

# Las Raíces y Radicales en Libros de Texto en Chile (1969 – 2009)

Un análisis longitudinal de su  
transposición didáctica

Seminario Internacional de Libros de  
Texto de Matemática, Física y  
Química.



**Dr. Roberto Vidal Cortés.**

**Universidad Alberto Hurtado – Universidad de Los Andes**

28 de Septiembre de 2010

## Directrices de esta presentación:

1. El libro de texto y su impacto en el proceso de enseñanza – aprendizaje.  
El caso de la Matemática escolar
2. El Problema
3. Fundamentos epistemológicos
4. El Diseño
5. De los dispositivos examinados
6. Conclusiones

# 1. El libro de texto y su impacto en el proceso de enseñanza – aprendizaje. El caso de la Matemática escolar

¿Qué transmite esta imagen?



¿Matecnicia?

¿Qué transmite  
ahora esta  
imagen?



“...hablar de los manuales escolares es hablar del paradigma del saber institucionalizado en el sistema educativo, del curriculum realmente implementado y del modelo de organización y planificación de la enseñanza dominante en el tiempo en el que han estado vigentes... se puede enfocar el análisis de los manuales escolares, como una **línea** más **de** la **investigación en didáctica de las matemáticas**”.

(Gómez, 2009)





GOBIERNO DE CHILE  
MINISTERIO DE EDUCACIÓN

[Inicio](#)[Contacto](#)[Mapa del sitio](#)[Buscar](#)[Accesibilidad](#)

# Textos Escolares

Ministerio de Educación de Chile

[Establecimientos](#)[Padres y Apoderados](#)[Profesores](#)[Proveedores](#)[Estudiantes](#)

Consulte en ☎ 800 366 200

[➤ Presentación](#)[➤ Procesos](#)[➤ Catálogo](#)[➤ Biblioteca](#)[➤ Seminarios](#)[➤ Evaluación 2010](#)[➤ Buscador](#)[➤ Sist. Documental](#)

Ud está en: Portada >

## Noticias

### El 13 de octubre termina el Proceso de Elegibilidad



¡Atención profesores, directivos de establecimientos y miembros de las comunidades escolares!, el Martes 13 de este mes finaliza el plazo para llevar a cabo el proceso de Elegibilidad.

[➤ Leer noticia](#)

### Textos Escolares estará presente en Expobásica 2009



Con el objetivo de dar a conocer sus actividades de capacitación a profesores y los recursos pedagógicos de apoyo al uso de los libros de textos, Textos Escolares del MINEDUC participará en la IV versión de Expobásica.

[➤ Leer noticia](#)[Infórmese aquí](#)

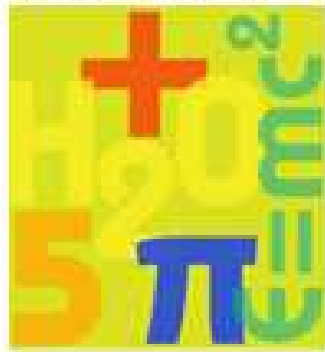
# Seminarios sobre libros de Texto

**SITE 2006**  
SANTIAGO DE CHILE



**SEMINARIO INTERNACIONAL**  
**sobre Textos Escolares de Historia**  
**y Ciencias Sociales**  
10, 11 Y 12 de Noviembre de 2008

## Abren convocatoria de trabajos para Seminario Internacional sobre Textos Escolares de Matemática, Física y Química



Debido al éxito de las tres versiones anteriores del Seminario Internacional sobre Textos Escolares del MINEDUC, entre el 27 y 29 de septiembre de 2010 se realizará esta actividad que permite destacar la importancia del texto escolar como recurso de aprendizaje y como objeto de investigación y estudio.



**Textos Escolares**  
Ministerio de Educación de Chile



**CATOLICA**  
**DE VALPARAISO**



*Seminario Internacional*  
**sobre Textos Escolares de Lenguaje y Comunicación**  
(SITELC-2009)

## Directrices de esta presentación:

1. El libro de texto y su impacto en el proceso de enseñanza – aprendizaje.  
El caso de la Matemática escolar
2. **El Problema**
3. Fundamentos epistemológicos
4. El diseño
5. De los dispositivos examinados
6. Conclusiones



## 2. El problema

*¿Cómo se ha  
divulgado  
el álgebra de  
radicales  
y qué tratamiento  
se le  
ha dado*

*en los  
libros de  
Texto escolar  
utilizados en  
Chile entre  
1969 y 2009?*

# Interrogantes en que se descompone el problema

¿Distintas Organizaciones del Contenido?

¿Distintas vías de introducción?

¿Cambios en los tratamientos del contenido?

¿Representaciones empleadas?

¿Rupturas epistemológicas?

**Saber  
Matemático  
(Raíz y Radical)**

Distancias...

?

?

**Libros de  
Texto**

?

**Programas  
Ministeriales**

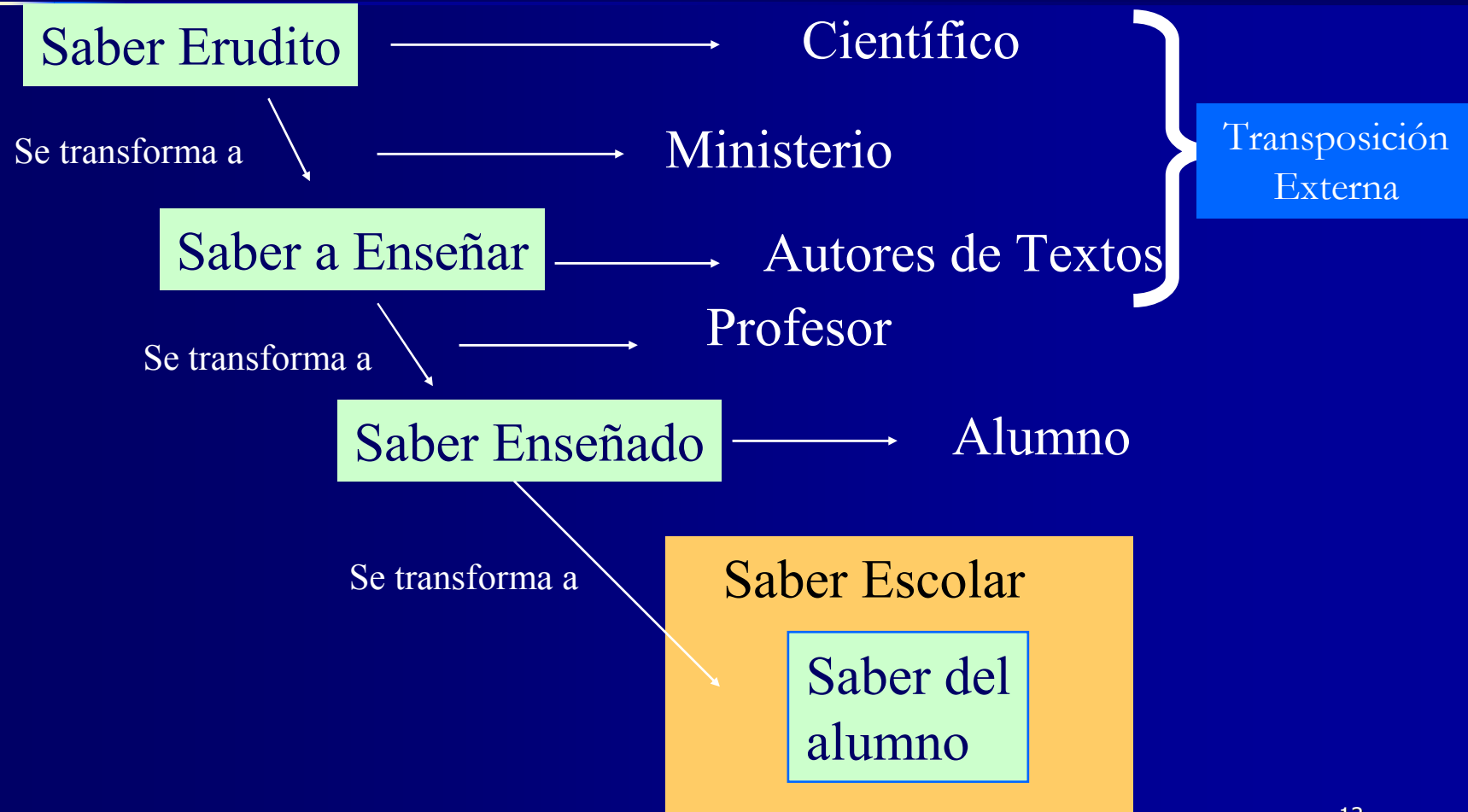
## Directrices de esta presentación:

1. El libro de texto y su impacto en el proceso de enseñanza – aprendizaje. El caso de la Matemática escolar
2. El Problema
3. Fundamentos epistemológicos
4. El diseño
5. De los dispositivos examinados
6. Conclusiones

### 3. Fundamentos Teóricos: Los Actos de la Transposición

#### Didáctica

(M. Henry, 1995)



## Directrices de esta presentación:

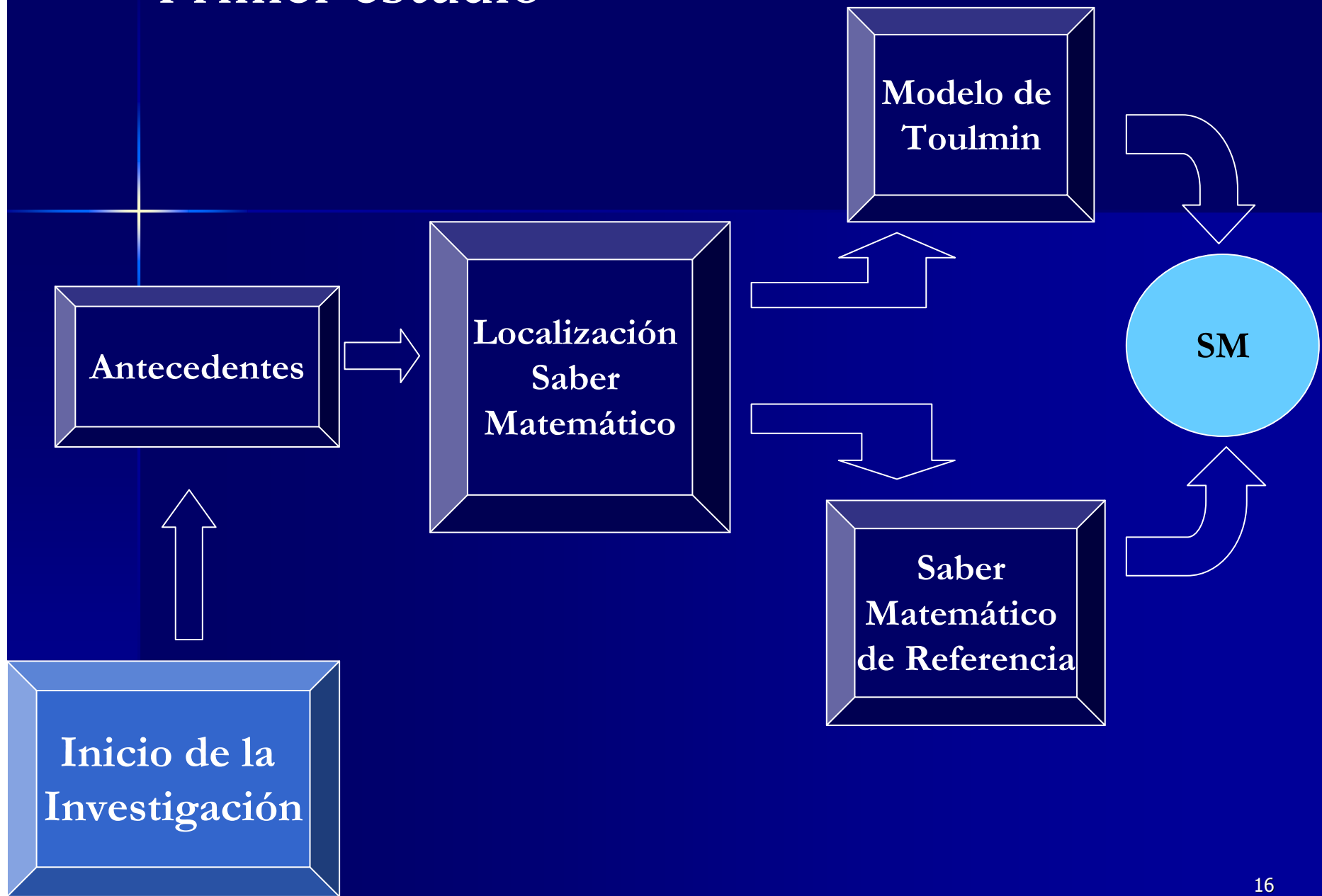
1. El libro de texto y su impacto en el proceso de enseñanza – aprendizaje.  
El caso de la Matemática escolar
2. El Problema
3. Fundamentos epistemológicos
4. **El Diseño**
5. De los dispositivos examinados
6. Conclusiones



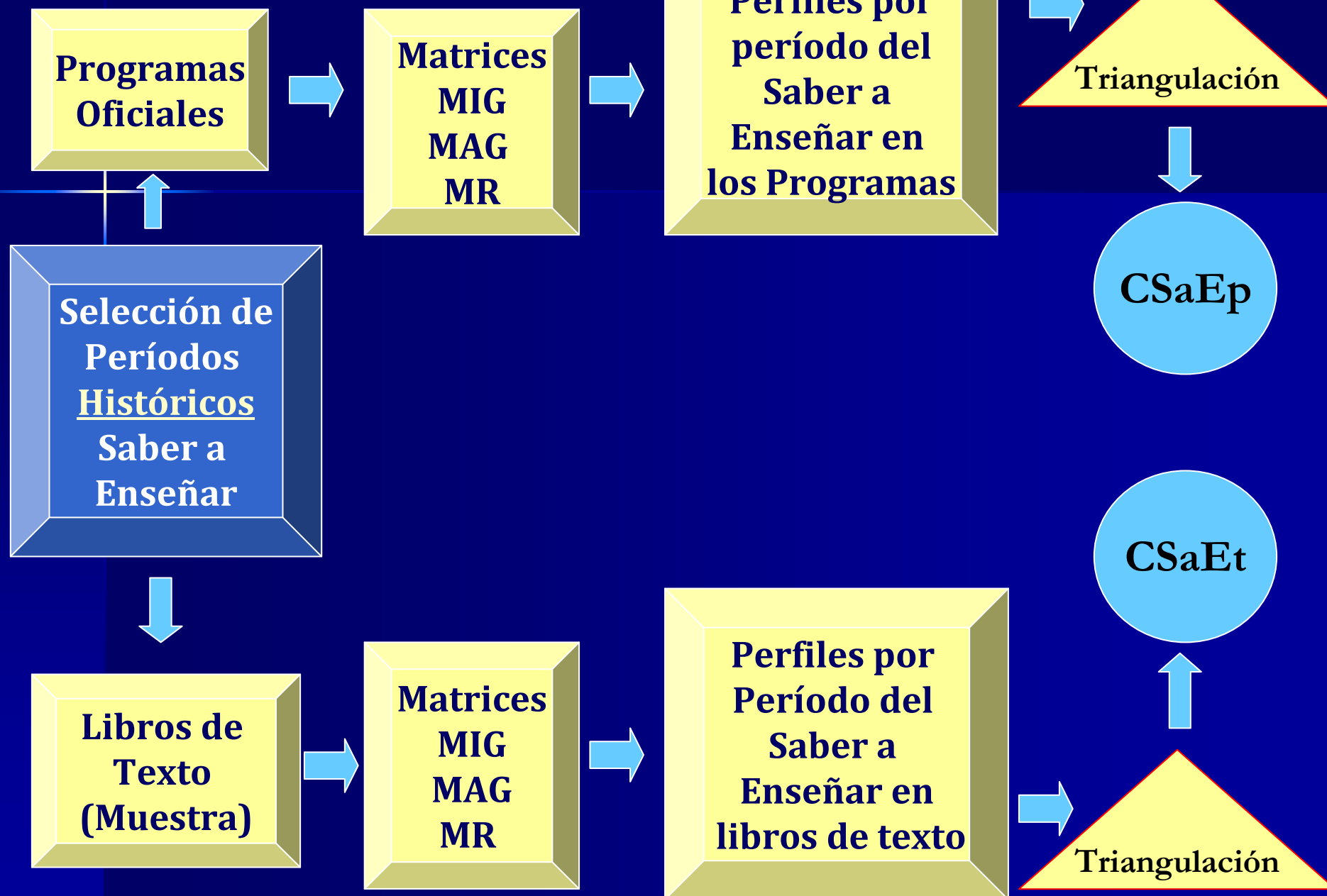
## 4. El Diseño

Tres estudios

# Primer estudio

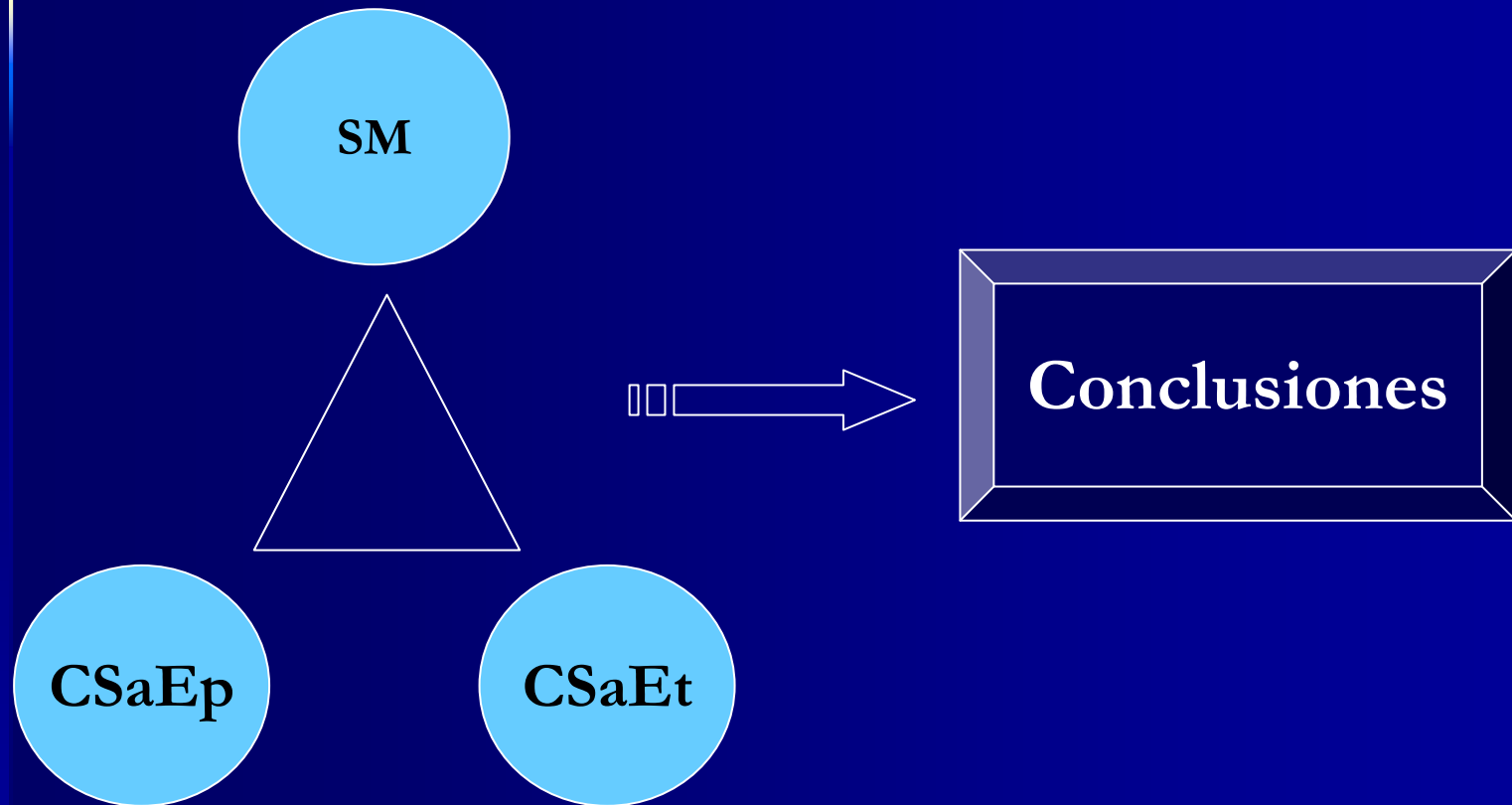


## Segundo estudio



# Tercer estudio:

## Triangulación de las caracterizaciones



## Directrices de esta presentación:

1. El libro de texto y su impacto en el proceso de enseñanza – aprendizaje.  
El caso de la Matemática escolar
2. El Problema
3. Fundamentos epistemológicos
4. El Diseño
5. De los dispositivos examinados
6. Conclusiones

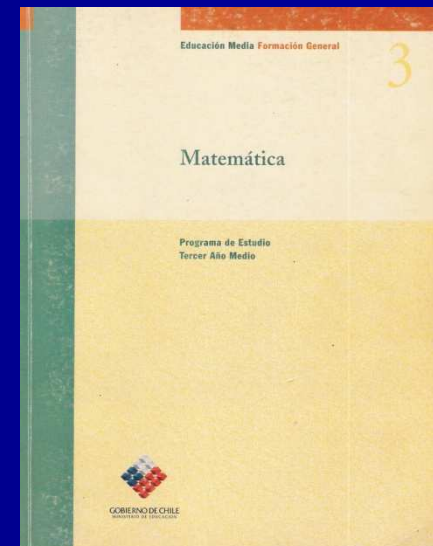
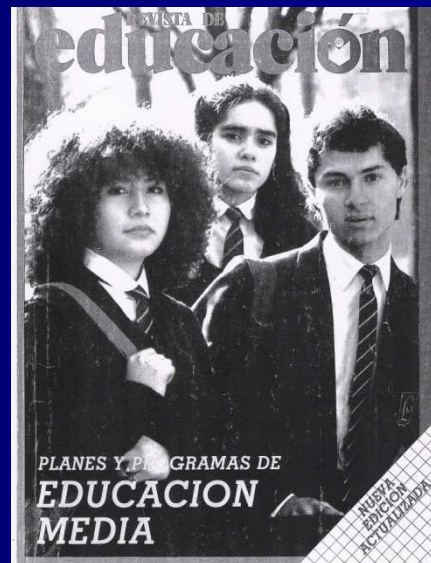
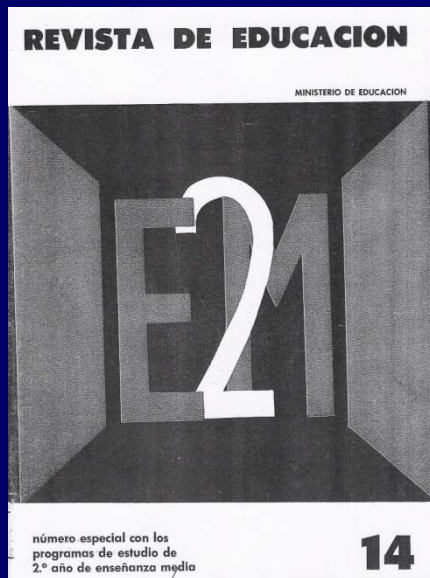
## 5. De los dispositivos examinados

- 20 libros de texto de mayor uso.  
(Consulta a expertos)
- Los 3 programas oficiales (y sus versiones)



# Muestra intencionada: Programas Oficiales

## Programas Ministeriales examinados



## Muestra intencionada: **Libros de Texto**

Se consultó:

- Presencia en el mercado actual.
- A profesores en ejercicio.
- Vendedores anticuarios y bibliófilos.
- Catálogos Biblioteca Nacional.
- Libros de texto distribuidos por el MINEDUC.
- Bibliotecas de Universidades formadoras de profesores de matemáticas.

# Matriz MIGp: Recogida de datos de Programas Oficiales y Análisis

Campos genéricos Matriz MIGp	Programa
MIGp1: Decreto	
MIGp2: Características generales	
MIGp3: Programa seleccionado y sus referencias de identificación	
MIGp4: Secciones del Programa	
MIGp5: Referencias bibliográficas	

# Matriz MACp: Recogida de datos de Programas Oficiales y Análisis

Campos genéricos Matriz MACp	Programa
MACp1: Lugar oficial de la radicación	
MACp2: Propósitos explicitados	
MACp3: Organización de los contenidos	
MACp4: Orientaciones metodológicas	
MACp5: Actividades o ejemplos	

# Matriz MIGt para la recogida de datos de Libros de texto y Análisis

Campos genéricos Matriz MIGt	Libro de texto
MIGt1: Título y procedencia	
MIGt2: Datos de autoría	
MIGt3: Edición y tipo de obra	
MIGt4: Presentación física	

# Matriz MACT para la recogida de datos de Libros de texto y Análisis

Campos genéricos Matriz MACT	Libro de texto
MACT1: Organización de los contenidos	
MACT2: Tipo de presentación de los contenidos (Axiomática, constructivista, mixta)	
MACT3: Ecología de los radicales	
MACT4: Introducción a los radicales	
MACT5: Tratamiento de las propiedades	
MACT6: Aplicaciones (Objeto herramienta)	26



Articulación  
entre los campos  
de las matrices  
de recogida de  
información, las  
matrices de  
resumen y los  
objetivos de la  
investigación

Campos de las matrices MIGp, MIGt, MACp y MACt	Campos de la matriz de resumen y cotejo	Objetivos específicos de la investigación
MIGp1 MIGp2 MIGp3	Mrp1	OE1
MACp3 MACp4 MACp5 MACt4 MACt5	Mrp6  Mr6	OE2
MACp4 MACp5 MACp6	Mr5	OE3
MACp4 MACp5 MACt4 MACt5	Mr4 Mr5 Mr6	OE4
MACp1 MACp2 MACp3 MACt1 MACt3 MACt6	Mr3 Mr4 Mr7	OE5
MACp4 MACp5 MACt4 MACt5 MACt6	Mr3 Mr4 Mr5 Mr6 Mr7	OE6

## Directrices de esta presentación:

1. El libro de texto y su impacto en el proceso de enseñanza – aprendizaje.  
El caso de la Matemática escolar
2. El Problema
3. Fundamentos epistemológicos
4. El diseño
5. De los dispositivos examinados
6. Conclusiones

## 6. Conclusiones

# Conclusiones acerca de los programas

	Programa 1	Programa 2	Programas 3
<b>Concepción Matemática</b>	Estructuralista	Mecanicista	Orientada a las aplicaciones reales
<b>Direccionamiento de las actividades</b>	Regular - Baja	Muy Baja (criterio de flexibilidad)	Alta
<b>Distinción Raíz – raíz aritmética</b>	Sí	No	Sí
<b>Tratamiento</b>	Deductivo	Deductivo	Inductivo
<b>Representaciones</b>	Radical y de potencia	Radical y de potencia	Radical, de potencia, con valor absoluto y funcional
<b>Demostraciones</b>	Obligatorias	No se pronuncia	Opcionales

# Conclusiones de la revisión de programas

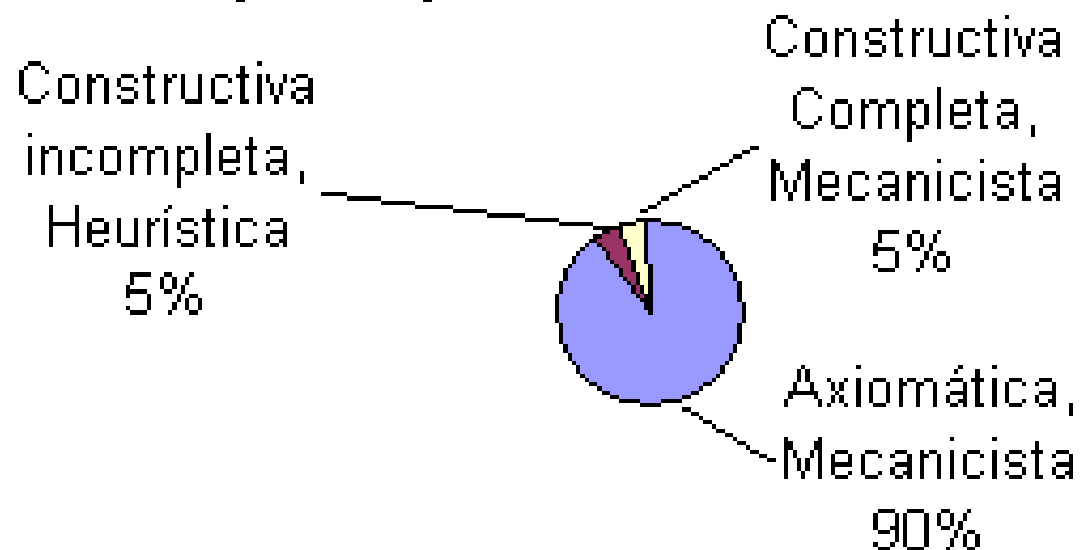
	Programa 1	Programa 2	Programas 3
<b>Propiedades</b>	Multiplicación y división de radicales con restricciones	Multiplicación y división de radicales sin restricciones	Multiplicación y división de radicales e introducción del coeficiente dentro de una raíz, sin restricción
<b>Racionalización</b>	Sólo de denominadores	Sólo de denominadores	Sólo de denominadores
<b>Ecuaciones con radicales</b>	No aparece	Sólo aparece el título	Con restricciones
<b>Irracionalidad</b>	Enfoque formal	No aparece como tema explícito	Se utiliza con números concretos

# Acerca de los libros de texto



## TEXTOS PERIODO 1, 2 y 3

### MAct2: Tipo de presentación de los contenidos



Variable Observada	Descripción	Porcentaje de determinación Período 1	Porcentaje de determinación Período 2	Porcentaje de determinación Período 3
<b>3. Uso del signo radical</b>	A las expresiones con $\sqrt{\quad}$ les llama raíces	100	100	100
	No se utiliza el nombre de radical	84	86	100
	No utiliza el nombre de irracional	84	66	72
	Se presenta el error del doble signo	100	66	0
	No Restringe completamente.	84	66	28
<b>4. Introducción al concepto</b>	Planteamiento Deductivo.	86	100	0
	Introduce el concepto como inversa de la potenciación	100	100	100
	Introduce como potencia de exponente fraccionario	34	66	28
<b>5. Tipos de representaciones que utiliza</b>	Utiliza el signo radical	100	100	100
	Utiliza el valor absoluto	0	14	72
	Utiliza la notación de potencia	100	86	100
	Representa como función	0	14	100

# Conclusiones respecto a los libros de texto

- **Restricciones del signo Radical:** El error del doble signo se ha visto superado en el tiempo. En el primer período todos los libros examinados cometían el error, en el segundo en tanto, lo mantenía dos tercios de los libros revisados y en el tercer período ninguno de los textos cae en el error, y es más, algunos lo previenen haciendo actuar el valor absoluto.
- **Introducción al Concepto:** A partir de la noción de operación inversa, que es válido sólo en el ámbito aritmético.
- **Tipos de representaciones que utiliza:** Mayormente la notación propia de radical y la notación de potencia. Actualmente se incorpora el uso de valor absoluto y su estatus de función real de variable real.

# Tratamiento de los conceptos de raíz y radical (Álgebra de radicales)

## Definición

Unos dicen que:

$$\sqrt{4} = \pm 2$$

Otros:

$$\sqrt{4} = 2$$

## Propiedades

Algunos enuncian las propiedades de forma adecuada, es decir, indicando bajo qué condiciones y en qué contextos se cumple,  
  
otros no.

- **Propiedades de los radicales**: Las únicas propiedades que permanecen en el tiempo son la multiplicación y división de radicales de igual orden. Aparece para ambas el fenómeno de la **unilateralidad**, que rompe con el significado algebraico del signo igual.

$$\sqrt[n]{a} \bullet \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \bullet \sqrt[n]{b}$$

- **Aplicaciones de los Radicales (Estatus de Herramienta)**: La racionalización aparece aplicada sólo a los denominadores y las ecuaciones con expresiones algebraicas radicales sólo se restringe en algunos de los textos del tercer período.

# Evidencias

Para multiplicar raíces de igual índice, se conserva la raíz y se multiplican las cantidades subradicales.

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{12}$$

Podemos demostrar lo anterior del siguiente modo:

$$\sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b} = \sqrt[x]{a \cdot b} \text{ ya que}$$

$$\sqrt[x]{a} = a^{\frac{1}{x}} \quad (1)$$

$$\sqrt[x]{b} = b^{\frac{1}{x}} \quad (2)$$

$$\sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b} = \quad \text{Reemplazando por (1) y (2)}$$

$$= a^{\frac{1}{x}} \cdot b^{\frac{1}{x}}$$

Por teorema del producto de potencias de igual exponente, tenemos:

$$= (a \cdot b)^{\frac{1}{x}}$$

Por propiedad que indica que toda potencia de exponente fraccionario es una raíz:

$$= \sqrt[x]{ab}$$

Entonces, queda demostrado que:

$$\sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b} = \sqrt[x]{a \cdot b}$$

Para interpretar  $a^{\frac{1}{2}}$  nos preguntaremos, ¿qué número es aquel que elevado al cuadrado da  $a$ ?

Designando por  $x$  ese número tendremos:  
 $x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a}$  (definición de raíz cuadrada).

La expresión  $(a^{\frac{1}{2}})^2 = a \Leftrightarrow a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

Apliquemos el mismo procedimiento para  $a^{\frac{1}{3}}$

$$(a^{\frac{1}{3}})^3 = a^{\frac{1}{3} \cdot 3} = a^1 = a$$

$a^{\frac{1}{3}}$  tiene que ser igual a  $\sqrt[3]{a}$

Ahora veamos cómo interpretar  $a^{\frac{1}{n}}$ :

$$(a^{\frac{1}{n}})^n = a \text{ (porque } \frac{1}{n} \cdot n = 1 \wedge a^1 = a).$$

¿Dónde es válido esto?



## Definición defectuosa

Definición de raíz  $n$  "ésima" de un número real: Sea  $x \in \mathbb{R}$  y  $n \in \mathbb{N}$ , entonces se llama "raíz  $n$  de  $x$ " a todo número  $y \in \mathbb{R}$  tal que:  $y^n = x$

$$\sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow y^n = x$$

## Una demostración espuria

Vamos a probar que  $a \sqrt[n]{m} \times b \sqrt[n]{x} = ab \sqrt[n]{mx}$ .

En efecto:  $a \sqrt[n]{m} \times b \sqrt[n]{x} = a m^{\frac{1}{n}} \times b x^{\frac{1}{n}} = ab m^{\frac{1}{n}} x^{\frac{1}{n}} = ab (mx)^{\frac{1}{n}} = ab \sqrt[n]{mx}.$

Un desarrollo  
erróneo y  
contradictorio  
en el mismo  
libro de texto

$$1) 2x^2 - 15 = 17$$

Esta ecuación se resuelve fácilmente con sólo aislar el término con  $x^2$ . Se obtiene:

$$2x^2 = 32$$

$$x^2 = 16 \implies x = \sqrt{16} = \pm 4$$

Como la ecuación es de 2º grado, tiene dos *soluciones* o *raíces* que es costumbre designarlas por  $x'$ ,  $x''$  o por  $x_1$ ,  $x_2$ .

En este ejemplo, las dos »raíces« de la ecuación son

$$x' = 4; \quad x'' = -4;$$

o bien: conjunto solución =  $\{4, -4\}$

# Conceptos confusos

## 1.3.6 EXPONENTE E ÍNDICE PAR

Observemos algunas situaciones:

$$3^2 = 9$$

$$(-3)^2 = 9$$

$$2^4 = 16$$

$$(-2)^4 = 16$$

$$1^6 = 1$$

$$(-1)^6 = 1$$

$$4^2 = 16$$

$$(-4)^2 = 16$$

$$3^4 = 81$$

$$(-3)^4 = 81$$

$$2^6 = 64$$

$$(-2)^6 = 64$$

Toda potencia de exponente par es positiva, sea su base positiva o negativa.

De acuerdo con esto veamos qué sucede con las raíces de índice par.

$$\sqrt{25} = \pm 5 \quad \text{porque} \quad 5^2 = 25$$

$$(-5)^2 = 25$$

$$\sqrt[4]{16} = \pm 2 \quad \text{porque} \quad 2^4 = 16$$

$$(-2)^4 = 16$$

Luego, **las raíces de índice par tienen dos soluciones.**

## Interrogante levantadas

- ¿Se forman profesores de matemáticas con el Saber Didáctico y el Saber Matemático requerido y debidamente articulado para analizar las fuentes de donde toman información como apoyo a sus clases, especialmente libros de texto?
- ¿Qué variables consideran los profesores de matemáticas al momento de escoger un libro de texto para sus clases?
- ¿Qué rol juega en la formación docente de profesores de matemáticas la epistemología de su disciplina?

**Gracias**

*E-Mail:  
profesorvidal@yahoo.es*

# Elección de los períodos entre 1969 y 2009

## Períodos de Análisis en la Divulgación escrita de conocimientos matemáticos escolares

