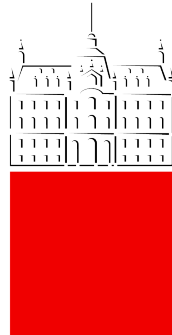


Univerza v Ljubljani  
Fakulteta za *matematiko in fiziko*



## Modelska analiza 2

7. naloga - Metoda končnih elementov:  
Poissonova enačba

Študent: Pšeničnik Tomaž

29. april 2019

## Ne najkrajši uvod v FEM

Tokratna naloga je določiti pretok skozi polkrožno cev in pretok skozi cev iz 5. naloge s pomočjo metode končnih elementov oz. metodo FEM (Finite Element Method). Opravka imamo z že znano Poissonovo enačbo v dveh dimenzijah. Za začetek si pogledimo, kaj je to FEM in kako pridemo do uporabnih enačb.

Podano imamo območje  $\Omega$ , za katero velja Poissonova enačba

$$-\nabla^2 u = f, \quad (1)$$

pri čemer je  $u = u(x, y)$  iskano polje,  $f(x, y)$  podana funkcija. Osredotočili se bomo na Dirichletov robni pogoj, in sicer  $u = 0$  na robu danega območja  $\partial\Omega$ . Pomnožimo enačbo (1) z neko testno funkcijo  $v(x, y)$  in integrirajmo po območju  $\Omega$ .

$$\int_{\Omega} (-\nabla^2 u) v dS = \int_{\Omega} f v dS. \quad (2)$$

Za testno funkcijo zahtevamo, da je  $v = 0$  na robu  $\partial\Omega$ . Z relacijo

$$(-\nabla^2 u) v = \nabla u \cdot \nabla v - \nabla \cdot (\nabla u v)$$

in Gaussovim izrekom prepišemo enačbo 2 v

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dS - \int_{\partial\Omega} (\nabla u) v d\vec{s} = \int_{\Omega} f v dS.$$

Zaradi pogoja  $v = 0$  na  $\partial\Omega$  drugi člen na levi odpade in dobimo zvezo

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v - f v) dS = 0. \quad (3)$$

Za iskanje rešitve variacijskega problema (3), moramo le tega diskretizirati. Diskretizacije se lotimo tako, da razvijemo  $u$  in  $v$  po isti bazi nekega diskretnega prostora  $\Phi$  z baznimi funkcijami  $\phi$ . Sistem, kjer uporabljamo isto bazo za razvoj testne funkcije  $v$  in iskane funkcije  $u$ , rečemo *Galerkinov sistem*. Tako imamo

$$u = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j(x, y) \quad \text{in} \quad v = \sum_{j=1}^N d_j \phi_j(x, y), \quad (4)$$

in vstavimo v enačbo (3) in dobimo

$$\int_{\Omega} \nabla \left( \sum_{j=1}^N c_j \phi_j \right) \cdot \nabla \left( \sum_{i=1}^N d_i \phi_i \right) = \int_{\Omega} f \sum_{i=1}^N d_i \phi_i$$

oziroma

$$\sum_{j=1}^N c_j \int_{\Omega} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i dS = \int_{\Omega} f \phi_i dS \quad \forall i. \quad (5)$$

Enačbo (5) prepoznamo kot sistem linearnih enačb

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} c_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \rightarrow Ac = b, \quad (6)$$

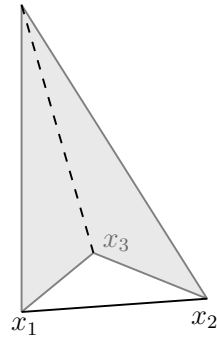
kjer sta

$$A_{i,j} = \int_{\Omega} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i dS \quad (7)$$

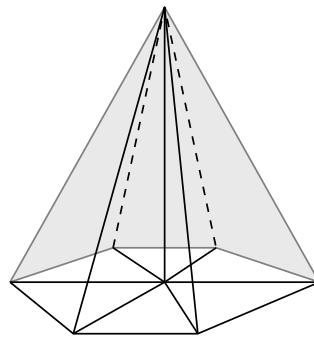
$$b_i = \int_{\Omega} f \phi_i dS. \quad (8)$$

Matrika  $A$  se angleško imenuje *stiffness* matrika,  $b$  pa *load* ali *source* vektor.

V našem primeru za bazne funkcije  $\phi$  vzamemo trikotnike z oglišči  $x_1, x_2, x_3$ , nad katere napeljemo tri piramide z vrhom v ogliščih tako, da velja  $\phi_j(x_k, y_k) = \delta_{j,k}$ . Več piramid (poljubno število) skupaj tvori bazno funkcijo. Na sliki 1 vidimo bazno funkcijo iz šestih piramid. Cilj je poračunati sistem enačb  $Ac = b$ , kjer dobimo koeficiente  $c_j$  vrhov baznih funkcij in nato zapišemo rešitev kot  $u(x, y) = \sum_j^N c_j \phi_j$ .



(a) Primer piramide.

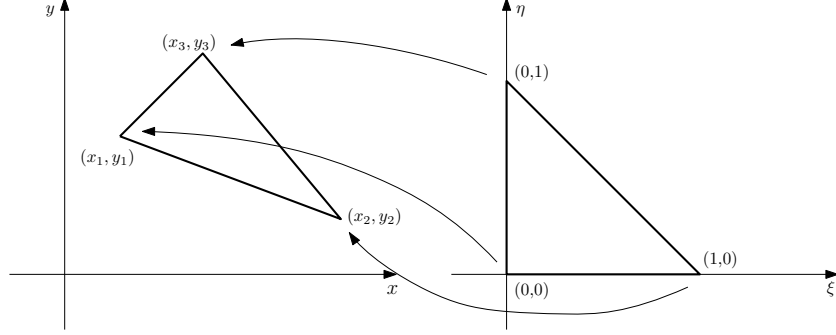


(b) Bazna funkcija iz šestih piramid.

Slika 1: Element nad trikotnikom in bazna funkcija.

Sedaj si pogledjmo, kako pridemo do triangulacije in do ustrezne matrike in vektorja. Najprej naredimo triangularizacijo območja  $\Omega$  in izberemo  $k$ -ti trikotnik  $\triangle_k$ . Preslikati moramo referenčni trikotnik  $\triangle_*$  na izbran trikotnik

$\Delta_k$ . Za  $\Delta_*$  si isto mislimo piramide z vrhi v ogliščih. Preslikavo prikazuje slika 2.



Slika 2: Preslikava iz referenčnega elementa  $\Delta_*$  na dani element  $\Delta_k$ .

Za vse trikotnike  $(x, y) \in \Delta_k$  je preslikava podana kot

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= x_1\chi_1(\xi, \eta) + x_2\chi_2(\xi, \eta) + x_3\chi_3(\xi, \eta) \\ y(\xi, \eta) &= y_1\chi_1(\xi, \eta) + y_2\chi_2(\xi, \eta) + y_3\chi_3(\xi, \eta), \end{aligned} \quad (9)$$

pri čemer so

$$\begin{aligned} \chi_1(\xi, \eta) &= 1 - \xi - \eta \\ \chi_2(\xi, \eta) &= \xi \\ \chi_3(\xi, \eta) &= \eta \end{aligned}$$

piramide nad referenčnim  $\Delta_*$  in ustrezajo:

$$\begin{array}{lll} \chi_1(0, 0) = 1 & \chi_1(1, 0) = 0 & \chi_1(0, 1) = 0 \\ \chi_2(0, 0) = 0 & \chi_2(1, 0) = 1 & \chi_2(0, 1) = 0 \\ \chi_3(0, 0) = 0 & \chi_3(1, 0) = 0 & \chi_3(0, 1) = 1 \end{array}$$

Preslikava iz referenčnega  $\Delta_*$  na  $\Delta_k$  mora biti diferenciable. Obstaja diferenciable funkcija  $\varphi(\xi, \eta)$  (računamo za splošen primer, za naš primer si lahko predstavljamo  $\varphi_i(\xi, \eta) = \chi_i(\xi, \eta)$ ), kateri lahko transformiramo odvode preko

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

V transformaciji (10) nastopa *Jacobijeva matrika* enega trikotnega elementa, ki jo enostavno poračunamo iz zvez (9) in dobimo

$$J_k = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

V tem enostavnem primeru vidimo, da je  $J_k$  konstanta matrika na referenčnem elementu  $\Delta_*$ , determinanta matrike pa je enaka dvakratniku ploščine  $\Delta_k$

$$|J_k| = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 2|\Delta_k|. \quad (12)$$

Dejstvo, da  $|J_k(\xi, \eta)| \neq 0$  za vse točke  $(\xi, \eta) \in \Delta_*$  zagotavlja, da obstaja obratna preslikava  $\Delta_k$  na  $\Delta_*$ , ki je enolično določena in je diferenciable. To pomeni, da lahko transformacijo odvodov (10) obrnemo in dobimo

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Vidimo, da odvodi funkcij definiranih na  $\Delta_k$  zadoščajo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{x} &= \frac{1}{|J_k|} \frac{\partial y}{\partial \eta}, & \frac{\partial \eta}{x} &= -\frac{1}{|J_k|} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \xi}{y} &= -\frac{1}{|J_k|} \frac{\partial x}{\partial \eta}, & \frac{\partial \eta}{y} &= \frac{1}{|J_k|} \frac{\partial x}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (14)$$

S podano bazno funkcijo  $\psi_{*,i}$  na referenčnem elementu  $\Delta_*$  (ponovno si predstavljamo, da so naše bazne funkcije  $\psi_{*,i} = \chi$ ), matriko  $A_{ij}^k$   $k$ -tega elementa enostavno poračunamo iz enačbe (7)

$$\begin{aligned} A_{ij}^k &= \int_{\Delta_k} \left( \frac{\partial \psi_{k,i}}{\partial x} \frac{\partial \psi_{k,j}}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{k,i}}{\partial y} \frac{\partial \psi_{k,j}}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \int_{\Delta_*} \left( \frac{\partial \psi_{*,i}}{\partial x} \frac{\partial \psi_{*,j}}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{*,i}}{\partial y} \frac{\partial \psi_{*,j}}{\partial y} \right) |J_k| d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (15)$$

V našem primeru velja, da so bazne funkcije  $\psi_{*,i} = \chi_i$ , je smiselno upeljati sledeče koeficiente:

$$\begin{aligned} b_1 &= y_2 - y_3; & b_2 &= y_3 - y_1; & b_3 &= y_1 - y_2; \\ c_1 &= x_3 - x_2; & c_2 &= x_1 - x_3; & c_3 &= x_2 - x_1; \end{aligned}$$

in v tem primeru dobimo iz enačb (13) in (14) zvezo med odvodi

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2|\Delta_k|} \begin{bmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Zvezo (16) vstavimo v (15) in dobimo lokalno matriko  $A^k$

$$A_{ij}^k = \int_{\Delta_*} \left( b_2 \frac{\partial \psi_{*,i}}{\partial \xi} + b_3 \frac{\partial \psi_{*,i}}{\partial \eta} \right) \left( b_2 \frac{\partial \psi_{*,j}}{\partial \xi} + b_3 \frac{\partial \psi_{*,j}}{\partial \eta} \right) \frac{1}{|J_k|} d\xi d\eta \\ + \left( c_2 \frac{\partial \psi_{*,i}}{\partial \xi} + c_3 \frac{\partial \psi_{*,i}}{\partial \eta} \right) \left( c_2 \frac{\partial \psi_{*,j}}{\partial \xi} + c_3 \frac{\partial \psi_{*,j}}{\partial \eta} \right) \frac{1}{|J_k|} d\xi d\eta.$$

Z vstavitvijo  $\psi_{*,i} = \chi_i$  dobimo znano zvezo, ki je zapisana v RMF za izračun lokalne matrike  $A^k$

$$A_{ij}^k = \frac{1}{2|J_k|} (y_{i+1} - y_{i+2}, \quad x_{i+2} - x_{i+1}) \begin{pmatrix} y_{j+1} - y_{j+2} \\ x_{j+1} - x_{j+2} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Izračun lokalnega vektorja  $b^k$  iz enačbe (8) je enostavnejši

$$b_i^k = \int_{\Delta_k} f(x, y) \psi_{k,i} = \frac{1}{3} \frac{|J_k|}{2} f(x_T, y_T)$$

in je kar enak volumnu piramide pomnožen s funkcijo  $f$  v težišču trikotnika  $\Delta_k$ . Tako pridemo do druge enačbe v RMF za izračun lokalnega vektorja  $b_i^k$

$$b_i^k = \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} x_{i+1} - x_i & x_{i+2} - x_i \\ y_{i+1} - y_i & y_{i+2} - y_i \end{pmatrix} f(x_T, y_T). \quad (18)$$

Primerna je opomba. V enačbah (17) in (18) upoštevamo podzapis  $i + 1 \dots$  kot modul števila 3.

Vse kar nam preostane še, je izračun globalne matrike  $A$  in globalnega vektorja  $b$ . To storimo tako, da seštevamo po vseh trikotnikih v triangulaciji

zanka po trikotnikih:  $k = 1, 2, \dots, N_k$

$$A_{\mathcal{T}(k,i), \mathcal{T}(k,j)} + = A_{ij}^k$$

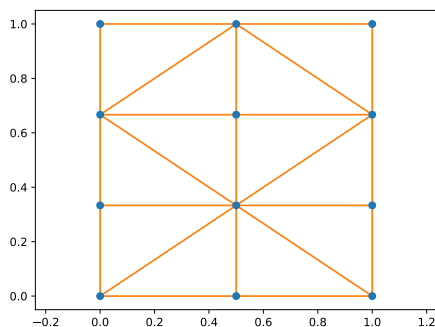
$$b_{\mathcal{T}(k,i)} + = b_i^k$$

kjer je  $\mathcal{T}$  številka točke trikotnika. Najlažje pokažemo algoritem na primeru. Izberemo si poljuben trikotnik  $k$  v naši triangulaciji. Njegova oglišča so označena po vrsti z npr. 1,3,6. K globalni matriki  $A$  prištejemo potem 9 členov  $A_{1,1} + = A_{1,1}^k$ ,  $A_{1,3} + = A_{1,2}^k$ ,  $A_{1,6} + = A_{1,3}^k$ ,  $A_{3,1} + = A_{2,1}^k$ ,  $A_{3,3} + = A_{2,2}^k$ ,  $A_{3,6} + = A_{2,3}^k$ ,  $A_{6,3} + = A_{3,2}^k$  in  $A_{6,6} + = A_{3,3}^k$ .

## Pretok skozi kvadratno cev

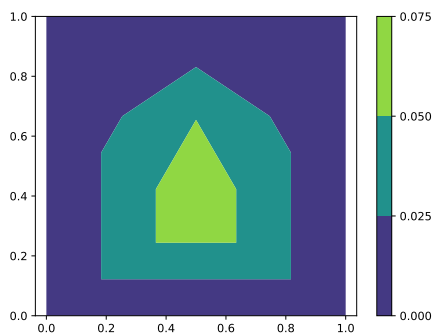
Preizkus delovanja algoritma je najlažje opraviti na enostavnem primeru. To je primer pretoka tekočine skozi kvadratno cev. Rešujemo primer za

konstantno funkcijo  $f = 1$ . Metode smo se lotili tako, da smo območje kvadrata triagonalizirali z *Delaunayjevo triagonalizacijo* s pomočjo knjižice `scipy.spatial.Delaunay`, pred tem smo morali določiti točke na robu in območju. Za začetni problem smo podali triagonalizacijo prikazano na sliki 3.



Slika 3: Začetna triagonalizacija za kvadraten presek.

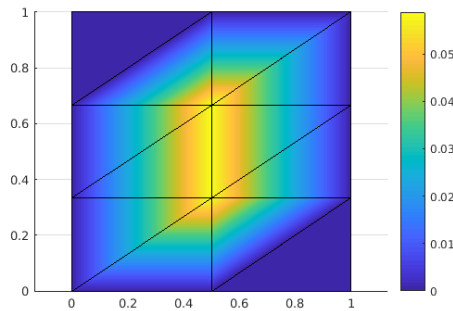
Triagonalizacija nam da dve različni bazni funkciji. Eno z osmimi piramidami - točka  $(0.5, 1/3)$  in eno s 4 piramidami - točka  $(0.5, 2/3)$ . Po dani triagonalizaciji smo izračunali globalno matriko  $A$  in po končanem računanju vse elemente matrike  $A$ , ki so na robu postavili na 0. Podobno smo storili z globalnim vektorjem  $b$ . Tako dobimo  $2 \times 2$  simetrično matriko  $A$  ustrezen vektor  $b$  z dvema elementoma. Rezultat je prikazan na sliki 4



Slika 4: Rezultat k triagonalizaciji 3.

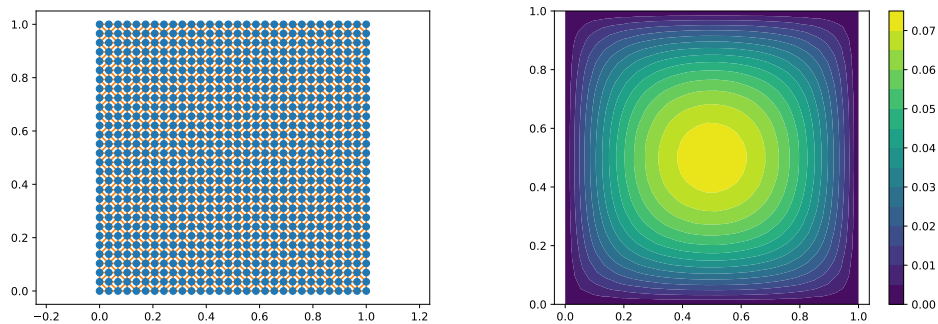
Slika 4 je sicer čudna, saj program *Python* nekako sam interpolira vmesna območja. Prikazati smo želeli, da dobimo za notranji točki - bazni funkciji

različno velika koeficienta  $c_1$  in  $c_2$ , čeprav bi pričakovali, da bosta imeli točki isto vrednost. Razlog tiči v obliki triagonalizacije, ki posledično vpliva na izračun vektorja  $b$ . Med iskanjem literature, sem naletel na že spisano kodo v *Matlabu* za pretok skozi kvadratno cev. Za enako število točk, kot na sliki 3 dobimo zaradi drugačne triagonalizacije bolj pričakovan-simetričen rezultat. Rešitev je prikazana na sliki 5.



Slika 5: Matlabova rešitev.

Kljub temu, da je mogoče prvi izračun nekako nepričakovan, dobimo za bolj gosto posejane točke pričakovan rezultat. Triagonalizacijo in pretok z mnogo gostejšo posajenostjo točk (30x30) prikazujeta sliki 6.

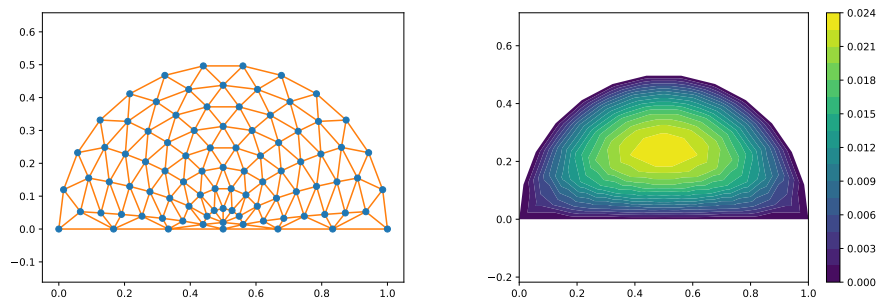


Slika 6: Triagonalizacija in pretok za kvadratno cev.

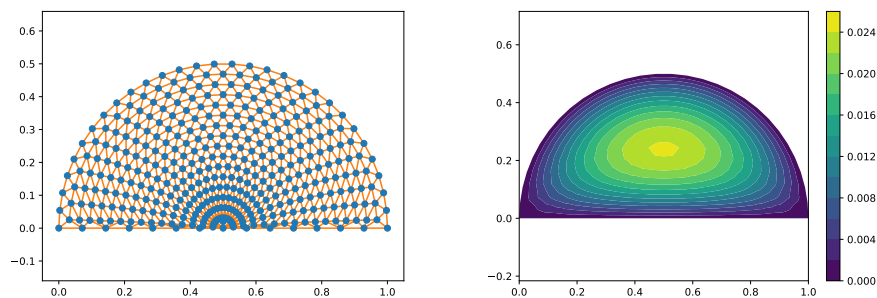


## Polkrožna cev

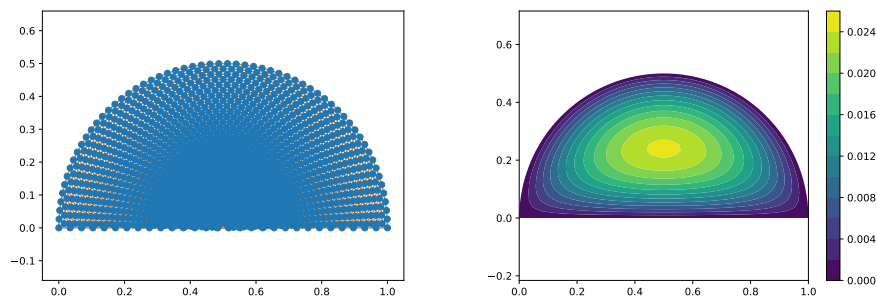
Račune smo ponovili za polkrožno cev. Rezultati so prikazani na slikah 7, 8, 9.



Slika 7: Triagonalizacija in pretok za polkrožno cev z malo gostoto točk.

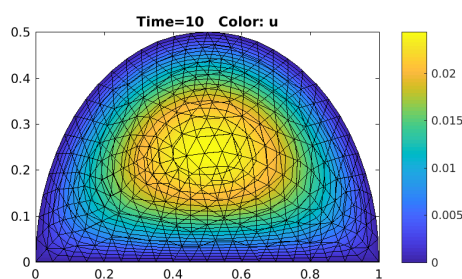


Slika 8: Triagonalizacija in pretok za polkrožno cev s srednjo gostoto točk.



Slika 9: Triagonalizacija in pretok za polkrožno cev z veliko gostoto točk.

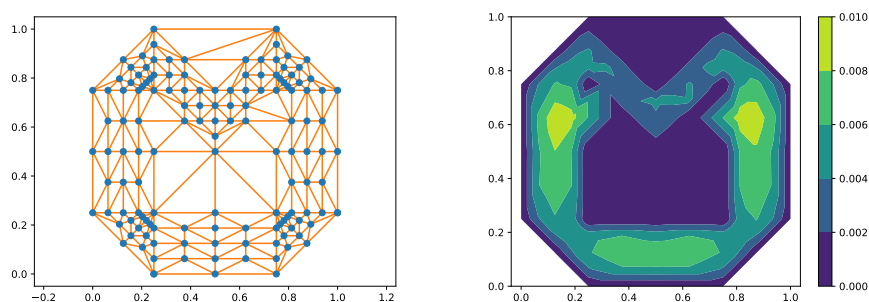
Poleg že napisane kode v *Matlabu* za kvadratno cel, smo odkrili, da ima *Matlab* že vgrajeno orodje za reševanje parcialnih diferencialnih enačb z metodo FEM. Orodje se prikliče z ukazom `pdetool`. V novem oknu, ki se odpre, lahko narišemo območja, določimo robne pogoje, tip enačbe... Program sam naredi račune in izvrše rezultat. Tak način je uporabniku zelo prijazen, toda izgubi se določeno razumevanje metode. Za referenco smo naredili izračun za polkrožno cev v tem programu in dobili enak rezultat. Rezultat je prikazan na sliki 10



Slika 10: Matlabova rešitev v `pdetool`.

## Pretok skozi poljubno obliko

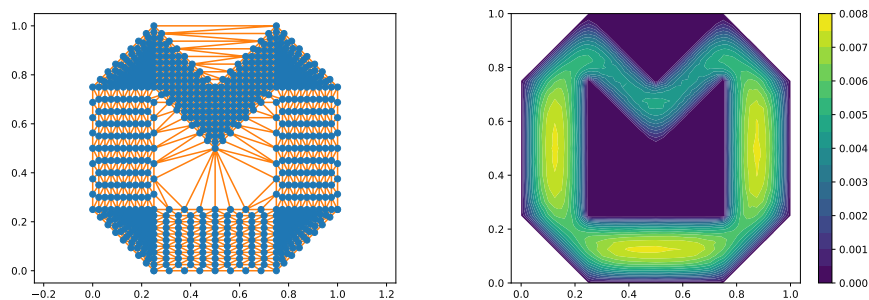
Račune smo ponovili še za cev, iz naloge 5. Rezultati so prikazani na slikah 11, 12, 13.



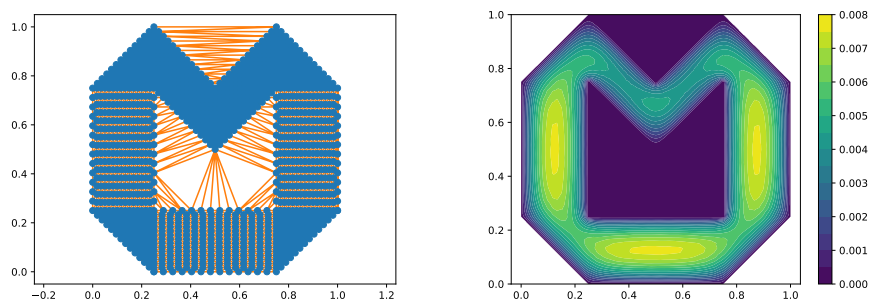
Slika 11: Triagonalizacija in pretok za izbrano cev z malo gostoto točk.

Na sliki 11 ponovno vidimo določene čudne interpolacije. Nekateri trikotniki

ležijo v območju, ki ga ne bi želeli imeti triagonaliziranega, saj je tam pretok 0. Skrb je povsem odveč, saj postavimo robnim točkam vrednost na 0 in vse bazne funkcije izven iskanega območja ne bodo prispevale k računu.

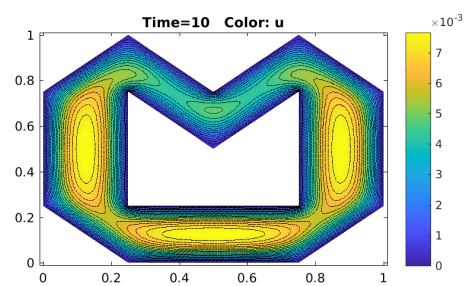


Slika 12: Triagonalizacija in pretok za izbrano cev s srednjo gostoto točk.



Slika 13: Triagonalizacija in pretok za izbrano cev z veliko gostoto točk.

Dobimo že znane rezultate. Za referenco smo poračunali še z *Matlabovim* orodjem *pdetool* in dobili enak rezultat.



Slika 14: Matlabova rešitev v pdetool.