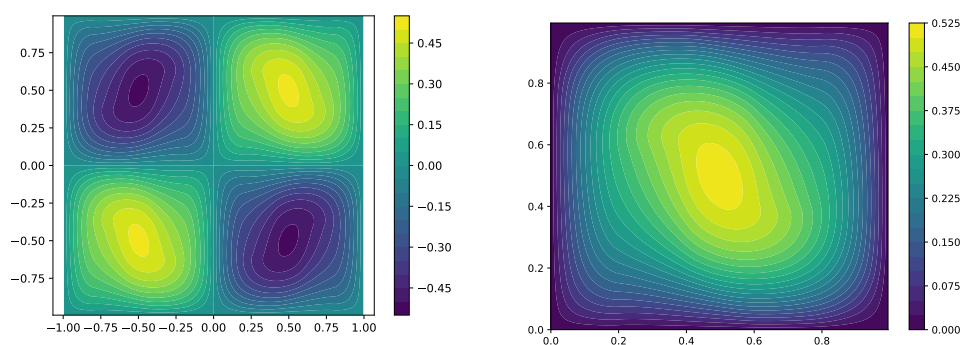


Slika 8: Prvi primer levo in drugi primer desno za 21x21 veliko območje enega kvadranta.

2D *Fourierovo* transformacijo poženemo po celotnem območju. Rezultata sta prikazana na slikah 9 in 10.

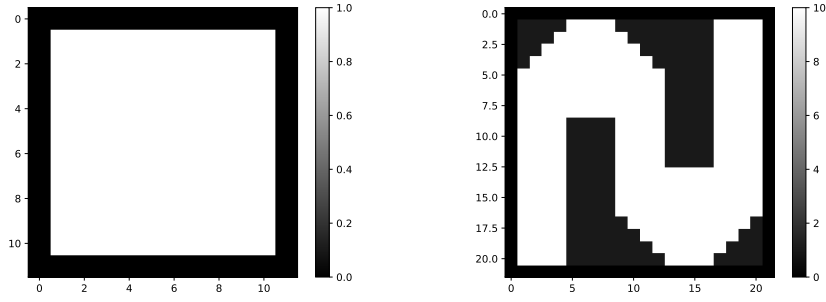


Slika 9: Prvi primer za 201x201 veliko območje enega kvadranta.



Slika 10: Drugi primer za 201x201 veliko območje enega kvadranta.

Poglejmo si še princip kombinirane metode, pri kateri v eni smeri uporabimo sinusno FFT, v drugi smeri pa SOR. Metoda nam bo prišla prav v nadaljevanju, zato je koristno preveriti pravilnost izračunov na že znanih rezultatih za poves opne. Najprej potrebujemo območje, na katerem bomo izvedli račune. Primera območja prikazujeta sliki 11



Slika 11: Območji za kvadratno opno brez obtežitve in z obtežitvijo.

Tokrat postavimo rob območja na 0, ker ne želimo odmika na robu. V navpični smeri bomo naredili sinusno FFT območja:

$$G^m_k = \sum_j g_{j,k} 2 \sin(\pi j/N). \quad (6)$$

Če razvijemo še odmike po sinusni FFT:

$$U^m_k = \sum_j u_{j,k} 2 \sin(\pi j/N) \quad (7)$$

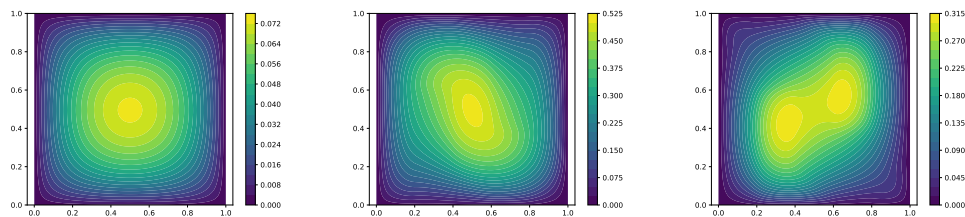
in enačbi (6) in (7) vstavimo v znano zvezo (1), dobimo iteracijsko zvezo v *Fourierovem* prostoru:

$$(U^m_k)^{n+1} = [(U^m_{k-1})^n + (U^m_{k+1})^n + (G^m_k)^n h^2] / (4 - 2 \cos(m\pi/N)), \quad (8)$$

s katero računamo po vseh vrsticah. Na koncu naredimo le še obratno sinusno FFT:

$$u_{j,k} = \sum_m U^m_k \sin(m\pi j/N)/N \quad (9)$$

in dobimo že znane rezultate prikazane na slikah 12



Slika 12: Poves kvadratne opne dobljen s kombinirano metodo.

Temperaturni profil enakostraničnega valja

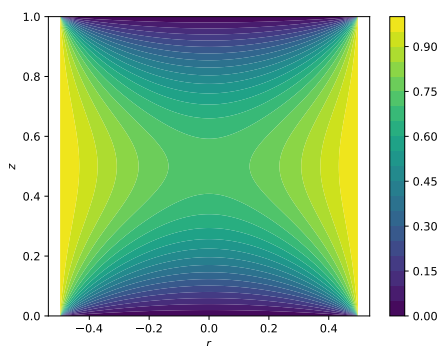
Spomnimo se *Jacobijeve* metode za cilindrične koordinate iz naloge 5:

$$u_{j,k}^{n+1} = \left(g_{j,k} + \frac{u_{j,k-1}^n + u_{j,k+1}^n}{h_r^2} + \frac{1}{r_k} \left(\frac{u_{j,k+1}^n - u_{j,k-1}^n}{2h_r} \right) + \frac{u_{j-1,k}^n + u_{j+1,k}^n}{h_z^2} \right) / d, \quad (10)$$

kjer je

$$d = \left(\frac{2}{h_r^2} + \frac{2}{h_z^2} \right).$$

Dobimo referenčno rešitev s to metodo, prikazano na sliki 13, kjer valj na osnovnicah hladimo pri temperaturi 0, na straneh pa grejemo pri temperaturi 1.



Slika 13: Enakostraničen valj za 100x100 veliko območje.

Postopek lahko pospešimo, če v z smeri naredimo sinusno FFT, uporabimo *Jacobijevo* iteracijsko metodo v smeri r in naredimo inverzno sinusno FFT v z smeri. V enačbo (10) vstavimo sinusne FFT transformiranke (6)

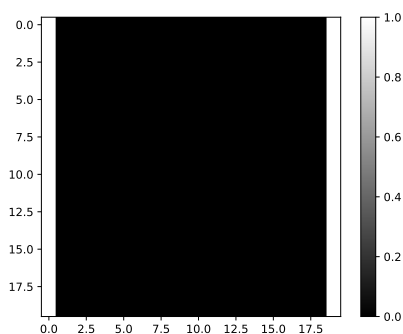
in (7), ter ponovno dobimo iteracijsko zvezo s poljubno dolžino med vsemi sosednjimi točkami v r smeri h_r in z smeri h_z :

$$\begin{aligned} (U^m_k)^{n+1} \left(d - \frac{1}{h_z^2} 2 \cos(\pi m / N) \right) = \\ = (G^m_k)^n + (U^m_{k-1})^n \left(\frac{1}{h_r^2} - \frac{1}{2h_r r_k} \right) + (U^m_{k+1})^n \left(\frac{1}{h_r^2} + \frac{1}{2h_r r_k} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

V tokratnem primeru rešujemo *Laplaceovo* enačbo

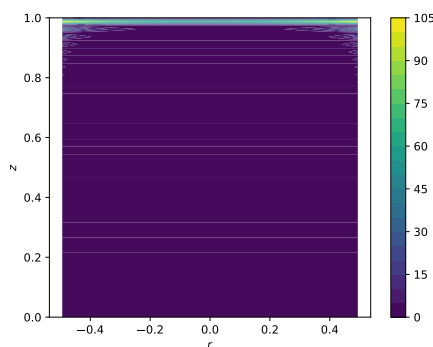
$$\nabla^2 u = 0,$$

tako bo območje povsod nič. Odmike na plašču bomo fiskirali na ena, kot prikazuje slika 14 in tako dobili sinusno FFT le za dva stolpca.



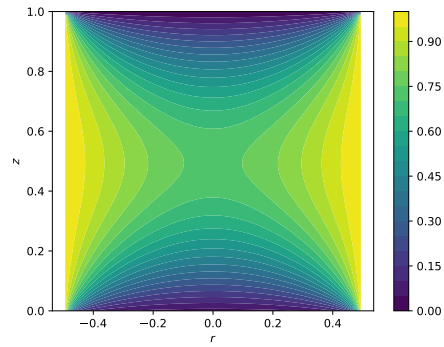
Slika 14: Začetni pogoji za enakostraničen valj s konstantno temperaturo na plašču.

Za izračun naslednjih U^m_k , uporabimo dobljeno zvezo 11. Dobljeni rezultat prikazuje slika 15



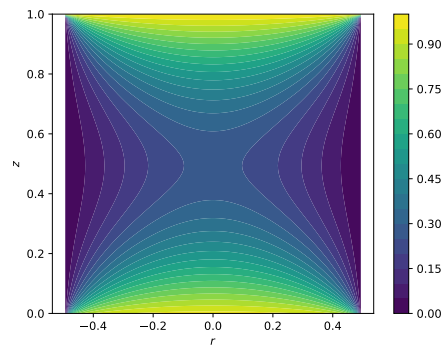
Slika 15: Dobljeni U^m_k .

Preostane nam samo še inverzna sinusna FFT in dobimo znan rezultat, prikazan na sliki 16.



Slika 16: Temperaturni profil valja z višjo temperaturo na osnovnicah.

Če želimo imeti na plašču temperaturo nič in na osnovnicah temperaturo 1, je vse kar moramo storiti, da zamenjamo enice z -1 na sliki 14 in h končnemu rezultatu prištejemo ena. Na tak način lahko dobimo tudi poljubno temperaturo na plašču in osnovnicah. Primer je prikazan na sliki 17.



Slika 17: Temperaturni profil valja z višjo temperaturo na plašču.