Matemáticas para alumnos con talentos académicos: textos construidos con una perspectiva intuicionista/constructivista

Ernesto San Martín

Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile

Trabajo conjunto con Piedad Cabrera (Penta UC) y Violeta Arancibia (Penta UC)

Seminario internacional sobre textos escolares de Matemática, Física y Química

Santiago, 27-29 de septiembre de 2010

Momentos de la Presentación

- ¿Cómo se caracteriza un alumno o alumna con **talentos académicos**?
- ¿Qué **requisitos** planteó el desafío de formular un **currículum de matemáticas** para estos estudiantes?
- ¿Cómo recibieron **los profesores y profesoras** esta propuesta curricular?
- ¿Cómo recibieron **los alumnos y alumnas** los contenidos específicos?

Un proyecto FONDEF con sello bicentenario

- Proyecto FONDEF **Diseño e implementación de un programa de educación para alumnos con talentos académicos en colegios municipales y la evaluación de su impacto para su transferencia al sistema educacional** . . . con sello Bicentenario.
- Se realizó una propuesta curricular en Lenguaje y Matemáticas, produciendo 8 textos para cada subsector.
- Parte de esta presentación girará en torno a uno de estos textos titulado **Hacia una sombra de la cuarta dimensión por medio de los números figurados**.

Características de estudiantes con talentos

- **Talento:**
  - un potencial y una constelación de habilidades analíticas, creativas y prácticas . . .
  - situadas, modificables y susceptibles de ser desarrolladas . . .
  - que requieren de catalizadores para poder transformar este potencial en un desempeño manifiesto.

- En consecuencia, los contenidos tienen que ser **desafiantes** . . . tratados con **profundidad** . . . a un ritmo de **velocidad creciente.**

- Estructura del programa basado en **experiencias significativas** para los estudiantes que les permita **un rol activo en su proceso de aprendizaje.**

Requisitos del desafío de proponer un currículum

- **Primer desafío:** un currículum para estudiantes con talentos académicos de los niveles NB1 y NB2.
- **Segundo desafío:** enriquecimiento extracurricular.
- **Tercer desafío:** desarrollar habilidades analíticas, creativas y prácticas por medio de las matemáticas.
- **Cuarto desafío:** enseñar a **pensar matemáticamente**.

Perspectiva subyacente a la propuesta curricular

- **Ejes temáticos:** Aritmética, Geometría y Probabilidades.
- La **forma (metodología)** de enseñar matemática responde a **una** concepción de la matemática.
- Recurso a la crisis de las matemáticas de fines del s. XIX para encontrar conceptos articuladores:
  - **Estructuralismo matemático** (Cantor, Bourbaki ... Piaget). Concepto articulador: **estructura**.
  - **Intuicionismo/constructivismo matemático** (Brouwer, Heyting, Skolem ... Lorenzen). Concepto articulador: **secuencia**.

Intuicionismo/Constructivismo Matemático

- L.E.J. Brouwer (1907):

> *"Uno, dos, tres, . . . ", conocemos de memoria la* **secuencia** *de estos sonidos como una* **fila sin fin***, es decir, que continua por siempre de acuerdo a una* **ley que se sabe es fija***.*
>
> *Al lado de esta secuencia de sonidos-imágenes, poseemos otra secuencia que procede de acuerdo a una ley fija, por ejemplo la secuencia de los signos escritos 1, 2, 3, . . .*
>
> *Estas cosas son intuitivamente claras.*

Intuicionismo/Constructivismo Matemático

- Actividad que llamamos **contar.**
- Reglas recursivas basadas en dicha actividad:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad | \\ n \quad &\Rightarrow \quad n\,| \end{aligned}$$

- Desarrollo del **pensamiento recursivo** (Skolem).
- Infinito potencial: aritmetizar la geometría, no a la inversa, como lo exigiría una concepción del infinito actual.
- Aspecto dialogal (Lorenzen).

Intuicionismo/Constructivismo Matemático

- **Consecuencia 1:** comprensión dialógica del Principio de Inducción, “que todo niño entiende” (Lorenzen, 1987).

	$A(\mid) \wedge \bigwedge_x \cdot A(x) \to A(x\mid)\cdot \longrightarrow \bigwedge_y A(y)$
$?n$	$L?$
$A(\mid)$	$R?$
$\bigwedge_x \cdot A(x) \to A(x\mid)$	$?\mid$
$A(\mid) \to A(\mid\mid)$	$A(\mid)$
$A(\mid\mid)$	$?\mid\mid$
$A(\mid\mid) \to A(\mid\mid\mid)$	$A(\mid\mid)$
$\vdots$	$\vdots$
$A(n)$	$A(n)$

- **Consecuencia 2:** enseñar matemáticas significa enseñar ética –**actuar bajo normas.**

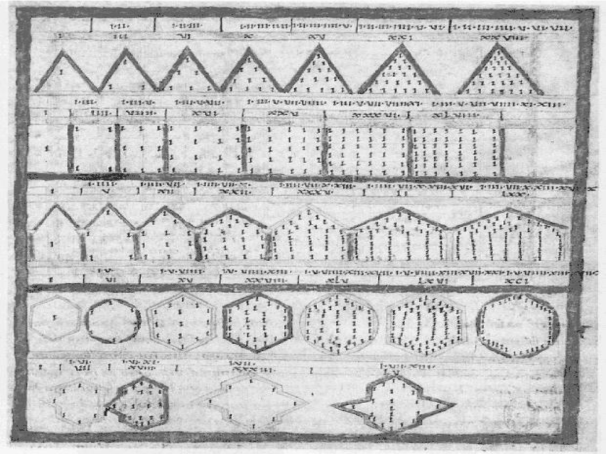
Recurso al desarrollo histórico de la matemática

- Un texto matemático se presenta como una **secuencia** de argumentos correctamente deducidos; estos textos constituyen la memoria colectiva de lo **históricamente dado** (Apéry, 1982; Lorenzen, 1968).
- Recurso a la historia de las matemáticas no es anecdótico.
- **Aritmética Pitagórica** y el **Triángulo Aritmético**:
  - **Institutio Arithmetica** de Boecio (siglo V D.C.).
  - **Triangulus Arithmeticus** y **Le Triangle Arithmmétique** de B. Pascal (1654).
  - **Flatland. A Romance of many Dimensions** de E.A. Abbot (1899).

Recurso al desarrollo histórico de la matemática

- El **Triangulus Arithmetucus** y **Le Triangle Arithmétique** son los primeros textos que enuncian explícitamente el Principio de Inducción en una perspectiva coherente con el infinito potencial (ver *Consectarium 11* y *Conséquence douzième*).
- Pensamiento recursivo está ampliamente desarrollado en la **Institutio Arithmetica** de Boecio: *Todo es formado de la naturaleza del Mismo y del Otro; y esto se ve en primer lugar en los números* (2,23).
- Ambos trabajos desarrollan los llamados **Números Figurados**.

Recurso al desarrollo histórico de la matemática



Hacia la cuarta dimensión por los números figurados

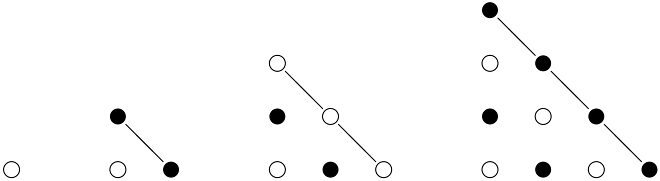
- Originalmente, este manual fue concebido para estudiantes con talentos académicos que cursaban NB1.
- **Flatland** relata la perplejidad del Cuadrado al encontrarse con una Esfera.
- ¿Cómo producir en los estudiantes una perplejidad similar a la del Cuadrado de **Flatland**?
- **Idea clave:** usar construcciones recursivas tanto de números figurados, como del triángulo aritmético de Pascal.

Hacia la cuarta dimensión por los números figurados

- *. . . De esta manera el número, la unidad, sin ser ella misma un número lineal, es sin embargo el principio del número que tiene una extensión en longitud, así como el número lineal, él mismo privado de todo ancho, es sin embargo el origen del número que tiene una extensión en otra dimensión, la del ancho . . .* (**Inst. Arith.** 2, 5).
- **Números lineales:** *son una superposición de cantidades que comienzan en dos, si siempre se añade una unidad sobre una sola y misma línea* (**Inst. Arith.** 2,5).
- Semilla: $|$
- $||$ $|||$ $||||$ $|||||$ . . .

Hacia la cuarta dimensión por los números figurados

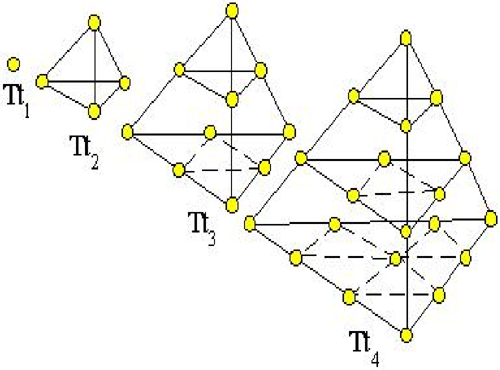
- **Números triangulares:** $T_1 = 1$ y $T_l = T_{l-1} + l$, con $l > 1$.



$T_1 = 1$ $T_2 = 3$ $T_3 = 6$ $T_4 = 10$

Hacia la cuarta dimensión por los números figurados

- **Números tetraédricos:** $\mathrm{Tt}_1 = 1$ y $\mathrm{Tt}_l = \mathrm{Tl}_{l-1} + T_l$, con $l > 1$.



Hacia la cuarta dimensión por los números figurados

- En el **Triangulus Arithmeticus** de Pascal se satisface que:
  - Cuando la semilla es igual a 1, *los números figurados son aquellos que están en uno de los órdenes numéricos*.
  - Toda celda iguala la suma de aquéllas que proceden de la raíz precedente en cada uno de los órdenes, desde el propio hasta el primero inclusive (Consecuencia 2).
- La sexta diagonal del triángulo de Pascal contiene los números **simplex**, que corresponden a la figura más simple en 4 dimensiones.

Hacia la cuarta dimensión por los números figurados

Recepción de los profesores

- En el contexto del proyecto FONDEF ya mencionado, profesores/as de la Comuna de Puente Alto participaron en un diplomado de educación de talentos.
- Profesores/as fueron capacitados en educación de talentos y en la presente propuesta curricular.
- El 90 % al menos de los docentes impartían clases en NB1 y NB2.
- Al preguntarles sobre aspectos positivos de los manuales que le ayudaron en la ejecución del programa y sobre la capacitación recibida, los profesores indican respectivamente, que:

Recepción de los profesores

- "... Primero que nada que está muy bien explicado, porque hay una explicación teórica al inicio, estaba muy bien explicada... en todos, especialmente en el de probabilidades que no entendía nada. Yo sin esa parte no hubiese podido hacer la clase... después venía muy explicada, muy bien explicada, la forma de desarrollar las actividades, a veces muy demasiado explicada, yo decía este manual es una versión pa' tontos porque decía, tomé, converse con los niños, reúnalos, yo decía pero como tanto, pero ya no importante, está bien, súper bien. Explicaba muy bien lo que el niño podía decir, lo que debería decir, que también ayuda bastante... eso en general yo lo encontré súper claro ..." (Entrevistada, 3).

- "... bueno que vienen bien claros los contenidos, las actividades también son bien claras y.. y el material de apoyo para trabajar con los niños, bastante material practico, que les gusta hacer a los niños, la actividad lúdica ..." (Entrevistada, 2).

Recepción de los profesores

- “Una mirada absolutamente distinta de las matemáticas, tal vez por eso hay desencanto de las matemáticas. Enseñar a pensar a los alumnos, espero poder llevarlo a cabo en la práctica” (IMN).
- “Sin saber nada, creo que me llevo mucho . . . me llevo el encanto de la matemática . . . no solo con los niños con talento sino también en el aula común” (LC).
- “Conocer un contenido y entender por qué es de determinada manera, es la clave de aprender la matemática . . . Matemática como instancia lúdica, de conflicto y de aprendizaje. . . y con muchas estrategias. . . me siento fortalecida” (MR).
- “La capacitación me entregó una nueva visión, con ganas de cambiar mi quehacer pedagógico, con nuevos contenidos” (JC).
- “Venía a buscar algo nuevo, algo distinto que me ayudara a hacer mi trabajo más efectivo y eficiente y me llevó mucho más que eso” (MA).

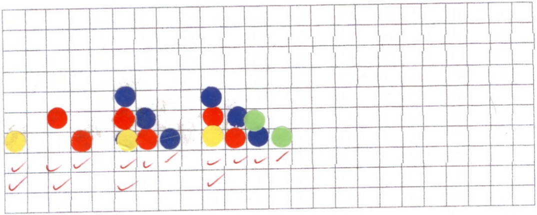
Recepción de los niños/niñas

- **Experiencia Penta UC-Escolar:**
  - Cinco profesores/as de cinco escuelas de la Comuna de Puente Alto, capacitados en la aplicación de este currículo en educación de talentos, impartieron este curso durante 11 sesiones a niños de NB1: una clase por semana de dos horas de duración, durante el segundo semestre 2009.
  - Al finalizar el período, generaron una prueba evaluativa que aplicaron a sus estudiantes: reportamos dos ejemplos.
- **Experiencia Penta UC:**
  - Durante en el semestre de verano 2010, el autor del curso lo impartió a niños y niñas que habían finalizado el sexto y séptimo año de enseñanza básica: el curso duró 10 sesiones seguidas, de 3 horas cada una.
  - Al final, se aplicó una prueba para evaluar aprendizajes: reportamos dos ejemplos.

Recepción de los niños/niñas

1.

Representa con figuras los cuatro primeros números triangulares usando los números naturales.
-Usa los círculos de colores que te entregó la profesora.
-Usa un color distinto para cada número de la primera dimensión.
(14 ptos)



14 p.

Recepción de los niños/niñas

3.

¿Cómo explicarías la existencia de números de la cuarta dimensión, si no podemos verla, pero si podemos ver los de la tercera, segunda y primera dimensión?
- Usa como ejemplo el segundo y tercer número Pentatópico.
(4 ptos)

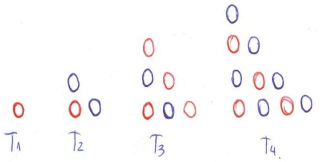
Explicación(Puedes usar un dibujo):

podemos saber que existen porque con la D.1 podemos formar la D.2 con la D.2 podemos formar la D.3 y con la D.3 podemos formar la D.4

3P

Recepción de los niños/niñas

Pregunta 1: Ilustra la construcción recursiva de los números triangulares.



Como nos damos cuenta cada figura contienda la anterior.

$T_1 = 1$ / —
$T_2 = 3$ / $+1+2$
$T_3 = 6$ / $T_2 + 3$
$T_4 = 10$ / $T_3 + 4$

Se suman nº naturales consecutivos

Recepción de los niños/niñas

Pregunta 5: ¿cómo se relacionan los números triangulares con los naturales? Ilustra la recursividad de la relación.

¿Cómo se relacionan los números tetraédricos con los triangulares?

¿Cómo se relacionan los números politómicos con los tetraédricos?

A partir de estas relaciones, ¿cómo podemos tener una intuición de una figura de cuatro dimensiones?

Triangulares y naturales

$T_x = 1 + 2 + \dots + x$

Un número triangular x es igual a la suma de los 1eros x números naturales.

Ej. T_4

$1+2+3+4 = 10$

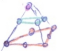
$x = 2, 3, 4, \dots$

tetraedricos y triangulares

$Tt_x = T_1 + T_2 + \dots + T_x$

Un número tetraedrico x es igual a lo 1º x números triangulares

Ej Tt_3:

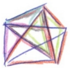


$= 10 = T_1\ (1) + T_2\ (3) + T_3\ (6)$

Tetraedricos y pentatopos

$Pt_x = Tt_1 + \dots + Tt_x$

Un pentatopo se puede representar como varios tetraedricos apilados



4 dimensiones

Podemos tener la intuicion del SIMPLEX (la figura más simple en 4 d.) como una serie de tetraedros apilados, estos número de 4 d. se encuentran en la 5ta columna del triangulo de Pascal

				5ta	
1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	
1	3	6	10		
1	4	10			
1	5				
1					

t. de pascal

simplex

Consideraciones Finales

- Nuevas formas de hacer matemáticas pueden resultar motivantes para los profesores/as.
- Empalmar el desarrollo histórico de las matemáticas con los primeros aprendizajes de las matemáticas por parte de los niños, en especial los que tienen talentos académicos.
- Mediación de profesores/as para enseñar contenidos extracurriculares.
- Incrementar la experiencia de enseñanza/aprendizaje con los manuales para buscar evidencias acerca de edad de niños/as, y de frecuencia de clases.