Lo que dice la investigación acerca de la enseñanza de las matemáticas mediante el planteamiento de problemas (P-PBL)

Jinfa Cai

University of Delaware

jcai@udel.edu

Apoyo a los profesores para la enseñanza de las matemáticas a través del planteamiento de problemas: Un estudio longitudinal temprano (en la enseñanza media)

Artículos hermanos

- Cai, J. (2003). What research tells us about teaching mathematics through problem solving. In F. Lester (Ed.), *Research and issues in teaching mathematics through problem solving* (pp. 241-254). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Artículos hermanos

- Cai, J. (2003). What research tells us about teaching mathematics through problem solving. In F. Lester (Ed.), *Research and issues in teaching mathematics through problem solving* (pp. 241-254). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

- Cai, J. (2022). What research says about teaching mathematics through problem posing. *Education & Didactique, 16(3), 31-50.*

Muchas gracias a:

Dr. Farzaneh Saadati
Dr. Patricio Felmer

por esta invitación

Una guía

1. Por qué planteamiento de problemas?
2. Cómo se percibe la enseñanza de las matemáticas a través del planteamiento de problemas?
3. De qué se trata el planteamiento de problemas?
4. En qué consiste una tarea de planteamiento de problemas y cómo debería abordarse?
5. Cómo deberá el profesor/a abordar dicha actividad en el salón de clases?

Una guía

1. Por qué planteamiento de problemas?
2. Cómo se percibe la enseñanza de las matemáticas a través del planteamiento de problemas?
3. De qué se trata el planteamiento de problemas?
4. En qué consiste una tarea de planteamiento de problemas y cómo debería abordarse?
5. Cómo deberá el profesor/a abordar dicha actividad en el salón de clases?

Por qué Planteamiento de Problemas?

- Teóricamente, P-PBL tiene un fundamento sólido tanto en las teorías constructivistas como en el constructivismo social del aprendizaje, y:
  puede mejorar el acceso de los estudiantes (o su oportunidad) a la elaboración del sentido y aprendizaje matemáticos.

Proporción de respuestas a preguntas matemáticas para cada tarea (Silber & Cai 2021)

	Task 1	Task 2	Task 3	Task 4
Alto desempeño (n = 57)	89%	100%	98%	96%
Desempeño promedio (n = 36)	100%	97%	100%	100%
Bajo desempeño (n = 42)	69%	95%	100%	95%

Proporción de respuestas que requirieron ideas matemáticas para la tarea de graficación

	Non-zero y-intercept	Covariación	½ como la pendiente
Alto desempeño	43%	64%	14%
Desempeño promedio	33%	50%	0%
Bajo desempeño	26%	63%	16%

Reacciones de los estudiantes

- Creo que el planteamiento de problemas nos da una nueva perspectiva. Nos hace pensar de modo diferente, nos familiariza con los principios matemáticos que están detrás de las preguntas.

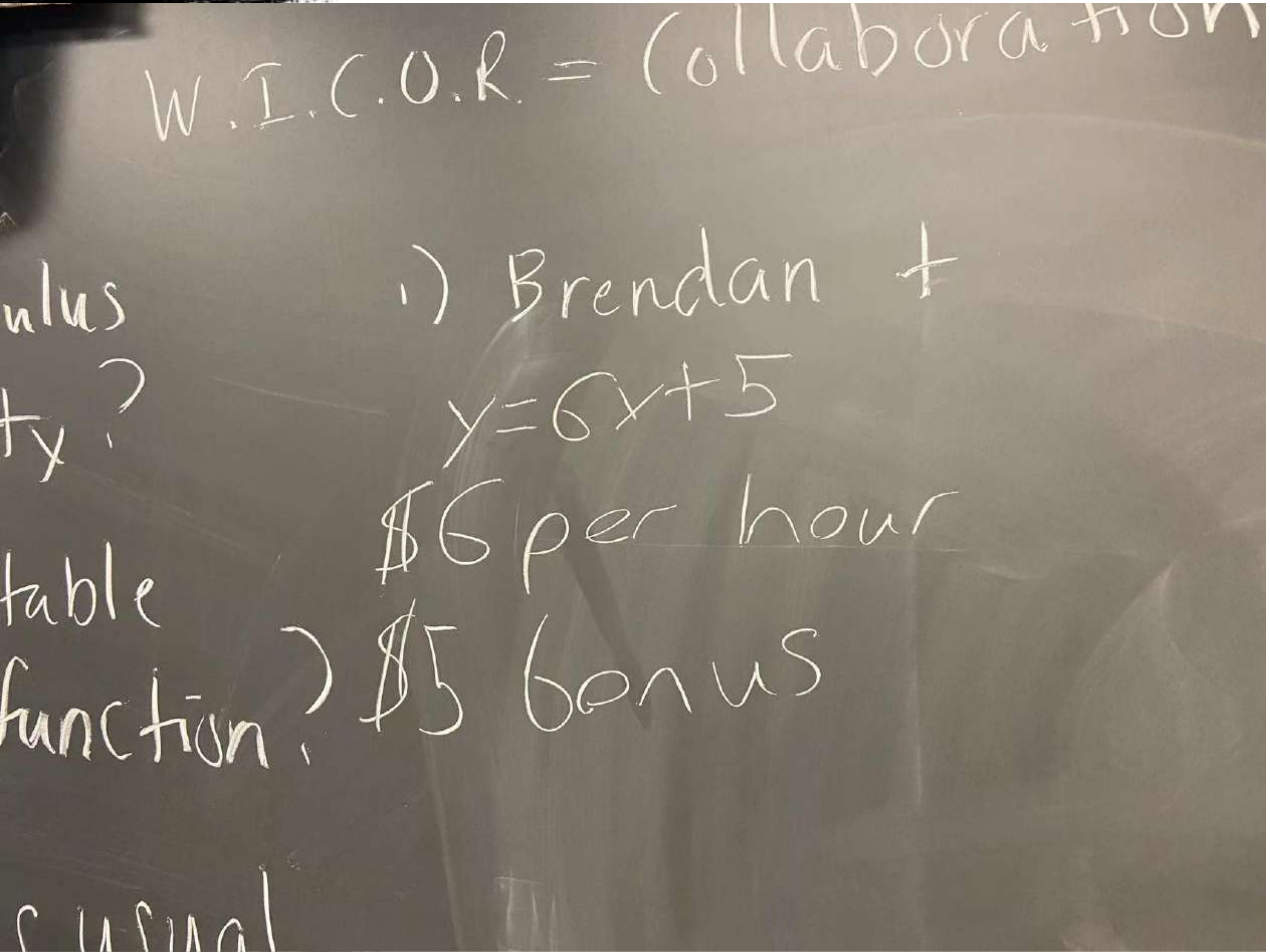
- Uno mira a la totalidad de la información recibida, y si bien se le plantea una pregunta, solo hay que dar una mirada rápida a lo que es relevante respecto a la pregunta. Puede que uno no capte la imagen global sobre como funciona el problema. Cuando se plantea un problema, se le puede ver enteramente.

Silber, 2023

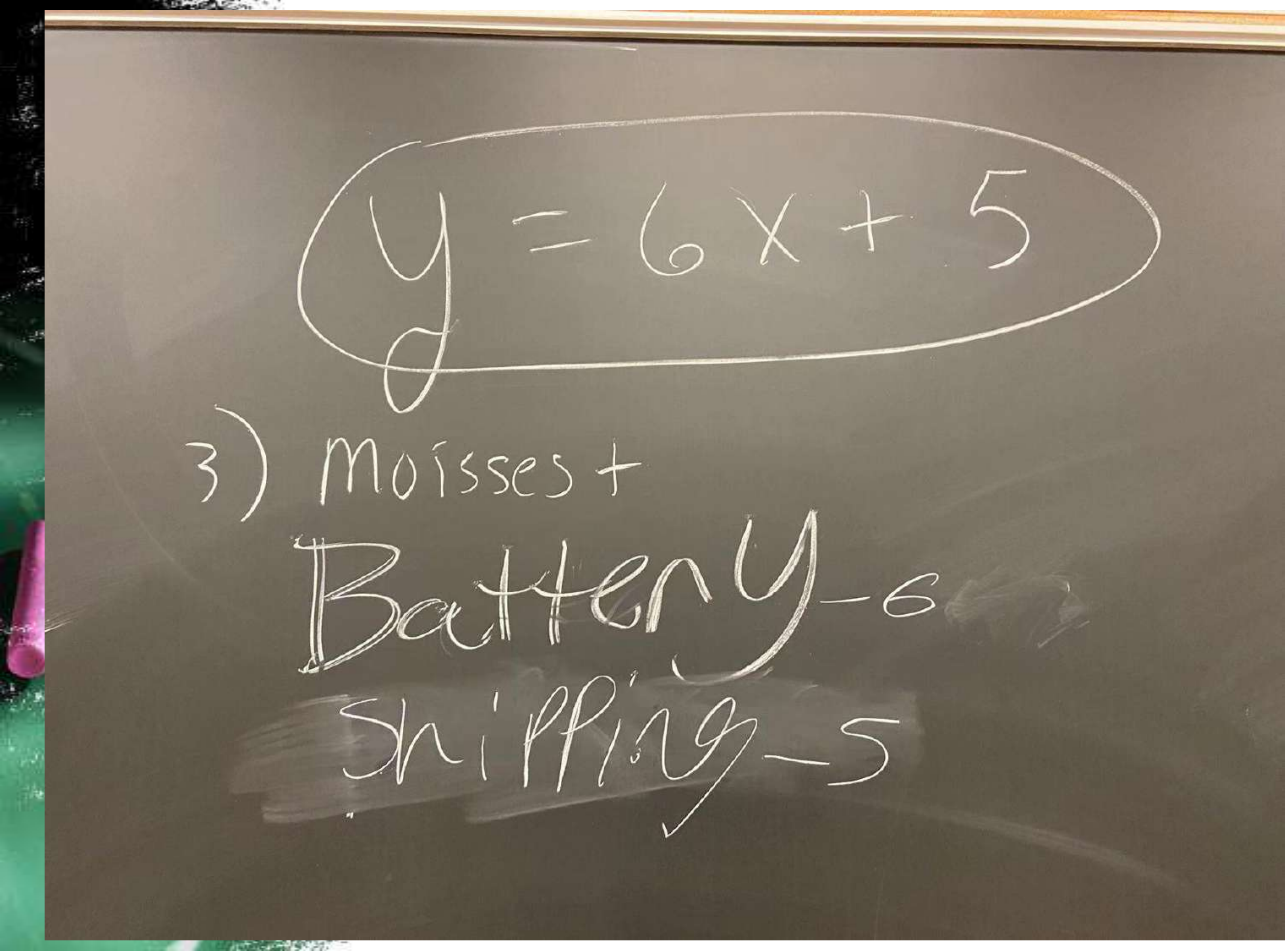
Para la función lineal $y = 6x + 5$, enumere dos pares ordenados.

“La lección no fue del todo bien. Si bien la mayoría de los estudiantes pudieron trazar puntos, muchos no tenían idea de por qué importa el "orden" en los pares ordenados. Nunca habían visto cuadrantes, y muchos no entendieron cómo responder la pregunta sobre los signos de los pares ordenados en los cuadrantes y ningún estudiante se dio cuenta de que hay un cero involucrado si el punto está en un eje. La idea de producir pares ordenados para una función estaba fuera del alcance de todos los estudiantes, salvo unos pocos. ¡MUCHO TRABAJO POR HACER!”

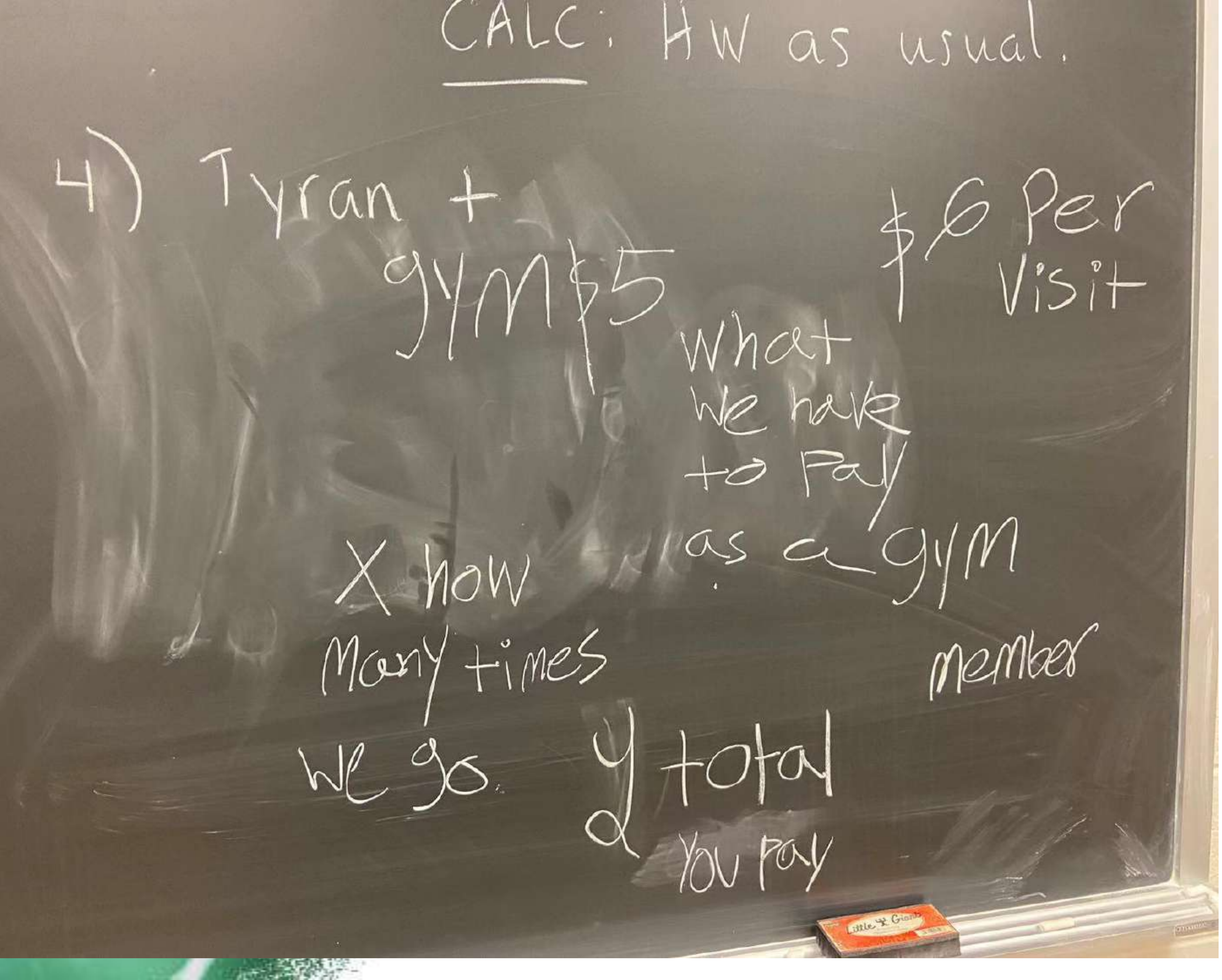
"Dada la función lineal $Y = 6x + 5$. ¿Qué podría representar esto como un escenario de la vida real?



Y = 6x + 5
$6 por hora
bono de $5



Batería - 6
Envío - 5



Gimnasio, $5 Lo que tenemos que pagar como socio de un gimnasio

$6 por visita

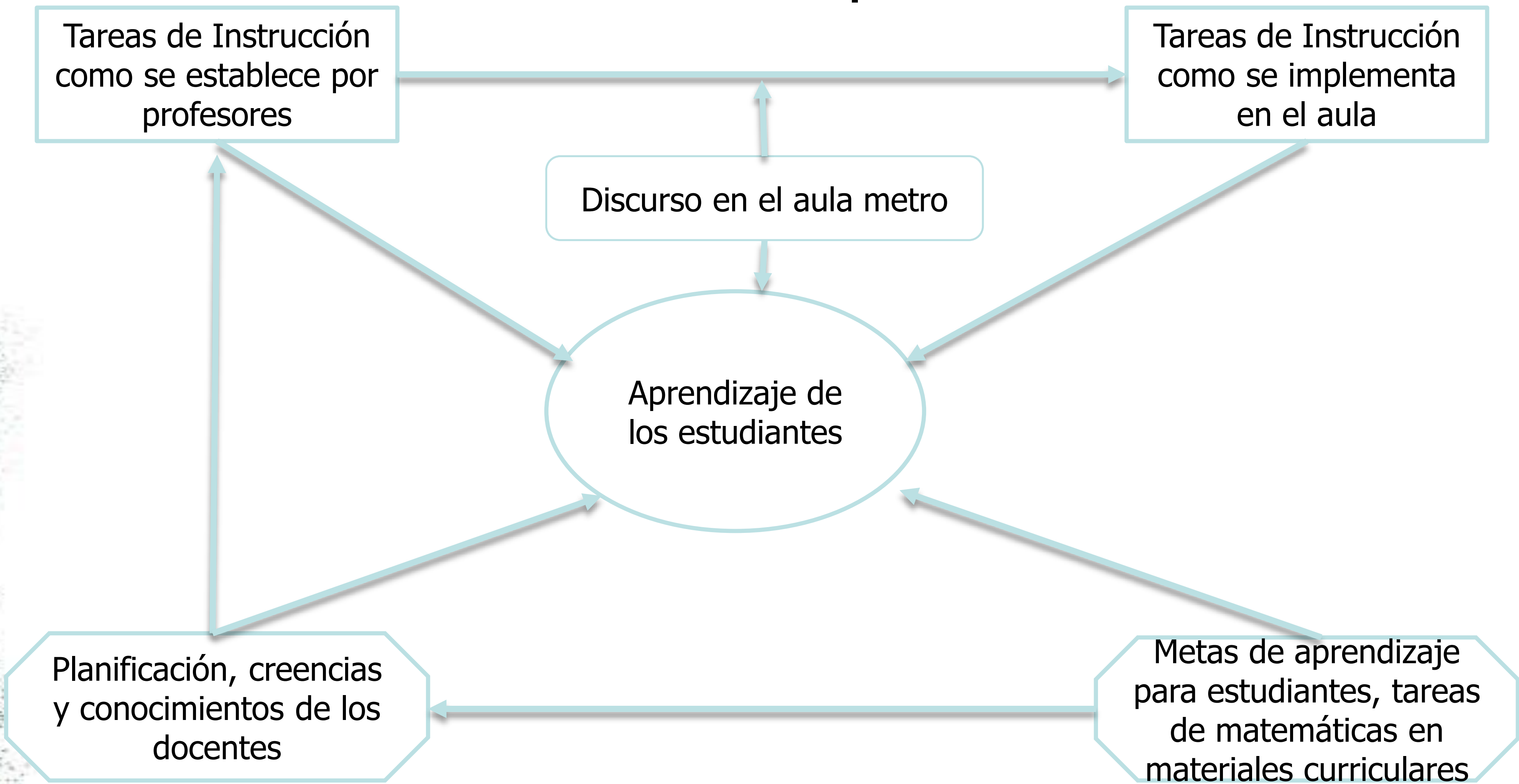
X: cuantas veces vas

Y: total que paga

Una guía

1. Por qué planteamiento de problemas?
2. Cómo se percibe la enseñanza de las matemáticas a través del planteamiento de problemas?
3. De qué se trata el planteamiento de problemas?
4. En qué consiste una tarea de planteamiento de problemas y cómo debería abordarse?
5. Cómo deberá el profesor/a abordar dicha actividad en el salón de clases?

Enseñanza de las matemáticas a través de la formulación de problemas



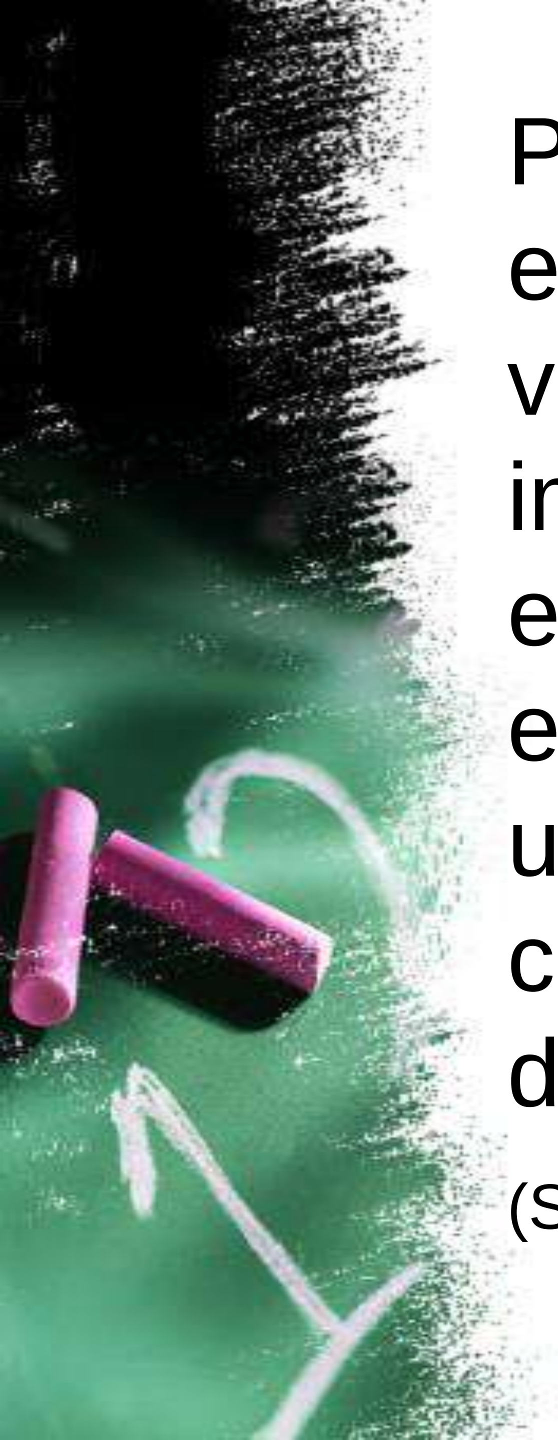
Con los siguientes números y símbolos, plantee un problema fácil y un problema difícil que involucre porcentajes.

40 50 %

- Esta tarea se utiliza para revisar la unidad de porcentaje
- Los estudiantes plantean problemas individualmente.
- Los estudiantes presentan sus problemas planteados.
- El maestro escribe los problemas planteados por los estudiantes en la pizarra en diferentes categorías
- El profesor y los estudiantes resuelven problemas seleccionados.

Una guía

1. Por qué planteamiento de problemas?
2. Cómo se percibe la enseñanza de las matemáticas a través del planteamiento de problemas?
3. De qué se trata el planteamiento de problemas?
4. En qué consiste una tarea de planteamiento de problemas y cómo debería abordarse?
5. Cómo deberá el profesor/a abordar dicha actividad en el salón de clases?



Por planteamiento de problemas en educación matemática, nos referimos a varios tipos de actividades relacionadas que implican o apoyan a los profesores y estudiantes a formular (o reformular) y expresar un problema o tarea en función de un contexto particular (al que nos referimos como el contexto del problema o la situación del problema).

(Silver, 1994)

Tarea original

Durante el turno de un mesero entregó 13 aperitivos, 17 platos principales y 10 postres. ¿Qué porcentaje de los platos que entregó eran postres?

(adapted from Illustrative Mathematics, IM 6–8 Math™ V).

Tarea 1 de planteamiento de problemas: durante el turno de un mesero, entregó 13 aperitivos, 17 platos principales y 10 postres. Plantear tres problemas matemáticos que se puedan responder en base a esta situación.

Tarea de planteamiento de problemas

- Situaciones
- Indicaciones

- situación problema
  - Contexto de la vida real
    - palabras/texto
    - Imagen/figura/gráfico
    - Mesa
  - Contexto puramente matemático
    - expresión matemática
    - Imagen/figura/gráfico
    - Mesa
    - Patrona

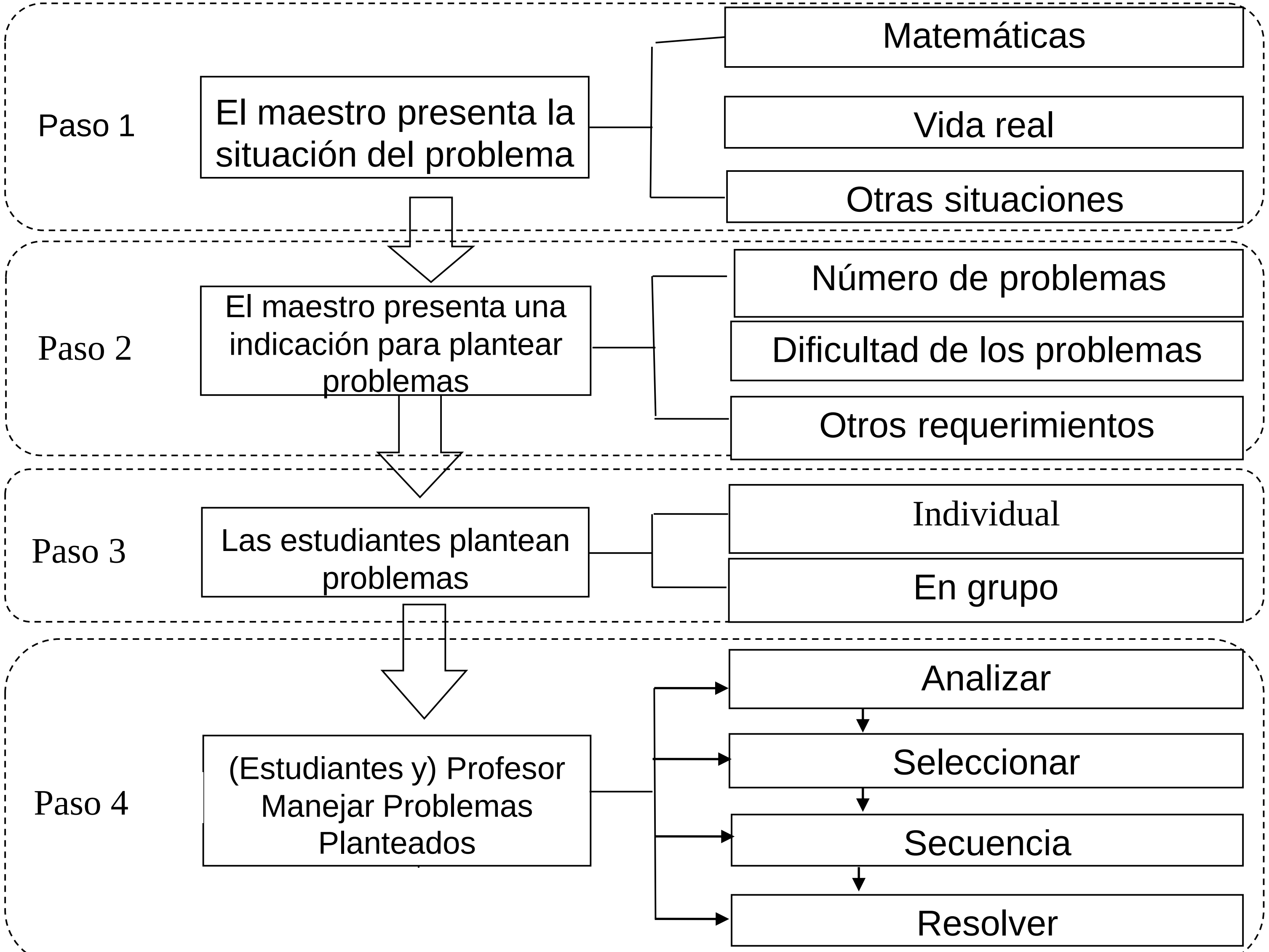
Diferentes avisos

- Pregunta A: Plantee tres problemas matemáticos diferentes que puedan resolverse usando esta información.
- Pregunta B: Plantee un problema matemático fácil, un problema matemático moderadamente difícil y un problema matemático difícil que se pueda resolver usando esta información.
- Pregunta C: plantea un problema matemático para desafiar a tus maestros.

Una guía

1. Por qué planteamiento de problemas?
2. Cómo se percibe la enseñanza de las matemáticas a través del planteamiento de problemas?
3. De qué se trata el planteamiento de problemas?
4. En qué consiste una tarea de planteamiento de problemas y cómo debería abordarse?
5. Cómo deberá el profesor/a abordar dicha actividad en el salón de clases?

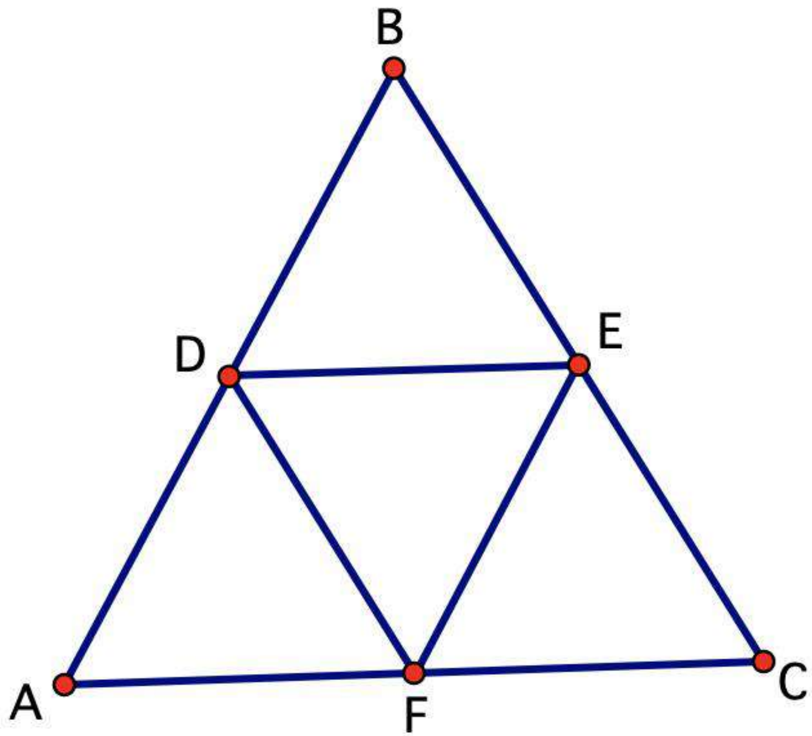
Enseñanza de las matemáticas a través de PP



Enseñanza de las matemáticas a través de PP

- Paso 1 — El maestro presenta la situación del problema
  - Matemáticas
  - Vida real
  - Otras situaciones
- Paso 2 — El maestro presenta una indicación para plantear problemas
  - Número de problemas
  - Dificultad de los problemas
  - Otros requerimientos
- Paso 3 — Las estudiantes plantean problemas
  - Individual
  - En grupo
- Paso 4 — (Estudiantes y) Profesor Manejar Problemas Planteados
  - Analizar
  - Seleccionar
  - Secuencia
  - Resolver

¿Qué problema planteaste?



Cai, J., Koichu, B., Rott, B., Zazkis, R., & Jiang, C. (2022).

Por la situación…

- ¿Qué mensaje proporcionará a los estudiantes?
- ¿Qué problemas puedes plantear?
- ¿Puedes plantear un problema que nadie más lo hará?

Considere las indicaciones

- ¿Qué indicaciones usará con los maestros? con estudiantes?
- ¿Qué consideraciones determinan su preferencia?
- ¿Su mensaje es diferente si está destinado a ser utilizado para la recopilación de datos de investigación?

Literatura Seleccionada

1) Silber & Cai (2017)
2) Leung & Silver (1997)
3) Zhang et al. (2022)
4) English (1998)
5) Silber & Cai (2021)
6) Planificación de un Journal of Mathematical Behavior para un número especial, que se publicará en 2024

1. Silber & Cai (2017)

Indicaciones:

indicaciones estructuradas vs. informales

Resultados:

Los futuros maestros en la condición de indicacion estructurada prestaron más atención a los conceptos matemáticos en la tarea.

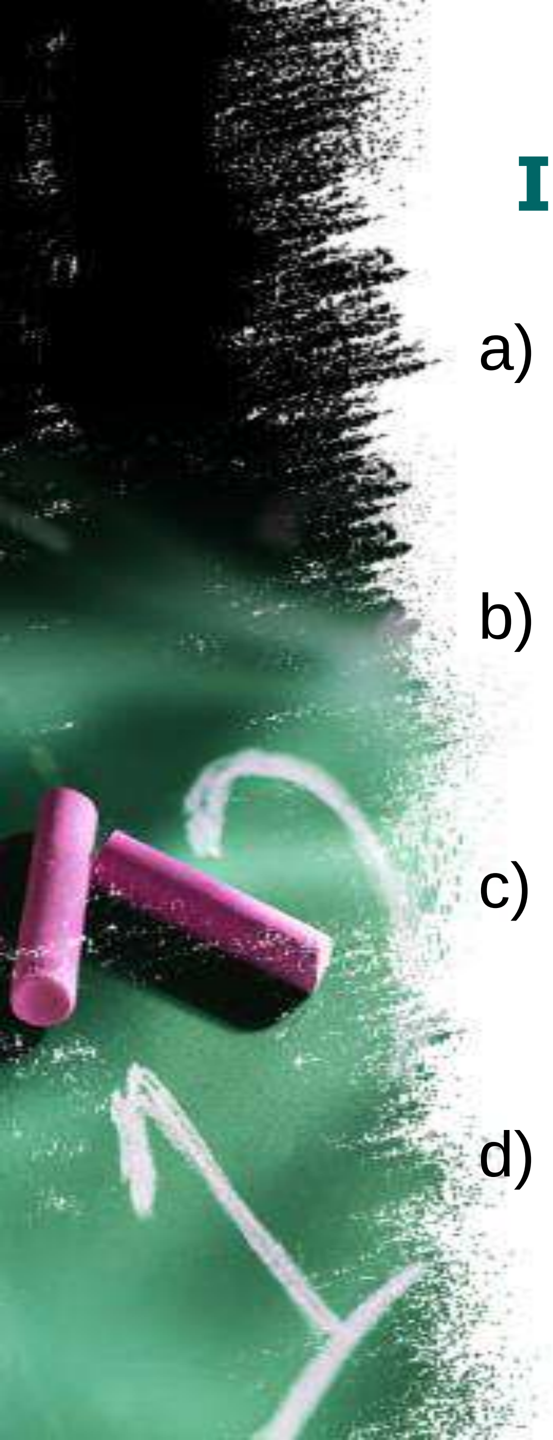
2. Leung & Silver (1997)

Situaciones

Con o sin información numérica

Resultados:

Los profesores se desempeñaron mejor en tareas que incluían información numérica específica que en tareas sin información numérica específica.



Investigación adicional: variables de la tarea

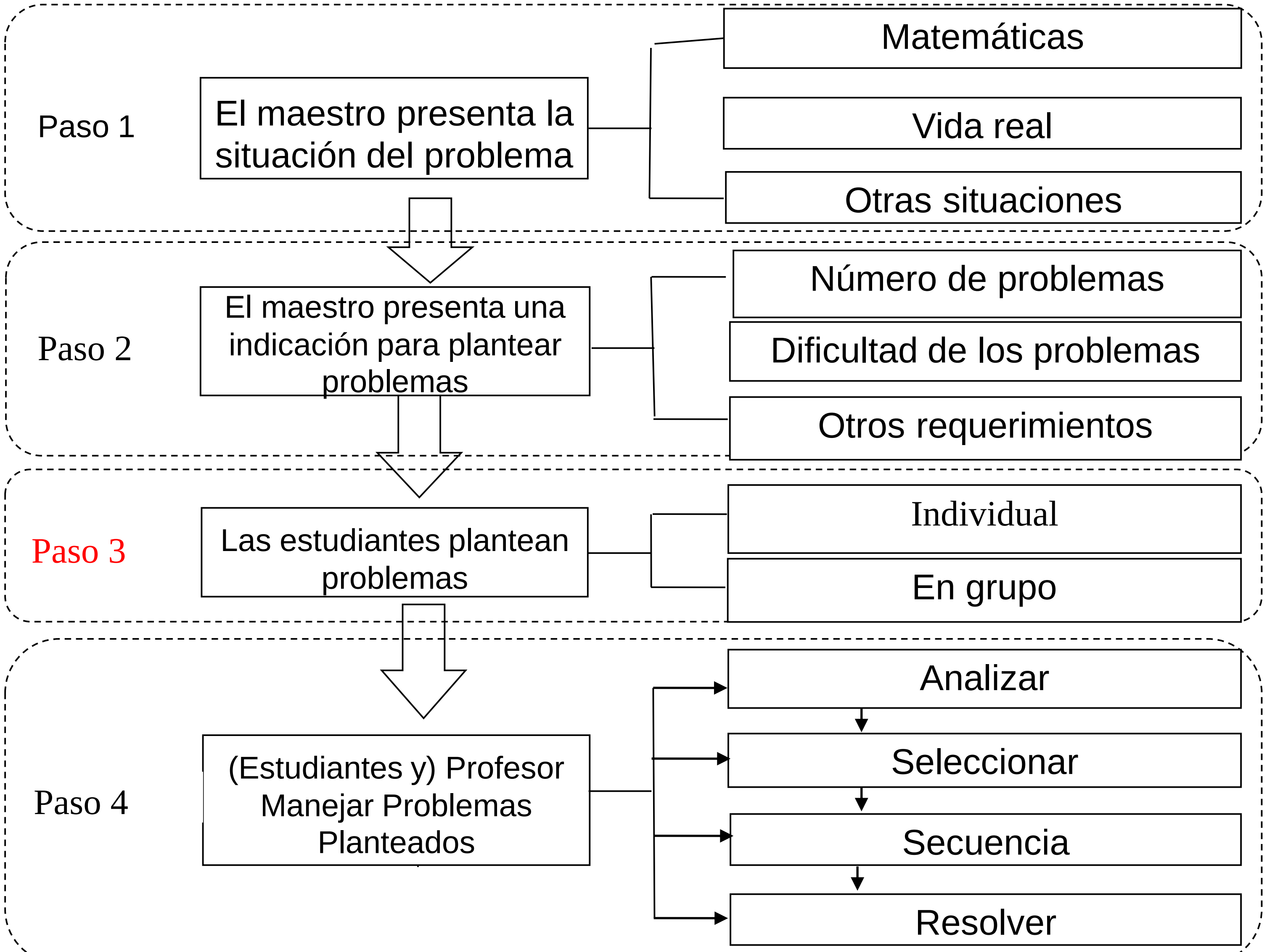
a) ¿Cómo puede la variación sistemática de situaciones y avisos de PP informar a nuestra comprensión de la relación entre los procesos y productos de PP, así como la relación entre PP y PS?

b) ¿Cómo interactúan las variables relacionadas con el estudiante (por ejemplo, conocimiento, afecto, experiencias) con las variables PP relacionadas con la tarea?

c) ¿Cómo influyen las tareas de planteamiento de problemas (con variaciones) en las creencias de los estudiantes sobre las matemáticas?

d) ¿Cómo influyen las tareas de planteamiento de problemas (con variaciones) en el sentido y la motivación de los estudiantes acerca de las matemáticas?

Enseñanza de las matemáticas a través de PP



Modelos de procesos de planteamiento de problemas

"[…] todavía no existe un planteamiento general de problemas análogo a los marcos generales bien establecidos para la resolución de problemas, como los cuatro pasos de Polya (1957)"

(Cai et al., 2015, p. 14).

Procesos de planteamiento de problemas

Reviewed models:

- Cruz (2006)		Pelczer & Gamboa (2009)
- Koichu & Kontorovich (2013) Zhang et al. (2022)
- Baumanns & Rott (2021)

Baumanns, L., Rott, B. The process of problem posing: development of a descriptive phase model of problem posing. *Educ Stud Math* **110,** 251–269 (2022). https://doi.org/10.1007/s10649-021-10136-y

Un modelo general de proceso de planteamiento de problemas

1. Orientación
2. Conexión
3. Generación
4. Reflexión

A General Problem-Posing Process Model

(1) Orientation

What is the situation?
What is the given information in the situation?
What is the poser asked to do?
How many problems are they asked to pose?
What do I notice?
...

(2) Connection

What do I wonder?
Is A related to B?
Is the relationship true?
...

(3) Generation

Making the posed problems visible
What do I want to find out?

(4) Reflection

Can I optimize posed problems?
Are my problems solvable?
Are my problems “good”?
Are my problems difficult?
...

Cai & Rott, under review

Enseñanza de las matemáticas a través de PP

Paso 1	El maestro presenta la situación del problema	Matemáticas Vida real Otras situaciones
Paso 2	El maestro presenta una indicación para plantear problemas	Número de problemas Dificultad de los problemas Otros requerimientos
Paso 3	Las estudiantes plantean problemas	Individual En grupo
Paso 4	(Estudiantes y) Profesor Manejar Problemas Planteados	Analizar Seleccionar Secuencia Resolver

Patrón de números impares

1

3 5

7 9 11

13 15 17 19

21 23 25 27 29

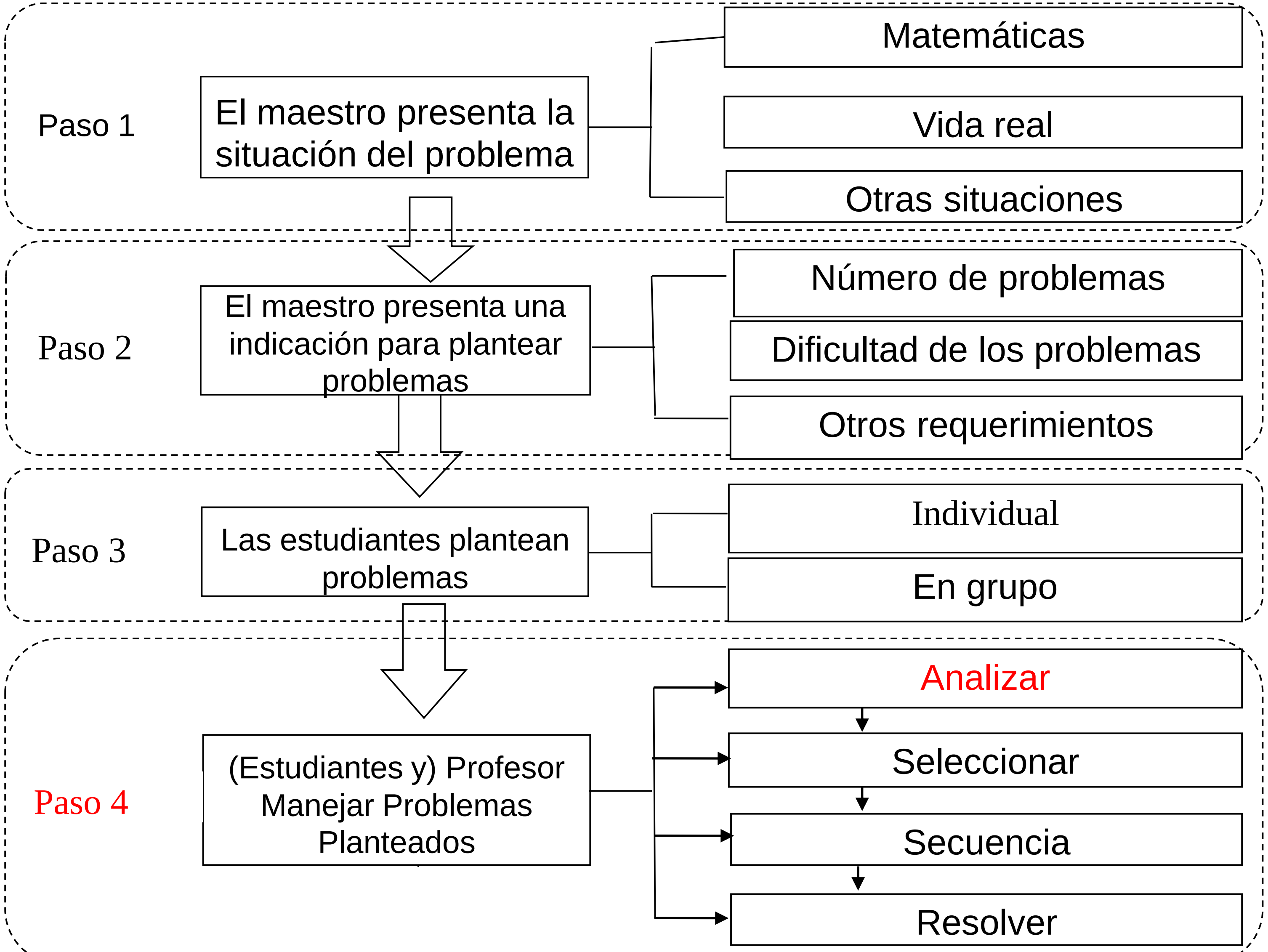
...... El patrón continúa.

Cai et al., 2015; Cai in preparation

Tres indicaciones

1. Plantee tres problemas matemáticos diferentes que podrían resolverse con base en este patrón
2. Plantee un problema matemático fácil, un problema matemático moderadamente difícil y un problema matemático difícil
3. Haz tres conjeturas matemáticas diferentes sobre el patrón.

Enseñanza de las matemáticas a través de PP



- Can you tell me the next row of numbers? [list]

G1

- How many values in the 17^{th} row?
- List the values in the 10^{th} row? 11^{th}
- Determine the center value (number) (of the row) of row 9.
- can you find all the numbers in row "n". (pattern)
- How many rows would it take to reach a triple digit value (number)?
- Find the sum of the values (number) in row 15.

· The next row will contain 8 numbers.

· The sum of the values is a row is = to n^3. where "n" is the row.

· Row number = number of numbers.

· Difference between first and last number of each row increases by 2 as you move down the table, resulting in the rule $2n-2$ where "n" is the row number.

· row 100 would have a difference of 198 between the first + last number.

Problems

G2

- How many integers will be in row 12
- What integer will row 10 begin with
- what integers will be in row 15, how do you know?
- What formula or equation can you use to predict future rows?
- How can you use perfect squares to determine which and how many numbers are in a row?
- What patterns do you see?
- what formula can you use to fill out the outer diagonals?
- How many rows will it take to get to 113?

Conjectures

- ~~The outside~~
- The left diagonal outer row increases by 2 → This pattern will continue
- Sums of the rows are cubic
- You can use the formula 2R + 2 to get the outer diagonal on the RIGHT side when R = Row number. You'll add the result of this equation to the previous number to get the next one. Left = 2R
- ~~Does~~ the outer row numbers in the ones place hold a patter of 1 3 7 3 1

  Right – 1 5 1 9 9

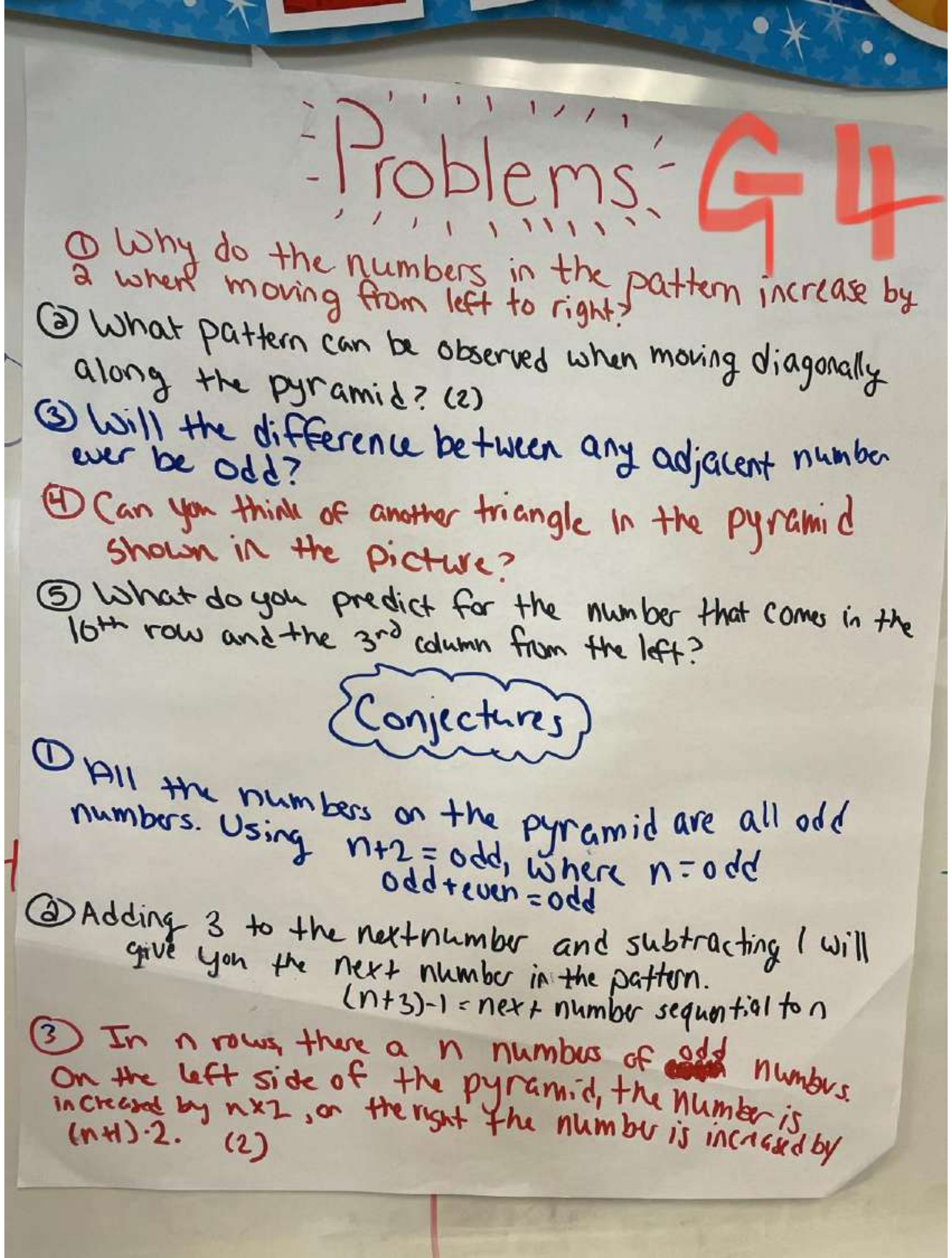
G3

Conjectures

1) Even numbers will never occur in this pattern.
2) The numbers increase by 2 each time you go to the next number when starting at the top and moving from left to right of each row.
3) Two consecutive far left terms between every 2 rows has a difference of 2 more than the difference of the pair of far left terms before it (starting with a difference of 2 between the first pair).

Questions

1) What is an odd number?
2) How many numbers will be in the 10^{th} row? (2)
3) What will the last number in the 10^{th} row be?
4) Describe a way to determine the value of the n^{th} term.
5) How can you see square numbers in this pattern?
6) What is a pattern you notice about the starting number in each row? What about the pattern for the last number in each row?
7) Based on the pattern, what numbers would be in row 10? How can it be solved without writing out rows 8 and 9?
8) Without writing out all of the numbers, what number would you expect to see in the middle position in row 11? How do you know?


Problems G4
① Why do the numbers in the pattern increase by 2 when moving from left to right?
② What pattern can be observed when moving diagonally along the pyramid? (2)
③ Will the difference between any adjacent number ever be odd?
④ Can you think of another triangle in the pyramid shown in the picture?
⑤ What do you predict for the number that comes in the 10th row and the 3rd column from the left?
Conjectures
① All the numbers on the pyramid are all odd numbers. Using n+2 = odd, where n = odd
odd + even = odd
② Adding 3 to the next number and subtracting 1 will give you the next number in the pattern.
(n+3)-1 = next number sequential to n
③ In n rows, there a n numbers of odd numbers.
On the left side of the pyramid, the number increased by n×2, on the right the number is increased by (n+1)·2. (2)

G5

3 Questions:

1. What number will the 10^{th} row begin with?
2. Write an equation that will help you find the first/last number in each row.
3. [redacted] Are there any other patterns you can find in the pyramid? How could you describe this relationship?

Easy, Moderately Difficult & Difficult Probs:

Easy What would the next row of numbers be? List them.

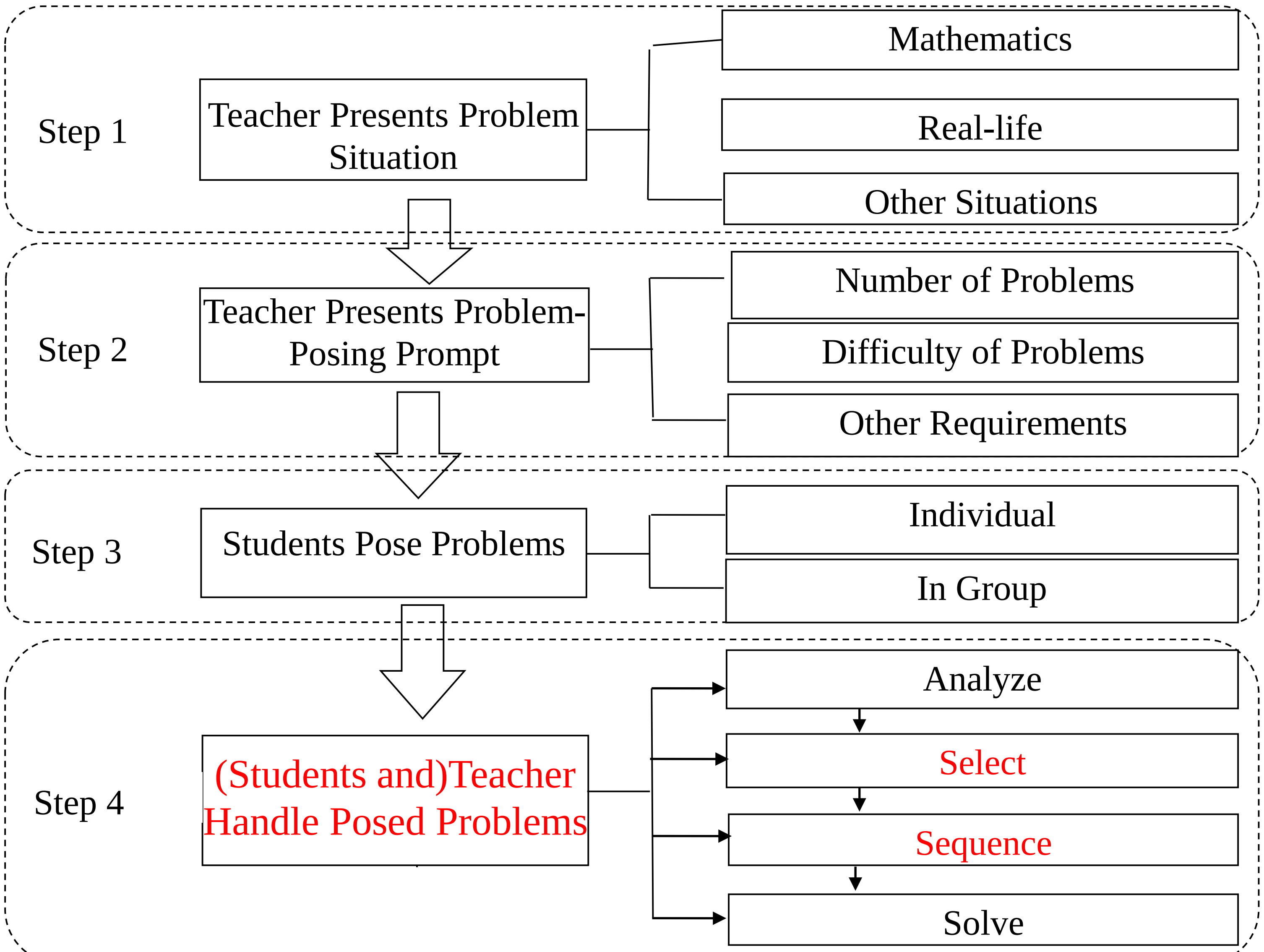
Mod. What is the middle number for the 15^{th} row?

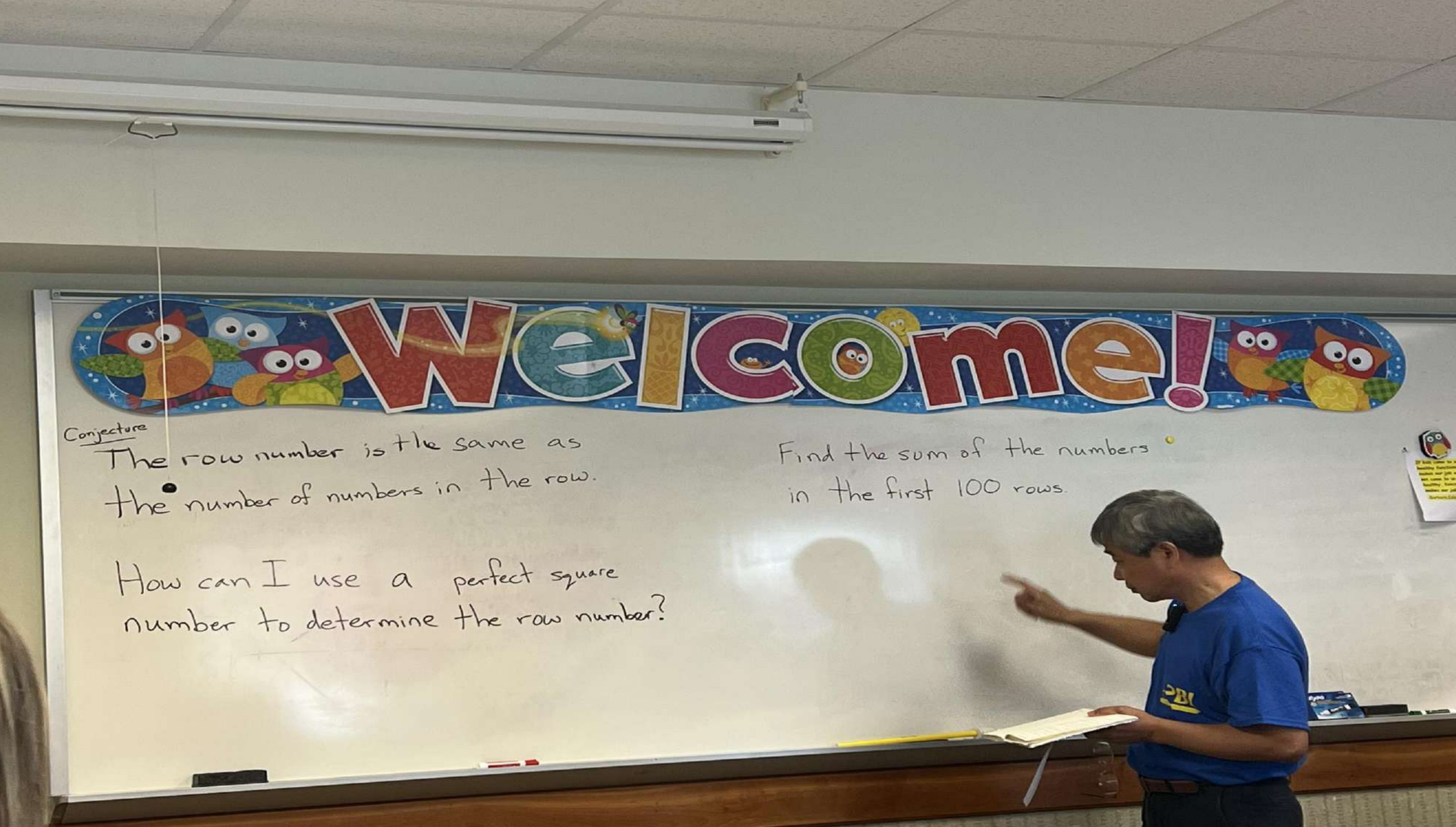
Diff. If the pyramid were redrawn with even numbers, what pattern(s) would be the same?

Conjectures:

1. The middle number in the 9^{th} row will be 81.
2. The 100^{th} row of the pyramid will have 100 numbers.
3. The 9^{th} & 10^{th} row of the pyramid will have a difference of 16 between the diagonal partners (upper right w/ lower left) excluding the last number in row 10.

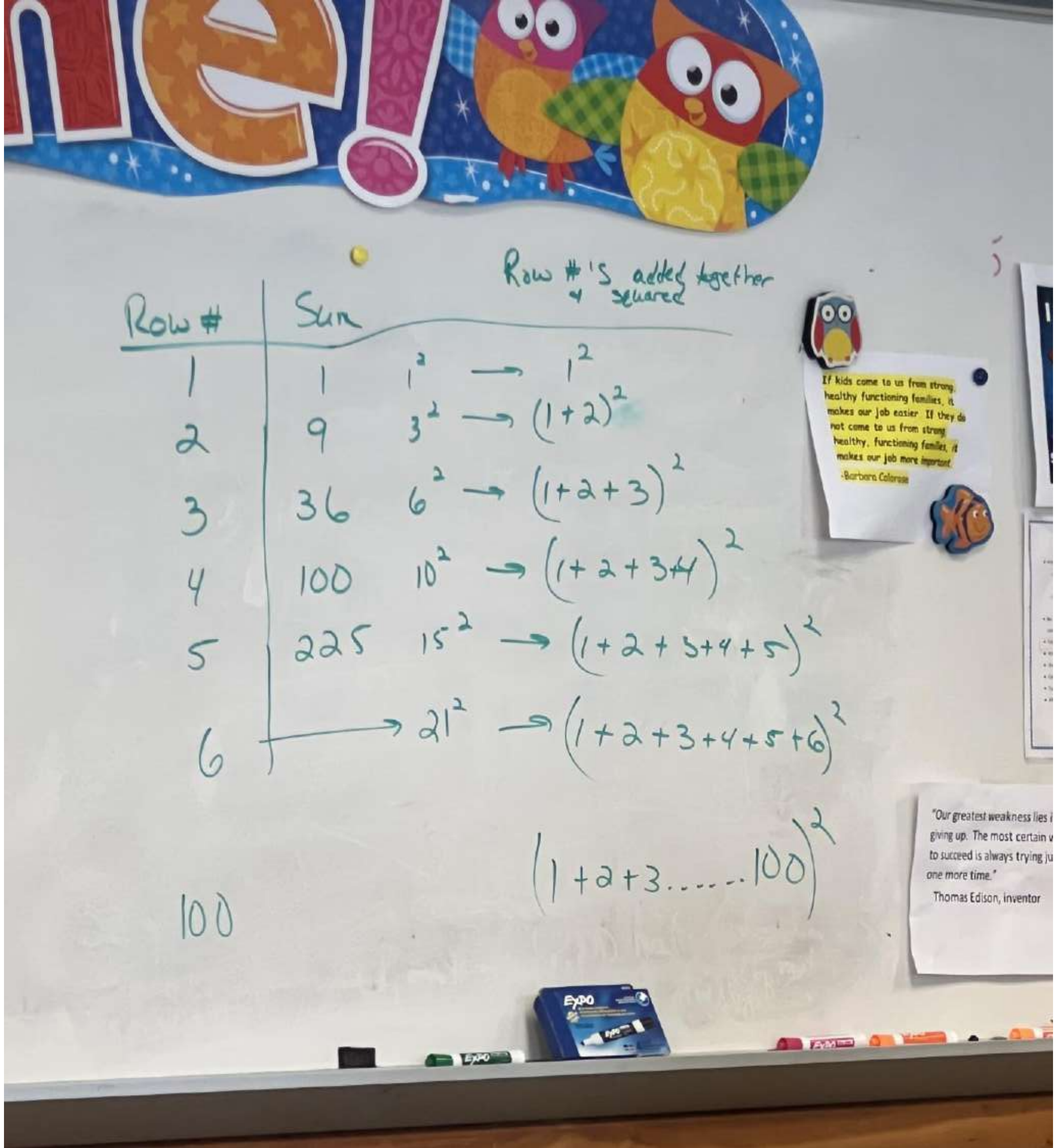
Teaching mathematics through PP



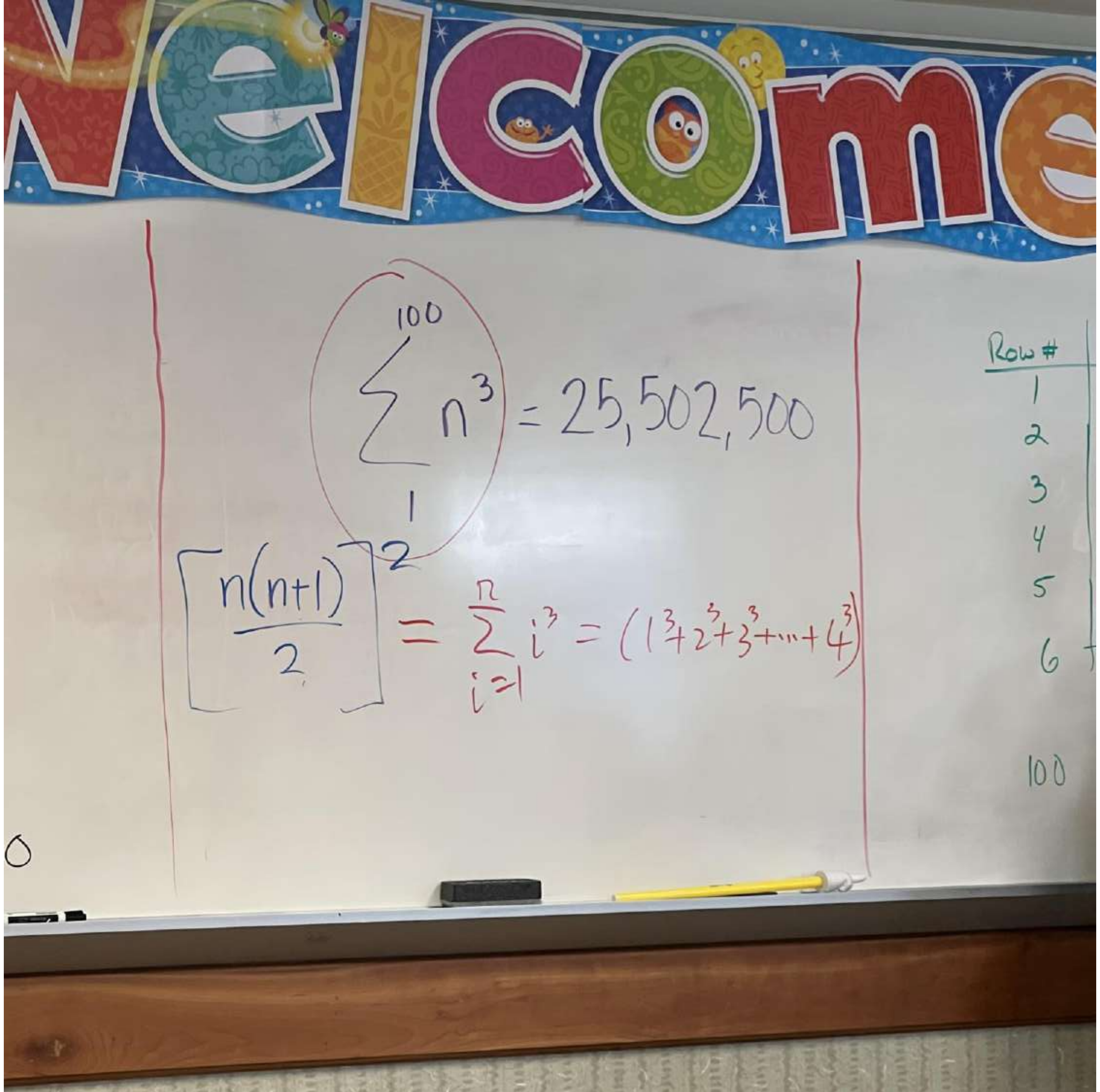

Welcome!
Conjecture
The row number is the same as the number of numbers in the row.
How can I use a perfect square number to determine the row number?
Find the sum of the numbers in the first 100 rows.

Tres problemas/conjeturas seleccionados

1. El número de filas es el mismo que el número de números en la fila.
2. ¿Cómo puedo usar un cuadrado perfecto para determinar el número de fila?
3. Encuentra la suma de los números en las primeras 100 filas.



Row #'s added together & squared
Row #
Sum
1 1 $1^2 \rightarrow 1^2$
2 9 $3^2 \rightarrow (1+2)^2$
3 36 $6^2 \rightarrow (1+2+3)^2$
4 100 $10^2 \rightarrow (1+2+3+4)^2$
5 225 $15^2 \rightarrow (1+2+3+4+5)^2$
6 $\rightarrow 21^2 \rightarrow (1+2+3+4+5+6)^2$
100
$(1+2+3 \ldots\ldots 100)^2$
If kids come to us from strong, healthy functioning families, it makes our job easier. If they do not come to us from strong, healthy, functioning families, it makes our job more important.
-Barbara Coloroso
"Our greatest weakness lies i giving up. The most certain w to succeed is always trying ju one more time."
Thomas Edison, inventor
EXPO


Welcome
$\sum_{1}^{100} n^3 = 25{,}502{,}500$
$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \sum_{i=1}^{n} i^3 = (1^3+2^3+3^3+\dots+4^3)$
Row #
1
2
3
4
5
6
100

¿Cuál es la suma de los números en las primeras n filas?

1

3 5

7 9 11

13 15 17 19

21 23 25 27 29

… …

¿Cuál es la suma de los números en las primeras n filas?

1 =*1*

3 *5* =*8*

7 *9* *11* =*27*

13 *15* *17* *19* =*64*

21 *23* *25* *27* *29* =*125*

… … … …

¿Cuál es la suma de los números en las primeras n filas?

		1			=*1*
	3		*5*		=*8*
	7	*9*	*11*		=*27*
13	*15*		*17*	*19*	=*64*
21	*23*	*25*	*27*	*29*	=*125*

… … **… …**

La suma **=** $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3$

¿Cuál es la suma de los números en las primeras n filas?

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 3 & & 5 & & & \\
 & & 7 & & 9 & & 11 & & \\
 & 13 & & 15 & & 17 & & 19 & \\
21 & & 23 & & 25 & & 27 & & 29 \\
 & & & & & & \cdots & \cdots &
\end{array}
$$

$$[1 + 3 + 5 + \ldots + (2m\text{-}1) = m^2]$$

$$= (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n)^{2}$$

Un hallazgo inesperado:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3$$

$$= (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n)^2$$

$$= [n(n+1)/2]^2$$

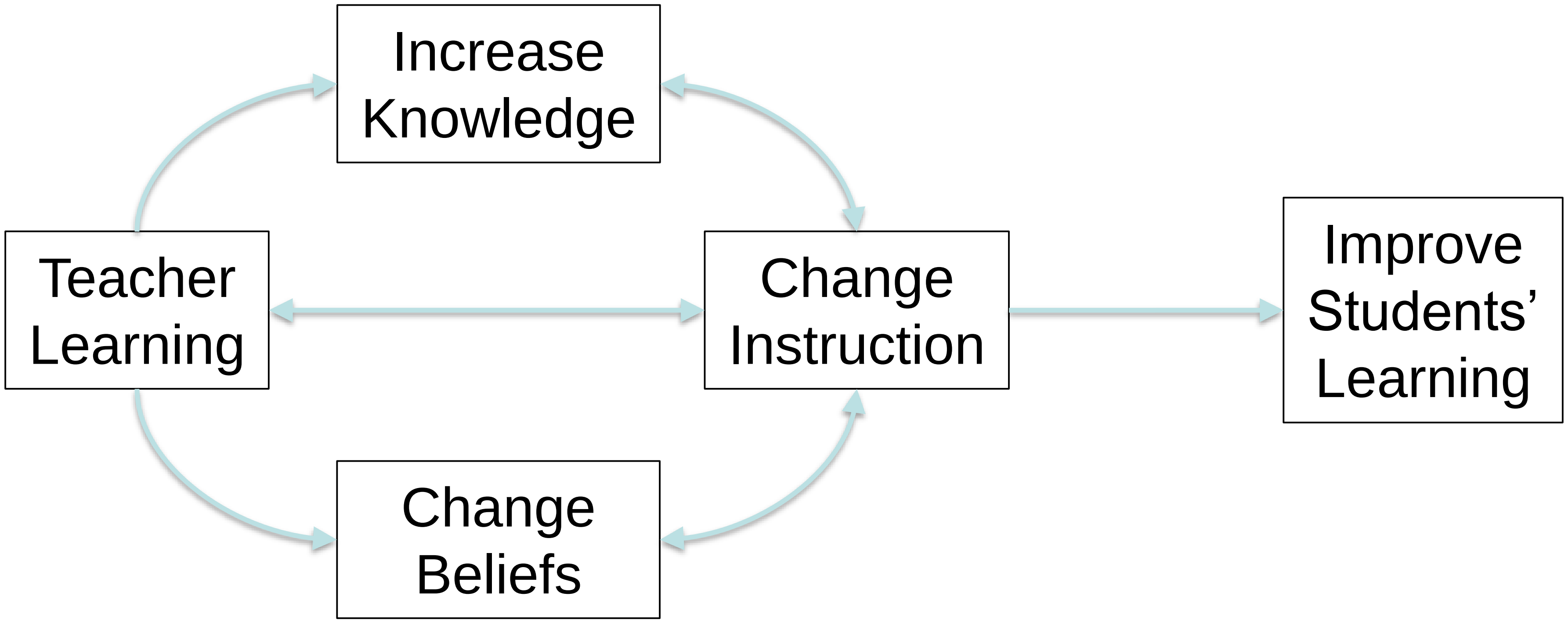
Nota: $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = n(n+1)/2$

Apoyo a los profesores para la enseñanza de las matemáticas a través del planteamiento de problemas: Un estudio longitudinal temprano (en la enseñanza media)

Una guía

1. Por qué planteamiento de problemas?
2. Cómo se percibe la enseñanza de las matemáticas a través del planteamiento de problemas?
3. De qué se trata el planteamiento de problemas?
4. En qué consiste una tarea de planteamiento de problemas y cómo debería abordarse?
5. Cómo deberá el profesor/a abordar dicha actividad en el salón de clases?
6. ¿Cómo se puede apoyar a los maestros para que aprendan a enseñar a través de la formulación de problemas? (Años posteriores para compartir con ustedes)
7. ¿Cuál es el efecto de la instrucción P-PBL en maestros y estudiantes? (Años posteriores para compartir con ustedes)

Investigating *longitudinally* how teachers learn to teach mathematics through Problem Posing and its impact on on classroom instruction and students' learning.



Meta-Analysis

- In total, 26 small-scale quantitative studies that reported the details of the interventions yielded 51 estimates on cognitive outcomes and 9 estimates on affective outcomes.
- The results show a medium and significant effect (Hedges' $\bar{g} = 0.45$) of problem-posing interventions.
- The highest effect on their problem-posing performance ($\bar{g} = 0.75$), followed by affective outcomes ($\bar{g} = 0.67$), problem-solving performance ($\bar{g} = 0.53$), and mathematics achievement ($\bar{g} = 0.09$).

¡Gracias!

Jinfa Cai

jcai@udel.edu