

# КЛАССИЧЕСКАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Пшеничный Никита\*

Весна 2025 г.

## Аннотация

В основу этих записок легли лекции О. И. Мохова и семинары А. А. Гайфуллина на мехмате МГУ, а также (в меньшей степени) курс А. В. Пенского в НМУ.

При написании файла я во многом ориентировался на [лекции И. А. Дынникова по дифференциальной геометрии](#) и на начальные главы книги [\[Новиков — Тайманов\]](#) (в особенности на главу 3). Некоторые из разобранных задач взяты из классического «Сборника задач по дифференциальной геометрии» А. С. Мищенко, Ю. П. Соловьёва, А. Т. Фоменко (далее именуемого просто «задачником»).

В конце каждого раздела приведены пояснения к появляющимся в тексте эпиграфам. Конечно, эти эпиграфы носят в основном юмористический (или ностальгический...) характер, но у каждого из них есть содержательный математический контекст.

## Список литературы

- [Новиков — Тайманов] С. П. Новиков, И. А. Тайманов. *Современные геометрические структуры и поля*. МЦНМО, 2014.
- [Шарп] Ричард У. Шарп. *Дифференциальная геометрия. Обобщение Картана Эрлангенской программы Клейна*. МЦНМО, 2019.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Предварительные сведения и напоминания</b>	<b>3</b>
1.1	Математический анализ	3
1.2	Аналитическая геометрия и линейная алгебра	4
1.3	Дифференциальные уравнения	5
1.4	Про функции в геометрии	7
<b>2</b>	<b>Теория кривых</b>	<b>8</b>
2.1	Базовые определения	8
2.2	Способы задания кривой	9
2.3	Касательная в точке регулярной кривой	10
2.4	Натуральный параметр и кривизна	11
2.5	Соприкасающаяся окружность	13
2.6	Кривые на плоскости и в пространстве	16
2.7	Эволюта и эвольвента плоской кривой	24
2.8	Дополнительные задачи	25
2.9	Про механические часы	26

---

\*Последняя компиляция: 5 мая 2025 г. Актуальную версию этого файла можно найти на [моём GitHub](#).

<b>3</b>	<b>Двумерные поверхности в трёхмерном пространстве</b>	<b>29</b>
3.1	Криволинейные системы координат в $\mathbb{R}^n$	29
3.2	Риманова метрика в криволинейных координатах	33
3.3	Определение поверхности. Локальные координаты	34
3.4	Поверхности как двумерные многообразия	36
3.5	Риманова метрика на поверхностях	39
3.6	Кривизна поверхности	45
3.7	Главные кривизны и нормальные сечения	46
3.8	Минимальные поверхности	51
<b>4</b>	<b>Основные уравнения в теории поверхностей</b>	<b>54</b>
4.1	Деривационные уравнения. Тождества Кристоффеля	54
4.2	Совместность деривационных уравнений и теорема Бонне	58
4.3	Уравнения Гаусса — Кодацци	60
4.4	Векторные поля, скобка Ли	62
4.5	Поверхности постоянной отрицательной кривизны	63
<b>5</b>	<b>Внутренняя геометрия поверхностей</b>	<b>68</b>
5.1	Ковариантное дифференцирование, геодезические линии	68
5.2	Геодезические как экстремали функционала действия	71

## Обозначения

$\mathbb{R}$  — поле (топологическое пространство) вещественных чисел;  
 $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$  — вектор (точка) из  $\mathbb{R}^n$ ;  
 $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  — стандартный базис в  $\mathbb{R}^n$ ;  
 $\text{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  — линейная оболочка векторов  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ ;  
 $S_{\text{ор}}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  — ориентированная площадь параллелограмма, натянутого на векторы  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ ,  $\text{Vol}_{\text{ор}}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  — ориентированный объём  $n$ -мерного параллелепипеда, натянутого на векторы  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ ;  
 $I$  — связное подмножество  $\mathbb{R}$ ;  
 $\text{Int } U$  — внутренность подмножества  $U \subset \mathbb{R}^n$ ;  
 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  — евклидово скалярное произведение векторов  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ;  
 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{G}}$  — скалярное произведение векторов  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ , задаваемое положительно определённой симметричной матрицей  $\mathcal{G}$  (то есть  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{G}} = \mathbf{x}^T \mathcal{G} \mathbf{y}$ );  
 $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$  — векторное произведение векторов  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  — расстояние между точками  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  из  $\mathbb{R}^n$ ;  
 $\mathbf{r}(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$  — радиус-вектор точки  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ;  
 $\dot{\mathbf{r}}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t), \dots$  — векторы скорости, ускорения и т. д. точки  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .

**Нотация Эйнштейна.** По дважды повторяющимся индексам, один из которых верхний, а другой нижний, подразумевается суммирование в пределах, устанавливаемых из контекста, а сам такой индекс называется *слепым*. Верхний индекс переменной, появляющейся в знаменателе, считается для выражения нижним, и наоборот.

## 1. Предварительные сведения и напоминания

Сначала вы подумаете, что я сумасшедший, а потом вам понравится, и вы сами будете делать так же.

А. В. Пенской

## Математический анализ

Отображение  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  называется *дифференцируемым в точке  $\mathbf{x}_0$* , если существует линейное отображение  $\mathcal{L}_{\mathbf{x}_0}$ , для которого выполнено

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathcal{L}_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|) \text{ при } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0.$$

При этом отображение  $\mathbf{f}$  не обязано быть определено всюду. Нам будет достаточно, чтобы в область определения отображения  $\mathbf{f}$  входило замыкание некоторой выпуклой открытой области, содержащее точку  $\mathbf{x}_0$ . Однозначно определённое линейное отображение  $\mathcal{L}_{\mathbf{x}_0} =: d\mathbf{f}|_{\mathbf{x}_0}$  называют *дифференциалом* отображения  $\mathbf{f}$  в точке  $\mathbf{x}$ .

Матрица  $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)$  линейного отображения  $d\mathbf{f}|_{\mathbf{x}_0}$  называется *матрицей Якоби* отображения  $\mathbf{f}$  в точке  $\mathbf{x}_0$  и состоит из *частных производных*:

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f^1}{\partial x^1} \right|_{\mathbf{x}_0} & \cdots & \left. \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \right|_{\mathbf{x}_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f^m}{\partial x^1} \right|_{\mathbf{x}_0} & \cdots & \left. \frac{\partial f^m}{\partial x^n} \right|_{\mathbf{x}_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{grad } f^1|_{\mathbf{x}_0} \\ \vdots \\ \text{grad } f^m|_{\mathbf{x}_0} \end{pmatrix}.$$

В случае, когда эта матрица квадратная, её определитель называют *якобиантом*.

Дифференцируемое отображение  $\mathbf{f}$  определяет новое отображение  $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Если последнее также дифференцируемо, то  $\mathbf{f}$  называется *дважды дифференцируемым*, и далее индуктивно: если  $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x}$  дифференцируемо  $k$  раз, то  $\mathbf{f}$  дифференцируемо  $k + 1$  раз. Если отображение  $\mathbf{f}$  дифференцируемо  $k$  раз и при  $k$ -кратном дифференцировании получается непрерывное отображение, то говорят, что  $\mathbf{f}$   $k$  раз непрерывно дифференцируемо или является *отображением класса  $C^k$* . В дальнейшем под *гладким отображением* мы будем подразумевать отображение класса  $C^k$  для достаточно большого  $k$ .

**Теорема 1.1** (О производной сложной функции). Если отображения  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  и  $\mathbf{g} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  дифференцируемы, то дифференцируема и композиция  $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ , причём

$$d(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})|_{\mathbf{x}_0} = d\mathbf{g}|_{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)} \circ d\mathbf{f}|_{\mathbf{x}_0}.$$

**Теорема 1.2** (Об обратном отображении). Гладкое отображение  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , матрица Якоби которого невырождена в точке  $\mathbf{x}_0$ , локально обратимо в некоторой окрестности точки  $\mathbf{x}_0$ , причём обратное отображение также гладкое.

**Теорема 1.3** (О неявном отображении). Пусть  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $m \leq n$ , — гладкое отображение, матрица Якоби которого в точке  $\mathbf{x}_0$  имеет ранг  $m$ . Тогда множество решений уравнения  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  в окрестности точки  $\mathbf{x}_0$  выглядит как график гладкого отображения, выражающего некоторые  $m$  координат через оставшиеся  $n - m$ , причём эти  $m$  координат можно выбрать те, которым соответствуют линейно независимые столбцы в матрице Якоби.

## Аналитическая геометрия и линейная алгебра

Пусть в  $\mathbb{R}^n$  есть некоторая поверхность, задаваемая уравнением  $F(x^1, \dots, x^n) = 0$ , а по ней движется точка, радиус-вектор которой есть  $\mathbf{x} = \mathbf{r}(t)$ . Тогда можем продифференцировать тождество  $F(r^1(t), \dots, r^n(t)) = 0$  в каждой точке, получив по теореме о сложной функции

$$\frac{\partial F}{\partial r^1} \cdot \frac{dr^1}{dt} + \dots + \frac{\partial F}{\partial r^n} \cdot \frac{dr^n}{dt} = 0$$

или, что то же,  $\langle \text{grad } F, \dot{\mathbf{r}} \rangle = 0$ .

Из правила Лейбница сразу следует формула дифференцирования скалярного произведения:

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t) \rangle = \langle \dot{\mathbf{a}}(t), \mathbf{b}(t) \rangle + \langle \mathbf{a}(t), \dot{\mathbf{b}}(t) \rangle.$$

Важный частный случай: если  $\mathbf{a}(t) \perp \mathbf{b}(t)$  для всех значений параметра  $t$ , то  $\langle \mathbf{a}(t), \dot{\mathbf{b}}(t) \rangle = -\langle \dot{\mathbf{a}}(t), \mathbf{b}(t) \rangle$ . Аналогичная формула верна и для векторного произведения:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{a}(t) \times \mathbf{b}(t)) = (\dot{\mathbf{a}}(t) \times \mathbf{b}(t)) + (\mathbf{a}(t) \times \dot{\mathbf{b}}(t)).$$

Пусть  $\mathbf{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Тогда  $|\mathbf{r}| = \text{const}$  тогда и только тогда, когда  $\langle \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}} \rangle = 0$ . Доказательство простое — надо продифференцировать тождество  $\langle \mathbf{r}(t), \mathbf{r}(t) \rangle = \text{const}$ . Можно доказать и по-другому — вектор постоянной длины  $|\mathbf{r}| = \text{const}$  лежит на сфере, уравнение которой  $F(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2 = \text{const}$ . При этом

$$0 = \langle \text{grad } F, \dot{\mathbf{r}} \rangle = \langle 2\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}} \rangle = 2\langle \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}} \rangle.$$

Проекция вектора  $\mathbf{u}$  на вектор  $\mathbf{v}$  вычисляется по формуле

$$\text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \cdot \mathbf{v}.$$

Объём сведений из линейной алгебры, которые необходимы в курсе дифференциальной геометрии (и в других дисциплинах), начинает становиться слишком большим для маленького раздела напоминаний в этом файле, поэтому я решил вынести его в отдельный проект, с которым можно ознакомиться [по ссылке](#).

## Дифференциальные уравнения

**Теорема 1.4** (О существовании и единственности). Решение дифференциального уравнения  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  с начальным условием  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  из области гладкости правой части существует и единственно (в том смысле, что всякие два решения с общим начальным условием совпадают в некоторой окрестности точки  $t_0$ ).

Помимо этой классической теоремы, нам понадобится похожее утверждение для систем дифференциальных уравнений с двумя параметрами:

$$(1.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}, u^1, u^2), \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2} = \mathbf{f}_2(\mathbf{x}, u^1, u^2), \end{cases}$$

где  $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$  — неизвестная функция от  $u^1, u^2$  со значениями в  $\mathbb{R}^n$ , а  $\mathbf{f}_i = (f_i^1, \dots, f_i^n)$ ,  $i = 1, 2$ , — известные гладкие функции, определённые в некоторой открытой области  $\Omega$  фазового пространства  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{n+2}$ .

**Определение 1.5.** Система (1.1) *совместна*, если для любой тройки  $(\mathbf{x}_0, u_0^1, u_0^2) \in \Omega$  она имеет гладкое решение  $\mathbf{x}(u^1, u^2)$  с начальным условием  $\mathbf{x}(u_0^1, u_0^2) = \mathbf{x}_0$ , определённое в некоторой окрестности точки  $(u_0^1, u_0^2)$ .

**Теорема 1.6** (Дарбу). Система (1.1) совместна тогда и только тогда, когда функции  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$  удовлетворяет следующему условию всюду в  $\Omega$ :

$$(1.2) \quad \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x^i} f_2^i + \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial u^2} = \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial x^j} f_1^j + \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial u^1}.$$

**Доказательство.**  $\Rightarrow$ . Пусть  $\mathbf{x}(u^1, u^2)$  — гладкое решение системы с начальным условием  $(u_0^1, u_0^2, \mathbf{x})$ . Тогда по теореме о дифференцировании сложной функции имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^1 \partial u^2} &= \frac{\partial \mathbf{f}_1(\mathbf{x}(u^1, u^2), u^1, u^2)}{\partial u^2} = \frac{\partial \mathbf{f}_1(\mathbf{x}(u^1, u^2), u^1, u^2)}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial u^2} + \\ &+ \frac{\partial \mathbf{f}_1(\mathbf{x}(u^1, u^2), u^1, u^2)}{\partial u^2} = \left( \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x^i} f_2^i + \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial u^2} \right) (\mathbf{x}(u^1, u^2), u^1, u^2). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^1 \partial u^2} = \left( \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x^i} f_2^i + \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial u^2} \right) (\mathbf{x}(u^1, u^2), u^1, u^2).$$

Аналогично получаем

$$\left( \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x^i} f_2^i + \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial u^2} \right) (\mathbf{x}(u^1, u^2), u^1, u^2) = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^1 \partial u^2} = \left( \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial x^j} f_1^j + \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial u^1} \right) (\mathbf{x}(u^1, u^2), u^1, u^2).$$

$\Leftarrow$ . Можем рассмотреть первое уравнение данной системы как обыкновенное дифференциальное уравнение по переменной  $u^1$  с параметром  $u^2$ . Из теоремы о существовании и единственности следует, что при каждом значении  $u^2 = u_0^2$  существует функция  $\mathbf{y}(u^1)$ , определённая в окрестности точки  $u_0^1$  такая, что

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial u^1} = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}, u^1, u_0^2), \quad \mathbf{y}(u_0^1) = \mathbf{x}_0.$$

Теперь для каждого  $u^1$ , для которого определено  $\mathbf{y}(u^1)$ , мы можем решить второе уравнение с начальным условием  $\mathbf{x}(u^1, u_0^2) = \mathbf{y}(u^1)$ . По той же теореме о существовании и единственности, полученное решение  $\mathbf{x}(u^1, u^2)$  будет определено для всех  $u^2$  из достаточно малой, не зависящей от  $u^1$ , окрестности точки  $u_0^2$ , и будет гладкой функцией от  $u^1, u^2$ .

Итак, в малой окрестности точки  $(u_0^1, u_0^2)$  мы построили гладкую функцию  $\mathbf{x}(u^1, u^2)$ , удовлетворяющую второму уравнению всюду, а первому — во всех точках вида  $(u^1, u_0^2)$ , а также удовлетворяющую начальному условию  $\mathbf{x}(u_0^1, u_0^2) = \mathbf{x}_0$ . Осталось показать, что  $\mathbf{x}(u^1, u^2)$  и первому уравнению удовлетворяет всюду, а не только вдоль прямой  $u^2 = u_0^2$ .

Как и выше, получаем

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^1 \partial u^2} = \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial x^j}(\mathbf{x}(u^1, u^2), u^1, u^2) \frac{\partial x^j}{\partial u^1} + \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial u^1}(\mathbf{x}(u^1, u^2), u^1, u^2).$$

(Только теперь мы ничего не знаем про  $\partial x^j / \partial u^1$ .) Используем условие (1.2):

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^1 \partial u^2} = \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial x^j}(\mathbf{x}(u^1, u^2), u^1, u^2) \frac{\partial x^j}{\partial u^1} + \left( \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x^i} f_2^i + \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial u^2} - \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial x^j} f_1^j \right) (\mathbf{x}(u^1, u^2), u^1, u^2).$$

Далее можем сгруппировать подчёркнутые суммы в одну:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial x^j}(\mathbf{x}(u^1, u^2), u^1, u^2) \left( \frac{\partial x^j}{\partial u^1} - f_1^j(\mathbf{x}(u^1, u^2), u^1, u^2) \right) = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^1 \partial u^2} - \\ & - \left( \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x^i} f_2^i + \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial u^2} \right) (\mathbf{x}(u^1, u^2), u^1, u^2) = \left\{ \mathbf{f}_2(\mathbf{x}(u^1, u^2), u^1, u^2) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2} \right\} = \\ & = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^1 \partial u^2} - \underbrace{\left( \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial u^2} + \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial u^2} \right) (\mathbf{x}(u^1, u^2), u^1, u^2)}_{\frac{\partial \mathbf{f}_1(\mathbf{x}(u^1, u^2), u^1, u^2)}{\partial u^2}} = \frac{\partial}{\partial u^2} \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} - \mathbf{f}_1(\mathbf{x}(u^1, u^2), u^1, u^2) \right). \end{aligned}$$

В итоге мы получаем:

$$\frac{\partial}{\partial u^2} \underbrace{\left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} - \mathbf{f}_1(\mathbf{x}(u^1, u^2), u^1, u^2) \right)}_{:= \mathbf{g}(u^1, u^2)} = \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial x^j}(\mathbf{x}(u^1, u^2), u^1, u^2) \underbrace{\left( \frac{\partial x^j}{\partial u^1} - f_1^j(\mathbf{x}(u^1, u^2), u^1, u^2) \right)}_{g^j(u^1, u^2)},$$

это дифференциальное уравнение на функцию  $\mathbf{g}$ . Его можно рассмотреть как обыкновенное дифференциальное уравнение по  $u^2$  с параметром  $u^1$ . При этом для всех  $u^1$  выполнено начальное условие  $\mathbf{g}(u^1, u_0^2) = \mathbf{0}$ , откуда  $\mathbf{g}(u^1, u^2) \equiv \mathbf{0}$ . Это и означает, что  $\mathbf{x}(u^1, u^2)$  всюду удовлетворяет первому уравнению системы. ■

Отметим, что уравнение (1.2) не нужно запоминать. Оно является просто записью, очевидно, необходимого условия

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1 \partial u^2} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2 \partial u^1}.$$

Нетривиальное утверждение теоремы заключается в том, что это условие оказывается не только необходимым, но и достаточным.

**Пример 1.7.** Если правые части системы (1.1) не зависят от  $\mathbf{x}$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} = \mathbf{f}_1(u^1, u^2), \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2} = \mathbf{f}_2(u^1, u^2), \end{cases}$$

то условие совместности для них выглядит следующим образом:

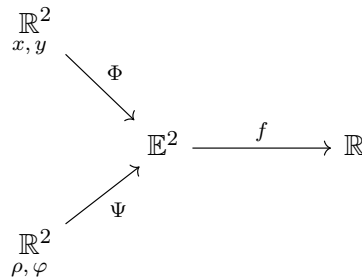
$$\frac{\mathbf{f}_1}{\partial u^2} = \frac{\mathbf{f}_2}{\partial u^1}.$$

## Про функции в геометрии

Фразу, упомянутую в эпиграфе к данному разделу, А. В. Пенской произнёс на первой лекции своего курса по дифференциальной геометрии.

Рассмотрим евклидову плоскость<sup>1</sup>  $\mathbb{E}^2$  и фиксированную точку  $O$  на ней. Пусть на этой плоскости задана функция  $f(x) = |\overrightarrow{Ox}|$  (измеряем евклидово расстояние до заданной точки). Мы можем ввести евклидовы координаты в этой плоскости, в них наша функция записывается как  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ . А можем ввести полярные, и тогда функция записывается как  $f(\rho, \varphi) = \rho$ . Наблюдаем некоторое противоречие — одна и та же функция  $f$  от двух аргументов записывается двумя (очевидно, различными) способами, то есть формально нельзя написать  $f(x, y) = f(\rho, \varphi)$ . Но мы так пишем, и мы на самом деле хотим так писать. Так в чём же дело?

Корень этого мнимого противоречия заключается в том, как мы думаем о функциях в алгебре и анализе. Мы привыкли к тому, что функция — это «алгоритм вычисления». С этой точки зрения  $f(\rho, \varphi)$  должно быть равно  $\sqrt{\rho^2 + \varphi^2}$ , но ведь ясно, что мы имеем в виду не это. А на самом деле происходит следующее.



Имеет место такая коммутативная диаграмма, где отображения  $\Phi$  и  $\Psi$  задают выбор системы координат. Запись  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  формально некорректна, ведь на самом деле таким образом задаётся не функция  $f$ , а композиция  $(f \circ \Phi)(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Так же можно написать и в полярных координатах:  $(f \circ \Psi)(\rho, \varphi) = \rho$ . И то, что мы имеем в виду под записью  $f(x, y) = f(\rho, \varphi)$ , формально записывается как

$$f \circ \Phi = f \circ \Psi.$$

Сама функция  $f$  задана абстрактно, в её определении не фигурировали координаты, поэтому писать  $f(x, y) = \dots$  (или  $f(\rho, \varphi) = \dots$ ) формально нельзя. Но мы, конечно же, будем, потому что для нас первично абстрактное задание функции, а не система координат (или параметризация), в которой мы хотим её записать.

Теперь можем написать ещё более «удивительную» формулу:

$$f(\rho, \varphi) = f(x(\rho, \varphi), y(\rho, \varphi)).$$

Если уж мы согласились с равенством  $f(\rho, \varphi) = f(x, y)$ , то мы обязаны согласиться и с этим равенством, ведь от первого ко второму можно перейти, рассматривая  $x$  и  $y$  как функции  $x(\rho, \varphi) = \rho \cos \varphi$ ,  $y(\rho, \varphi) = \rho \sin \varphi$ . И мы действительно можем с ним согласиться, ведь формально это равенство можно записать как

$$f \circ \Psi = (f \circ \Phi) \circ (\Phi^{-1} \circ \Psi).$$

<sup>1</sup>Везде в тексте, кроме этого комментария, евклидово пространство размерности  $n$  отождествляется с  $\mathbb{R}^n$ . Здесь важно сохранить обозначения Алексея Викторовича.

## 2. Теория кривых

Рубины шлифуют алмазами.

А. А. Гайфуллин

### Базовые определения

**Определение 2.1.** *Простой дугой*  $\gamma$  в  $\mathbb{R}^n$  называется любое подмножество  $\mathbb{R}^n$ , гомеоморфное отрезку  $[0; 1]$ . *Параметризацией* простой дуги называется гомеоморфизм  $\mathbf{r}: [0; 1] \rightarrow \gamma$ .

**Определение 2.2.** Параметризация  $\mathbf{r}: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  простой дуги называется *регулярной* класса  $C^k$ , если для всех  $i = 1, \dots, n$  функция  $r^i(t)$  является отображением класса  $C^k$  и

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} > 0$$

в каждой точке (для концов отрезка 0 и 1 в качестве производной берётся производная справа и слева соответственно). Простая дуга называется *регулярной* (или *гладкой*), если существует её регулярная параметризация.

Параметризация простой дуги естественным образом задаёт на ней ориентацию. Условие на знак производной в данной точке необходимо, чтобы сохранять эту ориентацию при замене параметра.

**Определение 2.3.** *Параметризованной кривой* в  $\mathbb{R}^n$  называется непрерывное отображение  $\mathbf{r}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  такое, что существует не более чем счётное покрытие промежутка  $I$  отрезками  $[a_i; b_i]$  такое, что для каждого  $i$  ограничение  $\mathbf{r}|_{[a_i; b_i]}$  есть параметризация простой дуги.

**Определение 2.4.** *Кривой* в  $\mathbb{R}^n$  называется класс эквивалентности параметризованных кривых, где  $\mathbf{r}_1: I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  и  $\mathbf{r}_2: I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  *эквивалентны*, если существует такой гомеоморфизм  $I_1 \rightarrow I_2$ , что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} I_1 & \xrightarrow{\mathbf{r}_1} & \mathbb{R}^n \\ \cong \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ I_2 & \xrightarrow{\mathbf{r}_2} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Любое вложение из данного класса будем называть *параметризацией* кривой.

В дальнейшем мы будем рассматривать только регулярные кривые. Условие регулярности необходимо добавить для соответствия интуитивному пониманию гладкости как отсутствия изломов. Например, мы не хотим рассматривать кривые вроде  $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3)$  (рис. 2.1), хотя обе координатные функции  $x(t) = t^2$  и  $y(t) = t^3$  гладкие класса  $C^\infty$ .

**Предложение 2.5.** Если  $\mathbf{r}_1(t)$  и  $\mathbf{r}_2(s)$  — регулярные эквивалентные параметризации, то  $t(s)$  и  $s(t)$  являются гладкими функциями.

**Доказательство.** Рассмотрим параметр  $t$ . Так как обе параметризации регулярны, то  $\dot{\mathbf{r}}_1(t_0) \neq 0$  в каждой точке  $t_0$ . Тогда найдётся номер  $i_0$  такой, что  $\dot{x}^{i_0}(t_0) \neq 0$ . Тогда по теореме об обратной функции в некоторой окрестности точки  $t_0$  можно выразить параметр  $t$  через  $x^{i_0}$ , то есть  $t(x^{i_0})$  — гладкая функция в некоторой окрестности данной точки. А  $x^{i_0}$ , в свою очередь, является гладкой функцией от  $s$  (так как отображение  $\mathbf{r}_2$  гладкое). Таким образом, функция  $t(s) = t(x^{i_0}(s))$  гладкая как композиция гладких функций (теорема о сложной функции). Аналогично доказывается, что функция  $s(t)$  тоже гладкая. ■



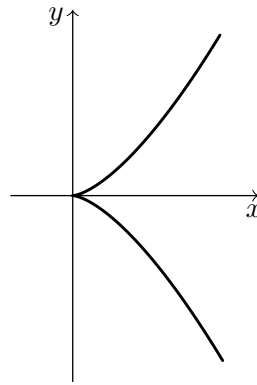


Рис. 2.1: Полукубическая парабола

Важно подчеркнуть, что при доказательстве использовалось рассуждение, которое можно сформулировать так: на регулярной кривой в некоторой окрестности любой точки можно в качестве параметра выбрать одну из координат евклидова пространства. Отсюда, например, можно сразу получить нерегулярность полукубической параболы — легко видеть, что в окрестности точки  $(0, 0)$  её нельзя параметризовать ни одной переменной  $x$  или  $y$ .

### Способы задания кривой

На практике часто приходится иметь дело с кривыми, заданными с помощью уравнений. С глобальной точки зрения данный подход не эквивалентен параметрическому заданию. Однако, если наложить на систему уравнений некоторые ограничения, то мы получим объекты, локально устроенные так же, как кривые.

**Определение 2.6.** Пусть  $f$  — гладкая функция из некоторого подмножества  $U \subset \mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}^m$ ,  $m \leq n$ . Мы говорим, что точка  $x_0 \in U$  является для неё *регулярной*, если  $x_0 \in \text{Int } U$  и  $\text{rk } J_f(x_0) = m$ .

**Теорема 2.7.** Пусть  $f_1, \dots, f_{n-1}$  — набор гладких функций из некоторого подмножества  $U \subset \mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}$ , а точка  $x_0 \in U$  является регулярной точкой отображения  $f = (f_1, \dots, f_{n-1})$  и решением системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(x) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ f_{n-1}(x) = 0, \end{cases}$$

то есть  $f(x_0) = 0$ . Тогда существует окрестность точки  $x_0$ , в которой пространство решений этой системы представляет собой гладкую регулярную кривую.

Верно и обратное: в окрестности любой точки регулярной кривой её можно задать системой уравнений, которая регулярна в этой точке.

**Доказательство.** Без ограничения общности, можем считать, что первые  $n - 1$  столбцов матрицы  $J_f(x_0)$  линейно независимы (иначе перенумеруем координаты). Тогда по теореме о неявной функции решение этой системы в некоторой окрестности точки  $x_0$  задаётся гладкими функциями  $x^1(x^n), \dots, x^{n-1}(x^n)$ . Но это и означает, что локально решения представляют собой регулярную кривую, так как радиус-вектор параметризован последней координатой:  $r(x^n) = (x^1(x^n), \dots, x^{n-1}(x^n), x^n)$ . Эта параметризация регулярна, поскольку последней компонентой вектора скорости  $\dot{r}$  будет 1.

Докажем обратное утверждение. Как упоминалось в предложении 2.5, в качестве параметра локально можно взять одну из координат. Не теряя общности, будем считать, что эта координата  $x^n$ :  $r(x^n) = (x^1(x^n), \dots, x^{n-1}(x^n), x^n)$ . Теперь запишем систему уравнений

$\mathbf{x} - \mathbf{r}(x^n) = \mathbf{0}$ , которая локально задаёт нашу кривую. Первые  $n - 1$  столбец матрицы Якоби  $J_{\mathbf{x}-\mathbf{r}(x^n)}$  в рассматриваемой точке составляют единичную матрицу. ■

### Касательная в точке регулярной кривой

**Определение 2.8.** Пусть регулярная кривая задана радиус-вектором  $\mathbf{r}(t)$ . Касательная прямая к этой кривой в точке  $t_0$  задаётся рядом Тейлора функции  $\mathbf{r}$  с отбрасыванием всех членов более высокого порядка, чем  $t - t_0$ :

$$\ell(t) := \mathbf{r}(t_0) + \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{t_0} (t - t_0).$$

Нужно проверить корректность данного определения, ведь оно сформулировано для конкретной параметризации кривой. Здесь корректность сразу следует из предложения 2.5 и теоремы о сложной функции:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt}.$$

#### Теорема 2.9.

- (1) Пусть  $\gamma$  — регулярная кривая,  $\mathbf{x}_0 \in \gamma$  — некоторая её точка,  $\ell$  — касательная прямая в точке  $\mathbf{x}$ . Тогда для  $\mathbf{x}_1 \in \gamma$ ,  $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_0$  выполнено

$$\rho(\mathbf{x}_1, \ell) = \bar{o}(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0|) \text{ при } \mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_0.$$

- (2) Для каждой точки  $\mathbf{x}_0 \in \gamma$  касательная прямая является единственной прямой с указанным свойством.

**Доказательство.** Пусть на  $\gamma$  выбрана регулярная параметризация  $\mathbf{r}(t)$ , в которой  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{r}(0)$ . В качестве точки  $\mathbf{x}_1$  будем брать  $\mathbf{r}(t)$ , где  $t$  пробегает окрестность нуля. Условие  $\mathbf{r}(t) \rightarrow \mathbf{x}_0$  можно заменить на  $t \rightarrow 0$  (по определению кривой). Обозначим  $\mathbf{v}_0 := \dot{\mathbf{r}}(0)$ . По условию,  $\mathbf{v}_0 \neq \mathbf{0}$ .

- (1) По формуле Тейлора имеем

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0 t + \bar{o}(t) = \mathbf{x}_0 + (\mathbf{v}_0 + \bar{o}(1))t \text{ при } t \rightarrow 0.$$

Расстояние от  $\mathbf{r}(t)$  до прямой  $\ell$  равно  $\rho(\mathbf{r}(t), \ell) = |\mathbf{r}(t) - \mathbf{x}_0| \sin \alpha(t)$ , где  $\alpha(t)$  — угол между векторами  $\mathbf{v}_0$  и  $\mathbf{r}(t) - \mathbf{x}_0$ . Поскольку  $\mathbf{r}(t) - \mathbf{x}_0 = (\mathbf{v}_0 + \bar{o}(1))t$ , этот угол равен  $\bar{o}(1)$  при  $t \rightarrow 0$ . Получаем

$$\rho(\mathbf{r}(t), \ell) = |\mathbf{r}(t) - \mathbf{x}_0| \bar{o}(1) = \bar{o}(|\mathbf{r}(t) - \mathbf{x}_0|).$$

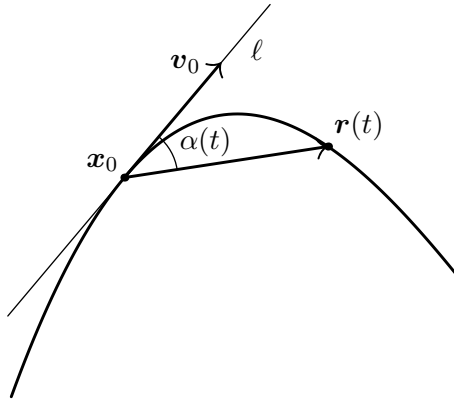


Рис. 2.2

- (2) Пусть теперь  $\ell'$  — другая прямая, проходящая через точку  $\mathbf{x}_0$ , и пусть  $\mathbf{u}$  — её направляющий вектор. Тогда

$$\rho(\mathbf{r}(t), \ell') = |\mathbf{r}(t) - \mathbf{x}_0| \sin \beta(t),$$

где  $\beta(t)$  — угол между векторами  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{r}(t) - \mathbf{x}_0 = (\mathbf{v}_0 + \bar{o}(1))t$ . При  $t \rightarrow 0$  угол  $\beta(t)$  стремится к углу между векторами  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}_0$ , который по предположению отличен от 0 и  $\pi$ . Отсюда  $\rho(\mathbf{r}(t), \ell') = |\mathbf{r}(t) - \mathbf{x}_0| (\text{const} + \bar{o}(1))$ , где  $\text{const} \neq 0$ . ■

**Предложение 2.10.** Если кривая в  $\mathbb{R}^n$  задана системой уравнений  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ , то касательная к ней в регулярной точке  $\mathbf{x}_0$  задаётся системой уравнений  $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$ .

**Доказательство.** Точка  $\mathbf{x}_0$  регулярна для отображения  $\mathbf{f}$ , значит,  $\text{rk } J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) = n - 1$ , поэтому пространство решений системы с этой матрицей одномерно, то есть задаёт прямую в пространстве  $\mathbb{R}^n$  (очевидно, проходящую через точку  $\mathbf{x}_0$ ). Остаётся проверить, что эта прямая параллельна вектору скорости касательной прямой в точке  $\mathbf{x}_0$ .

Пусть  $\mathbf{r}(t)$  — регулярная параметризация данной кривой в окрестности точки  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{r}(t_0)$  (существует по теореме 2.7). Это означает, что  $\mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) = \mathbf{0}$  для всех  $t$  из прообраза данной окрестности. По теореме о производной сложной функции имеет место равенство

$$\frac{d}{dt} \mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{r}(t)} \dot{\mathbf{r}}(t).$$

Подставляя  $t = t_0$ , получаем

$$\left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0} \mathbf{v}_0 = \mathbf{0},$$

где  $\mathbf{v}_0$  — вектор скорости при  $t = t_0$ . ■

## Натуральный параметр и кривизна

**Определение 2.11.** *Длиной* кривой, заметаемой при изменении значения параметра от  $t_0$  до  $t$ , называется число

$$l = \int_{t_0}^t |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt.$$

Здесь опять нужно проверить корректность, то есть независимость от параметризации. Пусть мы перешли к другому регулярному параметру  $s$  (причём  $dt/ds > 0$ ). Тогда имеем

$$\int_{s_0}^s \left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| ds = \int_{t_0}^t \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{ds} \right| \frac{ds}{dt} dt = \int_{t_0}^t \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| \frac{dt}{ds} \frac{ds}{dt} dt = \int_{t_0}^t \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt = l.$$

**Определение 2.12.** Параметр  $s$  называется *натуральным параметром* регулярной кривой, если  $|d\mathbf{r}/ds| = 1$ .

**Предложение 2.13.**

- (1) Длина кривой  $l(t)$  является натуральным параметром.
- (2) Если  $s$  — некоторый натуральный параметр, то  $s = l + \text{const}$ .

**Доказательство.**

- (1)  $dl/dt = |d\mathbf{r}/dt| > 0$ . Значит, по теореме об обратной функции можем локально выразить  $t = t(l)$ , и при этом

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{dl} \right| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{dl} \right| = \frac{dt}{dl} \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \frac{|d\mathbf{r}/dt|}{|d\mathbf{r}/dt|} = 1.$$

(2) Если  $s$  — натуральный параметр, то  $|\dot{\mathbf{r}}(s)| = 1$  для каждого  $s$ . Отсюда,

$$l(s) = \int_{s_0}^s |\dot{\mathbf{r}}(s)| ds = s - s_0,$$

то есть  $s = l + s_0$ , что и требовалось. ■

Далее, если не указано иное, через  $s$  мы будем всегда обозначать натуральный параметр, а через  $\dot{\mathbf{r}}$  — производную по натуральному параметру.

Предложение 2.13 говорит нам о том, что натуральный параметр на любой кривой можно выписать явно по формуле длины кривой. Наличие такой формулы говорит нам о том, что у кривых тривиальная внутренняя геометрия. Всё, что можно делать на кривой — мерять длины, и мы (теоретически) можем это делать в любой параметризации.

**Определение 2.14.** Кривизной кривой в точке  $s$  называется величина  $k(s) := |\ddot{\mathbf{r}}(s)|$ . (Легко видеть, что кривизна не зависит от выбора натурального параметра  $s$ .)

**Предложение 2.15.** Кривизна регулярной кривой на некотором участке равна нулю тогда и только тогда, когда этот участок является частью прямой.

**Доказательство.**  $\Rightarrow$ . Если  $k(s) = 0$ , то  $\ddot{\mathbf{r}}(s) = 0$ . Тогда  $\mathbf{r}(s)$  должен быть линейен по  $s$ , то есть быть уравнением прямой.

$\Leftarrow$ . Рассмотрим прямую  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}t$ . Перейдём к натуральному параметру, воспользовавшись результатами предложения 2.13:

$$s(t) = \int_0^t |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt = \int_0^t |\mathbf{v}| dt = |\mathbf{v}| t.$$

Подставляя найденное, легко убеждаемся, что  $\mathbf{r}(s)$  линейно, значит,  $\ddot{\mathbf{r}}(s) = 0$ . ■

Результат последнего предложения согласуется с нашим интуитивным представлением о кривизне — кривизна прямой должна быть равна нулю, а чего-то кроме прямой — не равна нулю.

**Определение 2.16.** Регулярная кривая называется *бирегулярной* на некотором интервале, если кривизна не равна нулю на этом интервале.

Полезно также посчитать кривизну окружности. В натуральном параметре уравнение окружности радиуса  $R$  имеет следующий вид:

$$\mathbf{r}(s) = \left( R \cos \frac{s}{R}, R \sin \frac{s}{R} \right)$$

Кривизна равна  $k(s) = |\ddot{\mathbf{r}}(s)| = \frac{1}{R}$ , что тоже соответствует нашему интуитивному представлению: кривизна окружности во всех точках одинакова и уменьшается с увеличением радиуса.

В натуральном параметре  $|\dot{\mathbf{r}}(s)| = 1$ , значит,  $\dot{\mathbf{r}}(s) \perp \ddot{\mathbf{r}}(s) = 0$ . Таким образом, в каждой точке  $\mathbf{r}(s)$  кривой имеем свой ортонормированный базис из вектора скорости  $\mathbf{v}(s) := \dot{\mathbf{r}}(s)$  и вектора *главной нормали*  $\mathbf{n}(s) := \ddot{\mathbf{r}}(s)/|\ddot{\mathbf{r}}(s)|$ . (Для корректности этого определения считаем кривую бирегулярной.) Плоскость  $\text{span}(\mathbf{v}(s), \mathbf{n}(s))$  называется *соприкасающейся плоскостью* кривой в точке  $s$ .

**Предложение 2.17.** В любой параметризации линейная оболочка векторов скорости и ускорения лежит в соприкасающейся плоскости.

**Доказательство.** Перейдём от некоторого регулярного параметра  $t$  к натуральному параметру  $s$ :

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} \frac{ds}{dt}, \quad \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{r}(s)}{ds^2} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Из первой формулы видно, что все вектора скорости коллинеарны, а из второй — что вектор ускорения в любой регулярной параметризации является линейной комбинацией векторов скорости и ускорения в натуральной параметризации и, как следствие, принадлежит соприкасающейся плоскости. ■

Выведем формулу кривизны в произвольной параметризации. Заметим, что

$$|S_{\text{ор}}(\dot{\mathbf{r}}(s), \ddot{\mathbf{r}}(s))| = k(s) \cdot \underbrace{|S_{\text{ор}}(\mathbf{v}(s), \mathbf{n}(s))|}_1 = k(s).$$

Теперь выразим производные по  $s$  через произвольный параметр  $t$  (производные по  $t$  будем обозначать штрихом). Сразу из определения натурального параметра имеем  $\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)|$ ,  $\dot{\mathbf{r}}(s) = \mathbf{r}'(t)/|\mathbf{r}'(t)|$ . Считаем вторую производную:

$$\ddot{\mathbf{r}}(s) = \frac{d}{ds} \left( \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \right) = \left( \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \right)' \frac{dt}{ds} = \frac{\mathbf{r}''(t) |\mathbf{r}'(t)| - \mathbf{r}'(t) \frac{d}{dt} |\mathbf{r}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3} = \frac{\mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|^2} - \frac{\frac{d}{dt} |\mathbf{r}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3} \mathbf{r}'(t).$$

Подставляем в формулу, выведенную для натуральной параметризации:

$$(2.1) \quad k(t) = |S_{\text{ор}}(\dot{\mathbf{r}}(s), \ddot{\mathbf{r}}(s))| = \left| S_{\text{ор}} \left( \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}, \frac{\mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|^2} \right) \right| = \frac{|S_{\text{ор}}(\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t))|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}.$$

Смогли отбросить второе слагаемое в выражении  $\mathbf{r}''(s)$ , так как вектор в этом слагаемом был коллинеарен  $\mathbf{r}'(t)$ , поэтому при подстановке в ориентированную площадь давал 0.

### Соприкасающаяся окружность

**Определение 2.18.** Говорят, что две гладкие кривые имеют в точке  $\mathbf{x}_0$  соприкосновение порядка  $k$ , где  $k \geq 1$ , если для некоторых их регулярных параметризаций и некоторого  $t_0$  выполнено

$$(2.2) \quad \mathbf{r}_1(t_0) = \mathbf{r}_2(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad |\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)| = \bar{o}((t - t_0)^k) \text{ при } t \rightarrow t_0.$$

Из формулы Тейлора следует, что условие (2.2) равносильно следующему:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2(t_0), \quad \mathbf{r}'_1(t_0) = \mathbf{r}'_2(t_0), \quad \dots, \quad \left( \frac{d^k \mathbf{r}_1}{dt^k} \right)(t_0) = \left( \frac{d^k \mathbf{r}_2}{dt^k} \right)(t_0).$$

Касательная прямая к кривой имеет в точке касания первый порядок соприкосновения с этой кривой. Однако может иметь и больший порядок соприкосновения.

**Определение 2.19.** Точка  $\mathbf{x}$  кривой  $\gamma$  называется *точкой спрямления*, если в ней кривая  $\gamma$  имеет со своей касательной прямой соприкосновение порядка два.

**Предложение 2.20.** Пусть дана кривая с регулярной параметризацией  $\mathbf{r}(t)$ . Точка, соответствующая значению параметра  $t = t_0$  является точкой спрямления тогда и только тогда, когда векторы скорости  $\mathbf{r}'(t_0)$  и  $\mathbf{r}''(t_0)$  коллинеарны.

**Доказательство.**  $\Rightarrow$ . Пусть  $\ell(t)$  — параметризация касательной в точке спрямления. Тогда имеем  $\mathbf{r}'(t) = \ell'(t)$  и  $\mathbf{r}''(t) = \ell''(t)$ , а вектора  $\ell'$  и  $\ell''$  коллинеарны, так как они сонаправлены одной и той же касательной прямой.

$\Leftarrow$ . Параметризуем отрезок касательной прямой возле точки  $\mathbf{r}(t_0)$  следующим образом:

$$\ell(t) = \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{r}'(t_0)t + \frac{\mathbf{r}''(t_0)}{2}t^2, \quad t \in [t_0 - \varepsilon; t_0 + \varepsilon].$$

При достаточно малом  $\varepsilon$  эта параметризация регулярна, так как  $\mathbf{r}'(t_0) \neq 0$ . ■

Отметим, что точки спрямления — ровно те точки кривой, в которых её кривизна равна нулю. Действительно, в натуральной параметризации  $|\dot{\mathbf{r}}| = 1$ , так что  $\dot{\mathbf{r}} \perp \ddot{\mathbf{r}}$ , но в точках спрямления  $\dot{\mathbf{r}} \parallel \ddot{\mathbf{r}}$ . Так что остаётся единственная возможность  $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$ .

**Теорема 2.21.** Пусть  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — две гладкие простые дуги в  $\mathbb{R}^n$ , имеющие общую точку  $\mathbf{x}_0$ . Они имеют в этой точке соприкосновение порядка  $k$  тогда и только тогда, когда для  $\mathbf{x} \in \gamma_1$  выполнено

$$(2.3) \quad \rho(\mathbf{x}, \gamma_2) = \bar{o}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^k) \text{ при } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0.$$

**Доказательство.** Пусть  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  — регулярные параметризации данных кривых такие, что  $\mathbf{r}_1(0) = \mathbf{r}_2(0) = \mathbf{x}_0$ .

$\Rightarrow$ . Без ограничения общности можно считать, что  $\dot{\mathbf{r}}_1(0) \parallel \mathbf{e}_1$ . Тогда за параметр на  $\gamma_1$  можно выбрать первую координату, то есть

$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{x}_0 + (t, \bar{o}(t), \dots, \bar{o}(t)), \quad t \rightarrow 0.$$

Для такой параметризации имеем

$$|\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{x}_0| = (1 + \bar{o}(1)) |t|, \quad t \rightarrow 0,$$

то есть величины  $|\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{x}_0|$  и  $t$  одного порядка малости при  $t \rightarrow 0$ , и можно заменять  $\bar{o}(|\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{x}_0|^k)$  на  $\bar{o}(t^k)$ , и наоборот. Отсюда, условие (2.2) влечёт (2.3).

Пусть выполнено (2.3). Обозначим через  $\varphi(t)$  функцию, определённую в окрестности 0 условием

$$|\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(\varphi(t))| = \bar{o}(|\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{x}_0|^k).$$

(Мы не требуем от  $\varphi$  гладкости и даже непрерывности. В качестве  $\varphi(t)$  можно взять параметр, соответствующий точке кривой  $\mathbf{r}_2$ , на которой достигается расстояние от точки  $\mathbf{r}_1(t)$  до кривой  $\mathbf{r}_2$ .) Из определения простой дуги следует, что  $\varphi(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow 0$ . Кроме того, направление вектора  $\mathbf{r}_2(\varphi(t)) - \mathbf{x}_0$  (рассматриваемое с точностью до знака) стремится к направлению вектора  $\dot{\mathbf{r}}_1(0) = (1, 0, \dots, 0)$ , а значит, первую координату можно взять за параметр и на второй дуге.

С этого места мы предполагаем, что параметризация второй дуги также имеет вид

$$\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{x}_0 + (t, \bar{o}(t), \dots, \bar{o}(t)), \quad t \rightarrow 0.$$

Рассмотрим треугольник с вершинами  $\mathbf{x} = \mathbf{r}_1(t)$ ,  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{r}_2(t)$ ,  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{r}_2(\varphi(t))$  при  $t \rightarrow 0$ . Направление вектора  $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ , если он ненулевой, сближается с направлением вектора скорости второй кривой в точке  $\mathbf{x}_0$ , то есть  $\mathbf{v}_0 = (1, 0, \dots, 0)$ . При этом  $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}) \perp \mathbf{v}_0$ . Таким образом, угол  $\angle \mathbf{x}\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$  стремится к прямому. Мы знаем, что противолежащая ему сторона  $\mathbf{x}\mathbf{x}_2$  имеет порядок малости  $\bar{o}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^k) = \bar{o}(t^k)$ . Значит, все стороны этого треугольника имеют по крайней мере такой же порядок малости, в частности,  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1| = |\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)|$ , откуда следует (2.2). ■

**Определение 2.22.** Соприкасающейся окружностью с данной кривой  $\mathbf{r}(t)$  в точке  $\mathbf{x}_0$  называется окружность, которая имеет соприкосновение второго порядка с этой кривой в точке  $\mathbf{x}_0$ .

**Теорема 2.23.** Если точка  $\mathbf{x}_0$  некоторой гладкой кривой  $\gamma$  не является точкой спрямления, то существует ровно одна окружность, имеющая в  $\mathbf{x}_0$  соприкосновение второго порядка с  $\gamma$ .

**Доказательство.** Пусть  $\mathbf{r}(t)$  — некоторая регулярная параметризация кривой  $\gamma$  с условием  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{x}_0$ . Соприкосновение второго порядка в точке  $\mathbf{x}_0$  с какой-либо другой кривой определяется векторами скорости  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}(0)$  и ускорения  $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}(0)$ . Поэтому для доказательства теоремы достаточно взять любую другую кривую с теми же векторами скорости и

ускорения в точке  $\mathbf{x}_0$ . Таким образом, без ограничения общности мы можем считать, что наша кривая имеет следующую параметризацию:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}t + \frac{\mathbf{a}}{2}t^2.$$

Так как  $\mathbf{x}_0$  — не точка спрямления, векторы  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{a}$  линейно независимы (см. предложение 2.20), и порождают соприкасающуюся плоскость (см. предложение 2.17).

Пусть  $C$  — окружность, проходящая через  $\mathbf{x}_0$ . При любой её параметризации векторы скорости и ускорения лежат в той же плоскости, что и она сама. Поэтому необходимым условием соприкосновения окружности  $C$  с кривой  $\gamma$  в точке  $\mathbf{x}_0$  является то, что эта окружность лежит в соприкасающейся плоскости  $\text{span}(\mathbf{v}, \mathbf{a})$ , что мы дальше и предполагаем.

Пусть  $O$  — центр окружности  $C$ . Тогда вектор  $\mathbf{u} = \overrightarrow{O\mathbf{x}_0}$  является линейной комбинацией векторов  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{a}$ :  $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{a}$ . Расстояние от произвольной точки  $\mathbf{x} \in \text{span}(\mathbf{v}, \mathbf{a})$  до  $C$  равно

$$\rho(\mathbf{x}, C) = \left| |\overrightarrow{O\mathbf{x}}| - R \right|,$$

где  $R$  — радиус окружности  $C$ . Отсюда условие соприкосновения окружности  $C$  и кривой  $\gamma$  можно записать так:

$$|\overrightarrow{Or(t)}| - R = \bar{o}(t^2),$$

что равносильно (поскольку  $R \neq 0$ )

$$|\overrightarrow{Or(t)}|^2 = R^2 + \bar{o}(t^2).$$

Подставляя  $\overrightarrow{Or(t)} = \mathbf{u} + \mathbf{v}t + \frac{\mathbf{a}}{2}t^2$ , получаем

$$\left\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}t + \frac{\mathbf{a}}{2}t^2, \mathbf{u} + \mathbf{v}t + \frac{\mathbf{a}}{2}t^2 \right\rangle = R^2 + \bar{o}(t^2).$$

Раскрывая скобки в левой части и отбрасывая члены порядка  $\bar{o}(t^2)$ , получаем

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle t + (\langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle)t^2 = R^2.$$

Учитывая равенство  $R = |\mathbf{u}|$ , мы приходим к следующему условию соприкосновения второго порядка окружности  $C$  и кривой  $\gamma$ :

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0.$$

Подставляя  $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{a}$ , получаем систему линейных уравнений на  $\lambda$  и  $\mu$ :

$$\left( \begin{array}{cc|c} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle & \langle \mathbf{v}, \mathbf{a} \rangle & 0 \\ \langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle & \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle & -\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \end{array} \right),$$

матрица которой есть матрица Грама векторов  $(\mathbf{v}, \mathbf{a})$ , которая невырождена из линейной независимости этих векторов, так что система имеет единственное решение. ■

Соприкосновение кривых второго (или более) порядка влечёт равенство кривизн кривых в точке соприкосновения. Значит, радиус соприкасающейся окружности равен  $R = 1/k$ , где  $k$  — кривизна в точке соприкосновения. Таким образом, соприкасающаяся окружность даёт геометрический смысл понятия кривизны, так что её центр часто называют *центром кривизны*, а радиус — *радиусом кривизны*.



## Кривые на плоскости и в пространстве

Далее считаем, что задана плоская кривая  $\gamma$  с натуральной параметризацией  $\mathbf{r}(s)$ .

**Определение 2.24.** Точку  $\mathbf{r}(s)$  и приложенный к ней базис  $(\mathbf{v}(s), \mathbf{n}(s))$  называют *репером Френе* плоской кривой.

В каждой точке кривой введён свой локальный базис. Поэтому и векторы, связанные с точками на кривых, будут задаваться в этих локальных базисах. Чтобы дифференцировать такие векторы, нам нужно научиться дифференцировать векторы  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{n}$ .

**Теорема 2.25** (*Формулы Френе для плоской кривой*). Для плоской кривой выполнено

$$(2.4) \quad (\dot{\mathbf{v}}(s) \quad \dot{\mathbf{n}}(s)) = (\mathbf{v}(s) \quad \mathbf{n}(s)) \begin{pmatrix} 0 & -k(s) \\ k(s) & 0 \end{pmatrix}.$$

**Доказательство.** Из определения кривизны,  $\dot{\mathbf{v}} = k\mathbf{n}$ , что даёт первое уравнение. Известно, что  $|\mathbf{n}| = 1$ , отсюда  $\mathbf{n} \perp \dot{\mathbf{n}}$ , так что  $\dot{\mathbf{n}} = \lambda\mathbf{v}$ . Тогда

$$0 = \frac{d}{ds} \underbrace{\langle \mathbf{v}(s), \mathbf{n}(s) \rangle}_0 = \underbrace{\langle k\mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle}_k + \underbrace{\langle \mathbf{v}, \lambda\mathbf{v} \rangle}_\lambda \Rightarrow \lambda = -k,$$

что даёт и второе уравнение  $\dot{\mathbf{n}} = -k\mathbf{v}$ . ■

Вектор главной нормали кривой  $\mathbf{n}$  задаёт векторное поле на кривой. Однако в точках спрямления этот вектор оказывается не определён, и поле выходит разрывным. В  $\mathbb{R}^n$  эту проблему никак не решить, но в плоскости это можно сделать.

Вместо репера Френе можно взять ортонормированный положительно ориентированный базис  $(\mathbf{v}, \mathbf{v}^\perp)$ , при этом вновь имеем  $\dot{\mathbf{v}} \parallel \mathbf{v}^\perp$ . Можем определить «кривизну со знаком» как коэффициент пропорциональности этих векторов.

**Определение 2.26.** *Ориентированной кривизной* плоской кривой в точке  $s$  будем называть величину  $k_{\text{ор}}(s) := \langle \dot{\mathbf{v}}(s), \mathbf{v}^\perp(s) \rangle$ .

Сам знак кривизны геометрического смысла не имеет, имеют геометрический смысл точки, в которых происходит перемена знака  $k_{\text{ор}}$ . Это точки спрямления, где поле главных нормалей терпит разрыв. Формулу (2.1) легко модифицировать для нахождения ориентированной кривизны:

$$(2.5) \quad k_{\text{ор}}(t) = \frac{S_{\text{ор}}(\dot{\mathbf{r}}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t))}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|^3}.$$

Из формул Френе (2.4) легко видеть, что по кривизне можно однозначно восстановить плоскую кривую с точностью до движений плоскости. (Про единственность можно прочесть в начале доказательства теоремы 2.33, существование доказывается явно.) Для порядка сформулируем это утверждение в качестве теоремы.

**Теорема 2.27.**

- (1) Гладкая кривая на плоскости восстанавливается по функции  $k_{\text{ор}}(s)$ , выражающей ориентированную кривизну через натуральный параметр, однозначно с точностью до движения.
- (2) Для любой гладкой функции  $k(s)$  найдётся гладкая плоская кривая с зависимостью кривизны от натурального параметра, выраженной этой функцией.

Итак, зная соотношение на натуральный параметр и кривизну кривой, мы знаем всё об этой кривой. Такие соотношения называются *натуральными уравнениями* и их замечательное свойство состоит в том, что такое задание не зависит от системы координат.

Чтобы восстановить кривую, можно решить линейную систему дифференциальных уравнений (2.4) из четырёх переменных (две координаты вектора  $\mathbf{v}$  и две координаты вектора



$\mathbf{n}$ ) и проинтегрировать затем вектор  $\mathbf{v}(s)$ . Однако это неоптимальный метод — мы задаём ортонормированный базис  $(\mathbf{v}, \mathbf{n})$  на плоскости четырьмя параметрами. Если рассматривать ортонормированный положительно ориентированный базис  $(\mathbf{v}, \mathbf{v}^\perp)$ , то достаточно всего одного параметра — угла  $\alpha(s)$  между базисным вектором  $\mathbf{e}_1$  и вектором скорости  $\mathbf{v}$ . Тогда  $\mathbf{v} = (\cos \alpha(s), \sin \alpha(s))$ ,  $\mathbf{v}^\perp = (-\sin \alpha(s), \cos \alpha(s))$ . Подставляя в определение ориентированной кривизны, получим:

$$k_{\text{ор}} = \langle (-\dot{\alpha} \sin \alpha, \dot{\alpha} \cos \alpha), (-\sin \alpha, \cos \alpha) \rangle = \dot{\alpha}(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \dot{\alpha}.$$

Таким образом, угол поворота вектора скорости естественно выражается через ориентированную кривизну следующим образом:

$$(2.6) \quad \alpha(s) = \int_{s_0}^s k_{\text{ор}}(s) ds.$$

Потом пишем вектор скорости  $\mathbf{v}(s) = (\cos \alpha(s), \sin \alpha(s))$  и интегрируем (при этом можем выбрать любую первообразную). Отметим, что для завершения доказательства теоремы 2.27 нам ещё нужно проверить, что ориентированная кривизна полученной кривой действительно выражается функцией  $k_{\text{ор}}(s)$ . (Это делается тривиально.)

**Задача 2.28.** Восстановить кривую по натуральному уравнению  $R^2 = 2as$  (здесь имеется в виду  $R = 1/k$  — радиус кривизны).

**Решение.** Выражаем кривизну через натуральный параметр:

$$k_{\text{ор}} = \frac{1}{\sqrt{2as}}.$$

Мы извлекли корень, не заботясь о знаке, потому что выбор знака у кривизны соответствует просто отражению кривой относительно некоторой прямой. Теперь находим угол поворота ортонормированного базиса в каждой точке:

$$\alpha(s) = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{2as}} = \frac{2}{\sqrt{2a}} \int_0^s \frac{ds}{2\sqrt{s}} = \sqrt{\frac{2s}{a}}.$$

Здесь (неявно) мы выбрали конкретную первообразную, потому что разные первообразные отвечают одной и той же кривой с точностью до поворота. Выражаем вектор скорости  $\mathbf{v}(s) = \left( \cos \sqrt{\frac{2s}{a}}, \sin \sqrt{\frac{2s}{a}} \right)$  и интегрируем его:

$$\begin{aligned} \int_0^s \cos \sqrt{\frac{2s}{a}} ds &= \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{\frac{2s}{a}} =: t & s = \frac{at^2}{2} \\ dt = \frac{ds}{\sqrt{2as}} & ds = a \cdot t dt \end{array} \right\} = a \int_0^t t \cos t dt = a \int_0^s td(\sin t) = \\ &= at \sin t - a \int_0^t \sin t dt = a(t \sin t + \cos t). \end{aligned}$$

При этом нам не нужно делать обратную замену, потому что сделанная замена соответствует просто смене параметра. Однако надо следить за тем, что при подсчёте второго интеграла мы сделаем ту же самую замену (здесь это, конечно, так). Аналогично,

$$\int_0^s \sin \sqrt{\frac{2s}{a}} ds = \dots = a(\sin t - t \cos t).$$

Итак, получаем  $\mathbf{r}(t) = a(\cos t + t \sin t, \sin t - t \cos t)$ . ■

Полученная кривая является эвольвентой окружности радиуса  $a$  (см. раздел 2.7), что легко видеть из формулы (2.12).

Помимо практических приложений, формула (2.6) даёт важное приложение в топологии. Из неё легко видеть, что для замкнутой кривой  $\gamma$  имеет место формула

$$(2.7) \quad \oint_{\gamma} k_{\text{ор}}(s) ds = 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z},$$

Число  $m$  называется *числом вращения* кривой  $\gamma$ . Число вращения интересно тем, что оно не меняется при деформациях кривой в классе гладких замкнутых кривых (регулярных гомотопиях). Иными словами, число вращения является топологическим инвариантом гладкой замкнутой кривой.

Решим обратную задачу к задаче 2.28.

**Задача 2.29.** Найти натуральное уравнение для кривой  $\mathbf{r}(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t)$ .

**Решение.** Сначала поймём, как выглядит эта кривая. Найдём направление вектора скорости, например, в точке  $\mathbf{r}(0) = (a, 0)$ :

$$\mathbf{v}(t) = a(-3 \cos^2 t \sin t, 3 \sin^2 t \cos t),$$

В интересующей точке имеем  $\mathbf{v}(0) = (0, 0)$ , и понять ничего нельзя. Можем попробовать найти предел нормированного вектора скорости:

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{a(-3 \cos^2 t \sin t, 3 \sin^2 t \cos t)}{3a \cos t \sin t} = \lim_{t \rightarrow 0+} (-\cos t, \sin t) = (-1, 0).$$

Аналогичные выкладки можно повторить для оставшихся трёх точек нерегулярности и затем нарисовать график (рис. 2.3). Эта кривая называется *астроидой*.

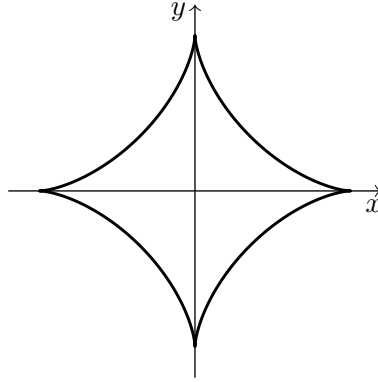


Рис. 2.3: Астроида

Приступим к решению задачи. Сначала посчитаем ориентированную кривизну по формуле (2.5). Для этого найдём производные  $\dot{\mathbf{r}}(t)$  (а она уже найдена) и  $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ :

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = 3a(2 \cos t \sin^2 t - \cos^3 t, 2 \cos^2 t \sin t - \sin^3 t).$$

Теперь находим ориентированную площадь:

$$\begin{aligned} S_{\text{ор}}(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}) &= a^2 \cdot \det \begin{pmatrix} -3 \cos^2 t \sin t & 3 \sin^2 t \cos t \\ 2 \cos t \sin^2 t - \cos^3 t & 2 \cos^2 t \sin t - \sin^3 t \end{pmatrix} = \\ &= a^2 \cdot (-6 \cos^4 t \sin^2 t + 3 \cos^2 t \sin^4 t - 6 \cos^2 t \sin^4 t + 3 \cos^4 t \sin^2 t) = -3a^2 \sin^2 t \cos^2 t. \end{aligned}$$

И, наконец, находим ориентированную кривизну:

$$k_{\text{ор}}(t) = \frac{-3a^2 \sin^2 t \cos^2 t}{27a^3 \cos^3 t \sin^3 t} = -\frac{1}{9a \cos t \sin t}.$$

Мы хотим выразить  $k_{\text{ор}}$  через натуральный параметр, так что сначала надо найти натуральный параметр:

$$s(t) = \int_0^t |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt = 3a \int_0^t \sin t \cos t dt = \frac{3a}{4} \int_0^t \sin(2t) d(2t) = -\frac{3a}{4} \cos(2t).$$

Итого получаем (здесь уже записываем через радиус кривизны  $R = 1/k$ )

$$R^2 = -9a^2 \cos^2 t \sin^2 t = -\frac{9a^2}{4} \sin^2(2t) = \frac{9}{4} \cos^2 t - \frac{9a^2}{4} = 4s^2 - \frac{9a^2}{4}.$$

Отметим, что натуральное уравнение не единственное в том смысле, что можно брать натуральный параметр со сдвигом. Здесь, например, немного удобнее взять

$$s(t) = -\frac{3a}{4} \cos(2t) + \frac{3a}{4}.$$

(Это обусловлено тем, что теперь  $s(0) = 0$ .) Новое уравнение будет выглядеть так:

$$R^2 - 6as - 4s^2 = 0.$$

(Именно в такой форме ответ приведён в задачнике. Алгебраически мы могли его получить просто выделив полный квадрат в старом выражении.) ■

В пространстве помимо векторов скорости  $\mathbf{v} := \dot{\mathbf{r}}$  и главной нормали  $\mathbf{n} := \ddot{\mathbf{r}}/|\ddot{\mathbf{r}}|$  определяется *вектор бинормали*  $\mathbf{b} := \mathbf{v} \times \mathbf{n}$ .

**Определение 2.30.** Точку  $\mathbf{r}(s)$  и приложенный к ней базис  $(\mathbf{v}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$  называют *репером Френе* пространственной кривой.

Для этого репера есть аналоги формул (2.4).

**Теорема 2.31** (*Формулы Френе для пространственных кривых*). Для пространственных кривых выполнено

$$(2.8) \quad (\dot{\mathbf{v}}(s) \quad \dot{\mathbf{n}}(s) \quad \dot{\mathbf{b}}(s)) = (\mathbf{v}(s) \quad \mathbf{n}(s) \quad \mathbf{b}(s)) \begin{pmatrix} 0 & -k(s) & 0 \\ k(s) & 0 & -\varkappa(s) \\ 0 & \varkappa(s) & 0 \end{pmatrix},$$

где  $\varkappa(s)$  — некоторая гладкая функция.

**Доказательство.** Аналогично формулам для плоских кривых,  $\dot{\mathbf{v}} = k\mathbf{n}$ . Из определения,  $|\mathbf{n}| = 1$ , значит,  $\mathbf{n} \perp \dot{\mathbf{n}}$ , так что  $\dot{\mathbf{n}} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{b}$ . Здесь  $\alpha = \langle \mathbf{v}, \dot{\mathbf{n}} \rangle = -\langle \dot{\mathbf{v}}, \mathbf{n} \rangle = -k$ ,  $\beta = \langle \dot{\mathbf{n}}, \mathbf{b} \rangle$ .  $|\mathbf{b}| = |\mathbf{v} \times \mathbf{n}| = 1$ , значит,  $\dot{\mathbf{b}} \perp \mathbf{b}$ , отсюда  $\dot{\mathbf{b}} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{n}$ . Находим коэффициенты:  $\alpha = \langle \dot{\mathbf{b}}, \mathbf{v} \rangle = -\langle \mathbf{b}, \dot{\mathbf{v}} \rangle = 0$ ,  $\beta = \langle \dot{\mathbf{b}}, \mathbf{n} \rangle = -\langle \mathbf{b}, \dot{\mathbf{n}} \rangle$ . Обозначив  $\varkappa := \langle \dot{\mathbf{n}}, \mathbf{b} \rangle$ , получим формулы (2.8). ■

Геометрический смысл кручения виден из третьего уравнения в (2.8): это скорость вращения соприкасающейся плоскости кривой в данной точке. Выведем удобную формулу для кручения в натуральной параметризации:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \quad \ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{v}} = k\mathbf{n}, \quad \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d}{ds}(k\mathbf{n}) = \dot{k}\mathbf{n} + k\dot{\mathbf{n}} = \dot{k}\mathbf{n} - k^2\mathbf{v} + \varkappa k\mathbf{b}.$$

Заметим, что

$$\text{Vol}_{\text{ор}}(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}) = \text{Vol}_{\text{ор}}(\mathbf{v}, k\mathbf{n}, \varkappa k\mathbf{b}) = k^2 \underbrace{\varkappa \text{Vol}_{\text{ор}}(\mathbf{v}, \mathbf{n}, \mathbf{b})}_1 = k^2 \varkappa.$$

Отсюда,  $\kappa(s) = \text{Vol}_{\text{or}}(\dot{\mathbf{r}}(s), \ddot{\mathbf{r}}(s), \ddot{\mathbf{r}}'(s))/k(s)^2$ . Теперь перейдём в произвольную параметризацию. Для этого нужно будет выразить производные по  $s$  через производные по  $t$ , как мы это делали при выводе формулы (2.1):

$$\dot{\mathbf{r}}(s) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}, \quad \ddot{\mathbf{r}}(s) = \frac{\mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|^2} + \dots, \quad \ddot{\mathbf{r}}'(s) = \frac{\mathbf{r}'''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|^3} + \dots$$

Подставляем в формулу для натуральной параметризации:

$$(2.9) \quad \kappa(t) = \frac{1}{k^2} \text{Vol}_{\text{or}}(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}') = \frac{|\mathbf{r}'(t)|^6}{|S_{\text{or}}(\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t))|} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|^6} \text{Vol}_{\text{or}}(\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t), \mathbf{r}'''(t)) = \\ = \frac{\text{Vol}_{\text{or}}(\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t), \mathbf{r}'''(t))}{|S_{\text{or}}(\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t))|}.$$

Отметим, что из доказательства последней формулы видно, что базис Френе получается из базиса  $(\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t), \mathbf{r}'''(t))$ , который пишется в произвольной параметризации, ортогонализацией Грама — Шмидта (что, впрочем, верно и в плоском случае).

**Предложение 2.32.** Бирегулярная кривая является плоской тогда и только тогда, когда  $\kappa = 0$  (в каждой точке).

**Доказательство.** Легко видеть, что кривая плоская тогда и только тогда, когда  $\mathbf{b}(s) = \mathbf{v}(s) \times \mathbf{n}(s) = \text{const}$ . Действительно, вектор  $\mathbf{b}$  является просто единичной нормалью плоскости, в которой лежит кривая. А третья формула из (2.8) влечёт, что  $\mathbf{b} = \text{const}$ , если и только если  $\kappa = 0$ . ■

Формулы Френе имеют важное следствие. Если в плоском случае мы восстанавливали кривую по любой гладкой функции ориентированной кривизны, то здесь нам нужно знать гладкие функции кривизны и кручения.

**Теорема 2.33.** Для любой пары гладких функций  $k, \kappa: I \rightarrow \mathbb{R}$ , первая из которых всюду положительна, с точностью до движения существует ровно одна кривая в  $\mathbb{R}^3$ , кривизна и кручение которой выражаются для некоторой натуральной параметризации функциями  $k$  и  $\kappa$  соответственно.

**Доказательство.** Доказательство единственности не отличается от плоского случая. Уравнения (2.8) вместе с  $\mathbf{r}' = \mathbf{v}$  образуют систему обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой единственно при фиксированных начальных условиях, которыми являются начальная точка и базис Френе в начальный момент. Любой ортонормированный положительно ориентированный репер переводится движением в любой другой. Поэтому начальные данные одного решения можно перевести в начальные данные другого решения. При этом одно решение перейдёт в другое в силу инвариантности уравнений относительно группы собственных движений.

Для доказательства существования нужно взять произвольный начальный момент  $s_0 \in I$  и произвольный ортонормированный положительно ориентированный репер:  $\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0$ , решить уравнения (2.8), а затем уравнение  $\mathbf{r}' = \mathbf{v}$  с начальными условиями  $\mathbf{r}(s_0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{v}(s_0) = \mathbf{v}_0, \mathbf{n}(s_0) = \mathbf{n}_0, \mathbf{b}(s_0) = \mathbf{b}_0$ . Решение существует на всём промежутке  $I$  (а не только в малой окрестности точки фазового пространства, заданной начальными условиями), поскольку уравнения линейны. Нужно лишь проверить, что кривизна и кручение полученной кривой действительно выражаются исходными функциями  $k(s), \kappa(s)$ . Для этого достаточно показать, что базис  $(\mathbf{v}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  остаётся ортонормированным в силу уравнений (2.8).

**Лемма 2.34.** Пусть  $X(t)$  — матрица  $n \times n$ , гладко зависящая от параметра, причём в начальный момент  $t = 0$  она ортогональна. Тогда матрица  $X(t)$  ортогональна при всех  $t$  тогда и только тогда, когда  $X^{-1}(t)\dot{X}(t)$  кососимметрична при всех  $t$ .

**Доказательство.** Положим  $A(t) := X^\top(t)X(t)$ ,  $B(t) := X^{-1}(t)\dot{X}(t)$ . Имеем

$$(2.10) \quad \dot{A} = \dot{X}^\top X + X^\top \dot{X} = B^\top A + AB.$$

Матрица  $X(t)$  ортогональна тогда и только тогда, когда  $A(t) = E$ . Если  $A(t) = E$  для всех  $t$ , то из (2.10) следует, что  $B^\top(t) + B(t) = 0$  для всех  $t$ . Пусть, наоборот,  $B(t)$  кососимметрична (то есть  $B^\top(t) + B(t) = 0$ ) при всех  $t$  и  $A(0) = E$ . Тогда постоянная функция  $A(t) = E$  является решением уравнения (2.10) с этим начальным условием. Остаётся воспользоваться единственностью решения. ■

Вернёмся к доказательству. Обозначим

$$A(s) = \begin{pmatrix} v(s) & n(s) & b(s) \end{pmatrix},$$

где  $v, n, b$  найдены из (2.8). Ортонормированность базиса  $(v, n, b)$  означает ортогональность матрицы  $A(s)$ . В начальный момент  $s = s_0$  условие ортогональности выполнено. Уравнения (2.8) переписываются в виде

$$A' = A \begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & -\varkappa \\ 0 & \varkappa & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда по лемме (2.34) матрица  $A(s)$  ортогональна при всех  $s$ . ■

**Задача 2.35.** Дана кривая  $r(t) = (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t, t)$ .

- (1) Привести её к натуральному параметру.
- (2) Найти репер Френе в каждой точке.
- (3) Найти кривизну и кручение в каждой точке.

**Решение.** У этой кривой легко пишутся производные всех порядков:

$$\begin{aligned} \dot{r}(t) &= (\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t, 1), \\ \ddot{r}(t) &= (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t, 0), \\ \dddot{r}(t) &= (\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t, 0). \end{aligned}$$

- (1) Ищем натуральный параметр по формуле длины кривой:

$$s(t) = \int_0^t |\dot{r}(t)| dt = \int_0^t \sqrt{\operatorname{sh}^2 t + \operatorname{ch}^2 t + 1} dt = \sqrt{2} \int_0^t \operatorname{ch} t dt = \operatorname{sh} t \sqrt{2}.$$

Теперь надо каждую координату вектора  $r(t)$  выразить через натуральный параметр. Для первых двух координат это делается совсем тривиально, а для третьей надо решить квадратное уравнение относительно  $e^t$ :

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{2} \cdot \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \\ e^{2t} - s\sqrt{2} \cdot e^t - 1 &= 0, \\ e^t &= \frac{s\sqrt{2} + \sqrt{2s^2 + 4}}{2} = \frac{s}{\sqrt{2}} + \sqrt{s^2 + 2}, \\ t &= \ln \left( \frac{s}{\sqrt{2}} + \sqrt{s^2 + 2} \right). \end{aligned}$$

Здесь выбрали положительный корень квадратного уравнения, так как  $e^t > 0$  для всех  $t$ . Итого, получаем

$$r(s) = \left( \frac{s}{\sqrt{2}}, \sqrt{s^2 + 2}, \ln \left( \frac{s}{\sqrt{2}} + \sqrt{s^2 + 2} \right) \right).$$

(2) Воспользуемся ортогонализацией Грама — Шмидта:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|} = \frac{1}{\operatorname{ch} t \sqrt{2}} (\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \operatorname{th} t, 1, \frac{1}{\operatorname{ch} t} \right),$$

теперь найдём вектор, совпадающий по направлению с  $\mathbf{n}(t)$ :

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) - \frac{\langle \mathbf{v}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t) \rangle}{\langle \mathbf{v}(t), \mathbf{v}(t) \rangle} \mathbf{v}(t) = (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t, 0) - \operatorname{sh} t \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \operatorname{th} t, 1, \frac{1}{\operatorname{ch} t} \right) = \left( \frac{1}{\operatorname{ch} t}, 0, -\operatorname{th} t \right).$$

Осталось его нормировать, для этого вычислим квадрат его длины:

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 t} + \operatorname{th}^2 t = \frac{1 + \operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t} = 1.$$

Таким образом, нормировать ничего не надо, и  $\mathbf{n}(t) = (1/\operatorname{ch} t, 0, -\operatorname{th} t)$ . Осталось только найти вектор бинормали, это проще делать уже не по Граму — Шмидту, а просто по определению:

$$\mathbf{b} = \mathbf{v} \times \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \operatorname{th} t & 1 & \frac{1}{\operatorname{ch} t} \\ \frac{1}{\operatorname{ch} t} & 0 & -\operatorname{th} t \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\operatorname{th} t, 1, -\frac{1}{\operatorname{ch} t} \right).$$

(3) Так как мы уже нашли репер Френе, нам проще не пользоваться формулами (2.1) и (2.9) (и тем более не расписывать через натуральный параметр), а исходить из формул Френе. Мы знаем, что  $\dot{\mathbf{v}} = k\mathbf{n}$ , тогда можно просто «подобрать» коэффициент пропорциональности между нужными векторами.

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}, 0, -\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t} \right) = k(t) \cdot \left( \frac{1}{\operatorname{ch} t}, 0, -\operatorname{th} t \right).$$

Отсюда сразу видно, что  $k(t) = 1/(\operatorname{ch} t \sqrt{2})$ . Можно так же поступить и для кручения, ведь мы знаем, что  $\dot{\mathbf{b}} = -\varkappa \mathbf{n}$ :

$$\dot{\mathbf{b}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}, 0, \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t} \right) = -\varkappa(t) \cdot \left( \frac{1}{\operatorname{ch} t}, 0, -\operatorname{th} t \right).$$

Получаем  $\varkappa(t) = 1/(\operatorname{ch} t \sqrt{2})$ . ■

Решим задачу нахождения кривизны и кручения кривой, которая задана не параметрически, а системой уравнений.

**Задача 2.36.** Найти кривизну и кручение кривой, заданной уравнениями

$$\begin{cases} x^2 + z^2 - y^2 = 1, \\ y^2 - 2x + z = 0 \end{cases}$$

в точке  $(1, 1, 1)$ .

**Решение.** Сначала проверим, что в окрестности этой точки пересечение данных поверхностей действительно представляет собой гладкую кривую. Для этого, согласно теореме 2.7, достаточно проверить, что точка  $(1, 1, 1)$  является регулярной для отображения  $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ , где  $f_1(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2 - 1$ ,  $f_2(x, y, z) = -2x + y^2 + z$ .

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f_1|_{(1,1,1)} &= (2x, -2y, 2z)|_{(1,1,1)} = (2, -2, 2), \\ \operatorname{grad} f_2|_{(1,1,1)} &= (-2, 2y, 1)|_{(1,1,1)} = (-2, 2, 1). \end{aligned}$$

Видим, что градиенты в интересующих нас точках в самом деле линейно независимы, то есть  $\text{rk } J_f(1, 1, 1) = 2$ . Далее мы хотим явно параметризовать данную кривую в окрестности нашей точки. И мы уже знаем, что в качестве параметра нам точно подойдёт какая-то из координат (замечание после доказательства предложения 2.5), но важно точно понять, какая именно. Нужно посмотреть на матрицу Якоби (которая на самом деле уже выписана сверху) и увидеть два линейно независимых столбца. Подойдут, например, последние два, так что будем выражать переменные  $y$  и  $z$  через  $x$ . Целиком выразить  $y$  и  $z$  из данной нам системы можно, но проблематично. Тем более, позднее мы собираемся пользоваться формулами (2.1) и (2.9), так что нам нужно будет знать их производные вплоть до третьего порядка. Однако можно посмотреть на это по-другому — кроме первых трёх производных нам больше ничего не нужно, так что их и будем искать. Напишем ряды Тейлора с неопределёнными коэффициентами вблизи точки  $x = 1$ , но чтобы избавиться от обилия возникающих скобок, сделаем замену  $\tilde{x} = x - 1$ :

$$\begin{aligned} y(\tilde{x}) &= 1 + a_1\tilde{x} + a_2\tilde{x}^2 + a_3\tilde{x}^3 + \bar{o}(\tilde{x}^3), \\ z(\tilde{x}) &= 1 + b_1\tilde{x} + b_2\tilde{x}^2 + b_3\tilde{x}^3 + \bar{o}(\tilde{x}^3). \end{aligned}$$

Найдём коэффициенты подстановкой в данную нам систему. Для упрощения вычислений можно сложить два уравнения, получив новое уравнение

$$\begin{aligned} x^2 + z^2 - 2x + z &= 1, \\ (x - 1)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} &= 0, \end{aligned}$$

которое связывает  $z$  и  $x$ . В нём надо сделать нашу замену и подставить разложение  $z(\tilde{x})$ :

$$\begin{aligned} \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{9}{4} - \tilde{x}^2, \\ \left(\frac{3}{2} + b_1\tilde{x} + b_2\tilde{x}^2 + b_3\tilde{x}^3 + \bar{o}(\tilde{x}^3)\right)^2 &= \frac{9}{4} - \tilde{x}^2. \end{aligned}$$

Раскрываем скобки, отбрасывая члены порядка малости  $\bar{o}(\tilde{x}^3)$ , и пишем систему на равенство коэффициентов получившихся многочленов в левой и правой части:

$$\begin{cases} 3b_3 + 2b_1b_2 = 0, \\ b_1^2 + 3b_2 = -1, \\ 3b_1 = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = -\frac{1}{3}$ ,  $b_3 = 0$ . Подставляя, получаем  $z(\tilde{x}) = 1 - \frac{1}{3}\tilde{x}^2 + \bar{o}(\tilde{x}^3)$ . Теперь можем подставить найденное во второе уравнение системы и выразить  $y(\tilde{x})$ .

$$\begin{aligned} (1 + a_1\tilde{x} + a_2\tilde{x}^2 + a_3\tilde{x}^3 + \bar{o}(\tilde{x}^3))^2 - 2(\tilde{x} + 1) + 1 - \frac{1}{3}\tilde{x}^2 &= 0, \\ (1 + a_1\tilde{x} + a_2\tilde{x}^2 + a_3\tilde{x}^3 + \bar{o}(\tilde{x}^3))^2 &= 1 + 2\tilde{x} + \frac{1}{3}\tilde{x}^2. \end{aligned}$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} 2a_3 + 2a_1a_2 = 0, \\ a_1^2 + 2a_2 = \frac{1}{3}, \\ 2a_1 = 2. \end{cases}$$

Отсюда  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = -\frac{1}{3}$ ,  $a_3 = \frac{1}{3}$ . Таким образом,  $y(\tilde{x}) = 1 + \tilde{x} - \frac{1}{3}\tilde{x}^2 + \frac{1}{3}\tilde{x}^3 + \bar{o}(\tilde{x}^3)$ . Теперь совершим обратную замену:

$$\begin{aligned} y(x) &= 1 + (x-1) - \frac{1}{3}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \bar{o}((x-1)^3), \\ z(x) &= 1 - \frac{1}{3}(x-1)^2 + \bar{o}((x-1)^3). \end{aligned}$$

Из найденного разложения находим:  $y'(1) = 1$ ,  $y''(1) = -\frac{1}{3} \cdot 2! = -\frac{2}{3}$ ,  $y'''(1) = \frac{1}{3} \cdot 3! = 2$  и  $z'(1) = 0$ ,  $z''(1) = -\frac{1}{3} \cdot 2! = -\frac{2}{3}$ ,  $z'''(1) = 0$ . По формуле кривизны (2.1) имеем

$$k(1) = \frac{|(1, 1, 0) \times (0, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})|}{|(1, 1, 0)|^3} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

А по формуле кручения (2.9)

$$\kappa(1) = \frac{\text{Vol}_{\text{ор}}((1, 1, 0), (0, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}), (0, 2, 0))}{|(1, 1, 0) \times (0, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})|^2} = 1.$$

■

## Эволюта и эвольвента плоской кривой

**Определение 2.37.** Эволютой плоской бирегулярной кривой  $\gamma$  называется кривая, которую описывает центр кривизны кривой  $\gamma$ .

Пусть  $\mathbf{r}(s)$  — натуральная параметризация кривой  $\gamma$ , тогда имеем параметризацию (уже не обязательно натуральную) эволюты:

$$(2.11) \quad \tilde{\mathbf{r}}(s) = \mathbf{r}(s) + \frac{1}{k(s)}\mathbf{n}(s).$$

**Предложение 2.38.** Кривая  $\tilde{\gamma}$  является эволютой плоской бирегулярной кривой  $\gamma$  тогда и только тогда, когда  $\tilde{\gamma}$  является огибающей семейства нормалей к  $\gamma$ .

**Доказательство.** Пусть  $\mathbf{r}(s)$  — натуральная параметризация кривой  $\gamma$ .

$\Rightarrow$ . Параметризация эволюты  $\tilde{\gamma}$  имеет вид (2.11). В каждой точке можем вычислить вектор скорости:<sup>2</sup>

$$\tilde{\mathbf{r}}' = \dot{\mathbf{r}} + \frac{1}{k}\dot{\mathbf{n}} - \frac{k'}{k^2}\mathbf{n} = -\frac{k'}{k^2}\mathbf{n},$$

что и требовалось. (Во втором равенстве воспользовались формулой Френе для плоской кривой  $\gamma$ .)

$\Leftarrow$ . Можем записать параметризацию  $\tilde{\gamma}$  в виде

$$\tilde{\mathbf{r}}(s) = \mathbf{r}(s) + \lambda(s)\mathbf{n}(s).$$

Кривая  $\tilde{\gamma}$  является огибающей поля нормалей к  $\gamma$ . Это значит, что в каждой точке  $s$  вектор скорости  $\tilde{\mathbf{r}}'(s)$  кривой  $\tilde{\gamma}$  должен быть коллинеарен вектору главной нормали  $\mathbf{n}(s)$  кривой  $\gamma$ , это задаёт условие на коэффициент  $\lambda$ :

$$\tilde{\mathbf{r}}' = (1 - k\lambda)\mathbf{v} + \lambda'\mathbf{n}.$$

Отсюда сразу получаем  $\lambda = 1/k$ , что и требовалось. ■

**Определение 2.39.** Эвольвентой плоской бирегулярной кривой  $\gamma$  называется кривая, которую описывает неподвижная точка прямой, катящейся без проскальзывания по  $\gamma$ .

<sup>2</sup>Здесь производные берутся по одному и тому же параметру  $s$ , но обозначены по-разному (точками и штрихами), потому что для кривой  $\gamma$  этот параметр натуральный, а для кривой  $\tilde{\gamma}$  — нет.



Эвольвента (в отличие от эволюты) не определена однозначно, ведь можно выбрать любую точку на катящейся прямой. Так что у бирегулярной плоской кривой имеется однопараметрическое семейство эвольвент. Если  $\mathbf{r}(s)$  — натуральная параметризация кривой  $\gamma$ , то легко получить (опять же, необязательно натуральную) параметризацию эвольвенты:

$$(2.12) \quad \hat{\mathbf{r}}(s) = \mathbf{r}(s) - (s - s_0)\dot{\mathbf{r}}(s).$$

Константа  $s_0$  как раз соответствует изначальному смещению точки по скользящей прямой, её выбор соответствует выбору эвольвенты.

**Теорема 2.40.** Пусть  $\gamma$  и  $\hat{\gamma}$  — регулярные кривые. Следующие условия равносильны:

- (1) кривая  $\hat{\gamma}$  является эвольвентой кривой  $\gamma$ ;
- (2) кривая  $\gamma$  является огибающей поля нормалей к  $\hat{\gamma}$ ;
- (3) кривая  $\gamma$  является эволютой кривой  $\hat{\gamma}$ .

**Доказательство.** Пусть  $\mathbf{r}(s)$  — регулярная параметризация кривой  $\gamma$ .

(1)  $\Rightarrow$  (2). Кривая  $\hat{\gamma}$  имеет параметризацию (2.12). Вычисляем вектор скорости:

$$\hat{\mathbf{r}}' = \dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}} - (s - s_0)\ddot{\mathbf{r}}$$

и видим, что он перпендикулярен вектору  $\dot{\mathbf{r}}$ .

(2)  $\Leftarrow$  (1). Если кривая  $\hat{\gamma}$  ортогональна касательным к  $\gamma$ , то её параметризация имеет вид  $\hat{\mathbf{r}}(s) = \mathbf{r}(s) + \lambda(s)\dot{\mathbf{r}}(s)$ . При этом должно быть выполнено  $\langle \hat{\mathbf{r}}', \dot{\mathbf{r}} \rangle = 0$ :

$$0 = \langle (1 + \lambda')\dot{\mathbf{r}} + \lambda\ddot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}} \rangle = 1 + \lambda'.$$

Отсюда  $\lambda(s) = -(s - s_0)$ , то есть данная кривая является эвольвентой кривой  $\gamma$ .

(2)  $\Leftrightarrow$  (3). См. предложение 2.38. ■

### Дополнительные задачи

Здесь собраны задачи, которые показались мне интересными, но не вписались в основное повествование. Какие-то из них я умею решать, какие-то нет. Так или иначе, я надеюсь когда-нибудь написать сюда все решения.

**Задача 2.41.** Пусть  $\mathbf{r}(s)$  — натуральная параметризация бирегулярной кривой  $\gamma$  в  $\mathbb{R}^3$  с ненулевым кручением. Кривая  $\gamma$  лежит на сфере тогда и только тогда, когда

$$\frac{\kappa}{k} = \frac{d}{ds} \left( \frac{dk/ds}{\kappa k^2} \right).$$

**Задача 2.42.** Построить гладкую замкнутую плоскую кривую с числом вращения 0.

**Задача 2.43.** Доказать, что для замкнутой регулярной кривой в  $\mathbb{R}^3$  выполняется

$$\oint_{\gamma} k(s) ds \geq 2\pi.$$

**Задача 2.44.** Пусть  $\gamma$  — гладкая регулярная замкнутая кривая. Доказать, что

$$\oint_{\gamma} (\mathbf{r} dk + \kappa \mathbf{b} ds) = \mathbf{0}.$$

**Задача 2.45.** Вершинами кривой называются точки этой кривой, в которых  $k'(s) = 0$ . Доказать, что у любой замкнутой регулярной кривой есть по крайней мере четыре вершины.

## Про механические часы

Фраза из эпитафы связана с историей создания точных механических часов, рассказанной нам Александром Александровичем на семинаре.

*Циклоидой* называется кривая, которую описывает неподвижная точка на окружности, движущейся по прямой без проскальзывания.

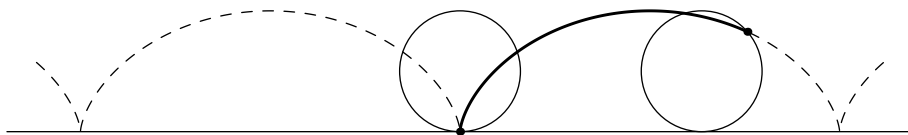


Рис. 2.4: Циклоида

В XVII веке голландский математик<sup>3</sup> Х. Гюйгенс описал устройство точных механических часов, конструкция которых основана на маятнике, который обладает постоянным периодом качения независимо от амплитуды. Это действительно важное свойство — период колебания маятника в часах не должен зависеть от силы, с которой заводят часы, или от эффекта постепенного затухания колебаний. Как же может быть устроен такой маятник? Оказывается, конец его нити должен вырисовывать перевёрнутую «чашу циклоиды». Немного позже мы докажем, почему это действительно так, но сейчас зададимся вопросом, как же сделать такой *циклоидный маятник*.

Сначала выведем уравнение циклоиды. Примем за  $t = 0$  момент времени, когда точка окружности, движение которой мы отслеживаем, находится на прямой, по которой катится эта окружность. Предположим также, что окружность единичная, а её центр движется равномерно на единицу расстояния за единицу времени. Ясно, что все эти допущения не влияют существенно на уравнения, которые мы будем получать.

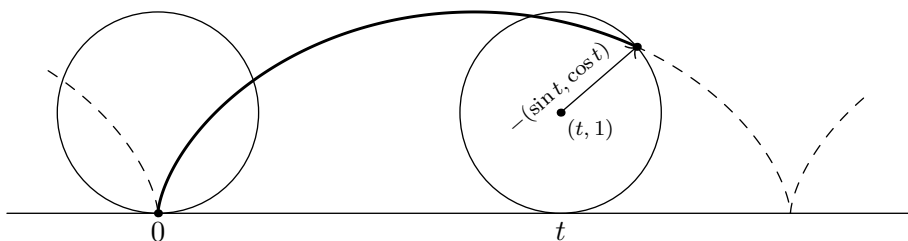


Рис. 2.5

Центр окружности в момент времени  $t$  находится в точке с координатами  $(t, 1)$ . Теперь представим, что окружность просто равномерно вращается с закреплённым центром. Тогда движение её граничной точки, конечно, будет описываться вектором  $-(\sin t, \cos t)$ . Собирая воедино движение центра и точки на границе, получаем искомые координаты в момент времени  $t$ :  $(t - \sin t, 1 - \cos t)$ . Однако далее мы всё время будем работать с «перевёрнутой» циклоидой, поэтому отразим её относительно горизонтальной прямой:

$$\mathbf{r}(t) = (t - \sin t, \cos t - 1).$$

<sup>3</sup>Гюйгенс, конечно, был не только математиком, но ещё и физиком и философом, что, впрочем, не было исключением для того времени.

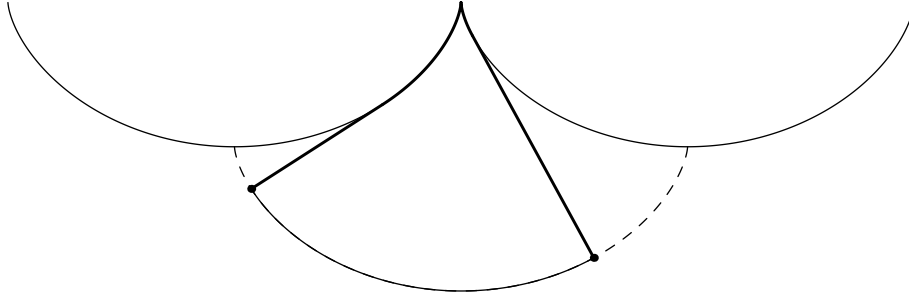


Рис. 2.6: Циклоидный маятник

Рассмотрим маятник, у которого нить закреплена в вершине между двумя циклоидами (рис. 2.6). Оказывается, свободный конец нити такого маятника будет вырисовывать циклоиду. Ясно, что на самом деле он будет вырисовывать кусок эвольвенты этой циклоиды (просто по определению). Так что утверждение сводится к следующей задаче.

**Задача 2.46.** Доказать, что одной из эвольвент циклоиды является конгруэнтная ей циклоида, сдвинутая таким образом, чтобы её «острия» перешли в вершины.

**Решение.** Уравнения эвольвент легко писать, если на исходной кривой введён натуральный параметр. В данном случае это не так, и перейти к натуральному параметру затруднительно. Однако можно заметить, что формулу (2.12) легко модифицировать и на случай произвольного параметра:

$$\hat{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{r}(t) - \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \int_{t_0}^t |\mathbf{r}'(t)| dt.$$

Действительно, мы просто везде выразили натуральный параметр  $s$  через какой-то произвольный параметр  $t$ . Вычисляем всё, что нужно, положив  $t_0 = \pi$  (так обнуляется константа в определённом интеграле).

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= (1 - \cos t, -\sin t), \\ |\mathbf{r}'(t)|^2 &= (1 - \cos t)^2 + \sin^2 t = 2(1 - \cos t) = 4 \sin^2 \frac{t}{2} \Rightarrow |\mathbf{r}'(t)| = 2 \sin \frac{t}{2}, \\ \int_{\pi}^t 2 \sin \frac{t}{2} dt &= 4 \int_{\pi}^t \sin \frac{t}{2} d\left(\frac{t}{2}\right) = -4 \cos \frac{t}{2} \Big|_{\pi}^t = -4 \cos \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

А теперь пишем, собственно, уравнение эвольвенты:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}}(t) &= (t - \sin t, \cos t - 1) - \frac{\mathbf{r}'\left(\sin^2 \frac{t}{2}, -\sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}\right)}{2 \cdot \sin \frac{t}{2}} \cdot \left(-4 \cos \frac{t}{2}\right) = \\ &= (t - \sin t, \cos t - 1) + 2 \left(2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}, -2 \cos^2 \frac{t}{2}\right) = \\ &= (t - \sin t, \cos t - 1) + (2 \sin t, -2 - 2 \cos t) = (t + \sin t, -\cos t - 3). \end{aligned}$$

Итак, получили

$$\hat{\mathbf{r}}(t) = (t + \sin t, -\cos t - 3) = ((t + \pi) - \sin(t + \pi), \cos(t + \pi) - 1) - (\pi, 2).$$

Видно, что это сдвинутая циклоида. Легко проверить, что она сдвинута именно так, как указано в условии. ■

Теперь мы можем доказать главное утверждение — что период колебания такого маятника не зависит от амплитуды. Сформулировано оно здесь так же, как в задачнике.

**Задача 2.47.** Доказать, что период колебаний материальной точки малой массы, движущейся по чаше перевёрнутой циклоиде без трения в поле силы тяжести, не зависит от её начального положения.

### 3. Двумерные поверхности в трёхмерном пространстве

Это яма, вырытая для нас  
великими предшественниками.

А. А. Гайфуллин

#### Криволинейные системы координат в $\mathbb{R}^n$

Рассмотрим область  $U$  пространства  $\mathbb{R}^n$  с декартовыми координатами  $(x^1, \dots, x^n)$ . Предположим, что в другом экземпляре пространства  $\mathbb{R}^n$  с координатами  $(u^1, \dots, u^n)$  задана область  $V$  и установлено взаимно однозначное соответствие между точками областей  $U$  и  $V$ . В этом случае для задания точки области  $U$  мы можем использовать набор чисел  $(u^1, \dots, u^n)$  — декартовы координаты соответствующей точки в области  $V$ .

**Определение 3.1.** Будем говорить, что  $(u^1, \dots, u^n)$  являются *криволинейными координатами* в области  $U$ , если:

(1) функции

$$x^i = x^i(u^1, \dots, u^n),$$

задающие биекцию между областями  $U$  и  $V$ , достаточно гладкие в области  $V$ ;

(2) якобиан  $J = \det \left( \frac{\partial x^i}{\partial u^j} \right)$  отличен от нуля в области  $V$  (условие регулярности);

По теореме об обратной функции (якобиан не равен нулю) существуют достаточно гладкие обратные отображения  $u^i = u^i(x^1, \dots, x^n)$ , причём якобиан  $\tilde{J} = \det \left( \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \right)$  отличен от нуля (он равен  $J^{-1}$ ).

В области  $U$  условия  $u^i = \text{const}$  определяют  $n$  семейств *координатных гиперповерхностей*. (Координатные гиперповерхности одного и того же семейства не пересекаются.)

Любые  $n - 1$  координатных гиперповерхностей, принадлежащих различным семействам, пересекаются по некоторой кривой. Такие кривые называют *координатными линиями*.

**Определение 3.2.** Система криволинейных координат, вектора скорости координатных линий которой перпендикулярны друг другу, называется *ортогональной*.

**Задача 3.3.** Для эллипсоидальной системы координат, определяемой равенствами

$$\begin{aligned} x_1^2 &= \frac{(a_1 - u_1)(a_1 - u_2)(a_1 - u_3)}{(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)}, \\ x_2^2 &= \frac{(a_2 - u_1)(a_2 - u_2)(a_2 - u_3)}{(a_3 - a_2)(a_1 - a_2)}, \\ x_3^2 &= \frac{(a_3 - u_1)(a_3 - u_2)(a_3 - u_3)}{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)}, \end{aligned}$$

где  $a_1 > a_2 > a_3 > 0$ ,  $u_1 < a_3 < u_2 < a_2 < u_3 < a_1$ ,

(1) найти координатные поверхности и координатные линии;

(2) посчитать определители  $\det \left( \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \right)$  и  $\det \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$  и установить, в каких точках пространства  $\mathbb{R}^3$  нарушается взаимная однозначность соответствия между криволинейными и прямоугольными декартовыми координатами;

(3) определить, является ли эта система координат ортогональной.

**Решение.**

(1) Фиксируем  $u_1 = \lambda$ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{x_1^2}{a_1 - \lambda} + \frac{x_2^2}{a_2 - \lambda} + \frac{x_3^2}{a_3 - \lambda} &= \frac{(a_1 - u_2)(a_1 - u_3)}{(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)} + \frac{(a_2 - u_2)(a_2 - u_3)}{(a_3 - a_2)(a_1 - a_2)} + \\ &+ \frac{(a_3 - u_2)(a_3 - u_3)}{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)} = \frac{1}{(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)} \left( (a_3 - a_2)(a_1 - u_2)(a_1 - u_3) + \right. \\ &\left. + (a_1 - a_3)(a_2 - u_2)(a_2 - u_3) + (a_2 - a_1)(a_3 - u_2)(a_3 - u_3) \right) = \varphi(u_2, u_3). \end{aligned}$$

При этом  $\varphi = Au_2 + Bu_3 + Cu_2u_3 + D$ . Нетрудно убедиться, что все коэффициенты, кроме  $D$ , нулевые, а  $D$  равен 1. Например, для коэффициента при  $u_2$  имеем

$$\begin{aligned} (\dots) \cdot A &= (a_1a_2 - a_1a_3) + (a_2a_3 - a_1a_2) + (a_1a_3 - a_2a_3) = \\ &= \cancel{(a_1a_2 - a_1a_2)} + \cancel{(a_2a_3 - a_2a_3)} + \cancel{(a_3a_1 - a_3a_1)} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда,  $\varphi \equiv 1$ . Итак, имеем координатные поверхности

$$\frac{x_1^2}{a_1 - \lambda} + \frac{x_2^2}{a_2 - \lambda} + \frac{x_3^2}{a_3 - \lambda} = 1,$$

представляющие собой эллипсоиды.

Для остальных координат всё аналогично. Фиксируя  $u_2 = \mu$ , получаем семейство однополостных гиперболоидов:

$$\frac{x_1^2}{a_1 - \mu} + \frac{x_2^2}{a_2 - \mu} - \frac{x_3^2}{\mu - a_3} = 1.$$

(Формула та же, но  $a_3 < \mu$ .) Для фиксированного  $u_3 = \nu$  получаем семейство двуполостных гиперболоидов:

$$\frac{x_1^2}{a_1 - \nu} - \frac{x_2^2}{\nu - a_2} - \frac{x_3^2}{\nu - a_3} = 1.$$

(2) Найдём, например, производную  $\partial x_1 / \partial u_2$ :

$$\begin{aligned} x_1(u_2) &= \sqrt{\frac{(a_1 - u_1)(a_1 - u_2)(a_1 - u_3)}{(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)}} = \sqrt{\frac{(a_1 - u_1)(a_1 - u_3)}{(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)}} \cdot \sqrt{a_1 - u_2}, \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2} &= \sqrt{\frac{(a_1 - u_1)(a_1 - u_3)}{(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)}} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{a_1 - u_2}} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{(a_1 - u_1)(a_1 - u_3)}{(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_1 - u_2)}}. \end{aligned}$$

Отсюда понятен общий вид выражения  $\partial x_i / \partial u_j$ . Считаем определитель:

$$\begin{aligned} \det \left( \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \right) &= \\ &= -\frac{1}{8} \det \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{(a_1 - u_2)(a_1 - u_3)}{(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_1 - u_1)}} & \sqrt{\frac{(a_1 - u_1)(a_1 - u_3)}{(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_1 - u_2)}} & \sqrt{\frac{(a_1 - u_1)(a_1 - u_2)}{(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_1 - u_3)}} \\ \sqrt{\frac{(a_2 - u_2)(a_2 - u_3)}{(a_1 - a_2)(a_3 - a_2)(a_2 - u_1)}} & \sqrt{\frac{(a_2 - u_1)(a_2 - u_3)}{(a_1 - a_2)(a_3 - a_2)(a_2 - u_2)}} & \sqrt{\frac{(a_2 - u_1)(a_2 - u_2)}{(a_1 - a_2)(a_3 - a_2)(a_2 - u_3)}} \\ \sqrt{\frac{(a_3 - u_2)(a_3 - u_3)}{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)(a_3 - u_1)}} & \sqrt{\frac{(a_3 - u_1)(a_3 - u_3)}{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)(a_3 - u_2)}} & \sqrt{\frac{(a_3 - u_1)(a_3 - u_2)}{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)(a_3 - u_3)}} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)} \det \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{(a_1 - u_2)(a_1 - u_3)}{a_1 - u_1}} & \sqrt{\frac{(a_1 - u_1)(a_1 - u_3)}{a_1 - u_2}} & \sqrt{\frac{(a_1 - u_1)(a_1 - u_2)}{a_1 - u_3}} \\ \sqrt{\frac{(a_2 - u_2)(a_2 - u_3)}{a_2 - u_1}} & \sqrt{\frac{(a_2 - u_1)(a_2 - u_3)}{a_2 - u_2}} & \sqrt{\frac{(a_2 - u_1)(a_2 - u_2)}{a_2 - u_3}} \\ \sqrt{\frac{(a_3 - u_2)(a_3 - u_3)}{a_3 - u_1}} & \sqrt{\frac{(a_3 - u_1)(a_3 - u_3)}{a_3 - u_2}} & \sqrt{\frac{(a_3 - u_1)(a_3 - u_2)}{a_3 - u_3}} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)} \sqrt{-\prod_{i,j=1}^3 (a_i - u_j)} \cdot \det \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1 - u_1} & \frac{1}{a_1 - u_2} & \frac{1}{a_1 - u_3} \\ \frac{1}{a_2 - u_1} & \frac{1}{a_2 - u_2} & \frac{1}{a_2 - u_3} \\ \frac{1}{a_3 - u_1} & \frac{1}{a_3 - u_2} & \frac{1}{a_3 - u_3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Чтобы вычислить оставшийся определитель, вычтем первую строку из двух других:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1-u_1} & \frac{1}{a_1-u_2} & \frac{1}{a_1-u_3} \\ \frac{1}{a_2-u_1} & \frac{1}{a_2-u_2} & \frac{1}{a_2-u_3} \\ \frac{1}{a_3-u_1} & \frac{1}{a_3-u_2} & \frac{1}{a_3-u_3} \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1-u_1} & \frac{1}{a_1-u_2} & \frac{1}{a_1-u_3} \\ \frac{a_1-u_2}{(a_1-u_1)(a_2-u_1)} & \frac{a_1-u_2}{(a_1-u_2)(a_2-u_2)} & \frac{a_1-u_3}{(a_1-u_3)(a_2-u_3)} \\ \frac{a_1-u_3}{(a_1-u_1)(a_3-u_1)} & \frac{a_1-u_3}{(a_1-u_2)(a_3-u_2)} & \frac{a_1-u_3}{(a_1-u_3)(a_3-u_3)} \end{pmatrix} = \\ &= (a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \cdot \det \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1-u_1} & \frac{1}{a_1-u_2} & \frac{1}{a_1-u_3} \\ \frac{1}{(a_1-u_1)(a_2-u_1)} & \frac{1}{(a_1-u_2)(a_2-u_2)} & \frac{1}{(a_1-u_3)(a_2-u_3)} \\ \frac{1}{(a_1-u_1)(a_3-u_1)} & \frac{1}{(a_1-u_2)(a_3-u_2)} & \frac{1}{(a_1-u_3)(a_3-u_3)} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}{(a_1 - u_1)(a_1 - u_2)(a_1 - u_3)} \det \begin{pmatrix} \frac{1}{a_2-u_1} & \frac{1}{a_2-u_2} & \frac{1}{a_2-u_3} \\ \frac{1}{a_3-u_1} & \frac{1}{a_3-u_2} & \frac{1}{a_3-u_3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь вычтем первый столбец из двух остальных:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \frac{1}{a_2-u_1} & \frac{1}{a_2-u_2} & \frac{1}{a_2-u_3} \\ \frac{1}{a_3-u_1} & \frac{1}{a_3-u_2} & \frac{1}{a_3-u_3} \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} \frac{1}{a_2-u_1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{a_3-u_1} & \frac{u_1-u_2}{(a_2-u_2)(a_3-u_1)} & \frac{u_1-u_3}{(a_2-u_3)(a_3-u_1)} \end{pmatrix} = \\ &= \det \begin{pmatrix} \frac{u_1-u_2}{(a_2-u_2)(a_3-u_1)} & \frac{u_1-u_3}{(a_2-u_3)(a_3-u_1)} \\ \frac{u_1-u_2}{(a_3-u_2)(a_3-u_1)} & \frac{u_1-u_3}{(a_3-u_2)(a_3-u_3)} \end{pmatrix} = \frac{(u_1 - u_2)(u_1 - u_3)}{(a_2 - u_1)(a_3 - u_1)} \det \begin{pmatrix} \frac{1}{a_2-u_2} & \frac{1}{a_2-u_3} \\ \frac{1}{a_3-u_2} & \frac{1}{a_3-u_3} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{(u_1 - u_2)(u_1 - u_3)}{(a_2 - u_1)(a_3 - u_1)} \left( \frac{1}{(a_2 - u_2)(a_3 - u_3)} - \frac{1}{(a_3 - u_2)(a_2 - u_3)} \right) = \\ &= \frac{(u_1 - u_2)(u_1 - u_3)(u_2 - u_3)(a_3 - a_2)}{(a_2 - u_1)(a_3 - u_1)(a_2 - u_2)(a_3 - u_3)(a_3 - u_2)(a_2 - u_3)}. \end{aligned}$$

Подставляем результат в промежуточную формулу:

$$\begin{aligned} &\frac{(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)}{\prod_{i,j=1}^3 (a_i - u_j)} (u_1 - u_2)(u_2 - u_3)(u_3 - u_1). \end{aligned}$$

И, наконец, пишем ответ:

$$\det \left( \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \right) = \frac{(u_1 - u_2)(u_2 - u_3)(u_3 - u_1)}{8 \sqrt{-\prod_{i,j=1}^3 (a_i - u_j)}}.$$

Взаимная однозначность координат нарушается в точках, где якобиан равен 0. Как видно из выведенной нами формулы, это происходит при  $u_i = u_j$  (для каких-то  $i \neq j$ ). Однако по условию  $u_1 < u_2 < u_3$ , так что в выбранной области эллипсоидальные координаты взаимно однозначны.

- (3) Из полученных уравнений координатных поверхностей видно, что они образуют квадратики, являющиеся телами вращения софокусных эллипсов и гипербол. А как известно из курса аналитической геометрии, софокусные эллипс и гипербола перпендикулярны друг другу. (А софокусные друг другу эллипсы не пересекаются, как и софокусные друг другу гиперболы.) Значит, и координатные линии, получающиеся как пересечения таких координатных поверхностей, перпендикулярны друг другу. Так что данная система координат является ортогональной. ■

**Задача 3.4.** Преобразовать оператор Лапласа  $\Delta V := \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$  к полярным координатам  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ .

**Решение.** Формулы перехода от декартовых координат к полярным имеют вид

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

Выражаем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Здесь  $V'_\rho$  и  $V'_\varphi$  — то, что нам нужно. Осталось выразить частные производные  $\rho'_x$  и  $\varphi'_x$ .

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = (\sqrt{x^2 + y^2})'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\rho' \cos \varphi}{\rho'} = \cos \varphi.$$

Отметим, что для вычисления  $\varphi'_x$  нельзя просто взять  $\operatorname{arctg}$  от обеих частей выражения  $\operatorname{tg} \varphi = y/x$ , ведь  $\varphi$  меняется от 0 до  $2\pi$ , а областью значений функции  $\operatorname{arctg}$  является интервал  $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ . Вместо этого выражение можно продифференцировать (по  $x$ ):

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{tg} \varphi) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{y}{x} \right) = -\frac{y}{x^2}.$$

Отсюда находим  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \cos^2 \varphi = -\frac{\sin \varphi}{\rho}$ . Итого,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial \rho} \cos \varphi - \frac{\partial V}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{\rho}.$$

Аналогично находим

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial \rho} \frac{\cos \varphi}{\rho} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \sin \varphi.$$

Переходим к нахождению вторых производных.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \\ &= \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} \cos \varphi - \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi \partial \rho} \frac{\sin \varphi}{\rho} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{\rho^2} \right) \cdot \cos \varphi + \\ &+ \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \rho \partial \varphi} \cos \varphi - \frac{\partial V}{\partial \rho} \sin \varphi - \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \frac{\sin \varphi}{\rho} - \frac{\partial V}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{\rho} \right) \cdot \left( -\frac{\sin \varphi}{\rho} \right). \end{aligned}$$

Раскрывая скобки, получаем

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} \cos^2 \varphi - \frac{\partial^2 V}{\partial \rho \partial \varphi} \frac{\sin 2\varphi}{\rho} + \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \frac{\sin^2 \varphi}{\rho^2} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \frac{\sin 2\varphi}{\rho^2} + \frac{\partial V}{\partial \rho} \frac{\sin^2 \varphi}{\rho}.$$

Аналогично находим

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} \sin^2 \varphi + \frac{\partial^2 V}{\partial \rho \partial \varphi} \frac{\sin 2\varphi}{\rho} + \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \frac{\cos^2 \varphi}{\rho^2} + \frac{\partial V}{\partial \rho} \frac{\cos^2 \varphi}{\rho} - \frac{\partial V}{\partial \varphi} \frac{\sin 2\varphi}{\rho^2}.$$

Полученные выражения нужно сложить:

$$\begin{aligned} \Delta V &= \frac{\partial V}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} \underbrace{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}_1 + \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \underbrace{\left( \frac{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}{\rho^2} \right)}_{1/\rho^2} + \\ &+ \frac{\partial V}{\partial \rho \partial \varphi} \underbrace{\left( -\frac{\sin 2\varphi}{\rho} + \frac{\sin 2\varphi}{\rho} \right)}_0 + \frac{\partial V}{\partial \rho} \underbrace{\left( \frac{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}{\rho} \right)}_{1/\rho} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \underbrace{\left( -2\frac{\sin 2\varphi}{\rho^2} + 2\frac{\sin 2\varphi}{\rho^2} \right)}_0. \end{aligned}$$



Получаем итоговое выражение оператора Лапласа в полярных координатах:

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho}.$$

Эту формулу часто записывают в виде

$$\Delta V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}.$$

■

### Риманова метрика в криволинейных координатах

Функции  $x^i = x^i(u^1, \dots, u^n)$  удобно рассматривать одновременно для всех  $i = 1, \dots, n$ , используя для этого вектор-функцию

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, \dots, u^n), \text{ где } \mathbf{r} = (x^1, \dots, x^n).$$

Векторы  $\mathbf{r}_k = \partial \mathbf{r} / \partial u^k$  имеют направления касательных к координатным линиям, так что в каждой точке области  $U$  они линейно независимы. Они определяют в окрестности некоторой точки  $(u^1, \dots, u^n)$  малый вектор  $d\mathbf{r} = \mathbf{r} du^i$ . Квадрат его длины, выраженный в криволинейных координатах, определяет метрику:

$$ds^2 = \langle d\mathbf{r}, d\mathbf{r} \rangle = \langle \mathbf{r}_i du^i, \mathbf{r}_j du^j \rangle = g_{ij} du^i du^j,$$

где  $g_{ij} = \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j \rangle$  — элементы матрицы Грама векторов  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$ . При переходе к другим координатам  $\tilde{u}^1, \dots, \tilde{u}^n$  матрица Грама преобразуется так, как и положено преобразовываться матрице квадратичной формы (по тензорному закону):

$$(3.1) \quad \tilde{g}_{ij} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tilde{u}^i}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tilde{u}^j} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^k} \frac{\partial u^k}{\partial \tilde{u}^i}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^l} \frac{\partial u^l}{\partial \tilde{u}^j} \right\rangle = \frac{\partial u^k}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^l}{\partial \tilde{u}^j} g_{kl}.$$

**Определение 3.5.** Говорят, что в области  $U \subset \mathbb{R}^n$  задана *риманова метрика*, если для любой криволинейной системы координат  $(u^1, \dots, u^n)$  в  $U$  задана матрица  $g_{ij}(u)$ , которая:

- (1) симметрична:  $g_{ij}(u) = g_{ji}(u)$ ;
- (2) невырождена и положительно определена;
- (3) при замене координат изменяется по формулам (3.1).

Пусть имеем параметризованную кривую  $\mathbf{r}(t)$  в криволинейных координатах  $(u^1, \dots, u^n)$  с римановой метрикой, заданной матрицей  $G = g_{ij}$ . Измеряем длину кривой, заметаемой при изменении параметра от  $a$  до  $b$ :

$$(3.2) \quad l = \int_a^b \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt = \int_a^b \sqrt{\left\langle \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\rangle} dt = \int_a^b \sqrt{\frac{ds^2}{(dt)^2}} dt = \int_a^b \sqrt{g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}} dt.$$

**Задача 3.6.** Проверить, что матрица

$$\mathcal{G}(u, v) = \frac{1}{1 - u^2 - v^2} \begin{pmatrix} 1 - v^2 & uv \\ uv & 1 - u^2 \end{pmatrix}$$

задаёт риманову метрику в единичном круге на плоскости с координатами  $(u, v)$ . Вычислить в этой метрике длину кривой  $u^2 + v^2 = a^2$ , где  $0 < a < 1$ .

**Доказательство.** Нужно проверить лишь то, что матрица  $G$  невырождена и положительно определена, для этого можно воспользоваться критерием Сильвестра. Для минора  $1 \times 1$  всё очевидно, остаётся проверить знак определителя всей матрицы  $2 \times 2$ :

$$\det \mathcal{G} = \frac{(1 - v^2)(1 - u^2) - u^2 v^2}{1 - u^2 - v^2} = \frac{1 - \cancel{u^2} - \cancel{v^2}}{1 - \cancel{u^2} - \cancel{v^2}} = 1.$$

Если параметризовать нашу кривую как  $\mathbf{r}(t) = (u(t), v(t))$ , где  $u(t) = a \cos t$ ,  $v(t) = a \sin t$  (где  $t$  меняется от 0 до  $2\pi$ ), то длина вычисляется по формуле (3.2):

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{\begin{pmatrix} \dot{u}(t) & \dot{v}(t) \end{pmatrix} \mathcal{G} \begin{pmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix}} dt.$$

Подставляем:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sqrt{\begin{pmatrix} -a \sin t & a \cos t \end{pmatrix} \cdot \left( \frac{1}{1-a^2} \begin{pmatrix} 1-a^2 \sin^2 t & a^2 \sin t \cos t \\ a^2 \sin t \cos t & 1-a^2 \cos^2 t \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \end{pmatrix}} dt = \\ = \int_0^{2\pi} \sqrt{\begin{pmatrix} -a \sin t & a \cos t \end{pmatrix} \cdot \left( \frac{1}{1-a^2} \begin{pmatrix} -a \sin t(1-a^2) \\ a \cos t(1-a^2) \end{pmatrix} \right)} dt = \\ = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(\cos^2 t + \sin^2 t)} dt = \int_0^{2\pi} a dt = 2\pi a. \end{aligned}$$

■

Правильно думать, что матрица  $\mathcal{G}(u^1, \dots, u^n)$  (как матрица Грама линейно независимых векторов) симметрична и положительно определена, а потому задаёт скалярное произведение (своё в каждой точке области  $U \subset \mathbb{R}^n$ ). В криволинейной системе координат  $(u^1, \dots, u^n)$  мы работаем именно в этом скалярном произведении. Например, можем считать длины кривых (что уже было продемонстрировано) или углы между кривыми.

**Задача 3.7.** Найти угол между кривыми  $v = 2u + 1$  и  $v = -2u + 1$  на плоскости с координатами  $(u, v)$  с метрикой

$$ds^2 = 2du^2 + 2dudv + 4dv^2.$$

**Решение.** Данная в условии метрика задаётся матрицей

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Параметризуем обе эти кривые:  $\mathbf{r}_1(t) = (t, 2t + 1)$ ,  $\mathbf{r}_2(t) = (t, -2t + 1)$ . Они пересекаются в единственной точке  $(0, 1)$  при  $t = 0$ . Вектора скорости этих кривых в данной точке есть  $\mathbf{v}_1 = (1, 2)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (1, -2)$ . Находим угол между этими векторами по формуле:

$$\cos \angle(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle_{\mathcal{G}}}{\sqrt{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle_{\mathcal{G}}} \cdot \sqrt{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle_{\mathcal{G}}}} = \frac{-14}{\sqrt{22} \cdot \sqrt{14}} = -\sqrt{\frac{7}{11}}.$$

Отсюда получаем  $\angle(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \arccos \sqrt{\frac{7}{11}}$ .

■

## Определение поверхности. Локальные координаты

Наиболее наглядными и интересными с геометрической точки зрения для нас будут двумерные поверхности в  $\mathbb{R}^3$ , поэтому повествование будет строиться именно вокруг них. При желании всё можно легко обобщить на высшие размерности. Все важные формулы и уравнения мы будем переписывать в тензорной форме (в нотации Эйнштейна).

**Определение 3.8.** Множество точек  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$  образует *регулярную поверхность*, если в достаточно малой окрестности  $U \subset \mathbb{R}^3$  каждой своей точки множество  $\mathcal{M}$  задаётся как образ гладкого отображения

$$\mathbf{r}: (u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

из области  $V \subset \mathbb{R}^2$  в  $U$ , и в каждой точке из  $V$  векторы  $\mathbf{r}_u = \partial \mathbf{r} / \partial u$  и  $\mathbf{r}_v = \partial \mathbf{r} / \partial v$  линейно независимы (*условие регулярности*).

Поверхности можно задавать не только параметрически, но и как множество нулей гладкой функции или в виде графика. Обсудим локальную эквивалентность таких заданий.

**Предложение 3.9.** Множество точек  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$  образует регулярную поверхность тогда и только тогда, когда в окрестности каждой своей точки оно представляется как график гладкой функции  $z = f(x, y)$  в подходящих декартовых координатах  $x, y, z$ .

**Доказательство.** График функции является частным случаем параметрического задания, поэтому достаточно доказать только часть «тогда». Пусть  $(u_0, v_0) \in V$ . Векторы  $\mathbf{r}_u$  и  $\mathbf{r}_v$  линейно независимы всюду, так что без ограничения общности можно считать, что минор  $\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$  обратим в точке  $(u_0, v_0)$ . По теореме об обратной функции в некоторой окрестности точки  $(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0))$  определено обратное отображение

$$(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y)).$$

Поэтому в достаточно малой окрестности точки  $\mathbf{r}(u_0, v_0)$  поверхность задаётся как график функции  $z = z(u(x, y), v(x, y)) = z(x, y)$ . ■

**Предложение 3.10.** Множество точек  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$  образует регулярную поверхность тогда и только тогда, когда для каждой точки  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$  существует такая окрестность  $U \subset \mathbb{R}^3$  этой точки, что в этой окрестности множество  $\mathcal{M}$  задаётся как множество нулей гладкой функции  $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ , и все точки из  $\mathcal{M}$  регулярные.

Напомним, что точка  $\mathbf{x}$  *регулярна* для отображения  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $m \leq n$ , если  $\text{rk } J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = m$ .

**Доказательство.** Здесь нам будет удобно доказывать равносильность с локальным заданием в виде графика функции.

⇒. Возьмём локально  $F(x, y, z) = z - f(x, y)$ . При этом

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 1,$$

так что точки взятой окрестности регулярны для  $F$ .

⇐. Предположим теперь, что в окрестности точки  $(x_0, y_0, z_0)$  задана функция  $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ , множество нулей которой состоит из регулярных точек. Без ограничения общности можем считать, что

$$\left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} \neq 0.$$

Тогда по теореме о неявной функции существует функция  $f$ , определённая в окрестности точки  $(x_0, y_0)$ , и такая область  $U' \subset U$ , что  $F(x, y, z) = 0$  при  $(x, y, z) \in U'$  тогда и только тогда, когда  $z = f(x, y)$ . ■

**Определение 3.11.** Областью на регулярной поверхности  $\mathcal{M}$  называется пересечение поверхности  $\mathcal{M}$  с областью из  $\mathbb{R}^3$ . Соответственно, окрестностью точки на поверхности называется любая область, содержащая эту точку.

В окрестности каждой точки поверхности  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ , заданной параметрически, автоматически появляется криволинейная система координат  $(u, v)$ . Мы будем называть такие координаты *локальными координатами* в области на нашей поверхности. Если в области

заданы две локальные системы координат, то функции, выражающие одни через другие, мы будем называть *функциями перехода*.

**Лемма 3.12.** В достаточно малых окрестностях всегда можно выбрать гладкие функции перехода между любыми локальными координатами.

**Доказательство.** В доказательстве предложения 3.9 упоминалось, что для любых локальных координат  $u$  и  $v$  в некоторой области на поверхности можно построить, не ограничивая общности, гладкие функции  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$ . Пусть в области заданы две локальные системы координат —  $(u, v)$  и  $(\tilde{u}, \tilde{v})$ . В, возможно меньшей, области можно выразить координаты  $u$  и  $v$  гладко через  $x$  и  $y$ , а последние — гладко через  $\tilde{u}$  и  $\tilde{v}$ . ■

**Следствие 3.13.** Пусть  $I \subset \mathbb{R}$  — промежуток, отображение  $\rho: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  задаёт кривую в  $\mathbb{R}^3$ , причём  $\text{Im } \rho \subset \mathcal{M}$ , где  $\mathcal{M}$  — гладкая поверхность в  $\mathbb{R}^3$ . Тогда для любой точки  $x_0 \in I$  и любой регулярной параметризации  $\mathbf{r}(u, v)$  поверхности  $\mathcal{M}$  в окрестности точки  $\rho(x_0)$  найдутся гладкие функции  $\varphi, \psi: I \rightarrow \mathbb{R}$  такие, что в этой окрестности точки  $x_0$  следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} I \subset \mathbb{R} & & \\ \downarrow \varphi \times \psi & \searrow \rho & \\ \Omega \subset \mathbb{R}^2 & \nearrow \mathbf{r} & \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3 \end{array}$$

**Доказательство.** Поскольку любая пара локальных координат выражается через любую другую гладкими функциями, справедливость утверждения достаточно установить для какой-либо одной параметризации. Но для параметризации, заданной парой (каких-то) евклидовых координат, утверждение очевидно. ■

Это значит, что любая кривая на поверхности может быть в окрестности каждой своей точки запараметризована в локальных координатах:  $\rho(t) = (u(t), v(t))$ .

## Поверхности как двумерные многообразия

Рассмотрим гладкую кривую, лежащую на поверхности. Если поверхность задана параметрически, то кривая представляется как композиция отображений  $I \rightarrow \Omega \rightarrow \mathcal{M}$ :

$$t \mapsto (u(t), v(t)) \mapsto \mathbf{r}(u(t), v(t)).$$

Вектор скорости равен

$$\frac{d\mathbf{r}(u(t), v(t))}{dt} = \mathbf{r}_u \dot{u} + \mathbf{r}_v \dot{v}.$$

Более того, любой вектор вида  $\boldsymbol{\xi} = \xi^1 \mathbf{r}_u(u_0, v_0) + \xi^2 \mathbf{r}_v(u_0, v_0)$  является вектором скорости некоторой кривой на поверхности. Например, можно взять кривую, имеющую в локальных координатах вид

$$u = u_0 + \xi^1 t, \quad v = v_0 + \xi^2 t.$$

Эти векторы образуют двумерное векторное пространство, называемое *касательным пространством* в точке  $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ , причём векторы  $\mathbf{r}_u(u_0, v_0)$  и  $\mathbf{r}_v(u_0, v_0)$  задают базис этого пространства (условие регулярности параметризации  $\mathbf{r}$ ).

### Пример 3.14.

- (1) Если поверхность задана уравнением  $F(x, y, z) = 0$ , то её касательное пространство состоит из векторов, перпендикулярных градиенту  $\text{grad } F$  (см. напоминания из аналитической геометрии).

- (2) Если поверхность задана как график функции  $z = f(x, y)$ , то векторы  $(1, 0, f_x)$  и  $(0, 1, f_y)$  задают базисы в касательных пространствах.

На регулярной поверхности  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$  можно рассмотреть открытое покрытие внутренностями малых областей на этой поверхности. Согласно теореме Линделёфа<sup>4</sup>, такая поверхность покрывается не более чем счётным набором этих областей:  $\mathcal{M} = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ , причём

- (1) в каждой области  $U_{\alpha}$  можно ввести локальные координаты  $(u_{\alpha}^1, u_{\alpha}^2)$ ;
- (2) локальные координаты  $(u_{\alpha}^1, u_{\alpha}^2)$  принимают значения в некоторой области  $V_{\alpha} \subset \mathbb{R}^2$ , и каждой точке из области  $V_{\alpha}$  соответствует в точности одна точка из области  $U_{\alpha}$ ;
- (3) в пересечении  $U_{\alpha} \cap U_{\beta}$  локальные координаты  $(u_{\alpha}^1, u_{\alpha}^2)$  и  $(u_{\beta}^1, u_{\beta}^2)$  связаны взаимно обратными гладкими отображениями — заменами координат

$$u_{\alpha}^i = u_{\beta}^i(u_{\beta}^1, u_{\beta}^2), \quad u_{\beta}^j = u_{\alpha}^j(u_{\alpha}^1, u_{\alpha}^2), \quad i, j = 1, 2,$$

с ненулевыми якобианами:

$$\det \left( \frac{\partial u_{\alpha}^i}{\partial u_{\beta}^j} \right) \neq 0, \quad \det \left( \frac{\partial u_{\beta}^i}{\partial u_{\alpha}^j} \right) \neq 0.$$

**Определение 3.15.** Совокупность областей  $U_{\alpha}$ , удовлетворяющих свойствам 1 — 3 называется *атласом поверхности*, а сами области  $U_{\alpha}$  называются *картами*.

Теперь мы можем перенести на случай регулярных поверхностей некоторые определения из анализа:

- (а) *областью* на поверхности  $\mathcal{M}$  называется такое множество точек  $U \subset \mathcal{M}$ , что координаты  $(u_{\alpha}^1, u_{\alpha}^2)$  точек из пересечения множества  $U$  с любой картой  $U_{\alpha}$ , заполняют область в  $\mathbb{R}^2$ ;
- (б) любая область  $U$ , содержащая точку  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ , называется *окрестностью* точки  $\mathbf{x}$ ;
- (в) функция  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^m$  называется *гладкой*, если в каждой карте  $U_{\alpha}$  она задаётся как гладкая функция локальных координат  $(u_{\alpha}^1, u_{\alpha}^2)$ ;
- (г) отображение поверхностей  $\mathbf{f}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  называется *гладким*, если всюду в локальных координатах оно задаётся гладкими функциями

$$(u, v) \mapsto (\tilde{u}(u, v), \tilde{v}(u, v)),$$

где  $(u, v)$  — локальные координаты на  $\mathcal{M}$ , а  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  — локальные координаты на  $\mathcal{N}$ ;

- (д) отображение поверхностей  $\mathbf{f}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  называется *дiffeоморфизмом*, если оно биективное, гладкое и обратное к нему тоже гладкое.

Из леммы 3.12 и теоремы о дифференцируемости сложной функции вытекает, что гладкость функции на поверхности в точке  $\mathbf{x}_0$  достаточно проверить в какой-либо одной локальной системе координат в окрестности  $\mathbf{x}_0$ . В частности, получаем корректность определения гладкой функции на поверхности. Однако заметим, что имеет смысл говорить только о гладкости функций, меньшей, чем гладкость замен локальных координат, иначе это понятие станет неинвариантным. Обычно мы говорим о бесконечно гладких параметризациях (класс  $C^{\infty}$ ), так что этот вопрос не возникает.

Определение гладкого отображения поверхностей корректно по тем же причинам, что и определение гладкой функции на поверхности.

Заметим, что регулярные поверхности в  $\mathbb{R}^3$  обладают дополнительным свойством хаусдорфовости:

- (4) для любой пары различных точек  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  на поверхности существуют их окрестности  $U$  и  $V$ , которые не пересекаются:

$$U \cap V = \emptyset, \quad \mathbf{x} \in U, \quad \mathbf{y} \in V.$$

<sup>4</sup>Если топологическое пространство обладает не более чем счётной базой, то из всякого открытого покрытия этого пространства можно выделить не более чем счётное подпокрытие.

**Определение 3.16.** Совокупность точек, для которой задан атлас, удовлетворяющий условиям 1 — 4, называется *двумерным гладким многообразием*.

Напомним, что касательным вектором  $\xi$  в точке  $x_0$  поверхности мы называли вектор скорости гладкой кривой  $r(t)$  в точке  $x_0$ :

$$\xi = \left. \frac{dr}{dt} \right|_{t_0}, \quad r(t_0) = x_0.$$

В разных координатах он записывается по-разному. Если точка  $x_0$  лежит в пересечении двух карт  $U_\alpha$  и  $U_\beta$  и в координатах  $(u_\alpha^1, u_\alpha^2)$  мы имеем

$$\xi_\alpha = (\dot{u}_\alpha^1, \dot{u}_\alpha^2),$$

то по теореме о производной сложной функции в координатах  $(x_\beta^1, x_\beta^2)$  этот же касательный вектор записывается как

$$\xi_\beta = \left( \frac{du_\beta^1(u_\alpha^1(t), u_\alpha^2(t))}{dt}, \frac{du_\beta^2(u_\alpha^1(t), u_\alpha^2(t))}{dt} \right) = \left( \frac{\partial u_\beta^1}{\partial u_\alpha^i} \dot{u}_\alpha^i, \frac{\partial u_\beta^2}{\partial u_\alpha^i} \dot{u}_\alpha^i \right).$$

Это значит, что для касательных векторов к поверхности выполнен тензорный закон, при заменах координат они меняются так, как и положено меняться векторам. Поэтому *касательный вектор двумерного многообразия* в точке  $x_0$  может быть определён как объект  $\xi = (\xi^1, \xi^2)$ , записи которого  $\xi_\alpha, \xi_\beta$  в различных локальных координатах связаны соотношением

$$\xi_\beta^i = \left. \frac{\partial u_\beta^i}{\partial u_\alpha^j} \right|_{x_0} \xi_\alpha^j.$$

**Определение 3.17.** Все касательные векторы в точке  $x$  двумерного многообразия  $M$  образуют векторное пространство, которое называется *касательным пространством* в точке  $x$  и обозначается через  $\mathcal{T}_x M$ .

Ситуация с касательными векторами хорошо описывается в книге [Шарп] (в начале §1.4):

*«Касательные векторы имеют двойственную природу. С одной стороны, у них имеется геометрический аспект, заключающийся в том, что они задают направления в пространстве: если я стою на многообразии, то могу двигаться в различных направлениях, которые можно описать касательными векторами в точке моего положения. С другой стороны, у них имеется аналитический аспект, в котором они выступают как „производные по направлению“».*

**Определение 3.18.** Если  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^m$  — гладкая функция на поверхности  $M$ , то её *дифференциал* в точке  $x \in M$  — это линейная функция  $df|_x$  на касательной плоскости  $\mathcal{T}_x M$ , определяемая как

$$df|_x(\xi) = \xi^i \frac{\partial f}{\partial u^i}.$$

Таким образом, мы можем придать смысл выражениям  $du$  и  $dv$ . Они задают линейные функции на касательном пространстве, причём  $(du)(r_u) = (dv)(r_v) = 1$ ,  $(du)(r_v) = (dv)(r_u) = 0$ . Так что дифференциалы  $(du, dv)$  задают двойственный к  $(r_u, r_v)$  базис пространства, двойственного к касательному (его часто называют *кокасательным*).

**Предложение 3.19.** Пусть имеем гладкое отображение поверхностей  $f: M \rightarrow N$ . Тогда

$$\text{Im } df|_x \subset \mathcal{T}_{f(x)} N.$$

**Доказательство.** Появится здесь несколько позже. ■

Смысл последнего предложения в том, что дифференциал в каждой точке гладкого отображения гладких поверхностей можно воспринимать как линейное отображение соответствующих касательных пространств.

## Риманова метрика на поверхностях

Из существования натурального параметра на кривой следует, что каждый участок кривой можно отобразить в прямую с сохранением расстояний между точками. Двумерные поверхности в трехмерном евклидовом пространстве уже обладают внутренней геометрией. В общем случае никакая окрестность точки поверхности не может быть отображена на область в евклидовой плоскости с сохранением расстояний.

В окрестности каждой точки поверхности можно ввести локальные криволинейные координаты. Они, как обсуждалось выше, задают риманову метрику. На пересечениях атласов гладкие функции перехода дают согласованность между атласами. Таким образом, получаем естественное определение римановой метрики на поверхности.

Пусть на поверхности  $\mathbf{r}(u, v)$  задана кривая  $(u(t), v(t))$ . Вектор скорости есть

$$(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \mathbf{r}_u \dot{u} + \mathbf{r}_v \dot{v},$$

где

$$\dot{x} = x_u \dot{u} + x_v \dot{v}, \quad \dot{y} = y_u \dot{u} + y_v \dot{v}, \quad \dot{z} = z_u \dot{u} + z_v \dot{v}.$$

Длина (фрагмента) этой кривой равна

$$l = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt.$$

Подставляя в подынтегральное выражение формулы для  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  и  $\dot{z}$ , получаем

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2,$$

где

$$\begin{aligned} E &= \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \\ F &= \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \\ G &= \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2. \end{aligned}$$

Для использования нотации Эйнштейна коэффициенты  $E$ ,  $F$  и  $G$  можно обозначать через матрицу Грама

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} = \mathcal{G},$$

а координаты  $u$  и  $v$  — через  $u^1$  и  $u^2$ .

**Определение 3.20.** Выражение

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

называется *первой квадратичной формой* (или *римановой метрикой*) на поверхности. Здесь коэффициенты матрицы  $\mathcal{G} := (g_{ij})$ , вообще говоря, зависят от координат  $u$  и  $v$ .

В каждой точке поверхности эта форма задаёт на касательном пространстве евклидово скалярное произведение:

$$\boldsymbol{\xi} = \xi^i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}, \quad \boldsymbol{\eta} = \eta^j \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j} \rightsquigarrow \langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\mathcal{G}} = g_{ij} \xi^i \eta^j.$$

С помощью него можно, например, находить длины кривых и углы между кривыми на поверхностях (что мы, на самом деле, раньше уже делали). Но сперва нужно доказать корректность этого определения, то есть согласованность с тем, что мы раньше называли римановой метрикой (определение 3.5).

**Предложение 3.21.** Коэффициенты первой квадратичной формы, записанной по отношению к разным системам координат  $(u^1, u^2)$  и  $(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$ , связаны соотношениями<sup>5</sup>

$$(3.3) \quad g_{ij} = \tilde{g}_{kl} \frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial u^i} \frac{\partial \tilde{u}^l}{\partial u^j}.$$

**Доказательство.** Пусть в какой-то области поверхности введены две разные системы координат  $(u^1, u^2)$  и  $(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$ , связанные формулами перехода. Один и тот же касательный вектор раскладывается по разным базисам:

$$\xi = \xi^i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} = \tilde{\xi}^j \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tilde{u}^j}.$$

Так как его длина не зависит от базиса, мы имеем

$$g_{ij} \xi^i \xi^j = \tilde{g}_{kl} \tilde{\xi}^k \tilde{\xi}^l.$$

Равенство длин переписывается как  $g_{ij} du^i du^j = \tilde{g}_{ij} d\tilde{u}^i d\tilde{u}^j$ . Подставляя в правую часть выражения вида  $d\tilde{u}^k = \frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial u^i} du^i$ , получаем

$$g_{ij} du^i du^j = \tilde{g}^{kl} \frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial u^i} \frac{\partial \tilde{u}^l}{\partial u^j} du^i du^j.$$

Равенство форм означает равенство всех коэффициентов, что и требовалось. ■

Напомним, что дифференциалы  $du$  и  $dv$  можно воспринимать как линейные функции на касательном пространстве к каждой точке  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ . Так что выражение  $ds^2$  задаёт корректно определённую квадратичную форму, которая обозначается через  $\mathbf{I}$ . Её значение на касательном векторе  $\xi \in \mathcal{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$  есть просто квадрат длины этого вектора:

$$\mathbf{I}(\xi) = \langle \xi, \xi \rangle.$$

### Пример 3.22.

- (1) Если поверхность задана как график функции  $z = f(x, y)$ , то

$$\mathbf{r}_x = (1, 0, f_x), \quad \mathbf{r}_y = (0, 1, f_y),$$

$$g_{11} = \langle \mathbf{r}_x, \mathbf{r}_x \rangle = 1 + f_x^2, \quad g_{12} = \langle \mathbf{r}_x, \mathbf{r}_y \rangle = f_x f_y, \quad g_{22} = \langle \mathbf{r}_y, \mathbf{r}_y \rangle = 1 + f_y^2.$$

- (2) Пусть поверхность задана уравнением  $F(x, y, z) = 0$  и  $F_z \neq 0$  в окрестности точки  $(x_0, y_0, z_0)$ . Примем  $x$  и  $y$  за локальные координаты:  $u = x$ ,  $v = y$ . Условие  $F = 0$  влечёт тождество

$$F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z} = 0$$

для касательных векторов  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  к поверхности. Из него следует, что

$$\dot{z} = -\frac{1}{F_z} (F_x \dot{x} + F_y \dot{y}).$$

Отсюда выводим, что

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{1}{F_z^2} (F_x^2 \dot{x}^2 + 2F_x F_y \dot{x} \dot{y} + F_y^2 \dot{y}^2) = \\ &= \left(1 + \frac{F_x^2}{F_z^2}\right) \dot{x}^2 + 2 \frac{F_x F_y}{F_z^2} \dot{x} \dot{y} + \left(1 + \frac{F_y^2}{F_z^2}\right) \dot{y}^2. \end{aligned}$$

В итоге получаем следующие формулы для метрики:

$$g_{11} = 1 + \frac{F_x^2}{F_z^2}, \quad g_{12} = \frac{F_x F_y}{F_z^2}, \quad g_{22} = 1 + \frac{F_y^2}{F_z^2}.$$

<sup>5</sup>Мы хотим доказать, что первая квадратичная форма действительно является квадратичной формой (на касательном пространстве) в смысле определения из линейной алгебры. Для этого нужно проверить выполнение тензорного закона, что мы здесь и делаем.



**Задача 3.23.** Вычислить первую квадратичную форму

(1) *псевдосферы Бельтрами*

$$x = a \sin u \cos v, \quad y = a \sin u \sin v, \quad z = a \left( \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + \cos u \right),$$

где  $0 < u < \pi/2$ ,  $0 \leq v < 2\pi$ ,  $a \neq 0$ .

(2) *поверхности главных нормалей*  $\mathbf{r}(s, \lambda) = \boldsymbol{\rho}(s) + \lambda \mathbf{n}(s)$  кривой  $\boldsymbol{\rho}(s)$ .

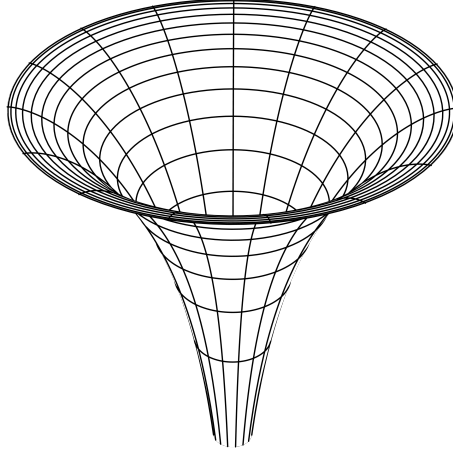


Рис. 3.7: Псевдосфера

**Решение.**

(1) Напрямую вычисляем коэффициенты<sup>6</sup>:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u &= (a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, a \operatorname{ctg} u \cos u), \quad \mathbf{r}_v = (-a \sin u \sin v, a \sin u \cos v, 0), \\ g_{11} &= \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle = a^2 \cos^2 u \underbrace{(\cos^2 v + \sin^2 v)}_1 + \operatorname{ctg}^2 u = a^2 \cos^2 u \underbrace{(1 + \operatorname{ctg}^2 u)}_{1/\sin^2 u} = a^2 \operatorname{ctg}^2 u, \\ g_{12} &= \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle = -\frac{a^2}{4} \cancel{\sin 2u \sin 2v} + \frac{a^2}{4} \cancel{\sin 2u \sin 2v} = 0, \\ g_{22} &= \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle = a^2 \sin^2 u \underbrace{(\sin^2 v + \sin^2 v)}_1 = a^2 \sin^2 u. \end{aligned}$$

Пишем первую квадратичную форму:

$$a^2 \operatorname{ctg}^2 u du^2 + a^2 \sin^2 u dv^2.$$

(2) Считаем частные производные, пользуясь формулами Френе:

$$\mathbf{r}_s = \mathbf{v} + \lambda \dot{\mathbf{n}} = \mathbf{v} + \lambda(-k\mathbf{v} + \kappa\mathbf{b}) = (1 - k\lambda)\mathbf{v} + \kappa\lambda\mathbf{b}, \quad \mathbf{r}_\lambda = \mathbf{n}.$$

Вычисляем коэффициенты первой квадратичной формы:

$$\begin{aligned} g_{11} &= \langle \mathbf{r}_s, \mathbf{r}_s \rangle = (1 - k\lambda)^2 + \kappa^2 \lambda^2, \\ g_{12} &= \langle \mathbf{r}_s, \mathbf{r}_\lambda \rangle = 0, \\ g_{22} &= \langle \mathbf{r}_\lambda, \mathbf{r}_\lambda \rangle = 1. \end{aligned}$$

Итак, выписываем первую квадратичную форму:  $((1 - k\lambda)^2 + \kappa^2 \lambda^2) ds^2 + d\lambda^2$ .

<sup>6</sup>Выкладка:  $\left( \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right)' = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{u}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{u}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2 \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2}} = \frac{1}{\sin u}$ .

■

**Задача 3.24.** Найти угол между линиями  $v = u + 1$  и  $v = 3 - u$  на поверхности  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ ,  $z = u^2$ .

**Решение.** Для начала нужно найти первую квадратичную форму данной поверхности.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u &= (\cos v, \sin v, 2u), \quad \mathbf{r}_v = (-u \sin v, u \cos v, 0), \\ g_{11} &= \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle = \underbrace{\cos^2 v + \sin^2 v}_1 + 4u^2 = 4u^2 + 1, \\ g_{12} &= \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle = -\frac{u}{2} \cancel{\sin 2v} + \frac{u}{2} \cancel{\sin 2v} = 0, \\ g_{22} &= \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle = u^2 \underbrace{(\sin^2 v + \cos^2 v)}_1 = u^2. \end{aligned}$$

Получаем риманову метрику, заданную матрицей

$$\mathcal{G}(u, v) = \begin{pmatrix} 4u^2 + 1 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix}.$$

Данные в условии кривые пересекаются в единственной точке  $(1, 2)$ . Их вектора скорости в этой точке есть  $(1, 1)$  и  $(1, -1)$ . Угол между кривыми находим по формуле

$$\cos \angle(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle_{\mathcal{G}(1,2)}}{\sqrt{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle_{\mathcal{G}(1,2)}} \cdot \sqrt{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle_{\mathcal{G}(1,2)}}} = \frac{4}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{2}{3}.$$

Отсюда  $\angle(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \arccos \frac{2}{3}$ .

■

**Определение 3.25.** *Площадью* области  $U$  на поверхности  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$  называется величина

$$\sigma(U) := \iint_U \sqrt{\deg \mathcal{G}} \, du dv.$$

(Здесь область  $U$  задана параметрически координатами  $u$  и  $v$ .)

Это определение (как и определение длины кривой) принимается как данность. Мотивировка такого определения в том, что  $\det \mathcal{G}$  — это (ориентированная) площадь параллелограмма, натянутого на касательные вектора  $\mathbf{r}_u$  и  $\mathbf{r}_v$ .

Площадь можно определить (ровно так же) не только на поверхности, а в любой метрике на криволинейных координатах. Просто здесь становится более понятной мотивация такого определения.

**Пример 3.26.** В качестве доказательства пунктов (2) и (3) смотреть пример 3.22.

- (1) Если поверхность задана в параметрической форме  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$  и  $V$  — такая область на плоскости  $(u, v)$ , что  $\mathbf{r}(V) = U$ , то

$$\sigma(U) = \iint_V |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, du dv.$$

- (2) Если поверхность задана как график функции  $z = f(x, y)$  и область  $U$  проектируется на область  $V$  на плоскости  $(x, y)$ , то

$$\sigma(U) = \iint_V \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx dy.$$

- (3) Если поверхность задана уравнением  $F(x, y, z) = 0$ ,  $F_z \neq 0$  в области  $U$ , которая проектируется на область  $V$  на плоскости  $(x, y)$ . Тогда

$$\sigma(U) = \iint_V \frac{|\text{grad } F|}{|F_z|} dx dy.$$

**Задача 3.27.** Найти площадь тора

$$\begin{cases} x = (R + r \cos \psi) \cos \varphi, \\ y = (R + r \cos \psi) \sin \varphi, \\ z = r \sin \psi, \end{cases}$$

где  $r < R$ ,  $0 \leq \varphi, \psi < 2\pi$ .

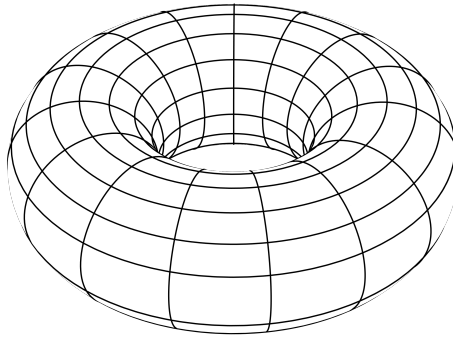


Рис. 3.8: Тор

**Решение.** Находим частные производные радиус-вектора:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\varphi &= (R + r \cos \psi)(-\sin \varphi, \cos \varphi, 0), \\ \mathbf{r}_\psi &= r(-\cos \varphi \sin \psi, -\sin \varphi \sin \psi, \cos \psi), \end{aligned}$$

затем риманову метрику на торе:

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} (R + r \cos \psi)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Считаем искомую площадь:

$$\begin{aligned} \sigma &= \iint_{\varphi, \psi} \sqrt{\det \mathcal{G}} d\varphi d\psi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} (R + r \cos \psi) r d\psi = \\ &= 2\pi r \int_0^{2\pi} (R + r \cos \psi) d\psi = 2\pi r \cdot 2\pi R = 4\pi^2 Rr. \end{aligned}$$

■

**Определение 3.28.** Говорят, что поверхности  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{N}$  *изометричны*, если между ними существует диффеоморфизм  $\varphi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ , который сохраняет длины всех кривых. Сам диффеоморфизм  $\varphi$  называется при этом *изометрией*.

Гладкое отображение поверхностей

$$\mathbf{f}: (u^1, u^2) \mapsto (\tilde{u}^1(u^1, u^2), \tilde{u}^2(u^1, u^2)),$$

записанное в локальных координатах, сохраняет длины всех кривых, если и только если

$$(3.4) \quad \tilde{g}_{ij}|_{f(u^1, u^2)} d\tilde{u}^i d\tilde{u}^j = g_{kl}|_{(u^1, u^2)} du^k du^l,$$

где  $g_{kl} du^k du^l$  и  $\tilde{g}_{ij} d\tilde{u}^i d\tilde{u}^j$  — первые квадратичные формы поверхностей. Идейно тут всё понятно — это условие и означает, что на поверхностях «одинаково измеряются расстояния». Распишем строго: пусть  $\mathbf{r}(t) = (u^1(t), u^2(t))$  — кривая и  $\tilde{\mathbf{r}}(t)$  — её образ,  $a \leq t \leq b$ ,

$$\int_a^b \sqrt{g_{kl}(\mathbf{r}(t)) \dot{u}^k \dot{u}^l} dt = \int_a^b \sqrt{\tilde{g}_{ij}(\tilde{\mathbf{r}}(t)) \dot{\tilde{u}}^i \dot{\tilde{u}}^j} dt.$$

При изометрии это равенство выполняется для любой кривой  $\mathbf{r}(t)$ , что равносильно соотношению (3.4).

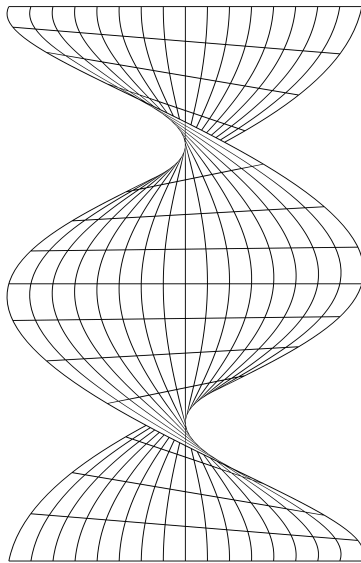
**Задача 3.29.** Доказать, что *геликоид*:

$$\mathbf{r}(u, v) = (u \sin v, u \cos v, v),$$

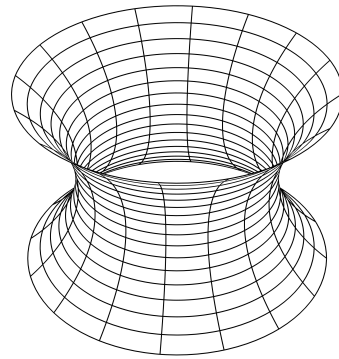
где  $u, v \in \mathbb{R}$ , локально изометричен *катеноиду*:

$$\tilde{\mathbf{r}}(u, v) = (\operatorname{ch} u \cos v, \operatorname{ch} u \sin v, u),$$

где  $u \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq v < 2\pi$ .



Геликоид



Катеноид

Рис. 3.9

**Решение.** Нужно посчитать первые квадратичные формы обеих поверхностей и найти диффеоморфизм, сохраняющий длины кривых. Для геликоида:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \mathbf{r}_u &= (\sin v, \cos v, 0), & \mathbf{r}_v &= (u \cos v, -u \sin v, 1), \\ g_{11} = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle &= \underbrace{\sin^2 v + \cos^2 v}_1 = 1, & g_{12} = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle &= 0, \\ g_{22} = \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle &= u^2 \underbrace{(\sin^2 v + \cos^2 v)}_1 + 1 = u^2 + 1, \\ ds^2 &= du^2 + (u^2 + 1) dv^2. \end{aligned}$$

Для катеноида:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{r}}_{\tilde{u}} &= (\operatorname{sh} \tilde{u} \cos \tilde{v}, \operatorname{sh} \tilde{u} \sin \tilde{v}, 1), \quad \tilde{\mathbf{r}}_{\tilde{v}} = (-\operatorname{ch} \tilde{u} \sin \tilde{v}, \operatorname{ch} \tilde{u} \cos \tilde{v}, 0), \\
 \tilde{g}_{11} &= \langle \tilde{\mathbf{r}}_{\tilde{u}}, \tilde{\mathbf{r}}_{\tilde{u}} \rangle = \operatorname{sh}^2 \tilde{u} \underbrace{(\cos^2 \tilde{v} + \sin^2 \tilde{v})}_1 + 1 = \operatorname{sh}^2 \tilde{u} + 1 = \operatorname{ch}^2 \tilde{u}, \\
 \tilde{g}_{12} &= \langle \tilde{\mathbf{r}}_{\tilde{u}}, \tilde{\mathbf{r}}_{\tilde{v}} \rangle = 0, \quad \tilde{g}_{22} = \langle \tilde{\mathbf{r}}_{\tilde{v}}, \tilde{\mathbf{r}}_{\tilde{v}} \rangle = \operatorname{ch}^2 \tilde{u} \underbrace{(\sin^2 \tilde{v} + \cos^2 \tilde{v})}_1 = \operatorname{ch}^2 \tilde{u}, \\
 (3.6) \quad d\tilde{s}^2 &= \operatorname{ch}^2 \tilde{u} d\tilde{u}^2 + \operatorname{ch}^2 \tilde{u} d\tilde{v}^2.
 \end{aligned}$$

Теперь нужно подобрать диффеоморфизм  $u = u(\tilde{u})$ ,  $v = v(\tilde{v})$  такой, что форма (3.5) перейдёт в (3.6). Никаких общих методов для этого нет, только смекалка. Здесь, например, подойдёт отображение  $u = \operatorname{sh} \tilde{u}$ ,  $v = \tilde{v}$ . Действительно,

$$du^2 = (d \operatorname{sh} \tilde{u})^2 = \operatorname{ch}^2 \tilde{u} d\tilde{u}^2, \quad (\operatorname{sh}^2 \tilde{u} + 1) d\tilde{v}^2 = \operatorname{ch}^2 \tilde{u} d\tilde{v}^2.$$

■

**Задача 3.30.** Доказать, что деформация гиперболического параболоида, определяемая следующими формулами, сохраняет площадь:

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \end{cases} \mapsto \begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = \frac{\sin t}{2}(u^2 - v^2) + uv \cos t. \end{cases}$$

**Решение.** Появится позже.

■

### Кривизна поверхности

Сначала мы дадим «дурацкое» определение, а затем предоставим к нему исчерпывающую мотивацию. Рассмотрим поверхность, заданную параметрически:  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ . Зададим к ней нормаль  $\mathbf{n}$  в каждой точке:

$$\mathbf{n} := \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}.$$

**Определение 3.31.** Вторую квадратичную форму определим как выражение

$$L du^2 + 2M dudv + N dv^2,$$

где

$$L := \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n} \rangle, \quad M := \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n} \rangle, \quad N := \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n} \rangle.$$

Полагая  $u^1 = u$ ,  $u^2 = v$ , будем также записывать её в виде

$$b_{ij} du^i du^j,$$

где

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

Для второй квадратичной формы, как и для первой, нужно доказать корректность определения — то есть независимость от системы координат, в которой она записывается. Мы не будем утруждать себя лобовым доказательством тензорного закона, а увидим, что вторая квадратичная форма имеет геометрический смысл, инвариантный относительно выбора системы координат.

Рассмотрим кривую  $\rho = \rho(u(t), v(t))$  на нашей поверхности, параметризованную в локальных координатах в окрестности точки  $\mathbf{r}(u_0, v_0) \ni \text{Im } \rho$ . Нормаль к поверхности в этой точке обозначим через  $\mathbf{n}$ . Тогда имеем (здесь через точку обозначена производная по  $t$ )

$$\begin{aligned}\ddot{\rho} &= \rho_{uu}\dot{u}^2 + 2\rho_{uv}\dot{u}\dot{v} + \rho_{vv}\dot{v}^2 + \rho_u\ddot{u} + \rho_v\ddot{v}, \\ \langle \ddot{\rho}, \mathbf{n} \rangle &= L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2,\end{aligned}$$

так как  $\rho_u \perp \mathbf{n}$  и  $\rho_v \perp \mathbf{n}$ . Получается, что значение второй квадратичной формы на векторе скорости кривой  $\rho$  (который, конечно же, является касательным вектором к поверхности) есть длина проекции вектора ускорения этой кривой на нормаль к поверхности.

Теперь имеем полное право называть определённое выше выражение квадратичной формой, обозначим её через  $\Pi$ . Попутно мы доказали следующее предложение.

**Предложение 3.32.** Если  $\rho = \rho(u(t), v(t))$  — гладкая кривая на поверхности, то

$$\langle \ddot{\rho}, \mathbf{n} \rangle = \Pi(\dot{\rho}).$$

Позже мы вернёмся к этому сюжету, но пока вынуждены отступить от него.

### Главные кривизны и нормальные сечения

Подытожим наши рассуждения. В касательном пространстве к каждой точке поверхности определены две квадратичные формы —  $\mathbf{I}$  и  $\mathbf{II}$ , — при этом форма  $\mathbf{I}$  положительно определена. Из курса линейной алгебры известно, что тогда эти квадратичные формы можно привести к главным осям, то есть выбрать базис (в касательном пространстве), в котором матрица формы  $\mathbf{I}$  будет единичной, а матрица формы  $\mathbf{II}$  — диагональной.

Кратно напомним, как это делать (подробные объяснения и теоретические обоснования смотреть в [теорминимуме](#), скоро там всё появится). Сначала нужно найти собственные значения пары квадратичных форм, то есть решить уравнение

$$(3.7) \quad \det(\mathcal{B} - \lambda \mathcal{G}) = 0$$

относительно  $\lambda$ , где  $\mathcal{G}$  и  $\mathcal{B}$  — матрицы первой и второй квадратичной формы в каком-то базисе касательного пространства. Сразу отметим, что само уравнение (3.7) инвариантно относительно замены координат и определяется самой поверхностью. Поэтому его коэффициенты в развёрнутом и приведённом виде

$$\lambda^2 - H\lambda + K = 0$$

имеет смысл как-то обозначить.

**Определение 3.33.** Коэффициент  $H$  называется *средней кривизной* поверхности в данной точке<sup>7</sup>, а коэффициент  $K$  — *гауссовой кривизной*. Корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  уравнения (3.7) называются *главными кривизнами*. (По теореме Виета имеем  $H = \lambda_1 + \lambda_2$ ,  $K = \lambda_1\lambda_2$ .)

Обычно среднюю кривизну определяют как среднее арифметическое главных кривизн, но такое определение влечёт лишь к небольшому усложнению формул за счёт возникновения множителя  $1/2$ . Все эти кривизны имеют для нас фундаментальное значение. Их очень глубокий геометрический смысл будет ясен позднее.

Если  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , то главные направления  $\xi_1$  и  $\xi_2$  ортогональны и находятся из уравнений

$$(\mathcal{B} - \lambda_i \mathcal{G})\xi_i = 0,$$

где  $i = 1, 2$ .

<sup>7</sup>«Данная точка» здесь — это та, в касательном пространстве к которой мы сейчас находимся.

А если  $\lambda_1 = \lambda_2$ , то первая и вторая квадратичные формы пропорциональны, и любые векторы подойдут как главные направления. Такие точки называются *омбилическими*.

Лобовым раскрытием скобок можем получить явные формулы для гауссовой и средней кривизн через коэффициенты первой и второй квадратичных форм:

$$K = \frac{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}{b_{11}b_{22} - b_{12}^2} = \frac{\det \mathcal{G}}{\det \mathcal{B}}, \quad H = \frac{g_{11}b_{22} + g_{22}b_{11} - 2g_{12}b_{12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \text{tr}(\mathcal{G}^{-1}\mathcal{B}).$$

**Пример 3.34.** Пусть поверхность задана как график функции  $z = f(x, y)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_x &= (1, 0, f_x), \quad \mathbf{r}_y = (0, 1, f_y), \quad \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (-f_x, -f_y, 1), \\ \mathbf{r}_{xx} &= (0, 0, f_{xx}), \quad \mathbf{r}_{xy} = (0, 0, f_{xy}), \quad \mathbf{r}_{yy} = (0, 0, f_{yy}), \\ \mathbf{n} &= \frac{\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y}{|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y|} = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \\ b_{11} &= \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad b_{12} = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad b_{22} = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}. \end{aligned}$$

Отсюда, гауссова кривизна поверхности, заданной в виде графика, равна

$$K = \frac{\det \mathcal{G}}{\det \mathcal{B}} = \frac{(1 + f_x^2)(1 + f_y^2) - f_x^2 f_y^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2} = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}.$$

**Задача 3.35.** Найти главные направления, гауссову и среднюю кривизны у псевдосферы

$$x = a \sin u \cos v, \quad y = a \sin u \sin v, \quad z = a \left( \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + \cos u \right),$$

где  $0 < u < \pi/2$ ,  $0 \leq v < 2\pi$ ,  $a \neq 0$ .

**Решение.** Первую квадратичную форму у псевдосферы мы уже считали в задаче 3.23, получили

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} a^2 \operatorname{ctg}^2 u & 0 \\ 0 & a^2 \sin^2 u \end{pmatrix}.$$

Посчитаем вторую квадратичную форму. Для этого нам нужно считать вторые производные от параметризации  $\mathbf{r}$  нашей поверхности. Первые, опять же, мы уже считали:

$$\mathbf{r}_u = (a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, a \operatorname{ctg} u \cos u), \quad \mathbf{r}_v = (-a \sin u \sin v, a \sin u \cos v, 0).$$

Считаем вторые:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{uu} &= (-a \sin u \cos v, -a \sin u \sin v, -a \cos u(2 + \operatorname{ctg}^2 u)), \\ \mathbf{r}_{uv} &= (-a \cos u \sin v, a \cos u \cos v, 0), \\ \mathbf{r}_{vv} &= (-a \sin u \cos v, -a \sin u \sin v, 0). \end{aligned}$$

Находим вектор нормали:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a \cos u \cos v & a \cos u \sin v & a \operatorname{ctg} u \cos u \\ -a \sin u \sin v & a \sin u \cos v & 0 \end{pmatrix} = \\ &= a^2 \left( -\cos^2 u \cos v, -\cos^2 u \sin v, \frac{1}{2} \sin 2u \right). \end{aligned}$$

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|^2 = a^4 \cos^4 u \underbrace{(\cos^2 v + \sin^2 v)}_1 + \frac{1}{4} a^4 \sin^2 2u =$$

$$= a^4 (\cos^4 u + \cos^2 u (1 - \cos^2 u)) = a^4 \cos^2 u,$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, \sin u).$$

Теперь можем найти коэффициенты второй квадратичной формы:

$$b_{11} = \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n} \rangle = a \cos u \sin u \underbrace{(\cos^2 v + \sin^2 v)}_1 - a \sin u \cos u (2 + \operatorname{ctg}^2 u) =$$

$$= -a \sin u \cos u \underbrace{(1 + \operatorname{ctg}^2 u)}_{1/\sin^2 u} = -a \operatorname{ctg} u,$$

$$b_{12} = \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n} \rangle = 0,$$

$$b_{22} = \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n} \rangle = a \cos u \sin u \underbrace{(\cos^2 v + \sin^2 v)}_1 = \frac{a}{2} \sin 2u.$$

Можем выписать матрицу второй квадратичной формы:

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} -a \operatorname{ctg} u & 0 \\ 0 & \frac{a}{2} \sin 2u \end{pmatrix}.$$

Находим главные кривизны:

$$\det(\mathcal{B} - \lambda \mathcal{G}) = 0,$$

$$\det \begin{pmatrix} -\operatorname{ctg} u - a\lambda \operatorname{ctg}^2 u & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \sin 2u - a\lambda \sin^2 u \end{pmatrix} = 0,$$

$$a^2 \cos^2 u \cdot \lambda^2 + a \left( -\frac{\cos^3 u}{\sin u} + \cos u \sin u \right) \cdot \lambda - \cos^2 u = 0, \quad | : a^2 \cos^2 u$$

$$\lambda^2 - \frac{\operatorname{ctg} u - \operatorname{tg} u}{a} \lambda - \frac{1}{a^2} = 0.$$

Отсюда,  $\lambda_1 = -a^{-1} \operatorname{tg} u$ ,  $\lambda_2 = a^{-1} \operatorname{ctg} u$  и  $H = a^{-1}(\operatorname{ctg} u - \operatorname{tg} u)$ ,  $K \equiv -a^{-2}$ . Наконец, можем найти главные направления.

$$(\mathcal{B} - \lambda_1 \mathcal{G}) \boldsymbol{\xi}_1 = \mathbf{0},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{tg} u \end{pmatrix} \boldsymbol{\xi}_1 = \mathbf{0}.$$

В качестве решения подойдёт, например, вектор  $\boldsymbol{\xi}_1 = (1, 0)$ . Ищем второй вектор:

$$(\mathcal{B} - \lambda_2 \mathcal{G}) \boldsymbol{\xi}_2 = \mathbf{0},$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{\cos u}{\sin^3 u} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\xi}_2 = \mathbf{0}.$$

Здесь подойдёт вектор  $\boldsymbol{\xi}_2 = (0, 1)$ . Итак, мы нашли главные направления в базисе  $(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)$  касательного пространства. Можно записать их и в базисе  $\mathbb{R}^3$ , в котором находится наша поверхность. Для этого пишем  $\boldsymbol{\xi}_i = \xi_i^1 \mathbf{r}_u + \xi_i^2 \mathbf{r}_v$ . В данном случае всё очевидно —  $\boldsymbol{\xi}_1 = \mathbf{r}_u$ ,  $\boldsymbol{\xi}_2 = \mathbf{r}_v$ . Нам повезло, и векторы изначального базиса  $(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)$  оказались главными



направлениями. Так происходит редко, в общем случае мы найдём подходящие векторы, нормируем их и запишем в трёхмерных координатах. ■

С каждой неомбилической точкой гладкой поверхности можно связать ортонормированный базис  $(\xi_1, \xi_2, \mathbf{n})$  из главных направлений и вектора единичной нормали. Вблизи этой точки можно задать нашу функцию как график  $z = f(x, y)$ , к такому заданию поверхностей мы уже обращались в примере 3.22. С одной стороны, первая квадратичная форма имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 + f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + f_y^2 \end{pmatrix}.$$

Но с другой стороны, в базисе из главных направлений матрица первой квадратичной формы в рассматриваемой точке единичная, отсюда находим  $f_x = f_y = 0$ . В выбранном базисе имеем  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ , поэтому легко находим и коэффициенты второй квадратичной формы:

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix},$$

при этом в выбранном базисе эта форма диагональна, то есть  $f_{xy} = 0$ . Таким образом, имеем следующие матрицы квадратичных форм:

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} f_{xx} & 0 \\ 0 & f_{yy} \end{pmatrix}.$$

Сразу видим главные кривизны:  $\lambda_1 = f_{xx}$ ,  $\lambda_2 = f_{yy}$ . Можно написать разложение функции  $z = f(x, y)$  в ряд Тейлора, которое в нашем случае выглядит так:

$$(3.8) \quad z = \frac{\lambda_1}{2}x^2 + \frac{\lambda_2}{2}y^2 + \bar{o}(x^2 + y^2).$$

Отбросив  $\bar{o}(x^2 + y^2)$ , мы получим уравнение параболоида, который приближает нашу поверхность вблизи начала координат. Эта соприкасающаяся поверхность второго порядка служит аналогом соприкасающейся окружности к кривой. В зависимости от вида этой приближающей поверхности, каждую неомбилическую точку поверхности можно отнести к одному из трёх типов.

### Определение 3.36.

- (1) Если  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  оба ненулевые и одного знака ( $K > 0$ ), то такая точка называется *эллиптической* (в этом случае приближающая поверхность — эллиптический параболоид).
- (2) Если  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  разных знаков ( $K < 0$ ), то такая точка называется *гиперболической* (приближающая поверхность — гиперболический параболоид).
- (3) Если одно из  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  нулевое ( $K = 0$ ), то такая точка называется *параболической* (приближающая поверхность — параболический цилиндр).

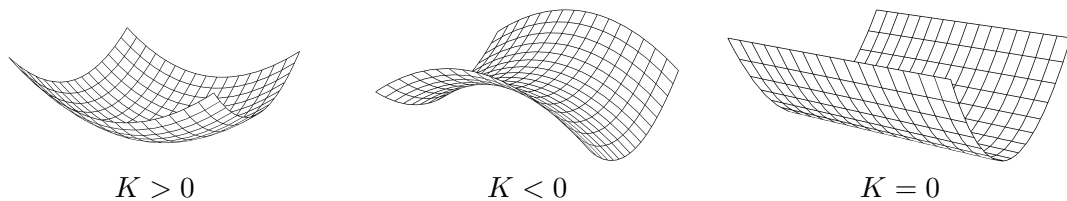


Рис. 3.10: Вид соприкасающегося параболоида в зависимости от гауссовой кривизны

Далее мы опишем геометрический смысл главных кривизн и второй квадратичной формы, для этого мы будем рассматривать сечения поверхности плоскостями.

**Определение 3.37.** *Нормальным сечением* поверхности  $\mathcal{M}$  в некоторой точке  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$  называется кривая в пересечении этой поверхности и плоскости, порождённой каким-то касательным вектором  $\xi \in \mathcal{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$  и нормалью к поверхности в точке  $\mathbf{x}$ .

Обратимся к предложению 3.32. (Здесь также точками обозначены производные по  $t$ .) Обозначим через  $\mathbf{n}_\rho$  вектор главной нормали кривой  $\rho$  в рассматриваемой точке, а через  $\theta$  — угол между ним и вектором нормали к поверхности, то есть  $\theta = \angle(\mathbf{n}_\rho, \mathbf{n})$ . Кривизна<sup>8</sup> кривой  $\rho$  определяется из соотношения

$$\frac{d^2 \rho}{ds^2} = k_{\text{ор}} \mathbf{n}_\rho,$$

где  $s$  — натуральный параметр на кривой, то есть  $ds$  — метрика на нашей поверхности (вспомнить предложение 2.13). Мы уже поняли, что

$$\left\langle \frac{d^2 \rho}{ds^2}, \mathbf{n} \right\rangle = b_{11} \left( \frac{du}{ds} \right)^2 + 2b_{12} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + b_{22} \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 = \frac{b_{ij} du^i du^j}{ds^2},$$

причём, из определения натурального параметра,  $ds^2 = |\dot{\rho}|^2 dt^2 = \mathbf{I}(\dot{\rho}) dt^2$ :

$$k_{\text{ор}} \langle \mathbf{n}_\rho, \mathbf{n} \rangle = \left\langle \frac{d^2 \rho}{ds^2}, \mathbf{n} \right\rangle = \frac{b_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j}{\mathbf{I}(\dot{\rho})} = \frac{\mathbf{II}(\dot{\rho})}{\mathbf{I}(\dot{\rho})},$$

причём  $\langle \mathbf{n}_\rho, \mathbf{n} \rangle = \cos \theta$ . Таким образом, нами доказана следующая теорема.

**Теорема 3.38.** Если кривая лежит на поверхности в  $\mathbb{R}^3$ , то произведение кривизны кривой на косинус угла между нормалью к поверхности и главной нормалью к кривой равно отношению значений второй и первой квадратичных форм на векторе скорости этой кривой.

**Следствие 3.39** (Теорема Менье). Рассмотрим нормальное сечение поверхности  $\mathcal{M}$ , порождённое вектором  $\xi \in \mathcal{T}_x \mathcal{M}$ . Затем наклоним плоскость сечения вокруг вектора  $\xi$  на угол  $\theta$  ( $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ ). Кривизна в точке  $x$  получившегося сечения с точностью до знака есть

$$\frac{1}{\cos \theta} \frac{\mathbf{II}(\xi)}{\mathbf{I}(\xi)}.$$

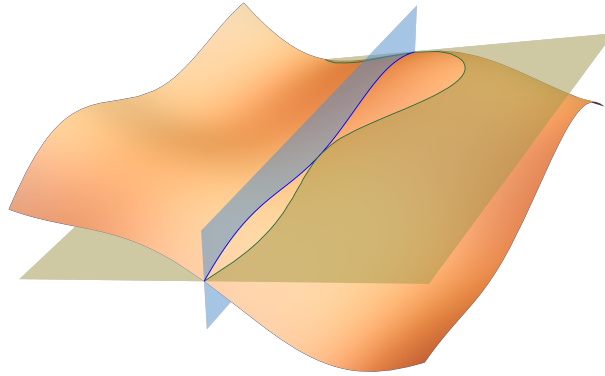


Рис. 3.11: Нормальное сечение (синим) и сечение наклонённой плоскостью (зелёным)

При  $\theta = 0$  получаем кривизну нормального сечения:

$$(3.9) \quad k_n = \pm \frac{\mathbf{II}(\xi)}{\mathbf{I}(\xi)}.$$

Кривизна сечения под углом  $\theta$  теперь выражается через кривизну нормального сечения:

$$k_\theta = \frac{k_n}{\cos \theta}.$$

<sup>8</sup>В этом разделе кривизны нормальных сечений будут пониматься в контексте ориентированной кривизны.

(Обычно теореме Менье формулируют именно в таком виде.)

Формула 3.9 даёт основной геометрический смысл второй квадратичной формы — её значение на единичном касательном векторе есть кривизна нормального сечения, порождённого этим вектором. Итак, пусть имеем касательный вектор  $\xi = \xi^1 \xi_1 + \xi^2 \xi_2$ , тогда:

$$k_\xi = \frac{\Pi(\xi)}{I(\xi)} = \frac{\lambda_1(\xi^1)^2 + \lambda_2(\xi^2)^2}{(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2} = \lambda_1 \cos^2 \varphi + \lambda_2 \sin^2 \varphi,$$

где  $\varphi = \angle(\xi, \xi_1)$ . Таким образом, нами доказана теорема.

**Теорема 3.40** (Формула Эйлера). Кривизна нормального сечения, порождённого касательным вектором  $\xi$ , равна

$$\lambda_1 \cos^2 \varphi + \lambda_2 \sin^2 \varphi,$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — главные кривизны, а  $\varphi$  — угол между  $\xi$  и главным направлением  $\xi_1$ .

Положим для определённости  $\lambda_1 \leq \lambda_2$ . Тогда главные кривизны  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — минимум и максимум, соответственно, кривизн нормальных сечений в рассматриваемой точке. (Функция  $\lambda_1 \cos^2 \varphi + \lambda_2 \sin^2 \varphi$  определена на окружности, а окружность компактна, поэтому максимум и минимум достигаются.) При этом все значения между  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  достигаются в силу непрерывности. Отметим, что если  $\lambda_1 \lambda_2 \leq 0$ , то существует нормальное сечение с нулевой кривизной, то есть прямая.

**Следствие 3.41.**  $H = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} k_{\cos \varphi \cdot \xi_1 + \sin \varphi \cdot \xi_2} d\varphi.$

Средняя кривизна оправдывает своё название не только и даже не столько тем, что является удвоенным средним арифметическим главных кривизн. Она является удвоенным усреднённым значением по всем направлениям нормальной кривизны.

## Минимальные поверхности

В этом разделе мы рассмотрим один важный класс поверхностей. Для понимания происхождения следует сначала прочитать про деривационные формулы Гаусса — Вайнгартена.

**Определение 3.42.** Гладкая поверхность  $M$  называется *минимальной*, если для любой её внутренней точки  $x$  найдётся такая окрестность  $U$ , что любая другая гладкая поверхность  $M'$ , совпадающая с  $M$  вне  $U$  и имеющая тот же край  $\partial M' = \partial M$ , имеет площадь не меньшую, чем  $M$ .

Здесь гладкая поверхность понимается в более сильном смысле, чем обычно. Обычно мы считаем, что гладкая поверхность локально является образом гладкого отображения из некоторой области плоскости с наложенным на него условием регулярности. Здесь же предлагается считать, что гладкая поверхность локально является образом гладкого регулярного гомеоморфизма из двумерного диска.

Тогда можно сказать, что точка *внутренняя* для поверхности, если при таком гомеоморфизме она соответствует внутренней точке диска. *Краем* поверхности назовём множество её точек, не являющихся внутренними. Корректность этих определений (то есть независимость от выбора конкретного гомеоморфизма) легко проверить.

**Теорема 3.43.** Поверхность минимальна тогда и только тогда, когда её средняя кривизна всюду равна нулю.

**Доказательство.** Мы докажем только необходимость условия  $H = 0$  для того, чтобы поверхность была минимальна.

Пусть  $M$  — минимальная поверхность,  $x$  — её внутренняя точка,  $\mathcal{N} \subset M$  — окрестность точки  $x$  на поверхности  $M$  такая, что площадь области  $\mathcal{N}$  не меньше площади любой другой области с тем же краем.

Выберем регулярную параметризацию  $\mathbf{r}(u, v)$  на  $\mathcal{N}$  и возьмём произвольную гладкую функцию  $\varphi: \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , обращающуюся в нуль вместе со своими производными на крае  $\partial\mathcal{N}$ , но такую, что  $\varphi(\mathbf{x}) \neq 0$ . Рассмотрим следующее семейство параметризованных поверхностей:

$$\mathbf{r}_t(u, v) = \mathbf{r}(u, v) + t\varphi(u, v)\mathbf{n}(u, v),$$

где  $\mathbf{n}$ , как обычно, — вектор нормали. При каждом фиксированном  $t$  из достаточно малой окрестности нуля эта формула задаёт регулярную параметризацию некоторой поверхности  $\mathcal{N}_t$  с тем же краем, что и  $\mathcal{N}$ . Так что по построению  $\sigma(\mathcal{N}_t) \geq \sigma(\mathcal{N})$ . Напомним формулу для площади на поверхности:

$$\sigma(\mathcal{N}) = \iint_{\mathcal{N}} \sqrt{\det \mathcal{G}} \, dudv,$$

где  $\mathcal{G}$  — риманова метрика на поверхности  $\mathcal{N}$ . Для регулярной параметризации подынтегральное выражение гладко зависит от первых производных радиус-вектора  $\mathbf{r}$  по  $u$  и  $v$ , поэтому  $\sigma(\mathcal{N}_t)$  — гладкая функция от  $t$ . Будем понимать  $g(t)$  определитель матрицы первой квадратичной формы поверхности  $\mathcal{N}_t$ . Далее хотим найти производную  $\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{g}$ .

$$g_{ij}(t) = \langle \mathbf{r}_i + t(\varphi_i \mathbf{n} + \varphi \mathbf{n}_i) + \bar{o}(t), \mathbf{r}_j + t(\varphi_j \mathbf{n} + \varphi \mathbf{n}_j) + \bar{o}(t) \rangle = \langle \mathbf{r}_i + t\varphi \mathbf{n}_i, \mathbf{r}_j + t\varphi \mathbf{n}_j \rangle + \bar{o}(t)$$

при  $t \rightarrow 0$ , поскольку  $\mathbf{n} \perp \mathbf{r}_k$ ,  $k = 1, 2$ . Таким образом,  $g(t)$  — с точностью до  $\bar{o}(t)$  матрица Грама векторов  $\mathbf{r}_1 + t\varphi \mathbf{n}_1$ ,  $\mathbf{r}_2 + t\varphi \mathbf{n}_2$ , и выражаются через них матрицей

$$E + t\varphi C,$$

где  $C = -\mathcal{G}^{-1}\mathcal{B}$  — матрица оператора Вайнгартена. (Это сразу следует из деривационных формул Вайнгартена.) Далее, вместо того, чтобы непосредственно вычислять  $\sqrt{g(t)}$ , вспомним, что эта величина равна площади параллелограмма, натянутого на соответствующую пару векторов, а отношение площадей равно абсолютной величине определителя соответствующей матрицы перехода, откуда

$$\frac{\sqrt{g(t)}}{\sqrt{g(0)}} = |\det(E + t\varphi C)| + \bar{o}(t) = 1 + t\varphi \operatorname{tr} C + \bar{o}(t) = 1 + t\varphi H + \bar{o}(t)$$

как следствие теоремы 4.10. Отсюда получаем  $g' = \sqrt{\det \mathcal{G}} \varphi H$ . Таким образом,

$$\sigma(\mathcal{N}_t) = \sigma(\mathcal{N}) + t \iint_{\mathcal{N}} \sqrt{\det \mathcal{G}} \varphi H \, dudv + \bar{o}(t).$$

Поскольку площадь поверхности  $\mathcal{N}_t$  достигает минимума при  $t = 0$  мы должны иметь

$$0 = \left. \frac{d\sigma(\mathcal{N}_t)}{dt} \right|_{t=0} = \iint_{\mathcal{N}} \sqrt{\det \mathcal{G}} \varphi H \, dudv$$

при любом выборе функции  $\varphi$ . Покажем, что неравенство  $H \neq 0$  ведёт к противоречию с этим условием. Возьмём новую функцию  $\tilde{\varphi} = \varphi^2 H$ . Получим

$$\iint_{\mathcal{N}} \sqrt{\det \mathcal{G}} \tilde{\varphi} H \, dudv = \iint_{\mathcal{N}} \sqrt{\det \mathcal{G}} \varphi^2 H^2 \, dudv > 0,$$

так как подынтегральная функция неотрицательна, причём в точке  $\mathbf{x}$  она положительна. ■

Физический смысл минимальных поверхностей следующий. Если между двумя кривыми в пространстве натянуть мыльную плёнку, то она, стремясь всюду локально уменьшить свою

площадь, примет форму минимальной поверхности. Самые простые примеры минимальных поверхностей — плоскость, геликоид и катеноид (на геликоид и катеноид можно посмотреть на рисунке 3.9), в этом легко убедиться, посчитав их среднюю кривизну.

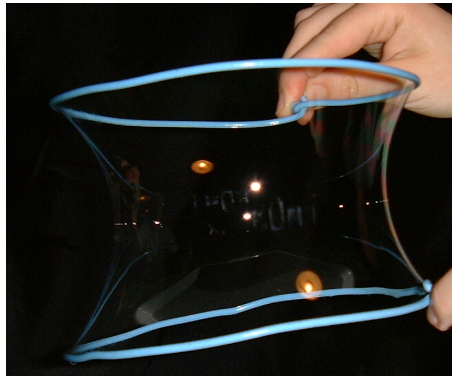


Рис. 3.12: Мыльная плёнка в форме катеноида

## 4. Основные уравнения в теории поверхностей

Эти формулы надо запомнить, вот как хотите.<sup>9</sup>

---

А. А. Гайфуллин

### Деривационные уравнения. Тожества Кристоффеля

Мы хотим написать для поверхностей что-то похожее на формулы Френе, то есть наша цель — научиться дифференцировать векторы

$$\mathbf{r}_1 := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1}, \quad \mathbf{r}_2 := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2},$$

для этого нам будет удобно обозначить

$$\mathbf{r}_{ij} := \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^i \partial u^j}.$$

Векторы  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{n})$  образуют базис в каждой точке поверхности, поэтому каждый вектор  $\mathbf{r}_{ij}$  в нём как-то записывается. Заметим, что коэффициент при  $\mathbf{n}$  мы уже знаем — это соответствующий элемент матрицы второй квадратичной формы  $b_{ij}$ . Действительно, ведь по определению  $b_{ij} = \langle \mathbf{r}_{ij}, \mathbf{n} \rangle$ .

**Определение 4.1.** Коэффициенты  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$  в разложении

$$(4.1) \quad \mathbf{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{r}_k + b_{ij} \mathbf{n}$$

называются *символами Кристоффеля*.

**Лемма 4.2** (Тожества Кристоффеля). Символы Кристоффеля однозначно определяются метрикой на поверхности. Более точно, верна следующая формула:

$$(4.2) \quad \Gamma_{ij}^k = \frac{g^{kl}}{2} \left( \frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} \right),$$

где  $g^{kl}$  обозначают элементы матрицы  $\mathcal{G}^{-1}$ .

**Доказательство.** Напишем

$$(4.3) \quad \langle \mathbf{r}_{ij}, \mathbf{r}_l \rangle = \Gamma_{ij}^s \langle \mathbf{r}_s, \mathbf{r}_l \rangle = \Gamma_{ij}^s g_{sl}$$

и

$$\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} = \frac{\partial}{\partial u^j} \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_l \rangle = \langle \mathbf{r}_{ij}, \mathbf{r}_l \rangle + \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_{jl} \rangle.$$

Последнюю формулу напишем три раза, сдвигая координаты:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} &= \langle \mathbf{r}_{ij}, \mathbf{r}_l \rangle && + \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_{jl} \rangle, \\ \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} &= \langle \mathbf{r}_{ij}, \mathbf{r}_l \rangle + \langle \mathbf{r}_j, \mathbf{r}_{il} \rangle && , \\ \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} &= && \langle \mathbf{r}_{il}, \mathbf{r}_j \rangle + \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_{jl} \rangle. \end{aligned}$$

---

<sup>9</sup>Речь шла о формулах (4.2) и (5.3).

Сложим первые две строки из них и вычтем третью, получим

$$\langle \mathbf{r}_{ij}, \mathbf{r}_l \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} \right).$$

Теперь подставляем (4.3):

$$g_{ls} \Gamma_{ij}^s = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} \right).$$

Домножаем обе части на  $g^{kl}$  и суммируем по  $k$ . Слева получим  $g^{kl} g_{ls} \Gamma_{ij}^s = \delta_s^k \Gamma_{ij}^s = \Gamma_{ij}^k$ :

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{g^{kl}}{2} \left( \frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} \right).$$

■

Отметим, что попутно мы доказали ещё один набор важных формул. Можно напрямую подставить в (4.1) формулы вида (4.3), получим следующее.

**Лемма 4.3.** Выполнены следующие тождества:

$$(4.5) \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = g_{js} \Gamma_{ik}^s + g_{is} \Gamma_{jk}^s.$$

Следует отметить, что символы Кристоффеля не задают никакого тензора в касательном пространстве к поверхности.

**Задача 4.4.** Вывести формулы преобразования символов Кристоффеля при переходе к новым координатам. (И убедиться, что они не совпадают с тензорными.)

**Решение.** Для удобства будем обозначать частную производную по  $u^i$  через  $\partial_i$  (аналогично для других индексов). Мы знаем тождества Кристоффеля:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{g^{kl}}{2} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}).$$

Метрика преобразуется, как тензор ранга 2:

$$\tilde{g}_{ij} = \frac{\partial u^p}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^q}{\partial \tilde{u}^j} g_{pq}, \quad \tilde{g}^{kl} = \frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial u^m} \frac{\partial \tilde{u}^l}{\partial u^n} g^{mn}.$$

Вычислим  $\partial_i g_{jl}$  в новых координатах:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{u}^i} \tilde{g}_{jl} = \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^i} \left( \frac{\partial u^q}{\partial \tilde{u}^j} \frac{\partial u^r}{\partial \tilde{u}^l} g_{qr} \right) = (\partial_p g_{qr}) \frac{\partial u^p}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^q}{\partial \tilde{u}^j} \frac{\partial u^r}{\partial \tilde{u}^l} + g_{qr} \left( \frac{\partial^2 u^q}{\partial \tilde{u}^i \partial \tilde{u}^j} \frac{\partial u^r}{\partial \tilde{u}^l} + \frac{\partial^2 u^r}{\partial \tilde{u}^i \partial \tilde{u}^l} \frac{\partial u^q}{\partial \tilde{u}^j} \right).$$

Подставляем в тождества Кристоффеля для  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{ij}^k &= \frac{\tilde{g}^{kl}}{2} \left( (\partial_p g_{qr}) \frac{\partial u^p}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^q}{\partial \tilde{u}^j} \frac{\partial u^r}{\partial \tilde{u}^l} + g_{qr} \left( \frac{\partial^2 u^q}{\partial \tilde{u}^i \partial \tilde{u}^j} \frac{\partial u^r}{\partial \tilde{u}^l} + \frac{\partial^2 u^r}{\partial \tilde{u}^i \partial \tilde{u}^l} \frac{\partial u^q}{\partial \tilde{u}^j} \right) + \right. \\ &\quad + (\partial_q g_{pr}) \frac{\partial u^p}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^q}{\partial \tilde{u}^j} \frac{\partial u^r}{\partial \tilde{u}^l} + g_{qr} \left( \frac{\partial^2 u^q}{\partial \tilde{u}^j \partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^r}{\partial \tilde{u}^l} + \frac{\partial^2 u^r}{\partial \tilde{u}^j \partial \tilde{u}^l} \frac{\partial u^q}{\partial \tilde{u}^i} \right) - \\ &\quad \left. - (\partial_r g_{pq}) \frac{\partial u^p}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^q}{\partial \tilde{u}^j} \frac{\partial u^r}{\partial \tilde{u}^l} - g_{qr} \left( \frac{\partial^2 u^q}{\partial \tilde{u}^l \partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^r}{\partial \tilde{u}^j} + \frac{\partial^2 u^r}{\partial \tilde{u}^l \partial \tilde{u}^j} \frac{\partial u^q}{\partial \tilde{u}^i} \right) \right). \end{aligned}$$

В последней формуле отдельно вынесим первые слагаемые в каждой большой скобке:

$$\begin{aligned}
 \frac{\tilde{g}^{kl}}{2} ((\partial_p g_{qr}) + (\partial_q g_{pr}) - (\partial_r g_{pq})) \frac{\partial u^p}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^q}{\partial \tilde{u}^j} \frac{\partial u^r}{\partial \tilde{u}^l} &= \\
 &= \frac{g^{mn}}{2} \frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial u^m} \frac{\partial \tilde{u}^l}{\partial u^n} ((\partial_p g_{qr}) + (\partial_q g_{pr}) - (\partial_r g_{pq})) \frac{\partial u^p}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^q}{\partial \tilde{u}^j} \frac{\partial u^r}{\partial \tilde{u}^l} = \\
 &= \frac{g^{mn}}{2} ((\partial_p g_{qr}) + (\partial_q g_{pr}) - (\partial_r g_{pq})) \frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial u^m} \frac{\partial u^p}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^q}{\partial \tilde{u}^j} \delta_n^r = \\
 &= \underbrace{\frac{g^{mr}}{2} ((\partial_p g_{qr}) + (\partial_q g_{pr}) - (\partial_r g_{pq}))}_{\Gamma_{pq}^m} \frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial u^m} \frac{\partial u^p}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^q}{\partial \tilde{u}^j}.
 \end{aligned}$$

Эта часть соответствует тензорному закону. Посчитаем остаток:

$$\begin{aligned}
 \tilde{g}^{kl} g_{qr} \left( \frac{\partial^2 u^q}{\partial \tilde{u}^i \partial \tilde{u}^j} \frac{\partial u^r}{\partial \tilde{u}^l} \right) &= g^{mn} g_{qr} \frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial u^m} \frac{\partial \tilde{u}^l}{\partial u^n} \left( \frac{\partial^2 u^q}{\partial \tilde{u}^i \partial \tilde{u}^j} \frac{\partial u^r}{\partial \tilde{u}^l} \right) = \\
 &= \left\{ \frac{\partial \tilde{u}^l}{\partial u^n} \frac{\partial u^r}{\partial \tilde{u}^l} = \delta_n^r \right\} = \underbrace{g^{mr} g_{rq}}_{\delta_q^m} \frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial u^m} \frac{\partial^2 u^m}{\partial \tilde{u}^i \partial \tilde{u}^j} = \frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial u^m} \frac{\partial^2 u^m}{\partial \tilde{u}^i \partial \tilde{u}^j}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, получаем формулу преобразования символов Кристоффеля при переходе к новым координатам:

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{pq}^m \frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial u^m} \frac{\partial u^p}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^q}{\partial \tilde{u}^j} + \frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial u^m} \frac{\partial^2 u^m}{\partial \tilde{u}^i \partial \tilde{u}^j}.$$

Из полученных формул видно, что символы Кристоффеля преобразуются, как тензоры, тогда и только тогда, когда замена координат  $(u^1, u^2) \rightarrow (\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$  линейна. ■

Уравнения (4.1) с подстановкой (4.2) называются *дериwационными уравнениями Гаусса*.

Теперь хотим дифференцировать вектор  $\mathbf{n}$ . Обозначим

$$\mathbf{n}_1 := \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^1} \quad \text{и} \quad \mathbf{n}_2 := \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^2}.$$

Поскольку вектор  $\mathbf{n}$  имеет постоянную длину, оба этих вектора ортогональны  $\mathbf{n}$ , а значит, выражаются через базисные векторы  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  касательного пространства в соответствующей точке. Пока напишем формально:

$$(4.6) \quad \mathbf{n}_i = c_i^j \mathbf{r}_j,$$

позже мы придадим коэффициентам  $c_i^j$  какой-то смысл.

**Лемма 4.5.** Имеет место равенство

$$(4.7) \quad c_i^j = -g^{jk} b_{ki},$$

где  $g^{jk}$  обозначают элементы матрицы  $\mathcal{G}^{-1}$ .

**Доказательство.** Векторы  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{r}_k$  ортогональны (по построению), поэтому

$$\langle \mathbf{n}_i, \mathbf{r}_k \rangle = -\langle \mathbf{n}, \mathbf{r}_{ik} \rangle = -b_{ik}.$$

Подставляя выражение для  $\mathbf{n}_i$ , получаем

$$c_i^j \langle \mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k \rangle = c_i^j g_{jk} = -b_{ik}$$



Переписываем в матричном виде (с учётом  $b_{ik} = b_{ki}$ ):

$$\mathcal{G}C = -\mathcal{B}, \text{ где } C = (c_i^j).$$

Из него можно выразить матрицу  $C$  как  $C = -\mathcal{G}^{-1}\mathcal{B}$ , или, в обозначениях Эйнштейна,

$$c_i^j = -g^{jk}b_{ki}.$$

■

Уравнения (4.6) с подстановкой (4.7) называются *деривационными уравнениями Вайнгартена*. Вместе, уравнения

$$(4.8) \quad \begin{cases} \mathbf{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{r}_k + b_{ij} \mathbf{n}, \\ \mathbf{n}_i = c_i^j \mathbf{r}_j \end{cases}$$

называются *деривационными уравнениями Гаусса — Вайнгартена*. Заметим, что все коэффициенты этих уравнений выражаются через первую и вторую квадратичные формы поверхности. Так что, разрешив эти уравнения относительно  $\mathbf{r}$ , по первой и второй квадратичной форме мы восстановим поверхность. Так же мы раньше восстанавливали пространственные кривые по кривизне и кручению. Отметим, однако, что если кривую можно было восстановить про произвольным гладким функциям кривизны и кручения, то теперь для деривационных уравнений имеется нетривиальное условие совместности. Мы вернёмся к этому позже в следующем разделе.

Теперь обсудим смысл коэффициентов  $c_i^j$ . Разумеется, они зависят от параметризации, но матрица  $C$  преобразуется как матрица линейного оператора в касательном пространстве к поверхности, так как  $C = -\mathcal{G}^{-1}\mathcal{B}$ .

**Определение 4.6.** *Сферическим отображением* гладкой поверхности  $\mathcal{M}$  называется отображение  $\nu: \mathcal{M} \rightarrow S^2$ , которое каждой точке  $\mathbf{x}$  поверхности ставит в соответствие единичный вектор нормали  $\mathbf{n}$  к соответствующей касательной плоскости  $\mathcal{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$ .

Это определение, строго говоря, задаёт отображение  $\nu$  лишь с точностью до знака. Знак  $\mathbf{n}$  выбирается таким, чтобы тройка векторов  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{n})$  была положительно ориентированной.

**Предложение 4.7.** Для любой точки  $\mathbf{x}$  поверхности  $\mathcal{M}$  касательные пространства  $\mathcal{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$  и  $\mathcal{T}_{\nu(\mathbf{x})}S^2$  совпадают.

**Доказательство.** Вектор  $\xi$  лежит в касательном пространстве  $\mathcal{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$  тогда и только тогда, когда  $\xi \perp \mathbf{n}$ . При этом же условии он лежит в касательном пространстве  $\mathcal{T}_{\nu(\mathbf{x})}S^2$ . ■

Последнее предложение означает, что дифференциал  $d\nu|_{\mathbf{x}}$  сферического отображения можно понимать как линейный оператор на касательном пространстве. Сопоставляя определение дифференциала и деривационные формулы Вайнгартена  $\mathbf{n}_i = -g^{jk}b_{ki}\mathbf{r}_j$ , мы немедленно получаем следующее утверждение.

**Предложение 4.8.** Оператор  $d\nu$  имеет в базисе  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  матрицу  $C = (c_i^j)$ , элементы которой определены формулами (4.7).

**Определение 4.9.** Оператор, заданный в касательном пространстве матрицей  $C$ , называется *оператором Вайнгартена*.

**Теорема 4.10.** Оператор Вайнгартена самосопряжён относительно скалярного произведения, заданного в  $\mathcal{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$  первой квадратичной формой. Векторы главных направлений  $\xi_1$  и  $\xi_2$  являются для него собственными, а соответствующие им собственные значения суть главные кривизны, взятые с обратным знаком:  $-\lambda_1, -\lambda_2$ . Кроме того, имеют место равенства

$$\det(d\nu|_{\mathbf{x}}) = \frac{\det \mathcal{B}}{\det \mathcal{G}} = K.$$

Эта теорема доказывается прямой проверкой всех определений.

## Совместность деривационных уравнений и теорема Бонне

Запишем деривационные уравнения (4.8) в матричном виде:

$$\frac{\partial}{\partial u^i} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{n} \end{pmatrix} A_i,$$

где

$$A_i = \begin{pmatrix} \Gamma_{i1}^1 & \Gamma_{i1}^2 & -b_{ik}g^{k1} \\ \Gamma_{i2}^1 & \Gamma_{i2}^2 & -b_{ik}g^{k2} \\ b_{i1} & b_{i2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Если рассматривать эти уравнения как пару дифференциальных уравнений на матрицу  $X = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{n})$ , то условие совместности (1.2) из теоремы Дарбу для них принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial u^1} A_2 + A_1 A_2 = \frac{\partial}{\partial u^2} A_1 + A_2 A_1,$$

что можно переписать как

$$(4.9) \quad \frac{\partial A_1}{\partial u^2} - \frac{\partial A_2}{\partial u^1} = [A_1, A_2],$$

где  $[A_1, A_2] = A_1 A_2 - A_2 A_1$  — коммутатор матриц.

В формулировке следующей теоремы поверхность понимается в более широком смысле, чем в наших определениях. А именно, поверхности разрешается иметь самопересечения.

**Теорема 4.11** (Бонне). Пусть  $g_{ij}(u^1, u^2)$ ,  $b_{ij}(u^1, u^2)$ , где  $i, j = 1, 2$ , — набор гладких функций в замкнутой односвязной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , удовлетворяющие условиям: матрицы  $G = (g_{ij})$  и  $B = (b_{ij})$  симметричны для всех точек  $(u^1, u^2) \in \Omega$ , причём матрица  $G$  положительно определена. Тогда

- (1) в  $\mathbb{R}^3$  существует поверхность  $\mathcal{M}$  с регулярной параметризацией  $\Omega \rightarrow \mathcal{M}$ , для которой первая и вторая квадратичные формы равны

$$\mathbf{I} = g_{ij} du^i du^j, \quad \mathbf{II} = b_{ij} du^i du^j$$

тогда и только тогда, когда функции  $g_{ij}$ ,  $b_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) удовлетворяют условиям совместности (4.9);

- (2) если поверхность с такими квадратичными формами существует, то она единственна с точностью до движения всего пространства  $\mathbb{R}^3$ .

**Доказательство.** Чтобы не углубляться в технические детали, проведём доказательство в том случае, когда область  $\Omega$  является квадратом  $[0; 1] \times [0; 1]$ .

Покажем необходимость условий (4.9). Пусть данные коэффициенты  $(g_{ij})$  и  $(b_{ij})$  соответствуют некоторой поверхности в  $\mathbb{R}^3$  с параметризацией  $\mathbf{r}(u^1, u^2)$ . Тогда матрица  $X = (\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ \mathbf{n})$  удовлетворяет паре уравнений

$$\frac{\partial}{\partial u^1} X = X A_1, \quad \frac{\partial}{\partial u^2} X = X A_2,$$

то есть, казавось бы, мы умеем решать систему только при одном начальном условии  $X|_{(0,0)}$ , а хотим при всех (см. условие теоремы Дарбу 1.6). Но заметим, что уравнения (4.9) линейные, а потом замена  $X \mapsto CX$  (где  $C$  — любая матрица) переводит одно системы решение в другое. Так что возможность решить систему при каком-то одном начальном условии даёт нам возможность решить её при любых начальных условиях<sup>10</sup>.

Теперь обсудим единственность восстановления с точностью до движений  $\mathbb{R}^3$ . Векторы  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  и  $\mathbf{n}$  удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial}{\partial u^1} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{n} \end{pmatrix} A_1,$$

<sup>10</sup>Отметим, что это общая специфика любых линейных систем дифференциальных уравнений.

которое полностью определяет их в точках вида  $(u^1, 0)$  для всех  $u^1$  при известных начальных значениях  $\mathbf{r}_1|_{(0,0)}$ ,  $\mathbf{r}_2|_{(0,0)}$ ,  $\mathbf{n}|_{(0,0)}$ . Далее, из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial u^2} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{n} \end{pmatrix} A_2$$

значения  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  и  $\mathbf{n}$  находятся во всех точках  $(u^1, u^2) \in \Omega$ . Аналогичным образом, параметризация  $\mathbf{r}(u^1, u^2)$  находится однозначно при известных  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ , если известно начальное условие  $\mathbf{r}|_{(0,0)}$ .

Таким образом, вся неоднозначность восстановления поверхности сводится к выбору начальных значений  $\mathbf{r}|_{(0,0)}$ ,  $\mathbf{r}_1|_{(0,0)}$ ,  $\mathbf{r}_2|_{(0,0)}$  и  $\mathbf{n}|_{(0,0)}$ . При этом нам жёстко задана матрица Грама последних трёх векторов (а первый есть просто радиус-вектор точки, к которой приложен репер). Поэтому единственная свобода выбора начальных условий — это движения всего пространства  $\mathbb{R}^3$ .

Перейдём к сложной части — достаточности. Согласно теореме Дарбу 1.6 условия совместности (4.9) дают возможность найти векторы  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  и  $\mathbf{n}$ , удовлетворяющие уравнениям

$$(4.10) \quad \frac{\partial}{\partial u^1} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{n} \end{pmatrix} A_1, \quad \frac{\partial}{\partial u^2} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{n} \end{pmatrix} A_2$$

в некоторой окрестности точки  $(u^1, u^2) = (0, 0)$  при данном начальном условии. Так что вопрос здесь только в том, чтобы решить эти уравнения на всём квадрате  $\Omega$ , а не только в малой окрестности начала координат. В данном случае решение распространяется на всю область, так как рассматриваемые уравнения линейны, а линейные уравнения решаются «сколь угодно далеко». Здесь также важно, что процедура восстановления векторов  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  и  $\mathbf{n}$ , описанная на предыдущем шаге (где эти же векторы обозначались через, соответственно,  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  и  $\mathbf{n}$ ), в точности повторяет процедуру построения решения в доказательстве теоремы Дарбу 1.6. Как там было показано, при выполнении условий совместности, такая процедура приводит к решению обоих уравнений системы.

Далее, собственно для восстановления поверхности, нужно при уже известных векторах  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  решить уравнения

$$(4.11) \quad \frac{\partial}{\partial u^1} \mathbf{r} = \mathbf{v}_1, \quad \frac{\partial}{\partial u^2} \mathbf{r} = \mathbf{v}_2.$$

Условие совместности для этой системы имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial u^2} \mathbf{v}_1 = \frac{\partial}{\partial u^1} \mathbf{v}_2$$

(см. пример 1.7). Оно выполнено, так как верны формулы

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial u^j} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{v}_k + b_{ij} \mathbf{n}.$$

(Они, в свою очередь, верны просто в силу уравнений (4.10).) Действительно, ведь правые части этих формул симметричны по  $i$  и  $j$ , а значит, и левые тоже. Таким образом, локальных препятствий к решению системы (4.11) нет, а существование решения на всём квадрате снова следует из вида уравнений, здесь правая часть не зависит от  $\mathbf{r}$ , и они решаются простым интегрированием.

Итак, мы построили решения системы

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial u^i} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{n} \end{pmatrix} A_i, \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j} = \mathbf{v}_j \end{cases}$$

с начальными условиями на  $\mathbf{r}|_{(0,0)}$ ,  $\mathbf{r}_1|_{(0,0)}$ ,  $\mathbf{r}_2|_{(0,0)}$  и  $\mathbf{n}|_{(0,0)}$ . Теперь нас беспокоит следующий вопрос — а действительно ли данные нам  $g_{ij}$  и  $b_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) являются коэффициентами, соответственно, первой и второй квадратичной формы построенной нами поверхности?

Рассмотрим матрицу  $\tilde{G}$  первой квадратичной формы нашей поверхности, то есть матрицу Грама векторов  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{n})$ :

$$\tilde{G} := (\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{n})^\top (\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{n}).$$

В силу уравнений (4.10) напомним:

$$\frac{\partial}{\partial u^i} \tilde{G} = (\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{n})_{u^i}^\top (\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{n}) + (\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{n})^\top (\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{n})_{u^i} = A_i^\top \tilde{G} + \tilde{G} A_i.$$

А теперь рассмотрим матрицу

$$\hat{G} := \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{12} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оказывается, для неё выполнены те же формулы.

**Лемма 4.12.** Выполнено

$$A_i^\top \hat{G} + \hat{G} A_i = \frac{\partial}{\partial u^i} \hat{G}.$$

**Доказательство.** Отметим, что матрица в левой части точно нулевая всюду, кроме главного минора  $2 \times 2$ . Действительно, для правой нижней клетки это очевидно, а для остальных легко проверить. Проверим, например, для нижней центральной клетки:

$$\begin{pmatrix} -b_{ik}g^{k1} & -b_{ik}g^{k2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{12} \\ g_{22} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^2 \\ \Gamma_{12}^2 \\ b_{i2} \end{pmatrix} = -b_{ik}g^{ks}g_{s2} + b_{i2} = -b_{i2} + b_{i2} = 0.$$

Таким образом, вне главного минора  $2 \times 2$  матрицы в левой и правой частях данного равенства обе нулевые. А внутри него у матрицы в левой части мы получаем правые части формул (4.5), что также совпадает с тем, что мы хотели получить. ■

Итак, мы поняли, что матрицы  $\hat{G}$  и  $\tilde{G}$  удовлетворяют одним и тем же дифференциальным уравнениям. Мы также знаем, что в начальный момент эти матрицы совпадают:  $\hat{G}|_{(0,0)} = \tilde{G}|_{(0,0)}$ . В силу дифференциальных уравнений, наши матрицы однозначно восстанавливаются по начальному условию, поэтому на самом деле они совпадают всюду.

Таким образом,  $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = g_{ij}$  и  $\langle \mathbf{v}_k, \mathbf{n} \rangle = 0$ , поэтому наши  $g_{ij}$  действительно являются элементами матрицы первой квадратичной формы нашей поверхности, а вектор  $\mathbf{n}$  — вектором нормали. Теперь

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial u^j}, \mathbf{n} \right\rangle = \langle \Gamma_{ij}^k \mathbf{v}_k + b_{ij} \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = b_{ij},$$

так как  $\mathbf{v}_k \perp \mathbf{n}$ . ■

## Уравнения Гаусса — Кодацци

На первый взгляд, система (4.9) содержит девять уравнений. Распишем их подробно, чтобы выяснить их истинное число и конкретный вид. Обозначим через  $\hat{G}$  матрицу Грама векторов  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{n})$ :

$$\hat{G} := \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{12} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что матрица  $\hat{G}$  невырождена (её определитель равен определителю матрицы  $\mathcal{G}$  первой квадратичной формы), а потому, домножив матрицу в левой части (4.9) на  $\hat{G}$ , получим равносильную систему уравнений.

**Лемма 4.13.** Матрица  $\hat{G} \left( \frac{\partial A_1}{\partial u^2} - \frac{\partial A_2}{\partial u^1} - A_1 A_2 + A_2 A_1 \right)$  кососимметрична.

**Доказательство.** Обозначим эту матрицу через  $S$ . Применяя лемму 4.12, напомним

$$\begin{aligned} S &= \frac{\partial(\hat{G}A_1)}{\partial u^2} - \frac{\partial\hat{G}}{\partial u^2}A_1 - \frac{\partial(\hat{G}A_2)}{\partial u^1} + \frac{\partial\hat{G}}{\partial u^1}A_2 - \hat{G}A_1A_2 + \hat{G}A_2A_1 = \\ &= \frac{\partial(\hat{G}A_1)}{\partial u^2} - A_2^\top \hat{G}A_1 - \cancel{\hat{G}A_2A_1} - \frac{\partial(\hat{G}A_2)}{\partial u^1} + A_1^\top \hat{G}A_2 + \cancel{\hat{G}A_1A_2} - \cancel{\hat{G}A_1A_2} + \cancel{\hat{G}A_2A_1} = \\ &= \frac{\partial(\hat{G}A_1)}{\partial u^2} - \frac{\partial(\hat{G}A_2)}{\partial u^1} + \underbrace{A_1^\top \hat{G}A_2 - A_2^\top \hat{G}A_1}_{\text{кососимметрична}}. \end{aligned}$$

Далее пишем

$$S + S^\top = \frac{\partial(\hat{G}A_1 + A_1^\top \hat{G})}{\partial u^2} - \frac{\partial(\hat{G}A_2 + A_2^\top \hat{G})}{\partial u^1} = \frac{\cancel{\partial^2 \hat{G}}}{\cancel{\partial u^1 u^2}} - \frac{\cancel{\partial^2 \hat{G}}}{\cancel{\partial u^1 u^2}} = 0.$$

Таким образом, матрица  $S$  кососимметрична. ■

Итак, мы свели систему уравнений (4.9) на матрицу  $3 \times 3$  к равносильной системе с кососимметричной матрицей. А у такой системы может быть не более трёх независимых уравнений. Будем изучать их по отдельности.

**Определение 4.14.** Уравнение

$$\left( \hat{G} \left( \frac{\partial A_1}{\partial u^2} - \frac{\partial A_2}{\partial u^1} - A_1 A_2 + A_2 A_1 \right) \right)_{12} = 0$$

называется *уравнением Гаусса*.

Подставив матрицы  $\hat{G}$  и  $A_i$ , получаем развёрнутый вид уравнения Гаусса:

$$(4.12) \quad g_{1k} \left( \frac{\partial \Gamma_{22}^k}{\partial u^1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^k}{\partial u^2} + \Gamma_{k1}^s \Gamma_{22}^k - \Gamma_{s2}^k \Gamma_{21}^s \right) - b_{12}b_{22} + b_{12}^2 = 0.$$

Замечательно в этом уравнении то, что из него можно выразить определитель матрицы второй квадратичной формы через символы Кристоффеля, которые, в свою очередь, определяются только метрикой. Отсюда можем сделать следующие выводы.

**Теорема 4.15** (Гаусс). Гауссова кривизна однозначно определяется метрикой. Более точно, выполнена следующая формула:

$$K = \frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} g_{1k} \left( \frac{\partial \Gamma_{22}^k}{\partial u^1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^k}{\partial u^2} + \Gamma_{k1}^s \Gamma_{22}^k - \Gamma_{s2}^k \Gamma_{21}^s \right).$$

**Следствие 4.16.** Если  $\varphi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  — изометрия поверхностей, то для всех точек  $x \in \mathcal{M}$  гауссова кривизна поверхности  $\mathcal{N}$  в точке  $\varphi(x)$  совпадает с гауссовой кривизной поверхности  $\mathcal{M}$  в точке  $x$ .

Обратное, вообще говоря, неверно — существуют не локально изометричные поверхности с одинаковыми гауссовыми кривизнами.

**Задача 4.17.** Две поверхности с равными постоянными гауссовыми кривизнами локально изометричны.

Вернёмся к уравнениям совместности. Мы рассмотрели одно уравнение из трёх независимых, осталось ещё два.

**Определение 4.18.** Уравнения

$$\left( \widehat{G} \left( \frac{\partial A_1}{\partial u^2} - \frac{\partial A_2}{\partial u^1} - A_1 A_2 + A_2 A_1 \right) \right)_{31} = 0, \quad \left( \widehat{G} \left( \frac{\partial A_1}{\partial u^2} - \frac{\partial A_2}{\partial u^1} - A_1 A_2 + A_2 A_1 \right) \right)_{32} = 0$$

называются *уравнениями Кодацци*.

При выполнении нужных подстановок уравнения Кодацци обретают вид

$$(4.13) \quad \frac{\partial b_{12}}{\partial u^1} - \frac{\partial b_{11}}{\partial u^2} + b_{s1} \Gamma_{12}^s - b_{s2} \Gamma_{11}^s = 0, \quad \frac{\partial b_{22}}{\partial u^1} - \frac{\partial b_{21}}{\partial u^2} + b_{s1} \Gamma_{22}^s - b_{s2} \Gamma_{21}^s = 0.$$

Вместе уравнения (4.12) и (4.13) называются *уравнениями Гаусса — Кодацци* и выражают совместность деривационных уравнений Гаусса — Вайнгартена.

## Векторные поля, скобка Ли

**Определение 4.19.** Векторным полем на поверхности  $\mathcal{M}$  называется отображение, которое каждой точке  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$  ставит в соответствие вектор  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  из касательной плоскости  $\mathcal{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$ . Векторное поле  $\mathbf{v}$  называется *гладким*, если в локальной параметризации коэффициенты  $V^1, V^2$  разложения  $\mathbf{v} = V^i \mathbf{r}_i$  вектора  $\mathbf{v}$  по базису  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  являются гладкими функциями.

С каждой локальной системой координат связаны два базисных векторных поля, определённых в соответствующей области на поверхности — это  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ . Их координаты по отношению к этой локальной системе постоянны:  $(1, 0)$  и  $(0, 1)$  соответственно. Зададим следующий вопрос: когда данная пара векторных полей  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$  может быть парой базисных векторных полей для некоторой локальной системы координат?

Разумеется, для начала нужно потребовать, чтобы  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}$  были линейно независимы в каждой точке. Пусть это так в некоторой точке  $\mathbf{x}_0$ . Тогда они линейно независимы и в некоторой окрестности  $U$  точки  $\mathbf{x}_0$ . Пусть  $u^1, u^2$  — некоторая локальная система координат в этой окрестности. Мы хотим выяснить, существует ли другая система координат  $\tilde{u}^1, \tilde{u}^2$ , для которой всюду в  $U$  будет выполнено

$$(4.14) \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^1} \mathbf{r} = \mathbf{v}, \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^2} \mathbf{r} = \mathbf{w}.$$

Найти такую систему координат  $\tilde{u}^1, \tilde{u}^2$  означает найти функции перехода от неё к  $u^1, u^2$  (или наоборот, что эквивалентно). Равенства (4.14) равносильны следующим:

$$\frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}^1} \mathbf{r}_i = V^i \mathbf{r}_i, \quad \frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}^2} \mathbf{r}_i = W^i \mathbf{r}_i,$$

то есть следующей системе из двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}^1} \mathbf{r}_i = V^i(u^1, u^2), \\ \frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}^2} \mathbf{r}_i = W^i(u^1, u^2). \end{cases}$$

Выписываем для неё условие совместности (1.2):

$$\frac{\partial V^i}{\partial u^j} W^j = \frac{\partial W^i}{\partial u^j} V^j.$$

**Определение 4.20.** Для двух векторных полей  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$  их *коммутатором (скобкой Ли)* называется векторное поле

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = \left( V^j \frac{\partial W^i}{\partial u^j} - W^j \frac{\partial V^i}{\partial u^j} \right) \mathbf{r}_i.$$

Если  $[v, w] \equiv 0$ , то говорят, что поля  $v$  и  $w$  коммутируют.

**Предложение 4.21.** Определение скобки Ли корректно, то есть не зависит от выбора системы координат.

**Доказательство.** Рассмотрим  $v$  и  $w$  как отображения  $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ . По определению дифференциала, имеем для этих отображений:

$$dv(w) = \frac{\partial(V^i r_i)}{\partial u^j} W^j = \left( \frac{\partial V^i}{\partial u^j} r_i + V^i r_{ij} \right) W^j.$$

Аналогично,

$$dw(v) = \left( \frac{\partial W^i}{\partial u^j} r_i + W^i r_{ij} \right) V^j.$$

Отметим, что второе слагаемое в обоих случаях одно и то же. Отсюда,

$$dw(v) - dv(w) = \left( V^j \frac{\partial W^i}{\partial u^j} - W^j \frac{\partial V^i}{\partial u^j} \right) r_i = [v, w].$$

Таким образом, мы выразили скобку Ли  $[v, w]$  через инвариантные величины  $dw(v)$  и  $dv(w)$ . Отметим, что каждая из этих двух величин не задаёт, вообще говоря, касательного поля к поверхности. ■

Используя введённое понятие коммутатора векторных полей, приведённое выше рассуждение резюмируется следующим образом.

**Теорема 4.22.** Два векторных поля  $v$  и  $w$  являются базисными векторными полями для некоторой локальной системы координат тогда и только тогда, когда они линейно независимы и коммутируют.

**Задача 4.23.** Доказать, что выполнено тождество Якоби:

$$[[v_1, v_2], v_3] + [[v_2, v_3], v_1] + [[v_3, v_1], v_2] \equiv 0$$

для любых трёх векторных полей  $v_1, v_2, v_3$ .

## Поверхности постоянной отрицательной кривизны

Уравнения Кодацци (4.13) — это, вообще говоря, сложные уравнения в частных производных первого порядка. Но есть специальный случай, в котором их удаётся решить, это поверхности с постоянной отрицательной гауссовой кривизной. Отметим, что при гомотетиях гауссова кривизна поверхности умножается всюду на одно и то же положительное число, так что достаточно рассмотреть случай  $K \equiv -1$ .

**Определение 4.24.** Касательный вектор  $\xi \in \mathcal{T}_x \mathcal{M}$  называется *асимптотическим*, если  $\Pi|_x(\xi) = 0$ . Кривая называется *асимптотической линией*, если её вектор скорости в каждой точке асимптотический.

Если гауссова кривизна поверхности отрицательна, то отрицателен и определитель матрицы  $\mathcal{B}$  второй квадратичной формы, а для квадратичной формы с отрицательным определителем на плоскости имеется ровно два асимптотических направления. Это можно понять двумя способами: вспомнить курс аналитической геометрии или посмотреть на формулу Эйлера 3.40 и воспользоваться соображениями непрерывности.

Обозначим эти два асимптотических направления через  $e_1$  и  $e_2$ . Ясно при этом, что на самом деле естественным образом их занумеровать не получается. Но можно в произвольной точке как-то их занумеровать и продолжить на малую окрестность по непрерывности.

Итак, на поверхности отрицательной кривизны мы локально указали два векторных поля  $e_1, e_2$  (с точностью до знака каждого из них и перестановки). Оказывается, что на



поверхности постоянной отрицательной кривизны эти поля коммутируют, что мы сейчас и покажем. Но сначала докажем общее утверждение.

**Лемма 4.25.** Пусть  $e_1, e_2$  — два единичных линейно независимых векторных поля на поверхности  $\mathcal{M}$ . Тогда в окрестности каждой точки  $x_0$  на поверхности  $\mathcal{M}$  можно выбрать локальные координаты  $(u^1, u^2)$  таким образом, чтобы  $x_0 = r(0, 0)$ ,  $r_1 = e_1$  при  $u^2 = 0$  и  $r_2 = e_2$  всюду в некоторой окрестности точки  $x_0$ .

Иными словами, любая линейно независимая пара векторных полей задаёт базис на некоторой достаточно малой простой дуге в заданной окрестности.

**Доказательство.** Пусть  $(u^1, u^2)$  — произвольная система локальных координат в окрестности точки  $x_0$ , причём  $x_0 = r(u_0^1, u_0^2)$ . Обозначим координаты векторов  $e_1$  и  $e_2$  по отношению к этой системе через  $(E_1^1, E_1^2)$  и  $(E_2^1, E_2^2)$  соответственно:

$$e_i = E_i^j r_j.$$

Решим уравнения

$$\frac{d}{ds} \varphi^i(s) = E_1^i(\varphi^1(s), \varphi^2(s))$$

с начальными условиями  $\varphi^i(0) = u_0^i$  для  $s$  из малой окрестности нуля. Геометрически это означает, что мы провели кривую  $\gamma$  на поверхности  $\mathcal{M}$  через точку  $x_0$  так, чтобы её вектором скорости в каждой точке  $x$  был вектор  $e_1(x)$ . Параметр  $s$  является натуральным на этой кривой (потому что поля единичные).

Теперь для каждого фиксированного  $s$ , для которого определены функции  $\varphi^1$  и  $\varphi^2$ , решим уравнения

$$\frac{d}{dt} \psi^i = E_2^i(\psi^1, \psi^2)$$

с начальными условиями  $\psi^i|_{t=0} = \varphi^i(s)$ . Таким образом,  $\psi^1, \psi^2$  — функции двух аргументов,  $s$  и  $t$ :  $\psi^i = \psi^i(s, t)$ . По теореме о гладкой зависимости решения обыкновенного дифференциального уравнения от начальных условий,  $\psi^i(s, t)$  — гладкие функции. По построению имеем

$$\left( \begin{array}{cc} \frac{\partial \psi^1}{\partial s} & \frac{\partial \psi^1}{\partial t} \\ \frac{\partial \psi^2}{\partial s} & \frac{\partial \psi^2}{\partial t} \end{array} \right) \bigg|_{(s,t)=(0,0)} = \left( \begin{array}{cc} E_1^1 & E_2^1 \\ E_1^2 & E_2^2 \end{array} \right) \bigg|_{(u^1, u^2) = (u_0^1, u_0^2)}.$$

Эта матрица невырождена (потому что поля линейно независимы), поэтому локально можно сделать замену координат  $u^1 = \psi^1(s, t)$ ,  $u^2 = \psi^2(s, t)$ . По построению будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} r(\psi^1(s, t), \psi^2(s, t)) &= (r_i E_1^i)(\psi^1(s, t), \psi^2(s, t)) = e_1(\psi^1(s, t), \psi^2(s, t)) \text{ при } t = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} r(\psi^1(s, t), \psi^2(s, t)) &= (r_i E_2^i)(\psi^1(s, t), \psi^2(s, t)) = e_2(\psi^1(s, t), \psi^2(s, t)) \text{ при всех } s, t. \end{aligned}$$

■

Далее считаем, что координаты введены, как в лемме 4.25. В этих координатах мы знаем вид первой и второй квадратичной форм. На всей области имеем

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & 0 \end{pmatrix}.$$

При  $u^2 = 0$  у матрицы  $\mathcal{G}$  на диагонали стоят единицы, а у матрицы  $\mathcal{B}$  — нули. Более того, мы знаем, что  $\det \mathcal{B} / \det \mathcal{G} = -1$  (из формулы для гауссовой кривизны), отсюда  $\det \mathcal{B} = -1$ .



Поэтому на самом деле вне диагонали в матрице  $\mathcal{B}$  стоят  $\pm 1$ . Мы можем считать, что там стоят 1, потому что если это не так, можно сменить знак у координаты  $u^2$ :

$$(4.15) \quad \mathcal{G}|_{u^2=0} = \begin{pmatrix} 1 & * \\ * & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}|_{u^2=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

На всей области мы знаем (из  $K = -1$ ), что  $b_{12} = \sqrt{\det \mathcal{G}}$  (опять же, здесь надо писать  $\pm \det \mathcal{G}$ , но мы можем поменять знак у какой-то координаты), где  $\det \mathcal{G} = g_{11} - g_{12}^2$ .

Итак, у нас есть два уравнения Кодацци (4.13):

$$\frac{\partial b_{12}}{\partial u^1} - \frac{\partial b_{11}}{\partial u^2} + b_{s1}\Gamma_{12}^s - b_{s2}\Gamma_{11}^s = 0, \quad \frac{\partial b_{22}}{\partial u^1} - \frac{\partial b_{21}}{\partial u^2} + b_{s1}\Gamma_{22}^s - b_{s2}\Gamma_{21}^s = 0,$$

и три неизвестных функции  $g_{11}$ ,  $g_{12}$  и  $b_{11}$  (напомним, что  $b_{12}$  мы уже выразили). Здесь нужно сделать трюк: предположим, что  $g_{12}$  — известная функция, и будем пытаться восстановить через неё  $g_{11}$  и  $b_{11}$ . В уравнениях Кодацци уже можно выполнить некоторые подстановки, при этом нам будет удобно<sup>11</sup> обозначить  $g := \det \mathcal{G}$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u^1} - \frac{\partial b_{11}}{\partial u^2} + b_{11}\Gamma_{12}^1 + b_{12}\Gamma_{12}^2 - b_{12}\Gamma_{11}^1 &= 0, \\ -\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u^2} + b_{11}\Gamma_{22}^1 + b_{12}\Gamma_{22}^2 - b_{12}\Gamma_{21}^2 &= 0. \end{aligned}$$

Мы хотим, чтобы на неизвестные функции  $g_{11}$  и  $b_{11}$  не было производных по  $u^1$ . Потому что при  $u^2 = 0$  у нас есть начальные условия (4.15), и мы сможем воспользоваться теоремой о существовании и единственности решения для обыкновенного дифференциального уравнения. А сейчас у нас уравнения в частных производных.

Итак, мы хотим найти в наших уравнениях производные  $\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1}$  и  $\frac{\partial b_{11}}{\partial u^1}$ . Сразу отметим, что вторых точно нигде не будет, поэтому ищем первые. Рассмотрим сначала первое уравнение. В нём сразу видим частную производную по  $u^1$  и пишем

$$(4.16) \quad \frac{1}{2\sqrt{g}} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} + \dots = 0.$$

(Мы хотим дописать в это уравнение всё, что найдём с частными производными  $\partial g_{11}/\partial u^1$  и убедиться, что всё сокращается.)

Ещё нам стоит бояться символов Кристоффеля, ведь на самом деле они здесь определяются через формулы (4.2), в которых могут присутствовать частные производные  $\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1}$ . Проверяем все символы Кристоффеля по очереди.

$$\Gamma_{12}^k = \frac{g^{kl}}{2} \left( \frac{\partial g_{1l}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{2l}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u^l} \right)$$

— здесь всё хорошо, поэтому  $\Gamma_{12}^1$  и  $\Gamma_{12}^2$  нас более не интересуют. Проверяем оставшийся символ Кристоффеля в первом уравнении:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{g^{1l}}{2} \left( \frac{\partial g_{1l}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{1l}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^l} \right).$$

Видим, что при  $l = 1$  получаются искомые производные, а при  $l = 2$  их не будет. Дописывая их в уравнение (4.16), получаем:

$$\frac{1}{2\sqrt{g}} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} - \sqrt{g} \frac{1}{2g} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} = 0.$$

<sup>11</sup>Мне долго удавалось избегать этого обозначения (оно мне просто не нравится), но здесь приходится его принять, иначе совсем неудобно.

(Явная формула для обратной матрицы даёт  $g^{11} = g^{-1}$ .) Видим, что всё сокращается.

У каждого символа Кристоффеля во втором уравнении один из индексов равен 2, поэтому  $\partial g_{11}/\partial u^1$  там появиться не может (это легко увидеть, взглянув на тождества Кристоффеля).

Таким образом, в случае поверхностей постоянной отрицательной гауссовой кривизны уравнения Кодацци являются обыкновенными дифференциальными уравнениями вида

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} &= \dots \\ \frac{\partial b_{11}}{\partial u^2} &= \dots\end{aligned}$$

с начальными условиями (4.15). Но нас интересует не только возможность их решения, но и конкретный вид решений. При этом находить сами уравнения мы не хотим (надо в лоб расписывать символы Кристоффеля и подставлять; можно, но не хочется).

Появляется «Бог из машины»: а вдруг в качестве решения подойдут  $g_{11} \equiv 1$ ,  $b_{11} \equiv 0$ ? (Мы просто взяли начальные условия и предположили, что они подойдут в качестве решений на всей области.) Если это решения, то поскольку эти функции находятся из обыкновенных дифференциальных уравнений, то никаких других решений быть не может.

Итак, мы хотим проверить, что уравнениям Кодацци удовлетворяют формы

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 1 & g_{12} \\ g_{12} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{g} \\ \sqrt{g} & 0 \end{pmatrix},$$

где  $g_{12}$  — произвольная гладкая функция и  $g = 1 - g_{12}^2$ .

Нужно посчитать все символы Кристоффеля, но в нашем случае это сделать легко, ведь все элементы матрицы  $\mathcal{G}$ , кроме  $g_{12}$  — константы, и их производные обнуляются. Так что можем сразу написать (опять пользуемся явной формулой для обратной матрицы):

$$(4.17) \quad \begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= -\frac{g_{12}}{g} \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1}, & \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{g} \frac{\partial g_{12}}{\partial u^2}, & \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{g} \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1}, & \Gamma_{22}^2 &= -\frac{g_{12}}{g} \frac{\partial g_{12}}{\partial u^2}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 0.\end{aligned}$$

Подставляем в первое уравнение:

$$-\frac{g_{12}}{\sqrt{g}} \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} + \sqrt{g} \frac{g_{12}}{g} \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} = 0$$

— всё сократилось. Аналогично для второго уравнения.

Итак, мы получили локально

$$\mathbf{I} = (du^1)^2 + (du^2)^2 + 2g_{12} du^1 du^2, \quad \mathbf{II} = 2\sqrt{g} du^1 du^2,$$

где про  $g_{12}$  мы пока ничего не знаем. Таким образом, мы доказали, что в случае поверхностей постоянной отрицательной гауссовой кривизны асимптотические направления локально задают базисные поля, а значит, коммутируют. Напомним, что на нашей координатной сетке из асимптотических линий на каждой линии введён натуральный параметр (см. доказательство леммы 4.25). Такие координатные системы называются *сетями Чебышёва*<sup>12</sup>.

У нас осталось одна неизвестная функция  $g_{12}$  и уравнение Гаусса (4.12), на которое мы пока не смотрели. Далее мы подставим найденные матричные элементы в это уравнение и получим условие на функцию  $g_{12}$ . Но перед этим отметим следующее: мы знаем, что

$$g = 1 - g_{12}^2 = b_{12}^2.$$

<sup>12</sup>Насколько я знаю, впервые П. Л. Чебышёв ввёл это понятие в известном (в частности, по бородатому анекдоту) докладе «О кройке одежды». Дело в том, что координатные линии сетей Чебышёва ведут себя, как нерастяжимые тканевые нити (которые при этом могут изгибаться и менять углы друг относительно друга).

Иными словами,  $g_{12}^2 + b_{12}^2 = 1$ . Тогда мы можем написать

$$(4.18) \quad g_{12} = \cos \omega, \quad b_{12} = \sin \omega,$$

где  $\omega$  — угол между асимптотическими линиями (так как  $\cos \omega = g_{12} = \langle e_1, e_2 \rangle$ ). Напомним общий вид выражения гауссовой кривизны  $K$  через метрику:

$$K = \frac{g_{1k}}{g} \left( \frac{\partial \Gamma_{22}^k}{\partial u^1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^k}{\partial u^2} + \Gamma_{k1}^s \Gamma_{22}^k - \Gamma_{s2}^k \Gamma_{21}^s \right).$$

Подставляем сюда формулы (4.17):

$$\begin{aligned} -g &= g_{1k} \left( \frac{\partial \Gamma_{22}^k}{\partial u^1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^k}{\partial u^2} + \Gamma_{k1}^s \Gamma_{22}^k - \Gamma_{s2}^k \Gamma_{21}^s \right) = \\ &= \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial u^1} + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^1 + g_{12} \left( \frac{\partial \Gamma_{22}^2}{\partial u^1} + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 \right) = \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial u^1} + g_{12} \frac{\partial \Gamma_{22}^2}{\partial u^1}. \end{aligned}$$

Теперь пользуемся подстановкой (4.18):

$$\begin{aligned} g &= b_{12}^2 = \sin^2 \omega, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{g} \frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} = \frac{1}{\sin^2 \omega} \frac{\partial \cos \omega}{\partial u^2} = -\frac{1}{\sin \omega} \frac{\partial \omega}{\partial u^2}, \\ \Gamma_{22}^2 &= -\frac{g_{12}}{g} \frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} = -\frac{\cos \omega}{\sin^2 \omega} \frac{\partial \cos \omega}{\partial u^2} = \operatorname{ctg} \omega \frac{\partial \omega}{\partial u^2}. \end{aligned}$$

В итоге получаем

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial u^1} + g_{12} \frac{\partial \Gamma_{22}^2}{\partial u^1} + g = -\frac{\partial}{\partial u^1} \left( \frac{1}{\sin \omega} \frac{\partial \omega}{\partial u^2} \right) + \\ &+ \cos \omega \frac{\partial}{\partial u^1} \cdot \left( \operatorname{ctg} \omega \frac{\partial \omega}{\partial u^2} \right) + \sin^2 \omega = -\sin \omega \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial u^1 \partial u^2} + \sin^2 \omega, \end{aligned}$$

что равносильно следующему (поскольку  $\sin \omega \neq 0$ ):

$$(4.19) \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial u^1 \partial u^2} = \sin \omega.$$

Все наши рассуждения можно сформулировать в виде следующей теоремы.

**Теорема 4.26.**

- (1) На поверхности с постоянной гауссовой кривизной  $K \equiv -1$  в окрестности каждой точки существует система координат  $(u^1, u^2)$ , в которой первая и вторая квадратичные формы имеют вид

$$(4.20) \quad \mathbf{I} = (du^1)^2 + (du^2)^2 + 2 \cos \omega(u^1, u^2) du^1 du^2, \quad \mathbf{II} = 2 \sin \omega(u^1, u^2) du^1 du^2,$$

причём эта система координат определена однозначно с точностью до перестановки координат, их сдвигов на константы и смены знака любой из них.

- (2) В системе координат, указанной в предыдущем пункте, функция  $\omega$  удовлетворяет уравнению *sin-Гордон*<sup>13</sup> (4.19).
- (3) Для любого этого уравнения с  $\sin \omega \neq 0$  существует поверхность постоянной кривизны  $K \equiv -1$  с первой и второй квадратичными формами вида (4.20).

Простейшим нетривиальным решением уравнения *sin-Гордон* является

$$\omega = 4 \operatorname{arctg} e^{u^1 + u^2}.$$

Оно соответствует псевдосфере Бельтрами. Про неё, кстати, можно почитать [здесь](#).

<sup>13</sup>Уравнение *sin-Гордон* играет важную роль в теории солитонов. Я не понимаю, что это значит и не думаю, что должен, но об этом упоминается везде, где написано про это уравнение. Я продолжаю добрую традицию.

## 5. Внутренняя геометрия поверхностей

### Ковариантное дифференцирование, геодезические линии

Мы хотим построить анализ на поверхности, который будет опираться только на её внутреннюю геометрию. В частности, мы хотим научиться дифференцировать векторные поля. Пусть на поверхности задано векторное поле  $\mathbf{v}(t)$ , гладко зависящее от времени. Обычное дифференцирование  $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$  нам не подойдёт, потому что такие векторы не обязательно касательные, так что на них нельзя смотреть с точки зрения внутренней геометрии поверхности. Для наших целей нужно как-то модифицировать обычное дифференцирование.

Для правильного подхода нам стоит ответить на вопрос: какой разумный смысл можно придать словам «идти прямо» на поверхности? Хороший взгляд следующий — положим на поверхность бусинку (которая не будет с неё слетать) и приведём её в движение слабым щелчком без последующего воздействия каких-либо внешних сил. Логично сказать, что тогда бусинка будет «двигаться прямо» по поверхности (по направлению, в котором мы её толкнули), при этом на неё действует лишь сила нормальной реакции, всюду перпендикулярная поверхности. Так, мы естественно пришли к точке зрения, что «идти прямо» вдоль какого-то направления на поверхности — это идти так, чтобы вектор нашего ускорения был перпендикулярен этому направлению.

**Определение 5.1.** Ковариантной производной векторного поля  $\mathbf{v}(t)$  по направлению (постоянного) векторного поля  $\mathbf{w}$  называется векторное поле

$$(\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{v})(\mathbf{x}) := \text{proj}_{\mathbf{w}(\mathbf{x})} \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Частными ковариантными производными назовём ковариантные производные вдоль базисных векторных полей  $\mathbf{r}_i$ :

$$(\nabla_i\mathbf{v})(\mathbf{x}) = \text{proj}_{\mathbf{r}_i(\mathbf{x})} \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Способ, которым мы решили проблему может показаться слишком наивным. У нас была проблема — векторы  $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$  не обязательно касаются поверхности, а мы изменили их очень понятным образом — просто спроецировали на касательное пространство. Однако мы правильно мотивировали наши действия, поэтому именно такое определение может привести нас к плодотворной теории.

Отметим, что проекция — линейная операция, а потому выполнено

$$\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{v} = W^i \nabla_i \mathbf{v},$$

так что ковариантная производная вдоль векторного поля однозначно определяется частными ковариантными производными, поэтому полезно вывести общие формулы для частных ковариантных производных. Сначала найдём обычные частные производные векторного поля  $\mathbf{r}$  по направлениям векторов  $\mathbf{r}_i$ :

$$(5.1) \quad \partial_i \mathbf{v} = \frac{\partial V^k}{\partial u^i} \mathbf{r}_k + V^j \mathbf{r}_{ij} \stackrel{(4.1)}{=} \frac{\partial V^k}{\partial u^i} \mathbf{r}_k + V^j (\Gamma_{ij}^k \mathbf{r}_k + b_{ij} \mathbf{n}).$$

Мы понимаем, что  $(\nabla_i \mathbf{v})(\mathbf{x}) = \text{proj}_{T_{\mathbf{x}}\mathcal{M}} \partial_i \mathbf{v}$ . Спроектировать на касательное пространство частные производные (5.1) — значит убрать у них слагаемые с  $\mathbf{n}$ . Получаем:

$$\nabla_i \mathbf{v} = \left( \frac{\partial V^k}{\partial u^i} + \Gamma_{ij}^k V^j \right) \mathbf{r}_k.$$

Часто эту формулу записывают так:

$$(5.2) \quad (\nabla_i \mathbf{v})^k = \frac{\partial V^k}{\partial u^i} + \Gamma_{ij}^k V^j$$

Выбор коэффициентов  $\Gamma_{ij}^k$  так, чтобы выражение (5.2) не зависело от выбора системы координат, называется *связностью* (на многообразии). Определяя  $\Gamma_{ij}^k$  как символы Кристоффеля, то есть по тождествам (4.2), мы получаем *симметричную риманову связность*. В этом курсе мы будем сталкиваться только с ней.

Итак, общая формула ковариантной производной имеет вид

$$(5.3) \quad (\nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{v})^k = (W^i \nabla_i \mathbf{v})^k = W^i \frac{\partial V^k}{\partial u^i} + \Gamma_{ij}^k W^i V^j.$$

Отметим глубинный смысл формулы, полученной нами при решении задачи 4.4. Дело в том, что нетензорный характер преобразования символов Кристоффеля компенсирует «нетензорность» частной производной. (Ведь ковариантная производная уже обязана меняться, как тензор!) В частности, с помощью этого наблюдения можно более простым путём прийти к формуле преобразования символов Кристоффеля, выведенной нами ранее лобовыми вычислениями.

Итак, мы поняли, что «движением прямо» вдоль некоторого векторного поля  $\mathbf{w}$  мы хотим называть такое движение, что наша ковариантная производная вдоль этого векторного поля всюду равна нулю.

**Определение 5.2.** Векторное поле  $\mathbf{v}$  называется *ковариантно постоянным* вдоль направления векторного поля  $\mathbf{w}$ , если  $\nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{v} \equiv 0$ .

Получаем систему уравнений  $(\nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{v})^k = 0$  или, если расписать по формулам (5.3),

$$W^i \frac{\partial V^k}{\partial u^i} + \Gamma_{ij}^k W^i V^j = 0.$$

Видим, что это система дифференциальных уравнений первого порядка на  $\mathbf{v}$ . Из теоремы о существовании и единственности мы знаем, что она имеет единственное решение при любых начальных условиях. А начальные условия здесь — это касательный вектор в момент времени  $t = 0$ :  $\mathbf{v}(0) = \boldsymbol{\xi}$ . Таким образом, мы определили операцию *параллельного переноса* вектора  $\boldsymbol{\xi}$  вдоль векторного поля  $\mathbf{w}$ . Однако нас, как правило, будет интересовать конкретный частный случай, когда векторное поле, вдоль которого мы будем осуществлять параллельный перенос, образовано векторами скорости регулярной кривой на поверхности.

Векторы скорости произвольной регулярной кривой  $\gamma(t) = (u^1(t), u^2(t))$  на поверхности задают на этой кривой гладкое векторное поле, так что мы можем ковариантно дифференцировать вдоль кривой:

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \mathbf{v} = \dot{\gamma}^i \nabla_i \mathbf{v}.$$

Подставим сюда формулы (5.3):

$$(\nabla_{\dot{\gamma}} \mathbf{v})^k = (\dot{\gamma}^i \nabla_i \mathbf{v})^k = \dot{\gamma}^i \frac{\partial V^k}{\partial u^i} + \dot{\gamma}^i \Gamma_{ij}^k V^j = \frac{dV^k}{dt} + \dot{\gamma}^i \Gamma_{ij}^k V^j.$$

**Определение 5.3.** *Параллельным переносом* вектора  $\boldsymbol{\xi}$  вдоль кривой  $\gamma(t)$  называется векторное поле  $\mathbf{v}(t)$ , для которого  $\mathbf{v}(0) = \boldsymbol{\xi}$  и  $\nabla_{\dot{\gamma}} \mathbf{v} \equiv 0$ :

$$(5.4) \quad \frac{dV^k}{dt} + \Gamma_{ij}^k \dot{\gamma}^i V^j = 0.$$

Уравнения (5.4) при этом называются *уравнениями параллельного переноса*.

Иными словами, параллельный перенос — это процесс построения векторного поля, ковариантно постоянного вдоль данной кривой, с данным начальным вектором.

**Лемма 5.4.** Параллельный перенос сохраняет скалярное произведение. В частности, при параллельном переносе сохраняются длины векторов и углы между ними.

**Доказательство.** Достаточно проверить, что при параллельном переносе сохраняются длины векторов (так как билинейная форма однозначно восстанавливается по соответствующей ей квадратичной форме). А это следует из того, что для векторного поля  $\mathbf{v}$ , ковариантно постоянного вдоль некоторого пути на поверхности, выполнено  $\mathbf{v} \perp \dot{\mathbf{v}}$  сразу из определения ковариантной производной. ■

**Задача 5.5.** На какой угол повернётся касательный вектор к единичной сфере после параллельного переноса вдоль параллели  $\theta = \theta_0$  ( $0 \leq \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}$ ) на угол  $2\pi$ ?

**Решение.** Напомним, что параметризация  $\mathbf{r}(\theta, \varphi)$  единичной сферы имеет вид

$$x = \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \cos \theta,$$

где  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . Отсюда можем легко найти первую квадратичную форму сферы:

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Глобально мы хотим написать уравнение (5.4) параллельного переноса вдоль замкнутой кривой  $\theta = \theta_0$  и решить его. Для этого нам нужно сначала найти символы Кристоффеля, воспользовавшись для этого тождествами Кристоффеля. Сначала хорошо бы явно выписать обратную матрицу метрики:

$$\mathcal{G}^{-1} = \frac{1}{\sin \theta} \begin{pmatrix} \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отметим два полезных факта: во-первых, метрика  $\mathcal{G}$  зависит только от значения параметра  $\theta$ , а во-вторых, матрицы  $\mathcal{G}$  и  $\mathcal{G}^{-1}$  диагональные. Это существенно сокращает вычисление символов Кристоффеля. В результате несложных вычислений получаем, что единственными ненулевыми символами Кристоффеля оказываются

$$\Gamma_{22}^1 = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \operatorname{ctg} \theta.$$

Параллель  $\theta = \theta_0$  в нашей параметризации параметризуется следующим образом:  $\theta(t) = \theta_0$ ,  $\varphi(t) = t$ ,  $0 \leq t < 2\pi$ . Тогда  $\dot{\theta} = 0$ ,  $\dot{\varphi} = 1$ . Уравнения параллельного переноса (5.4)

$$\frac{dV^k}{dt} + \Gamma_{ij}^k \dot{\gamma}^i V^j = 0$$

в нашем случае имеют вид

$$\begin{cases} \frac{dV^1}{dt} + \Gamma_{22}^1 \dot{\varphi} V^2 = 0, \\ \frac{dV^2}{dt} + \underbrace{\Gamma_{12}^2 \dot{\theta} V^2 + \Gamma_{21}^2 \dot{\varphi} V^1}_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dV^1}{dt} - \sin \theta_0 \cos \theta_0 V^2 = 0, \\ \frac{dV^2}{dt} + \operatorname{ctg} \theta_0 V^1 = 0. \end{cases}$$

Это однородная линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений на компоненты  $(V^1, V^2)$  поля. Можно продемонстрировать мастерство и решить её стандартными методами, изученными в рамках соответствующего курса. Но мы схитрим — продифференцируем первое уравнение

$$\frac{dV^2}{dt} = \frac{1}{\sin \theta_0 \cos \theta_0} \frac{d^2 V^1}{dt^2}$$

и поставим во второе:

$$\frac{1}{\sin \theta_0 \cos \theta_0} \frac{d^2 V^1}{dt^2} + \frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0} V^1 = 0.$$

Получаем уравнение малых колебаний:

$$\frac{d^2 V^1}{dt^2} + \cos^2 \theta_0 V^1 = 0.$$

На самом деле, дальше нам дорешивать ничего не нужно. Отсюда мы уже видим, что при таком параллельном переносе вектор вращается с амплитудой  $\cos \theta_0$ . Так что при полном обороте вокруг параллели вектор повернётся на угол  $2\pi \cos \theta_0$ . ■

Из последней задачи видно, что при параллельном переносе по замкнутой траектории вектор может не перейти в себя, но повернуться на некоторый угол. Этот эффект вызван кривизной поверхности, по которой осуществляется перенос.

**Определение 5.6.** Кривая  $\gamma(t)$  называется *геодезической линией*, если  $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} \equiv 0$ :

$$(5.5) \quad \ddot{\gamma}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j = 0.$$

Уравнения (5.5) называют *уравнениями геодезической*.

Геодезические — это те кривые, которые будет вырисовывать бусинка, двигаясь по поверхности без воздействия внешних сил. Уравнения (5.5) — это дифференциальные уравнения уже второго порядка, а потому начальными условиями для него служат точка  $\gamma(0)$  и вектор скорости  $\dot{\gamma}(0)$  — куда положить бусинку и в какую сторону её толкнуть.

### Геодезические как экстремали функционала действия

Пусть  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$  — гладкая функция трёх аргументов  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$ . Эту функцию будем называть *лагранжианом*. Для гладкого пути  $\gamma: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  определим *действие*  $\mathcal{S}(\gamma)$  этого пути по формуле

$$(5.6) \quad \mathcal{S}(\gamma) := \int_0^1 \mathcal{L}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t) dt$$

и зададим следующий вопрос: когда действие данного пути  $\gamma$  принимает наименьшее значение среди всех путей с тем же началом  $\gamma(0)$  и концом  $\gamma(1)$ ?

Оказывается, эволюция многих физических систем подчинена простому принципу: ограничение траектории движения на малый промежуток времени минимизирует некоторый функционал действия<sup>14</sup>. Чтобы описать такую систему, достаточно указать её лагранжиан.

Необходимым условием достижения минимума, как известно, равенство нулю первых производных. Сейчас мы введём аналог именно этого более слабого условия для бесконечномерного пространства всех путей.

**Определение 5.7.** Пусть  $\gamma: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  — некоторый путь. Под его *однопараметрической деформацией* понимается любая гладкая функция  $\gamma_\tau(t)$  от двух переменных  $\tau$  и  $t$  такая, что  $\gamma_0(t) = \gamma(t)$  при всех  $t$  и  $\gamma_\tau(0) = \gamma(0)$ ,  $\gamma_\tau(1) = \gamma(1)$  при всех  $\tau$ .

Говорят, что путь  $\gamma$  является *экстремалью* для функционала действия (5.6), если для любой его однопараметрической деформации  $\gamma_\tau$  выполнено

$$\left. \frac{d}{d\tau} \mathcal{S}(\gamma_\tau) \right|_{\tau=0} = 0.$$

Поскольку в лагранжиан  $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$  вместо  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  всегда подставляются  $\gamma(t)$  и  $\dot{\gamma}(t)$  для некоторого пути, частные производные  $\partial \mathcal{L} / \partial x^i$  и  $\partial \mathcal{L} / \partial y^i$ , в которых также сделаны эти подстановки, будут обозначаться через  $\partial \mathcal{L} / \partial \gamma^i$  и  $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{\gamma}^i$  соответственно.

**Лемма 5.8.** Гладкий путь  $\gamma$  является экстремалью для функционала действия (5.6) тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$(5.7) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}^i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma^i}.$$

<sup>14</sup>Например, все системы классической механики лагранжевы, лагранжианом для них является разность кинетической и потенциальной энергий.



**Доказательство.** Пусть  $\gamma_\tau$  — некоторая однопараметрическая деформация пути  $\gamma: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Обозначим через  $\mathbf{v}(t)$  вектор  $\partial\gamma_\tau(t)/\partial\tau$ . Поскольку при деформации концы предполагаются фиксированными, мы имеем  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}(1) = 0$ .

Вычислим производную  $d\mathcal{S}(\gamma_\tau)/d\tau$ , занеся производную под знак интеграла:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{S}(\gamma_\tau)}{d\tau} &= \int_0^1 \frac{\partial\mathcal{L}(\gamma_\tau(t), \dot{\gamma}_\tau(t), t)}{\partial\tau} dt = \\ &= \int_0^1 \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\gamma^i} v^i(t) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\gamma}^i} \dot{v}^i(t) \right) dt \stackrel{(5.7)}{=} \int_0^1 \left( \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\gamma}^i} \right) v^i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\gamma}^i} \dot{v}^i \right) (t) dt = \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\gamma}^i} v^i \right) dt = \left. \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\gamma}^i} v^i \right|_0^1 = 0, \end{aligned}$$

так как  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}(1) = 0$ , что отмечалось выше.

Наоборот, пусть  $\gamma$  — экстремаль. Возьмём произвольную гладкую функцию  $\varphi: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  со свойствами  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ ,  $\varphi(t) > 0$  для всех  $0 < t < 1$ , и положим

$$\mathbf{v}(t) := \varphi(t) \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\gamma^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\gamma}^i} \right), \quad \gamma_\tau(t) := \gamma(t) + \tau\mathbf{v}(t).$$

Получим

$$0 = \frac{d\mathcal{S}(\gamma_\tau)}{d\tau} = \int_0^1 \varphi(t) |\mathbf{v}(t)|^2 dt,$$

откуда  $\mathbf{v}(t) = 0$  при всех  $0 \leq t \leq 1$ , что влечёт выполнение условий (5.7). ■

Уравнения (5.7) называются *уравнениями Эйлера — Лагранжа*. Набор величин  $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{\gamma}^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , называется *импульсом* данной системы, а набор  $\partial\mathcal{L}/\partial\gamma^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , — действующей на неё *силой*. Тогда уравнения Эйлера — Лагранжа представляют собой обобщение второго закона Ньютона: производная импульса по времени равна действующей силе.

**Теорема 5.9.** Для параметризованной кривой  $\gamma: [0; 1] \rightarrow \mathcal{M}$  на поверхности  $\mathcal{M}$  следующие условия равносильны:

- (1) кривая  $\gamma$  является геодезической, а её параметризация пропорциональна натуральной;
- (2) кривая  $\gamma$  является экстремалью следующего функционала действия в классе путей на поверхности  $\mathcal{M}$ :

$$\mathcal{S}(\gamma) = \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)|^2 dt.$$

**Доказательство.** Лагранжиан рассматриваемого действия в локальных координатах поверхности записывается следующим образом:

$$\mathcal{L}(\gamma, \dot{\gamma}) = g_{ij}(\gamma) \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j.$$

Вычислим  $i$ -е компоненты импульса  $\mathbf{p}$  и силы  $\mathbf{f}$ :

$$p_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\gamma}^i} = 2g_{ij}\dot{\gamma}^j, \quad f_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\gamma^i} = \frac{\partial g_{kl}}{\partial\gamma^i} \dot{\gamma}^k \dot{\gamma}^l.$$

Используя (4.5), получаем

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= \frac{d}{dt} (2g_{ij}\dot{\gamma}^j) = 2 \left( g_{ij}\ddot{\gamma}^j + \frac{\partial g_{ij}}{\partial\gamma^k} \dot{\gamma}^j \dot{\gamma}^k \right) = 2(g_{ij}\ddot{\gamma}^j + \Gamma_{ik}^s g_{sj} \dot{\gamma}^k \dot{\gamma}^j + \Gamma_{jk}^s g_{si} \dot{\gamma}^k \dot{\gamma}^j), \\ f_i &= (\Gamma_{ik} g_{sl} + \Gamma_{il}^s g_{sk}) \dot{\gamma}^k \dot{\gamma}^l. \end{aligned}$$



Подстановка найденных выражений в уравнения Эйлера — Лагранжа  $\dot{p}_i = f_i$  даёт:

$$2g_{ij}(\ddot{\gamma}^j + \Gamma_{kl}^j \dot{\gamma}^k \dot{\gamma}^l) = 0,$$

что равносильно уравнению геодезических, так как  $(g_{ij})$  — невырожденная матрица. ■