Doherty Andrade
Jorge Ferreira de Lacerda

Geometria Analítica

2ª Edição
Florianópolis, 2010.

Laboratório de Novas Tecnologias - LANTEC/CED

Coordenação Pedagógica

Coordenação Geral: Andrea Lapa, Roseli Zen Cerny

Núcleo de Formação: Nilza Godoy Gomes

Núcleo de Pesquisa e Avaliação: Claudia Regina Flores

Núcleo de Criação e Desenvolvimento de Materiais

Design Gráfico

Coordenação: Laura Martins Rodrigues, Thiago Rocha Oliveira

Projeto Gráfico Original: Diogo Henrique Ropelato, Marta Cristina Goulart Braga, Natal Anacleto Chicca Junior.

Redesenho do Projeto Gráfico: Laura Martins Rodrigues, Thiago Rocha Oliveira

Diagramação: Rafael de Queiroz Oliveira

Ilustrações: Karina Silveira, Rafael de Queiroz Oliveira, Pricila Cristina da Silva, João Jair da Silva Romão

Capa: Talita Ávila Nunes

Design Instrucional

Coordenação: Juliana Machado

Design Instrucional: Geraldo W. R. Fernandes

Revisão de Design Instrucional: Elizandro Maurício Brick

Revisão Gramatical: Jane Maria Viana Cardoso

Ficha Catalográfica

G934c Andrade, Doherty
Geometria Analítica I / Doherty Andrade, Jorge Ferreira de Lacerda – 2. ed. –
Florianópolis : UFSC/EAD/CED/CFM, 2010.
191p.

ISBN 978-85-99379-74-5

1. Geometria analítica. 2. Vetores. 3. Cônicas. I. Lacerda, Jorge Ferreira de. II Título.

CDU 51

Elaborada pela Bibliotecária Eleonora M. F. Vieira – CRB – 14/786

Sumário

Apresentação

Caro estudante,

A Geometria Analítica é um prolongamento da Geometria Euclidiana. As ferramentas construídas nessa disciplina serão úteis em todas as disciplinas que virão. Por isso mesmo o estudante deve esforçar-se para compreender todas as definições e resultados e estabelecer relações entre os principais fatos. Compreender os exemplos e fazer os exercícios é um bom caminho para a compreensão total do texto.

Sem sombra de dúvida, o conceito mais importante dessa disciplina é o conceito de vetor e, em seguida, o conceito de base. O professor deve insistir na compreensão desses conceitos e o estudante deve trabalhar para compreendê-los. Tendo estabelecido esses conceitos, podemos aprofundar nossos estudos em outras direções, como as operações com vetores, o estudo de retas e planos, matrizes e sistemas de equações lineares.

Esperamos que após o estudo do conteúdo dessa unidade você seja capaz de definir vetor e matriz, trabalhar com vetores, matrizes, retas, planos, sistemas de equações lineares e superfícies cônicas. E, claro, resolver problemas envolvendo estes conceitos.

A sua aprendizagem dependerá de você. Nós vamos ajudá-lo, oferecendo os meios. Esta será a nossa tarefa, mas a sua tarefa é mais importante e mais nobre. Ela pode ser explicitada com dois verbos: estudar e aprender.

Doherty Andrade

Jorge Ferreira de Lacerda

Capítulo 1

Matrizes

Capítulo 1
Matrizes

Neste capítulo vamos iniciar o estudo das matrizes, mas não apenas porque são importantes na resolução de sistemas de equações lineares, que veremos a seguir, mas porque são importantes por si só. A teoria das matrizes, além de uma belíssima teoria, está presente em todos os ramos da Matemática e da Física, principalmente no que se refere a operações com vetores. Saber operar com matrizes é tão importante como saber somar números inteiros. Vamos aprender como somar e como multiplicar matrizes. Vamos apresentar também vários tipos de matrizes especiais: simétricas, triangulares superior e inferior, identidade, nula entre outras.

1.1 Introdução

Em linguagem comum, uma matriz consiste em uma tabela de elementos dispostos em linhas e colunas (observe o exemplo a seguir). Em matemática, uma matriz A com m linhas e n colunas, denotada por $A_{m\times n}$, é definida como sendo uma função A de $I_m \times I_n$, tomando valores num conjunto K, onde o conjunto I_k é definido por $I_k = \{1, 2, ..., k\}$. O mais freqüente é que K seja o conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, ou dos números complexos, $\mathbb{C}$. Mas K pode ser outro conjunto como, por exemplo, um conjunto de funções.

Como matriz é uma função, tem sentido falarmos na sua imagem. É usual representar a imagem $A(i, j)$ por a_{ij}. Também é comum organizar uma matriz numa tabela, onde o elemento a_{ij} ocupa a linha i e a coluna j. É nessa forma que trabalhamos com matrizes.

Seja $A : I_3 \times I_3 \to \mathbb{R}$ a matriz dada por $A(i, j) = 2i - j$. Então, $a_{i,j} = 2i - j$ e portanto podemos representar esta matriz por:

$$A = \begin{bmatrix} 2\cdot1-1 & 2\cdot1-2 & 2\cdot1-3 \\ 2\cdot2-1 & 2\cdot2-2 & 2\cdot2-3 \\ 2\cdot3-1 & 2\cdot3-2 & 2\cdot3-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

onde $a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{13} = -1$, $a_{21} = 3$, $a_{22} = 2$, $a_{23} = 1$, $a_{31} = 5$, $a_{32} = 4$, $a_{33} = 3$.

Dizemos que uma matriz A tem ordem (ou dimensão) $m \times n$ (nessa ordem) quando A possui m linhas e n colunas. Nesse caso escrevemos $A_{m\times n}$.

Definição 1.1: Duas matrizes $A_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B_{r\times s} = [b_{ij}]_{r\times s}$ são ditas iguais se possuem o mesmo número de linhas ($m = r$), o mesmo número de colunas ($n = s$) e todos os seus elementos correspondentes são iguais ($a_{ij} = b_{ij}$).

1.2 Tipos Especiais de Matrizes

Considere uma matriz com m linhas e n colunas, que denotamos por $A_{m\times n}$:

- Matriz *Quadrada* é aquela cujo número de linhas é igual ao número de colunas ($m = n$). Um exemplo são as matrizes A e B abaixo.

$$A_{2\times2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad B_{3\times3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

- Matriz *Nula* é aquela em que $a_{ij} = 0$, para todo i e j. Exemplo:

$$N_{2\times2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, N_{3\times3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, N_{2\times3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Matriz *Coluna* é aquela que possui uma única coluna ($n = 1$). Exemplo:

$$C_{3\times1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}, \quad C_{2\times1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, C_{4\times1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- Matriz *Linha* é aquela que possui uma única linha ($m = 1$). Exemplo:

$$C_{1\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix},\ C_{1\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}, C_{1\times 4} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix}.$$

- A *Diagonal Principal*, ou simplesmente, *Diagonal* de uma matriz quadrada $A_{n\times n}$ é o conjunto dos elementos a_{ii} com $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

- *Matriz Diagonal* é uma matriz quadrada em que $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$. Isto é, todas as entradas fora da diagonal principal são nulas e pelo menos uma entrada da diagonal principal é não nula. Exemplo:

$$D_{2\times 2} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},\ D_{3\times 3} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

- Matriz *Identidade Quadrada* é um tipo especial de matriz diagonal, onde $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$ e $a_{ij} = 1$, para $i = j$. Exemplo:

$$I_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ I_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Matriz *Triangular Superior* é uma matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal são nulos, ou seja, $m = n$ e $a_{ij} = 0$, para $i > j$. Exemplo:

$$A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & b \end{bmatrix},\ B_{3\times 3} = \begin{bmatrix} a & c & d \\ 0 & b & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

- Matriz *Triangular Inferior* é aquela em que $m = n$ e $a_{ij} = 0$, para $i < j$. Exemplo:

$$A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & b \end{bmatrix},\ B_{3\times 3} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ c & b & 0 \\ d & e & f \end{bmatrix}.$$

- Matriz *Simétrica* é aquela matriz quadrada, isto é, $m = n$, onde $a_{ij} = a_{ji}$. Exemplo:

$$A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix},\ B_{3\times 3} = \begin{bmatrix} a & c & d \\ c & b & e \\ d & e & f \end{bmatrix},\ C_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

- Matriz *Anti-Simétrica* é aquela onde $m = n$ e $a_{ij} = -a_{ij}$.

  Como $a_{ij} = -a_{ji}$, concluímos que $a_{ii} = -a_{ii}$. Portanto, $2a_{ii} = 0$ e $a_{ii} = 0$. Assim, uma matriz anti-simétrica possui diagonal nula. Exemplo:

$$A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ B_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 5 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix},\ C_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ -4 & -5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 1.1

Determine x de modo que a seguinte matriz seja anti-simétrica:

$$\begin{bmatrix} 2x-6 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 7 \\ 3 & -7 & x^2-6x+9 \end{bmatrix}.$$

Devemos ter $2x-6=0$ e $x^2-6x+9=0$ e, portanto, $x=3$.

1.3 Operações com Matrizes

1.3.1 Adição e Subtração

A soma de duas matrizes de mesma ordem, sendo $A_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B_{m\times n} = [b_{ij}]_{m\times n}$, é uma matriz $m \times n$, que denotaremos por $A + B$, cujos elementos são as somas dos elementos correspondentes de A e B. Isto é, $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$. Do mesmo modo, definimos $A - B = [a_{ij} - b_{ij}]_{m\times n}$.

Notemos que pela forma como definimos adição e subtração de matrizes, é impossível somar ou subtrair matrizes de ordens diferentes.

A operação de adição de matrizes goza das mesmas propriedades que a adição de números reais: é associativa, comutativa, possui elemento neutro (zero) e toda matriz possui um oposto. Resumimos as principais propriedades no seguinte teorema:

Teorema 1.1: Sejam A, B, C matrizes de mesma ordem, então valem as seguintes propriedades:

1) A soma é associativa: $A+(B+C)=(A+B)+C$.
2) A soma é comutativa: $A+B=B+A$.
3) Dada uma matriz A, existe uma matriz denotada por N (chamada matriz nula) de mesma ordem que A tal que $A+N=A$.
4) Dada uma matriz A, existe uma matriz denotada por $-A$ de mesma ordem que A tal que $A+(-A)=N$. A matriz $-A$ é chamada de o oposto de A.

A prova desse teorema se obtém de forma imediata a partir da definição de adição de matrizes.

Se tivermos as matrizes A e B de mesma dimensão, dadas por

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathrm{B}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Então, $A+B=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 10 \\ 3 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Verifique que $A+B=B+A$.

1.3.2 Multiplicação por escalar

Seja $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ e k um número real, então definimos uma nova matriz, $k\cdot A=[k\cdot a_{ij}]\ m\times n$, de forma que se tivermos

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ então } kA = \begin{bmatrix} 2k & 3k & 5k \\ 3k & k & -k \\ 5k & -k & 0 \end{bmatrix}.$$

Propriedades 1.1: Dadas as matrizes A e B de mesma ordem, $m \times n$, e números k, k_1 e k_2, temos:

- $k(A + B) = kA + kB$.
- $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$.
- $0 \cdot A = 0$. Observe que aqui o primeiro símbolo para zero é o escalar e o segundo símbolo para zero é a matriz nula.
- $k_1 \cdot (k_2 \cdot A) = (k_1k_2)A$.

As demonstrações dessas propriedades seguem diretamente da definição.

1.3.3 Transposição

Dada uma matriz $A = [a_{ij}]$, podemos obter uma outra matriz $A' = [b_{ij}]$, cujas linhas são as colunas de A, isto é, $b_{ij} = a_{ji} \cdot A'$ é denominada transposta de A. Por exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Propriedades 1.2:

- Uma matriz é simétrica se, e somente se, ela é igual à sua transposta, isto é, se, e somente se, $A = A'$.
- $A'' = A$. Isto é, a transposta da transposta de uma matriz é ela mesma.
- $(A + B)' = A' + B'$.
- $(kA)' = kA'$, onde k é qualquer escalar.

Uma propriedade interessante da teoria das matrizes é a seguinte: *toda matriz quadrada é soma de uma matriz simétrica com uma matriz anti-simétrica*. De fato, vamos verificar essa propriedade para o caso de matrizes de ordem 3.

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, considere as matrizes B e C dadas por

$$B = \frac{1}{2}(A + A'), \quad C = \frac{1}{2}(A - A').$$

Notemos que como $B = B'$ então B é simétrica, e como $C' = -C$, então C é anti-simétrica. Além disso, $A = B + C$. Isso termina a nossa verificação. Faça essa verificação para o caso geral.

1.3.4 Multiplicação de Matrizes

Sejam $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{n \times p}$,

definimos $AB = [c_{ij}]_{m \times p}$, onde $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$.

Em outras palavras, o elemento c_{ij} da matriz produto é o resultado da soma dos produtos dos elementos correspondentes da linha i da matriz A e da coluna j da matriz B. Note que para cada coluna da matriz A, existe uma linha na matriz B: o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B.

Veja a ilustração indicando a formação da matriz produto.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A_{m \times n}} \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}}_{B_{n \times p}} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & c_{ij} & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}}_{C_{m \times p}}$$

É importante ter a habilidade de multiplicar matrizes, pois vamos sempre precisar multiplicar matrizes.

Só podemos efetuar o produto $A_{m \times n}B_{r \times p}$ se $n = r$. Se esse for o caso, então o produto AB é uma matriz $C_{m \times p}$.

Exemplo 1.2: Consideremos as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}.$$ Determine $C = A{\cdot}B$.

Resolução: $C = AB$. Como A e B são matrizes quadradas de ordem 2, o produto é uma matriz quadrada de ordem 2.

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

Exemplo 1.3: Consideremos as matrizes quadradas de ordem 3,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}.$$ Determine $C = A.B$.

Resolução: Como A e B são matrizes quadradas de ordem 3, o produto é uma matriz quadrada de ordem 3. Segue que o produto simbólico é dado por

$$\begin{bmatrix} c_{11} = a_{11}\,b_{11} + a_{12}\,b_{21} + a_{13}\,b_{31} & c_{12} = a_{11}\,b_{12} + a_{12}\,b_{22} + a_{13}\,b_{32} & c_{13} = a_{11}\,b_{13} + a_{12}\,b_{23} + a_{13}\,b_{33} \\ c_{21} = a_{21}\,b_{11} + a_{22}\,b_{21} + a_{23}\,b_{31} & c_{22} = a_{21}\,b_{12} + a_{22}\,b_{22} + a_{23}\,b_{32} & c_{23} = a_{21}\,b_{13} + a_{22}\,b_{23} + a_{23}\,b_{33} \\ c_{31} = a_{31}\,b_{11} + a_{32}\,b_{21} + a_{33}\,b_{31} & c_{32} = a_{31}\,b_{12} + a_{32}\,b_{22} + a_{33}\,b_{32} & c_{33} = a_{31}\,b_{13} + a_{32}\,b_{23} + a_{33}\,b_{33} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 1.4: Consideremos as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Calcule AB e BA.

Resolução

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0+0 & -2+6+0 & 10+6+15 \\ 3+0+0 & -3+2+0 & 15+2-3 \\ 5+0+0 & -5-2+0 & 25-2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 31 \\ 3 & -1 & 14 \\ 5 & -7 & 23 \end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}1&-1&5\\0&2&2\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3&5\\3&1&-1\\5&-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-3+25&3-1-5&5+1+0\\0+6+10&0+2-2&0-2+0\\0+0+15&0+0-3&0+0+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24&-3&6\\16&0&-2\\15&-3&0\end{bmatrix}$$

Note que $AB \neq BA$, e isto geralmente ocorre.

Exemplo 1.5: Consideremos as duas matrizes

$$A=\begin{bmatrix}-1&0&1\\1&2&-1\\0&0&1\end{bmatrix} \text{ e } B=\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&-2&0\\3&-1&-1\end{bmatrix}.$$

Calcule AB.

Resolução

$$AB=\begin{bmatrix}-1&0&1\\1&2&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&-2&0\\3&-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+0+3&-1+0-1&-1+0-1\\-1+2-3&1-4+1&1+0+1\\0+0+3&0+0-1&0+0-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-2&-2\\-2&-2&2\\3&-1&-1\end{bmatrix}$$

Se a matriz A tem dimensão 2×3 e B tem dimensão 3×4, então a matriz produto AB tem dimensão 2×4. Observe que não podemos efetuar o produto BA.

Propriedades 1.3: Considerando as possibilidades para a multiplicação, temos:

i) Em geral $AB \neq BA$.

ii) $AI = A$, onde I é a matriz identidade

iii) $IA = A$, onde I é a matriz identidade

iv) $A(B + C) = AB + AC$, distributividade à esquerda.

v) $(A + B)C = AC + BC$, distributividade à direita.

vi) $(AB)C = A(BC)$, associatividade.

vii) $(AB)' = B'A'$.

viii) $0\cdot A = 0$ e $A\cdot 0 = 0$.

Note que em ii) e em iii) as matrizes identidade podem ter dimensões diferentes.

As demonstrações dessas propriedades seguem diretamente da definição de produto de matrizes.

Exercícios

1.1) Determine o produto AB e BA, onde:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 4\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix} \text{ e } B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 0\\ 3 & -1 & -1\end{bmatrix}.$$

Resposta: $AB=\begin{bmatrix}-3 & 2 & 2\\ 14 & -7 & -3\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}$, $BA=\begin{bmatrix}3 & 1 & 5\\ -1 & -4 & -9\\ 0 & -1 & -8\end{bmatrix}$.

1.2) Determine x tal que a matriz $A=\begin{bmatrix}x & 1 & x-1\\ 1 & 3 & x\\ 1 & 2 & 6\end{bmatrix}$ seja simétrica.

Resposta: $x=2$.

1.3) Dadas as matrizes quadradas A, B e C determine x e y, de modo que $A+B=C$, onde

$$A=\begin{bmatrix}x & -y\\ 2y & 2x\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}y & x\\ -y & -x\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}10 & -2\\ 6 & 4\end{bmatrix}.$$

Resposta: $x=4, y=6$.

1.3.5 Matriz Inversa

Dada a matriz quadrada A de ordem n, chamamos de inversa de A uma matriz B tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n. Escrevemos A^{-1} para representar a inversa de A. Nesse caso, dizemos que a matriz A é invertível.

Notemos que se A tem uma inversa, então ela é única. De fato, se B e C são inversas de A, então podemos escrever:

$B=BI=B(AC)=(BA)C=IC=C$, donde $B=C$.

Veremos mais tarde critérios para a existência da inversa para uma dada matriz *A*.

Exemplo 1.6

a) Seja $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ com $ad-bc\neq 0$.

Então a matriz $B=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ é a inversa de A. Verifique efetuando o produto.

b) Sejam as matrizes $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

Efetuando os produtos AB e BA, obtemos $AB=BA=I_{3\times 3}$. Assim, B é a inversa de A.

c) Sejam as matrizes $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Efetuando os produtos AB e BA, obtemos $AB=BA=I_{3\times 3}$. Assim, B é a inversa de A. Determinar a inversa de uma matriz diagonal é simples: basta inverter os elementos da diagonal.

d) Dada a matriz $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$. Determine x de modo que

$B=\begin{bmatrix} 9x & \frac{-8}{17} & \frac{3}{17} \\ \frac{-2}{17} & \frac{-2}{17} & \frac{5}{17} \\ \frac{3}{17} & \frac{3}{17} & x \end{bmatrix}$ seja a matriz inversa de A.

Resolução:

Desejamos ter $AB=\begin{bmatrix} 9x+\frac{8}{17} & 0 & -\frac{2}{17}+2x \\ -9x+\frac{9}{17} & 1 & -\frac{3}{17}+3x \\ 0 & 0 & \frac{15}{17}+2x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Comparando as matrizes, obtemos $x=\dfrac{1}{17}$.

e) Uma grande lanchonete vende 1000 hambúrgueres, 600 cheesebúrgures e 1200 milkshakes em um dia. O preço de cada hambúrguer é R$4,50, cada cheesebúrguer custa R$ 6,00 e cada milkshake custa R$ 5,00. Encontre o lucro total com a venda desses produtos e o lucro individual de cada produto da lanchonete em um dia, sabendo que o custo de um hambúrguer é R$ 3,50, de cada cheeseburguer é R$ 4,00 e de cada milkshake é R$ 3,50.

Resolução:

Vamos ordenar os produtos em hambúrguer, cheesebúrguer e milkshake. A matriz quantidade é dada por:

$Q = \begin{bmatrix} 1000 & 600 & 1200 \end{bmatrix}$, a matriz preço de venda é dada por:

$P = \begin{bmatrix} 4,5 \\ 6,0 \\ 5,0 \end{bmatrix}$ e a matriz custo de produção é $C = \begin{bmatrix} 3,5 \\ 4,0 \\ 3,5 \end{bmatrix}$.

Segue que a matriz lucro por unidade é:

$$L = P - C = \begin{bmatrix} 4,5 \\ 6,0 \\ 5,0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3,5 \\ 4,0 \\ 3,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0 \\ 2,0 \\ 1,5 \end{bmatrix}.$$

Essa matriz fornece o lucro obtido com a venda de uma unidade do produto (na ordem hambúrguer, cheeseburguer e milkshake). Portanto, o lucro total no dia é dado por:

$$L_{\text{total}} = Q \cdot L = \begin{bmatrix} 1000 & 600 & 1200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,0 \\ 2,0 \\ 1,5 \end{bmatrix}$$

$= 1000 + 1200 + 1800 = 4000$, isto é, R$ 4.000,00. E o lucro individual diário de cada produto é R$ 1.000,00, R$ 1.200,00 e R$ 1.800,00 (na mesma ordem acima).

Teorema 1.2: Sejam A e B matrizes invertíveis de ordem n. Então AB tem inversa e a inversa de AB é $B^{-1}A^{-1}$.

Demonstração: afirmamos que a inversa de AB é $B^{-1}A^{-1}$. De fato, como a inversa, quando existe, é única, basta efetuar os produtos para verificar:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I \text{ e}$$

$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = I$. Logo, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Exercícios

1.4) Determine os produtos AB e BA com as matrizes dadas a seguir:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$.

Respostas: $AB = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -15 & 17 \end{bmatrix}$ e $BA = \begin{bmatrix} 17 & -6 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$.

b) $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 \\ 6 & -7 & 2 \end{bmatrix}_{4\times 3}$ e $B = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix}_{3\times 3}$.

Respostas: $AB = \begin{bmatrix} 39 & 20 & 8 \\ -42 & 3 & 48 \\ 27 & 16 & 85 \\ 81 & -7 & -10 \end{bmatrix}$ e BA não existe.

1.5) Verifique se as matrizes dadas aos pares são inversas entre si.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$.

b) $A = \begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} \frac{3}{11} & \frac{8}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{9}{11} \end{bmatrix}$.

c) $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} \frac{23}{267} & \frac{-6}{89} & \frac{8}{267} \\ \frac{53}{267} & \frac{21}{89} & \frac{-28}{267} \\ \frac{-11}{267} & \frac{-1}{89} & \frac{31}{267} \end{bmatrix}$.

1.6) Uma papelaria vende 700 canetas, 400 cadernos e 200 lapiseiras em um mês. O preço de venda de cada produto é dado, respectivamente, por R$ 4,00, R$ 6,00 e R$ 15,00. O custo de cada produto para a papelaria é, respectivamente, R$ 3,50, R$ 4,00 e R$ 12,00. Determine o lucro mensal obtido com a venda de cada produto e o lucro total no mês.

Resposta: A matriz que apresenta o lucro mensal obtido com a venda de cada produto é $L = \begin{bmatrix} 350 \\ 800 \\ 600 \end{bmatrix}$ e o lucro total no mês é de R$ 1.750,00.

Resumo

Neste capítulo apresentamos uma breve introdução às matrizes, vimos que uma matriz é muito mais do que uma tabela de números, é uma função. Vimos também que podemos operar com matrizes. Somar, multiplicar e encontrar a transposta são operações simples envolvendo matrizes. Finalmente, vimos que a soma é associativa e comutativa, mas que a multiplicação de matrizes não é comutativa, embora tenha outras importantes propriedades.

Capítulo 2

Sistemas de Equações Lineares

Capítulo 2
Sistemas de Equações Lineares

Neste capítulo vamos apresentar os sistemas de equações lineares, a interpretação geométrica e as técnicas de resolução. As técnicas mais eficientes de resolver sistemas de equações lineares são baseadas em matrizes. Apresentaremos o Método de Eliminação de Gauss e o Método de Gauss-Jordan para resolver sistemas de equações lineares. Apresentaremos também um método genial para obter a inversa de uma matriz quadrada (quando esta existe). Todo o capítulo é baseado em matrizes e em operações denominadas elementares. Procure entender as operações elementares, pois elas serão úteis em todo o seu curso de Física.

2.1 Introdução

Uma equação é dita linear nas variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$ se é da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_nx_n = b$. Por exemplo, a equação $ax + by = c$, de variáveis x e y, é linear. Nesse caso, o conjunto dos pontos do plano que satisfazem a essa equação constitui uma reta, justificando o nome da equação. No caso de três variáveis, $ax + by + cz = d$, o conjunto dos pontos do espaço que satisfazem a essa equação formam um plano. Já as equações $ax^2 + by^2 = c$ e $axy + by = c$ não são equações lineares.

Um sistema de equações lineares é um conjunto de equações lineares. Em sistemas de equações lineares estamos preocupados em achar o conjunto-solução, que é o conjunto de números reais que satisfaz *simultaneamente* a todas as equações do sistema.

Por exemplo, no sistema de equações lineares a seguir,

$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$ vemos que $x = 2$ e $y = 1$ é solução do sistema, pois satisfaz a ambas as equações simultaneamente.

Para obter a solução de um sistema de equações lineares, efetuamos operações sobre as equações do sistema de modo a obter um sistema mais simples e facilitar a obtenção do conjunto-solução, mas sem modificar o conjunto solução. No sistema acima, *subtraindo* a segunda equação da primeira, obtemos $x = 2$. Uma vez conhecido o valor de $x = 2$, voltamos em qualquer equação e obtemos $y = 1$.

As únicas operações num sistema que produzem sistemas com o mesmo conjunto-solução são chamadas de operações elementares. São elas:

- Multiplicar uma equação por uma constante diferente de zero.
- Adicionar uma equação multiplicada por uma constante a uma outra equação.
- Permutar duas equações.

Transposição dos elementos de um todo para se obter uma nova combinação.

Observamos que essas operações são invertíveis, isto é, uma vez realizadas, elas podem ser desfeitas. Ao multiplicar uma equação por uma constante $c \neq 0$, para desfazê-la basta dividir a mesma equação pela mesma constante. Ao permutar duas equações, para desfazê-la basta permutar novamente as duas equações. E ao substituirmos a equação E_j por $kE_i + E_j$, adicionamos uma equação multiplicada por uma constante a uma outra equação. Para desfazê-la, basta subtrair do resultado a equação multiplicada kE_i.

2.2 Sistemas e Matrizes

Um sistema de equações lineares com m equações e n incógnitas é um conjunto de equações do tipo:

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

com a_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, números reais ou complexos e b_j, $j = 1, ..., n$, números reais ou complexos.

Uma solução do sistema (*) é uma n-upla de números $(x_1, x_2, ..., x_n)$ que satisfaz simultaneamente estas m equações.

Dizemos que dois sistemas de equações lineares são *equivalentes* se, e somente se, toda solução de um dos sistemas também é solução do outro. Obtemos sistemas de equações lineares equivalentes por meio de operações elementares sobre as equações do sistema. Para cada operação elementar feita sobre as equações de um sistema existe uma operação elementar que, feita sobre as equações do novo sistema, o transforma novamente no sistema original. Assim, dizemos que estas operações elementares são invertíveis.

Ao realizarmos uma operação elementar sobre as equações de um sistema, essa operação não introduz novas relações entre as variáveis e nem ignora informações entre elas. De fato, tendo um sistema modificado pela realização de operações elementares, ao desfazermos essas operações elementares, retornamos ao sistema original que não tem outro conjunto solução.

Uma forma prática para trabalhar com um sistema de equações lineares é usar a notação matricial. O sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

pode ser escrito numa forma matricial $A \cdot X = B$ onde

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ é a *matriz dos coeficientes,*

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ é a *matriz das incógnitas* e

$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ é a *matriz dos termos independentes.*

Uma outra matriz que podemos associar ao sistema é

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

que chamamos *matriz ampliada do sistema*.

Quando realizamos operações elementares sobre as equações lineares de um sistema, não mexemos com as variáveis. Assim, as operações que podemos efetuar nos sistemas lineares, de modo a não alterar o conjunto-solução, podem também ser efetuadas sobre as linhas da matriz ampliada do sistema. Estas operações serão definidas a seguir. São as operações elementares sobre as linhas de uma matriz.

2.3 Operações Elementares

Existem três tipos de operações elementares sobre as linhas de uma matriz.

i) Permutação da *i*-ésima com a *j*-ésima linha: $(L_i \leftrightarrow L_j)$

ii) Multiplicação da *i*-ésima linha por um escalar não nulo *k*: $(kL_i \to L_i)$

iii) Substituição da *i*-ésima linha pela *i*-ésima linha mais *k* vezes a *j*-ésima linha: $(L_i + kL_j \to L_i)$.

Como já dissemos, as operações elementares são operações inversíveis, isto é, uma vez realizada uma operação elementar podemos desfazê-la voltando à matriz original.

Definição 2.1: Se A e B são matrizes de mesma ordem, dizemos que B é linha equivalente a A, quando B for obtida de A através de um número finito de operações elementares sobre as linhas de A.

Usamos a seguinte notação: $A \sim B$. É claro que $A \sim A$; e se $A \sim B$, então $B \sim A$, pois as operações elementares podem ser desfeitas . Além disso, se $A \sim B$ e se $B \sim C$, então $A \sim C$. Assim, a relação $\sim$ é uma relação de equivalência.

Uma conseqüência das operações elementares é o resultado a seguir.

Teorema 2.1: Dois sistemas de equações lineares que possuem matrizes ampliadas linha equivalentes são equivalentes e portanto possuem o mesmo conjunto solução.

2.4 Matriz Linha Reduzida à Forma Escada

Uma matriz A de ordem $m \times n$ é linha reduzida à forma escada se:

i) O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1.

ii) Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero.

iii) Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas.

iv) Se as linhas $1,\ldots,r$ são as linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha i ocorre na coluna k_i, então $k_1 < k_2 < \ldots < k_r$. (Observe que esta última condição dá à matriz uma forma de escada, de onde vem o nome para essa matriz). Exemplo:

A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é linha reduzida à forma escada.

A matriz $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ não é linha reduzida à forma escada, pois não satisfaz i) e nem iv).

Quando realizamos operações elementares sobre as linhas de uma matriz para reduzi-la a uma matriz linha reduzida à forma escada, estamos eliminando todas as informações desnecessárias.

A demonstração deste é um pouco técnica e não vamos apresentá-la aqui. Você pode encontrá-la no Livro **Álgebra Linear**, de Boldrini/Costa/Ribeiro/Wetzler.

Teorema 2.2: Cada matriz $A_{m \times n}$ é linha equivalente a uma única matriz linha reduzida à forma escada.

Definição 2.2: Dada uma matriz $A_{m\times n}$, seja $B_{m\times n}$ a matriz linha reduzida à forma escada linha equivalente a A. O posto de A, denotado por p, é o número de linhas não nulas de B. A nulidade de A é o número $n - p$, o número de linhas nulas. Veja o exemplo:

Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 8 & 12 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

A matriz B é linha equivalente à matriz A, assim o posto de A é 2, e sua nulidade é 1.

Dada uma matriz $A_{m\times n}$, seja $B_{m\times n}$ a matriz linha reduzida à forma escada, que é linha equivalente a A. Vamos interpretar a matriz A como sendo a matriz ampliada de um sistema linear. Se a matriz B possuir um número k de linhas nulas, então o sistema linear em questão tem k equações redundantes. Usamos dizer também que, neste caso, as equações não nulas apresentadas pela matriz B são "independentes", e que as demais são "dependentes" destas. Dizemos que as linhas dependentes são uma combinação linear das independentes. Assim, o posto da matriz ampliada de um sistema nos dá o número de equações independentes deste.

2.5 Soluções de um Sistema de Equações Lineares: Método de Eliminação de Gauss

Consideremos um sistema de m equações lineares com n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

cujos coeficientes a_{ij} e termos constantes b_i são números reais ou complexos. Em qualquer sistema de equações lineares pode ocorrer:

i) o sistema tem uma única solução;

ii) o sistema tem infinitas soluções;

iii) o sistema não tem solução alguma.

No primeiro caso, dizemos que o sistema é possível (compatível) e determinado. No segundo caso, dizemos que o sistema é possível e indeterminado. Já no terceiro caso, dizemos que o sistema é impossível (incompatível).

Existe uma relação importante entre o posto de uma matriz e o número de soluções do sistema. Essa relação é dada pelo teorema a seguir.

Teorema 2.3:

i) Um sistema de m equações lineares e n incógnitas admite solução se, e somente se, o posto da matriz ampliada é igual ao posto da matriz dos coeficientes.

ii) Se as duas matrizes têm o mesmo posto p e $p = n$, a solução será única.

iii) Se as duas matrizes têm o mesmo posto p e $p < n$, podemos escolher $n - p$ incógnitas, e as outras p incógnitas serão dadas em função destas.

O matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855) é considerado o príncipe da matemática, por ter realizado avanços em suas diversas áreas. Também contribuiu para, dentre outras coisas, a astonomia e o eletromagnetismo. Em Física D, você se familiarizará com uma importante lei que leva o nome desse matemático.

O *método de eliminação de Gauss* consiste em transformar a matriz ampliada de um sistema de equações lineares em uma matriz triangular superior, que é a matriz ampliada de um sistema equivalente ao sistema original. Vejamos um exemplo.

Exemplo 2.2: Resolva o sistema de equações lineares reduzindo a matriz ampliada do sistema a uma matriz triangular superior.

$$\begin{cases} 2x + 5y + 2z = -1 \\ -3x - 7y - 4z = 10 \\ 2x + 7y - 1z = -18 \end{cases}.$$

Resolução:

O sistema pode ser escrito na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ -3 & -7 & -4 \\ 2 & 7 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 10 \\ -18 \end{bmatrix}.$$

Agora tomemos a matriz ampliada do sistema:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 & -1 \\ -3 & -7 & -4 & 10 \\ 2 & 7 & -1 & -18 \end{bmatrix}.$$

Agora seguiremos realizando operações elementares sobre as linhas da matriz ampliada do sistema. Note que na posição a_{11} temos um elemento não nulo (chamado de pivot), vamos utilizá-lo para anular os outros elementos dessa coluna. Para isso tomemos os multiplicadores $m_{21} = \frac{-3}{2}$, $m_{31} = \frac{2}{2} = 1$ e as seguintes operações elementares:

$$L_2 - m_{21}L_1 \to L_2, \quad L_3 - m_{31}L_1 \to L_3.$$

Obtemos,

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 1/2 & -1 & 17/2 \\ 0 & 2 & -3 & -17 \end{bmatrix}.$$

Passando para a segunda linha, note que na posição a_{22} temos um elemento não nulo (chamado de pivot), vamos utilizá-lo para anular os elementos dessa coluna que estão abaixo dele. Para isso tomemos o multiplicador $m_{32} = \frac{2}{1/2} = 4$ e a seguinte operação elementar $L_3 - m_{32}L_2 \to L_3$, temos

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 1/2 & -1 & 17/2 \\ 0 & 0 & 1 & -51 \end{bmatrix}.$$

A matriz ampliada do sistema está agora na forma triangular superior. Donde obtemos

$$\begin{cases} 2x + 5y + 2z = -1 \\ \frac{1}{2}y - z = \frac{17}{2} \\ z = -51 \end{cases}.$$

Fazendo a substituição inversa (de baixo para cima) e obtemos

$$\begin{cases} x = 263 \\ y = -85 \\ z = -51 \end{cases}.$$

Assim, a solução é única. É fácil ver que o posto da matriz do sistema e o posto da matriz ampliada do sistema são iguais a 3 e portanto o sistema tem solução única, como foi obtido.

Esse é o método de eliminação de Gauss: utilizamos multiplicadores e operações elementares para triangularizar a matriz ampliada do sistema. É importante seguir os passos, primeiro linha 1, depois linha 2 e assim sucessivamente, para evitarmos a realização de operações desnecessárias. Além disso, existem técnicas em que o conhecimento dos multiplicadores é muito importante.

No sistema a seguir, escrito na forma matricial, nós temos um caso de dificuldade.

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 & 1 \\ -4 & -12 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 10 \\ -18 \end{bmatrix}.$$

Tomemos a matriz ampliada do sistema:

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 & 1 & -1 \\ -4 & -12 & -5 & 1 & 10 \\ 2 & 7 & -1 & 1 & -18 \end{bmatrix}.$$

Na posição a_{11} temos um elemento não nulo, vamos utilizá-lo para anular os outros elementos dessa coluna. Para isso tomemos os multiplicadores $m_{21} = \frac{-4}{2} = -2$, $m_{31} = \frac{2}{2} = 1$ e as seguintes operações elementares: $L_2 - m_{21}L_1 \to L_2$, $L_3 - m_{31}L_1 \to L_3$. Obtemos,

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & -5 & -3 & -1 & -16 \end{bmatrix}.$$

Agora observamos que na posição a_{22} temos um elemento nulo, e não podemos utilizá-lo como pivot. Para continuar o processo devemos permutar a segunda linha com a terceira linha. Obtemos,

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & -3 & -1 & -16 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

e assim o processo pode continuar.

Exemplo 2.3

Resolver o sistema de equações lineares reduzindo a matriz ampliada do sistema a uma matriz triangular superior.

$$\begin{cases} x+2y-z+w=2 \\ 2x-y+2z-w=2 \\ x+y-2z+w=2 \end{cases}.$$

Resolução

O sistema pode ser escrito na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Tomemos a matriz ampliada do sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Seguiremos realizando operações elementares sobre as linhas da matriz ampliada do sistema. Note que na posição a_{11} temos o elemento 1. Vamos indicar as operações brevemente:

$$-2L_1 + L_2 \rightarrow L_2, \quad -1L_1 + L_3 \rightarrow L_3.$$

Obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dividindo a segunda linha por −5, $-\frac{1}{5}L_2 \to L_2$, obtemos $a_{22} = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4/5 & 3/5 & 2/5 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Fazendo $L_2 + L_3 \to L_3$, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4/5 & 3/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & -9/5 & 3/5 & 2/5 \end{bmatrix}.$$

Multiplicando a terceira linha por $-5/9$, obtemos $a_{33} = 1$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4/5 & 3/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & -2/9 \end{bmatrix}.$$

A matriz ampliada do sistema está agora na forma escada. Donde obtemos

$$\begin{cases} x = 2 - 2y + z - w \\ y = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}z - \frac{3}{5}w \\ z = -\frac{2}{9} + \frac{1}{3}w \end{cases}.$$

Fazendo a substituição, de baixo para cima, também chamada de substituição inversa, obtemos

$$\begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = \frac{2}{9} - \frac{1}{3}w \\ z = -\frac{2}{9} + \frac{1}{3}w \end{cases}.$$

Notemos que a solução depende da incógnita w. Para cada valor atribuído a w temos uma solução. Assim, o sistema tem infinitas soluções. Também é fácil ver que o posto da matriz do sistema e o posto da matriz ampliada do sistema são iguais a 3. Então, como são 4 incógnitas, temos 4 - 3 variáveis livres, como esperado.

No exemplo anterior, podemos fazer mais operações elementares no sistema triangular superior e reduzir ainda mais o sistema.

Exemplo 2.4: Resolver o mesmo sistema do exemplo anterior reduzindo a matriz ampliada do sistema a uma matriz linha reduzida à forma escada.

Resolução

Já temos do exemplo anterior que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4/5 & 3/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & -2/9 \end{bmatrix}.$$

Vamos continuar o processo eliminando os elementos das colunas de cada primeiro elemento não nulo (igual a 1) de cada linha.

Realizando as operações elementares $-2L_2 + L_1 \to L_1$, eliminamos o elemento $a_{12} = 2$, ficando com

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/5 & -1/5 & 6/5 \\ 0 & 1 & -4/5 & 3/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & -2/9 \end{bmatrix}.$$

Usando o elemento $a_{33} = 1$ e realizando as operações indicadas brevemente,

$$\frac{4}{5}L_3 + L_2 \to L_2, \quad \frac{-3}{5}L_3 + L_1 \to L_1,$$

obtemos a seguinte matriz linha reduzida à forma escada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 2/9 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & -2/9 \end{bmatrix}.$$

Essa matriz é a matriz ampliada do seguinte sistema:

$$\begin{cases} x = \dfrac{4}{3} \\ y + \dfrac{1}{3}w = \dfrac{2}{9} \\ z - \dfrac{1}{3}w = -\dfrac{2}{9} \end{cases}.$$

A solução desse sistema é imediata:

$$\begin{cases} x = \dfrac{4}{3} \\ y = -\dfrac{1}{3}w + \dfrac{2}{9} \\ z = \dfrac{1}{3}w - \dfrac{2}{9} \end{cases}.$$

O método de resolução de um sistema de equações reduzindo a matriz ampliada do sistema a uma matriz linha reduzida à forma escada é chamado de *método de Gauss-Jordan*.

Observação: Já vimos que a inversa de uma matriz quadrada A de ordem n é uma matriz B tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n. Escrevemos A^{-1} para a inversa de A.

Notemos que se a matriz A é quadrada invertível, então o sistema $AX = B$ tem imediatamente uma solução. De fato,

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B.$$

Exemplo 2.5: Resolva o seguinte sistema:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}}_{B}.$$

Resolução

A matriz A tem inversa dada por $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Logo, a solução do sistema é

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Segue que $x = -2, y = 0, z = 4$.

Exercícios

2.1) Três trabalhadores: um carpinteiro, um eletricista e um bombeiro, decidem simultaneamente fazer reparos em suas casas. Eles decidem trabalhar um total de dez dias cada um, de acordo com a seguinte escala:

	Trabalho realizado pelo carpinteiro	Trabalho realizado pelo eletricista	Trabalho realizado pelo bombeiro
Dias de trabalho/casa carpinteiro	2	1	6
Dias de trabalho/casa eletricista	4	5	1
Dias de trabalho/casa bombeiro	4	4	3

Eles ganham normalmente, por um dia de trabalho, entre 60 e 80 reais. Por isso, um deve pagar ao outro um salário diário razoável tal que o total pago seja o mesmo recebido. Determine todos os possíveis salários.

Sugestão: chame o salário diário do carpinteiro de c, o salário diário do eletricista de e, e o salário diário do bombeiro de b. Então, temos as equações

$$\begin{cases} 2c + e + 6b = 10c \\ 4c + 5e + b = 10e \\ 4c + 4e + 3b = 10b \end{cases}.$$

Agora é só resolver o sistema. A solução geral do sistema é $S = \{(x, \frac{32}{31}x, \frac{36}{31}x); x \in \mathbb{R}\}$, mas devemos lembrar que os salários são positivos e situam-se entre 60 e 80 reais.

2.2) Uma cidade tem três indústrias principais: uma mineradora de carvão, uma geradora de eletricidade e uma ferrovia local. Para produzir R$1,00 de carvão, a mineradora consome R$0,25 de eletricidade e R$0,25 de transporte. Para produzir R$1,00 de eletricidade, a geradora requer R$0,65 de carvão, R$0,05 de eletricidade para seus equipamentos auxiliares e R$0,05 de transporte. Para R$1,00 de transporte, a ferrovia local gasta R$0,55de carvão e R$0,10 de eletricidade. Numa certa semana a mineradora recebe um pedido de R$ 50.000,00 de carvão de outra cidade, e a geradora de eletricidade recebe um pedido de R$25.000,00 de eletricidade de fora. Não há demanda externa para ferrovia local. Quanto deve cada uma das indústrias produzir naquela semana para satisfazer suas demandas externa e interna?

Sugestão: Chame x_1 o valor total da produção de carvão, x_2 o valor total da produção de eletricidade e x_3 o valor total da produção de transporte. Se C é a matriz consumo local, X o vetor coluna produção total e D a demanda externa, então devemos resolver o sistema:

$$X - CX = D \text{, onde } C = \begin{bmatrix} 0 & 0,65 & 0,55 \\ 0,25 & 0,05 & 0,10 \\ 0,25 & 0,05 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 50.000 \\ 25.000 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Agora é só resolver o sistema. A solução é $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 102,0874751 \\ 56,1630219 \\ 28,3300199 \end{bmatrix}$.

2.6 Matrizes Elementares

A cada operação elementar com as linhas de uma matriz A corresponde uma multiplicação à esquerda de A por uma matriz especial. Essa matriz especial é chamada de matriz elementar. Ela é obtida realizando a mesma operação elementar sobre a matriz identidade.

Vejamos isso no caso especial de uma matriz quadrada de ordem 3:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

a) permutação de duas linhas: vamos trocar a linha 2 pela a linha 3.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}.$$

Realizando permutação sobre as linhas 2 e 3 da matriz identidade, obtemos a matriz elementar E, e em seguida, multiplicando à esquerda, isto é, EA, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}.$$

b) multiplicação de uma linha por uma constante não nula: vamos multiplicar a linha 2 por uma constante $k \neq 0$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Multiplicando a linha 2 da matriz identidade por $k \neq 0$, obtemos uma matriz E, e efetuando a multiplicação EA, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

c) Substituição da linha 2 pela linha 2 mais k vezes a linha 3

$(L_2 + k \cdot L_3 \rightarrow L_2)$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_{31} & a_{22} + ka_{32} & a_{23} + ka_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Realizando a mesma operação $(L_2 + k \cdot L_3 \rightarrow L_2)$ sobre a identidade de ordem 3, obtemos a seguinte matriz elementar

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Fazendo o produto EA, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_{31} & a_{22} + ka_{32} & a_{23} + ka_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Assim vemos que realizar uma operação elementar nas linhas da matriz A é o mesmo que aplicar esta operação elementar na matriz identidade e, em seguida, pré multiplicar esta nova matriz por A. Então podemos perceber que existe uma relação íntima entre as operações com linhas de uma matriz e certas matrizes especiais construídas a partir da matriz identidade. Estas matrizes serão denominadas matrizes elementares.

Definição 2.3: Uma matriz elementar é uma matriz obtida a partir da matriz identidade, através de aplicação de uma operação elementar sobre as linhas da matriz identidade.

Teorema 2.4: Se A é uma matriz, o resultado da aplicação de uma operação com as linhas de A é o mesmo que o resultado da multiplicação da matriz elementar E, correspondente à operação com linhas, pela matriz A.

Da discussão acima, podemos concluir que:

Corolário
Proposição que se deduz imediatamente de outra demonstrada.

Corolário: Uma matriz elementar E_1 é invertível, e sua inversa é também uma matriz elementar E_2.

Sejam A e B matrizes. Suponha que B seja a matriz linha-reduzida à forma escada obtida de A. Então, existe uma seqüência de matrizes elementares $E_1, E_2, \ldots E_{k-1}, E_k$ tais que $B = E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 A$.

Assim, se A é linha equivalente à matriz identidade I, existe uma seqüência de matrizes elementares tais que $I = E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 A$. Donde temos

$$(E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1)^{-1} = A \Rightarrow A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_k^{-1} \text{ e } A^{-1} = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1.$$

Segue que A é um produto de matrizes invertíveis e, portanto, é invertível. Assim, se uma matriz A é equivalente à matriz identidade, então A é invertível. Reciprocamente, toda matriz invertível é um produto de matrizes elementares. Prove! (Veja os exercícios).

Teorema 2.5: Uma matriz A é invertível se, e somente se, pode ser reduzida, por operações elementares, à matriz identidade.

Teorema 2.6: Sistemas de equações lineares associados a matrizes linha equivalentes são equivalentes.

Demonstração: Sejam A e A' matrizes linha equivalentes. Pelo teorema anterior, $A' = MA$, onde M é um produto de matrizes elementares e, portanto, invertível. Os sistemas (I) e (II) que têm A e A' como matrizes ampliadas podem ser escritos, respectivamente:

$$N \cdot X = B \text{ e } N' \cdot X = B',$$

onde N é a submatriz de A da qual se retirou a última coluna, e B é esta coluna. (Idem para N', A' e B'). Além disto, podemos verificar que

$$N' = M \cdot N \text{ e } B' = M \cdot B.$$

Portanto, $N \cdot X = B \Leftrightarrow MNX = MB \Leftrightarrow N'X = B'$.

Isto significa que os sistemas (I) e (II) são equivalentes, pois toda matriz

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

que seja a solução do I será solução de II e vice-versa.

Exercícios

2.3) Se A e B são matrizes quadradas de ordem n e $B \cdot A = I_n$, mostre que a matriz linha reduzida à forma escada equivalente a B é a identidade I_n.

2.4) Se A é invertível, mostre que A é produto de matrizes elementares.

2.7 Procedimento para a Inversão de Matrizes

Seja A uma matriz quadrada de ordem n e suponha que tenha inversa. Então, A é linha equivalente à matriz identidade I_n. Assim, existe uma seqüência de matrizes elementares $E_1, E_2, ...E_{k-1}, E_k$ tais que $I = E_k E_{k-1}...E_2 E_1 A$. Como as matrizes elementares são invertíveis, então o produto $E_k E_{k-1}...E_2 E_1$ é invertível. Logo,

$$I = (E_k E_{k-1}...E_2 E_1 A)^{-1} \Rightarrow A^{-1}(E_k E_{k-1}...E_2 E_1)^{-1} = I.$$

Isto é, $A^{-1} = I(E_k E_{k-1}...E_2 E_1) = E_k E_{k-1}...E_2 E_1$.

Logo, para obter a inversa da matriz A, basta realizar sobre a matriz identidade as mesmas operações elementares que foram realizadas sobre A para obter a sua linha-reduzida à forma escada.

Da discussão acima obtemos os seguintes teoremas:

Teorema 2.7: Se A é uma matriz invertível, sua matriz linha reduzida à forma escada, R, é a identidade. Além disso, A é dada por um produto de matrizes elementares.

Teorema 2.8: Se uma matriz A pode ser reduzida à matriz identidade por uma seqüência de operações elementares com linhas, então A é invertível, e a matriz inversa de A é obtida a partir da matriz identidade, aplicando-se a mesma seqüência de operações com linhas.

Exemplo 2.5: Determine se a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ possui inversa.

Resolução:

Reduzindo a matriz à forma escada, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$-L_1 + L_2 \to L_2$ $\quad -L_2 + L_3 \to L_3$ $\quad -L_2 \to L_2$

$L_1 + L_3 \to L_3$ $\quad -L_3 + L_1 \to L_1$

Assim, a matriz A pode ser reduzida à matriz identidade e, portanto, possui inversa.

Como vimos, toda matriz invertível é um produto de matrizes elementares. Assim, podemos aproveitar as matrizes elementares para determinar a inversa. Um dispositivo prático para determinar a inversa de uma matriz A é o seguinte: escrevemos uma nova matriz como $[A:I]$, isto é, A e a identidade ao lado, realizamos operações elementares sobre as linhas desta matriz até que se tenha $[I:B]$, e então teremos $B=A^{-1}$. Vejamos um exemplo:

Exemplo 2.6: Determine a inversa da matriz $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{bmatrix}$.

Resolução:

Escrevemos uma matriz em que a matriz dada e a matriz identidade são escritas lado a lado.

Procuramos reduzir a matriz dada à matriz identidade. Ao final, quando a matriz dada for reduzida à identidade, teremos, do outro lado, a matriz inversa da matriz dada.

Acompanhe as nossas reduções.

$$\underset{\substack{-L_1+L_2\to L_2\\ L_1+L_3\to L_3}}{\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}\sim\underset{-L_2+L_3\to L_3}{\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}}\sim\underset{\substack{-L_2\to L_2\\ -L_3+L_1\to L_1}}{\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1\end{bmatrix}}$$

$$\sim\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1\end{bmatrix}}_{Identidade\ \ e\ \ Inversa}.$$

Assim, a matriz inversa de A é a matriz dada por

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

Exercícios

2.5) Determine a inversa das matrizes utilizando a técnica apresentada acima.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

Resposta: A inversa é $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-5}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 1 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$.

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Resposta: A inversa é $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 0 & \frac{-1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{-1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

2.6) Resolva o seguinte sistema de equações lineares. Determine o posto da matriz ampliada do sistema.

$$\begin{cases} x + 2y - z + w = 2 \\ 2x - y + 2z + w = 1 \\ x + y - z + w = 2 \end{cases}.$$

Resposta: O conjunto solução é:

$$S = \left\{ (x, y, z, w); x = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}w, y = 1, z = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}w, w \in \mathbb{R} \right\}.$$

O posto da matriz ampliada é 3, e o sistema possui infinitas soluções.

2.7) Determine a solução do sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x - 2y - z + w = 2 \\ 2x + y + 2z - w = 3 \\ x + y + z + w = 1 \\ x - y + 2z + w = 4 \end{cases}.$$

Resposta: A solução é $x = 0, y = -1, z = 1, w = 0$. O posto da matriz do sistema e o posto da matriz ampliada do sistema são iguais a 4. A solução é única.

Resumo

Neste capítulo estudamos alguns métodos diretos para obter a solução de um sistema de equações lineares: o *método de eliminação de Gauss* e o *método de Gauss-Jordan*. Essas técnicas utilizam uma combinação de matrizes com *operações elementares* sobre suas linhas. É impressionante o feliz casamento entre sistemas de equações lineares e matrizes.

Capítulo 3

Determinantes e Matriz Inversa

Capítulo 3
Determinantes e Matriz Inversa

Neste capítulo vamos estudar determinantes e sua relação com matriz inversa. O determinante é uma operação sobre matrizes quadradas, que fornece também um método direto importante para decidir se uma matriz quadrada possui inversa ou não: se o determinante de uma matriz é diferente de zero, então a matriz possui inversa. Apresentamos também técnicas para facilitar o cálculo do determinante de uma matriz.

3.1 A Definição de Determinante

Vamos denotar o determinante de uma matriz quadrada $A=(a_{ij})$ por:

$$\det A \quad \text{ou} \quad |A| \quad \text{ou} \quad \det[a_{ij}].$$

Uma permutação φ no conjunto $\{1,2,\dots,n\}$ é qualquer bijeção $\varphi:\{1,2,\dots,n\}\to\{1,2,\dots,n\}$ sobre esse conjunto. Podemos representar a permutação φ por

$$\varphi:\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \cdots & \varphi(n) \end{pmatrix}$$

ou ainda por

$$\varphi:(\varphi(1)\ \ \varphi(2)\ \ \dots\ \varphi(n)).$$

Sobre o conjunto $\{1,2,\dots,n\}$ existem $n!$ permutações. Isso pode ser demonstrado por indução sobre n.

Dizemos que uma permutação φ sobre o conjunto $\{1,2,\dots,n\}$ apresenta uma inversão quando, na imagem da função φ, um inteiro precede outro menor do que ele. A potência de base –1 e expoente igual ao número de inversões é chamado de sinal da permutação.

Denotamos por $\operatorname{sgn}(\sigma)$ o sinal da permutação σ.

Por exemplo: se φ é a permutação dada por

$$\varphi : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

para determinar o seu sinal, observamos que temos as seguintes inversões: (5 2), (5 4), (5 3) e (4 3). Segue que o sinal é $\operatorname{sgn}(\varphi) = (-1)^4 = 1$.

Agora estamos prontos para apresentar a definição de determinante.

Definição 3.1: O determinante de uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ é definido por:

$$\det A = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \ldots a_{n\sigma(n)},$$

onde a soma é estendida a todas as $n!$ permutações σ no conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Notemos da definição acima que em cada fator $a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}$ há apenas um único elemento de cada linha e um único elemento de cada coluna.

Exemplo 3.1

a) O determinante de uma matriz quadrada $n \times n$ é dado por

$\det A = ad - bc$. De fato, existem duas permutações sobre o conjunto $\{1, 2\}$ são elas: $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, com sinais 1 e -1, respectivamente. Logo, temos

$$\det A = a_{1\sigma_0(1)} a_{2\sigma_0(2)} - a_{1\sigma_1(1)} a_{2\sigma_1(2)} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = ad - bc.$$

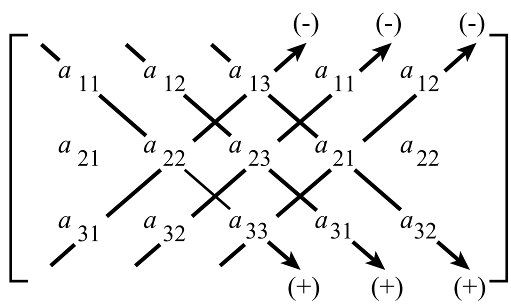
b) Do mesmo modo, podemos utilizar a definição de determinante de uma matriz para provar que, se

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

então o seu determinante é dado por

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Um artifício que auxilia o cálculo do determinante de uma matriz quadrada de ordem 3 é ilustrado pela figura a seguir:



repetimos as duas primeiras colunas da matriz e multiplicamos cada três elementos dessa matriz que estão alinhados. Se a flecha indica descida, o sinal do produto é positivo; se a flecha indica subida, o sinal é negativo. O resultado dessa soma é o valor do determinante. Esse artifício vale apenas para matrizes de ordem 3×3.

3.2 Principais Propriedades dos Determinantes

Calcular diretamente da definição o determinante de uma matriz pode ser uma árdua tarefa. Em geral, usamos propriedades que nos ajudam nesse trabalho. Dentre as propriedades dos determinantes, destacamos as encontradas abaixo. Essas propriedades, quando usadas simultaneamente, simplificam muito o cálculo do determinante.

Propriedades 3.1:

i) Se todos os elementos de uma linha (coluna) de uma matriz A são nulos, então $\det A = 0$.

ii) $\det A = \det A'$, onde A' é a matriz transposta de A.

iii) Se multiplicarmos uma linha (ou coluna) da matriz por uma constante, o determinante fica multiplicado por esta constante.

iv) Se permutarmos duas linhas (ou colunas), o determinante tem seu sinal trocado.

v) Se A tem duas linhas ou duas colunas idênticas, então $\det A = 0$.

vi) $$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

vii) O determinante não se altera se somarmos a uma linha uma outra linha multiplicada por uma constante.

viii) det $(A.B)$ = det A.det B.

Antes de apresentamos as demonstrações dessas importantes propriedades, vamos apresentar alguns exemplos que tornarão essas propriedades mais simples de serem entendidas.

Vimos que, se uma matriz A tem inversa, então $AA^{-1} = I$, e pela propriedade 8, acima, temos $1 = \det(I) = \det(AA^{-1}) = \det A \det A^{-1}$.

Segue que $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$. Temos o seguinte resultado:

Teorema 3.1: Se uma matriz quadrada possui inversa, então o seu determinante é diferente de zero. Além disso, $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

Em outras palavras, se o determinante é nulo, então a matriz não possui inversa. A recíproca também é verdadeira.

Teorema 3.2: Se $\det A \neq 0$ então A possui inversa.

Um importante resultado, apresentado a seguir, mostra que, para matrizes triangulares, calcular seus determinantes é tarefa simples.

Teorema 3.3: Se A é matriz triangular (isto é, tem apenas zeros abaixo ou acima da diagonal principal), então $\det A$ é igual ao produto dos elementos da sua diagonal principal.

Demonstração: A prova segue da definição de determinante e da observação de que, quando $\sigma \neq Id$, aparecerá ao menos um elemento nulo na expressão $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}\dots a_{n\sigma(n)}$. Vamos supor que a matriz A seja triangular superior, isto é, $a_{ij} = 0$ se $i > j$. Como na expressão do determinante $\det A = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a_{n\sigma(n)}$, em cada termo da soma há um (único) elemento de cada linha e um (único) elemento de cada coluna, se um dos elementos $a_{i\sigma(i)}$ tiver $i > \sigma(i)$, então $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}\dots a_{n\sigma(n)} = 0$. O único termo em que não se tem $i > \sigma(i)$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$ ocorre quando $\sigma = Id$ é a aplicação (permutação) identidade, isto é, $a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}$. Segue que $\det A = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}$. Isso prova o teorema.

Exemplo 3.2

a) Seja a matriz triangular superior $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. Segue que $\det A = 2$.

b) Seja a matriz triangular inferior $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 6 & 9 & -2 \end{bmatrix}$. Segue que $\det B = -6$.

3.3 Usando as Propriedades dos Determinantes

Exemplo 3.3

a) Considere que a matriz dada por $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ possui determinante igual a 1.

Logo, possui inversa, pois se não possuísse inversa, o seu determinante seria nulo.

b) Determine x na matriz $A = \begin{bmatrix} x-6 & 5 \\ -x & 1 \end{bmatrix}$ de modo que possua inversa.

Como $\det A = 6x - 6$ devemos ter $x \neq 1$.

c) Dada a matriz $A=\begin{bmatrix}1 & 4 & -1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$,

sua transposta é $A'=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 4 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}$.

Cada uma delas possui determinante igual a 6.

d) A matriz $A=\begin{bmatrix}1 & 4 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$ possui uma linha nula, logo seu determinante é nulo.

e) A matriz $B=\begin{bmatrix}1 & 4 & 0\\ 4 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$ possui uma coluna nula, logo seu determinante é nulo.

f) Seja a matriz $A=\begin{bmatrix}1 & 4 & -1\\ 1+3 & 2+1 & 4+2\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$, que tem determinante igual a 17.

Pela propriedade 6, temos que

$$\det A=\det\begin{bmatrix}1 & 4 & -1\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix}1 & 4 & -1\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}=13+4=17\,.$$

g) Seja a matriz $A=\begin{bmatrix}3 & 12 & -3\\ 2 & 4 & 6\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$.

Essa matriz pode ter a primeira linha fatorada por 3 e a segunda linha fatorada por 2. Assim, pela propriedade 3, temos

$$\det A=3\times 2\underbrace{\det\begin{bmatrix}1 & 4 & -1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}}_{10}=3\times 2\times 10=60\,.$$

h) Seja a matriz $A=\begin{bmatrix} 3 & 7 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 6 & 14 & 3 \end{bmatrix}$.

Observe que, multiplicando a primeira linha por -2 e somando com a terceira linha, obtemos a matriz

$$B=\begin{bmatrix} 3 & 7 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Pela propriedade 7, essa operação não altera o determinante. Logo, $\det A = \det B = -90$.

i) Calcule o determinante da matriz $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 9 \end{bmatrix}$.

Substituindo a linha 2 pela soma da linha 1 com a linha 2, obtemos

$$B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Como essa operação não altera o determinante, temos $\det A = 0$.

No seguinte exemplo, ilustramos a utilização das propriedades para calcular o determinante. Essa técnica, denominada "cálculo do determinante por triangulação", se baseia na utilização simultânea das propriedades dos determinantes.

j) Considere a matriz dada por $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

Vamos realizar as seguintes operações sobre as linhas dessa matriz. *Elas não alteram o valor do determinante*:

- substituir a linha 2 pela linha 1 mais a linha 2;
- substituir a linha 3 pela linha 3 menos a linha 1;
- substituir a linha 4 pela linha 4 menos duas vezes a linha 1.

Obtemos a seguinte matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

Efetuando a operação linha 4 menos duas vezes a linha 3, obtemos

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Multiplicando a linha 4 por $-\frac{1}{3}$, o determinante fica (alterado) multiplicado por $-\frac{1}{3}$,

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} \end{bmatrix}.$$

Permutando a linha 2 com a linha 3 e em seguida a linha 3 com a linha 4, o determinante *troca* de sinal duas vezes, e obtemos a seguinte matriz triangular superior:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

cujo determinante é 2.

Assim, como só realizamos três operações que alteram o determinante, temos

$$2 = \det E = \frac{-1}{3}(-1)(-1)\det A = \frac{-1}{3}\det A \Rightarrow \det A = -6.$$

Como vimos, aplicando repetidas vezes as propriedades dos determinantes, podemos calcular o determinante de uma matriz de um modo mais eficiente.

3.4 Demonstrações das propriedades dos determinantes

Apresentaremos, a seguir, as demonstrações das propriedades dos determinantes. Ignore essas demonstrações numa primeira leitura, mas, assim que se sentir mais seguro, volte e procure entendê-las.

i) Se todos os elementos de uma linha (coluna) de uma matriz A são nulos, então $\det A = 0$.

Como foi observado na definição de determinante, cada termo $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}\ldots a_{n\sigma(n)}$ possui um (único) elemento de cada linha e um (único) elemento de cada coluna. Se uma linha ou coluna é composta apenas de zeros, então cada produto $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}\ldots a_{n\sigma(n)}$ contribuirá com zero no somatório. Assim, o determinante é nulo.

ii) $\det A = \det A'$, onde A' é a matriz transposta de *A*. De fato, pela definição, temos

$$\det A = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}\ldots a_{n\sigma(n)}.$$

Vamos mostrar que

$$\det A' = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}a_{\sigma(3)3}\ldots a_{\sigma(n)n}.$$

O lado direito da igualdade é a soma de termos consistindo exatamente de um fator de cada linha e de cada coluna.

Quando reordenamos os fatores em cada termo $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}\ldots a_{n\sigma(n)}$ de modo a trazer de volta o índice das colunas a sua ordem natural, estamos, simultaneamente, alterando os índices das linhas de sua ordem natural. Cada inversão dos índices das colunas que se desfaz gera uma inversão nos índices das linhas. Assim, o sinal dos termos $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}\ldots a_{n\sigma(n)}$ é o mesmo que o sinal dos correspondentes termos $a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}a_{\sigma(3)3}\ldots a_{\sigma(n)n}$. Segue que $\det A = \det A'$.

iii) Se multiplicarmos uma linha da matriz por uma constante, o determinante fica multiplicado por esta constante.

Seja A uma matriz $n \times n$ e B a matriz obtida de A pela multiplicação uma linha ou coluna por $k \in \mathbb{R}$, digamos $b_{ij} = ka_{ij}$, $j = 1, 2, \dots, n$, isto é a linha i foi multiplica pela constante k. Então,

$$\det B = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} b_{3\sigma(3)} \dots b_{i\sigma(i)} \dots b_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \dots (ka_{i\sigma(i)}) \dots a_{n\sigma(n)}$$

$$k \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \dots (a_{i\sigma(i)}) \dots a_{n\sigma(n)} = k \det A \quad .$$

iv) Demonstraremos agora que, se permutarmos duas linhas de A, então o determinante muda de sinal.

De fato, seja B a matriz obtida de A permutando-se a k-ésima e p-ésima linhas. Pela definição de determinante, temos

$$\det A = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{k\sigma(k)} \dots a_{p\sigma(p)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

$$\det B = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{p\sigma(p)} \dots a_{k\sigma(k)} \dots a_{n\sigma(n)} \quad .$$

Se o conjunto $\{\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(k), ..., \sigma(p), ..., \sigma(n)\}$ possui um número par de inversões, então o conjunto $\{\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(p), ..., \sigma(k), ..., \sigma(n)\}$ possui um número ímpar de inversões, e vice-versa. Assim, estas permutações possuem sinais opostos, e temos $\det A = -\det B$.

v) Se A tem duas linhas ou duas colunas idênticas, então $\det A = 0$. Para provar essa afirmação, vamos usar o item iv. Seja B a matriz obtida de A pela permutação das linhas (ou colunas) idênticas. Claramente, $\det A = \det B$. Mas, por outro lado, permutando linhas obtemos $\det A = -\det B$. Donde segue que $\det A = 0$.

vi) Sejam A, B e C matrizes idênticas, exceto na i-ésima linha, e que a i-ésima linha da matriz C é soma da i-ésima linha da matriz A com i-ésima linha da matriz B, isto é, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $j = 1, 2, ..., n$. Todas as demais linhas das três matrizes são iguais. Vamos provar que $\det C = \det A + \det B$.

Mais precisamente, se

$$C=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

então $\det C = \det A + \det B$. De fato,

$$\det C = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) c_{1\sigma(1)} c_{2\sigma(2)} c_{3\sigma(3)} \ldots c_{i\sigma(i)} \ldots c_{n\sigma(n)}$$

$$\sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \ldots (a_{i\sigma(i)} + b_{i\sigma(i)}) \ldots a_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \ldots a_{i\sigma(i)} \ldots a_{n\sigma(n)} +$$

$$+ \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \ldots b_{i\sigma(i)} \ldots a_{n\sigma(n)}$$

$$= \det A + \det B\ .$$

vii) Agora vamos provar que o determinante não se altera se somarmos a uma linha uma outra linha multiplicada por uma constante. Seja $A=(a_{ij})$ e B a matriz obtida de A na qual a *i*-ésima linha é o produto da *p*-ésima linha de A por uma constante k mais a *i*-ésima linha de A. Vamos provar que $\det A = \det B$. De fato, notemos que a matriz B tem a forma

$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{p1} & \cdots & a_{in}+ka_{pn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Pelo item vi) sabemos que $\det B = \det A + k \det C$, onde C é matriz que possui a *i*-ésima e a *p*-ésima linhas iguais. Assim, $\det C = 0$ e, portanto, $\det A = \det B$.

viii) Agora provaremos que $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Primeiramente, vamos provar esse resultado para uma matriz elementar $A = E$. Lembramos que uma matriz elementar é uma matriz E obtida da matriz identidade pela realização de uma operação elementar. Vamos mostrar que $\det(EB) = \det E \cdot \det B$.

Se E é matriz elementar obtida pela permutação de duas linhas de $I_{n\times n}$, então por iv), $\det(EB) = -\det B$ e $\det E = -1$, portanto $\det(EB) = \det E \cdot \det B$.

Se E é matriz elementar obtida pela multiplicação de uma das linhas de $I_{n\times n}$ por uma constante $k \neq 0$, então por iii), $\det(EB) = k \det B$ e $\det E = k$, portanto $\det(EB) = \det E \cdot \det B$.

Se E é matriz elementar obtida adicionando k vezes uma linha de $I_{n\times n}$ à outra linha de $I_{n\times n}$, então por vii), $\det(EB) = \det B$ e $\det E = 1$, portanto $\det(EB) = \det E \cdot \det B$.

Agora consideremos o caso em que A é invertível. Assim, A pode ser escrita como um produto de matrizes elementares $A = E_1 E_2 \ldots. E_m$. Logo, aplicando repetidas vezes o resultado, já provado para o caso de matrizes elementares, temos

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det(E_1 E_2 \ldots. E_m B)\\ &= \det(E_1)\det(E_2)\ldots\det(E_m)\det(B)\\ &= \det(E_1 E_2 \ldots. E_m)\det(B)\\ &= \det(A)\det B.\end{aligned}$$

No caso em que A não é invertível, sua matriz reduzida à forma escada tem ao menos uma linha nula, isto é, $A = E_1 E_2 E_3 \ldots E_m C$ onde C é matriz reduzida à forma escada de A e tem ao menos uma linha nula.

Segue que

$$\begin{aligned}&\det(AB) = \det(E_1 E_2 E_3 \ldots E_m CB)\\ &= \det(E_1 E_2 E_3 \ldots E_m)\det(CB)\\ &= \det(E_1 E_2 E_3 \ldots E_m)0 = 0,\end{aligned}$$

pois CB tem uma linha nula e, portanto, o seu determinante é nulo.

3.5 Desenvolvimento de Laplace

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem n. Considere A_{ij} a submatriz da matriz A, onde a i-ésima linha e a j-ésima coluna foram retiradas.

Além disso, chamemos

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \left| A_{ij} \right|$$

de *cofator* ou complemento algébrico do elemento a_{ij}.

Dessas definições, podemos expressar:

$$\begin{aligned} \det A &= a_{i1}\Delta_{i1} + \cdots + a_{in}\Delta_{in} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij}. \end{aligned}$$

O processo acima, de calcular o determinante de uma matriz de ordem n a partir dos determinantes das submatrizes quadradas de ordem $n-1$ é chamado de desenvolvimento de Laplace. Observe que na fórmula dada, o determinante foi desenvolvido pela i-ésima linha, mas também podemos desenvolvê-lo de uma forma análoga por colunas.

Exemplo 3.4: Calcular o determinante da matriz pelo desenvolvimento de Laplace.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Resolução

Vamos escolher a primeira linha para efetuar o desenvolvimento. Assim, temos

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13} + a_{14}\Delta_{14} \\ &= (-1)^{1+1} a_{11} \left| A_{11} \right| + (-1)^{1+2} a_{12} \left| A_{12} \right| + (-1)^{1+3} a_{13} \left| A_{13} \right| + (-1)^{1+4} a_{14} \left| A_{14} \right| \\ &= \left| A_{11} \right| - 0\left| A_{12} \right| + \left| A_{13} \right| - 1\left| A_{14} \right|. \end{aligned}$$

Vamos calcular separadamente os determinantes

$$\left| A_{11} \right|, \left| A_{12} \right|, \left| A_{13} \right|, \left| A_{14} \right|.$$

$$|A_{11}| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4, \quad |A_{12}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$|A_{13}| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad |A_{14}| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -12$$

Donde segue que

$$\det A = |A_{11}| \; - 0|A_{12}| + |A_{13}| - 1|A_{14}| = 4 - 0(-5) + 2 - (-12) = 18 \, .$$

Exercícios

3.1) Calcule o determinante das seguintes matrizes. Qual delas possui inversa?

a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. **Resposta:** det = −4, possui inversa.

b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. **Resposta:** det = −5, possui inversa.

c) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$.

d) $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & 0 \\ c & e & f \end{bmatrix}$.

e) $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$. **Resposta:** os três itens, c,d e e têm o mesmo valor adf .

3.2) Use o desenvolvimento de Laplace para calcular os determinantes:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$. **Resposta:** $\det A = -54$.

b) $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 10 \end{bmatrix}$. **Resposta:** $\det A = -384$.

3.6 Técnica de Cálculo do Determinante: Eliminação de Gauss

Devido à sua importância, retomamos o cálculo do determinante por meio da aplicação simultânea das propriedades dos determinantes. Procuramos formalizar esse procedimento e estabelecer um algoritmo.

Calcular o determinante de uma matriz pela definição pode ser complicado, mesmo para um computador poderoso. Imagine que desejamos calcular o determinante de uma matriz de ordem 50×50. Em aplicações, é muito comum nos depararmos com matrizes muito maiores. Para isso, devemos efetuar aproximadamente $50! \approx 0,304 \times 10^{65}$ operações. Se um poderoso computador realizasse um trilhão de operações por segundo, faria todas as operações em aproximadamente $0,304 \times 10^{53}$ segundos. Isso é simplesmente $0,96 \times 10^{45}$ anos, aproximadamente quatro vezes a idade da Terra. Por isso, é importante conhecer as propriedades dos determinantes para otimizar o cálculo dos determinantes. É isso o que vamos fazer agora.

O método mais usual para calcular o determinante de uma matriz, de forma indireta, é utilizando o método de eliminação de Gauss para triangularizar a matriz dada. Já vimos nas propriedades de determinantes que, se uma matriz B foi obtida de $A = (a_{ij})$ adicionando à i-ésima linha de A o produto da p-ésima linha de A por uma constante k, então $\det A = \det B$. Logo, se ao triangularizarmos uma matriz não efetuarmos permutações de linhas ou colunas e nem multiplicarmos linha ou coluna da matriz por uma constante, não alteraremos o seu determinante. Mas se lançarmos mão dessas duas operações, devemos tomar os devidos cuidados para garantir que o determinante não seja alterado. Isto é, se multiplicamos uma linha ou coluna de uma matriz por uma constante, devemos em seguida dividir o determinante. E, se permutarmos linhas ou colunas de uma matriz, devemos em seguida trocar o sinal do determinante. Resumindo, temos o seguinte algoritmo:

Algoritmo

1) Entre com a matriz A de ordem $n \times n$.
2) Tome $\text{sgn} = 0$.
3) Se $a_{i1} = 0, i = 1, 2, \ldots, n$, então $\det A = 0$ e pare.
4) Se não, encontre o elemento a_{i1} da primeira coluna que seja não nulo.
5) Se $i \neq 1$, permute a primeira linha com a i-ésima linha e faça $\text{sgn} = \text{sgn} + 1$.
6) Use a_{11} para substituir a linha j por k vezes a linha 1 mais a linha j, de modo a obter $a_{j1} = 0$, para $j = 2, 3, \ldots, n$.
7) Repita o procedimento com a submatriz obtida, retirando a primeira linha e a primeira coluna.
8) Continue o procedimento até obter uma matriz triangular superior T.
9) $\det A = (-1)^{\text{sgn}} \det T$.

Exemplo 3.5

a) Seja a matriz $C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 0 \\ 6 & 9 & -2 \end{bmatrix}$.

Utilizando operações elementares (apenas adicionando a uma linha o produto de constante por outra linha da matriz C) vemos que a matriz pode ser reduzida à seguinte matriz triangular superior:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & -5 & -12 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

e, portanto, $\det C = \det R = 10$.

b) Seja a matriz $D = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & -2 & 4 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 6 & -4 & -3 \end{bmatrix}$.

Mesmo utilizando o desenvolvimento de Laplace, teremos um certo trabalho para calcular o determinante dessa matriz. Utilizando operações elementares (apenas adicionando a uma linha o produto de constante por outra linha da matriz) vemos que a matriz pode ser reduzida à seguinte matriz triangular superior:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 12 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 5/3 & -1/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 51/10 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 106/17 \end{bmatrix},$$

cujo determinante é dado por $\det D = \det S = 636$.

c) Aplicando o algoritmo acima à matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ obtemos } B = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{-4}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 2 & \frac{-3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-5}{4} \end{bmatrix}.$$

Assim, $\det A = -10$.

d) Aplicando o algoritmo acima à matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ obtemos $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 0 & \frac{-7}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$. Segue que $\det A = -63$.

e) Seja a matriz $A=\begin{bmatrix}1 & x & y+z\\ 1 & y & x+z\\ 1 & z & x+y\end{bmatrix}$. Vamos calcular o seu determinante.

Escrevendo a terceira coluna da matriz acima com a segunda coluna adicionada a ela, obtemos

$$A_1=\begin{bmatrix}1 & x & x+y+z\\ 1 & y & x+y+z\\ 1 & z & x+y+z\end{bmatrix}.$$

Assim, temos

$$\det A=\det A_1=(x+y+z)\det\begin{bmatrix}1 & x & 1\\ 1 & y & 1\\ 1 & z & 1\end{bmatrix}=(x+y+z)\times 0=0\,.$$

3.7 O Cálculo da Matriz Inversa pelo Determinante

Para finalizar esse capítulo, vamos apresentar uma fórmula que fornece a matriz inversa em termos de seu determinante. Essa fórmula é sugerida pela inversa de uma matriz 2×2 e de 3×3.

Vimos que se $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ com $ad-bc\neq 0$, então a matriz

$A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$ é a inversa de A.

A inversa de uma matriz quadrada de ordem 3,

$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$, é dada por

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}}{\det A} & -\dfrac{a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32}}{\det A} & \dfrac{a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}}{\det A}\\ -\dfrac{a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}}{\det A} & \dfrac{a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31}}{\det A} & -\dfrac{a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21}}{\det A}\\ \dfrac{a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}}{\det A} & -\dfrac{a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31}}{\det A} & \dfrac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{\det A}\end{bmatrix}$$

onde

$$\det A = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{21}\,a_{12}\,a_{33} + a_{21}\,a_{13}\,a_{32} + a_{31}\,a_{12}\,a_{23} - a_{31}\,a_{13}\,a_{22}.$$

Vamos apresentar, sem a demonstração, a fórmula geral.

Como já vimos na expansão de Laplace, vamos rever os cofatores de uma matriz. Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada de ordem n. A cada elemento a_{ij} da matriz associamos uma submatriz de A, denotada por A_{ij}, obtida retirando a i-ésima linha e a j-ésima coluna de A. O cofator C_{ij} da matriz A é definido por

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}\,.$$

A adjunta de uma matriz $A = [a_{ij}]$ é a transposta da matriz dos cofatores de A. Por exemplo:

A matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ tem os seguintes cofatores:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -1\,,\; C_{12} = (-1)^{1+2} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -1\,,$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0\,,$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \det \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -1\,,\; C_{22} = (-1)^{2+2} \det \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2\,,$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \det \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = -1\,,\; C_{32} = (-1)^{3+2} \det \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -4\,,$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -3\,.$$

Segue que adjunta da matriz A, a transposta da matriz formada pelos cofatores, é dada por

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Teorema 3.4: Suponha que a matriz $A_{n\times n}$ tem inversa. Então,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\text{adj}A\,.$$

Exemplo 3.6

a) Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, com $ad - bc \neq 0$.

Seus cofatores são $C_{11} = d, C_{12} = -c, C_{21} = -b, C_{22} = a$. Segue que a matriz adjunta é $\text{Adj}A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Portanto, a inversa de A é dada por $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

b) No exemplo acima vimos que $\det A = -3$. Segue do teorema que

$$A^{-1} = \frac{-1}{3}\text{adj}A = \frac{-1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \text{ isto é,}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) Seja $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 8 \\ 9 & 6 & 7 \end{bmatrix}$.

A matriz dos cofatores é $C = \begin{bmatrix} -41 & 51 & 9 \\ 16 & -17 & -6 \\ 11 & -17 & -2 \end{bmatrix}$ e a matriz adjunta de A é $\text{adj}A = \begin{bmatrix} -41 & 16 & 11 \\ 51 & -17 & -17 \\ 9 & -6 & -2 \end{bmatrix}$.

Como $\det A = -17$, a matriz inversa de A é a matriz

$$A^{-1} = \frac{-1}{17}\text{Adj}A = \frac{-1}{17}\begin{bmatrix} -41 & 16 & 11 \\ 51 & -17 & -17 \\ 9 & -6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41/17 & -16/17 & -11/17 \\ -3 & 1 & 1 \\ -9/17 & 6/17 & 2/17 \end{bmatrix}.$$

Exercícios

3.3) Calcule a inversa de $A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & 8 \\ -9 & 6 & 7 \end{bmatrix}$.

Resposta: $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{41}{157} & \frac{44}{157} & \frac{-21}{157} \\ \frac{93}{157} & \frac{73}{157} & \frac{-17}{157} \\ \frac{-27}{157} & \frac{-6}{157} & \frac{10}{157} \end{bmatrix}$.

3.4) Calcule a inversa de $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Resposta: $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{7}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{-4}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$.

Resumo

Neste capítulo vimos a definição de determinante e muitas de suas propriedades. Vimos como podemos utilizá-lo para decidir se uma matriz quadrada possui ou não inversa. Vimos como foi útil conhecer essas propriedades para facilitar no cálculo do determinante. Aprendemos a calcular a inversa de uma matriz utilizando o determinante e a matriz dos seus cofatores.

Capítulo 4

Vetores

Capítulo 4
Vetores

Uma das noções fundamentais da Matemática e da Física é a noção de vetor. Neste capítulo vamos apresentar esta noção. Você deverá estudar todas as definições aqui descritas para compreender completamente este conteúdo. O conceito de vetor é um conceito bem elaborado, por isso não desista na primeira leitura. Leia e releia até ter a certeza de que entendeu completamente. A partir da construção dessas idéias e do seu conhecimento na abordagem deste tema, outros assuntos se tornarão mais simples de serem entendidos, tais como: as operações com vetores e as suas aplicações.

4.1 Introdução

Estamos bem familiarizados com grandezas como comprimento, massa, área e temperatura. Para essas grandezas basta especificar a sua magnitude. Elas são chamadas de grandezas *escalares*. Outras grandezas, como força, velocidade, deslocamento e aceleração exigem, além de sua magnitude, uma direção e um sentido. Estas são chamadas de *grandezas vetoriais*. Este conceito é fundamental no estudo e na compreensão de fenômenos físicos.

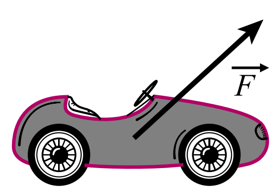


Figura 4.1

Na figura, ilustramos uma força ascendente de certa intensidade aplicada ao brinquedo, na direção de 45º com a horizontal.

Na representação gráfica de vetores utilizamos uma flecha. O comprimento da flecha é proporcional à sua intensidade.

Como veremos, um vetor com origem no ponto A e extremidade no ponto B será representado por um segmento de reta orientado que corresponde ao deslocamento do ponto A até o ponto B, nessa ordem. Denotamos esse vetor por $\overrightarrow{AB}$.

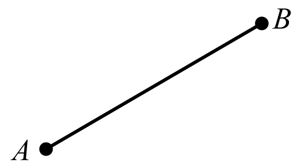


Figura 4.2

Observe que, se tomarmos o ponto inicial como sendo um ponto fixo do plano, cada ponto do plano corresponde a um vetor do plano e vice-versa. Assim, identificamos o conjunto dos pontos do plano com o conjunto de vetores do plano. O mesmo ocorre com os pontos do espaço. As propriedades de vetores no plano ou no espaço, decorrem da Geometria Euclidiana. Vamos rapidamente recordar alguns fatos desta Geometria.

Os conceitos de ponto, reta e plano são os mesmos da Geometria Euclidiana, são conceitos primitivos. As relações entre pontos, retas e planos são estabelecidas pelos seguintes axiomas da Geometria:

- Dois pontos distintos determinam uma única reta.
- Por um ponto fora de uma reta r passa uma única reta paralela a r (axioma das paralelas).
- Três pontos, não colineares, determinam um único plano.
- Se dois pontos de uma reta pertencem a um plano, então a reta está contida no plano.
- Se dois planos têm um ponto em comum, então eles têm ao menos uma reta em comum que passa por esse ponto.
- Existem ao menos quatro pontos que **não** pertencem a um mesmo plano.

Continuando com a Geometria Euclidiana, lembramos que duas retas são chamadas *paralelas* quando estão situadas em um mesmo plano e não se interceptam.

Euclides (330 a. C. - 260 a. C.) nasceu na Síria e estudou em Atenas. Foi um dos primeiros geômetras, e é reconhecido como um dos matemáticos mais importantes da Grécia Clássica e de todos os tempos. Deve-se a ele a obra intitulada "Elementos", composta de treze livros em que apresenta de maneira primorosa todo o conhecimento de Geometria até a sua época. É em homenagem a Euclides que Geometria Euclidiana possui esta denominação.

Axioma
É uma proposição que se admite como verdadeira (sem exigência de demonstração), dela se podem deduzir as proposições de uma teoria ou de um sistema lógico ou matemático.

Colinear
Diz-se colinear uma configuração pertencente à mesma reta.

O que seria transitividade? Esse termo tem o mesmo sentido que o dicionário nos fornece?

Note que, se as retas r, s são paralelas e s, t são paralelas, então r, t são paralelas. Assim, a noção de paralelismo estabelece uma relação de transitividade.

Dizemos que uma reta é *paralela a um plano* se a reta não possui um ponto em comum com o plano. Se a reta possui um ponto em comum com o plano, então ou a reta está contida no plano ou a reta intercepta o plano em um único ponto.

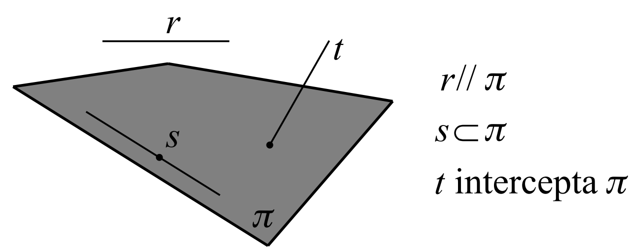


Figura 4.3

Dizemos que a reta r é *perpendicular ao plano* π se a reta r intercepta o plano π em um único ponto P e, além disso, r é perpendicular a toda reta do plano π que passa por P.

Dado um ponto P do plano π, podemos demonstrar que existe uma única reta r que passa pelo ponto P e é perpendicular ao plano π.

4.2 A Noção de Vetor

A fim de introduzir o conceito de vetores (no plano ou no espaço), precisamos do conceito de segmento orientado. Então vamos agora definir segmento orientado. Um *segmento orientado* é um par (A,B) de pontos (do plano ou do espaço), em que A é a origem e B é a extremidade do segmento AB. Indicamos por $\overrightarrow{AB}$ um segmento orientado com origem em A e extremidade em B.

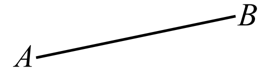


Figura 4.4

Dois segmentos orientados são ditos de mesmo comprimento se os segmentos de reta correspondentes têm a mesma medida. Um segmento orientado é nulo se tem origem e extremidade coincidentes.

Dois segmentos orientados são ditos paralelos (ou de mesma direção) se os segmentos de reta correspondentes são paralelos.

Para introduzirmos a noção de sentido de um segmento orientado, consideremos dois segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$. Primeiramente, suponha que ambos sejam paralelos e que os segmentos de reta AB e CD estejam em retas distintas. Dizemos que os segmentos têm o mesmo sentido se os segmentos de reta AC e BD têm interseção vazia.

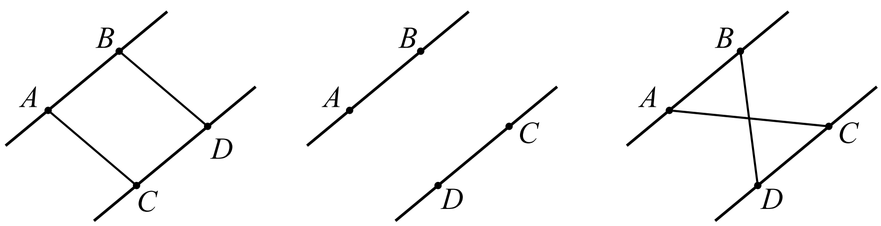
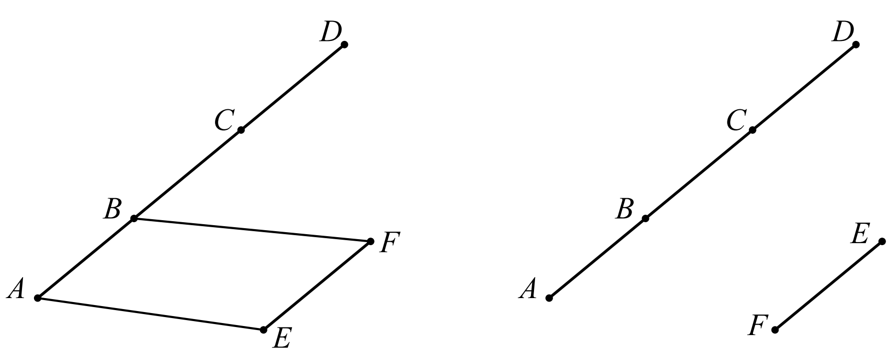


Figura 4.5

No caso em que AB e CD são segmentos de uma mesma reta, isto é, retas que coincidem, então tomamos um segmento orientado EF, fora da reta AB, tal que AB e EF tenham o mesmo sentido. Agora que recaímos no caso anterior, comparamos o segmento orientado EF com o segmento orientado CD.



São de mesmo sentido

Sentidos diferentes

Figura 4.6

Note que, de acordo com a nossa definição, o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ e o segmento orientado $\overrightarrow{BA}$ têm o mesmo comprimento, mesma direção, mas sentidos opostos.

Definição 4.1: Dois segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são ditos *eqüipolentes* se ambos forem nulos ou se tiverem mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento.

As seguintes propriedades da relação de eqüipolência são conseqüências diretas da definição de eqüipolência:

i) Todo segmento orientado é eqüipolente a si mesmo.

ii) Se $\overrightarrow{AB}$ é eqüipolente a $\overrightarrow{CD}$, então $\overrightarrow{CD}$ é eqüipolente a $\overrightarrow{AB}$.

iii) Se $\overrightarrow{AB}$ é eqüipolente a $\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{CD}$ é eqüipolente a $\overrightarrow{EF}$, então $\overrightarrow{AB}$ é eqüipolente a $\overrightarrow{EF}$.

Assim, a relação de eqüipolência é uma relação de equivalência no conjunto dos segmentos orientados (do plano ou do espaço). Observe que i) diz que a relação é *reflexiva*, ii) diz que a relação é *simétrica* e iii) diz que a relação é *transitiva*.

Coincidentes
Que coincidem.

Disjuntos
Dois conjuntos são ditos disjuntos se possuem interseção vazia.

Uma relação de equivalência qualquer sobre um conjunto X particiona ou decompõe o conjunto X em classes de equivalência. Essas classes de equivalência (ou de eqüipolência) são subconjuntos de X que ou são coincidentes, ou são disjuntas. Assim, dado um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$, ele está em apenas uma classe de eqüipolência. Juntamente com ele, estão os segmentos orientados que estão relacionados com $\overrightarrow{AB}$ pela relação de eqüipolência. Todo segmento orientado que pertence à classe de $\overrightarrow{AB}$ é um representante da classe. É fácil ver que, dado um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$, podemos construir infinitos segmentos orientados que são eqüipolentes ao segmento $\overrightarrow{AB}$: basta transladar (mover) o segmento mantendo o seu comprimento, direção e sentido.

Agora estamos prontos para definir *vetor*: um vetor é a classe de eqüipolência de um segmento orientado. Isto é, vetor é um conjunto de segmentos orientados tendo em comum a propriedade de serem todos eqüipolentes entre si.

Definição 4.2: Um vetor (no plano ou no espaço) é a classe de eqüipolência de um segmento orientado.

Assim, um vetor é a classe de equivalência de um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$; é o conjunto de todos os segmentos orientados que são eqüipolentes $\overrightarrow{AB}$. Note que um vetor pode ser representado por uma infinidade de segmentos orientados. A proposição 1 nos diz que cada ponto do plano (ou do espaço) é origem de um segmento que representa um vetor dado.

Vamos continuar a representar um vetor como sendo um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ quando desejarmos indicar a sua origem e extremidade. Quando desejarmos apenas denominar um vetor, usaremos letras minúsculas com uma flecha, como por exemplo, $\vec{u}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{v}$.

O vetor nulo, denotado por $\vec{0}$, é o vetor que tem como representante um segmento orientado nulo.

Proposição 4.1: Dados um vetor $\vec{v}$ e um ponto P, existe um segmento orientado $\overrightarrow{PB}$ representante de $\vec{v}$.

> **Demonstração:** De fato, dado o vetor $\vec{v}$, ele é a classe de eqüipolência de algum segmento orientado $\overrightarrow{CD}$. Unindo o ponto P ao ponto C, obtemos o segmento CP. Em seguida, passamos pelo ponto P uma reta paralela ao segmento CD. Passamos pelo ponto D uma reta paralela ao segmento CP e determinamos o ponto B, ponto de interseção entre as retas. O segmento orientando $\overrightarrow{PB}$ é eqüipolente ao segmento orientado $\overrightarrow{CD}$. Veja a figura.

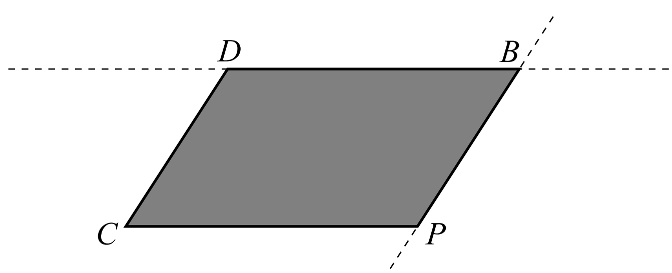


Figura 4.7

Esta proposição nos diz um fato muito importante: dado um vetor $\vec{v}$, cada ponto P do plano ou do espaço é origem de um representante do vetor $\vec{v}$.

Dado um vetor $\vec{v}$, ele tem um representante $\overrightarrow{AB}$. O segmento orientado $\overrightarrow{BA}$ representa um vetor que tem mesma direção e comprimento de $\vec{v}$, mas sentido oposto. O vetor oposto de $\vec{v}$, indicado por $-\vec{v}$, é o vetor que tem como representante qualquer segmento eqüipolente ao segmento orientado $\overrightarrow{BA}$.

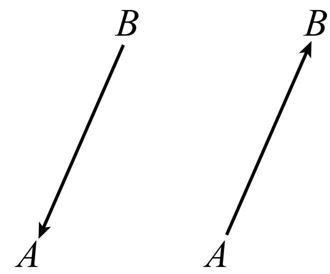


Figura 4.8

Portanto, podemos escrever $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

É usual denotar o comprimento ou a norma de um vetor $\vec{v}$ por $\|\vec{v}\|$. A norma de um vetor é a distância entre os pontos de sua origem e sua extremidade. É fácil ver que $\|\vec{v}\| = 0$ se, e somente se, $\vec{v} = \vec{0}$ e que $\|\vec{v}\| = \|-\vec{v}\|$.

Exercícios

4.1) Dados os pontos $A(0,0)$ e $B(1,2)$, desenhe o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$.

4.2) Dados os pontos $A(0,0)$ e $B(1,2)$, desenhe dois representantes distintos para o vetor $\overrightarrow{AB}$.

4.3) Dados os pontos $A(0,0)$ e $B(1,2)$, desenhe o oposto do vetor $\overrightarrow{AB}$.

4.4) Expresse com suas palavras o conceito de vetor.

4.3 Adição de Vetores

Nesta seção vamos introduzir a noção de soma de vetores. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores, com representantes dados pelos segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$, respectivamente. A soma de $\vec{u}$ com $\vec{v}$, denotada por $\vec{u} + \vec{v}$, é o vetor que tem o segmento orientado $\overrightarrow{AC}$ como representante.

A existência do vetor soma, como veremos, é garantida pela proposição 1 da seção anterior. Veja a figura.

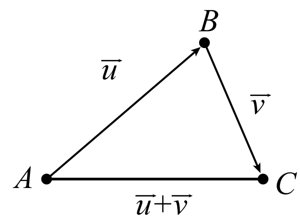


Figura 4.9

Essa definição supõe que a extremidade do primeiro vetor e a origem do segundo vetor sejam coincidentes. Isso é sempre possível? Sim. Dados dois vetores, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, tomemos como representante de $\vec{u}$ o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$. Agora, usando a proposição 4.1, podemos tomar um representante de $\vec{v}$ com origem em B. Tudo se resume em tomar os representantes adequados.

Podemos usar também a *regra do paralelogramo* para construir a soma $\vec{u}+\vec{v}$. Esta regra consiste em escolher representantes de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, respectivamente $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$, com origem em A e construir um paralelogramo $ABCD$. O segmento orientado $\overrightarrow{AC}$ é um representante do vetor $\vec{u}+\vec{v}$, já que $\overrightarrow{BC}$ é um representante para $\vec{v}$.

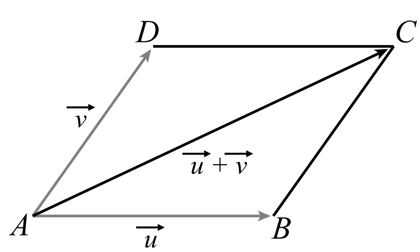


Figura 4.10

Quando trabalhamos com representantes e classes de equivalência, precisamos ter certeza de que o resultado não depende do representante escolhido. E de fato, podemos demonstrar que a operação de soma de vetores não depende dos representantes escolhidos. Não faremos essa demonstração, mas deixamos registrado essa importante observação.

Proposição 4.2: Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores quaisquer. Valem as seguintes propriedades:

1) A soma de vetores é associativa: $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$.

2) A soma de vetores é comutativa: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$.

Demonstração:

1) Para cada vetor, tomemos um segmento orientado que o represente. Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{CD}$. (Nesta demonstração vamos usar várias vezes que $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{XZ}$, para quaisquer segmentos orientados.)

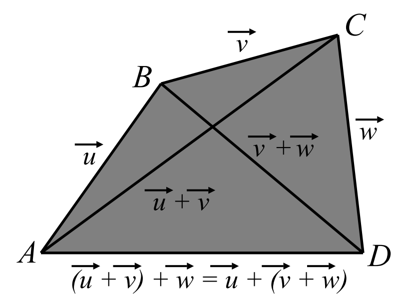


Figura 4.11

Como $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ e

$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$, concluímos que

$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.

2) Suponha que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$. Seja D o ponto tal que $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$. Assim, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \vec{u}$

Como $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ e $\vec{v} + \vec{u} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$, temos $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

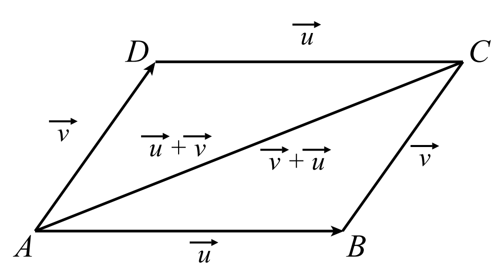


Figura 4.12

Exemplo 4.1: Verificar se vale a lei de cancelamento: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{w} \Rightarrow \vec{v} = \vec{w}$.

Resolução:

De fato, somando o simétrico ou oposto de $\vec{u}$, $-\vec{u}$, a ambos os membros da igualdade $\vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$, obtemos $-\vec{u} + (\vec{u} + \vec{v}) =$

$= -\vec{u} + (\vec{u} + \vec{w})$. Usando a associatividade da adição, $(-\vec{u} + \vec{u}) + \vec{v} = (-\vec{u} + \vec{u}) + \vec{w}$ concluímos que $\vec{v} = \vec{w}$.

4.4 Produto por um Número Real (Escalar)

Dado um vetor $\vec{v}$ e um número real k, definimos a multiplicação de k pelo vetor $\vec{v}$, denotado por $k\vec{v}$, como sendo o vetor tal que:

a) Se $k = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, então $k\vec{v} = \vec{0}$ e o comprimento é igual a 0.

b) Se $k > 0$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, então $k\vec{v}$ é paralelo a $\vec{v}$, tem mesma direção e sentido que $\vec{v}$ e comprimento igual a $k \cdot \|\vec{v}\|$.

c) Se $k < 0$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, então $k\vec{v}$ é paralelo a $\vec{v}$, tem mesma direção de $\vec{v}$ sentido contrário ao sentido de $\vec{v}$ e comprimento igual a $|k| \cdot \|\vec{v}\|$.

A multiplicação de um real por um vetor é geralmente chamada de *multiplicação por escalar.*

Propriedades 4.1

Dados os escalares α, β e os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, valem as seguintes propriedades:

1) $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$.

2) $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$.

3) $1\vec{v} = \vec{v}$.

4) $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u} = (\beta\alpha)\vec{u}$.

Neste ponto é importante colocar uma definição que utilizaremos ao longo do texto: *espaço vetorial real*.

Mostramos até aqui que o conjunto dos vetores do plano ou do espaço, munidos com as operações de adição e multiplicação por escalar, definidas acima, satisfazem algumas propriedades. São elas:

i) a soma de vetores é associativa,

ii) a soma de vetores é comutativa,

iii) existe o vetor nulo $\vec{0}$,

iv) para cada vetor $\vec{v}$ existe um vetor $\vec{w}$ tal que $\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}$

v) $\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$

vi) $(\alpha+\beta)\vec{u}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$

vii) $1\vec{v}=\vec{v}$

viii) $\alpha(\beta\vec{u})=(\alpha\beta)\vec{u}=(\beta\alpha)\vec{u}$,

onde α,β são números reais quaisquer.

Um conjunto de vetores que satisfaça essas oito propriedades é chamado *espaço vetorial real* (real, pois os escalares são reais).

Da definição de multiplicação de escalar por vetor, temos o seguinte resultado.

Proposição 4.3: Dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são paralelos se, e somente se, existe um escalar k tal que $\vec{w}=k\cdot\vec{v}$.

> **Demonstração:** É claro que se $\vec{w}=k\cdot\vec{v}$, então os vetores são paralelos. Suponha que os vetores são paralelos (mesma direção) e de mesmo sentido. Então, podemos tomar pontos A, B, C, D formando um quadrilátero com um par de lados paralelos, onde $\overrightarrow{AB}=\vec{v}$ e $\overrightarrow{CD}=\vec{w}$. Existe um número real k tal que multiplicando um lado do quadrilátero, aumentando-o ou diminuindo-o, podemos construir um paralelogramo.

4.5 Soma de Vetor com Ponto

Sejam P um ponto e $\vec{u}$ um vetor. A *soma do ponto P com o vetor $\vec{u}$*, denotada por $P+\vec{u}$, é o ponto Q tal que o segmento orientado $\overrightarrow{PQ}$ é um representante de $\vec{u}$.

Geometricamente, a soma de um ponto com vetor pode ser interpretada como sendo o resultado do deslocamento da origem do vetor $\vec{u}$ até o ponto P. Um caso especial importante nessa definição é dado por $P+\overrightarrow{PQ}=Q$.

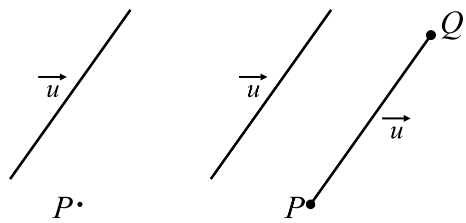


Figura 4.13

Propriedades 4.2:

Dados os pontos P, Q e os vetores $\vec{u}, \vec{v}$, valem as seguintes propriedades:

1) $(P+\vec{u})+\vec{v}=P+(\vec{u}+\vec{v})$

2) $P+\vec{u}=P+\vec{v} \Rightarrow \vec{u}=\vec{v}$

3) $P+\vec{u}=Q+\vec{u} \Rightarrow P=Q$

4) $(P-\vec{u})+\vec{u}=P$

4.6 Norma de Vetores

Norma, módulo ou *comprimento* de um vetor é o comprimento de qualquer segmento orientado que representa o vetor. A norma de um vetor $\vec{v}$ é indicada por $\|\vec{v}\|$.

Muitas vezes vamos precisar de vetores que tenham norma ou comprimento 1. Esses vetores são chamados de *vetores unitários*. Algumas propriedades são óbvias:

Propriedades 4.3:

1) Se $\vec{v} \neq 0$, então $\|\vec{v}\| > 0$.

2) $\|-\vec{v}\| = \|\vec{v}\|$.

3) $\vec{v} = 0$ se, e somente se, $\|\vec{v}\| = 0$.

4) Se k é um número real, então $\|k \cdot \vec{v}\| = |k|\|\vec{v}\|$.

5) Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não nulos. Então, $\vec{u}=\vec{v}$ se, e somente se, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm mesma norma, mesma direção e mesmo sentido.

Uma propriedade muito útil é a *desigualdade triangular*. Ela diz que, em um triângulo, o comprimento de um lado é sempre menor ou igual à soma dos comprimentos dos outros lados. Vamos provar esta desigualdade mais adiante.

6) $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$ (desigualdade triangular)

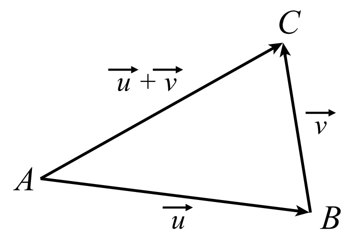


Figura 4.14

A norma de um vetor foi definida como sendo o comprimento de qualquer segmento orientado que representa o vetor. Lembramos que a distância de um ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ do espaço até a origem é dada pela expressão

$$d(P,O)=\sqrt{x_0^{\,2}+y_0^{\,2}+z_0^2}\ .$$

Dado o vetor $\vec{v}$, suponha que seja representado pelo segmento orientado $\overrightarrow{OB}$, onde O é a origem e B é ponto do espaço de coordenadas $B(1,2,3)$. Neste caso, escrevemos $\vec{v}=(1,2,3)$ e a sua norma é $\|\vec{v}\|=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$ unidades de comprimento. Voltaremos nesse assunto mais adiante.

Exercícios

4.5) Use a regra do paralelogramo para representar graficamente a soma dos vetores $\vec{u}=(1,-2)$ e $\vec{v}=(1,3)$.

Resposta: Veja a figura

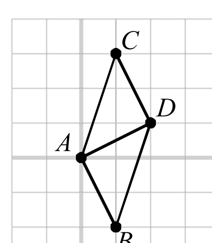


Figura 4.15

4.6) Determine os escalares k_1 e k_2 tais que os vetores $k_1\vec{u}$ e $k_2\vec{v}$ tenham norma 1, onde $\vec{u}=(1,-2)$ e $\vec{v}=(1,2)$.

Resposta: $k_1 = k_2 = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

4.7) Determine os escalares k_1 e k_2 tais que os vetores $k_1\vec{u}$ e $\vec{v}$ tenham mesma norma, e $k_2\vec{v}$ e $\vec{u}$ tenham mesma norma, onde $\vec{u}=(1,-2)$ e $\vec{v}=(-3,6)$.

Resposta: como $\|\vec{u}\| = \sqrt{5}$ e $\|\vec{v}\| = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$, então $k_1 = \pm 3$.

Do mesmo modo, $k_2 = \pm\dfrac{1}{3}$.

Resumo

Neste capítulo vimos o importante conceito de vetor e aprendemos a operar com eles. Na verdade nos limitamos aos vetores no plano e no espaço, mas a idéia de vetor é a mesma. Você pode observar que a adição de vetores tem importantes propriedades: *comutatividade*, *associatividade* e, além disso, cada vetor tem um *simétrico*. A operação de multiplicação de escalar por vetor também tem propriedades que não podem ser ignoradas. Faça um resumo de todas as propriedades.

Capítulo 5

Dependência Linear e Operações com Vetores

Capítulo 5
Dependência Linear e Operações com Valores

Continuando o nosso estudo sobre vetores, teremos como objetivo deste capítulo apresentar a noção de vetores linearmente dependentes. Vamos identificar o vetor que é linearmente dependente dos demais, porque o que queremos é ter um conjunto máximo de vetores no qual vetor algum desse conjunto seja dependente dos demais. O próximo conceito a ser estudado é o conceito de base e orientação. Avançaremos um pouco mais introduzindo a noção de vetores linearmente independentes, base e orientação de um espaço vetorial. Apresentaremos as operações com vetores; produto interno, produto vetorial e produto misto. Essas operações são importantes como ferramentas de cálculo com vetores. Além disso, as operações com vetores apresentadas nesse capítulo têm importantes interpretações geométricas.

5.1 Introdução

Dados os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n$ e $\vec{w} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 + \cdots + c_n\vec{v}_n$, onde $c_i, i = 1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$ são escalares reais, dizemos que $\vec{w}$ é uma combinação linear de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n$. Também dizemos que $\vec{w}$ é gerado por $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n$. Os escalares são chamados de *coeficientes da combinação linear.*

Dizemos que os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n$ são *linearmente independentes (LI)* se a combinação linear $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 + \cdots + c_n\vec{v}_n = \vec{0}$ implicar obrigatoriamente que $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$.

Vetores que não são linearmente independentes (LI) são chamados de vetores *linearmente dependentes (LD).*

Salientamos que dizer que os vetores são LD significa dizer que se pode obter uma combinação linear nula desses vetores com ao menos um coeficiente diferente de zero.

Vejamos algumas situações particulares. Um único vetor é LI se, e somente se, é não nulo.

No caso de dois vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2$, se eles forem LD, então existe uma combinação linear entre eles, $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 = \vec{0}$ com pelo menos um dos escalares, c_1 ou c_2, não nulo. Suponha que $c_1 \neq 0$. Então, temos $\vec{v}_1 = -\frac{c_2}{c_1}\vec{v}_2$. Assim, os vetores são paralelos. Por outro lado, como já vimos, se os vetores são paralelos, $\vec{v}_1 = k\vec{v}_2$, daí $\vec{v}_1 - k\vec{v}_2 = \vec{0}$, (o coeficiente de $\vec{v}_1$ é $1 \neq 0$) então são LD. Logo, concluímos que:

Dois vetores são LD se, e somente se, são paralelos.

Agora o caso de três vetores LD $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$. Então existe uma combinação linear entre eles $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 = \vec{0}$, com pelo menos um dos escalares não nulo. Podemos supor que $c_1 \neq 0$ e escrever $\vec{v}_1 = -\frac{c_2}{c_1}\vec{v}_2 - \frac{c_3}{c_1}\vec{v}_3$. Isto é, $\vec{v}_1$ é gerado pelos outros dois vetores. Agora, se um dos vetores é combinação linear dos outros, suponha $\vec{v}_2 = c_1\vec{v}_1 + c_3 v_3$, então $c_1\vec{v}_1 + c_3 v_3 - \vec{v}_2 = 0$ (pelo menos o coeficiente de $\vec{v}_2$ é não nulo). Logo, concluímos que:

Três vetores são LD se, e somente se, um deles é combinação linear dos outros.

Proposição 5.1: Sejam $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n$ vetores linearmente independentes. Se o vetor $\vec{v}$ é escrito como combinação linear dos vetores LI de duas maneiras, então elas são iguais. Isto é, suponha que

$$\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 + \cdots + c_n\vec{v}_n = d_1\vec{v}_1 + d_2\vec{v}_2 + d_3\vec{v}_3 + \cdots + d_n\vec{v}_n.$$

Então necessariamente tem-se $c_1 = d_1, c_2 = d_2, \ldots, c_n = d_n$.

Em outras palavras: *Cada vetor gerado por um conjunto de vetores LI é expresso de modo único.*

Demonstração: Podemos reescrever a igualdade

$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 + \cdots + c_n\vec{v}_n = d_1\vec{v}_1 + d_2\vec{v}_2 + d_3\vec{v}_3 + \cdots + d_n\vec{v}_n$

da seguinte forma:

$(c_1 - d_1)\vec{v}_1 + (c_2 - d_2)\vec{v}_2 + (c_3 - d_3)\vec{v}_3 + \cdots + (c_n - d_n)\vec{v}_n = \vec{0}$.

Como os vetores são LI, segue que os coeficientes são todos nulos. Logo, $c_1 = d_1, c_2 = d_2, \cdots, c_n = d_n$. Assim, $\vec{v}$ se escreve de modo único, como combinação linear de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n$.

Exemplo 5.1: Suponha que os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sejam LI. Verifique se também são LI os vetores $\vec{u} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v} = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3, \vec{w} = \vec{v}_2 - 2\vec{v}_3$.

Resolução: De fato, como $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ são LI, temos

$a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3 = \vec{0} \Rightarrow a = b = c = 0$.

Considere então $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$. Vamos mostrar que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

$\vec{0} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = (\alpha\vec{v}_1 + \alpha v_2) + (2\beta\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 - \beta\vec{v}_3) + (\gamma\vec{v}_2 - 2\gamma\vec{v}_3)$ =

= $(\alpha + 2\beta)\vec{v}_1 + (\alpha + \beta + \gamma)\vec{v}_2 + (-\beta - 2\gamma)\vec{v}_3$.

Como $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ são LI, temos o sistema linear

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -\beta - 2\gamma = 0 \end{cases}$$

e obtemos $\alpha = \beta = \gamma = 0$, portanto os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são LI.

Exercícios

5.1) Mostre que, se os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ são LD, então também são LD os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$.

5.2) Mostre que, se um dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n$ for nulo, então os vetores são LD.

5.3) Mostre que os vetores $\vec{e}_1 = (1,0)$ e $\vec{e}_2 = (0,1)$ são LI.

Resposta: Tome $\alpha, \beta \in \mathbb{R}; \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 = 0$ e conclua que $\alpha = \beta = 0$.

5.2 Combinação Linear e Base

Dizemos que os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n$ geram o vetor $\vec{v}$, se existem escalares $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ tais que $\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 + \cdots + c_n\vec{v}_n$. Também dizemos que o vetor $\vec{v}$ é combinação linear dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n$.

Os escalares são chamados de coeficientes da combinação linear. Uma observação importante:

Dois vetores linearmente independentes do plano geram todos os outros vetores do plano.

Vejamos isso mais de perto!

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores linearmente independentes do plano. Fixemos um ponto P desse plano e representantes $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$ dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, respectivamente.

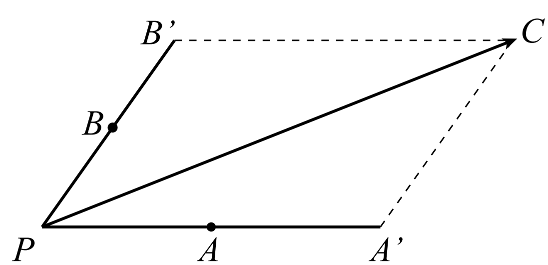


Figura 5.1

Seja $\vec{v}_0$ um vetor qualquer do plano e $\overrightarrow{PC}$ seu representante. Traçando por C uma reta paralela ao segmento $\overrightarrow{PB}$, determinamos um ponto A' sobre a reta que contém $\overrightarrow{PA}$. Assim, temos $\overrightarrow{PA'} = x\overrightarrow{PA}$ para algum escalar real x. Traçando por C uma reta paralela ao segmento $\overrightarrow{PA}$, determinamos um ponto B' sobre a reta que contém o segmento $\overrightarrow{PB}$. Assim, temos $\overrightarrow{PB'} = y\overrightarrow{PB}$. Logo, temos $\vec{v}_0 = x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB}$ (isto é, o vetor $\vec{v}_0$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$). Esse resultado também vale para três vetores do espaço. Provaremos agora que:

Três vetores linearmente independentes no espaço geram todos os vetores do espaço.

De fato, sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vetores do espaço e suponha que sejam linearmente independentes. Fixemos um ponto P do espaço e tomemos os segmentos orientados $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$, representantes de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, respectivamente. Dado um vetor $\vec{v}_0$ qualquer do espaço, seja $\overrightarrow{PM}$ um segmento orientado que o representa.

Por M traçamos uma paralela a $\overrightarrow{PC}$. Seja M' o ponto de encontro dessa paralela com o plano determinado pelos segmentos $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}$.

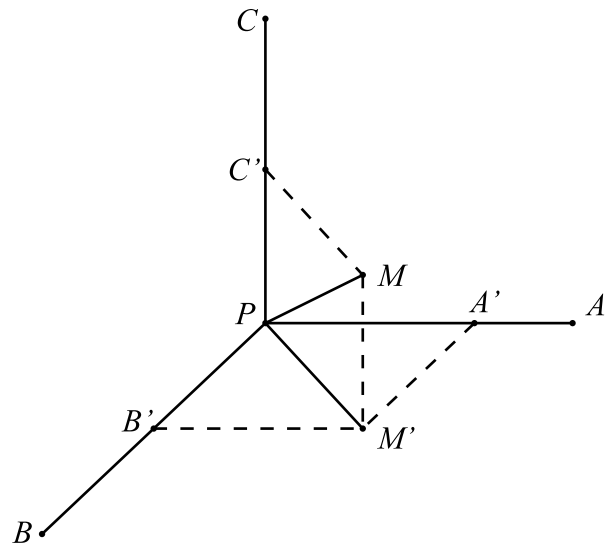


Figura 5.2

Notemos que $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PM'} + \overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{PM'} + \overrightarrow{PC'}$, onde $\overrightarrow{PC'} = z\overrightarrow{PC}$ para algum $z \in \mathbb{R}$. Além disso, $\overrightarrow{PM'}$ está no plano determinado por $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$, portanto existem escalares reais x e y tais que $\overrightarrow{PM'} = x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB}$. Logo, $\vec{v}_0 = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$.

Resumindo, temos o seguinte teorema.

Teorema 5.1: Dois vetores linearmente independentes no plano geram todos os vetores do plano. Três vetores linearmente independentes no espaço geram todos os vetores do espaço.

Por causa desse teorema, introduzimos o *conceito de base*.

Definição 5.1: Um conjunto de *dois* vetores de um *plano* que são linearmente independentes é chamado de base para o plano de vetores. Um conjunto de *três* vetores do *espaço* que são linearmente independentes é chamado de *base* do espaço dos vetores.

Dada uma base para o espaço, é importante estabelecer uma ordem em que os vetores aparecem. Por exemplo, a base $\beta = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é diferente da base $\beta' = \{\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}\}$.

Como vimos, uma base $\beta = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ para o espaço gera todos os vetores do espaço. Isto é, dado um vetor $\vec{v}_0$, existem escalares reais x, y, z tais que $\vec{v}_0 = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$ e esses escalares são únicos.

Os escalares x, y, z são chamados de coordenadas do vetor $\vec{v}_0$ na base β, e escrevemos $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_\beta$ ou simplesmente $(x, y, z)_\beta$.

Na base β' as coordenadas de $\vec{v}_0$ são $\begin{bmatrix} y \\ z \\ x \end{bmatrix}_{\beta'}$ ou simplesmente $(y, z, x)_{\beta'}$.

Como vamos sempre usar as coordenadas de um vetor, a ordem em que os elementos da base aparecem, como vimos acima, é muito importante.

No plano, uma base muito utilizada é a base canônica que é a base $\beta = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ composta dos vetores $\vec{e_1} = (1,0)$ e $\vec{e_2} = (0,1)$.

No espaço, uma base muito utilizada é a base também denominada canônica $\beta = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ composta dos vetores $\vec{e_1} = (1,0,0)$, $\vec{e_2} = (0,1,0)$ e $\vec{e_3} = (0,0,1)$. Veja a ilustração do plano e do espaço com os vetores da base canônica:

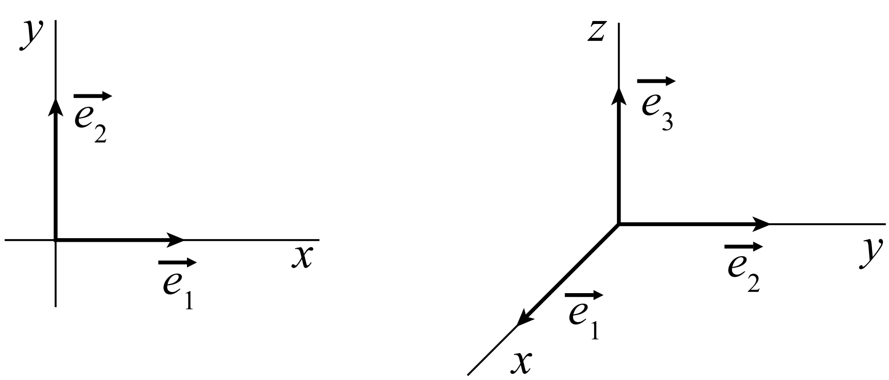


Figura 5.3

Exercícios

5.4) Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vetores do espaço e linearmente independentes. Mostre que, se $\vec{v}_0 = x_1\vec{u} + y_1\vec{v} + z_1\vec{w}$ e $\vec{v}_0 = x_2\vec{u} + y_2\vec{v} + z_2\vec{w}$, então $x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2$.

5.5) Mostre que, no plano, três vetores são sempre linearmente dependentes.

5.6) Mostre que, no espaço, quatro vetores são sempre linearmente dependentes.

5.7) Represente o vetor $\vec{u} = (5,2)$ em cada uma das bases $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$ e $\beta' = \{(1,1),(0,1)\}$ do plano.

Resposta: $(5,2) = 5(1,0) + 2(0,1); (5,2) = 5(1,1) - 3(0,1)$.

5.3 Produto Interno

O produto interno entre dois vetores é uma operação que associa a cada par de vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ um número *real* (um escalar). Para introduzirmos essa operação, vamos precisar do conceito de ângulo entre dois vetores.

Definição 5.2: O ângulo entre dois vetores não nulos, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, é definido como sendo o ângulo entre os segmentos orientados que os representam. Se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, então o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o ângulo entre os segmentos $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

A definição acima utiliza representantes para os vetores. Assim, essa definição tem sentido se provarmos que ela não depende dos representantes. Isto é, se $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$, então o ângulo entre os segmentos $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ é o mesmo que o ângulo entre os segmentos $\overrightarrow{A'B'}$ e $\overrightarrow{A'C'}$. Deixamos aqui esta tarefa para o leitor tentar resolver.

Lembramos que o ângulo entre dois segmentos $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ é dado pelo menor ângulo que $\overrightarrow{AB}$ deve girar para coincidir com $\overrightarrow{AC}$.

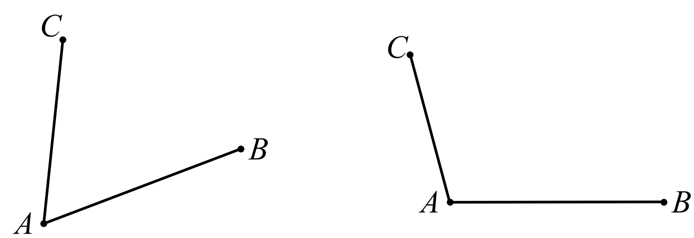


Figura 5.4

Definição 5.3: Sejam dois vetores não nulos, $\vec{u}$ e $\vec{v}$. O produto interno do vetor $\vec{u}$ com o vetor $\vec{v}$, indicado por $\vec{u}\cdot\vec{v}$, é definido por

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v}).$$

Entenda $\cos(\vec{u},\vec{v})$ como o cosseno do ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Se um dos vetores for nulo, então o produto interno entre eles é zero. As seguintes propriedades são facilmente verificadas diretamente da definição.

Propriedades (produto interno):

1) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$ (comutatividade)

2) $\vec{w}\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{w}\cdot\vec{u} + \vec{w}\cdot\vec{v}$ (distributividade)

3) $x(\vec{u}\cdot\vec{v}) = (x\vec{u}\cdot\vec{v}) = (\vec{u}\cdot x\vec{v}), \forall x \in \mathbb{R}$ (homogeneidade)

4) $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{u}\|\cos(\vec{u},\vec{u}) = \|\vec{u}\|^2$.

Da definição de produto interno entre vetores não nulos, $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$, vemos que, se $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$, então $\cos(\vec{u},\vec{v}) = 0$. Portanto, o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\frac{\pi}{2} + n\pi$, onde n é um número inteiro. Por isso, dizemos que dois vetores, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, são perpendiculares se $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$. Segue da definição que o vetor nulo é perpendicular a todos os vetores.

A operação de produto interno entre dois vetores surge naturalmente em diversas situações da Física e da Matemática. Por exemplo, no cálculo do trabalho realizado por uma força, $W = \vec{F}\cdot\vec{d} = Fd\cos(\theta)$, utilizamos o produto interno, como veremos ao final da seção 5.5.

Exemplo 5.1: As diagonais de um losango são perpendiculares?

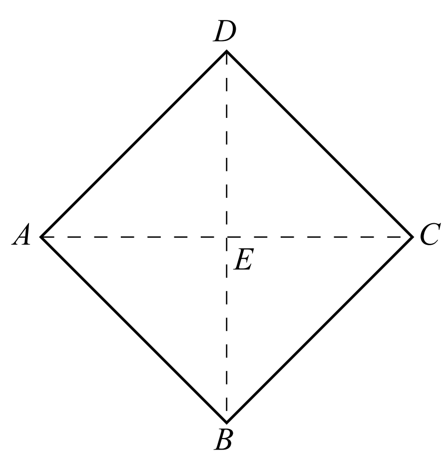


Figura 5.5

Resolução: Devemos provar que $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$. De fato,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= -\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2 = 0.\end{aligned}$$

5.4 Projeção Ortogonal

Dados os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w} \neq \vec{0}$, vamos provar nessa seção que podemos decompor $\vec{v}$ em uma soma de dois vetores $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, onde $\vec{v}_1$ é paralelo a $\vec{w}$, e $\vec{v}_2$ é perpendicular a $\vec{w}$. Vamos também apresentar uma expressão para o vetor $\vec{v}_1$ que é paralelo a $\vec{w}$.

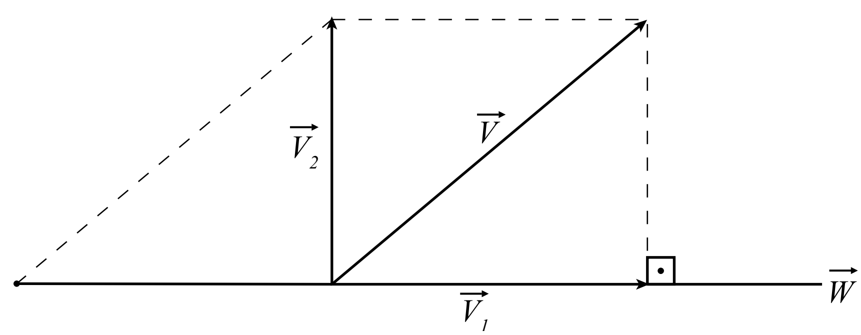


Figura 5.6

Teorema 5.2: Dados $\vec{w} \neq \vec{0}$ e $\vec{v}$ vetores. A projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{w}$ é dada por

$$\text{Proj}_{\vec{w}}\vec{v} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\left\|\vec{w}\right\|^2}\vec{w}.$$

Demonstração: Seja $\text{Proj}_{\vec{w}}\vec{v} = \vec{v_1}$ a projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{w}$ e $\vec{v_2} = \vec{v} - \vec{v}_1$. Como $\vec{v}_1$ é paralelo a $\vec{w}$, existe um escalar k tal que $\vec{v}_1 = k\vec{w}$.

Logo, $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = k\vec{w} + \vec{v}_2$. Realizando o produto interno com $\vec{w}$ temos

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = k\vec{w} \cdot \vec{w} + \vec{v}_2 \cdot \vec{w} = k\left\|\vec{w}\right\|^2,$$

pois $\vec{v}_2$ é perpendicular a $\vec{w}$. Segue que $k = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\left\|\vec{w}\right\|^2}$ e substituindo na expressão acima para $\vec{v}_1$, tem-se

$$\vec{v}_1 = \left[\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\left\|\vec{w}\right\|^2}\right]\vec{w}.$$

Isso conclui a demonstração.

5.5 Bases Ortogonais

Definição 5.4: Uma base $\beta = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é dita ortogonal se os seus vetores são, dois a dois, ortogonais. Isto é, se $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{w} = \vec{v}\cdot\vec{w} = 0$. Uma base é dita *ortonormal* se é uma base ortogonal e seus vetores são unitários.

Note que as bases canônicas do plano e do espaço são bases ortonormais.

A utilidade das bases ortonormais está na seguinte propriedade.

Proposição 5.2: Seja $\beta = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ uma base ortonormal e $\vec{v}_0$ um vetor qualquer do espaço. Então vale a igualdade

$$\vec{v}_0 = (\vec{v}_0\cdot\vec{u})\vec{u} + (\vec{v}_0\cdot\vec{v})\vec{v} + (\vec{v}_0\cdot\vec{w})\vec{w}.$$

Demonstração: Como existem escalares x, y, z reais tais que $\vec{v}_0 = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$, então fazendo o produto interno com os vetores da base ortonormal, obtemos

$$\begin{aligned}
\vec{v}_0\cdot\vec{u} &= x\vec{u}\cdot\vec{u} = x\\
\vec{v}_0\cdot\vec{v} &= y\vec{v}\cdot\vec{v} = y\\
\vec{v}_0\cdot\vec{w} &= z\vec{w}\cdot\vec{w} = z.
\end{aligned}$$

Como os escalares são únicos, então a prova está concluída.

A proposição a seguir mostra uma outra utilidade das bases ortonormais:

Proposição 5.3: Sejam $\beta = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ uma base ortonormal, $\vec{a} = x_1\vec{u} + y_1\vec{v} + z_1\vec{w}$ e $\vec{b} = x_2\vec{u} + y_2\vec{v} + z_2\vec{w}$ vetores do espaço. Então, $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Demonstração: A prova consiste em realizar o produto interno $a{\cdot}b$. De fato, como os vetores da base são ortogonais, então os produtos internos $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{w} = \vec{v}\cdot\vec{w} = 0$, assim o produto interno se reduz a

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= (x_1\vec{u}+y_1\vec{v}+z_1\vec{w})\cdot(x_2\vec{u}+y_2\vec{v}+z_2\vec{w})\\ &= x_1x_2(\vec{u}\cdot\vec{u})+y_1y_2(\vec{v}\cdot\vec{v})+z_1z_2(\vec{w}\cdot\vec{w})\\ &= x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.\end{aligned}$$

O conceito de orientação para o espaço é muito importante, principalmente para a operação que estudaremos a seguir: o *produto vetorial*. De posse da noção de orientação, e escolhida uma base ortonormal para o espaço, o conjunto das bases é dividido em duas classes: a classe das *bases positivas* e a classe das *bases negativas*.

Triedro
Figura formada por três planos mutuamente interceptantes, com um ponto comum, isto é, por três vetores *L.I.*

Fixemos o ponto O do espaço, que denominaremos de origem. Um triedro é uma terna ordenada $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})$ de segmentos orientados não coplanares (veja a fig. 5.7). Alterando a ordem nos segmentos orientados nessa terna, obtemos seis ternas ordenadas diferentes. Considere uma terna qualquer dessas e a rotação de menor ângulo θ que o primeiro segmento da terna deve realizar para ficar colinear com o segundo. Dizemos que o triedro é positivo, se o giro, observado a partir da extremidade do terceiro segmento, for no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio. O triedro será negativo, se o movimento for no mesmo sentido dos ponteiros do relógio.

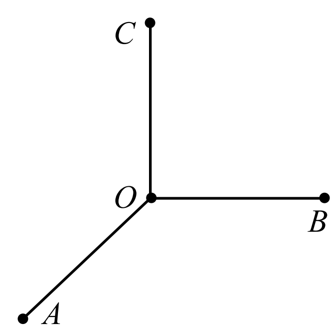


Figura 5.7

O triedro $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})$ é positivo, enquanto o triedro $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})$ é negativo.

Sejam os vetores $\vec{u}=\overrightarrow{OA},\vec{v}=\overrightarrow{OB},\vec{w}=\overrightarrow{OC}$. Dizemos que a terna ordenada de vetores $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é positiva ou negativa, se o triedro $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})$ é positivo ou negativo. É possível provar que essa definição não depende dos representantes dos vetores.

Uma base $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ é dita positiva se a terna $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é positiva.

Tomemos agora um triedro positivo $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})$ de segmentos unitários e mutuamente ortogonais. É usual representar esses vetores por $\vec{i}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{j}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{k}=\overrightarrow{OC}$, e podem ser identificados aos vetores $\vec{e_1}=(1,0,0)$, $\vec{e_2}=(0,1,0)$ e $\vec{e_3}=(0,0,1)$. Assim, a base $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ é ortonormal e positiva. Os vetores $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ satisfazem claramente

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1, \qquad \vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{k}=0.$$

Como $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ é uma base, então, como vimos na seção 5.2, dado um vetor $\vec{a}=\overrightarrow{OM}$ do espaço, ele é escrito de modo único na forma $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, para escalares x, y e z adequados.

Como $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ é ortonormal, decorre da primeira proposição desta seção que $\vec{a}$ se escreve da forma

$$\vec{a}=(\vec{a}\cdot\vec{i})\vec{i}+(\vec{a}\cdot\vec{j})\vec{j}+(\vec{a}\cdot\vec{k})\vec{k}.$$

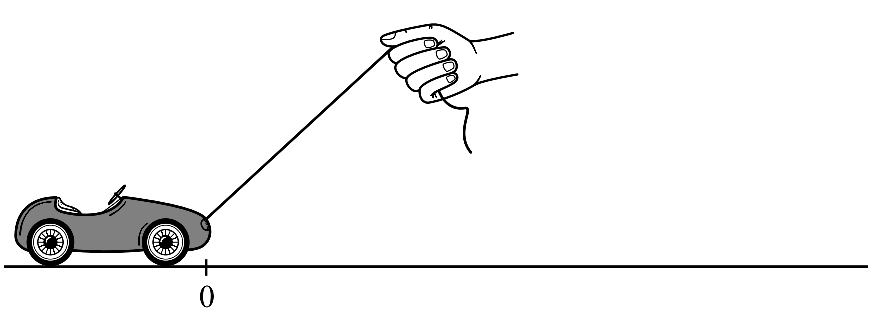
Portanto $x=\vec{a}\cdot\vec{i}=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{i}\|\cos(\vec{a},\vec{i})=\|\vec{a}\|\cos(\vec{a},\vec{i})$,

$y=\vec{a}\cdot\vec{j}=\|\vec{a}\|\cos(\vec{a},\vec{j})$ e $z=\vec{a}\cdot\vec{k}=\|\vec{a}\|\cos(\vec{a},\vec{k})$.

Os números x,y,z são chamados de coordenadas cartesianas ou retangulares do vetor $\vec{a}$ ou do ponto M.

Como $\|\vec{v}\|^2=\vec{v}\cdot\vec{v}=x^2+y^2+z^2$, então $\|\vec{v}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ para um vetor $\vec{v}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ qualquer do espaço.

Exemplo 5.2: Uma criança puxa seu carrinho, que estava inicialmente em repouso, com uma força constante de módulo $F=0,5$ N, por um fio que faz um ângulo $\theta=45°$ com a horizontal conforme a figura 5.8. Após o carrinho se deslocar a uma distância $d=2,0$m, qual foi o trabalho realizado sobre o carrinho?



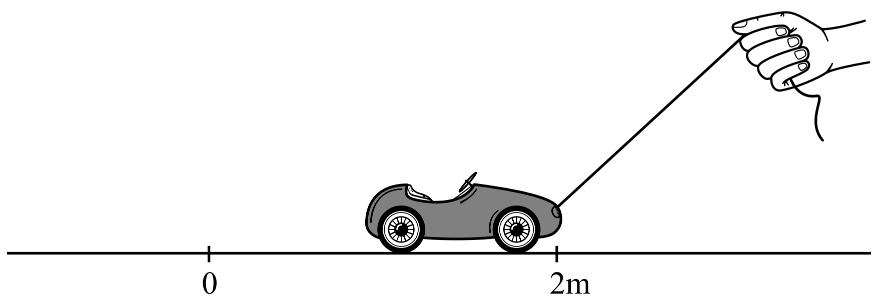
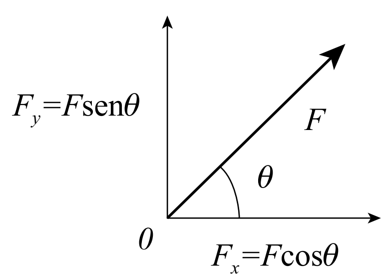


Figura 5.8

Resolução:

Para facilitar a visualização, podemos decompor o vetor força ao longo da direção vertical e horizontal. Então $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} = F\cos(\theta)\vec{i} + F\text{sen}(\theta)\vec{j}$.



Como o deslocamento se dá na horizontal, podemos escrever na forma vetorial: $\vec{d} = d_x\vec{i} + d_y\vec{j} = 2{,}0\,\vec{i} + 0{,}0\,\vec{j}$.

O trabalho sobre o carrinho é o produto interno do vetor força, aplicado sobre o carrinho, com o vetor deslocamento, $W = \vec{F}\cdot\vec{d}$. Então, teremos:

$$\begin{aligned}
W &= \vec{F}\cdot\vec{d}\\
&= (F\cos(\theta)\vec{i} + F\,\text{sen}(\theta)\vec{j})\cdot(d_x\vec{i} + d_y\vec{j})\\
&= (Fd_x\cos\theta) + (Fd_y\,\text{sen}\,\theta)\\
&= (0{,}5\cdot 2{,}0\cdot\cos 45°) + (0{,}5\cdot 0{,}0\cdot\text{sen}\,45°)\\
&= 1{,}0\cdot\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}\text{ Nm}
\end{aligned}$$

Exercícios

5.8) Calcule os produtos internos $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})$, $(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$ e $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$.

5.9) Use o item anterior para mostrar a lei dos cossenos: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A})$. Veja a figura a seguir:

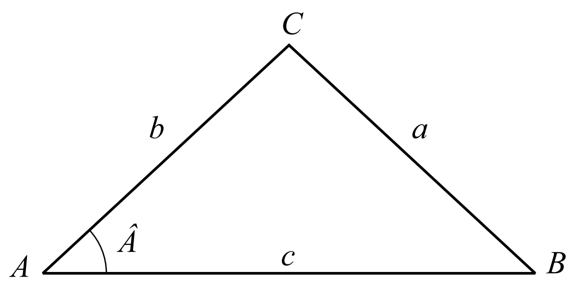


Figura 5.8

5.10) Mostre que $|\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$ (desigualdade de Cauchy-Schwartz).

5.11) Mostre que o conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é uma base, onde $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k},\ \vec{v} = -1\vec{i} + 1\vec{k},\ \vec{w} = 1\vec{j} - 2\vec{k}$.

5.12) Calcule os seguintes produtos internos: $\vec{u}\cdot\vec{v},\ \vec{u}\cdot\vec{w},\ \vec{v}\cdot\vec{w}$, onde $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k},\ \vec{v} = -1\vec{i} + 1\vec{k},\ \vec{w} = 1\vec{j} - 2\vec{k}$.

5.13) Calcule o ângulo entre os vetores $\vec{u}, \vec{v}$, $\vec{v}, \vec{w}$ e $\vec{u}, \vec{w}$, onde $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k},\ \vec{v} = -1\vec{i} + 1\vec{k},\ \vec{w} = 1\vec{j} - 2\vec{k}$.

5.14) Calcule o trabalho realizado sobre um corpo que se desloca do ponto $P_0 = (0,0,0)$ ao ponto $P = (4,0,1)$ devido a uma força $\vec{F} = (3\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k})$. A distância medida em metros(m) e a força em Newtons (N) Obtenha o ângulo entre a o vetor deslocamento e o vetor força. Faça também um esboço da situação, indicando os vetores força e deslocamento assim como o ângulo θ entre eles.

Resposta: $16\ \text{Nm}$, $\theta \cong 40°$.

5.6 Produto Vetorial

Quando tratamos de orientação, dissemos que a orientação seria importante para definir uma nova operação entre vetores: o produto vetorial, também chamado de produto externo. Na Física básica encontramos diversas situações em que aparece o produto vetorial. Por exemplo, a força de momento ou torque é um produto vetorial: $M = Fd\,\text{sen}(\theta)$. O seu resultado é um vetor simultaneamente perpendicular a $\vec{F}$ e a $\vec{d}$. Dentre outros, também podemos citar a força magnética: $\vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B})$.

O produto vetorial é uma operação que, a cada par ordenado de vetores $(\vec{u},\vec{v})$, associa um vetor, denotado por $\vec{u}\times\vec{v}$.

Definição 5.5: Seja $(\vec{u},\vec{v})$ um par de vetores do espaço. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares, definimos $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são colineares, definimos $\vec{u}\times\vec{v}$ como sendo o único vetor que satisfaz

a) $\left\|\vec{u}\times\vec{v}\right\|=\left\|\vec{u}\right\|.\left\|\vec{v}\right\|.\left|\operatorname{sen}(\vec{u},\vec{v})\right|$;

b) $\vec{u}\times\vec{v}$ é perpendicular ao plano gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$;

c) a terna ordenada $(\vec{u},\vec{v},\vec{u}\times\vec{v})$ é positiva.

Um artifício para determinar o sentido do vetor $\vec{u}\times\vec{v}$ é dado pela regra da mão direita. Veja a figura. Se o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é θ, giramos o vetor $\vec{u}$ do ângulo θ até que coincida com $\vec{v}$ e acompanhamos este movimento com os dedos da mão direita, então o polegar vai apontar no sentido de $\vec{u}\times\vec{v}$.

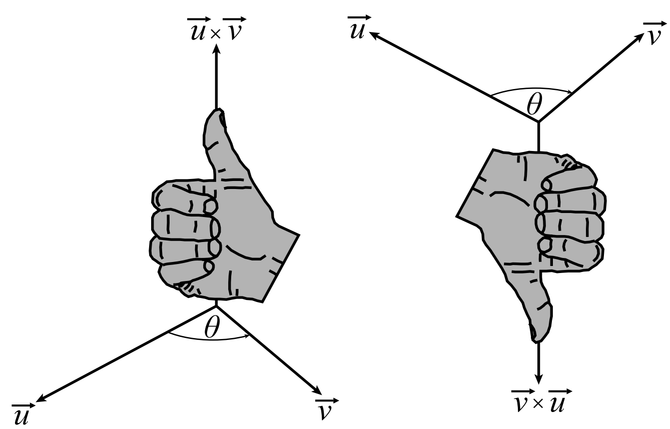


Figura 5.9

Decorre imediatamente da definição que $\vec{u}\times\vec{u}=\vec{0}$ e $\vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}$.

Para a base ortonormal positiva $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$, temos

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$$
$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$$
$$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\ \ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\ \ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$$

Uma interpretação geométrica para o produto vetorial é dada a seguir: $\left\|\vec{u}\times\vec{v}\right\|$ é a área do paralelogramo cujos lados sejam representantes dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. É isso que vamos provar agora.

Consideremos os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e os segmentos orientados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, seus representantes. Pelo ponto *A*, traçamos uma paralela ao segmento $\overrightarrow{OB}$; e por *B*, passamos uma reta paralela ao segmento $\overrightarrow{OA}$. Essas retas se cortam no ponto *D*. Obtemos assim o paralelogramo $OADB$.

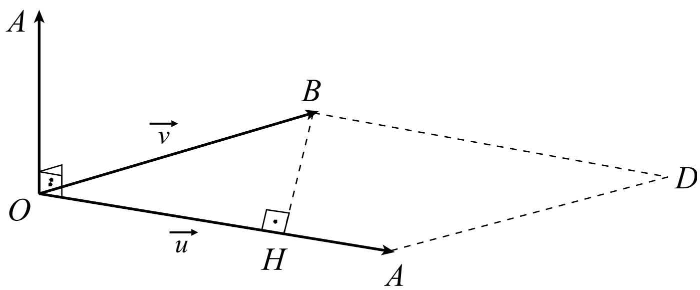


Figura 5.10

A altura do paralelogramo $OADB$ é dada por $h = \left\|\vec{v}\right\| \cdot sen(\vec{u},\vec{v})$. Portanto,

$$\left\|\vec{u}\times\vec{v}\right\| = \left\|\vec{u}\right\| \cdot \left\|\vec{v}\right\| \cdot sen(\vec{u},\vec{v}) = \left\|\vec{u}\right\| \cdot h,$$

que é a área do paralelogramo $OADB$. Resumindo, provamos o seguinte resultado.

Teorema 5.3: $\left\|\vec{u}\times\vec{v}\right\|$ é a área do paralelogramo cujos lados sejam representantes dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Exercícios

5.15) Verifique se $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$.

5.16) Calcule a área do paralelogramo cujos lados representam os vetores $\vec{i}$ e $\vec{j}$.

5.17) Calcule a área do paralelogramo cujos lados são representados pelos vetores $\vec{u} = (1,0,1)$ e $\vec{v} = (0,1,1)$.

5.18) A medida em radianos do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\frac{\pi}{3}$. Sendo $\left\|\vec{u}\right\| = 2$ e $\left\|\vec{v}\right\| = 5$, calcule $\left\|\frac{3}{2}\vec{u}\times\frac{1}{3}\vec{v}\right\|$.

Resposta: $\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

Exemplo 5.3: Calcule o produto vetorial $\vec{u}\times\vec{v}$, onde:
$\vec{u}=x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_3\vec{k}$ e $\vec{v}=y_1\vec{i}+y_2\vec{j}+y_3\vec{k}$.

Resolução:

Levando em conta as relações

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$$
$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0},$$

temos,

$$\begin{aligned}\vec{u}\times\vec{v}&=(x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_3\vec{k})\times(y_1\vec{i}+y_2\vec{j}+y_3\vec{k})\\&=(x_2y_3-x_3y_2)\vec{i}+(x_1y_3-x_3y_1)\vec{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\vec{k}.\end{aligned}$$

Observamos que o resultado pode ser obtido calculando o determinante simbólico.

$$\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\end{vmatrix}=(x_2y_3-x_3y_2)\vec{i}+(x_3y_1-x_1y_3)\vec{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\vec{k}.$$

Nosso exemplo sugere estabelecer o seguinte teorema, cuja prova foi feita acima.

Teorema 5.4: Fixada a base $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ do espaço, o produto vetorial $\vec{u}\times\vec{v}$, onde $\vec{u}=x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_3\vec{k}$ e $\vec{v}=y_1\vec{i}+y_2\vec{j}+y_3\vec{k}$, é dado por

$$\vec{u}\times\vec{v}=(x_2y_3-x_3y_2)\vec{i}-(x_1y_3-x_3y_1)\vec{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\vec{k}.$$

Exemplo 5.4: Determine o produto vetorial entre os vetores $\vec{u}=(1,0,1)$ e $\vec{v}=(0,1,1)$.

Resolução:

$$\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&0&1\\0&1&1\end{vmatrix}=(0-1)\vec{i}+(0-1)\vec{j}+(1-0)\vec{k}=-1\vec{i}-1\vec{j}+1\vec{k}.$$

Logo, o produto vetorial é $\vec{u}\times\vec{v}=-1\vec{i}-1\vec{j}+1\vec{k}=(-1,-1,1)$.

Exercícios

5.19) Calcule a área do paralelogramo cujos lados representam os vetores i e $\vec{j}$.

Resposta: 1 u.a

5.20) Calcule a área do paralelogramo cujos lados representam os vetores $\vec{u} = (1,0,1)$ e $\vec{v} = (0,1,1)$.

Resposta: $\sqrt{3}$ unidades de área.

5.21) Determine x de modo que os vetores $\vec{u} = (1,0,1)$ e $\vec{v} = (0,1,x)$ formem um paralelogramo de área igual a 3.

Resposta: $x = \pm 1$.

5.22) Calcule o produto vetorial entre $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$.

Resposta: $(3,3,-3)$.

5.23) Calcule o produto vetorial entre $\vec{u} = \vec{i}$ e $\vec{v} = \vec{j}$, e entre $\vec{u} = \vec{j}$ e $\vec{v} = \vec{k}$.

Resposta: $\vec{k}$ e $\vec{i}$, respectivamente.

5.24) Calcule a área do paralelogramo gerado por $\vec{u} = (1,0,1)$ e $\vec{v} = (1,-1,1)$.

Resposta: $\sqrt{2}$ unidades de área.

5.25) Verifique se $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$. Sugestão: use o determinante simbólico.

5.7 Produto Misto

Utilizando o produto interno e o produto vetorial, vamos definir o *produto misto*. O produto misto associa a cada terna de vetores $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ um número real. O produto misto da terna ordenada $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, representado por $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, é definido por:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}.$$

Para dar uma interpretação geométrica para o produto misto, consideremos os vetores $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ e seus representantes, $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$, respectivamente.

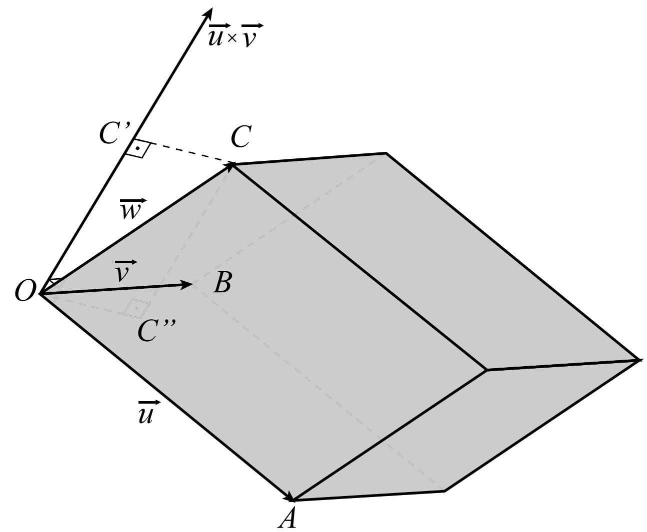


Figura 5.11

O volume do paralelepípedo é o produto da altura pela área da base. Já vimos que a área da base é dada por $\left\|\vec{u}\times\vec{v}\right\|$ e, observando a figura, vemos que a altura do paralelepípedo, CC″, é dada por $\left\|\vec{w}\right\|\cdot\left|\cos(\vec{w},\vec{u}\times\vec{v})\right|$. Logo, o volume é dado por

$\left|\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]\right| = \left|(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}\right| = \left\|\vec{u}\times\vec{v}\right\|\cdot\left\|\vec{w}\right\|\cdot\left|\cos(\vec{w},\vec{u}\times\vec{v})\right|$.

Isto é, o volume do paralelepípedo gerado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é o valor absoluto do produto misto entre os três vetores.

Teorema 5.5: O volume do paralelepípedo gerado pelos vetores $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é dado por

$$\left|\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]\right| = \left\|\vec{u}\times\vec{v}\right\|\cdot\left\|\vec{w}\right\|\cdot\left|\cos(\vec{w},\vec{u}\times\vec{v})\right|.$$

O produto misto também serve para testar se três vetores são LI ou LD: três vetores, $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ são LD se, e somente se, o produto misto $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=0$. De fato, os vetores são LD se, e somente se, o paralelepípedo reduz-se a uma figura plana.

Corolário: Os vetores $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ são LD se, e somente se, o produto misto $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=0$.

Propriedades (produto misto): Sejam os três vetores, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. Valem as propriedades:

1) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u},]$.
2) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}]$.

Estas propriedades são conseqüências imediatas do exemplo e do teorema que seguem.

Exemplo 5.5: Calcule o produto misto $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ entre os vetores: $\vec{u} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$, $\vec{v} = y_1\vec{i} + y_2\vec{j} + y_3\vec{k}$ e $\vec{w} = z_1\vec{i} + z_2\vec{j} + z_3\vec{k}$.

O objetivo deste exemplo é mostrar que o produto misto pode ser obtido através do cálculo de um determinante. Você verá que isto facilitará a resolução de exercícios e também o entendimento das propriedades 1 e 2.

Resolução

Sabemos que

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Agora, pelo que vimos sobre produto escalar,

$$(\vec{u} \times \vec{v}).\vec{w} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} z_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} z_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} z_3 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Nosso exemplo sugere estabelecer o seguinte teorema, cuja prova foi feita acima.

Teorema 5.6: Fixada a base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ do espaço, o produto misto entre os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, onde $\vec{u} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$, $\vec{v} = y_1\vec{i} + y_2\vec{j} + y_3\vec{k}$ e $\vec{w} = z_1\vec{i} + z_2\vec{j} + z_3\vec{k}$, é dado por

$$\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Exercícios

5.26) Calcule o volume do paralelepípedo que tem vértices nos pontos $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$.

Resposta: 1 unidade de volume.

5.27) Calcule $\vec{i}\cdot(\vec{j}\times\vec{k})$ e $\vec{j}\cdot(\vec{i}\times\vec{k})$.

Resposta: 1 e -1, respectivamente.

5.28) Calcule o volume do paralelepípedo gerado pelos vetores $\vec{u}=(1,2,3)$, $\vec{v}=(-1,2,1)$ e $\vec{w}=(1,0,1)$.

Resposta: 12 u.v.

5.29) Determine um vetor que seja perpendicular aos vetores $\vec{u}=(1,2,3)$ e $\vec{v}=(-1,2,1)$.

Resposta: $(-4, -4, 4)$.

5.30) Determine o valor de x de modo que $\vec{u}=(1,2,3)$ e $\vec{v}=(-1,2,x)$ sejam perpendiculares.

Resposta: $x=-1$.

5.31) Determine o valor de x de modo que o paralelepípedo gerado pelos vetores $\vec{u}=(1,\ 2,\ 4)$, $\vec{v}=(x,-1,\ 1)$ e $\vec{w}=(0,\ 2,\ 1)$ tenha volume nulo.

Resposta: $x=\dfrac{1}{2}$.

5.32) Utilize o produto misto para decidir se os vetores são LI ou LD nos seguintes casos:

a) $\vec{u}=(1,\ 2,\ 4)$, $\vec{v}=(2,-1,\ 1)$, $\vec{w}=(0,\ 2,\ 1)$.

Resposta: LI.

b) $\vec{u}=(1,-1,\ 4)$, $\vec{v}=(1,-1,\ 1)$, $\vec{w}=(0,-1,\ 3)$.

Resposta: LI.

c) $\vec{u}=(-1,\ 2,-1)$, $\vec{v}=(0,-1,\ 1)$, $\vec{w}=(0,\ 0,\ 1)$.

Resposta: LI.

Resumo

Neste capítulo avançamos um pouco mais: vimos que um conjunto de vetores pode ser LI ou LD. Essa noção pode ser resumida com a seguinte analogia: num conjunto de vetores, cada um tem uma função específica na realização de uma tarefa. Se o trabalho de um vetor pode ser realizado pelos demais, esse vetor pode ser descartado sem prejuízo na realização da tarefa. Dizemos que esse vetor que pode ser descartado é uma *combinação linear dos demais vetores do conjunto*. Essa noção, colocada dessa forma, é bem ingênua, mas é isso que acontece. No trabalho com vetores, introduzimos as noções de *base e orientação* de um espaço vetorial. Com esse nome só podia ser muito importante e, de fato, é. Uma base é um conjunto que serve para a construção de espaço vetorial. Apresentamos as operações com vetores: *produto interno, produto vetorial* e *produto misto*. Essas operações são importantes como ferramentas de cálculo com vetores, mas também servem para construírmos bases especiais, ou seja, as bases ortonormais. Além disso, as operações com vetores apresentadas nesse capítulo têm importantes *interpretações geométricas*: ângulo entre vetores, no caso do produto interno; vetor ortogonal a outros dois vetores dados e área no caso do produto vetorial; e volume de paralelepípedo, no caso do produto misto.

Capítulo 6

Retas e Planos

Capítulo 6
Retas e Planos

Nos dois capítulos anteriores construímos noções fundamentais que nos permitem agora avançar no entendimento de entes matemáticos básicos como retas e planos. As noções (vetores, LI e LD, orientação e base) e ferramentas (produto interno, produto vetorial e produto misto) dos capítulos anteriores nos permitirão, neste capítulo, introduzir o conceito fundamental de sistemas de coordenadas. De posse dessa noção, podemos entender em profundidade retas e planos, e as relações entre eles. Neste capítulo veremos que as retas e planos serão dados por equações, e estudá-los vai ficar simples.

6.1 Sistemas de Coordenadas Cartesianas

No capítulo 5 falamos de bases ortonormais e orientação. Lá, fixamos um ponto O do espaço, que chamamos de origem, e os segmentos unitários orientados, $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$, e ortogonais. Esses segmentos formam um triedro positivo $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$, e os vetores $\vec{i} = \overrightarrow{OA}, \vec{j} = \overrightarrow{OB}, \vec{k} = \overrightarrow{OC}$ formam a base positiva $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

As retas que contêm os segmentos $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ são denotadas por OX, OY, OZ, respectivamente. Essas retas também são denominadas de eixo dos x, eixo dos y e eixo dos z, respectivamente.

Tomemos um ponto A, na reta OX, diferente de O e um ponto B, na reta OY, diferente de O. Os três pontos, O, A, B, determinam um único plano, plano chamado de plano xy. Note que esse plano contém o eixo dos x e o eixo dos y.

Do mesmo modo, as retas OX e OZ determinam um único plano, chamado de plano xz, que contém o eixo dos x e o eixo dos z. Também as retas OY e OZ determinam um único plano, chamado de plano yz, que contém o eixo dos y e o eixo dos z.

Como já dissemos anteriormente, a cada ponto P do espaço corresponde um único segmento orientado $\overrightarrow{OP}$ que determine um único vetor $\vec{v}$ com representante $\overrightarrow{OP}$. Além disso, provamos que esse vetor é escrito de modo único como combinação linear dos vetores da base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, chamada de base canônica. (Veja a seção 2 do capítulo 5),

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Logo, concluímos que a cada ponto do espaço corresponde uma única terna (x, y, z) de números reais. Esses números são chamados de *coordenadas cartesianas* do ponto P. Por outro lado, dada uma terna (x, y, z) de números reais, existe um único ponto P do espaço tal que $\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Segue que, uma vez fixada a base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ para o espaço, podemos representar cada um dos pontos do espaço por ternas ordenadas (x, y, z) de números reais. Um ponto P do espaço pode agora ser representado da seguinte forma: $P(x, y, z)$.

A menos que seja dito explicitamente o contrário, adotaremos, a partir de agora, a base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ como base usual, também chamada de **base canônica** do espaço. Em todos os resultados que seguem utilizaremos a base canônica.

6.2 Distância entre Pontos

Agora que já associamos a cada ponto P do espaço suas coordenadas cartesianas, podemos obter muitos resultados importantes. Vamos começar pela fórmula da distância entre dois pontos.

Sejam $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ pontos do espaço. A distância entre eles, indicada por $d(A, B)$, é, por definição, o comprimento do segmento $\overrightarrow{AB}$.

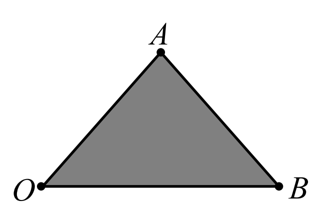


Figura 6.1

Como $\overrightarrow{AB} = B - A = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$, segue que

$$d(A,B) = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$

Exemplo 6.1: Determine a distância entre o ponto $A(\cos x, \operatorname{sen} x)$ e a origem.

Resolução: $d(A,O) = \left\|\overrightarrow{OA}\right\| = \sqrt{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x} = 1$.

Exemplo 6.2: Determine os pontos do plano que distam uma unidade da origem.

Resolução:

Tomemos um ponto $P(x, y)$ do plano e $O(0,0)$ a origem, então

$$d(P,O) = \left\|\overrightarrow{OP}\right\| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = 1.$$

Elevando ao quadrado o resultado acima, obtemos $x^2 + y^2 = 1$. Isto é, os pontos que distam 1 unidade de comprimento da origem estão sobre a circunferência de centro na origem e raio 1.

6.3 Equações do Plano

Sabemos da Geometria Euclidiana que três pontos não colineares determinam um único plano. Nesta seção veremos como encontrar a equação do plano determinado por três pontos não colineares do espaço.

Sejam $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ e $C(x_3, y_3, z_3)$ pontos não colineares do espaço. Como os pontos são não colineares, então os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são linearmente independentes. Logo, dado um ponto P qualquer do plano, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ geram o vetor $\overrightarrow{AP}$. Segue que existem escalares reais s e t tais que $\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$. Como $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$, podemos escrever

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}\ .$$

Tomemos as coordenadas de $\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Então podemos escrever

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$
$$\overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1)\vec{i} + (y_3 - y_1)\vec{j} + (z_3 - z_1)\vec{k}.$$

Logo, temos $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$, que pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = &\left[x_1 + s(x_2 - x_1) + t(x_3 - x_1)\right]\vec{i}\\ &+ \left[y_1 + s(y_2 - y_1) + t(y_3 - y_1)\right]\vec{j}\\ &+ \left[z_1 + s(z_2 - z_1) + t(z_3 - z_1)\right]\vec{k}.\end{aligned}$$

Comparando os vetores, como a representação é única, segue que

$$\begin{aligned} x &= x_1 + s(x_2 - x_1) + t(x_3 - x_1)\\ y &= y_1 + s(y_2 - y_1) + t(y_3 - y_1)\\ z &= z_1 + s(z_2 - z_1) + t(z_3 - z_1).\end{aligned}$$

Essas equações são chamadas de equações paramétricas do plano, e os números s e t são chamados de parâmetros e podem ser qualquer número real.

Exemplo 6.3: Determine as equações paramétricas do plano determinado pelos pontos $A(1,2,3)$, $B(0,3,4)$ e $C(0,0,1)$.

Resolução:
Basta utilizar as equações paramétricas do plano e obter:

$$\begin{aligned} x &= 1 + s(0-1) + t(0-1) = 1 - s - t\\ y &= 2 + s(3-2) + t(0-2) = 2 + s - 2t\\ z &= 3 + s(4-3) + t(1-3) = 3 + s - 2t.\end{aligned}$$

Logo, as equações paramétricas do plano são

$$\begin{aligned} x &= 1 - s - t\\ y &= 2 + s - 2t\\ z &= 3 + s - 2t\,.\end{aligned}$$

Onde s e t são reais quaisquer.

6.4 Equação Cartesiana do Plano

Na dedução das equações paramétricas do plano vimos que os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AP}$ são LD. Então o produto misto entre eles é nulo, isto é, $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}\right] = 0$. Assim, um ponto $P(x, y, z)$ está no plano determinado por A, B e C se, e somente se, $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}\right] = 0$. A equação determinada dessa forma recebe o nome de *equação cartesiana* do plano.

No exemplo acima, temos

$$\overrightarrow{AB} = (-1,1,1)$$
$$\overrightarrow{AC} = (-1,-2,-2)$$
$$\overrightarrow{AP} = (x-1, y-2, z-3).$$

e o produto misto é

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ x-1 & y-2 & z-3 \end{vmatrix} = 3z - 3 - 4y + 2x = 0 \cdot$$

Segue que a equação cartesiana do plano é dada por

$$2x - 4y + 3z - 3 = 0\,.$$

6.5 Voltando no tempo...

Imagine que você precisa informar a alguém a posição exata de uma mosca que esteve pousada numa parede. Esta foi a idéia inicial da origem do plano cartesiano que se deve a René Descartes, filósofo e matemático francês nascido em 1596. Descartes teve a idéia de utilizar um conjunto de retas paralelas e perpendiculares para localizar a posição da mosca na parede.

Podemos representar graficamente o plano cartesiano utilizando duas retas perpendiculares que foram geradas pelos vetores da base canônica do plano, chamadas de eixos cartesianos. Veja a figura.

Fixada uma base, já provamos que a cada ponto do plano associamos um único par de coordenadas (x, y) e a cada par de coordenadas (x, y) associamos um único ponto do plano. A coordenada x, marcada sobre o eixo horizontal OX, é chamada de abscissa; e a coordenada y, marcada sobre o eixo vertical OY, é chamada de ordenada.

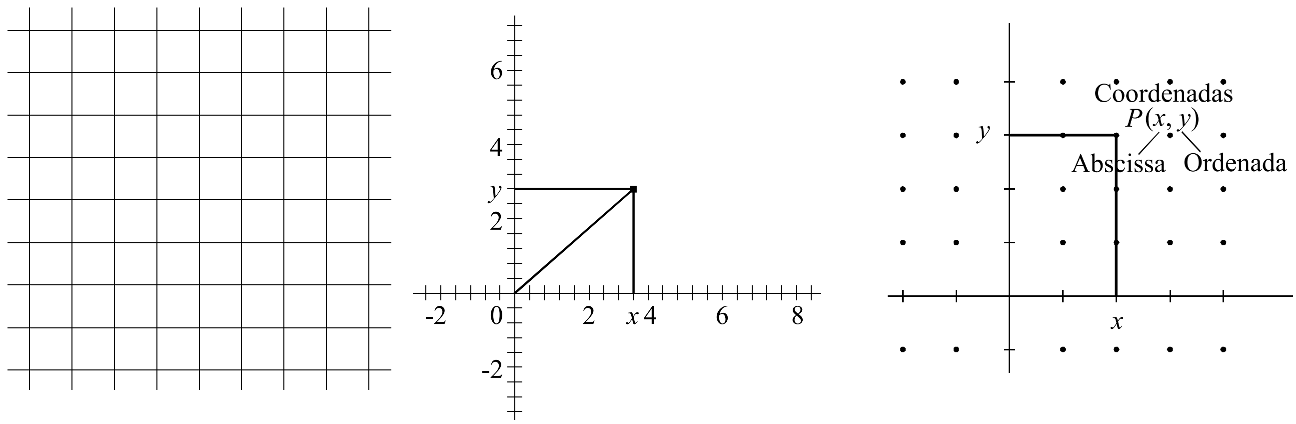


Figura 6.2

6.6 Equação Normal do Plano

Agora veremos como determinar a equação normal do plano. Dizemos que um vetor $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ é normal a um plano se for perpendicular a todos os vetores que possuem representante nesse plano.

Seja $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ um vetor normal ao plano π. Se $P_0(x_0, y_0, z_0)$ é um ponto conhecido do plano, e $P(x, y, z)$ um ponto arbitrário do plano, então o vetor $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ é perpendicular a $\vec{v}$. Segue que $\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{v} = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.

Assim, a equação do plano que tem $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ como vetor normal e passa pelo ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ é dada pela equação cartesiana

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Notemos que $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ pode ser escrito como $ax + by + cz + d = 0$, onde $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$. Assim, na equação cartesiana do plano, os coeficientes são as coordenadas do vetor normal a este plano.

Exemplo 6.4: Determine a equação normal do plano que passa pelo ponto $P_0(1, 2, 3)$ e tem o vetor $\vec{v} = -1\vec{i} + 2\vec{j} + 1\vec{k}$ como vetor normal.

Resolução:

Basta calcular o produto interno $\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{v} = 0$.

Logo, $-1(x - 1) + 2(y - 2) + 1(z - 3) = 0$,

ou seja,
$-x+2y+1z-6=0$.

Exemplo 6.5: Apresente um vetor normal ao plano $2x+1y+2z+3=0$.

Resolução:

O vetor $\vec{n}=(2,1,2)$ é normal ao plano.

Em Geometria Analítica uma equação do tipo $Ax+By+Cz+D=0$ chama-se *equação geral do plano* ou *equação normal do plano.*

6.7 Ângulo entre Planos

Consideremos dois planos, π_1 e π_2. Suponha que os planos não sejam paralelos. Então eles se encontram em uma reta r, comum aos dois. Tomemos um ponto P da reta r e pontos $A\in\pi_1$ e $B\in\pi_2$ tais que os segmentos orientados $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$ sejam perpendiculares à reta r. O ângulo entre os planos π_1 e π_2 é definido como sendo o menor ângulo positivo possível entre vetores $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$ obtidos da forma acima descrita.

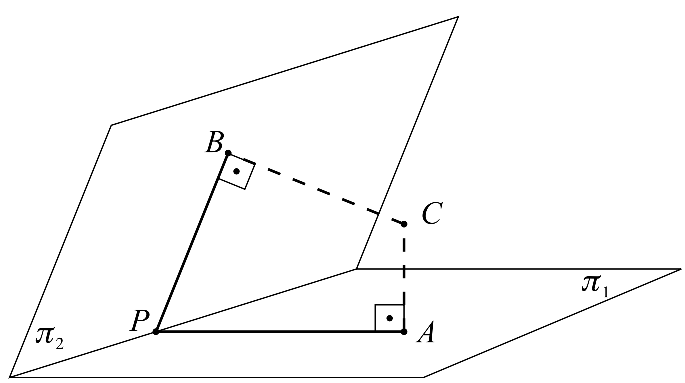


Figura 6.3

Suponha que os planos sejam dados por

$$\pi_1: a_1x+a_2y+a_3z+d_0=0$$
$$\pi_2: b_1x+b_2y+b_3z+d_1=0.$$

Logo, os vetores

$$\vec{n}_1=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$$
$$\vec{n}_2=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$$

são perpendiculares aos planos π_1 e π_2, respectivamente. Traçando por A uma perpendicular ao plano π_1 e por B uma perpendicular ao plano π_2, as retas se cruzam no ponto C. A soma dos ângulos internos do quadrilátero $PBCA$ é 360º, sendo os ângulos em A e B retos. Então é claro que o ângulo em C e o ângulo entre os planos são suplementares. Assim

$$\cos(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}) = \left|\cos(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})\right|.$$

Vamos denotar por $\cos(\pi_1,\pi_2)$ o cosseno do ângulo entre os planos π_1 e π_2.

Notemos que os vetores normais, $\vec{n}_1$ e $\overrightarrow{CA}$, são ambos perpendiculares a π_1, então possuem representantes na reta que passa por $\overrightarrow{CA}$. Do mesmo modo, $\vec{n}_2$ e $\overrightarrow{CB}$ são ambos perpendiculares a π_2, então possuem representantes na reta que passa por $\overrightarrow{CB}$. Logo, ou o ângulo entre $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$ é o mesmo ângulo entre $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$, ou são suplementares. Segue que

$$\left|\cos(\vec{n}_1,\vec{n}_2)\right| = \left|\cos(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})\right|.$$

Como

$$\cos(\vec{n}_1,\vec{n}_2) = \frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\|\cdot\|\vec{n}_2\|},$$

o ângulo entre os planos é dado por

$$\cos(\pi_1,\pi_2) = \frac{\left|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2\right|}{\|\vec{n}_1\|\cdot\|\vec{n}_2\|} = \frac{\left|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}.$$

Exemplo 6.6: Determine o ângulo entre os planos que têm os vetores $\vec{n}_1 = 2\vec{i}+1\vec{j}+1\vec{k}$, $\vec{n}_2 = 1\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$ como seus vetores normais.

Resolução:

Como $\cos(\pi_1,\pi_2) = \dfrac{\left|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2\right|}{\|\vec{n}_1\|.\|\vec{n}_2\|} = \dfrac{\left|2-4+2\right|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}\sqrt{1^2+(-4)^2+2^2}} = 0,$

então os planos são perpendiculares.

6.8 Equação da Reta: forma paramétrica e forma simétrica

Novamente, sabemos da Geometria Euclidiana que dois pontos distintos determinam uma única reta. Nesta seção veremos como determinar a reta que passa por dois pontos.

Sejam os pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ e seja r a reta determinada por eles. Se $P(x, y, z)$ é um ponto arbitrário de r, então os vetores $\overrightarrow{P_1P}$ e $\overrightarrow{P_1P_2}$ são linearmente dependentes. Portanto, existe um escalar real t tal que $\overrightarrow{P_1P} = t\overrightarrow{P_1P_2}$. Como $\overrightarrow{P_1P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_1}$, podemos reescrever

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + t\overrightarrow{P_1P_2}.$$

Usando a base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, podemos expressar a equação acima em termos de coordenadas cartesianas dos vetores:

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = [x_1 + t(x_2 - x_1)]\vec{i} + [y_1 + t(y_2 - y_1)]\vec{j} + [z_1 + t(z_2 - z_1)]\vec{k}.$$

Comparando os vetores, obtemos

$$\begin{aligned} x &= x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z &= z_1 + t(z_2 - z_1). \end{aligned}$$

Essas são as *equações paramétricas* da reta r que passa pelos pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$.

Se a reta r é paralela ao plano xy, então os componentes z dos pontos dados são iguais, portanto $z_2 - z_1 = 0$. Do mesmo modo, se a reta é paralela ao plano xz, então os componentes y dos pontos dados são iguais, portanto $y_2 - y_1 = 0$; também se a reta é paralela ao plano yz, então os componentes x dos pontos dados são iguais, assim, $x_2 - x_1 = 0$. Se a reta r *não é paralela* a nenhum dos planos xy, yz e xz, esses componentes não serão nulos e as equações paramétricas podem ser reescritas na forma

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = t.$$

As equações da reta escritas na forma

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

são chamadas de *equações simétricas* da reta.

Exemplo 6.7: Determine as equações simétricas e as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos $A(1,2,3)$ e $B(3,4,5)$.

Resolução:

Vamos calcular

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1},$$

o que nos dá a equação na forma simétrica

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-2}{4-2}=\frac{z-3}{5-3}\Rightarrow\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{2},$$

ou ainda,

$$\begin{cases} x=2t+1 \\ y=2t+2 \\ z=2t+3. \end{cases}$$

Que são as equações paramétricas da reta. Nessa forma, o ponto $P(1,2,3)$ é um ponto da reta e o vetor $\vec{u}=(2,2,2)$ é um vetor paralelo à reta.

Na geometria analítica plana, apresentada nos ensinos fundamental e médio, uma equação do tipo $y=ax+b$ é equação de uma reta. Mas a geometria analítica lá é plana e, portanto, $z=0$. Na geometria analítica (geral ou espacial) a equação $y=ax+b$ é um plano, a saber, o plano perpendicular ao plano xy que contém a reta $y=ax+b$ deste plano, pois o valor de z é livre, podendo assumir qualquer valor real. Em geral, as retas do espaço são apresentadas como interseção entre dois planos. Por exemplo, se queremos a reta $y=ax+b$ no plano, devemos dizer a reta dada pela interseção dos dois planos $y=ax+b$ e $z=0$.

Veremos então outros exemplos da reta dada pela interseção entre os planos $z = ay + b$ e $x = c$.

Exemplo 6.8: Determine as equações da reta que passa pelo ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ e é perpendicular ao plano $ax + by + cz + d = 0$.

Resolução:

Como o vetor $\vec{n} = (a,b,c)$ é normal ao plano, então a reta tem $\vec{n}$ como vetor paralelo. Logo, as equações paramétricas da reta procurada são

$$x = x_0 + at$$
$$y = y_0 + bt$$
$$z = z_0 + ct.$$

Exemplo 6.9: Determine a reta dada pela interseção dos planos

$$\pi_1 : a_1x + a_2y + a_3z + d_1 = 0$$
$$\pi_2 : b_1x + b_2y + b_3z + d_2 = 0.$$

Resolução:

Os vetores normais aos planos são $\vec{n}_1 = (a_1, a_2, a_3)$ e $\vec{n}_2 = (b_1, b_2, b_3)$ respectivamente. Se os planos são paralelos ou coincidentes, então seus vetores normais sãos paralelos, isto é, $\vec{n}_1 = k\vec{n}_2$ para algum k real. Planos paralelos têm interseção vazia. Planos coincidentes têm interseção dada por qualquer um dos planos e assim determinam infinitas retas, todas as retas do plano.

Se os dois planos não são paralelos ou coincidentes, então a interseção deles é uma reta r. Essa reta r pertence a ambos os planos. Como a reta pertence ao plano π_1, o vetor $\vec{n}_1$ é perpendicular à reta. Do mesmo modo como a reta pertence ao plano π_2, o vetor $\vec{n}_2$ é perpendicular à reta. Logo, $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ é paralelo à reta r. Tendo $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ paralelo à reta e conhecendo-se um ponto da reta, podemos determiná-la completamente.

Exemplo 6.10: Determine as equações paramétricas da reta dada pela interseção dos planos

$$\pi_1 : 2x + 3y + 1z - 6 = 0$$
$$\pi_2 : -2x + 1y + 1z + 0 = 0.$$

Resolução:

Como os vetores normais aos planos não são paralelos, então os planos se interceptam em uma reta. O vetor paralelo à reta é $\vec{v} = (2,-4,8)$. Notemos que o ponto $P(1,1,1)$ é um ponto comum aos planos e, portanto, está na reta. Logo, as equações paramétricas da reta procurada são

$$x = 1 + 2t$$
$$y = 1 - 4t$$
$$z = 1 + 8t.$$

Nesse exemplo, por inspeção vimos que o ponto $P(1,1,1)$ pertence aos planos. Num caso geral, devemos resolver o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 2x + 3y + 1z - 6 = 0 \\ -2x + 1y + 1z + 0 = 0. \end{cases}$$

Exercícios

6.1) Determine a distância entre os pontos $P(1,-2,3)$ e $Q(2,-2,5)$.

Resposta: $\sqrt{5}$ u.c.

6.2) Determine as coordenadas do vetor que tem representante $\overrightarrow{AB}$, sendo $A(1,-2,3)$ e $B(2,-2,5)$.

Resposta: $\overrightarrow{AB} = (1,0,2) = 1\vec{i} + 0\vec{j} + 2\vec{k}$.

6.3) Determine a equação do plano que passa pelos pontos $A(1,-2,3)$, $B(2,-2,5)$ e $C(1,0,-1)$.

Resposta: $x + 2y + z + 2 = 0$ ou $\begin{cases} x = 1 + s + 0t \\ y = -2 + 0s + 2t \\ z = 3 + 2s - 4t \end{cases}$.

6.4) Determine a equação do plano que passa pelo ponto $A(1,0,-1)$ e tem o vetor $\vec{n} = (1,-2,3)$ como vetor normal.

Resposta: $x - 2y + 3z + 2 = 0$.

6.5) Calcule o ângulo entre os planos dados por $x - y + z + 1 = 0$ e $-x + y - z + 2 = 0$.

Resposta: O ângulo é nulo, os planos são paralelos.

6.6) Determine as equações da reta que passa pelos pontos $A(1,-2,3)$, $B(2,-2,5)$.

Resposta: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 0t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

6.9 Ângulo entre duas Retas

Dadas duas retas, r_1 e r_2, no espaço, ocorre uma das seguintes situações:

- r_1 e r_2 são paralelas ou coincidentes;
- r_1 e r_2 se interceptam em um único ponto;
- r_1 e r_2 não são paralelas e nem se cruzam em um ponto (as retas são reversas). Veja na figura que cada reta contém uma aresta de um paralelepípedo, não são paralelas e nem se cruzam.

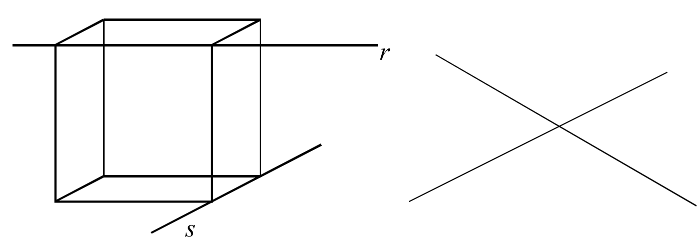


Figura 6.4

No primeiro caso, definimos o ângulo entre elas como sendo zero.
No segundo caso, as retas determinam quatro ângulos, dois a dois, opostos pelo vértice.
O ângulo entre as retas é definido como sendo o menor desses ângulos.
No terceiro caso, se as retas são reversas, escolhemos um ponto P qualquer de r_1 e traçamos por P uma reta r' paralela a r_2. Definimos o ângulo entre r_1 e r_2 como sendo o ângulo entre r_1 e r'.

Sejam $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ vetores paralelos às retas r_1 e r_2. Então o ângulo entre r_1 e r_2 é dado por

$$\cos(r_1, r_2) = \left|\cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2)\right| = \frac{\left|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2\right|}{\left\|\vec{v}_1\right\| \cdot \left\|\vec{v}_2\right\|}.$$

Exemplo 6.11: Determine o ângulo entre as retas

$$r_1\begin{cases} x = 1t+1 \\ y = 1t+2 \\ z = 1t+3 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2\begin{cases} x = 1t+2 \\ y = t-1 \\ z = -1t+1. \end{cases}$$

Resolução

Os vetores $\vec{u} = (1,1,1)$ e $\vec{v} = (1,1,-1)$ são paralelos, respectivamente, a r_1 e r_2. Logo,

$$\cos(r_1, r_2) = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{1}{3}.$$

Assim, o ângulo θ entre as retas é tal que $\cos(\theta) = \frac{1}{3}$.

Exercícios

6.7) Determine o ângulo entre as retas

$$r_1\begin{cases} x = 1t+1 \\ y = 3t-1 \\ z = 1t \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2\begin{cases} x = -1t+2 \\ y = 1t+1 \\ z = -1t+1. \end{cases}$$

Resposta: $\theta = \arccos(\frac{\sqrt{15}}{15})$.

6.8) Determine o ângulo entre as retas

$$r_1\begin{cases} x = -1t+1 \\ y = 1t+2 \\ z = 1t+3 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2\begin{cases} x = 1t+2 \\ y = 1t-1 \\ z = -2t+1. \end{cases}$$

Resposta: $\theta = \arccos(\frac{\sqrt{2}}{3})$.

6.10 Distância de um Ponto a um Plano

Dado um ponto P_0 qualquer e um plano π, a distância do ponto ao plano é o comprimento do segmento de reta P_0P_1, onde P_1 é o pé da perpendicular ao plano que passa por P_0, isto é, P_1 é a interseção do plano com a perpendicular ao plano baixada de P_0.

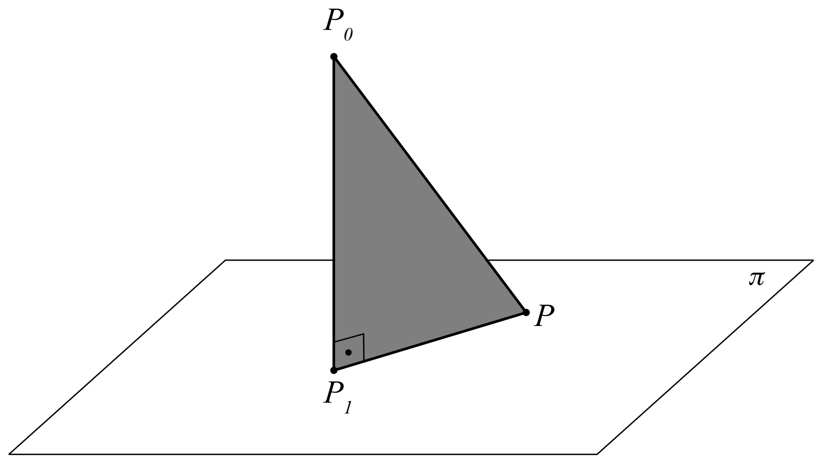


Figura 6.5

Seja $\vec{n}$ o vetor unitário normal ao plano. A reta perpendicular ao plano que contém o segmento P_0P_1 é paralela ao vetor $\vec{n}$. Logo, $\overrightarrow{P_0P_1} = t\vec{n}$ para algum escalar real t. Se P é um ponto arbitrário do plano, podemos decompor $\overrightarrow{P_0P}$ em dois componentes: um na mesma direção de $\overrightarrow{P_0P_1}$ (normal ao plano) e outro perpendicular a $\overrightarrow{P_0P_1}$. Como o triângulo é retângulo em P_1, temos

$$\left\|\overrightarrow{P_0P}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{P_0P_1}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{P_1P}\right\|^2 \geq \left\|\overrightarrow{P_0P_1}\right\|^2.$$

Portanto, $\left\|\overrightarrow{P_0P}\right\| \geq \left\|\overrightarrow{P_0P_1}\right\|$. Isto é, o comprimento do segmento $\overrightarrow{P_0P}$ é maior ou igual ao comprimento do segmento $\overrightarrow{P_0P_1}$.

Assim, a menor distância entre o ponto e o plano é o comprimento do segmento perpendicular ao plano que liga os pontos P_0 e P_1. Segue que o comprimento do segmento $\overrightarrow{P_0P_1}$ é a distância do ponto ao plano.

Portanto, é natural definir, como o fizemos, a distância de um ponto a um plano como sendo o comprimento do segmento $\overrightarrow{P_0P_1}$ perpendicular ao plano.

$$\mathrm{d}(P_0,\pi) = \left\|\overrightarrow{P_0P_1}\right\| = \left\|\overrightarrow{P_0P}\right\| . \left|\cos(\overrightarrow{P_0P},\overrightarrow{P_0P_1})\right| =$$

$$\frac{\left\|\overrightarrow{P_0P}\right\| . \left\|\overrightarrow{P_0P_1}\right\| . \left|\cos(\overrightarrow{P_0P},\overrightarrow{P_0P_1})\right|}{\left\|\overrightarrow{P_0P_1}\right\|} = \frac{\left|\overrightarrow{P_0P_1} \cdot \overrightarrow{P_0P}\right|}{\left\|\overrightarrow{P_0P_1}\right\|}.$$

Está provado, então, o teorema a seguir.

Teorema 6.1: Dado um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ qualquer e um plano π, a menor distância do ponto ao plano ocorre entre o ponto P_0 e o ponto

P_1, onde P_1 é o pé da perpendicular ao plano que passa por P_0. Além disso, a distância é dada pela expressão

$$\mathrm{d}(P_0,\pi) = \frac{\left|\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\overrightarrow{P_0P}\right|}{\left\|\overrightarrow{P_0P_1}\right\|}.$$

Continuando com a nossa análise, seja um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ fora do plano π dado por $ax+by+cz+d=0$.

Sabemos que o vetor $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ é um vetor normal ao plano π. Então $\overrightarrow{P_0P_1} = t\vec{n}$, para algum escalar t. Seja $P(x, y, z)$ um ponto qualquer do plano. Tomemos o vetor $\overrightarrow{P_0P} = (x-x_0)\vec{i} + (y-y_0)\vec{j} + (z-z_0)\vec{k}$ e calculemos o produto interno $\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\overrightarrow{P_0P}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\overrightarrow{P_0P} &= t(a,b,c)\cdot(x-x_0, y-y_0, z-z_0)\\ &= ta(x-x_0) + tb(y-y_0) + tc(z-z_0)\end{aligned}$$

Como P pertence ao plano, segue que $ax+by+cz=-d$, donde temos

$$\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\overrightarrow{P_0P} = t(-ax_0 - by_0 - cz_0 - d).$$

Por outro lado,

$$\left\|\overrightarrow{P_0P_1}\right\| = |t|\cdot\|\vec{n}\| = |t|\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

Segue que a distância do ponto ao plano é dada pela expressão

$$\mathrm{d}(P_0,\pi) = \frac{\left|\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\overrightarrow{P_0P}\right|}{\left\|\overrightarrow{P_0P_1}\right\|} = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Teorema 6.2: A distância do ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ao plano π dado por $ax+by+cz+d=0$ é dada pela expressão

$$\mathrm{d}(P_0,\pi) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Exemplo 6.12: Determine a distância do ponto $P_0(1,-2,3)$ ao plano $2x+3y-z+4=0$.

Resolução

Usando a fórmula acima temos

$\mathrm{d}(P_0,\pi) = \dfrac{|2\times 1 + 3\times(-2) - 1\times 3 + 4|}{\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{14}}$ unidades de comprimento.

Exercícios

6.9) Determine a distância do ponto $P_0(1,-1,2)$ ao plano $2x-3y-z-14=0$.

Resposta: $\dfrac{11}{\sqrt{14}}$.

6.10) Determine o ponto $P_0(1,a,3)$ que está distante duas unidades de comprimento do plano $2x+3y-z+4=0$.

Resposta: $a=-1+\dfrac{2}{3}\sqrt{14}$ ou $a=-1-\dfrac{2}{3}\sqrt{14}$.

6.11 Distância de um Ponto a uma Reta

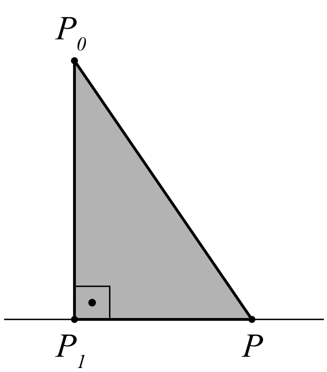


Figura 6.6

Dado um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e uma reta r, queremos determinar a distância do ponto até a reta. No plano, a menor distância entre esse ponto e a reta ocorre entre o ponto P_0 e o pé da perpendicular à reta que passa pelo ponto P_0. Assim, define-se a distância entre um ponto P_0 e uma reta r por $\mathrm{d}(P_0, r)=\left\|\overrightarrow{P_0P_1}\right\|$, onde P_1 é o pé da perpendicular mencionada.

Traçamos por P_0 uma reta perpendicular à reta dada r e determinamos o ponto P_1.

Seja $\vec{v}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ vetor paralelo à reta, então

$$\left\|\overrightarrow{P_0P_1}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{P_0P}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{PP_1}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{P_0P}\right\|^2-\frac{\left|\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{v}\right|^2}{\left\|\vec{v}\right\|^2}$$

$$=\frac{\left\|\overrightarrow{P_0P}\right\|^2\left\|\vec{v}\right\|^2-\left|\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{v}\right|^2}{\left\|\vec{v}\right\|^2}$$

$$=\frac{\left\|\overrightarrow{P_0P}\right\|^2\left\|\vec{v}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{P_0P}\right\|^2\cdot\left\|\vec{v}\right\|^2\cdot\cos^2(\overrightarrow{P_0P},\vec{v})}{\left\|\vec{v}\right\|^2}$$

$$=\frac{\left\|\overrightarrow{P_0P}\right\|^2\left\|\vec{v}\right\|^2\operatorname{sen}^2(\overrightarrow{P_0P},\vec{v})}{\left\|\vec{v}\right\|^2}$$

$$=\frac{\left\|\overrightarrow{P_0P}\times\vec{v}\right\|^2}{\left\|\vec{v}\right\|^2}.$$

Acabamos de provar o seguinte teorema:

Teorema 6.3: Seja $P_0(x_0, y_0, z_0)$ um ponto fora da reta r com vetor paralelo $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$. A distância entre o ponto P_0 e a reta r é dada por

$$\mathrm{d}(P_0, r) = \frac{\left\|\overrightarrow{P_0P} \times \vec{v}\right\|}{\left\|\vec{v}\right\|},$$

onde P é um ponto qualquer da reta.

Exemplo 6.13: Determine a distância entre o ponto $P_0(1,2,-1)$ e a reta dada por

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = 2 - 5t \end{cases}$$

Resolução

A reta passa pelo ponto $P(1,1,2)$ e tem vetor paralelo $\vec{v} = (3,-1,-5)$. Logo, usando a expressão acima, temos

$$d(P_0, r) = \frac{\left\|\overrightarrow{P_0P} \times \vec{v}\right\|}{\left\|\vec{v}\right\|} = \frac{\left\|(0,-1,3) \times (3,-1,5)\right\|}{\left\|(3,-1,5)\right\|} = \frac{\left\|(8,9,3)\right\|}{\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{154}}{\sqrt{35}} \text{ u.c.}$$

6.12 Distância entre Dois Planos

Consideremos dois planos, π_1 e π_2. A distância entre eles é definida como sendo a menor distância entre dois quaisquer de seus pontos.

Conhecendo-se os seus vetores normais, podemos obter informações sobre os planos. Se os seus vetores normais não são paralelos, então os planos são concorrentes, e neste caso a distância entre os planos é zero.

Assim como retas concorrentes são aquelas retas que se cruzam, planos concorrentes são planos que se cruzam.

Se os seus vetores normais são paralelos, então os planos são paralelos ou coincidentes. Nesse caso, a distância entre eles será então a mesma distância entre um ponto $P \in \pi_1$ e o plano π_2. A distância de ponto a plano, já sabemos calcular.

Exemplo 6.14: Sejam os planos $\pi_1 : x - 2y + z + 1 = 0$ e $\pi_2 : 2x - 4y + 2z + 3 = 0$. Eles são paralelos pois seus vetores normais são paralelos $\vec{n_2} = 2(1,-2,1) = 2\vec{n_1}$. Temos $P_1(2,1,-1) \in \pi_1$ e $P_2(2,1,-\frac{3}{2}) \in \pi_2$. Logo,

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P_2, \pi_1) = \frac{\left|2-2-\frac{3}{2}+1\right|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{1}{2\sqrt{6}}.$$

Do mesmo modo, também podemos calcular

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P_1, \pi_2) = \frac{|4-4-2+3|}{\sqrt{4+16+4}} = \frac{1}{2\sqrt{6}}.$$

6.13 Distância entre Duas Retas

Dadas duas retas, r_1 e r_2, suponha que exista uma reta r perpendicular a ambas. Então existe um ponto A_1 comum a r e a r_1, e um ponto A_2 comum a r e a r_2. É natural definir as distâncias entre as retas como sendo a distância entre os pontos A_1 e A_2.

Para a nossa definição ter sentido, devemos provar que sempre existe uma reta r perpendicular a ambas, r_1 e r_2. De fato, se as retas r_1 e r_2 são paralelas, então tomemos um ponto qualquer A_1 de r_1 e tracemos uma reta perpendicular a r_1 passando por esse ponto e contida no plano que contém r_1 e r_2. Essa reta é também perpendicular a r_2 e a corta em A_2. Assim, $d(r_1, r_2) = d(A_1, A_2)$.

No caso anterior, de retas paralelas, foi fácil determinar uma reta perpendicular a ambas. Se as retas não são paralelas (podem ser concorrentes ou reversas), precisamos determinar uma reta que seja perpendicular a ambas. Vamos aceitar que existe uma tal reta.

Admitindo a existência dessa tal reta, vamos agora deduzir uma expressão para essa distância em termos de $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $\vec{n_1}$ e $\vec{n_2}$, isto é, um ponto de cada reta e um vetor paralelo a cada reta.

Como as retas não são paralelas, existe um único plano π_2 que contém a reta r_2 e é paralelo à reta r_1. Baixemos por P_1 a perpendicular ao plano π_2. Seja P o ponto onde ela corta o plano π_2. O segmento $\overrightarrow{P_1P}$ é eqüipolente ao segmento $\overrightarrow{A_1A_2}$, portanto paralelo ao vetor $\vec{n_1} \times \vec{n_2}$. O comprimento $\left\|\overrightarrow{P_1P}\right\|$ é a projeção ortogonal de $\overrightarrow{P_1P_2}$ sobre a reta que passa por P_1 e P. Logo,

$$\mathrm{d}(r_1, r_2) = \left\|\overrightarrow{A_1A_2}\right\| = \left\|\overrightarrow{P_1P}\right\| = \frac{\left|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2})\right|}{\left\|\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}\right\|}.$$

Notemos que na expressão acima, que dá a distância entre duas retas, não é necessário conhecer as equações das retas: basta um ponto de cada e um vetor paralelo a cada reta. Vamos resumir nossos resultados no seguinte teorema:

Teorema 6.4: Sejam as retas r_1 passando pelo ponto $P_1(x_1, y_1, z_1)$, e r_2, passando pelo ponto $P_2(x_2, y_2, z_2)$. Sejam $\vec{n}_1$ um vetor não nulo paralelo a r_1 e $\vec{n}_2$ um vetor não nulo paralelo a r_2. A distância entre as retas é dada pela expressão

$$\mathrm{d}(r_1, r_2) = \frac{\left|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2})\right|}{\left\|\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}\right\|}.$$

Exemplo 6.15: Determine a distância entre as retas

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t. \end{cases}$$

Resolução:

As retas passam pelos pontos $P_1(1, -1, 2)$ e $P_2(2, 1, 3)$ e têm vetores paralelos $\vec{n}_1 = (1, 2, -2), \vec{n}_2 = (-1, 1, 1)$, respectivamente. Como $\overrightarrow{P_1P_2} = (1, 2, 1)$ e

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 1\vec{j} + 3\vec{k},$$

então temos que a distância entre as retas é dada por

$$\mathrm{d}(r_1, r_2) = \frac{\left|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2})\right|}{\left\|\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}\right\|} = \frac{9}{\sqrt{26}}.$$

Exercícios

6.11) Determine a distância entre as retas

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = -5t \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 - 1t \\ z = 3. \end{cases}$$

Resposta: $\dfrac{\sqrt{14}}{14}$ u.c.

6.12) Determine a distância entre as retas

$$r_1 : \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = -t \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 1t \\ z = t. \end{cases}$$

Resposta: $\sqrt{2}$ u.c.

6.14 Interseção entre Três Planos

Consideremos três planos dados por

$$\begin{aligned} \pi_1 &: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ \pi_2 &: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \\ \pi_3 &: a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0, \end{aligned}$$

e seus vetores normais, $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$, respectivamente. Eles têm um ponto em comum? Um ponto $P(x, y, z)$ comum aos planos deve satisfazer simultaneamente a todas as equações do plano, isto é, a terna (x, y, z) formada por suas coordenadas deve ser solução do sistema de equações lineares acima. No momento, estamos apenas interessados em responder se os planos se interceptam em um único ponto. Isto ocorrerá se, e somente se, o sistema tiver uma única solução.

Vamos agora responder esta questão de uma forma mais geométrica. Vimos que uma condição necessária e suficiente para que dois planos se interceptem segundo uma reta é que o produto vetorial entre seus vetores normais seja não nulo. Estamos interessados em determinar uma condição para que os três planos se interceptem em um ponto. Para isso ocorrer, é necessário que dois planos, por exemplo π_1, π_2, se interceptem segundo uma reta r (paralela ao vetor não nulo $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$) e, além disso, que a reta r intercepte o plano π_3 em um ponto. Ou seja, o plano π_3 não é paralelo à reta r e, equivalentemente, não é paralelo a $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

Logo, $(\vec{n}_1 \times \vec{n}_2) \cdot \vec{n}_3 \neq 0$. Por outro lado, se $(\vec{n}_1 \times \vec{n}_2) \cdot \vec{n}_3 \neq 0$, então $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \neq \vec{0}$ e, portanto, os planos π_1 e π_2 se interceptam em uma reta não paralela ao plano π_3.

Logo, a condição necessária e suficiente para que os planos π_1, π_2 e π_3 se interceptem em um ponto é que o produto misto entre os vetores normais aos planos seja não nulo, isto é, $[\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3] \neq 0$.

Teorema 6.5: Sejam os planos π_1, π_2 e π_3 com vetores normais $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ e $\vec{n}_3$, respectivamente. Os planos se interceptam em um único ponto se, e somente se, $[\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3] \neq 0$.

Exemplo 6.16: Verifique se os seguintes planos se interceptam em um único ponto:

$$\begin{aligned} &\pi_1 : 1x + 2y + 1z + 1 = 0, \\ &\pi_2 : 1x - 1y + 1z + 1 = 0, \\ &\pi_3 : -1x - 1y + 1z - 1 = 0. \end{aligned}$$

Resolução:

O produto misto entre os vetores normais aos planos é dado por

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

e, portanto, os planos se interceptam em um único ponto. Podemos verificar facilmente, por substituição direta, que o ponto $P(-1,0,0)$ é o ponto comum aos planos.

Subtraindo a equação de π_1 da equação de π_2, obtemos $y = 0$. Adicionando as equações de π_1 e de π_3, obtemos $z = 0$, donde segue que $x = -1$.

Já vimos em capítulos anteriores, técnicas para obter as soluções de sistemas de equações lineares. Quando a solução é única, ela fornece as coordenadas do ponto de interseção entre os planos.

6.15 Fórmulas do Capítulo

Distância entre Pontos	$P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$	$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \left\Vert \overrightarrow{P_1P_2} \right\Vert$
Equações do Plano	Três pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$	Paramétricas $x = x_1 + s(x_2 - x_1) + t(x_3 - x_1)$ $y = y_1 + s(y_2 - y_1) + t(y_3 - y_1)$ $z = z_1 + s(z_2 - z_1) + t(z_3 - z_1)$
	Três pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$	Cartesiana $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$
	$P_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi$ $\overrightarrow{n_1} = (a, b, c)$ normal a π	Normal $(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) = 0$
Ângulo entre Planos	$\overrightarrow{n_1}$ normal a π_1 $\overrightarrow{n_2}$ normal a π_2	$\cos(\pi_1, \pi_2) = \dfrac{\left\vert \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} \right\vert}{\left\Vert \overrightarrow{n_1} \right\Vert \left\Vert \overrightarrow{n_2} \right\Vert}$
Equações da reta	Dois pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$	Paramétricas $x = x_1 + t(x_2 - x_1)$ $y = y_1 + t(y_2 - y_1)$ $z = z_1 + t(z_2 - z_1)$
		Forma Simétrica $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$

Ângulo entre Retas	$\vec{v_1}$ paralelo a r_1 $\vec{v_2}$ paralelo a r_2	$\cos(r_1,r_2)=\dfrac{\lvert\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}\rvert}{\lVert\vec{v_1}\rVert\lVert\vec{v_2}\rVert}$
Distância de Ponto a Plano	$P_0(x_0,y_0,z_0)$, $\pi : ax+by+cz+d=0$	$d(P,\pi)=\dfrac{\lvert ax_0+by_0+cz_0+d\rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$
Distância de Ponto a Reta	$P_0(x_0,y_0,z_0)$ fora de r. P qualquer ponto de r. $\vec{v_1}=(a,b,c)$ paralelo a r.	$d(P_0,r)=\dfrac{\lVert\overrightarrow{P_0P}\times\vec{v}\rVert}{\lVert\vec{v}\rVert}$
Distância entre Retas	$P_1(x_1,y_1,z_1)\in r_1$, $P_2(x_2,y_2,z_2)\in r_2$, $\vec{v_1}$ paralelo a r_1, $\vec{v_2}$ paralelo a r_2.	$d(r_1,r_2)=\dfrac{\lvert\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{v_1}\times\vec{v_2})\rvert}{\lVert\vec{v_1}\times\vec{v_2}\rVert}$
Distância entre Planos	$P_1(x_1,y_1,z_1)\in\pi_1$, $P_2(x_2,y_2,z_2)\in\pi_2$, $\vec{n_1}$ normal a π_1, $\vec{n_2}$ normal a π_2.	$d(\pi_1,\pi_2)=\dfrac{\lvert\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\vec{n_1}\rvert}{\lVert\vec{n_1}\rVert}$
Interseção de Planos	$\pi_1 : a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ $\pi_2 : a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ $\pi_3 : a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0$	$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0$ os planos de intersectam em um único ponto

Exercícios

6.13) Verifique se os planos se interceptam em um ponto:

$$\pi_1 : 1x - 1y + 3z = 0,$$
$$\pi_2 : 1x + 1y + 1z + 1 = 0,$$
$$\pi_3 : 1x - 1y - 1z - 1 = 0.$$

Resposta: O produto misto entre os vetores normais é não nulo. Os planos se interceptam em um único ponto.

6.14) Verifique se os planos se interceptam em um ponto:

$$\pi_1 : 1x - 1y - 1z + 5 = 0,$$
$$\pi_2 : 1x + 0y - 1z + 2 = 0,$$
$$\pi_3 : 1x + 1y + 1z - 1 = 0.$$

Resposta: O produto misto entre os vetores normais é diferente de zero. Os planos se interceptam em um ponto.

Resumo

Nesse capítulo apresentamos em detalhes a noção de sistema de coordenadas e muitas das implicações que esse conceito nos fornece no estudo de *retas e planos*. Vimos que, uma vez estabelecido um sistema de coordenadas, podemos fazer o estudo das retas e planos via equações, o que torna esse trabalho mais simples e atraente. Foi assim que atribuímos aos planos e às retas suas equações e pudemos responder a várias perguntas, tais como: *os planos dados se interceptam? As retas se cruzam? Qual a distância entre uma reta e um plano? Qual é a reta que passa por um ponto e é paralela a um plano?* Vimos também alguns tipos de equações para as retas e os planos e aprendemos a ver, nessas equações, informações importantes. Como você pode ver, mergulhamos mais fundo nesse mundo dos vetores.

Capítulo 7

Curvas Cônicas

Capítulo 7
Curvas Cônicas

Neste capítulo vamos dar início ao estudo de algumas curvas: as curvas cônicas. Elas são obtidas pela interseção de um cone com um plano. A inclinação do plano com relação à base do cone é que determina as diferentes curvas cônicas. Vamos deduzir suas equações e estudar algumas de suas propriedades. Ao final deste capítulo você deverá ser capaz de defini-las, identificá-las, além de classificá-las e de reconhecer seus traçados.

7.1 Introdução

Apolonius de Perga
(260-200 a.C.)

Girard Desargues
(1591-1661)

O primeiro estudo sistemático das cônicas deve-se a Apolônio, que nasceu em Perga, na Ásia Menor, e viveu em Alexandria. Em seu "Secções Cônicas", define as cônicas como sendo seções de um cone de base circular e atribui-lhes os nomes de elipses, parábolas e hipérboles. Um século antes dele, o matemático Menecmus tinha descoberto as cônicas de forma a solucionar o problema da duplicação do cubo. Aí começou sua história. Ao longo dos séculos, a família das cônicas foi sendo vista sob diferentes perspectivas, e novas propriedades foram descobertas. Algumas vezes, ainda, as cônicas revelavam relações inesperadas entre a matemática e a realidade. Desargues também explorou o fato de que as cônicas podiam ser obtidas umas através das outras por projeção. Assim, o que interessava era estudar quais propriedades se mantinham invariáveis por projeções da circunferência. Isso simplificou muito a dedução dos resultados de Apolônio. Pascal, aos 16 anos, baseando-se nos métodos de Desargues, escreveu um "ensaio sobre as cônicas". A importância das cônicas pode ser evidenciada em áreas como Física, Óptica, Acústica, Engenharia e Arquitetura.

Uma cônica é uma curva plana obtida da interseção de um plano com um cone. Neste capítulo vamos estudar algumas propriedades das curvas cônicas. A figura 7.1 indica as possíveis curvas obtidas da interseção do cone com um plano. São elas: elipse, hipérbole e parábola. O tipo de curva obtida depende da inclinação do plano com relação à base do cone.

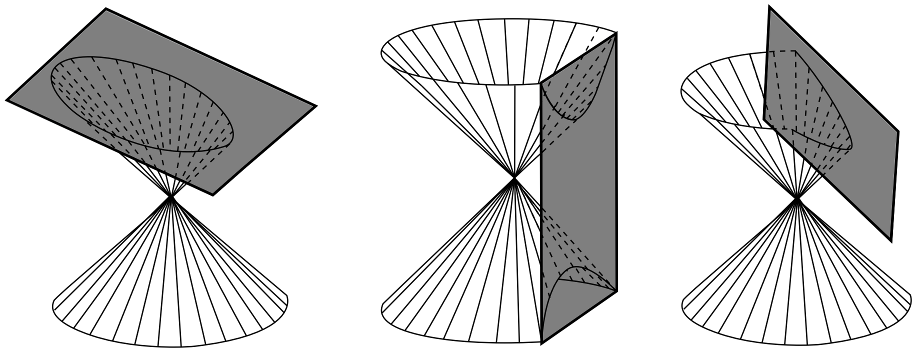


Figura 7.1

Definição 7.1: Dadas duas retas concorrentes, *r* e *g*, o cone de eixo *r* e geratriz *g* é a superfície gerada pela rotação da reta *g* em torno da reta *r*, mantendo-se fixo o ângulo entre *r* e *g*.

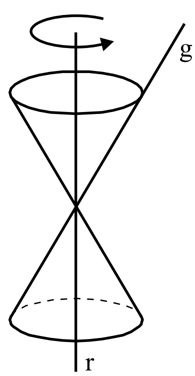


Figura 7.2

Uma equação para o cone que tem como eixo o eixo dos *z* e como geratriz a bissetriz do plano *xz* é dada por $z^2 = x^2 + y^2$.

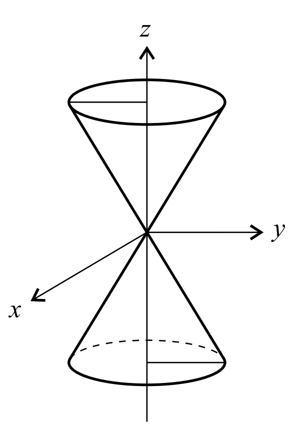


Figura 7.3

Definição 7.2: Uma cônica é uma curva plana obtida da interseção de um plano com um cone.

Vamos considerar as cônicas obtidas da interseção de um plano qualquer com o cone dado pela equação $z^2 = x^2 + y^2$. Como a equação de um plano é da forma $ax + by + cz + d = 0$, então temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ z^2 = x^2 + y^2 \end{cases}.$$

Se $c \neq 0$, isolando z na primeira equação e substituindo em $z^2 = x^2 + y^2$ o valor $z = -\dfrac{(d + ax + by)}{c}$, obtemos uma cônica que terá equação da forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \qquad (1)$$

Exemplo 7.1: Encontre uma equação para a cônica obtida da interseção dos seguintes planos com o cone $x^2 + y^2 = z^2$:

a) $z = 4$ b) $z = y + 1$ c) $z = 2y + 1$

Resolução:

a) Substituindo $z = 4$ na equação do cone, temos a equação $x^2 + y^2 = 16$, que é a equação da circunferência de centro na origem e raio 4. Observe que a equação acima é da forma (1) com $A = C = 1$, $F = -16$ e $B = D = E = 0$.

b) Substituindo $z = y + 1$ na equação do cone, temos

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (y+1)^2 \\ x^2 + y^2 &= y^2 + 2y + 1 \\ x^2 - 2y - 1 &= 0, \end{aligned}$$

que é uma equação da forma (1) com $A = 1$, $E = -2$, $F = -1$ e $B = C = D = 0$.

c) Substituindo $z = 2y + 1$ na equação do cone, temos

$$\begin{aligned} (2y+1)^2 &= x^2 + y^2 \\ 4y^2 + 4y + 1 &= x^2 + y^2 \\ 3y^2 + 4y - x^2 + 1 &= 0, \end{aligned}$$

que é da forma (1) com $A = -1$, $C = 3$, $E = 4$, $F = 1$ e $B = D = 0$.

7.2 Algumas Curvas Planas

7.2.1 Elipse

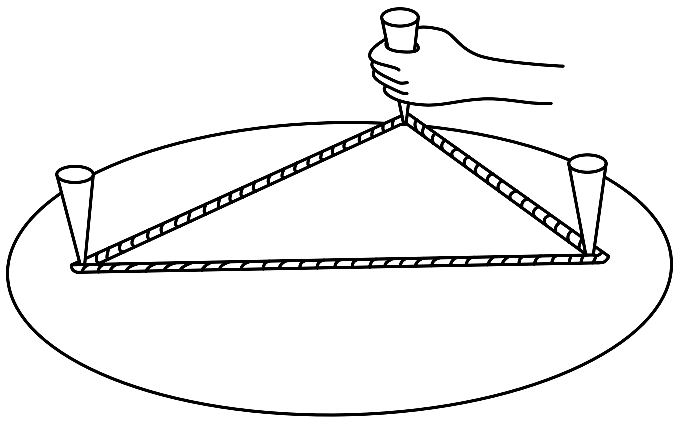


Figura 7.4

Uma elipse é o conjunto dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos é constante. Os pontos fixos são chamados focos da elipse.

Sejam F_1 e F_2 dois pontos em um plano α com distância entre eles de $2c > 0$. Seja $a > c$. A elipse com focos nos pontos F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos $P(x, y)$ do plano α cuja soma das distâncias aos pontos F_1 e F_2 é igual a $2a$. Isto é, $\|F_1P\| + \|F_2P\| = 2a$.

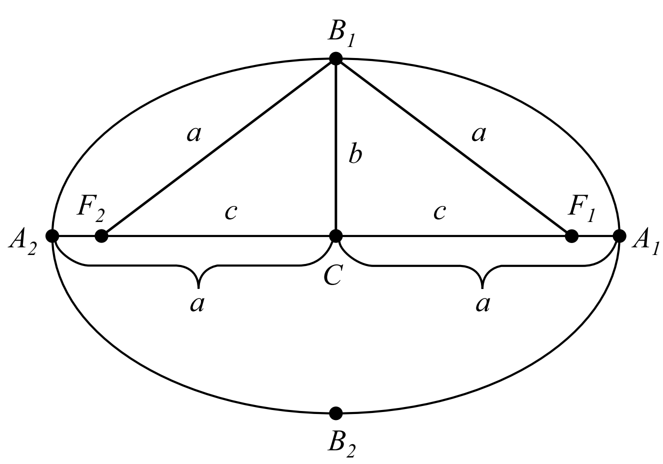


Figura 7.5

Podemos supor que os focos estejam sobre o eixo *OX*, assim os focos possuem as seguintes coordenadas: $F_1(c,0), F_2(-c,0)$. Então temos o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ do plano cartesiano tais que, $\|\overrightarrow{PF_1}\| + \|\overrightarrow{PF_2}\| = 2a$ é a elipse de focos F_1 e F_2.

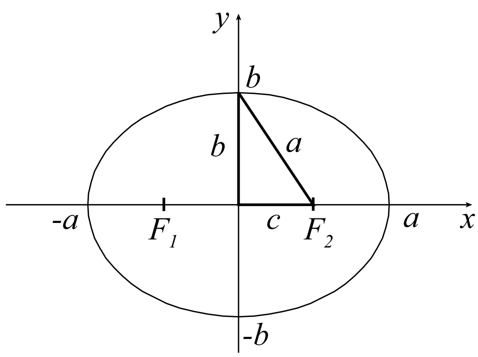


Figura 7.6

Em coordenadas, esta equação é equivalente a

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

ou ainda $\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ (Figura 7.6).

Tomando o quadrado em ambos os lados, temos

$$(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2.$$

Simplificando e isolando o termo da raiz quadrada, temos

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a+\frac{c}{a}x.$$

Tomando novamente o quadrado nos dois membros, temos

$$x^2+2cx+c^2+y^2=a^2+2cx+\frac{c^2}{a^2}x^2.$$

Simplificando, temos

$$(1-\frac{c^2}{a^2})x^2+y^2=a^2-c^2$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.$$

Como $a>c$, então $a^2-c^2>0$. Portanto existe $b>0$ tal que $b^2=a^2-c^2$. Assim, a equação desta elipse é

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Observe que, se $c=0$, então $a=b$. Neste caso, a equação acima é equivalente a $x^2+y^2=a^2$, que é a equação da circunferência de centro na origem e raio a.

Na elipse de focos F_1 e F_2, o ponto médio do segmento F_1F_2 é chamado centro e a reta que contém os focos é o *eixo focal*. A reta perpendicular ao eixo focal no centro é chamada *eixo secundário*. A elipse é simétrica em relação ao eixo focal e também em relação ao eixo secundário. As intersecções da elipse com os eixos são chamadas *vértices*, e os segmentos que ligam o centro aos vértices são chamados *semi-eixos*.

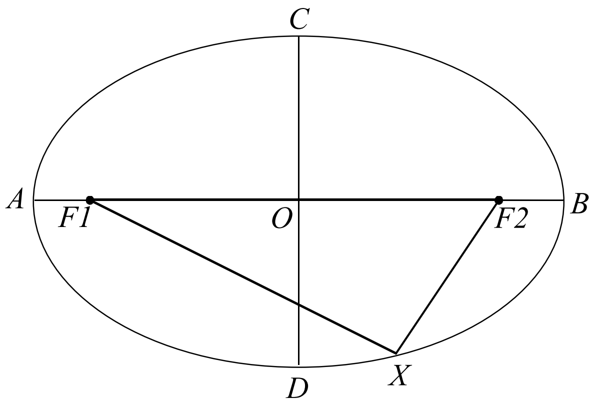
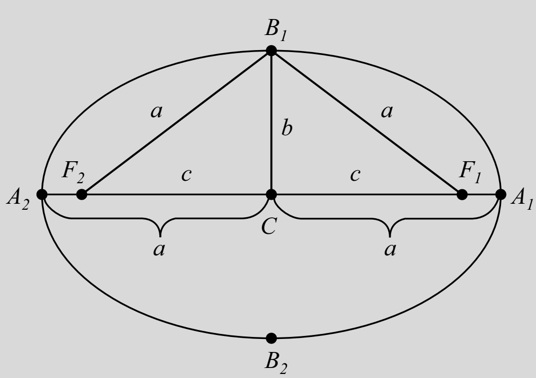


Figura 7.7

A equação que deduzimos acima é de uma elipse de centro na origem. O eixo focal é o eixo dos x, e o secundário, o eixo dos y. O comprimento do semi-eixo sobre o eixo dos x é a, e o do semi-eixo sobre o eixo dos y é b. Observe que $b < a$.

Se o centro é o ponto (x_0, y_0), e o eixo focal é paralelo ao eixo dos x com semi-eixo a, então a equação da elipse é da forma

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1. \qquad (2)$$

Gráfico padrão	Elementos principais
	F_1 e F_2 são focos C é o centro A_1A_2 é o eixo maior B_1B_2 é o eixo menor $2c$ é a distância focal $2a$ é a medida do eixo maior $2b$ é a medida do eixo menor $e = \frac{c}{a} < 1$ é a excentricidade Relação notável: $a^2 = b^2 + c^2$ Equação reduzida: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ A_1, A_2, B_1, B_2 são vértices $\|F_1P\|, \|F_2P\|$ são raios focais de $P(x, y)$.

Se A_1A_2 está sobre o eixo $0Y$ e B_1B_2 sobre o eixo $0X$, a equação da elipse fica como $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$. Se a elipse tem centro no ponto $C(x_0, y_0)$ e A_1A_2 é paralelo ao eixo $0X$, então sua equação é da forma $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$.

Círculo: note que se F_1 e F_2 são coincidentes, então a elipse reduz-se a um círculo. Nesse caso, a excentricidade é nula, pois $c=0$.

A figura a seguir ilustra a elipse $\frac{(x+1)^2}{3^2}+\frac{(y-2)^2}{2^2}=1$, que possui centro no ponto $(-1,2)$.

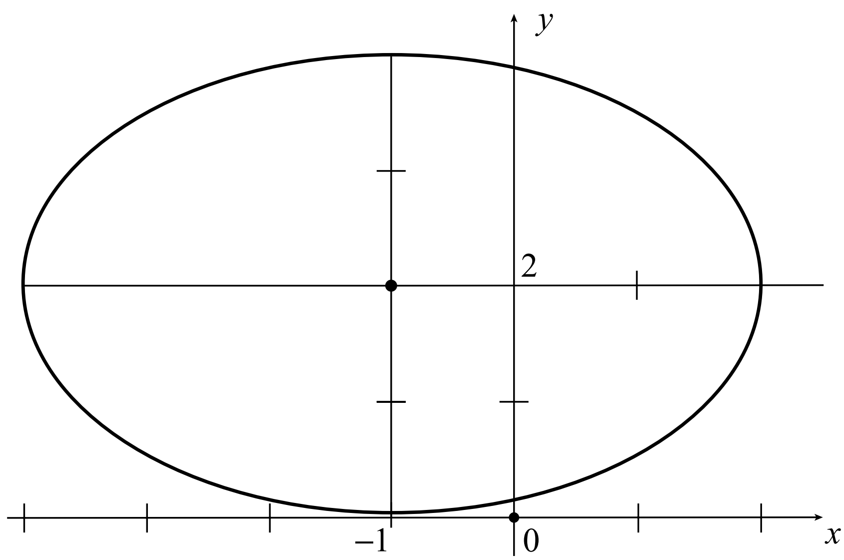


Figura 7.8

Analogamente, se o eixo focal for paralelo ao eixo dos y com semi-eixo a, a equação da elipse é da forma

$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1. \tag{2a}$$

A Figura 7.9 ilustra a elipse $\frac{(x-1)^2}{2^2}+\frac{(y-2)^2}{5^2}=1$, que possui centro no ponto $(1,2)$.

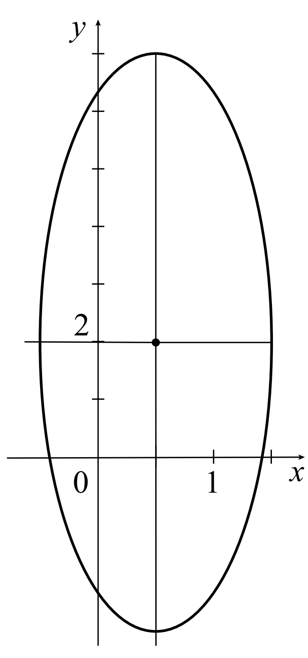


Figura 7.9

7.2.2 Elipse no mundo real

A todo momento estamos nos deparando com elipses. Diversas construções possuem arcos em forma de elipses. Um copo com um pouco de água, ao ser inclinado, forma na superfície desse líquido uma elipse. A sombra de um abajur ou lanterna pode formar elipses.

A ocorrência de elipses no mundo real vai além de objetos com o seu formato. É em suas diversas aplicações que está o verdadeiro interesse nessas curvas.

- As órbitas da lua, de cometas permanentes e de satélites artificiais, em torno da Terra, são curvas elípticas. Kepler demonstrou no século XVII, que os planetas viajam em torno do sol descrevendo uma trajetória elíptica, tendo o sol com um dos focos.

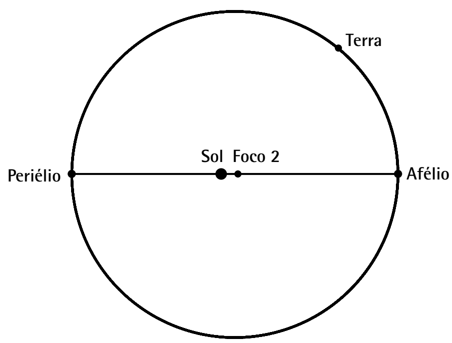


Figura 7.10

Em uma trajetória elíptica, temos o periélio como o ponto em que o planeta se encontra mais próximo do sol e o afélio como o ponto em que o planeta se encontra mais afastado do sol. A excentricidade das elipses que descrevem as órbitas dos planetas varia desde a mais excêntrica, como a do Planeta Mercúrio, com $e = 0,2056$, até as menos excêntricas, como a Terra, com $e = 0,0167$, e Vênus com $e = 0,0068$. Ou seja, a órbita da Terra descreve uma trajetória praticamente circular.

- Pelo sucesso na descrição das órbitas planetárias e pelas similaridades entre a expressão da força gravitacional $\vec{F}_g = \dfrac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r^2}\hat{r}$ e força elétrica $\vec{F}_e = \dfrac{k \cdot q_1 \cdot q_2}{r^2}\hat{r}$, após o experimento de E. Rutherford buscou-se um modelo atômico em que os elétrons se movessem em uma órbita elíptica em torno do núcleo conforme a figura 7.10. Embora hoje saibamos que não é bem assim, não se pode negar a importância dessa aproximação para a evolução dos modelos atômicos.

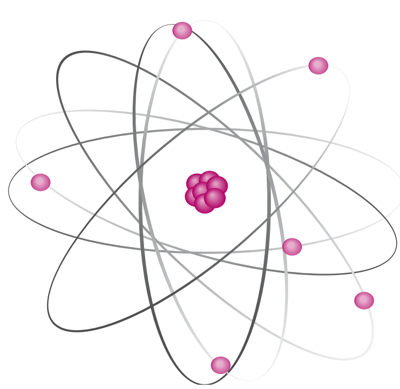


Figura 7.11

- As elipses possuem uma propriedade importante e com diversas aplicações, é a propriedade refletiva. Em que uma onda luminosa ou sonora, disparadas de um dos focos, é refletida no outro foco. Isso permite, por exemplo, uma importante aplicação na medicina: o paciente é colocado em um tanque elíptico com água, e a partir de um foco da elipse dispara-se uma onda de ultrassom, a qual incide no outro foco em que esteja localizado um cálculo renal, para que essa onda o destrua.

- As lâmpadas refletoras utilizadas pelos dentistas são refletores elípticos que têm a propriedade de concentrar a luz no local da boca em que eles se trabalham. Também os aparelhos de radioterapia utilizam espelhos elípticos para tratamento médico, pois assim a emissão dos raios pode ser concentrada nos tecidos doentes, não afetando os tecidos sadios.

- A propriedade refletora da elipse ainda permite a construção das famosas salas de sussurros. São salas construídas em forma de elipsóides, permitindo que pessoas localizadas nos focos ouçam a si mesmas perfeitamente, mesmo sussurrando e sendo inaudíveis para as demais.

Atividade: Pesquise sobre teatros, a Catedral de St. Paul em Londres, e o Capitólio em Washington, que possuem a propriedade de salas de sussurro.

7.2.3 Parábola

Diretriz
Reta cuja distância aos pontos de uma parábola é igual à distância desses pontos ao foco da parábola.

Fixe um ponto F, uma reta d no plano cartesiano, e seja c um número positivo. A parábola de foco F e diretriz d é o conjunto dos pontos P do plano que eqüidistam do ponto F e da reta d. A reta perpendicular à diretriz pelo foco é chamada *eixo* da parábola. A parábola é simétrica em relação ao eixo, e a interseção da parábola com o eixo é chamada *vértice*. Seja d uma reta e F um ponto fora de d, e ambos pertencentes a um mesmo plano α. Seja $2c$ a distância entre F e d. Uma parábola, com diretriz d e foco F, é o conjunto dos pontos $P(x, y)$ do plano α equidistantes de d e de F. Isto é, $\left\|\overrightarrow{FP}\right\| = d(P,d)$.

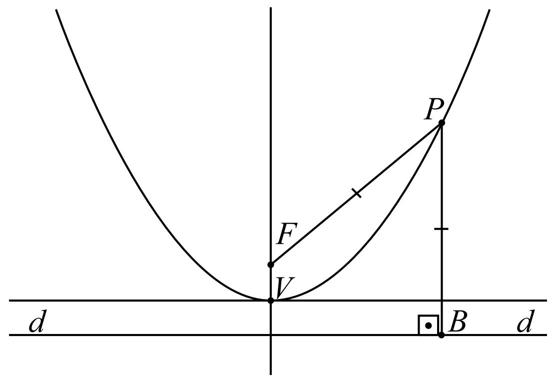


Figura 7.12

Por simplicidade, vamos supor que o foco F esteja sobre o eixo *0V*. Assim, F tem coordenadas dadas por $F(0,c)$ e d é a reta vertical dada por $y=-c$. Veja a figura 7.13.

Um ponto $P=(x,y)$ está nesta parábola se, e somente se, verifica a equação

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(y+c)^2}=\sqrt{(y-c)^2+x^2}\\
&(y+c)^2=(y-c)^2+x^2\\
&y^2+2cy+c^2=y^2-2cy+c^2+x^2\\
&4cy=x^2\\
&y=\frac{x^2}{4c}.
\end{aligned}$$

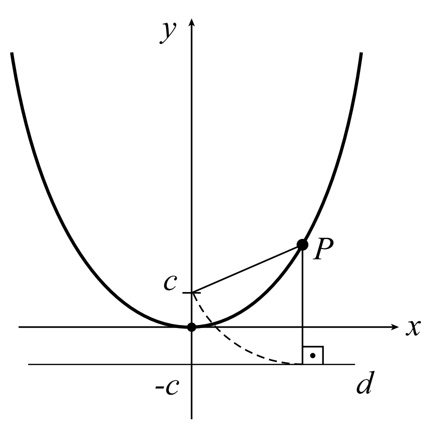


Figura 7.13

Esta equação é equivalente a

$$y=\frac{1}{4c}x^2.$$

Esta parábola tem vértice na origem, e c é o comprimento do semi-eixo.

Se a parábola tem vértice no ponto (x_0, y_0) e diretriz paralela ao eixo dos x, dada por $y = a$, sua equação é da forma

$$y - y_0 = \frac{1}{4c}(x - x_0)^2 \tag{3}$$

onde $c = y_0 - a$.

A equação da parábola com vértice no ponto (x_0, y_0) e diretriz paralela ao eixo dos y, dada por $x = a$, é da forma

$$x - x_0 = \frac{1}{4c}(y - y_0)^2, \tag{3a}$$

onde $c = x_0 - a$.

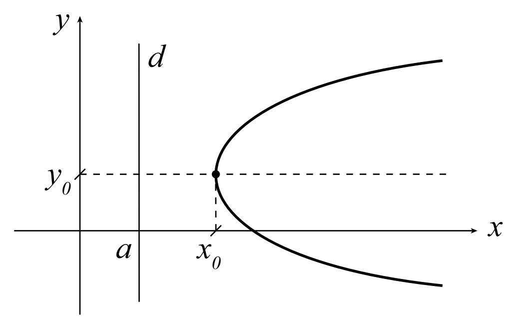
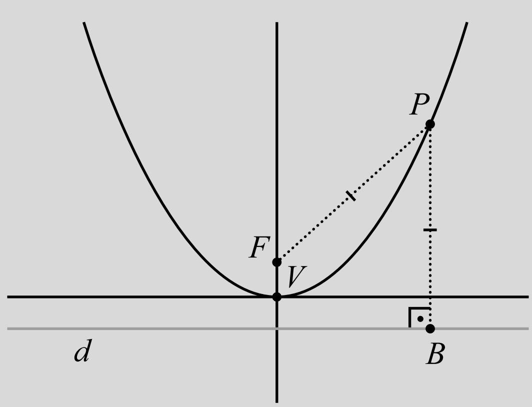


Figura 7.14

Gráfico padrão	Elementos principais
	F é o foco d é diretriz V é o vértice Relação notável: $VF = c$ Equação reduzida: $\dfrac{x^2}{4c} = y$ Se a parábola apresentar vértice na origem e foco no eixo OX, então sua Equação terá a forma $\dfrac{y^2}{4c} = x$. Se a parábola apresentar vértice no ponto $V(x_0, y_0)$ e $VF \mathbin{//} OX$, então sua equação terá a forma $(y - y_0)^2 = 4c(x - x_0)$.

7.2.4 Parábolas no mundo real

Como no caso da elipse, também diversas construções possuem arcos em forma de parábolas. A antena parabólica é um objeto quase que comum no cotidiano da maioria das pessoas.

A ocorrência de parábolas no mundo real vai além do aspecto visual. É em suas diversas aplicações que está o verdadeiro interesse pelas parábolas.

- Um objeto lançado obliquamente descreve no ar uma trajetória parabólica. Essa propriedade é utilizada na guerra pelos militares, ao realizarem disparos. Escolhendo convenientemente o ângulo de lançamento é possível atingir o alvo com precisão. O atrito do objeto com o ar deforma ligeiramente essa trajetória. A trajetória do objeto perde um pouco do formato de parábola, mas ainda mantém muitas de suas características.

- As parábolas também possuem uma propriedade refletiva. Se no foco de um espelho parabólico (obtido pela rotação de uma parábola) localizarmos uma fonte luminosa, então o espelho refletirá a luz em raios paralelos. Isso permite uma iluminação uniforme. Veja a figura 7.15.

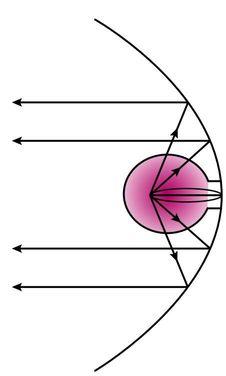


Figura 7.15

- As antenas ou espelhos parabólicos utilizam esse princípio com uma pequena alteração: eles são usados para coletar ondas de rádio ou luz. As ondas de luz(figura 7.16b) ou de rádio (figura 7.16a) que atingem o espelho ou a antena parabólica são refletidas para o ponto focal onde, no qual pode estar localizado um instrumento que os capte. Esse princípio é atualmente empregado com espelhos parabólicos controlados por computador para acompanhar o sol e coletar o máximo de luz solar, que é utilizada na produção de energia elétrica.

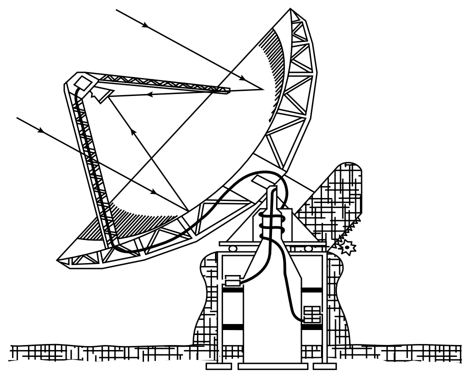


Figura 7.16a

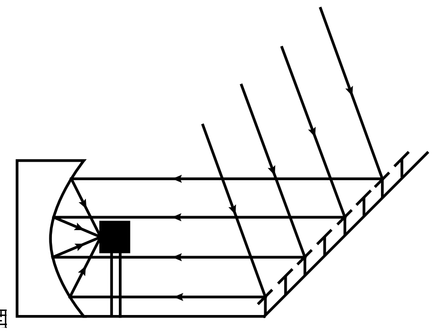


Figura 7.16b

- Uma ilusão de ótica utilizando a conjugação de dois espelhos parabólicos côncavos (figura 7.17) é um truque bem conhecido. O objeto localizado dentro dos espelhos é refletido formando um objeto virtual fora do conjunto de espelhos.

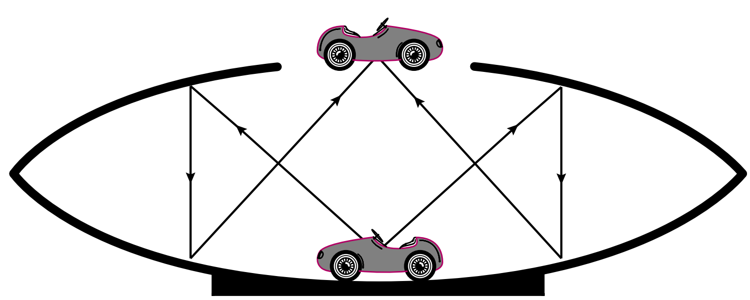


Figura 7.17

7.2.5 Hipérbole

Sejam F_1 e F_2 dois pontos em um plano α, com distância distância entre eles de $2c$. Seja $a < c$. Uma hipérbole com focos F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos $P(x, y)$ do plano α, cuja diferença entre as distâncias aos focos é constante igual a $2a$. Isto é, $\left| \|F_1P\| - \|F_2P\| \right| = 2a$. Sejam dados F_1 e F_2 dois pontos em um plano α cuja distância entre eles é $2c$. Seja $a < c$. Uma hipérbole com focos F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos $P(x, y)$ do plano α cuja diferença entre as distâncias aos focos, é constante igual a $2a$. Isto é, $\left| \|F_1P\| - \|F_2P\| \right| = 2a$.

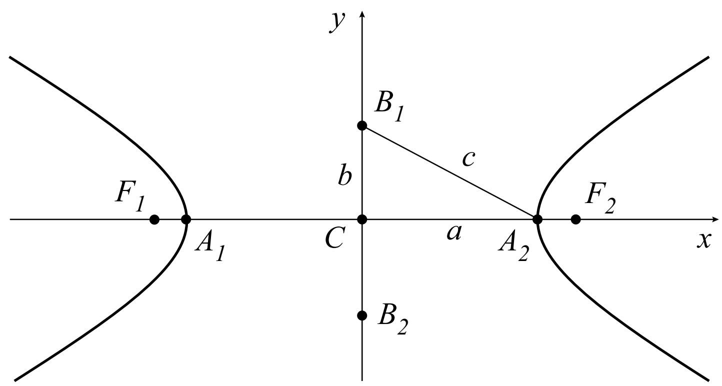


Figura 7.18

O ponto médio do segmento focal F_1F_2 é chamado centro da hipérbole. A reta que contém os focos é chamada *eixo-focal* ou *principal*. A reta perpendicular ao eixo focal pelo centro é o *eixo-secundário*. A hipérbole é simétrica em relação aos seus eixos. Ela intercepta o eixo focal em dois pontos chamados *vértices*, que são simétricos em relação ao centro. A distância do centro a um vértice é chamada *semi-eixo*.

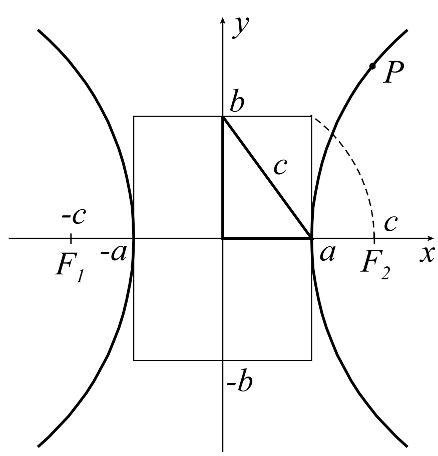


Figura 7.19

A equação para a hipérbole de focos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ sobre o eixo dos x com $d = 2a$, onde $a < c$, é dada por

$$\left| \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right| = 2a .$$

Esta equação é equivalente às seguintes equações:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \pm 2a$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$
$$\pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx$$
$$\pm\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + \frac{c}{a}x$$
$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = a^2 + 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2$$
$$x^2(\frac{c^2}{a^2} - 1) - y^2 = c^2 - a^2$$
$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

Como $c > a$, existe $b > 0$ tal que $b^2 = c^2 - a^2$. Assim, a equação desta hipérbole é da forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Nesta equação, a é a medida do semi-eixo.

Se a hipérbole tem centro no ponto (x_0, y_0), eixo focal paralelo ao eixo dos x com semi-eixo a e distância do centro ao foco c, então sua equação é da forma

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \qquad (4)$$

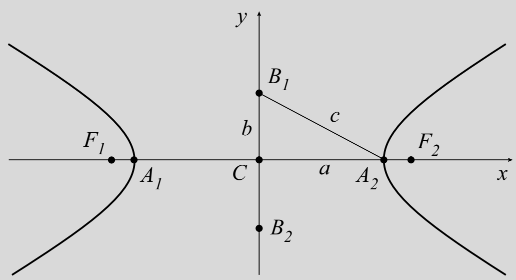
onde b é dado por $b^2 = c^2 - a^2$.

Analogamente, a hipérbole de centro no ponto (x_0, y_0), eixo focal paralelo ao eixo dos y com semi-eixo a e distância do centro ao foco c tem equação da forma

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1. \qquad (4a)$$

onde b é dado por $b^2 = c^2 - a^2$.

As equações da elipse, (2) e (2a), da parábola, (3) e (3a), e da hipérbole, (4) e (4a), são casos particulares da equação (1) e são referidas como *formas canônicas*.

Gráfico padrão	Elementos principais
	F_1 e F_2 são focos C é o centro A_1A_2 é o eixo real B_1B_2 é o eixo transverso $2c$ é a distância focal $2a$ é a medida do eixo real $2b$ é a medida do eixo transverso $e=\frac{c}{a}>1$ é a excentricidade Relação notável: $c^2=a^2+b^2$ Equação reduzida: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $\lVert F_1P\rVert, \lVert F_2P\rVert$ são raios focais de P A_1, A_2 são vértices A Hipérbole é simétrica com relação aos eixos OX e OY

Se A_1A_2 está sobre o eixo $0Y$ e B_1B_2 sobre o eixo $0X$, a equação da hipérbole fica como $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$. Se a hipérbole tem centro no ponto $C(x_0, y_0)$ e A_1A_2 é paralelo ao eixo 0X, então sua equação é da forma $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$.

Vamos mostrar com exemplos que estas três curvas são cônicas, isto é, podem ser obtidas pela intersecção de um cone com um plano.

Considere o cone de equação $z^2=x^2+y^2$. Interceptando-o com o plano de equação $z=\frac{1}{2}x+1$ temos

$$\frac{1}{4}x^2+x+1=x^2+y^2$$

$$x^2+4x+4=4x^2+4y^2$$

$$3x^2-4x+4y^2=4$$

$$3(x-\frac{2}{3})^2+4y^2=\frac{48}{9}$$

$$\frac{(x-\frac{2}{3})^2}{4}+\frac{y^2}{3}=\frac{4}{9}$$

$$\frac{(x-\frac{2}{3})^2}{16/9}+\frac{y^2}{4/3}=1.$$

Comparando com a equação (2), vemos que é a equação da elipse de centro em $\left(\frac{2}{3},0\right)$, semi-eixo focal $a=\frac{4}{3}$ e semi-eixo secundário $b=\sqrt{\frac{4}{3}}$. De fato: $b<a$.

A interseção do cone com o plano de equação $z=x+1$ dá uma curva com a seguinte equação:

$$(x+1)^2=x^2+y^2$$

$$2x+1=y^2$$

$$x+\frac{1}{2}=\frac{y^2}{2}.$$

Comparando-a com a forma canônica (3a), vemos que é a equação da parábola de centro $(-\frac{1}{2},0)$ e diretriz paralela ao eixo dos y.

A interseção do cone com o plano de equação $y=x+1$ dá a equação,

$$z^2=x^2+(x+1)^2$$

$$z^2=2x^2+2x+1$$

$$z^2=2(x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}z^2-(x+\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$$

$$\frac{z^2}{1/2}-\frac{(x+\frac{1}{2})^2}{1/4}=1.$$

Comparando-a com a forma canônica (4a), concluímos que a curva é uma hipérbole no plano xz de centro $(1/2,0)$ e eixo focal paralelo ao eixo dos z.

7.2.6 Hipérboles no mundo real

Como no caso da elipse e da parábola, também diversas construções possuem a forma de hiperbolóides (superfície obtida pela revolução de um ramo de hipérbole) ou possuem arcos em forma de hipérboles.

Vejamos alguns exemplos.

- Sombra de uma lâmpada na parede pode resultar em hipérbole;
- Objetos e construções possuem arcos em forma de hipérbole ou possuem a forma de hiperbolóides (superfície obtida pela rotação de um ramo de hipérbole).
- O hiperbolóide de uma folha é uma superfície gerada pela rotação de um ramo de uma hipérbole em torno de seu eixo transverso. Tais superfícies também podem ser obtidas pela rotação de um segmento de reta, essas superfícies são chamadas de regradas. Assim, as superfícies regradas podem ser vistas como uma reunião de segmentos de reta. Esse é o motivo pelo qual fornos especiais e usinas nucleares possuem formato de um hiperbolóide: podem ser construídas utilizando barras retas de aço que se cruzam, oferecendo maior resistência.

Figura 7.20

- Um jato, ao se deslocar, provoca uma onda de choque com a forma de um cone. A interseção dessa onda com o solo é parte de uma hipérbole.

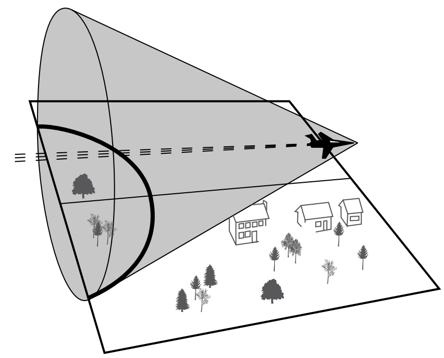


Figura 7.21

Exemplo 7.2: Pode existir um observador que perceba o som de um disparo de um projétil e o som do impacto desse projétil com um objeto alvo ao mesmo tempo?

Resolução: Suponha que o disparo ocorra em um ponto denominado F_1 e o que o objeto alvo esteja localizado no ponto F_2. Desejamos determinar o ponto 0 onde está localizado o observador, de modo que este perceba o som do disparo e o som do impacto com o alvo ao mesmo tempo.

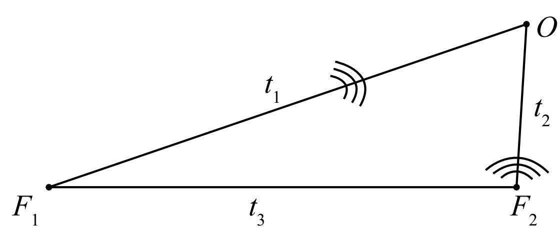


Figura 7.22

Vamos denotar por t_1 o tempo que o som do disparo leva par atingir o observador, t_2 o tempo que o som do impacto leva para atingir o observador e t_3 o tempo que o disparo leva para atingir o alvo. Para o observador perceber os dois sons simultaneamente, devemos ter $t_1 = t_2 + t_3$. Considerando que a velocidade do som no ar é $v = 340\,\mathrm{m/s}$ e multiplicando a equação por v obtemos

$$
\begin{aligned}
vt_1 &= vt_2 + vt_3 \\
d(F_1,0) &= d(F_2,0) + d(F_1,F_2).
\end{aligned}
$$

Ou seja,

$$d(F_1,0) - d(F_2,0) = d(F_1,F_2).$$

Considerando que $d(F_1,F_2) = 2c$ é constante, obtemos que a equação $d(F_1,0) - d(F_2,0) = 2c$ é equação de um ramo da hipérbole de focos

F_1 e F_2. Assim, podemos afirmar que existem infinitas posições para o observador ocupar sobre a hipérbole, todos situados sobre a hipérbole, que percebem o som do disparo e o som do impacto ao mesmo tempo.

No caso de um círculo, a excentricidade é $e = 0$, assim podemos pensar na excentricidade de uma cônica como sendo uma medida do quanto ela difere de um círculo.

Atividade: Pesquise sobre o sistema de navegação de longa distância que utiliza hipérboles.

7.2.7 Excentricidade

Podemos introduzir as curvas cônicas da seguinte forma. Dados um ponto F, uma reta d e um número $e > 0$. Uma curva cônica com foco F, reta diretriz d e excentricidade $e > 0$ é o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ do plano que satisfazem a relação $d(P,F) = ed(P,d)$.

Como exemplo, vamos determinar o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ do plano que satisfazem a relação $d(P,F) = ed(P,d)$, em que $F = (c,0)$ e a reta d é a reta vertical $x = d$.

Como $d(P,F) = ed(P,d)$, então

$$d(P,F) = ed(P,d)$$
$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = e\sqrt{(x-d)^2 + (y-d)^2}\ .$$

Simplificando, obtemos $x^2(1-e^2) + y^2 + 2x(de^2 - c) + c^2 - d^2e^2 = 0$.
Escolhendo $e = 1$, $d = -c$ e simplificando ainda mais a expressão acima obtemos $y^2 = 4cx$ que é a equação de uma parábola.

O mesmo raciocínio pode ser empregado para deduzir a equação da elipse e da hipérbole. Assim, se $0 < e < 1$ obtemos uma elipse, se $e = 1$ obtemos uma parábola e, se $e > 1$ obtemos uma hipérbole.
Vamos estudar o conjunto das soluções da *equação geral do segundo grau em duas incógnitas*, dado em (1).

Se $A = B = C = 0$, a equação (1) se reduz a $Dx + Ey + F = 0$, que tem como solução uma reta, um ponto, ou mesmo nenhuma solução, dependendo dos coeficientes D, E e F.

Quando A, B e C não são simultaneamente nulos, a equação acima tem grau 2.

Consideremos os casos em que a equação não tem o termo misto, isto é, $B = 0$.

Teorema 7.1: O conjunto solução da equação:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

em que $A \neq 0$, ou $C \neq 0$, é o conjunto vazio, um ponto, um par de retas ou uma cônica. Se for uma cônica, então será:

a) uma parábola, se $A = 0$ ou $C = 0$;

b) uma elipse, se $AC > 0$;

c) uma hipérbole, se $AC < 0$.

Observação: Um ponto ou um par de retas é chamado cônica degenerada.

A demonstração deste teorema é feita escrevendo a equação em uma das formas canônicas. Faremos isto através de exemplos.

Exemplo 7.3: Identifique a cônica dada pelas equações

a) $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y + 29 = 0$

b) $6x^2 + 9y^2 + 24x - 54y + 51 = 0$

c) $y^2 + 6x + 8y + 1 = 0$

d) $x^2 - 8x + 25 = 0$

e) $2x^2 + 3y^2 = 0$

f) $x^2 - 2x - y^2 + 1 = 0$

Resolução:

a) $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y + 29 = 0$

$$9(x^2 - 2x) - 4(y^2 + 4y) + 29 = 0$$

$$9(x-1)^2 - 4(y+2)^2 - 9 + 16 + 29 = 0$$

$$9(x-1)^2 - 4(y+2)^2 = -36$$

$$-\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1.$$

Portanto a cônica é uma hipérbole.

b) $6x^2+9y^2+24x-54y+51=0$

$6(x^2+4x)+9(y^2-6y)+51=0$

$6(x+2)^2+9(y-3)^2-24-81+51=0$

$6(x+2)^2+9(y-3)^2=54$

$\dfrac{(x+2)^2}{9}+\dfrac{(y-3)^2}{6}=1.$

Portanto a cônica é uma elipse.

c) $y^2+6x+8y+1=0$

$(y+4)^2+6x-16+1=0$

$6x-15=-(y+4)^2$

$x-\dfrac{5}{2}=\dfrac{-1}{6}(y+4)^2.$

Portanto a cônica é uma parábola.

d) Como $x^2-8x+25=0$, então

$$(x-4)^2-16+25=0$$
$$(x-4)^2=-9.$$

a equação não tem solução. Portanto, a equação representa o conjunto vazio.

e) Como a solução de $2x^2+3y^2=0$ é $x=y=0$, a equação representa o ponto (0, 0), e a cônica é degenerada.

f) $x^2-2x-y^2+1=0$

$y^2=(x-1)^2$

$|y|=|x-1|$

$y=\pm(x-1)$

O conjunto solução é o par de retas dado por $y=x-1$ e $y=-(x-1)=1-x$.
Portanto, a equação representa uma cônica degenerada.

Se $B\neq 0$, a equação geral (1) pode ser transformada em uma equação da forma $A'x^2+C'y^2+D'x+E'y+F'=0$ por meio de uma rotação no plano. Como uma rotação não muda a forma da curva, concluímos que o gráfico da equação (1), ou é o conjunto vazio, ou é uma cônica degenerada, ou é uma cônica.

A rotação de ângulo α que "elimina"o termo misto na equação (1) é da forma

$$x = x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha$$
$$y = x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha$$

com α tal que

$$\cot g2\alpha = \frac{A-C}{B}.$$

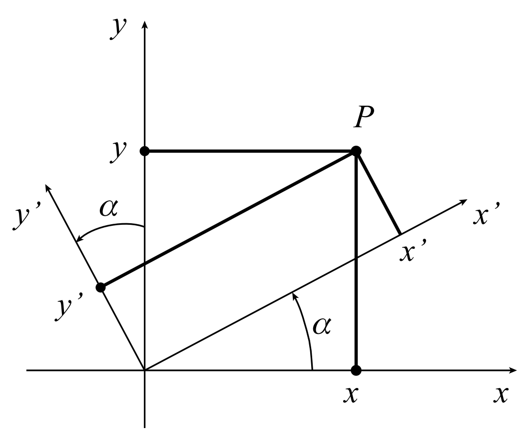


Figura 7.23

Exemplo 7.4: Simplifique a equação $xy - 1 = 0$ por meio de uma rotação apropriada.

Resolução: Nesta equação $A = C = 0$ e $B = 1$. Assim, queremos α tal que $\cot g2\alpha = 0$. Basta tomar $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Neste caso, $\cos\alpha = \operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Portanto teremos a seguinte transformação:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')$$
$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y').$$

Substituindo na equação, obtemos

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') - 1 = 0$$
$$\frac{(x')^2}{2} - \frac{(y')^2}{2} = 1.$$

Esta última equação é de uma hipérbole.

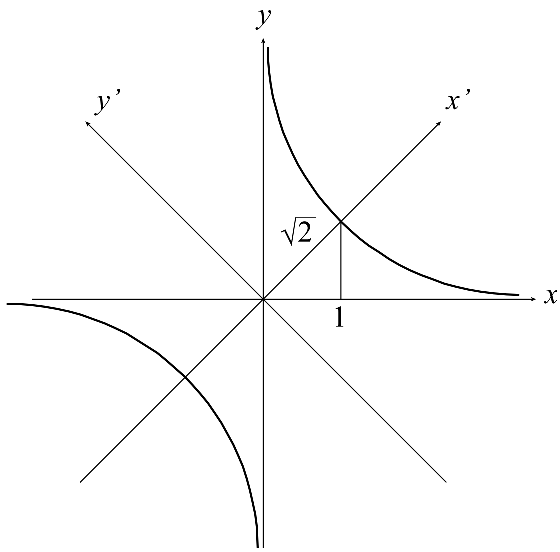


Figura 7.24

Exercícios

7.1) Volte nas definições das curvas cônicas e certifique-se de que as entendeu. Faça um pequeno resumo sobre cada uma delas.

7.2) Faça uma pesquisa sobre as curvas indicando em que momento as curvas cônicas aparecem na Física. Ou: onde se aplicam as curvas cônicas na Física? Recorde dos movimentos dos planetas e da transmissão e recepção de sinais em antenas.

7.3) Resolva novamente os exemplos acima, traçando as cônicas.

Resumo

Neste capítulo estudamos as curvas cônicas e vimos que elas surgem da interseção de um cone com um plano. A inclinação do plano com relação ao eixo e geratrizes do cone é que determina a forma da cônica. Do ponto de vista matemático, vimos que essas curvas são descritas por equações. O capítulo mostrou como classificar uma curva cônica tanto pela sua equação quanto pelo seu desenho, e nomear seus principais elementos.

Capítulo 8

Superfícies Quádricas

Capítulo 8
Superfícies Quádricas

Neste capítulo estudaremos as superfícies quádricas. Do ponto de vista matemático, é conveniente que essas superfícies sejam descritas por equações. Assim, no final deste capítulo, ao nos depararmos com a equação de uma quádrica, devemos ser capazes de classificá-la e traçar o seu gráfico.

8.1 Introdução

Até agora estudamos um tipo especial de superfície: o plano. Fixado um sistema de coordenadas ortogonais, a equação geral do plano é dada por $ax+by+cz+d=0$. O plano é chamado de superfície de primeiro grau.

Nesta seção vamos estudar outras superfícies, chamadas de quádricas. Estas superfícies estão intimamente relacionadas com as curvas cônicas, pois a intersecção de cada um delas com um plano resulta em uma cônica e algumas quádricas são obtidas pela rotação de cônicas. Imagine uma circunferência girando em torno de uma reta que contém seu diâmetro. A superfície assim obtida será uma esfera. De modo análogo, um elipsóide é obtido pela rotação de uma elipse. Fixado um sistema de coordenadas ortogonais, as superfícies quádricas são superfícies dadas por equações do segundo grau

$$ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+gx+hy+kz+l=0. \qquad (1)$$

As quádricas também são chamadas de superfícies do segundo grau.

Por conveniência, vamos utilizar a equação (1) na forma

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+2Gx+2Hy+2Kz+L=0. \qquad (2)$$

Consideremos a equação incompleta

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + L = 0\,,$$

onde A, B, C, L são constantes diferentes de zero.

Se A, B, C são números reais de mesmo sinal e L possui sinal contrário, a superfície é chamada de *elipsóide*.

Se um dos coeficientes, A, B, C, é de sinal contrário ao sinal dos outros dois, a superfície é chamada de *hiperbolóide*.

8.2 Elipsóide

Pela definição, na equação $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + L = 0$ se A, B, C são números reais de mesmo sinal, e L de sinal contrário, a superfície é chamada de elipsóide. Podemos supor A, B, C positivos. Logo, L é negativo. Dividindo a equação por $-L$ obtemos

$$\frac{x^2}{\left(\frac{-L}{A}\right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{-L}{B}\right)} + \frac{z^2}{\left(\frac{-L}{C}\right)} = 1\,.$$

Como $\left(\frac{-L}{A}\right) > 0, \left(\frac{-L}{B}\right) > 0, \left(\frac{-L}{C}\right) > 0$, podemos fazer as seguintes substituições:

$$a^2 = \frac{-L}{A}, b^2 = \frac{-L}{B}, c^2 = \frac{-L}{C}\,.$$

Logo, temos $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Esta é a equação canônica do elipsóide.

Os coeficientes a, b, c são chamados de semi-eixos do elipsóide.

Um caso particular importante ocorre quando $a = b = c$. Nesse caso, o elipsóide assume a forma de uma esfera:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = a^2\,.$$

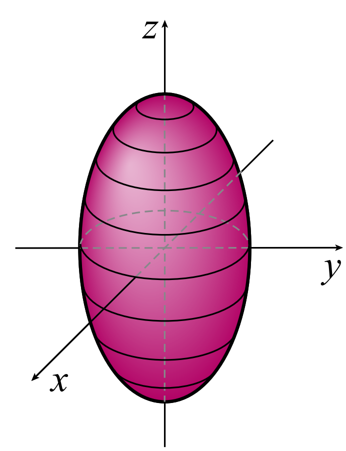


Figura 8.1 - Observe que a intersecção do elipsóide com um plano $z = z_0$, com $-c < z_0 < c$, é uma elipse.

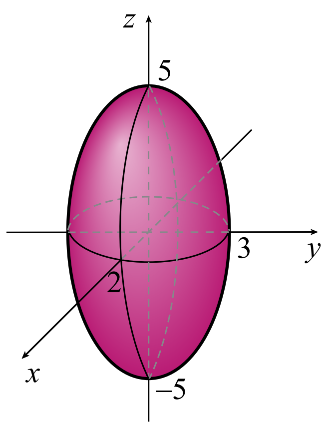


Figura 8.2

Exemplos:

1) Ilustração do elipsóide dado por $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}+\frac{z^2}{5^2}=1$. Observe que o eixo maior ocorre em z (Figura 8.2).
2) $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{2^2}+\frac{z^2}{2^2}=1$ é uma esfera de centro no ponto $P(0,0,0)$ e raio $r=2$.

8.3 Hiperbolóide

Pela definição, se na equação $Ax^2+By^2+Cz^2+L=0$ um dos coeficientes, A,B,C, é de sinal contrário ao sinal dos outros dois, a superfície é chamada de hiperbolóide. Podemos supor que A,B tenham o mesmo sinal. Assim, temos $Ax^2+By^2+Cz^2=-L$.

Há dois casos a considerar:

a) $-L$ tem o mesmo sinal que A,B
b) $-L$ tem sinal contrário ao sinal de A,B

No primeiro caso, dividindo a equação por $-L$ e chamando

$$a=\sqrt{\frac{-L}{A}},b=\sqrt{\frac{-L}{B}},c=\sqrt{\frac{L}{C}}$$

temos,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Essa é a equação canônica do hiperbolóide de uma folha.

O hiperbolóide de uma folha dado por $x^2+y^2-z^2=1$ está ilustrado na figura 8.3.

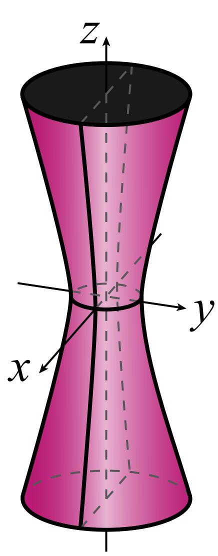


Figura 8.3 - Hiperbolóide de uma folha. Sua intersecção com o plano $z=z_0$ é a circunferência $x^2+y^2=1+z_0^2$. Sua intersecção com o plano $y=y_0<1$ é a hipérbole $x^2-z^2=1-y_0^2$.

No segundo caso, em que $-L$ tem sinal contrário ao sinal de A,B, dividindo por L e fazendo

$$a=\sqrt{\frac{L}{A}},b=\sqrt{\frac{L}{B}},c=\sqrt{\frac{-L}{C}},$$

obtemos $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Esta é a equação canônica do hiperbolóide de duas folhas.

Temos como exemplo a ilustração de hiperbolóide de duas folhas $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ (Figura 8.4).

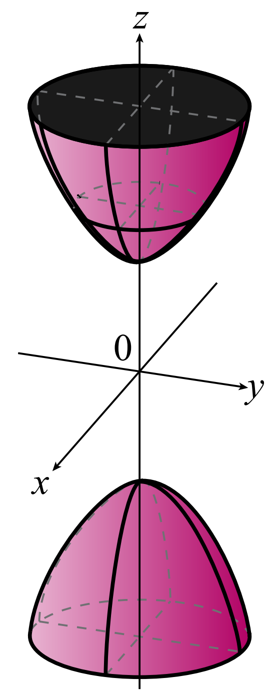


Figura 8.4 - Hiperbolóide de 2 folhas.

Observe que este hiperbolóide não possui pontos com $|z| < 1$. Para $|z_0| > 1$, a intersecção com o plano $z = z_0$ é a circunferência $x^2 + y^2 = z_0^2 - 1$. Para $x = x_0 \neq 1$, a intersecção é a hipérbole $y^2 - z^2 = 1 - x_0^2$.

Na dedução da equação do hiperbolóide de uma folha admitimos que A, B tinham o mesmo sinal. Mas poderíamos supor que A, C ou B, C tivessem o mesmo sinal. Assim obteríamos as seguintes equações:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1;$$
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1;$$
$$-\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1.$$

Do mesmo modo, na dedução das equações do hiperbolóide de duas folhas, admitimos A, B com mesmo sinal e sinal contrário de $-L$, mas poderíamos supor que quaisquer dois coeficientes tenham mesmo sinal e sinal contrário de $-L$. Assim, as equações dos hiperbolóides de duas folhas poderiam ser dadas por

$$-\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1;$$
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1;$$
$$-\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1.$$

8.4 Cone

Vamos examinar a superfície quádrica $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + L = 0$ em que $L = 0$ supondo, como antes, que os coeficientes A, B, C sejam não nulos.

Existem dois casos a serem considerados:

a) Os coeficientes A, B, C têm o mesmo sinal.

b) Os coeficientes A, B, C têm sinais diferentes.

No primeiro caso a equação se reduz a $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0$, cuja solução é apenas o ponto $x = y = z = 0$.

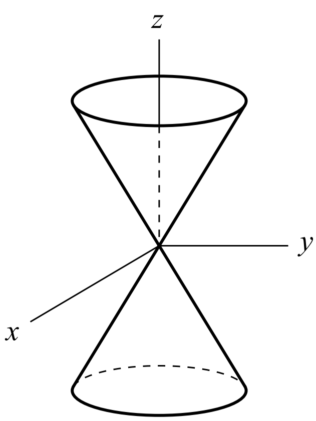


Figura 8.5 - Observe que a intersecção desse cone com o plano $z = z_0$ é a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z_0^2}{c^2}$.

No segundo caso, em que os sinais dos coeficientes A, B, C são diferentes, suponhamos que A, B são positivos e C é negativo. A equação $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0$ se reduz a

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{A}\right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{B}\right)} - \frac{z^2}{\left(-\frac{1}{C}\right)} = 0.$$

Chamando $a^2 = \frac{1}{A}$, $b^2 = \frac{1}{B}$, $c^2 = \frac{-1}{C}$ temos $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$.

Esta é a equação do cone (Figura 8.5).

Na dedução da equação do cone, admitimos que A, B eram positivos e C era negativo. Mas existem outras possibilidades para sinais diferentes. Assim, são também equações do cone as equações dadas por

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 0$$
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 0$$
$$-\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 0\ .$$

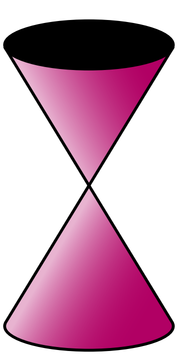


Figura 8.6 - Este cone é, em particular, um cone circular, pois para cada $z = z_0$ fixo temos a equação da circunferência $x^2 + y^2 = \frac{z_0^2}{4}$.

A superfície quádrica $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{2^2} - \frac{z^2}{4^2} = 0$ é um cone, conforme a figura 8.6.

8.5 Parabolóides

Consideremos ainda um caso particular da equação geral do segundo grau:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Kz + L = 0\,.$$

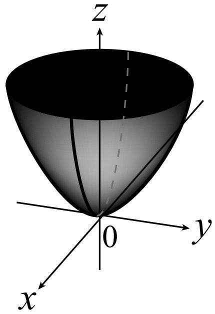
Vamos tomar a equação dada por $Ax^2 + By^2 + 2Kz = 0$ e suponhamos que os coeficientes A, B e K sejam não nulos. Para fixar as idéias, suponhamos que A e K tenham sinais diferentes. Podemos escrever a equação da seguinte forma:

$$2z = \frac{x^2}{\left(\frac{-K}{A}\right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{-K}{B}\right)}\,.$$

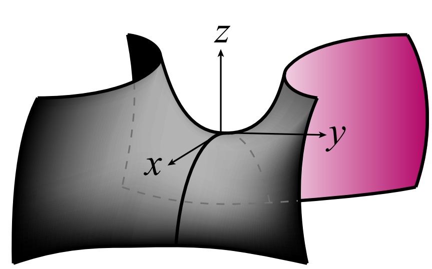
Como A e K tem sinais contrários, segue que $p = -\frac{K}{A} > 0$. O termo $-\frac{K}{B}$ pode ser negativo ou positivo. Logo, a equação fica $2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}$ ou $2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q}$, onde p e q são positivos. (Aqui $q = -\frac{K}{B}$ ou $q = \frac{K}{B}$.)

A superfície definida pela equação $2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}$ é chamada de parabolóide elíptico. Nessa quádrica, para z fixo, obtemos elipses e, para x ou y fixos, obtemos parábolas.

A superfície definida pela equação $2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q}$ é chamada de parabolóide hiperbólico ou sela. Nesse caso, para z fixo, obtemos hipérboles. Para x ou y fixos temos parábolas.



Parabolóide elípitco



Parabolóide hiperbólico

Figura 8.7

Também são equações do parabolóide elíptico:

$$z - z_0 = \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2};$$
$$x - x_0 = \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2};$$
$$y - y_0 = \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2}.$$

Do mesmo modo, as possíveis equações do parabolóide hiperbólico são:

$$z - z_0 = \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2};$$
$$z - z_0 = -\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2};$$
$$x - x_0 = \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2};$$
$$x - x_0 = -\frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2};$$
$$y - y_0 = \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2};$$
$$y - y_0 = -\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2}.$$

8.6 Cilindros

Consideremos o caso em que os coeficientes C, E, F, K são nulos. A equação (2) toma então a seguinte forma:

$$Ax^2 + By^2 + 2Dxy + 2Gx + 2Hy + L = 0\,.$$

A variável z não comparece na equação. Assim, z assume qualquer valor. A superfície toma então a forma de um cilindro ou superfície cilíndrica, isto é, a superfície é constituída por retas paralelas ao eixo OZ.

Como a equação acima é de segundo grau, a superfície chama-se cilindro do segundo grau.

Em geral, o cilindro de diretriz C é a superfície descrita por uma reta r que se move ao longo da curva C, perpendicularmente ao plano onde a curva se encontra. A reta r chama-se geratriz do cilindro.

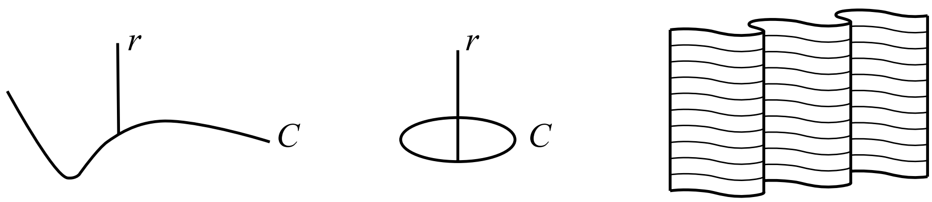


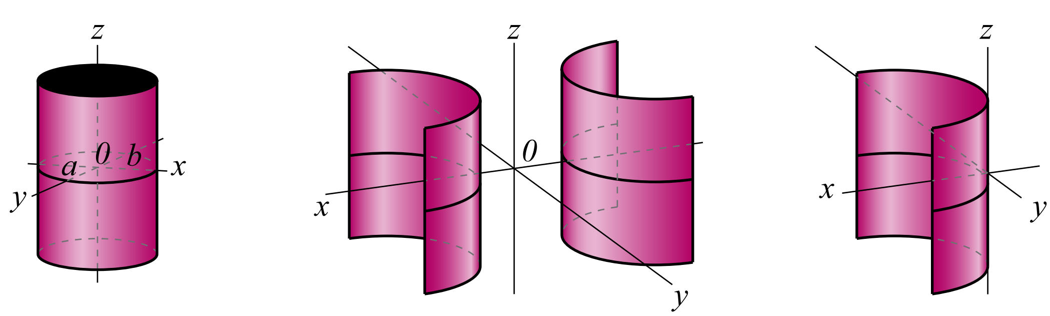
Figura 8.8

8.6.1 Cilindro Elíptico

Se a equação $Ax^2 + By^2 + 2Dxy + 2Gx + 2Hy + L = 0$ pode ser reescrita como $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, teremos um cilindro elíptico. Note que, no plano, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ define uma elipse, mas no espaço é um cilindro elíptico, pois z assume qualquer valor. Veja a figura 8.9 (I).
Na equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, se $a = b$, teremos o cilindro circular ou cilindro de revolução.

Se a equação $Ax^2 + By^2 + 2Dxy + 2Gx + 2Hy + L = 0$ pode ser reescrita como $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, ela gera um cilindro hiperbólico. Note que, no plano, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ é uma hipérbole, mas no espaço é um cilindro hiperbólico, pois z assume qualquer valor. Veja a figura 8.9 (II).

Se a equação $Ax^2 + By^2 + 2Dxy + 2Gx + 2Hy + L = 0$ pode ser reescrita como $y^2 = 2px$, teremos um cilindro parabólico. Note que, no plano, $y^2 = 2px$ é uma parábola, mas no espaço é um cilindro parabólico, pois z assume qualquer valor. Veja a figura 8.9 (III).



Cilindro Elíptico

Cilindro Hiperbólico

Cilindro Parabólico

Figura 8.9

Superfícies regradas são superfícies que podem ser construídas por meio de retas. As superfícies cilíndricas e os cones são exemplos de superfícies regradas. Ainda que não seja óbvio, o hiperbolóide de uma folha também é uma superfície regrada:

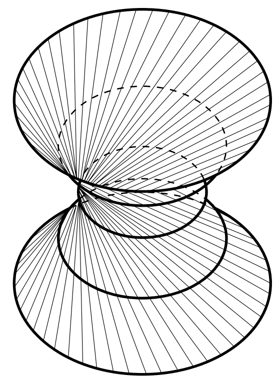


Figura 8.10

8.7 Mudança de Coordenadas e Classificação de Superfícies Quádricas

A equação geral do segundo grau nas variáveis x, y e z,

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_1x + a_2y + a_3z + a_0 = 0, \quad (1)$$

determina uma superfície chamada de quádrica. **Classificar uma superfície** dada pela equação acima pode ser trabalhoso.

O enfoque mais geral para tratar desse problema consiste em utilizar autovalores, autovetores e diagonalização de uma matriz simétrica associada ao polinômio do segundo grau dado ao lado. Esse enfoque mais geral para pode ser estudado em livros de álgebra linear.

Se a equação do segundo grau dada em (1) tem a forma

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dx + ey + fz + g = 0 \quad (2)$$

então, podemos utilizar mudanças de coordenadas para reescrever a equação (2) em uma forma mais simples de ser classificada.

O artifício é utilizar mudança de coordenadas para passar do sistema de coordenadas $0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ para outro sistema de coordenadas $0', \vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}$ e obter uma formulação mais simples da equação (2). Podemos efetuar isso de três maneiras diferentes:

1) Translação dos eixos;

2) Rotação dos eixos;

3) Rotação seguida de translação dos eixos.

8.7.1 Efetuando mudanças

1. Translação dos eixos

A translação de eixos consiste em mudar apenas a origem do sistema de coordenadas, passando do sistema $0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ para um sistema do tipo $0',\vec{i},\vec{j},\vec{k}$.

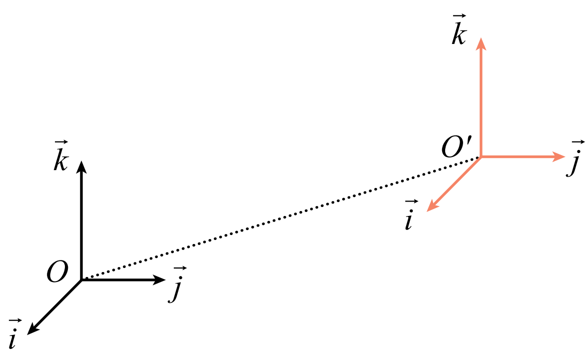


Figura 8.11

Sejam $P(x_1,x_2,x_3)$ um ponto no sistema $0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ e $O'(c_1,c_2,c_3)$ é a nova origem do sistema. Seja $P(y_1,y_2,y_3)$ no sistema $0',\vec{i},\vec{j},\vec{k}$. Como $\overrightarrow{O'P}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OO'}$ e

$$\overrightarrow{OP}=x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_3\vec{k}$$
$$\overrightarrow{O'P}=y_1\vec{i}+y_2\vec{j}+y_3\vec{k}$$
$$\overrightarrow{OO'}=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}$$

então, temos $y_1\vec{i}+y_2\vec{j}+y_3\vec{k}=(x_1-c_1)\vec{i}+(x_2-c_2)\vec{j}+(x_3-c_3)\vec{k}$. Isto é,

$$y_1=x_1-c_1$$
$$y_2=x_2-c_2$$
$$y_3=x_3-c_3.$$

Obtemos deste modo as novas coordenadas de P no sistema $0',\vec{i},\vec{j},\vec{k}$.

Exemplo 8.3: Determinar as coordenadas do ponto $P(1,2,3)$ no sistema $0',\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, sendo $O'(1,4,5)$ a nova origem.

Resolução: As coordenadas do ponto P são

$$y_1 = x_1 - c_1 = 1 - 1 = 0,$$

$$y_2 = x_2 - c_2 = 2 - 4 = -3 \text{ e}$$

$$y_3 = x_3 - c_3 = 3 - 5 = -2.$$

Logo, as coordenadas de $P(1,2,3)$ no novo sistema $0',\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ são $P(0,-3,-2)$.

2. Rotação dos eixos

A rotação dos eixos consiste em substituir $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ por outra base ortonormal, $\{\vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u_3}\}$. Assim, passamos do sistema $0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ para o sistema $0,\vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u_3}$.

Seja P é um ponto qualquer do espaço, o vetor $\overrightarrow{OP}$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores da base $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ e da base $\{\vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u_3}\}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k} \\ \overrightarrow{OP} &= y_1\vec{u_1} + y_2\vec{u_2} + y_3\vec{u_3}. \end{aligned} \tag{3}$$

Escrevendo $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ como combinação linear dos vetores $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ e $\vec{u_3}$, obtemos:

$$\begin{aligned} \vec{i} &= a_{11}\vec{u_1} + a_{21}\vec{u_2} + a_{31}\vec{u_3} \\ \vec{j} &= a_{12}\vec{u_1} + a_{22}\vec{u_2} + a_{32}\vec{u_3} \\ \vec{k} &= a_{13}\vec{u_1} + a_{23}\vec{u_2} + a_{33}\vec{u_3} \end{aligned} \tag{4}$$

Substituindo (4) em (3), obtemos

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)\vec{u_1} + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)\vec{u_2} + (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)\vec{u_3} = y_1\vec{u_1} + y_2\vec{u_2} + y_3\vec{u_3}.$$

Segue da igualdade que

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ y_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned} \tag{5}$$

Reescrevendo na forma matricial, temos

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \qquad (5')$$

Assim, obtemos as coordenadas de P no novo sistema $0, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}$.

Exemplo 8.4: Calcular as coordenadas do ponto $P(1,-1,2)$ no sistema $0, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}$ onde

$$\overrightarrow{u_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j}), \ \overrightarrow{u_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j}), \ \overrightarrow{u_3} = \vec{k}.$$

Resolução: Primeiro observe que $0, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}$ é um sistema ortonormal. Agora vamos escrever $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ como combinação linear dos vetores $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ e $\overrightarrow{u_3}$.

$$\vec{i} = a_{11}\overrightarrow{u_1} + a_{21}\overrightarrow{u_2} + a_{31}\overrightarrow{u_3}$$

$$\vec{i} = \left[\frac{a_{11}}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{a_{11}}{\sqrt{2}}\vec{j}\right] + \left[\frac{a_{21}}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{a_{21}}{\sqrt{2}}\vec{j}\right] + a_{31}\vec{k}$$

$$\vec{i} = \left[\frac{a_{11}}{\sqrt{2}} + \frac{a_{21}}{\sqrt{2}}\right]\vec{i} + \left[-\frac{a_{11}}{\sqrt{2}} + \frac{a_{21}}{\sqrt{2}}\right]\vec{j} + a_{31}\vec{k}$$

Comparando, obtemos o seguinte sistema:

$$\frac{a_{11}}{\sqrt{2}} + \frac{a_{21}}{\sqrt{2}} = 1$$

$$-\frac{a_{11}}{\sqrt{2}} + \frac{a_{21}}{\sqrt{2}} = 0$$

$$a_{31} = 0$$

Resolvendo o sistema obtemos

$$a_{11} = \frac{\sqrt{2}}{2}, a_{21} = \frac{\sqrt{2}}{2}, a_{31} = 0$$

Assim, temos que $\vec{i} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{u_1} + \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{u_2} + 0\ \overrightarrow{u_3}$.

Do mesmo modo,

$$\vec{j} = a_{12}\overrightarrow{u_1} + a_{22}\overrightarrow{u_2} + a_{32}\overrightarrow{u_3}$$

$$\vec{j} = \left[\frac{a_{12}}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{a_{12}}{\sqrt{2}}\vec{j}\right] + \left[\frac{a_{22}}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{a_{22}}{\sqrt{2}}\vec{j}\right] + a_{32}\vec{k}$$

$$\vec{j} = \left[\frac{a_{12}}{\sqrt{2}} + \frac{a_{22}}{\sqrt{2}}\right]\vec{i} + \left[-\frac{a_{12}}{\sqrt{2}} + \frac{a_{22}}{\sqrt{2}}\right]\vec{j} + a_{32}\vec{k}$$

Comparando, obtemos o seguinte sistema:

$$\frac{a_{12}}{\sqrt{2}} + \frac{a_{22}}{\sqrt{2}} = 0$$

$$-\frac{a_{12}}{\sqrt{2}} + \frac{a_{22}}{\sqrt{2}} = 1$$

$$a_{32} = 0$$

Resolvendo o sistema obtemos

$$a_{12} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, a_{22} = \frac{\sqrt{2}}{2}, a_{32} = 0$$

Assim, temos que $\vec{j} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{u_1} + \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{u_2} + 0\ \overrightarrow{u_3}$.

É fácil ver que $\vec{k} = 0\ \overrightarrow{u_1} + 0\ \overrightarrow{u_2} + 1\overrightarrow{u_3}$.

As equações (5) ou (5`) nos dão,

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ ou}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Após multiplicação, segue que as coordenadas do ponto $P(1,-1,2)$ no sistema $0, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}$ são dadas por

$$y_1 = \sqrt{2},$$

$$y_2 = 0,$$

$$y_3 = 2.$$

8.7.2 Classificação de superfícies quádricas

Agora vamos empregar a translação e a rotação de eixos que apresentamos anteriormente para classificar superfícies dadas por equações forma $ax^2 + by^2 + cz^2 + dx + ey + fz + g = 0$.

Consideremos as equações do segundo grau do tipo.

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dx + ey + fz + g = 0. \tag{1}$$

Primeira mudança*:* se $a \neq 0$, então existe uma translação dada por $x = x_1 - \dfrac{d}{2a}$, $y = y_1$ e $z = z_1$, que anula o termo d.

Vamos verificar essa afirmação. Considere o ponto $O'\left(-\dfrac{d}{2a}, 0, 0\right)$ e sejam y_1, y_2 e y_3 as coordenadas de um ponto $P(x_1, x_2, x_3)$ no novo sistema $O', \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Assim,

$$x = x_1 - \frac{d}{2a},\ y = y_1 \text{ e } z = z_1.$$

Portanto a equação (1) se escreve no novo sistema de coordenadas como

$$a\left(x_1 - \frac{d}{2a}\right)^2 + by_1^2 + cz_1^2 + d\left(x_1 - \frac{d}{2a}\right) + ey_1 + fz_1 + g = 0$$
$$a\left(x_1^2 - \frac{2d}{2a}x_1 + \frac{d^2}{4a^2}\right) + by_1^2 + cz_1^2 + d\left(x_1 - \frac{d}{2a}\right) + ey_1 + fz_1 + g = 0$$
$$ax_1^2 + by_1^2 + cz_1^2 + ey_1 + fz_1 + \left(g - \frac{d^2}{4a}\right) = 0.$$

Note que o mesmo pode ser feito quando $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$. Nesse caso $O'\left(-\dfrac{d}{2a}, -\dfrac{e}{2b}, -\dfrac{f}{2c}\right)$ é o novo centro e a translação é dada por:

$$x = x_1 - \frac{d}{2a}$$
$$y = y_1 - \frac{e}{2b}$$
$$z = z_1 - \frac{f}{2c}.$$

Essa mudança resultará em

$$ax_1^{\,2} + by_1^{\,2} + cz_1^{\,2} = \frac{d^2}{4a} + \frac{e^2}{4b} + \frac{f^2}{4c} - g.$$

Exemplo 8.5: Achar a translação dos eixos que elimina os termos do primeiro grau da equação

$$x_1^2 - 2x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 + 2x_1 + x_2 - x_3 + 1 = 0.$$

Resolução: Como $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$, pelo visto acima, o novo sistema de coordenadas é $O', \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, onde $O'\left(-1, \frac{1}{4}, 1\right)$. As novas coordenadas são dadas pelas equações

$$x_1 = y_1 - 1,$$
$$x_2 = y_2 + \frac{1}{4}$$
$$\text{e} \quad x_3 = y_3 + 1.$$

Logo, a equação se escreve no novo sistema de coordenadas como

$$(y_1 - 1)^2 - 2\left(y_2 + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}(y_3 + 1)^2 + 2(y_1 - 1) + y_2 + \frac{1}{4} - y_3 - 1 + 1 = 0.$$

Ou seja, $y_1^2 - 2y_2^2 + \frac{1}{2}y_3^2 - \frac{3}{8} = 0$. Reescrevendo, temos

$$\frac{y_1^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{y_2^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} + \frac{y_3^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1,$$

que é a equação de um hiperbolóide de uma folha.

Segunda mudança: se a equação (1) possui apenas um termo do segundo grau não nulo, então existe um novo sistema de coordenadas em relação ao qual a equação se escreve com apenas um termo do segundo grau e no máximo um termo do primeiro grau não nulo.

Para ilustrar essa técnica, suponha que ax^2 é o único termo do segundo grau não nulo da equação. Em virtude da primeira mudança, podemos supor que a equação não possui termo do primeiro grau em x. Portanto, nossa equação é do tipo

$$ax^2 + ey + fz + g = 0. \qquad (1')$$

Se $e, f \neq 0$, podemos ainda supor que $e^2 + f^2 = 1$, pois caso contrário, dividimos a equação por $e^2 + f^2$. Considere os vetores

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u_1} &= \vec{i} \\
\overrightarrow{u_2} &= e\vec{j} + f\vec{k} \\
\overrightarrow{u_3} &= -f\vec{j} + e\vec{k}.
\end{aligned}$$

É fácil verificar que $\left\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\right\}$ é uma base ortonormal.

Sejam (x, y, z) e (x_1, y_1, z_1) as coordenadas de um ponto P nos sistemas $0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ e $0, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}$, respectivamente. Assim,

$$\begin{aligned}
& x_1\overrightarrow{u_1} + y_1\overrightarrow{u_2} + z_1\overrightarrow{u_3} = x_1\vec{i} + y_1\left[e\vec{j} + f\vec{k}\right] + z_1\left[-f\vec{j} + e\vec{k}\right] \\
& = x_1\vec{i} + \left[ey_1 - fz_1\right]\vec{j} + \left[fy_1 + ez_1\right]\vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}
\end{aligned}$$

Comparando, segue que

$$(*) \begin{cases} x = x_1 \\ y = ey_1 - fz_1 \\ z = fy_1 + ez_1. \end{cases}$$

Substituindo na equação (1′) temos:

$$ax_1^2 + y_1 + g = 0.$$

Exemplo 8.6: identificar a superfície quádrica cuja equação é

$$\frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{9}{\sqrt{2}} = 0.$$

Resolução: Como a equação tem apenas o termo de segundo grau x^2 e não em termo de primeiro grau associado a x, podemos aplicar a segunda mudança. Note que $e = f = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $e^2 + f^2 = 1$. Assim, podemos usar a rotação (*)

$$\begin{cases} x_1 = z_1 \\ y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}z_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}z_3 \\ z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}z_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}z_3 \end{cases}$$

e obtemos

$$\frac{1}{\sqrt{2}}x_1^2+\frac{1}{\sqrt{2}}y_1-\frac{1}{\sqrt{2}}z_1+\frac{9}{\sqrt{2}}=0$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}z_1^2+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}z_2-\frac{1}{\sqrt{2}}z_3\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}z_2+\frac{1}{\sqrt{2}}z_3\right)+\frac{9}{\sqrt{2}}=0$$
$$z_1^2-\sqrt{2}z_3+9=0.$$

Reescrevendo, obtemos $z_3=\frac{\sqrt{2}}{2}z_1^2+\frac{9\sqrt{2}}{2}$ que é um cilindro parabólico.

Exemplo 8.7: Identificar a superfície cuja equação é

$$x^2+4x+y-z+5=0.$$

Resolução: Como a equação tem apenas um termo de segundo grau, x^2, com um termo de primeiro grau associado, $4x$, precisamos fazer a translação de eixos para eliminar o termo de primeiro grau. A translação é:

$$x=x_1-2,\ y=y_1 \ \text{ e } \ z=z_1.$$

Substituindo na equação obtemos

$$(x_1-2)^2+4(x_1-2)+y_1-z_1+5=0$$
$$x_1^2+y_1-z_1+9=0.$$

Assim, obtemos $x_1^2+y_1-z_1+9=0$.

Agora temos que x_1^2 é o único termo do segundo grau não nulo. Além disso, $e^2+f^2=\sqrt{2}\neq 1$ vamos dividir a equação por $\sqrt{2}$, assim,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}x_1^2+\frac{1}{\sqrt{2}}y_1-\frac{1}{\sqrt{2}}z_1+\frac{9}{\sqrt{2}}=0.$$

Agora podemos aplicar a segunda mudança de eixos:

Temos que $a=\frac{1}{\sqrt{2}},e=\frac{1}{\sqrt{2}},f=-\frac{1}{\sqrt{2}},g=\frac{9}{\sqrt{2}}$

Usando a rotação (*)

$$\begin{cases} x_1=z_1 \\ y_1=\frac{1}{\sqrt{2}}z_2-\frac{1}{\sqrt{2}}z_3 \\ z_1=\frac{1}{\sqrt{2}}z_2+\frac{1}{\sqrt{2}}z_3 \end{cases}$$

recaímos no exemplo anterior, obtendo $z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} z_1^2 + \frac{9\sqrt{2}}{2}$ que é um cilindro parabólico.

Exemplo 8.8.

a) Usando translações e rotações dos eixos, identifique a superfície $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x - 4y - 12z + 21 = 1$.

b) Usando translações e rotações dos eixos, identifique a superfície $x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4y - 2z + 1 = 0$. Como $a = 1, b = 2, c = 2$ são não nulos tomemos $O'\left(-\frac{d}{2a}, -\frac{e}{2b}, -\frac{f}{2c}\right) = O'\left(0, 1, \frac{1}{2}\right)$.

Resolução:

a) Como $a = 2, b = 2, c = 2$ são não nulos tomemos

$$O'\left(-\frac{d}{2a}, -\frac{e}{2b}, -\frac{f}{2c}\right) = O'(1,1,3).$$

Sejam

$$x = u + 1$$
$$y = v + 1$$
$$z = w + 3$$

substituindo, obtemos $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ que é uma esfera.

b) Sejam, $x = u, y = v + 1, z = w + \frac{1}{2}$, substituindo, obtemos

$$u^2 + 2v^2 + 2w^2 = \frac{3}{2},$$

que é um elipsóide.

Exercícios:

8.1) Desenhe os parabolóides $2z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8}$ e $2z = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{8}$.

8.2) Desenhe o cilindro $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

8.3) Classifique as seguintes superfícies quádricas:

a) $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} + \frac{z^2}{4^2} = 1$. **Resposta:** Elipsóide.

b) $\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{2^2}+\dfrac{z^2}{2^2}=1$. **Resposta:** Esfera de centro na origem e raio 2.

c) $2x^2+2y^2-z^2=1$. **Resposta**: Hiperbolóide de uma folha.

d) $\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$. **Resposta:** Cilindro elíptico.

e) $y^2=4x$. **Resposta:** Cilindro parabólico.

Resumo

(Apenas das equações deduzidas)

Superfície	$Ax^2 - By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz$ $- 2Gx + 2Hy + 2Kz + L = 0$	Condições
Elipsóide	$Ax^2+By^2+Cz^2+L=0$	A,B,C de mesmo sinal e L com sinal contrário
Hiperbolóide	$Ax^2+By^2+Cz^2+L=0$	Um dos coeficientes A,B ou C com sinal contrário dos outros dois.
	Hiperbolóide de uma folha	A e B e $-L$ de mesmo sinal
	Hiperbolóide de duas folhas	A e B com mesmo sinal e $-L$ de sinal contrário
Cone	$Ax^2+By^2+Cz^2=0$	A,B e $C\neq 0$
	O cone se reduz a um ponto	A,B e C com sinais iguais
	Cone	A,B e C com sinais diferentes
Parabolóide	$Ax^2+By^2+2Kz=0$	A,B e $K\neq 0$
	Parabolóide elíptico	A e K com sinais diferentes e $-\dfrac{K}{B}>0$
	Parabolóide hiperbólico ou Sela	A e K com sinais diferentes e $-\dfrac{K}{B}<0$
Cilindro	$Ax^2+By^2+2Dxy+2Gx+2Hy+L=0$	$C=E=F=K=0$

Neste capítulo estudamos as superfícies quádricas. Vimos que, dependendo dos coeficientes da equação

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Kz + L = 0\,,$$

a superfície toma uma forma ou outra. Na tabela acima fizemos um resumo, mas você não deve ficar preso a ele. Você deverá ser capaz de manipular algebricamente uma equação do tipo acima e colocá-la na forma padrão de uma superfície quádrica. Para isso, você deverá ser capaz de completar quadrados e de reconhecer uma superfície quádrica pela sua equação padrão. Reconhecer o gráfico de uma superfície quádrica também é importante.

Bibliografia Comentada

[1] J. L. Boldrini et al.. **Álgebra Linear**. Editora Harbra, São Paulo, 3ª Edição. 1986.

Este livro contém as demonstrações de todos os resultados. O livro inicia tratando das matrizes e sistemas lineares. A parte introdutória de vetores não é abordada. É mais indicado para o estudo da álgebra linear.

[2] Alpha Chiang. **Matemática para Economistas**. Editora da Universidade de São Paulo/Brasil, 1982.

[3] N. M. dos Santos. **Vetores e Matrizes**. LTC. Rio de Janeiro/Brasil, 1976.

[4] David Poole. **Álgebra Linear**, Pioneira Thompson Learning, São Paulo, 2004.

Os livros [3] e [4] contém grande parte do material abordado aqui. No livro [4] você pode encontrar novos exercícios, ver outras demonstrações e aplicações.

Na internet você pode encontrar os sites *http://www.dm.ufscar.br/disciplinas/grad/ga/ga2004.html* e *http://www.mat.ufmg.br/gaal/* que tratam de Geometria Analítica. O primeiro site é para realizar atividades por meio do computador, e o segundo possui diversas atividades de Geometria Analítica.

http://www.mat.ufmg.br/~regi/livros.html possui um livro que pode ser copiado ou lido online.

Para ilusão de ótica

visite http://www.optigone.com

Para aplicações das cônicas visite

Revista do professor de matemática, 36

http://www.sato.prof.ufu.br/Conicas