

# КЛАССИЧЕСКАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Пшеничный Никита\*

Весна 2025 г.

## Аннотация

В основу этих записок легли лекции О. И. Мохова и семинары А. А. Гайфуллина на мехмате МГУ, а также (в меньшей степени) курс А. В. Пенского в НМУ.

При написании файла я во многом ориентировался на лекции [И. А. Дынникова](#) и [А. И. Шафаревича](#), а также на избранные главы книг [\[Новиков — Тайманов\]](#) и [\[Шарп\]](#). Некоторые из разобранных задач взяты из классического «Сборника задач по дифференциальной геометрии» А. С. Мищенко, Ю. П. Соловьёва, А. Т. Фоменко (далее именуемого просто «задачником»), другие были предложены А. А. Гайфуллиным на семинарах.

В конце некоторых разделов приведены пояснения к появляющимся в тексте эпиграфам. Конечно, эти эпиграфы носят в основном юмористический (или ностальгический...) характер, но у большинства из них есть содержательный математический контекст.

## Список литературы

- [\[Новиков — Тайманов\]](#) С. П. Новиков, И. А. Тайманов. *Современные геометрические структуры и поля*. МЦНМО, 2014.
- [\[Шарп\]](#) Ричард У. Шарп. *Дифференциальная геометрия. Обобщение Картана Эрлангенской программы Клейна*. МЦНМО, 2019.
- [\[Арнольд\]](#) В. И. Арнольд. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. МЦНМО, 2024.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Предварительные сведения и напоминания</b>	<b>3</b>
1.1	Математический анализ	3
1.2	Аналитическая геометрия и линейная алгебра	4
1.3	Дифференциальные уравнения	7
1.4	Про функции в геометрии	9
<b>2</b>	<b>Теория кривых</b>	<b>11</b>
2.1	Понятие кривой, способы задания	11
2.2	Натуральный параметр и кривизна	13
2.3	Плоские кривые	15
2.4	Кривые в $\mathbb{R}^3$	20
2.5	Соприкосновение кривых	25
2.6	Эволюта и эвольвента плоской кривой	28
2.7	Кривые в $\mathbb{R}^n$	29
2.8	Про механические часы	31

---

\*Последняя компиляция: 28 июня 2025 г. Актуальную версию этого файла можно найти на [моём GitHub](#).

<b>3</b>	<b>Двумерные поверхности в трёхмерном пространстве</b>	<b>34</b>
3.1	Криволинейные системы координат в $\mathbb{R}^n$	34
3.2	Риманова метрика в криволинейных координатах	37
3.3	Определение поверхности. Локальные координаты	39
3.4	Поверхности как двумерные многообразия	41
3.5	Риманова метрика на поверхностях	43
3.6	Кривизна поверхности	51
3.7	Главные кривизны и нормальные сечения	52
3.8	Минимальные поверхности	58
3.9	Векторные поля на поверхностях	60
3.10	Про обозначения для частных производных	62
<b>4</b>	<b>Основные уравнения в теории поверхностей</b>	<b>63</b>
4.1	Деривационные уравнения. Тожества Кристоффеля	63
4.2	Совместность деривационных уравнений, теорема Бонне	67
4.3	Уравнения Гаусса — Кодаци, теорема Гаусса	70
4.4	Поверхности постоянной отрицательной кривизны	71
<b>5</b>	<b>Внутренняя геометрия поверхностей</b>	<b>76</b>
5.1	Ковариантное дифференцирование, параллельный перенос	76
5.2	Геодезические линии	80
5.3	Геодезические как экстремали функционала действия	87
5.4	Геодезические как локально кратчайшие	90
5.5	Полугеодезические координаты	91
5.6	Эйлерова характеристика, теорема Гаусса — Бонне	94
<b>6</b>	<b>Дополнения</b>	<b>98</b>
6.1	Тензор кривизны Римана	98
6.2	Поверхности произвольной размерности	100
6.3	Понятие многообразия	104
6.4	Модели плоскости Лобачевского	107

## Обозначения

$\mathbb{R}$  — поле (топологическое пространство) вещественных чисел;  
 $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$  — вектор (точка) из  $\mathbb{R}^n$ ;  
 $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  — стандартный базис в  $\mathbb{R}^n$ , если не сказано иное;  
 $\text{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  — линейная оболочка векторов  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ ;  
 $S_{\text{or}}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  — ориентированная площадь параллелограмма, натянутого на векторы  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ ,  $\text{Vol}_{\text{or}}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  — ориентированный объём  $n$ -мерного параллелепипеда, натянутого на векторы  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ ;  
 $I$  — связное подмножество  $\mathbb{R}$ ;  
 $\text{Int } U$  — внутренность множества  $U \subset \mathbb{R}^n$ ;  
 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  — евклидово скалярное произведение векторов  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ;  
 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{G}}$  — скалярное произведение векторов  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ , задаваемое положительно определённой симметричной матрицей  $\mathcal{G}$  (то есть  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{G}} = \mathbf{x}^t \mathcal{G} \mathbf{y}$ );  
 $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$  — векторное произведение векторов  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ ;  
 $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  — расстояние между точками  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  из  $\mathbb{R}^n$ ;  
 $\mathbf{r}(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$  — радиус-вектор точки  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ;  
 $\dot{\mathbf{r}}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t), \dots$  — векторы скорости, ускорения и т. д. точки  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ;

**Тензорная нотация.** По дважды повторяющимся индексам, один из которых верхний, а другой нижний, подразумевается суммирование в пределах, устанавливаемых из контекста, а сам такой индекс называется *слепым*. Верхний индекс переменной, появляющейся в знаменателе, считается для выражения нижним.

## 1. Предварительные сведения и напоминания

Сначала вы подумаете, что я сумасшедший, а потом вам понравится, и вы сами будете делать так же.

А. В. Пенской

## Математический анализ

Отображение  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  называется *дифференцируемым в точке  $\mathbf{x}_0$* , если существует линейное отображение  $\mathcal{L}_{\mathbf{x}_0}$ , для которого выполнено

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathcal{L}_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|) \text{ при } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0.$$

При этом отображение  $\mathbf{f}$  не обязано быть определено всюду. Нам будет достаточно, чтобы в область определения отображения  $\mathbf{f}$  входило замыкание некоторой выпуклой открытой области, содержащее точку  $\mathbf{x}_0$ . Однозначно определённое линейное отображение  $\mathcal{L}_{\mathbf{x}_0} =: d\mathbf{f}|_{\mathbf{x}_0}$  называют *дифференциалом* отображения  $\mathbf{f}$  в точке  $\mathbf{x}$ .

Матрица  $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)$  линейного отображения  $d\mathbf{f}|_{\mathbf{x}_0}$  называется *матрицей Якоби* отображения  $\mathbf{f}$  в точке  $\mathbf{x}_0$  и состоит из *частных производных*:

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f^1}{\partial x^1} \right|_{\mathbf{x}_0} & \cdots & \left. \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \right|_{\mathbf{x}_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f^m}{\partial x^1} \right|_{\mathbf{x}_0} & \cdots & \left. \frac{\partial f^m}{\partial x^n} \right|_{\mathbf{x}_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{grad } f^1|_{\mathbf{x}_0} \\ \vdots \\ \text{grad } f^m|_{\mathbf{x}_0} \end{pmatrix}.$$

В случае, когда эта матрица квадратная, её определитель называют *якобианом*.

Дифференцируемое отображение  $\mathbf{f}$  определяет новое отображение  $J_{\mathbf{f}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{mn}$ . Если последнее также дифференцируемо, то  $\mathbf{f}$  называется *дважды дифференцируемым*, и далее индуктивно: если  $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x}$  дифференцируемо  $k$  раз, то  $\mathbf{f}$  дифференцируемо  $k + 1$  раз. Если отображение  $\mathbf{f}$  дифференцируемо  $k$  раз и при  $k$ -кратном дифференцировании получается непрерывное отображение, то говорят, что  $\mathbf{f}$   $k$  раз непрерывно дифференцируемо или является *отображением класса  $C^k$* . В дальнейшем под *гладким отображением* мы будем подразумевать отображение класса  $C^k$  для достаточно большого  $k$ .

**Теорема 1.1** (О производной сложной функции). Если отображения  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  и  $\mathbf{g}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  дифференцируемы, то дифференцируема и композиция  $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ , причём

$$d(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})|_{\mathbf{x}_0} = d\mathbf{g}|_{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)} \circ d\mathbf{f}|_{\mathbf{x}_0}.$$

Обсудим важное понятие производной функции по направлению. Пусть  $\mathbf{v}$  — приложенный в точке  $\mathbf{x}$  области  $U \subset \mathbb{R}^n$  вектор, и пусть  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  — дифференцируемая функция. Пусть  $\varphi: I \rightarrow U$  — какая-либо регулярно параметризованная кривая (мы определим это понятие чуть позже), выходящая из  $\mathbf{x}$  со скоростью  $\mathbf{v}$ , так что  $\varphi(0) = \mathbf{x}$ ,  $\dot{\varphi}(0) = \mathbf{v}$ . Возникает сквозное отображение интервала  $I$  на вещественную ось,  $f \circ \varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Определение 1.2.** Производной функции  $f$  по направлению вектора  $\mathbf{v}$  называется производная построенной функции в нуле.

Это число обозначается через  $\partial_{\mathbf{v}} f$ . Надо проверить, что полученное число не зависит от выбора кривой  $\varphi$ . Это видно, например, из выражения производной по направлению через координаты: по правилу дифференцирования сложной функции

$$\partial_{\mathbf{v}} f = \left. \frac{d}{dt}(f \circ \varphi) \right|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x^i} v^i.$$

То же самое можно выразить, сказав, что  $\partial_{\mathbf{v}} f$  есть значение оператора  $df$  на векторе  $\mathbf{v}$ .

**Теорема 1.3** (Об обратном отображении). Гладкое отображение  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , матрица Якоби которого невырождена в точке  $\mathbf{x}_0$ , локально обратимо в некоторой окрестности точки  $\mathbf{x}_0$ , причём обратное отображение также гладкое.

**Теорема 1.4** (О неявном отображении). Пусть  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $m \leq n$ , — гладкое отображение, матрица Якоби которого в точке  $\mathbf{x}_0$  имеет ранг  $m$ . Тогда множество решений уравнения  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  в окрестности точки  $\mathbf{x}_0$  выглядит как график гладкого отображения, выражающего некоторые  $m$  координат через оставшиеся  $n - m$ , причём этих  $m$  координат можно выбрать те, которым соответствуют линейно независимые столбцы в матрице Якоби.

## Аналитическая геометрия и линейная алгебра

Пусть в  $\mathbb{R}^n$  есть некоторая поверхность (это понятие мы тоже обсудим позднее), задаваемая уравнением  $F(x^1, \dots, x^n) = 0$ , а по ней движется точка, радиус-вектор которой есть  $\mathbf{x} = \mathbf{r}(t)$ . Тогда можем продифференцировать тождество  $F(r^1(t), \dots, r^n(t)) = 0$  в каждой точке, получив по теореме о сложной функции

$$\frac{\partial F}{\partial r^1} \cdot \frac{dr^1}{dt} + \dots + \frac{\partial F}{\partial r^n} \cdot \frac{dr^n}{dt} = 0$$

или, что то же,  $\langle \text{grad } F, \dot{\mathbf{r}} \rangle = 0$ . Таким образом, направление нормали к поверхности  $F(x^1, \dots, x^n) = 0$  в точке  $\mathbf{x}_0$  задаётся градиентом  $(\text{grad } F)|_{\mathbf{x}_0}$ .

Из правила Лейбница следует формула дифференцирования скалярного произведения:

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t) \rangle = \langle \dot{\mathbf{a}}(t), \mathbf{b}(t) \rangle + \langle \mathbf{a}(t), \dot{\mathbf{b}}(t) \rangle.$$

Важный частный случай: если  $\mathbf{a}(t) \perp \mathbf{b}(t)$  для всех  $t$ , то  $\langle \mathbf{a}(t), \dot{\mathbf{b}}(t) \rangle = -\langle \dot{\mathbf{a}}(t), \mathbf{b}(t) \rangle$ . Аналогичная формула верна и для векторного произведения:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}(t) \times \mathbf{b}(t)) = (\dot{\mathbf{a}}(t) \times \mathbf{b}(t)) + (\mathbf{a}(t) \times \dot{\mathbf{b}}(t)).$$

Пусть  $\mathbf{r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Тогда  $|\mathbf{r}| = \text{const}$  тогда и только тогда, когда  $\langle \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}} \rangle = 0$ . Доказательство простое — надо продифференцировать тождество  $\langle \mathbf{r}(t), \mathbf{r}(t) \rangle = \text{const}$ . Можно доказать и по-другому — вектор постоянной длины  $|\mathbf{r}| = \text{const}$  лежит на сфере, уравнение которой  $F(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2 = \text{const}$ . При этом

$$0 = \langle \text{grad } F, \dot{\mathbf{r}} \rangle = \langle 2\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}} \rangle = 2\langle \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}} \rangle.$$

**Теорема 1.5.** Для любого набора  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$  линейно независимых векторов евклидова пространства существует, и притом единственный, ортонормированный базис  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k$  подпространства  $\text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ , порождённого этими векторами, такой, что матрица перехода  $R$  от  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k$  к  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$  верхнетреугольная с положительными числами на диагонали:

$$(\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_k) = (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \dots \ \mathbf{e}_k) \cdot R.$$

Напомним идеи доказательства этой теоремы. Единственность базиса  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k$  с указанными свойствами следует из того, что верхнетреугольная матрица с положительными числами на диагонали является ортогональной тогда и только тогда, когда она единичная.

Существование же базиса  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k$  доказывается путём его явного построения, которое называется *ортонормализацией Грама — Шмидта*:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1, & \mathbf{e}_1 &= \mathbf{u}_1 / |\mathbf{u}_1|, \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{e}_1, & \mathbf{e}_2 &= \mathbf{u}_2 / |\mathbf{u}_2|, \\ \mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{v}_3 \rangle \mathbf{e}_1 - \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{v}_3 \rangle \mathbf{e}_2, & \mathbf{e}_3 &= \mathbf{u}_3 / |\mathbf{u}_3|, \\ & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{u}_k &= \mathbf{v}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{v}_k \rangle \mathbf{e}_j, & \mathbf{e}_k &= \mathbf{u}_k / |\mathbf{u}_k| \end{aligned}$$

Следующая формула из курса аналитической геометрии понадобится нам всего один раз для решения интересной задачи, для развития теории она нам не пригодится.

**Лемма 1.6.** В  $\mathbb{R}^3$  результатом поворота вектора  $\mathbf{v}$  вокруг оси, направленной вдоль единичного вектора  $\mathbf{e}$ , на угол  $\theta$  является вектор

$$(1.1) \quad \tilde{\mathbf{v}} = \cos \theta \cdot \mathbf{v} + \sin \theta \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{v}) + \langle \mathbf{e}, \mathbf{v} \rangle (1 - \cos \theta) \cdot \mathbf{e}.$$

**Доказательство.** Разложим вектор  $\mathbf{v}$  на нормальную и параллельную компоненты к оси поворота:  $\mathbf{v} = \mathbf{v}^\perp + \mathbf{v}^\parallel$ , где  $\mathbf{v}^\parallel = \langle \mathbf{e}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{e}$ . При повороте вокруг оси  $\mathbf{e}$  параллельная компонента не меняется, а нормальная поворачивается на угол  $\theta$  в плоскости, ортогональной вектору  $\mathbf{e}$ .

Так как базис  $(\mathbf{e}, \mathbf{v}, \mathbf{e} \times \mathbf{v})$  положительно ориентирован, то  $(\mathbf{v}, \mathbf{e} \times \mathbf{v})$  — ортогональный положительно ориентированный базис ортогональной плоскости. В нём можем записать  $\tilde{\mathbf{v}}^\perp = \cos \theta \cdot \mathbf{v}^\perp + \sin \theta \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{v}^\perp)$ . Собираем вектор  $\tilde{\mathbf{v}}$  из двух его компонент:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}} &= \tilde{\mathbf{v}}^\perp + \tilde{\mathbf{v}}^\parallel = \cos \theta \cdot \mathbf{v}^\perp + \sin \theta \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{v}^\perp) + \mathbf{v}^\parallel = \\ &= \cos \theta \cdot (\mathbf{v} - \langle \mathbf{e}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{e}) + \sin \theta \cdot (\mathbf{e} \times (\mathbf{v} - \langle \mathbf{e}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{e})) + \langle \mathbf{e}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{e} = \\ &= \cos \theta \cdot \mathbf{v} + \sin \theta \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{v}) + \langle \mathbf{e}, \mathbf{v} \rangle (1 - \cos \theta) \cdot \mathbf{e}. \end{aligned}$$

■

В курсе дифференциальной геометрии мы регулярно будем сталкиваться с тензорами, так что нам необходимо вспомнить соответствующие понятия и важные факты.

**Определение 1.7.** *Тензором* называется объект, задаваемый в каждой системе координат  $(u^1, \dots, u^n)$  набором чисел  $T_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}$ , которые при замене координат  $(u^1, \dots, u^n) \mapsto (v^1, \dots, v^n)$ , преобразуются по следующему правилу:

$$\tilde{T}_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} = \frac{\partial v^{i_1}}{\partial u^{k_1}} \cdots \frac{\partial v^{i_p}}{\partial u^{k_p}} \frac{\partial u^{l_1}}{\partial v^{j_1}} \cdots \frac{\partial u^{l_q}}{\partial v^{j_q}} T_{l_1, \dots, l_q}^{k_1, \dots, k_p},$$

где  $\tilde{T}_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}$  — числовая запись тензора в координатах  $(v^1, \dots, v^n)$ . Про тензор  $T$  с  $p$  верхними индексами и  $q$  нижними говорят, что он имеет *тип*  $(p, q)$  и ранг  $p + q$ .

Мы часто будем рассматривать *тензоры, прикреплённые к точкам* (на поверхностях или, в более общем случае, на многообразиях), то есть определённые локально в окрестности каждой точки и зависящий от неё. Важными примерами являются метрический тензор  $g_{ij}(\mathbf{x})$ , векторные поля  $V^i(\mathbf{x})$  или тензор кривизны Римана  $R_{ijl}^s(\mathbf{x})$ . В большинстве случаев мы не указываем явно зависимость от точки.

Легко доказать, что в любой точке  $n$ -мерного пространства тензоры типа  $(p, q)$  образуют линейное пространство относительно операций сложения:

$$(T + S)_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} := T_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} + S_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}$$

и умножения на скаляры:

$$(\lambda T)_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} := \lambda T_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}.$$

Размерность этого пространства равна  $n^{p+q}$ . Отметим, что складывать можно только тензоры, прикреплённые к одной и той же точке.

**Пример 1.8** (Тензоры малых рангов).

- (1) Пусть  $\xi$  —  $n$ -мерный вектор, тогда при замене координат  $(u^1, \dots, u^n) \mapsto (v^1, \dots, v^n)$  он меняется по правилу

$$\tilde{\xi}^i = \frac{\partial v^i}{\partial u^j} \xi^j,$$

так что является тензором типа  $(1, 0)$ .

- (2) Далее, пусть  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкая функция, тогда её градиент  $\eta := \text{grad } f$  меняется по правилу

$$\tilde{\eta}_i = \frac{\partial u^j}{\partial v^i} \eta_j.$$

Итак, мы получили тензор типа  $(0, 1)$  — *ковектор*. Однако в текущем курсе мы иногда воспринимаем градиент функции именно как вектор. Следует разобраться, почему такое восприятие «законно». Пусть  $J$  — матрица Якоби замены координат, тогда мы имеем формулы для векторов  $\xi = J\eta$  и для ковекторов:  $\tilde{\eta} = (J^t)^{-1}\eta$ . Таким образом, если  $J^{-1} = J^t$  (матрица  $J$  ортогональна), то векторы и ковекторы преобразуются одинаково. Поэтому в случае ортонормированных координат в евклидовом пространстве мы можем не различать верхние и нижние индексы.

- (3) Линейные операторы, действующие на векторах, задаются матрицей из элементов с одним нижним и одним верхним индексом:  $\xi = \mathcal{A}\eta$ ,  $\xi^i = a_j^i \eta^j$ . При заменах координат они преобразуются, как тензоры типа  $(1, 1)$ :

$$\tilde{a}_j^i = \frac{\partial v^i}{\partial u^k} \frac{\partial u^l}{\partial v^j} a_l^k.$$

- (4) Упомянем также квадратичные формы  $\mathcal{B}(\xi, \eta) = b_{ij} \xi^i \eta^j$ , которые являются тензорами типа  $(0, 2)$ :

$$\tilde{b}_{ij} = \frac{\partial v^k}{\partial u^i} \frac{\partial v^l}{\partial u^j} b_{kl}.$$

По любой паре, состоящей из верхнего и нижнего индексов, можно провести *свёртку тензора*. Результат этой операции называется *следом*. Она определяется следующим образом:

**Определение 1.9.** Пусть фиксированы тензор типа  $(p, q)$   $T = T_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}$  и пара индексов  $(i_k, j_l)$ . Тензор  $\text{tr } T$  типа  $(p-1, q-1)$  определяется формулой

$$(\text{tr } T)_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} := T_{j_1, \dots, j_{l-1}, i, j_{l+1}, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_{k-1}, i, i_{k+1}, \dots, i_p}$$

и называется *свёрткой* или *следом* тензора  $T$ .

**Определение 1.10.** При наличии скалярного произведения, заданного матрицей  $\mathcal{G} = (g_{ij})$ , можно определить операцию *опускания индекса*. Она сопоставляет тензору  $T_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}$  типа  $(p, q)$  тензор  $\widehat{T}_{i_1, j_1, \dots, j_q}^{i_2, \dots, i_p}$  типа  $(p-1, q+1)$  по следующему правилу:

$$\widehat{T}_{i_1, j_1, \dots, j_q}^{i_2, \dots, i_p} := g_{i_1 k} T_{j_1, \dots, j_q}^{k, i_2, \dots, i_p}.$$

Аналогично определяется *поднятие индекса*:

$$\widehat{T}_{j_2, \dots, j_q}^{j_1, i_1, \dots, i_p} := g^{j_1 k} T_{k, j_2, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p},$$

где  $g^{kl}$  — матрица, обратная к  $g_{ij}$ .

Легко видеть, что если мы сначала опустим индекс, а затем поднимем (или наоборот), то получим исходный тензор.

## Дифференциальные уравнения

**Теорема 1.11** (О существовании и единственности). Решение дифференциального уравнения  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  с начальным условием  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  из области гладкости правой части существует и единственно (в том смысле, что всякие два решения с общим начальным условием совпадают в некоторой окрестности точки  $t_0$ ).

**Теорема 1.12** (О гладкой зависимости от параметра). Значение в момент  $t$  решения дифференциального уравнения  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t; \mu)$  гладко зависит от параметра  $\mu$ , пробегающего некоторую область  $M \subset \mathbb{R}^m$ .

Помимо классической теоремы о существовании и единственности решения нам понадобится похожее утверждение для систем дифференциальных уравнений с двумя параметрами:

$$(1.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}, u^1, u^2), \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2} = \mathbf{f}_2(\mathbf{x}, u^1, u^2), \end{cases}$$

где  $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$  — неизвестная функция от  $u^1, u^2$  со значениями в  $\mathbb{R}^n$ , а  $\mathbf{f}_i = (\mathbf{f}_i^1, \dots, \mathbf{f}_i^n)$ ,  $i = 1, 2$ , — известные гладкие функции, определённые в некоторой открытой области  $\Omega$  фазового пространства  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{n+2}$ .

**Определение 1.13.** Система (1.2) *совместна*, если для любой тройки  $(x_0, u_0^1, u_0^2) \in \Omega$  она имеет гладкое решение  $\mathbf{x}(u^1, u^2)$  с начальным условием  $\mathbf{x}(u_0^1, u_0^2) = \mathbf{x}_0$ , определённое в некоторой окрестности точки  $(u_0^1, u_0^2)$ .

**Теорема 1.14** (Дарбу). Система (1.2) совместна тогда и только тогда, когда функции  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$  удовлетворяет следующему условию всюду в  $\Omega$ :

$$(1.3) \quad \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x^i} f_2^i + \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial u^2} = \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial x^j} f_1^j + \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial u^1}.$$

**Доказательство.**  $\Rightarrow$ . Пусть  $\mathbf{x}(u^1, u^2)$  — гладкое решение системы с начальным условием  $(u_0^1, u_0^2, \mathbf{x}_0)$ . Тогда по теореме о дифференцировании сложной функции имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^1 \partial u^2} &= \frac{\partial \mathbf{f}_1(\mathbf{x}(u^1, u^2), u^1, u^2)}{\partial u^2} = \frac{\partial \mathbf{f}_1(\mathbf{x}(u^1, u^2), u^1, u^2)}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial u^2} + \\ &+ \frac{\partial \mathbf{f}_1(\mathbf{x}(u^1, u^2), u^1, u^2)}{\partial u^2} = \left( \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x^i} f_2^i + \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial u^2} \right) (\mathbf{x}(u^1, u^2), u^1, u^2). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^1 \partial u^2} = \left( \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x^i} f_2^i + \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial u^2} \right) (\mathbf{x}(u^1, u^2), u^1, u^2).$$

Аналогично получаем

$$\left( \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x^i} f_2^i + \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial u^2} \right) (\mathbf{x}(u^1, u^2), u^1, u^2) = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^1 \partial u^2} = \left( \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial x^j} f_1^j + \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial u^1} \right) (\mathbf{x}(u^1, u^2), u^1, u^2).$$

$\Leftarrow$ . Можем рассмотреть первое уравнение данной системы как обыкновенное дифференциальное уравнение по переменной  $u^1$  с параметром  $u^2$ . Из теоремы о существовании и единственности следует, что при каждом значении  $u^2 = u_0^2$  существует функция  $\mathbf{y}(u^1)$ , определённая в окрестности точки  $u_0^1$  такая, что

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial u^1} = \mathbf{f}_1(\mathbf{y}(u^1), u^1, u_0^2), \quad \mathbf{y}(u_0^1) = \mathbf{x}_0.$$

Теперь для каждого  $u^1$ , для которого определено  $\mathbf{y}(u^1)$ , мы можем решить второе уравнение с начальным условием  $\mathbf{x}(u^1, u_0^2) = \mathbf{y}(u^1)$ . По той же теореме о существовании и единственности, а также по теореме о гладкой зависимости решения от параметра, полученное решение  $\mathbf{x}(u^1, u^2)$  будет определено для всех  $u^2$  из достаточно малой, не зависящей от  $u^1$ , окрестности точки  $u_0^2$ , и будет гладкой функцией от  $u^1, u^2$ .

Итак, в малой окрестности точки  $(u_0^1, u_0^2)$  мы построили гладкую функцию  $\mathbf{x}(u^1, u^2)$ , удовлетворяющую второму уравнению всюду, а первому — во всех точках вида  $(u^1, u_0^2)$ , а также удовлетворяющую начальному условию  $\mathbf{x}(u_0^1, u_0^2) = \mathbf{x}_0$ . Осталось показать, что  $\mathbf{x}(u^1, u^2)$  и первому уравнению удовлетворяет всюду, а не только вдоль прямой  $u^2 = u_0^2$ .

Функция  $\mathbf{x}(u^1, u^2)$  удовлетворяет второму уравнению на всей окрестности, поэтому можем, как и выше, написать

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^1 \partial u^2} = \frac{\partial \mathbf{f}_2(\mathbf{x}(u^1, u^2), u^1, u^2)}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial u^1} + \frac{\partial \mathbf{f}_2(\mathbf{x}(u^1, u^2), u^1, u^2)}{\partial u^1}.$$

(Только теперь мы ничего не знаем про  $\partial x^j / \partial u^1$ .) Используем условие (1.3):

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^1 \partial u^2} = \frac{\partial \mathbf{f}_2(\mathbf{x}(u^1, u^2), u^1, u^2)}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial u^1} + \left( \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x^i} f_2^i + \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial u^2} - \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial x^j} f_1^j \right) (\mathbf{x}(u^1, u^2), u^1, u^2).$$

Далее можем сгруппировать подчёркнутые суммы в одну:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial x^j} (\mathbf{x}(u^1, u^2), u^1, u^2) \left( \frac{\partial x^j}{\partial u^1} - f_1^j(\mathbf{x}(u^1, u^2), u^1, u^2) \right) &= \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^1 \partial u^2} - \\ &- \left( \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x^i} f_2^i + \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial u^2} \right) (\mathbf{x}(u^1, u^2), u^1, u^2) = \left\{ \mathbf{f}_2(\mathbf{x}(u^1, u^2), u^1, u^2) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2} \right\} = \\ &= \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^1 \partial u^2} - \underbrace{\left( \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial u^2} + \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial u^2} \right) (\mathbf{x}(u^1, u^2), u^1, u^2)}_{\frac{\partial \mathbf{f}_1(\mathbf{x}(u^1, u^2), u^1, u^2)}{\partial u^2}} = \frac{\partial}{\partial u^2} \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} - \mathbf{f}_1(\mathbf{x}(u^1, u^2), u^1, u^2) \right). \end{aligned}$$



В итоге мы получаем:

$$\frac{\partial}{\partial u^2} \underbrace{\left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} - \mathbf{f}_1(\mathbf{x}(u^1, u^2), u^1, u^2) \right)}_{:= \mathbf{g}(u^1, u^2)} = \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial x^j}(\mathbf{x}(u^1, u^2), u^1, u^2) \underbrace{\left( \frac{\partial x^j}{\partial u^1} - f_1^j(\mathbf{x}(u^1, u^2), u^1, u^2) \right)}_{g^j(u^1, u^2)},$$

это дифференциальное уравнение на функцию  $\mathbf{g}$ . Его можно рассмотреть как обыкновенное дифференциальное уравнение по  $u^2$  с параметром  $u^1$ . При этом для всех  $u^1$  выполнено начальное условие  $\mathbf{g}(u^1, u_0^2) = \mathbf{0}$ , откуда  $\mathbf{g}(u^1, u^2) \equiv \mathbf{0}$ . Это и означает, что  $\mathbf{x}(u^1, u^2)$  всюду удовлетворяет первому уравнению системы. ■

Отметим, что условия (1.3) не нужно запоминать. Они являются просто записью, очевидно, необходимого условия

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1 \partial u^2} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2 \partial u^1}.$$

Нетривиальное утверждение теоремы заключается в том, что это условие оказывается не только необходимым, но и достаточным.

**Пример 1.15.** Если правые части системы (1.2) не зависят от  $\mathbf{x}$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} = \mathbf{f}_1(u^1, u^2), \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2} = \mathbf{f}_2(u^1, u^2), \end{cases}$$

то условие совместности для них выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial u^2} = \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial u^1}.$$

**Теорема 1.16** (О продолжении). Решение дифференциального уравнения  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  с начальным условием из компакта в фазовом пространстве можно продолжить в обе стороны либо неограниченно, либо до границы этого компакта.

## Про функции в геометрии

Фразу, упомянутую в эпиграфе к данному разделу, А. В. Пенской произнёс на первой лекции своего курса по дифференциальной геометрии и относилась она к записи вида

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(s(t)),$$

где под  $\mathbf{r}$  понимается параметризация некоторой кривой, а  $t$  и  $s$  — два разных (гладких) параметра на ней.

С точки зрения анализа эта запись, конечно же, некорректна, но мы хотим так писать, ведь она хорошо выражает смысл происходящего — при смене параметризации сама кривая не меняется. На самом деле, наше интуитивное желание можно выразить и формально.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}_t & & & & \\ \downarrow \cong \zeta & \searrow \Phi & & & \\ & & \mathbb{E} & \xrightarrow{\mathbf{r}} & \mathbb{R}^n \\ & \nearrow \Psi & & & \\ \mathbb{R}_s & & & & \end{array}$$

Имеет место такая коммутативная диаграмма, где отображения  $\Phi$  и  $\Psi$  задают выбор параметра (соответственно,  $t$  или  $s$ ), а  $\zeta$  — диффеоморфизм, выражающий смену параметра. Запись  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(s(t))$  мы будем понимать не буквально, а следующим образом:

$$\mathbf{r} \circ \Phi = \mathbf{r} \circ \Psi \circ \zeta.$$

В курсе мы будем довольно часто пользоваться такой записью, так как она чрезвычайно удобна для выражения кривой в разных параметризациях. Это короткое отступление было необходимо, чтобы обосновать корректность наших выкладок и устранить путаницу.

## 2. Теория кривых

Рубины шлифуют алмазами.

А. А. Гайфуллин

### Понятие кривой, способы задания

**Определение 2.1.** *Простой дугой*  $\gamma$  в  $\mathbb{R}^n$  называется любое подмножество  $\mathbb{R}^n$ , гомеоморфное отрезку  $[0; 1]$ . *Параметризацией* простой дуги называется гомеоморфизм  $r: [0; 1] \rightarrow \gamma$ .

**Определение 2.2.** Параметризация  $r: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  простой дуги называется *регулярной* класса  $C^k$ , если для всех  $i = 1, \dots, n$  функция  $r^i(t)$  является отображением класса  $C^k$  и

$$\frac{dr}{dt} \neq 0$$

в каждой точке (для концов отрезка 0 и 1 в качестве производной берётся производная справа и слева соответственно). Простая дуга называется *регулярной*, если существует её регулярная параметризация.

**Определение 2.3.** *Параметризованной кривой* в  $\mathbb{R}^n$  называется непрерывное отображение  $r: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  такое, что существует не более чем счётное покрытие промежутка  $I$  отрезками  $[a_i; b_i]$  такое, что для каждого  $i$  ограничение  $r|_{[a_i; b_i]}$  есть параметризация простой дуги.

**Определение 2.4.** *Кривой* в  $\mathbb{R}^n$  называется класс эквивалентности параметризованных кривых, где  $r_1: I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  и  $r_2: I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  *эквивалентны*, если существует такой гомеоморфизм  $I_1 \rightarrow I_2$ , что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} I_1 & & \mathbb{R}^n \\ \cong \downarrow & \searrow r_1 & \\ I_2 & \nearrow r_2 & \end{array}$$

Любое вложение из данного класса будем называть *параметризацией* кривой.

**Определение 2.5.** Кривая в  $\mathbb{R}^n$  называется *регулярной*, если она допускает *регулярную параметризацию*, то есть гладкую параметризацию  $r: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , для которой всюду  $\dot{r}(t) \neq 0$ .

В дальнейшем мы будем рассматривать только регулярные кривые, часто называя их просто гладкими. Условие регулярности необходимо добавить для соответствия интуитивному пониманию гладкости как отсутствия изломов. Например, мы не хотим рассматривать кривые вроде  $r(t) = (t^2, t^3)$  (рис. 2.1), хотя обе координатные функции  $x(t) = t^2$  и  $y(t) = t^3$  гладкие класса  $C^\infty$ .

**Предложение 2.6.** Если  $r_1(t)$  и  $r_2(s)$  — регулярные эквивалентные параметризации, то  $t(s)$  и  $s(t)$  являются гладкими функциями.

**Доказательство.** Рассмотрим параметр  $t$ . Так как обе параметризации регулярны, то  $\dot{r}_1(t_0) \neq 0$  в каждой точке  $t_0$ . Тогда найдётся номер  $i_0$  такой, что  $\dot{x}^{i_0}(t_0) \neq 0$ . Тогда по теореме об обратной функции в некоторой окрестности точки  $t_0$  можно выразить параметр  $t$  через  $x^{i_0}$ , то есть  $t(x^{i_0})$  — гладкая функция в некоторой окрестности данной точки. А  $x^{i_0}$ , в свою очередь, является гладкой функцией от  $s$  (так как отображение  $r_2$  гладкое). Таким

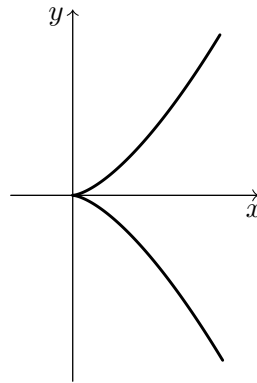


Рис. 2.1: Полукубическая парабола

образом, функция  $t(s) = t(x^{i_0}(s))$  гладкая как композиция гладких функций (теорема о сложной функции). Аналогично доказывается, что функция  $s(t)$  тоже гладкая. ■

Важно подчеркнуть, что при доказательстве использовалось рассуждение, которое можно сформулировать так: на регулярной кривой в некоторой окрестности любой точки можно в качестве регулярного параметра выбрать одну из координат евклидова пространства. Отсюда легко сразу получить нерегулярность полукубической параболы (рис. 2.1) — легко видеть, что в окрестности точки  $(0, 0)$  её нельзя регулярно параметризовать ни одной переменной  $x$  или  $y$ .

Регулярная параметризация кривой естественным образом определяет на ней ориентацию как направление возрастания параметра. Дадим более точное определение.

**Определение 2.7.** *Ориентацией* гладкой кривой называется класс эквивалентности её параметризаций с положительным якобианом перехода.

То есть, регулярные параметры  $t$  и  $s$  задают одинаковую ориентацию кривой, если всюду выполнено  $ds/dt > 0$ . Легко видеть, что ориентаций на кривой ровно две.

На практике часто приходится иметь дело с кривыми, заданными с помощью уравнений. С глобальной точки зрения данный подход не эквивалентен параметрическому заданию. Однако, если наложить на систему уравнений некоторые ограничения, то мы получим объекты, локально устроенные так же, как кривые.

**Определение 2.8.** Пусть  $\mathbf{f}$  — гладкая функция из некоторого подмножества  $U \subset \mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}^m$ ,  $m \leq n$ . Мы говорим, что точка  $\mathbf{x}_0 \in U$  является для неё *регулярной*, если  $\mathbf{x}_0 \in \text{Int } U$  и  $\text{rk } J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) = m$ .

**Теорема 2.9.** Пусть  $f_1, \dots, f_{n-1}$  — набор гладких функций из некоторого подмножества  $U \subset \mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}$ , а точка  $\mathbf{x}_0 \in U$  является регулярной точкой отображения  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_{n-1})$  и решением системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{x}) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ f_{n-1}(\mathbf{x}) = 0, \end{cases}$$

то есть  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ . Тогда существует окрестность точки  $\mathbf{x}_0$ , в которой пространство решений этой системы представляет собой гладкую регулярную кривую.

Верно и обратное: в окрестности любой точки регулярной кривой её можно задать системой уравнений, которая регулярна в этой точке.

**Доказательство.** Без ограничения общности, можем считать, что первые  $n - 1$  столбцов матрицы  $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)$  линейно независимы (иначе перенумеруем координаты). Тогда по теореме о неявной функции решение этой системы в некоторой окрестности точки  $\mathbf{x}_0$  задаётся гладкими функциями  $x^1(x^n), \dots, x^{n-1}(x^n)$ . Но это и означает, что локально решения представляют

собой регулярную кривую, так как радиус-вектор параметризован последней координатой:  $\mathbf{r}(x^n) = (x^1(x^n), \dots, x^{n-1}(x^n), x^n)$ . Эта параметризация регулярна, поскольку последней компонентой вектора скорости  $\dot{\mathbf{r}}$  будет 1.

Докажем обратное утверждение. Как упоминалось в предложении 2.6, в качестве параметра локально можно взять одну из координат. Не теряя общности, будем считать, что эта координата  $x^n$ :  $\mathbf{r}(x^n) = (x^1(x^n), \dots, x^{n-1}(x^n), x^n)$ . Теперь запишем систему уравнений  $\mathbf{x} - \mathbf{r}(x^n) = \mathbf{0}$ , которая локально задаёт нашу кривую. Первые  $n - 1$  столбцов матрицы Якоби  $J_{\mathbf{x}-\mathbf{r}(x^n)}$  в рассматриваемой точке составляют единичную матрицу. ■

## Натуральный параметр и кривизна

**Определение 2.10.** *Длиной кривой*, заметаемой при изменении значения параметра от  $t_0$  до  $t$ , называется число

$$\ell(t) = \int_{t_0}^t |\dot{\mathbf{r}}(\tau)| d\tau.$$

Здесь нужно проверить корректность, то есть независимость от параметризации. Пусть мы перешли к другому регулярному параметру  $s$  с сохранением ориентации. Тогда имеем

$$\int_{s_0}^s \left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| ds = \int_{t_0}^t \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{ds} \right| \frac{ds}{dt} dt = \int_{t_0}^t \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| \frac{dt}{ds} \frac{ds}{dt} dt = \int_{t_0}^t \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt.$$

Мы намеренно допускаем отрицательную длину участка кривой (если  $t_0 > t$ ), получая ориентированную длину кривой. И эта ориентация согласована с той, что мы обсуждали при определении параметризованной кривой. (Легко видеть, что при смене ориентации на кривой величина  $\ell$  меняет знак.)

**Определение 2.11.** Параметр  $s$  называется *натуральным параметром* регулярной кривой, если  $|d\mathbf{r}/ds| = 1$ .

**Предложение 2.12.**

- (1) Длина кривой  $\ell(t)$  является натуральным параметром.
- (2) Если  $s$  — некоторый натуральный параметр, то  $s = \pm\ell + \text{const}$ .

**Доказательство.**

- (1)  $d\ell/dt = |d\mathbf{r}/dt| > 0$ . Значит, по теореме об обратной функции можем локально выразить  $t = t(\ell)$ , и при этом

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{d\ell} \right| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{d\ell} \right| = \frac{dt}{d\ell} \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \frac{|d\mathbf{r}/dt|}{|d\mathbf{r}/dt|} = 1.$$

- (2) Если  $s$  — натуральный параметр, то  $|\dot{\mathbf{r}}(s)| = 1$  для каждого  $s$ . Отсюда,

$$\pm\ell(s) = \int_{s_0}^s |\dot{\mathbf{r}}(s)| ds = s - s_0,$$

то есть  $s = \pm\ell + s_0$ , что и требовалось. Знак « $\pm$ » в начале последней формулы стоит для учёта ориентации параметра  $s$ , ведь она может быть не согласованной с выбором ориентации для длины кривой. ■

Далее, если не указано иное, через  $s$  мы будем всегда обозначать натуральный параметр, а через  $\dot{\mathbf{r}}$  — производную по натуральному параметру<sup>1</sup>.

Последнее предложение говорит нам о том, что натуральный параметр на любой кривой можно выписать явно по формуле длины кривой. Наличие такой формулы говорит нам о том, что у кривых тривиальная внутренняя геометрия. Действительно, ведь с геометрической точки зрения всё, что можно делать на кривой — мерять длины, и мы (теоретически<sup>2</sup>) можем это делать в любой параметризации. Это то, что кардинально отличает теорию кривых от теории поверхностей — на поверхностях у нас не будет никакой выделенной «хорошей» параметризации.

При изучении кривых кажется естественным ввести величину, которая будет измерять, насколько сильно кривая отличается от прямой. Предлагается определить *вектор кривизны*  $\mathbf{k} := \ddot{\mathbf{r}}$  (здесь на  $\mathbf{r}$  введён натуральный параметр). Действительно, на прямых (и только на них) имеем  $\mathbf{k} \equiv \mathbf{0}$ , поэтому отличие этого вектора от нулевого может говорить нам о том, насколько кривая «искривлена в пространстве».

**Определение 2.13.** *Кривизной* кривой в точке  $s$  называется величина  $k(s) := |\mathbf{k}(s)| = |\ddot{\mathbf{r}}(s)|$ . (Легко видеть, что кривизна не зависит от выбора натурального параметра  $s$ .)

Можно представить, что мы едем на машине по ровной плоскости, вырисовывая колёсами гладкую кривую. Если мы будем ехать с единичной скоростью (то есть, на кривой будет выбран натуральный параметр), то в нашей плоскости на машину будет действовать только центробежная сила. Согласно второму закону Ньютона, эта сила равна произведению массы на ускорение. Нормировав массу автомобиля, получим векторное равенство силы и ускорения. Ранее кривизной кривой мы называли длину вектора ускорения в натуральной параметризации. Так что можно думать, что мы меряем модуль центробежной силы, действующей на машину: чем он больше, тем более искривлена траектория, по которой эта машина будет ехать. (А вектор кривизны в такой модели есть вектор центробежной силы.)

**Предложение 2.14.** Кривизна регулярной кривой на некотором участке равна нулю тогда и только тогда, когда этот участок является частью прямой.

**Доказательство.**  $\Rightarrow$ . Если  $k(s) = 0$ , то  $\ddot{\mathbf{r}}(s) = \mathbf{0}$ . Тогда  $\mathbf{r}(s)$  должен быть линейен по  $s$ , то есть быть уравнением прямой.

$\Leftarrow$ . Рассмотрим прямую  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}t$ . Перейдём к натуральному параметру, воспользовавшись результатами предложения 2.12:

$$s(t) = \int_0^t |\dot{\mathbf{r}}(\tau)| d\tau = \int_0^t |\mathbf{v}| d\tau = |\mathbf{v}| t.$$

Подставляя найденное, легко убеждаемся, что  $\mathbf{r}(s)$  линейно, значит,  $\ddot{\mathbf{r}}(s) = \mathbf{0}$ . ■

Результат последнего предложения согласуется с нашим представлением о кривизне: кривизна прямой должна быть равна нулю, а чего-то кроме прямой — не равна нулю.

**Определение 2.15.** Регулярная кривая называется *бирегулярной* на некотором интервале, если её кривизна не равна нулю на этом интервале.

Полезно также посчитать кривизну окружности. В натуральном параметре уравнение окружности радиуса  $R$  имеет следующий вид:

$$\mathbf{r}(s) = \left( R \cos \frac{s}{R}, R \sin \frac{s}{R} \right)$$

Кривизна равна  $k(s) = |\ddot{\mathbf{r}}(s)| = \frac{1}{R}$ , что также соответствует нашему представлению: кривизна окружности во всех точках одинакова и уменьшается с увеличением радиуса.

<sup>1</sup>Это соглашение будет всё чаще и чаще нарушаться ближе к концу файла. В разделах, посвящённых теории поверхностей мы будем позволять себе некоторые вольности, в частности, почти всегда не будем разделять понятия кривой и её параметризации.

<sup>2</sup>На практике интеграл в формуле длины кривой «не берётся», если его специально не подобрали.

В натуральном параметре  $|\dot{\mathbf{r}}(s)| = 1$ , значит,  $\dot{\mathbf{r}}(s) \perp \ddot{\mathbf{r}}(s) = 0$ . Таким образом, в каждой точке  $\mathbf{r}(s)$  кривой имеем свой ортонормированный базис из вектора скорости  $\mathbf{v}(s) := \dot{\mathbf{r}}(s)$  и вектора *главной нормали*  $\mathbf{n}(s) := \ddot{\mathbf{r}}(s)/|\ddot{\mathbf{r}}(s)|$ . (Для корректности этого определения считаем кривую бирегулярной.) Плоскость  $\text{span}(\mathbf{v}(s), \mathbf{n}(s))$  называется *соприкасающейся плоскостью* кривой в точке  $s$ .

**Предложение 2.16.** В любой параметризации линейная оболочка векторов скорости и ускорения лежит в соприкасающейся плоскости.

**Доказательство.** Перейдём от некоторого регулярного параметра  $t$  к натуральному параметру  $s$ :

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt}, \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Из первой формулы видно, что все вектора скорости коллинеарны, а из второй — что вектор ускорения в любой регулярной параметризации является линейной комбинацией векторов скорости и ускорения в натуральной параметризации и, как следствие, принадлежит соприкасающейся плоскости. ■

Выведем формулу кривизны в произвольной параметризации. Заметим, что

$$|S_{\text{or}}(\dot{\mathbf{r}}(s), \ddot{\mathbf{r}}(s))| = k(s) \cdot \underbrace{|S_{\text{or}}(\mathbf{v}(s), \mathbf{n}(s))|}_1 = k(s).$$

Теперь выразим производные по  $s$  через произвольный параметр  $t$  (производные по  $t$  будем обозначать штрихом). Сразу из определения натурального параметра имеем  $\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)|$ ,  $\dot{\mathbf{r}}(s) = \mathbf{r}'(t)/|\mathbf{r}'(t)|$ . Считаем вторую производную:

$$\ddot{\mathbf{r}}(s) = \frac{d}{ds} \left( \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \right) = \left( \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \right)' \frac{dt}{ds} = \frac{\mathbf{r}''(t) |\mathbf{r}'(t)| - \mathbf{r}'(t) \frac{d}{dt} |\mathbf{r}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3} = \frac{\mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|^2} - \frac{\frac{d}{dt} |\mathbf{r}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3} \mathbf{r}'(t).$$

Подставляем в формулу, выведенную для натуральной параметризации:

$$(2.1) \quad k(t) = |S_{\text{or}}(\dot{\mathbf{r}}(s(t)), \ddot{\mathbf{r}}(s(t)))| = \left| S_{\text{or}} \left( \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}, \frac{\mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|^2} \right) \right| = \frac{|S_{\text{or}}(\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t))|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}.$$

Смогли отбросить второе слагаемое в выражении  $\mathbf{r}''(s)$ , так как вектор в этом слагаемом был коллинеарен  $\mathbf{r}'(t)$ , поэтому при подстановке в ориентированную площадь давал 0.

## Плоские кривые

Выше кривизна кривой в произвольной точке была определена как некоторое неотрицательное число. В случае гладкой плоской кривой это число определяет вектор кривизны с точностью до знака:

$$(2.2) \quad \mathbf{k} = k \cdot \mathbf{n},$$

где  $\mathbf{n}$  — вектор главной нормали. Получается, в каждой точке есть ровно два претендента на вектор главной нормали, то есть два вектора единичной длины, ортогональных вектору скорости.

Если кривая имеет точки спрямления, то в них вектор главной нормали не определён и обычно не может быть определён так, чтобы зависеть непрерывно от точки. Предлагается заранее назначить один из этих двух векторов главной нормалью, а кривизне приписать знак «+» или «−» так, чтобы формула (2.2) оставалась верной, причём сделать это согласованным образом вдоль всей кривой.

**Определение 2.17.** Говорят, что на гладкой плоской кривой выбрана *коориентация*, если в каждой точке этой кривой выбран единичный вектор  $\mathbf{n}$ , ортогональный соответствующему

вектору скорости  $\mathbf{v}$  (для некоторой фиксированной регулярной параметризации), причём так, что ориентация пары  $(\mathbf{v}, \mathbf{n})$  одна и та же для всех точек кривой<sup>3</sup>.

**Определение 2.18.** Кривизной коориентированной кривой называется коэффициент пропорциональности  $k := \langle \mathbf{k}, \mathbf{n} \rangle$  в равенстве (2.2), где вектор кривизны  $\mathbf{k}$  определён как раньше, а  $\mathbf{n}$  — нормаль, задающая коориентацию кривой.

Легко видеть, что любую кривую на плоскости можно коориентировать ровно двумя способами. От выбора коориентации зависит знак ориентированной кривизны, так что он не имеет геометрического смысла.

**Теорема 2.19** (Формулы Френе для плоской кривой). Для коориентированной плоской кривой выполнено

$$(2.3) \quad (\dot{\mathbf{v}}(s) \quad \dot{\mathbf{n}}(s)) = (\mathbf{v}(s) \quad \mathbf{n}(s)) \begin{pmatrix} 0 & -k(s) \\ k(s) & 0 \end{pmatrix}.$$

**Доказательство.** Из определения кривизны,  $\dot{\mathbf{v}} = k\mathbf{n}$ , что даёт первое уравнение. Известно, что  $|\mathbf{n}| = 1$ , отсюда  $\mathbf{n} \perp \dot{\mathbf{n}}$ , так что  $\dot{\mathbf{n}} = \lambda\mathbf{v}$ . Тогда

$$0 = \frac{d}{ds} \underbrace{\langle \mathbf{v}(s), \mathbf{n}(s) \rangle}_0 = \underbrace{\langle k\mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle}_k + \underbrace{\langle \mathbf{v}, \lambda\mathbf{v} \rangle}_\lambda \Rightarrow \lambda = -k,$$

что даёт и второе уравнение  $\dot{\mathbf{n}} = -k\mathbf{v}$ . ■

**Определение 2.20.** Ортонормированный базис, составленный в натуральной параметризации из вектора скорости  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$  и вектора нормали  $\mathbf{n}$  в некоторой точке данной кривой называется *базисом Френе* кривой в этой точке.

Коориентацию кривой можно выбрать согласовано с ориентацией, выбрав вектор  $\mathbf{n}$  так, чтобы базис  $(\mathbf{v}, \mathbf{n})$  был положительно ориентирован. В дальнейшем мы будем считать, что плоские кривые коориентированы именно так и обозначать выбранную нормаль через  $\mathbf{v}^\perp$ .

Формулу (2.1) легко модифицировать для нахождения ориентированной кривизны:

$$(2.4) \quad k(t) = \frac{S_{\text{or}}(\dot{\mathbf{r}}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t))}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|^3}.$$

**Теорема 2.21.**

- (1) Гладкая коориентированная кривая на плоскости восстанавливается по функции, выражающей ориентированную кривизну через натуральный параметр, однозначно с точностью до движения.
- (2) Для любой гладкой функции найдётся гладкая плоская кривая с зависимостью кривизны от натурального параметра, выраженной этой функцией.

**Доказательство.** Очевидно, что множество решений системы уравнений (2.3) инвариантно относительно движений плоскости. Эти уравнения вместе с уравнением  $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$  образуют систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, поэтому решение при фиксированных начальных данных единственно. Начальными данными являются точка  $\mathbf{r}(s_0)$  и ортонормированный базис  $(\mathbf{v}(s_0), \mathbf{n}(s_0))$ , то есть некоторый ортонормированный репер. Движением плоскости любой такой репер переводится в любой другой, а значит, любой решение можно движением перевести в другое решение.

<sup>3</sup>Понятие коориентации можно также определить для кусочно-гладких кривых. В этом случае мы хотим, чтобы коориентация была задана на каждой гладкой дуге, причём коориентации разных дуг были согласованы между собой.



Чтобы восстановить гладкую коориентированную кривую с точностью до движения, нам достаточно знать её базис Френе. Полную информацию о нём нам даёт угол  $\varphi$  между вектором скорости  $\mathbf{v}$  и базисным вектором  $\mathbf{e}_1$ . Тогда  $\mathbf{v} = (\cos \varphi(s), \sin \varphi(s))$ ,  $\mathbf{v}^\perp = (-\sin \varphi(s), \cos \varphi(s))$ . Подставляя в определение кривизны, получим:

$$(2.5) \quad k = \langle (-\dot{\varphi} \sin \varphi, \dot{\varphi} \cos \varphi), (-\sin \varphi, \cos \varphi) \rangle = \dot{\varphi} \underbrace{(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)}_{=1} = \dot{\varphi}.$$

Теперь зафиксируем начальный момент  $s_0$  и положим

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= \int_{s_0}^s k(\tau) d\tau, \\ \mathbf{v}(s) &= (\cos \varphi(s), \sin \varphi(s)), \\ \mathbf{n}(s) &= (-\sin \varphi(s), \cos \varphi(s)), \\ \mathbf{r}(s) &= \int_{s_0}^s \mathbf{v}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Осталось лишь проверить, что кривизна восстановленной кривой действительно выражается функцией  $k(s)$  от натурального параметра. ■

Таким образом, зная соотношение на натуральный параметр и кривизну кривой, мы можем однозначно с точностью до движений восстановить кривую. Такие соотношения называются *натуральными уравнениями* и их замечательное свойство состоит в том, что такое задание не зависит от системы координат.

**Задача 2.22.** Восстановить кривую по натуральному уравнению  $R^2 = 2as$  (здесь имеется в виду  $R = 1/k$  — радиус кривизны<sup>4</sup>).

**Решение.** Выражаем кривизну через натуральный параметр:

$$k = \frac{1}{\sqrt{2as}}.$$

Мы извлекли корень, не заботясь о знаке, потому что выбор знака у кривизны соответствует просто отражению кривой относительно некоторой прямой. Теперь находим угол поворота ортонормированного базиса в каждой точке:

$$\varphi(s) = \int_0^s \frac{d\tau}{\sqrt{2a\tau}} = \frac{2}{\sqrt{2a}} \int_0^s \frac{d\tau}{2\sqrt{\tau}} = \sqrt{\frac{2s}{a}}.$$

Здесь мы выбрали конкретную первообразную, потому что разные первообразные отвечают одной и той же кривой с точностью до поворота. Выражаем вектор скорости  $\mathbf{v}(s) = \left( \cos \sqrt{\frac{2s}{a}}, \sin \sqrt{\frac{2s}{a}} \right)$  и интегрируем его:

$$\begin{aligned} \int_0^s \cos \sqrt{\frac{2\tau}{a}} d\tau &= \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\frac{2\tau}{a}} =: u \\ du = \frac{d\tau}{\sqrt{2a\tau}} \end{array} \quad \begin{array}{l} \tau = \frac{au^2}{2} \\ d\tau = a \cdot u dt \end{array} \quad t := \sqrt{\frac{2s}{a}} \right\} = a \int_0^t u \cos u du = \\ &= a \int_0^t u d(\sin u) = at \sin t - a \int_0^t \sin u du = a(t \sin t + \cos t). \end{aligned}$$

<sup>4</sup>Смысл этого понятия прояснится позднее.

При этом мы переобозначили параметр, потому что из-за сделанной в интеграле замены он перестал быть натуральным. Обратную замену можно не делать, но важно следить за тем, что при подсчёте второго интеграла мы сделаем ту же самую замену (здесь это, конечно, так). Аналогично,

$$\int_0^s \cos \sqrt{\frac{2\tau}{a}} d\tau \stackrel{t:=\sqrt{\frac{2s}{a}}}{=} a(\sin t - t \cos t).$$

Итак, получаем  $\mathbf{r}(t) = a(\cos t + t \sin t, \sin t - t \cos t)$ . ■

Полученная кривая является эвольвентой окружности радиуса  $a$  (см. соответствующий раздел), что легко видеть из формулы (2.12).

Формула (2.5) даёт в том числе важное топологическое наблюдение. Из неё легко видеть, что для замкнутой коориентированной гладкой кривой  $\gamma$  имеет место формула

$$(2.6) \quad \oint_{\gamma} k(s) ds = 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z},$$

Число  $m$  называется *числом вращения* кривой  $\gamma$ . Число вращения интересно тем, что оно не меняется при деформациях кривой в классе гладких замкнутых кривых (*регулярных гомотопиях*). Иными словами, число вращения является топологическим инвариантом гладкой замкнутой кривой. Действительно, ведь при регулярных гомотопиях кривизна  $k$  меняется непрерывно (это легко видеть, например, из формулы (2.4)), а значит, и интеграл по этой кривой должен тоже меняться непрерывно. Однако он принимает значения в дискретном множестве, поэтому является константой.

Легко видеть, что число вращения замкнутой гладкой несамопересекающейся кривой равно 1: при прохождении по ней вектор скорости совершает ровно один полный оборот. Принимая во внимание формулу (2.5), можем отказаться от условия гладкости, заменив его на кусочную гладкость. В каждой точке  $\mathbf{p} \in \gamma$ , где кривая  $\gamma$  не гладкая, её дуги «сходятся под углом». Формализуем это понятие.

**Определение 2.23.** В описанной выше ситуации выберем параметризацию  $\mathbf{r}(t)$  кривой  $\gamma$  в окрестности точки  $\mathbf{p}$  так, чтобы при  $t > 0$  и  $t < 0$  она была регулярной, а точка  $\mathbf{p}$  соответствовала  $t = 0$ . Тогда *внешний угол* кривой  $\gamma$  в точке  $\mathbf{p}$  — это угол от вектора  $\mathbf{v}_-$  до  $\mathbf{v}_+$ , взятый в интервале  $(-\pi; \pi)$ , где

$$\mathbf{v}_- = \lim_{t \rightarrow 0-} \dot{\mathbf{r}}(t), \quad \mathbf{v}_+ = \lim_{t \rightarrow 0+} \dot{\mathbf{r}}(t).$$

Для кусочно-гладкой несамопересекающейся кривой  $\gamma$  формула (2.6) принимает вид

$$\oint_{\gamma} k(s) ds + \sum_{i=1}^k \theta_i = 2\pi,$$

где  $\theta_1, \dots, \theta_k$  — внешние углы кривой  $\gamma$  в концах её гладких дуг. Наконец, сформулируем теорему, далеко идущим обобщением которой является теорема Гаусса — Бонне.

**Теорема 2.24.** Пусть  $\Omega$  — замкнутая плоская область, гомеоморфная единичному кругу, граница которой  $\partial\Omega$  есть замкнутая кусочно-гладкая несамопересекающаяся кривая. Зададим на  $\partial\Omega$  коориентацию, направив вектор нормали  $\mathbf{n}$  внутрь  $\Omega$ . Пусть также на  $\partial\Omega$  задан параметр  $s$ , натуральный для каждой её гладкой дуги. Тогда имеет место равенство

$$\oint_{\partial\Omega} k(s) ds + \sum_{i=1}^k \theta_i = 2\pi,$$

где  $\theta_1, \dots, \theta_k$  — внешние углы кривой  $\partial\Omega$  в концах её гладких дуг.

Решим обратную задачу к задаче 2.22.

**Задача 2.25.** Найти натуральное уравнение для кривой  $\mathbf{r}(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t)$ .

**Решение.** Сначала поймём, как выглядит эта кривая. Найдём направление вектора скорости, например, в точке  $\mathbf{r}(0) = (a, 0)$ :

$$\mathbf{v}(t) = a(-3 \cos^2 t \sin t, 3 \sin^2 t \cos t),$$

В интересующей точке имеем  $\mathbf{v}(0) = (0, 0)$ , и понять ничего нельзя. Можем попробовать найти предел нормированного вектора скорости:

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{a(-3 \cos^2 t \sin t, 3 \sin^2 t \cos t)}{3a \cos t \sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} (-\cos t, \sin t) = (-1, 0).$$

Аналогичные выкладки можно повторить для оставшихся трёх точек нерегулярности и затем нарисовать график (рис. 2.2). Эта кривая называется *астроидой*.

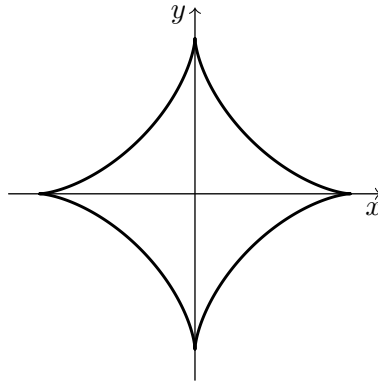


Рис. 2.2: Астроида

Приступим к решению задачи. Сначала посчитаем кривизну по формуле (2.4). Для этого найдём производные  $\dot{\mathbf{r}}(t)$  (а она уже найдена) и  $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ :

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = 3a(2 \cos t \sin^2 t - \cos^3 t, 2 \cos^2 t \sin t - \sin^3 t).$$

Теперь находим ориентированную площадь:

$$\begin{aligned} S_{\text{ор}}(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}) &= a^2 \cdot \det \begin{pmatrix} -3 \cos^2 t \sin t & 3 \sin^2 t \cos t \\ 2 \cos t \sin^2 t - \cos^3 t & 2 \cos^2 t \sin t - \sin^3 t \end{pmatrix} = \\ &= a^2 \cdot (-6 \cos^4 t \sin^2 t + 3 \cos^2 t \sin^4 t - 6 \cos^2 t \sin^4 t + 3 \cos^4 t \sin^2 t) = -3a^2 \sin^2 t \cos^2 t. \end{aligned}$$

И, наконец, находим кривизну:

$$k(t) = \frac{-3a^2 \sin^2 t \cos^2 t}{27a^3 \cos^3 t \sin^3 t} = -\frac{1}{9a \cos t \sin t}.$$

Мы хотим выразить  $k$  через натуральный параметр, так что сначала надо найти натуральный параметр:

$$s(t) = \int_0^t |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt = 3a \int_0^t \sin t \cos t dt = \frac{3a}{4} \int_0^t \sin(2t) d(2t) = -\frac{3a}{4} \cos(2t).$$

Итого получаем (здесь уже записываем через радиус кривизны  $R = 1/k$ )

$$R^2 = -9a^2 \cos^2 t \sin^2 t = -\frac{9a^2}{4} \sin^2(2t) = \frac{9}{4} \cos^2 t - \frac{9a^2}{4} = 4s^2 - \frac{9a^2}{4}.$$

Отметим, что натуральное уравнение не единственное в том смысле, что можно брать натуральный параметр со сдвигом. Здесь, например, немного удобнее взять

$$s(t) = -\frac{3a}{4} \cos(2t) + \frac{3a}{4}.$$

(Это обусловлено тем, что теперь  $s(0) = 0$ .) Новое уравнение будет выглядеть так:

$$R^2 - 6as - 4s^2 = 0.$$

(Именно в такой форме ответ приведён в задачнике. Алгебраически мы могли его получить просто выделив полный квадрат в старом выражении.) ■

### Кривые в $\mathbb{R}^3$

В пространстве помимо векторов скорости  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$  и главной нормали  $\mathbf{n} = \ddot{\mathbf{r}}/|\ddot{\mathbf{r}}|$  определяется *вектор бинормали*  $\mathbf{b} := \mathbf{v} \times \mathbf{n}$ .

**Определение 2.26.** Точку  $\mathbf{r}(s)$  и приложенный к ней базис  $(\mathbf{v}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$  называют *репером Френе* пространственной кривой.

Для этого репера есть аналоги формул (2.3).

**Теорема 2.27** (*Формулы Френе для пространственных кривых*). Для пространственных кривых выполнено

$$(2.7) \quad \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{v}}(s) & \dot{\mathbf{n}}(s) & \dot{\mathbf{b}}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}(s) & \mathbf{n}(s) & \mathbf{b}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -k(s) & 0 \\ k(s) & 0 & -\varkappa(s) \\ 0 & \varkappa(s) & 0 \end{pmatrix},$$

где  $\varkappa(s)$  — некоторая гладкая функция (она называется *кручением* кривой).

**Доказательство.** Аналогично формулам для плоских кривых,  $\dot{\mathbf{v}} = k\mathbf{n}$ . Из определения,  $|\mathbf{n}| = 1$ , значит,  $\mathbf{n} \perp \dot{\mathbf{n}}$ , так что  $\dot{\mathbf{n}} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{b}$ . Здесь  $\alpha = \langle \mathbf{v}, \dot{\mathbf{n}} \rangle = -\langle \dot{\mathbf{v}}, \mathbf{n} \rangle = -k$ ,  $\beta = \langle \dot{\mathbf{n}}, \mathbf{b} \rangle$ .  $|\mathbf{b}| = |\mathbf{v} \times \mathbf{n}| = 1$ , значит,  $\dot{\mathbf{b}} \perp \mathbf{b}$ , откуда  $\dot{\mathbf{b}} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{n}$ . Находим коэффициенты:  $\alpha = \langle \dot{\mathbf{b}}, \mathbf{v} \rangle = -\langle \mathbf{b}, \dot{\mathbf{v}} \rangle = 0$ ,  $\beta = \langle \dot{\mathbf{b}}, \mathbf{n} \rangle = -\langle \mathbf{b}, \dot{\mathbf{n}} \rangle$ . Обозначив  $\varkappa := \langle \dot{\mathbf{n}}, \mathbf{b} \rangle$ , получим формулы (2.7). ■

Геометрический смысл кручения виден из третьего уравнения в (2.7): это скорость вращения соприкасающейся плоскости кривой в данной точке. Выведем удобную формулу для кручения в натуральной параметризации:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \quad \ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{v}} = k\mathbf{n}, \quad \dddot{\mathbf{r}} = \frac{d}{ds}(k\mathbf{n}) = \dot{k}\mathbf{n} + k\dot{\mathbf{n}} = \dot{k}\mathbf{n} - k^2\mathbf{v} + \varkappa k\mathbf{b}.$$

Заметим, что

$$\text{Vol}_{\text{or}}(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}}) = \text{Vol}_{\text{or}}(\mathbf{v}, k\mathbf{n}, \varkappa k\mathbf{b}) = k^2 \underbrace{\varkappa \text{Vol}_{\text{or}}(\mathbf{v}, \mathbf{n}, \mathbf{b})}_1 = k^2 \varkappa.$$

Отсюда,  $\varkappa(s) = \text{Vol}_{\text{or}}(\dot{\mathbf{r}}(s), \ddot{\mathbf{r}}(s), \dddot{\mathbf{r}}(s))/k(s)^2$ . Теперь перейдём в произвольную параметризацию. Для этого нужно будет выразить производные по  $s$  через производные по  $t$ , как мы это делали при выводе формулы (2.1):

$$\dot{\mathbf{r}}(s) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}, \quad \ddot{\mathbf{r}}(s) = \frac{\mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|^2} + \dots, \quad \dddot{\mathbf{r}}(s) = \frac{\mathbf{r}'''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|^3} + \dots$$

Подставляем в формулу для натуральной параметризации:

$$(2.8) \quad \kappa(t) = \frac{1}{k^2} \text{Vol}_{\text{or}}(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}) = \frac{|\mathbf{r}'(t)|^6}{S_{\text{or}}^2(\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t))} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|^6} \text{Vol}_{\text{or}}(\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t), \mathbf{r}'''(t)) = \\ = \frac{\text{Vol}_{\text{or}}(\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t), \mathbf{r}'''(t))}{S_{\text{or}}^2(\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t))}.$$

Отметим, что из доказательства последней формулы видно, что базис Френе получается из базиса  $(\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t), \mathbf{r}'''(t))$ , который пишется в произвольной параметризации, ортогонализацией Грама — Шмидта (что, впрочем, верно и в плоском случае). Позднее мы будем именно из этого свойства определять репер Френе для кривых в произвольной размерности.

**Определение 2.28.** Вектором Дарбу  $\mathbf{w}(s)$  называется вектор вдоль кривой, с помощью которого уравнения Френе могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}}(s) = \mathbf{w}(s) \times \mathbf{v}(s), \\ \dot{\mathbf{n}}(s) = \mathbf{w}(s) \times \mathbf{n}(s), \\ \dot{\mathbf{b}}(s) = \mathbf{w}(s) \times \mathbf{b}(s). \end{cases}$$

**Теорема 2.29.** Вектор Дарбу существует и единственен в каждой точке.

**Доказательство.** Предположим, что такой вектор существует, тогда разложим его по базису Френе  $\mathbf{w} = \alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{n} + \gamma \mathbf{b}$  и подставим в первое уравнение:

$$\dot{\mathbf{v}} = (\alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{n} + \gamma \mathbf{b}) \times \mathbf{v} = -\beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{n}.$$

С другой стороны, выполнены уравнения Френе, откуда следует, что  $\beta \equiv 0$  и  $\gamma \equiv k$ , то есть  $\mathbf{w} = \alpha \mathbf{v} + k \mathbf{b}$ . Теперь подставим во второе уравнение:

$$\dot{\mathbf{n}} = (\alpha \mathbf{v} + k \mathbf{b}) \times \mathbf{n} = \alpha \mathbf{b} - k \mathbf{v}.$$

Аналогично из уравнений Френе получаем  $\alpha \equiv \kappa$ . Отсюда  $\mathbf{w} = \kappa \mathbf{v} + k \mathbf{b}$ . Осталось проверить выполнение третьего уравнения для такого вектора:

$$\dot{\mathbf{b}} = (\kappa \mathbf{v} + k \mathbf{b}) \times \mathbf{b} = -\kappa \mathbf{n},$$

что соответствует третьему уравнению Френе. Таким образом, вектор Дарбу существует и определён однозначно. ■

Геометрический смысл вектора Дарбу заключается в том, что это направляющий вектор мгновенной оси вращения репера Френе при движении вдоль кривой, а его длина есть угловая скорость этого вращения.

**Предложение 2.30.** Бирегулярная кривая является плоской тогда и только тогда, когда её кручение всюду нулевое.

**Доказательство.** Легко видеть, что кривая плоская тогда и только тогда, когда  $\mathbf{b}(s) = \mathbf{v}(s) \times \mathbf{n}(s) = \text{const}$ . Действительно, вектор  $\mathbf{b}$  является просто единичной нормалью плоскости, в которой лежит кривая. А третья формула из (2.7) влечёт, что  $\mathbf{b} = \text{const}$ , если и только если  $\kappa \equiv 0$ . ■

Формулы Френе имеют важное следствие. Если в плоском случае мы восстанавливали координированную кривую по гладкой функции ориентированной кривизны, то здесь нам нужно знать гладкие функции кривизны и кручения.

**Теорема 2.31.** Для любой пары гладких функций  $k, \kappa: I \rightarrow \mathbb{R}$ , первая из которых всюду положительна, с точностью до движения существует ровно одна кривая в  $\mathbb{R}^3$ , кривизна и

кручение которой выражаются для некоторой натуральной параметризации функциями  $k$  и  $\varkappa$  соответственно.

**Доказательство.** Доказательство единственности не отличается от плоского случая. Уравнения (2.7) вместе с  $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$  образуют систему обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой единственно при фиксированных начальных условиях, которыми являются начальная точка и базис Френе в начальный момент. Любой ортонормированный положительно ориентированный репер переводится движением в любой другой. Поэтому начальные данные одного решения можно перевести в начальные данные другого решения. При этом одно решение перейдёт в другое в силу инвариантности уравнений относительно группы собственных движений.

Для доказательства существования нужно взять произвольный начальный момент  $s_0 \in I$  и произвольный ортонормированный положительно ориентированный репер:  $\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0$ , решить уравнения (2.7), а затем уравнение  $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$  с начальными условиями  $\mathbf{r}(s_0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{v}(s_0) = \mathbf{v}_0, \mathbf{n}(s_0) = \mathbf{n}_0, \mathbf{b}(s_0) = \mathbf{b}_0$ . Решение существует на всём промежутке  $I$  (а не только в малой окрестности точки фазового пространства, заданной начальными условиями), поскольку уравнения линейны. Нужно лишь проверить, что кривизна и кручение полученной кривой действительно выражаются исходными функциями  $k(s), \varkappa(s)$ . В силу уравнений (2.7) достаточно показать, что базис  $(\mathbf{v}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  остаётся ортонормированным вдоль решения.

**Лемма 2.32.** Пусть  $X(t)$  — матрица  $n \times n$ , гладко зависящая от параметра, причём в начальный момент  $t = 0$  она ортогональна. Тогда матрица  $X(t)$  ортогональна при всех  $t$  тогда и только тогда, когда  $X^{-1}(t)\dot{X}(t)$  кососимметрична при всех  $t$ .

**Доказательство.** Положим  $A(t) := X^t(t)X(t)$ ,  $B(t) := X^{-1}(t)\dot{X}(t)$  (здесь, конечно же, через  $X^t$  обозначается не степень, а транспонирование). Имеем

$$(2.9) \quad \dot{A} = \dot{X}^t X + X^t \dot{X} = B^t A + AB.$$

Матрица  $X(t)$  ортогональна тогда и только тогда, когда  $A(t) = E$ . Если  $A(t) = E$  для всех  $t$ , то из (2.9) следует, что  $B^t(t) + B(t) = 0$  для всех  $t$ . Пусть, наоборот,  $B(t)$  кососимметрична (то есть  $B^t(t) + B(t) = 0$ ) при всех  $t$  и  $A(0) = E$ . Тогда постоянная функция  $A(t) = E$  является решением уравнения (2.9) с этим начальным условием. Остаётся воспользоваться единственностью решения. ■

Вернёмся к доказательству. Обозначим

$$A(s) = \begin{pmatrix} \mathbf{v}(s) & \mathbf{n}(s) & \mathbf{b}(s) \end{pmatrix},$$

где  $\mathbf{v}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$  найдены из (2.7). Ортонормированность базиса  $(\mathbf{v}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  означает ортогональность матрицы  $A(s)$ . В начальный момент  $s = s_0$  условие ортогональности выполнено. Уравнения (2.7) переписываются в виде

$$\dot{A} = A \begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & -\varkappa \\ 0 & \varkappa & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда по лемме 2.32 матрица  $A(s)$  ортогональна при всех  $s$ . ■

**Задача 2.33.** Дана кривая  $\mathbf{r}(t) = (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t, t)$ .

- (1) Привести её к натуральному параметру.
- (2) Найти репер Френе в каждой точке.
- (3) Найти кривизну и кручение в каждой точке.

**Решение.** У этой кривой легко пишутся производные всех порядков:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}(t) &= (\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t, 1), \\ \ddot{\mathbf{r}}(t) &= (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t, 0), \\ \dddot{\mathbf{r}}(t) &= (\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t, 0). \end{aligned}$$

- (1) Ищем натуральный параметр по формуле длины кривой:

$$s(t) = \int_0^t |\dot{\mathbf{r}}(\tau)| d\tau = \int_0^t \sqrt{\operatorname{sh}^2 \tau + \operatorname{ch}^2 \tau + 1} d\tau = \sqrt{2} \int_0^t \operatorname{ch} \tau d\tau = \operatorname{sh} t \sqrt{2}.$$

Теперь надо каждую координату вектора  $\mathbf{r}(t)$  выразить через натуральный параметр. Для первых двух координат это делается совсем тривиально, а для третьей надо решить квадратное уравнение относительно  $e^t$ :

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{2} \cdot \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \\ e^{2t} - s\sqrt{2} \cdot e^t - 1 &= 0, \\ e^t &= \frac{s\sqrt{2} + \sqrt{2s^2 + 4}}{2} = \frac{s}{\sqrt{2}} + \sqrt{s^2 + 2}, \\ t &= \ln \left( \frac{s}{\sqrt{2}} + \sqrt{s^2 + 2} \right). \end{aligned}$$

Здесь выбрали положительный корень квадратного уравнения, так как  $e^t > 0$  для всех  $t$ . Итого, получаем

$$\mathbf{r}(s) = \left( \frac{s}{\sqrt{2}}, \sqrt{s^2 + 2}, \ln \left( \frac{s}{\sqrt{2}} + \sqrt{s^2 + 2} \right) \right).$$

- (2) Воспользуемся ортогонализацией Грама — Шмидта:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|} = \frac{1}{\sqrt{2} \operatorname{ch} t} (\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \operatorname{th} t, 1, \frac{1}{\operatorname{ch} t} \right),$$

теперь найдём вектор, совпадающий по направлению с  $\mathbf{n}(t)$ :

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) - \langle \mathbf{v}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t) \rangle \mathbf{v}(t) = (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t, 0) - \sqrt{2} \operatorname{sh} t \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \operatorname{th} t, 1, \frac{1}{\operatorname{ch} t} \right) = \left( \frac{1}{\operatorname{ch} t}, 0, -\operatorname{th} t \right).$$

Осталось его нормировать, для этого вычислим квадрат его длины:

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 t} + \operatorname{th}^2 t = \frac{1 + \operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t} = 1.$$

Таким образом, нормировать ничего не надо, и  $\mathbf{n}(t) = (1/\operatorname{ch} t, 0, -\operatorname{th} t)$ . Осталось только найти вектор бинормали:

$$\mathbf{b} = \mathbf{v} \times \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \operatorname{th} t & 1 & \frac{1}{\operatorname{ch} t} \\ \frac{1}{\operatorname{ch} t} & 0 & -\operatorname{th} t \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\operatorname{th} t, 1, -\frac{1}{\operatorname{ch} t} \right).$$

- (3) Так как мы уже нашли репер Френе, нам проще не пользоваться формулами (2.1) и (2.8) (и тем более не расписывать через натуральный параметр), а исходить из формул Френе. Мы знаем, что  $\dot{\mathbf{v}} = k\mathbf{n}$ , тогда можно просто «подобрать» коэффициент пропорциональности между нужными векторами.

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}, 0, -\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t} \right) = k(t) \cdot \left( \frac{1}{\operatorname{ch} t}, 0, -\operatorname{th} t \right).$$

Отсюда сразу видно, что  $k(t) = 1/(\operatorname{ch} t \sqrt{2})$ . Можно так же поступить и для кручения, ведь мы знаем, что  $\dot{\mathbf{b}} = -\kappa \mathbf{n}$ :

$$\dot{\mathbf{b}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}, 0, \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t} \right) = -\kappa(t) \cdot \left( \frac{1}{\operatorname{ch} t}, 0, -\operatorname{th} t \right).$$

Получаем  $\kappa(t) = 1/(\operatorname{ch} t \sqrt{2})$ .



Решим задачу нахождения кривизны и кручения кривой, которая задана не параметрически, а системой уравнений.

**Задача 2.34.** Найти кривизну и кручение кривой, заданной уравнениями

$$\begin{cases} x^2 + z^2 - y^2 = 1, \\ y^2 - 2x + z = 0 \end{cases}$$

в точке  $(1, 1, 1)$ .

**Решение.** Сначала проверим, что в окрестности этой точки пересечение данных поверхностей действительно представляет собой гладкую кривую. Для этого, согласно теореме 2.9, достаточно проверить, что точка  $(1, 1, 1)$  является регулярной для отображения  $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ , где  $f_1(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2 - 1$ ,  $f_2(x, y, z) = -2x + y^2 + z$ .

$$\text{grad } f_1|_{(1,1,1)} = (2x, -2y, 2z)|_{(1,1,1)} = (2, -2, 2),$$

$$\text{grad } f_2|_{(1,1,1)} = (-2, 2y, 1)|_{(1,1,1)} = (-2, 2, 1).$$

Видим, что градиенты в интересующих нас точках в самом деле линейно независимы, то есть  $\text{rk } J_{\mathbf{f}}(1, 1, 1) = 2$ . Далее мы хотим явно параметризовать данную кривую в окрестности нашей точки. И мы уже знаем, что в качестве параметра нам точно подойдёт какая-то из координат (замечание после доказательства предложения 2.6), но важно точно понять, какая именно. Нужно посмотреть на матрицу Якоби (которая на самом деле уже выписана сверху) и увидеть два линейно независимых столбца. Подойдут, например, последние два, так что будем выражать переменные  $y$  и  $z$  через  $x$ . Целиком выразить  $y$  и  $z$  из данной нам системы можно, но проблематично. Тем более, позднее мы собираемся пользоваться формулами (2.1) и (2.8), так что нам нужно будет знать их производные вплоть до третьего порядка. Однако можно смотреть на это по-другому — кроме первых трёх производных нам больше ничего не нужно, так что их и будем искать. Напишем ряды Тейлора с неопределёнными коэффициентами вблизи точки  $x = 1$ , но чтобы избавиться от обилия возникающих скобок, сделаем замену  $\tilde{x} = x - 1$ :

$$y(\tilde{x}) = 1 + a_1\tilde{x} + a_2\tilde{x}^2 + a_3\tilde{x}^3 + \bar{o}(\tilde{x}^3),$$

$$z(\tilde{x}) = 1 + b_1\tilde{x} + b_2\tilde{x}^2 + b_3\tilde{x}^3 + \bar{o}(\tilde{x}^3).$$

Найдём коэффициенты подстановкой в данную нам систему. Для упрощения вычислений можно сложить два уравнения, получив новое уравнение

$$\begin{aligned} x^2 + z^2 - 2x + z &= 1, \\ (x - 1)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} &= 0, \end{aligned}$$

которое связывает  $z$  и  $x$ . В нём надо сделать нашу замену и подставить разложение  $z(\tilde{x})$ :

$$\begin{aligned} \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{9}{4} - \tilde{x}^2, \\ \left(\frac{3}{2} + b_1\tilde{x} + b_2\tilde{x}^2 + b_3\tilde{x}^3 + \bar{o}(\tilde{x}^3)\right)^2 &= \frac{9}{4} - \tilde{x}^2. \end{aligned}$$

Раскрываем скобки, отбрасывая члены порядка малости  $\bar{o}(\tilde{x}^3)$ , и пишем систему на равенство коэффициентов получившихся многочленов в левой и правой части:

$$\begin{cases} 3b_3 + 2b_1b_2 = 0, \\ b_1^2 + 3b_2 = -1, \\ 3b_1 = 0. \end{cases}$$



Отсюда получаем  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = -\frac{1}{3}$ ,  $b_3 = 0$ . Подставляя, получаем  $z(\tilde{x}) = 1 - \frac{1}{3}\tilde{x}^2 + \bar{o}(\tilde{x}^3)$ . Теперь можем подставить найденное во второе уравнение системы и выразить  $y(\tilde{x})$ .

$$\begin{aligned}(1 + a_1\tilde{x} + a_2\tilde{x}^2 + a_3\tilde{x}^3 + \bar{o}(\tilde{x}^3))^2 - 2(\tilde{x} + 1) + 1 - \frac{1}{3}\tilde{x}^2 &= 0, \\ (1 + a_1\tilde{x} + a_2\tilde{x}^2 + a_3\tilde{x}^3 + \bar{o}(\tilde{x}^3))^2 &= 1 + 2\tilde{x} + \frac{1}{3}\tilde{x}^2.\end{aligned}$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} 2a_3 + 2a_1a_2 = 0, \\ a_1^2 + 2a_2 = \frac{1}{3}, \\ 2a_1 = 2. \end{cases}$$

Отсюда  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = -\frac{1}{3}$ ,  $a_3 = \frac{1}{3}$ . Таким образом,  $y(\tilde{x}) = 1 + \tilde{x} - \frac{1}{3}\tilde{x}^2 + \frac{1}{3}\tilde{x}^3 + \bar{o}(\tilde{x}^3)$ . Теперь совершим обратную замену:

$$\begin{aligned}y(x) &= 1 + (x - 1) - \frac{1}{3}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3 + \bar{o}((x - 1)^3), \\ z(x) &= 1 - \frac{1}{3}(x - 1)^2 + \bar{o}((x - 1)^3).\end{aligned}$$

Из найденного разложения находим:  $y'(1) = 1$ ,  $y''(1) = -\frac{1}{3} \cdot 2! = -\frac{2}{3}$ ,  $y'''(1) = \frac{1}{3} \cdot 3! = 2$  и  $z'(1) = 0$ ,  $z''(1) = -\frac{1}{3} \cdot 2! = -\frac{2}{3}$ ,  $z'''(1) = 0$ . По формуле кривизны (2.1) имеем

$$k(1) = \frac{|(1, 1, 0) \times (0, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})|}{|(1, 1, 0)|^3} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

А по формуле кручения (2.8)

$$\tau(1) = \frac{\text{Vol}_{\text{or}}((1, 1, 0), (0, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}), (0, 2, 0))}{|(1, 1, 0) \times (0, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})|^2} = 1.$$

■

## Соприкосновение кривых

**Определение 2.35.** Пусть регулярная кривая задана радиус-вектором  $\mathbf{r}(t)$ . Касательная прямая к этой кривой в точке  $t_0$  задаётся рядом Тейлора функции  $\mathbf{r}$  с отбрасыванием всех членов более высокого порядка, чем  $t - t_0$ :

$$\ell(t) := \mathbf{r}(t_0) + \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{t_0} (t - t_0).$$

Нужно проверить корректность данного определения, ведь оно сформулировано для конкретной параметризации кривой. Здесь она сразу следует из предложения 2.6 и теоремы о сложной функции:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt}.$$

**Теорема 2.36.**

- (1) Пусть  $\gamma$  — регулярная кривая,  $\ell$  — касательная прямая в некоторой её точке  $\mathbf{x}_0 \in \gamma$ . Тогда для  $\mathbf{x}_1 \in \gamma$  выполнено

$$\rho(\mathbf{x}_1, \ell) = \bar{o}(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0|) \text{ при } \mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_0.$$

- (2) Для каждой точки  $\mathbf{x}_0 \in \gamma$  касательная прямая является единственной прямой с указанным свойством.

**Доказательство.** Пусть на  $\gamma$  выбрана регулярная параметризация  $\mathbf{r}(t)$ , в которой  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{r}(0)$ . В качестве точки  $\mathbf{x}_1$  будем брать  $\mathbf{r}(t)$ , где  $t$  пробегает окрестность нуля. Условие  $\mathbf{r}(t) \rightarrow \mathbf{x}_0$  можно заменить на  $t \rightarrow 0$  (это вытекает из определения кривой). Обозначим  $\mathbf{v}_0 := \dot{\mathbf{r}}(0)$ . По условию,  $\mathbf{v}_0 \neq \mathbf{0}$ .

- (1) По формуле Тейлора имеем

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0 t + \bar{o}(t) = \mathbf{x}_0 + (\mathbf{v}_0 + \bar{o}(1))t \text{ при } t \rightarrow 0.$$

Расстояние от  $\mathbf{r}(t)$  до прямой  $\ell$  равно  $\rho(\mathbf{r}(t), \ell) = |\mathbf{r}(t) - \mathbf{x}_0| \sin \alpha(t)$ , где  $\alpha(t)$  — угол между векторами  $\mathbf{v}_0$  и  $\mathbf{r}(t) - \mathbf{x}_0$ . Поскольку  $\mathbf{r}(t) - \mathbf{x}_0 = (\mathbf{v}_0 + \bar{o}(1))t$ , этот угол равен  $\bar{o}(1)$  при  $t \rightarrow 0$ . Получаем

$$\rho(\mathbf{r}(t), \ell) = |\mathbf{r}(t) - \mathbf{x}_0| \bar{o}(1) = \bar{o}(|\mathbf{r}(t) - \mathbf{x}_0|).$$

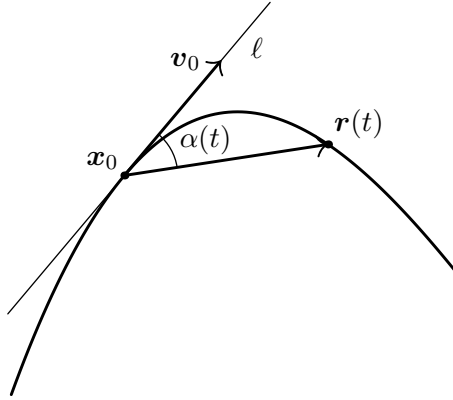


Рис. 2.3

- (2) Пусть теперь  $\ell'$  — другая прямая, проходящая через точку  $\mathbf{x}_0$ , и пусть  $\mathbf{u}$  — её направляющий вектор. Тогда

$$\rho(\mathbf{r}(t), \ell') = |\mathbf{r}(t) - \mathbf{x}_0| \sin \beta(t),$$

где  $\beta(t)$  — угол между векторами  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{r}(t) - \mathbf{x}_0 = (\mathbf{v}_0 + \bar{o}(1))t$ . При  $t \rightarrow 0$  угол  $\beta(t)$  стремится к углу между векторами  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}_0$ , который по предположению отличен от 0 и  $\pi$ . Отсюда  $\rho(\mathbf{r}(t), \ell') = |\mathbf{r}(t) - \mathbf{x}_0| (\text{const} + \bar{o}(1))$ , где  $\text{const} \neq 0$ . ■

**Предложение 2.37.** Если кривая в  $\mathbb{R}^n$  задана системой уравнений  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ , то касательная к ней в регулярной точке  $\mathbf{x}_0$  задаётся системой уравнений  $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$ .

**Доказательство.** Точка  $\mathbf{x}_0$  регулярна для отображения  $\mathbf{f}$ , значит,  $\text{rk } J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) = n - 1$ , поэтому пространство решений системы с этой матрицей одномерно, то есть задаёт прямую в пространстве  $\mathbb{R}^n$  (очевидно, проходящую через точку  $\mathbf{x}_0$ ). Остаётся проверить, что эта прямая параллельна вектору скорости касательной прямой в точке  $\mathbf{x}_0$ .

Пусть  $\mathbf{r}(t)$  — регулярная параметризация данной кривой в окрестности точки  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{r}(t_0)$  (существует по теореме 2.9). Это означает, что  $\mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) = \mathbf{0}$  для всех  $t$  из прообраза данной окрестности. По теореме о производной сложной функции имеет место равенство

$$\frac{d}{dt} \mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) = J_{\mathbf{f}}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t).$$

Подставляя  $t = t_0$ , получаем

$$J_f(x_0) \cdot v_0 = 0,$$

где  $v_0$  — вектор скорости при  $t = t_0$ . ■

**Определение 2.38.** Говорят, что две гладкие кривые имеют в точке  $x_0$  соприкосновение порядка  $k$ , где  $k \geq 1$ , если для некоторых их регулярных параметризаций и некоторого  $t_0$  выполнено

$$(2.10) \quad r_1(t_0) = r_2(t_0) = x_0, \quad |r_1(t) - r_2(t)| = o((t - t_0)^k) \text{ при } t \rightarrow t_0.$$

Из формулы Тейлора следует, что условие (2.10) равносильно следующему:

$$r_1(t_0) = r_2(t_0), \quad r'_1(t_0) = r'_2(t_0), \quad \dots, \quad r_1^{(k)}(t_0) = r_2^{(k)}(t_0).$$

Касательная прямая к кривой имеет в точке касания первый порядок соприкосновения с этой кривой. Однако может иметь и больший порядок соприкосновения.

**Определение 2.39.** Точка  $x$  кривой  $\gamma$  называется *точкой спрямления*, если в ней кривая  $\gamma$  имеет со своей касательной прямой соприкосновение порядка два.

**Предложение 2.40.** Пусть дана кривая с регулярной параметризацией  $r(t)$ . Точка, соответствующая значению параметра  $t = t_0$  является точкой спрямления тогда и только тогда, когда векторы скорости  $r'(t_0)$  и ускорения  $r''(t_0)$  коллинеарны.

**Доказательство.**  $\Rightarrow$ . Пусть  $\ell(t)$  — параметризация касательной в точке спрямления. Тогда имеем  $r'(t) = \ell'(t)$  и  $r''(t) = \ell''(t)$ , а вектора  $\ell'$  и  $\ell''$  коллинеарны, так как они сонаправлены одной и той же касательной прямой.

$\Leftarrow$ . Параметризуем отрезок касательной прямой возле точки  $r(t_0)$  следующим образом:

$$\ell(t) = r(t_0) + r'(t_0)t + \frac{r''(t_0)}{2}t^2, \quad t \in [t_0 - \varepsilon; t_0 + \varepsilon].$$

При достаточно малом  $\varepsilon$  эта параметризация регулярна, так как  $r'(t_0) \neq 0$ . ■

Отметим, что точки спрямления — ровно те точки кривой, в которых её кривизна равна нулю. Действительно, в натуральной параметризации  $|\dot{r}| = 1$ , так что  $\dot{r} \perp \ddot{r}$ , но в точках спрямления  $\dot{r} \parallel \ddot{r}$ . Так что остаётся единственная возможность  $\ddot{r} = 0$ .

**Определение 2.41.** *Соприкасающейся окружностью* с данной кривой  $r(t)$  в точке  $x_0$  называется окружность, которая имеет соприкосновение второго порядка с этой кривой в точке  $x_0$ .

**Теорема 2.42.** Если точка  $x_0$  некоторой гладкой кривой  $\gamma$  не является точкой спрямления, то существует ровно одна соприкасающаяся окружность с кривой  $\gamma$  в точке  $x_0$ .

**Доказательство.** Пусть  $r(t)$  — некоторая регулярная параметризация кривой  $\gamma$  с условием  $r(0) = x_0$ . Соприкосновение второго порядка в точке  $x_0$  с какой-либо другой кривой определяется векторами скорости  $v := \dot{r}(0)$  и ускорения  $a := \ddot{r}(0)$ . Поэтому для доказательства первой части теоремы достаточно взять любую другую кривую с теми же векторами скорости и ускорения в точке  $x_0$ . Таким образом, мы можем считать, что наша кривая имеет следующую параметризацию:

$$r(t) = x_0 + vt + \frac{a}{2}t^2.$$

Так как  $x_0$  — не точка спрямления, векторы  $v$  и  $a$  линейно независимы. Легко видеть, что такая параметризация задаёт параболу. В плоскости, в которой лежит эта парабола, она имеет вид  $y = \frac{k}{2}x^2$  для некоторого  $k \neq 0$ .

Про соприкасающуюся окружность можно сказать следующее. Во-первых, она должна проходить через начало координат. Во-вторых, её вектор скорости в этой точке равен  $(1, 0)$ , что даёт нам направление на центр этой окружности — таким образом, он обязательно лежит на оси  $y$ . Наконец, условие на равенство вторых производных даёт нам равенство кривизн, что для окружности однозначно определяет её радиус. Легко проверить, что окружность  $\rho(t) = \frac{1}{k}(\cos t, 1 + \sin t)$  является соприкасающейся к нашей параболе. ■

Как было отмечено в конце доказательства последней теоремы, кривизна однозначно определяется производными вплоть до второго порядка, так что радиус соприкасающейся окружности равен  $R = 1/k$ , где  $k$  — кривизна в точке соприкосновения. Таким образом, соприкасающаяся окружность даёт геометрический смысл понятия кривизны, так что её центр часто называют *центром кривизны*, а радиус — *радиусом кривизны*.

## Эволюта и эвольвента плоской кривой

**Определение 2.43.** *Эволютой* плоской бигулярной кривой  $\gamma$  называется кривая, которую описывает центр кривизны кривой  $\gamma$ .

Пусть  $\mathbf{r}(s)$  — натуральная параметризация кривой  $\gamma$ , тогда имеем параметризацию (уже не обязательно натуральную) эволюты:

$$(2.11) \quad \tilde{\mathbf{r}}(s) = \mathbf{r}(s) + \frac{1}{k(s)}\mathbf{n}(s).$$

**Предложение 2.44.** Кривая  $\tilde{\gamma}$  является эволютой плоской бигулярной кривой  $\gamma$  тогда и только тогда, когда  $\tilde{\gamma}$  является огибающей семейства нормалей к  $\gamma$ .

**Доказательство.** Пусть  $\mathbf{r}(s)$  — натуральная параметризация кривой  $\gamma$ .

⇒. Параметризация эволюты  $\tilde{\gamma}$  имеет вид (2.11). В каждой точке можем вычислить вектор скорости:<sup>5</sup>

$$\tilde{\mathbf{r}}' = \dot{\mathbf{r}} + \frac{1}{k}\dot{\mathbf{n}} - \frac{k'}{k^2}\mathbf{n} = -\frac{k'}{k^2}\mathbf{n},$$

что и требовалось. (Во втором равенстве воспользовались формулой Френе для плоской кривой  $\gamma$ .)

⇐. Можем записать параметризацию  $\tilde{\gamma}$  в виде

$$\tilde{\mathbf{r}}(s) = \mathbf{r}(s) + \lambda(s)\mathbf{n}(s).$$

Кривая  $\tilde{\gamma}$  является огибающей поля нормалей к  $\gamma$ . Это значит, что в каждой точке  $s$  вектор скорости  $\tilde{\mathbf{r}}'(s)$  кривой  $\tilde{\gamma}$  должен быть коллинеарен вектору главной нормали  $\mathbf{n}(s)$  кривой  $\gamma$ , это задаёт условие на коэффициент  $\lambda$ :

$$\tilde{\mathbf{r}}' = (1 - k\lambda)\mathbf{v} + \lambda'\mathbf{n}.$$

Отсюда сразу получаем  $\lambda = 1/k$ , что и требовалось. ■

**Теорема 2.45** (Тэйт, Кнезер). Если кривизна кривой является строго монотонной функцией, то соприкасающиеся окружности вложены друг в друга.

**Доказательство.** Пусть  $\mathbf{r}(s)$  — натуральная параметризация данной кривой. Положим, для определённости,  $k' > 0$ . Возьмём произвольные значения параметра  $s_0, s_1$  ( $s_0 < s_1$ )

<sup>5</sup>Здесь производные берутся по одному и тому же параметру  $s$ , но обозначены по-разному (точками и штрихами), потому что для кривой  $\gamma$  этот параметр натуральный, а для кривой  $\tilde{\gamma}$  — нет.

и докажем, что соприкасающаяся окружность в точке  $\mathbf{r}(s_1)$  вложена в соприкасающуюся окружность в точке  $\mathbf{r}(s_0)$ . Длина участка эволюты, заключённого между центрами соприкасающихся окружностей в данных точка, равна

$$\int_{s_0}^{s_1} |\tilde{\mathbf{r}}'(s)| ds = \int_{s_0}^{s_1} \frac{k'}{k^2} ds = \left( -\frac{1}{k(s)} \right) \Big|_{s_0}^{s_1} = \frac{1}{k(s_0)} - \frac{1}{k(s_1)}.$$

Отметим, что эта величина есть разность радиусов соприкасающихся окружностей в точках  $\mathbf{r}(s_0)$  и  $\mathbf{r}(s_1)$ . Но тогда расстояние между центрами окружностей не больше разности их радиусов, а значит, одна из них лежит внутри другой. (Ясно, что внутри лежит окружность меньшего радиуса.) ■

**Определение 2.46.** Эвольвентой плоской бигулярной кривой  $\gamma$  называется кривая, которую описывает неподвижная точка прямой, катящейся без проскальзывания по  $\gamma$ .

Эвольвента (в отличие от эволюты) не определена однозначно, ведь можно выбрать любую точку на катящейся прямой. Так что у бигулярной плоской кривой имеется однопараметрическое семейство эвольвент. Если  $\mathbf{r}(s)$  — натуральная параметризация кривой  $\gamma$ , то легко получить (опять же, необязательно натуральную) параметризацию эвольвенты:

$$(2.12) \quad \hat{\mathbf{r}}(s) = \mathbf{r}(s) - (s - s_0)\dot{\mathbf{r}}(s).$$

Константа  $s_0$  как раз соответствует изначальному смещению точки по скользящей прямой, её выбор соответствует выбору эвольвенты.

**Теорема 2.47.** Пусть  $\gamma$  и  $\hat{\gamma}$  — регулярные кривые. Следующие условия равносильны:

- (1) кривая  $\hat{\gamma}$  является эвольвентой кривой  $\gamma$ ;
- (2) кривая  $\gamma$  является огибающей поля нормалей к  $\hat{\gamma}$ ;
- (3) кривая  $\gamma$  является эволютой кривой  $\hat{\gamma}$ .

**Доказательство.** Пусть  $\mathbf{r}(s)$  — регулярная параметризация кривой  $\gamma$ .

(1)  $\Rightarrow$  (2). Кривая  $\hat{\gamma}$  имеет параметризацию (2.12). Вычисляем вектор скорости:

$$\hat{\mathbf{r}}' = \dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}} - (s - s_0)\ddot{\mathbf{r}} = -(s - s_0)\ddot{\mathbf{r}}$$

и видим, что он перпендикулярен вектору  $\dot{\mathbf{r}}$ .

(2)  $\Leftarrow$  (1). Если кривая  $\hat{\gamma}$  ортогональна касательным к  $\gamma$ , то её параметризация имеет вид  $\hat{\mathbf{r}}(s) = \mathbf{r}(s) + \lambda(s)\dot{\mathbf{r}}(s)$ . При этом должно быть выполнено  $\langle \hat{\mathbf{r}}', \dot{\mathbf{r}} \rangle = 0$ :

$$0 = \langle (1 + \lambda')\dot{\mathbf{r}} + \lambda\ddot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}} \rangle = 1 + \lambda'.$$

Отсюда  $\lambda(s) = -(s - s_0)$ , то есть данная кривая является эвольвентой кривой  $\gamma$ .

(2)  $\Leftrightarrow$  (3). См. предложение 2.44. ■

## Кривые в $\mathbb{R}^n$

**Определение 2.48.** Кривая в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$  называется  $k$ -регулярной, если она допускает параметризацию  $\mathbf{r}(t)$ , для которой векторы

$$\mathbf{r}', \quad \mathbf{r}'', \quad \dots, \quad \mathbf{r}^{(k)}$$

линейно независимы при всех  $t$ .

**Лемма 2.49.** Пусть  $t$  и  $\tau$  — два регулярных параметра на регулярной кривой  $\gamma$ . Тогда для любого  $k \in \mathbb{N}$  в каждой точке кривой выполнено равенство

$$\left( \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{d\tau^2} \quad \dots \quad \frac{d^k\mathbf{r}}{d\tau^k} \right) = \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \quad \dots \quad \frac{d^k\mathbf{r}}{dt^k} \right) \cdot R,$$

где  $R$  — верхнетреугольная матрица, на диагонали которой стоят числа

$$\frac{dt}{d\tau}, \quad \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2, \quad \dots, \quad \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^k.$$

**Доказательство.** Мы хотим доказать, что для всех  $j \in \mathbb{N}$  вектор  $d^j \mathbf{r} / d\tau^j$  имеет вид

$$(2.13) \quad \frac{d^j \mathbf{r}}{d\tau^j} = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^j \frac{d^j \mathbf{r}}{dt^j} + R_{j-1,j} \frac{d^{j-1} \mathbf{r}}{dt^{j-1}} + \dots + R_{1,j} \frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

где  $R_{j-1,j}, \dots, R_{1,j}$  — некоторые коэффициенты. Будем доказывать по индукции. Для  $j = 1$  равенство (2.13) следует из теоремы о дифференцировании сложной функции. Для индукционного перехода продифференцируем обе части (2.13) по  $\tau$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^{j+1} \mathbf{r}}{d\tau^{j+1}} &= \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{j+1} \frac{d^{j+1} \mathbf{r}}{dt^{j+1}} + \left(\frac{d}{d\tau} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^j + R_{j-1,j} \frac{dt}{d\tau}\right) \frac{d^j \mathbf{r}}{dt^j} + \\ &+ \left(\frac{dR_{j-1,j}}{d\tau} + R_{j-2,j} \frac{dt}{d\tau}\right) \frac{d^{j-1} \mathbf{r}}{dt^{j-1}} + \dots + \left(\frac{dR_{2,j}}{d\tau} + R_{1,j} \frac{dt}{d\tau}\right) \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \frac{dR_{1,j}}{d\tau} \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \end{aligned}$$

■

Из последней леммы вытекает, что  $k$ -регулярность кривой не зависит от выбора регулярного параметра на ней.

**Определение 2.50.** Пусть  $\gamma$  —  $(n-1)$ -регулярная кривая в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$  и  $\mathbf{r}(t)$  — её регулярная параметризация. Для каждой точки этой кривой её *базисом Френе* в этой точке называется ортонормированный базис, в котором первые  $n-1$  векторов получены ортогонализацией Грама — Шмидта из набора векторов

$$\mathbf{r}', \quad \mathbf{r}'', \quad \dots, \quad \mathbf{r}^{(n-1)},$$

а последний вектор выбран таким образом, чтобы ориентация базиса была положительной.

Для начала докажем корректность определения репера Френе (то есть его независимость от параметризации).

**Предложение 2.51.** Базис Френе гладкой ориентированной  $(n-1)$ -регулярной кривой в  $\mathbb{R}^n$  в каждой точке не зависит от выбора параметризации.

**Доказательство.** Пусть  $t$  и  $\tau$  — два одинаково ориентированных параметра на данной кривой, то есть  $dt/d\tau > 0$ , и пусть по отношению к обоим параметризация  $\mathbf{r}$  данной кривой является регулярной.

По лемме 2.49 матрицы перехода между базисами  $(d^j \mathbf{r} / dt^j)_{j=1, \dots, n-1}$  и  $(d^j \mathbf{r} / d\tau^j)_{j=1, \dots, n-1}$  верхнетреугольные с положительными элементами на диагонали. Так что результат процесса ортогонализации Грама — Шмидта для них будет одинаковым. Последний вектор базиса Френе однозначно определяется остальными. ■

**Теорема 2.52.** Для базиса Френе  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$   $(n-1)$ -регулярной ориентированной кривой в  $\mathbb{R}^n$ , параметризованной натуральным параметром, имеют место равенства

$$(\dot{\mathbf{e}}_1 \quad \dot{\mathbf{e}}_2 \quad \dots \quad \dot{\mathbf{e}}_n) = (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \dots \quad \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} 0 & -k_1 & & & \\ k_1 & 0 & -k_2 & & \\ & k_2 & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 & -k_{n-1} \\ & & & & k_{n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

где  $k_1, \dots, k_{n-1}$  — некоторые гладкие функции натурального параметра (они называются *обобщёнными кривизнами* данной кривой).

**Доказательство.** Будем доказывать утверждение с помощью индукции. Так как на кривой выбрана натуральная параметризация, первый вектор при ортогонализации не изменится:  $e_1 = \dot{r}$ . Вектор  $\ddot{r}$  уже перпендикулярен первому  $\dot{r}$ , так что его останется только нормировать:  $e_2 = \ddot{r}/|\ddot{r}|$ . Далее будут возникать всё более сложные выражения, но нам важно, что для каждого  $i$  вектор  $e_i$  выражается через векторы  $\dot{r}, \dots, r^{(i)}$  (это эквивалентно тому, что матрица замены при ортогонализации Грама — Шмидта верхнетреугольная).

Векторы  $e_1, \dots, e_n$  в каждой точке нашей кривой образуют ортонормированный базис, так что для каждого  $s$  можем написать

$$(e_1(s+t) \ e_2(s+t) \ \dots \ e_n(s+t)) = (e_1(s) \ e_2(s) \ \dots \ e_n(s)) A_s(t),$$

где  $A_s \in SO(n)$ . При  $t = 0$  матрица  $A_s$  единичная, так что по лемме 2.32 матрица  $A_s^{-1}A'_s$  кососимметрична (здесь штрихом обозначена производная по  $t$ ). При  $t = 0$  получаем кососимметричность матрицы  $A'_s|_{t=0}$ . В последней формуле возьмём производную по  $t$ , а затем положим  $t = 0$ :

$$(\dot{e}_1(s) \ \dot{e}_2(s) \ \dots \ \dot{e}_n(s)) = (e_1(s) \ e_2(s) \ \dots \ e_n(s)) B,$$

где матрица  $B := A'_s|_{t=0}$  кососимметрична. Мы уже почти доказали теорему, осталось только понять, какой именно вид имеет матрица  $B$ .

Как было сказано выше,  $e_i$  является линейной комбинацией векторов  $\dot{r}, \dots, r^{(i)}$ , так что  $\dot{e}_i$  есть некоторая линейная комбинация  $\dot{r}, \dots, r^{(i+1)}$ . Отсюда можем заключить, что  $\dot{e}_i$  линейно выражается через  $e_1, \dots, e_{i+1}$ .

Таким образом, ненулевыми в матрице  $B$  могут быть только элементы, стоящие ровно на одну клетку выше или ниже главной диагонали, притом матрица  $B$  кососимметрична. Это и есть утверждение, которое мы хотели доказать. ■

Доказательство следующей теоремы в точности повторяет её доказательство для трёхмерного случая, поэтому заново его здесь писать мы не будем.

**Теорема 2.53.** Пусть заданы гладкие функции  $k_1(s) > 0, \dots, k_{n-2}(s) > 0, k_{n-1}(s)$ . Тогда существует единственная  $(n-1)$ -регулярная кривая с точностью до движения пространства, для которых эти функции являются обобщёнными кривизнами.

## Про механические часы

Фраза из эпитафа связана с историей создания точных механических часов, рассказанной нам Александром Александровичем на семинаре.

*Циклоидой* называется кривая, которую описывает неподвижная точка на окружности, движущейся по прямой без проскальзывания.

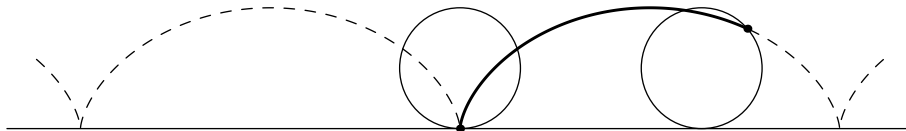


Рис. 2.4: Циклоида

В XVII веке голландский математик<sup>6</sup> Х. Гюйгенс описал устройство точных механических часов, конструкция которых основана на маятнике, который обладает постоянным периодом качения независимо от амплитуды. Это действительно важное свойство — период колебания маятника в часах не должен зависеть от силы, с которой заводят часы, или

от эффекта постепенного затухания колебаний. Как же может быть устроен такой маятник? Оказывается, конец его нити должен вырисовывать перевёрнутую «чашу циклоиды». Немного позже мы докажем, почему это действительно так, но сейчас зададимся вопросом, как же сделать такой *циклоидный маятник*.

Сначала выведем уравнение циклоиды. Примем за  $t = 0$  момент времени, когда точка окружности, движение которой мы отслеживаем, находится на прямой, по которой катится эта окружность. Предположим также, что окружность единичная, а её центр движется равномерно на единицу расстояния за единицу времени. Ясно, что все эти допущения не влияют существенно на уравнения, которые мы будем получать.

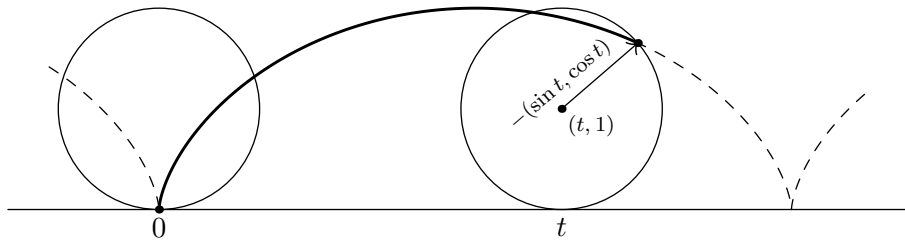


Рис. 2.5

Центр окружности в момент времени  $t$  находится в точке с координатами  $(t, 1)$ . Теперь представим, что окружность просто равномерно вращается с закреплённым центром. Тогда движение её граничной точки, конечно, будет описываться вектором  $-(\sin t, \cos t)$ . Собирая воедино движение центра и точки на границе, получаем искомые координаты в момент времени  $t$ :  $(t - \sin t, 1 - \cos t)$ . Однако далее мы всё время будем работать с «перевёрнутой» циклоидой, поэтому отразим её относительно горизонтальной прямой:

$$\mathbf{r}(t) = (t - \sin t, \cos t - 1).$$

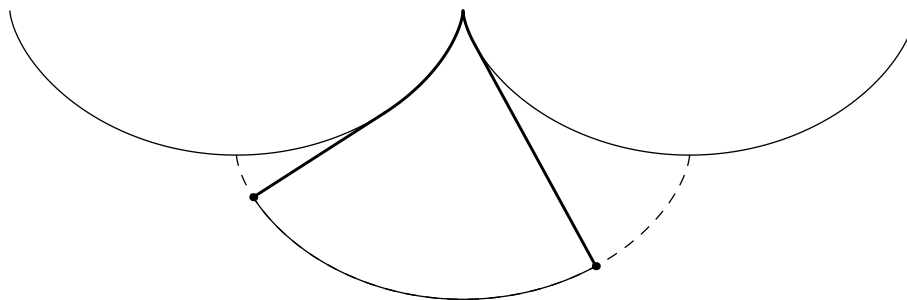


Рис. 2.6: Циклоидный маятник

Рассмотрим маятник, у которого нить закреплена в вершине между двумя чашами циклоид (рис. 2.6). Оказывается, свободный конец нити такого маятника будет вырисовывать циклоиду. Ясно, что на самом деле он будет вырисовывать кусок эвольвенты этой циклоиды (просто по определению). Так что утверждение сводится к следующей задаче.

**Задача 2.54.** Доказать, что одной из эвольвент циклоиды является конгруэнтная ей циклоида, сдвинутая таким образом, чтобы её «острия» перешли в вершины.

**Решение.** Уравнения эвольвент легко писать, если на исходной кривой введён натуральный параметр. В данном случае это не так, и перейти к натуральному параметру затруднительно. Однако можно заметить, что формулу (2.12) легко модифицировать и на случай

<sup>6</sup>Гюйгенс, конечно, был не только математиком, но ещё и физиком и философом, что, впрочем, не было исключением для того времени.



произвольного параметра:

$$\widehat{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{r}(t) - \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \int_{t_0}^t |\mathbf{r}'(\tau)| d\tau.$$

Действительно, мы просто везде выразили натуральный параметр  $s$  через какой-то произвольный параметр  $t$ . Вычисляем всё, что нужно, положив  $t_0 = \pi$  (так обнуляется константа в определённом интеграле).

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= (1 - \cos t, -\sin t), \\ |\mathbf{r}'(t)|^2 &= (1 - \cos t)^2 + \sin^2 t = 2(1 - \cos t) = 4 \sin^2 \frac{t}{2} \Rightarrow |\mathbf{r}'(t)| = 2 \sin \frac{t}{2}, \\ \int_{\pi}^t 2 \sin \frac{\tau}{2} d\tau &= 4 \int_{\pi}^t \sin \frac{\tau}{2} d\left(\frac{\tau}{2}\right) = -4 \cos \frac{t}{2} \Big|_{\pi}^t = -4 \cos \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

А теперь пишем, собственно, уравнение эвольвенты:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{r}}(t) &= (t - \sin t, \cos t - 1) - \frac{\mathbf{r}'\left(\sin \frac{t}{2}, -\sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}\right)}{2 \cdot \sin \frac{t}{2}} \cdot \left(-4 \cos \frac{t}{2}\right) = \\ &= (t - \sin t, \cos t - 1) + 2 \left(2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}, -2 \cos^2 \frac{t}{2}\right) = \\ &= (t - \sin t, \cos t - 1) + (2 \sin t, -2 - 2 \cos t) = (t + \sin t, -\cos t - 3). \end{aligned}$$

Итак, получили

$$\widehat{\mathbf{r}}(t) = (t + \sin t, -\cos t - 3) = ((t + \pi) - \sin(t + \pi), \cos(t + \pi) - 1) - (\pi, 2).$$

Видно, что это сдвинутая циклоида. Легко проверить, что она сдвинута именно так, как указано в условии. ■

Теперь мы можем доказать главное утверждение — что период колебания такого маятника не зависит от амплитуды. Сформулировано оно здесь так же, как в задачнике.

**Задача 2.55.** Доказать, что период колебаний материальной точки малой массы, движущейся по чаше перевёрнутой циклоиде без трения в поле силы тяжести, не зависит от её начального положения.

### 3. Двумерные поверхности в трёхмерном пространстве

Это яма, вырытая для нас  
великими предшественниками.

А. А. Гайфуллин

#### Криволинейные системы координат в $\mathbb{R}^n$

Рассмотрим область  $U$  пространства  $\mathbb{R}^n$  с декартовыми координатами  $(x^1, \dots, x^n)$ . Предположим, что в другом экземпляре пространства  $\mathbb{R}^n$  с координатами  $(u^1, \dots, u^n)$  задана область  $V$  и установлено взаимно однозначное соответствие между точками областей  $U$  и  $V$ . В этом случае для задания точки области  $U$  мы можем использовать набор чисел  $(u^1, \dots, u^n)$  — декартовы координаты соответствующей точки в области  $V$ .

**Определение 3.1.** Будем говорить, что  $(u^1, \dots, u^n)$  являются *криволинейными координатами* в области  $U$ , если:

(1) функции

$$x^i = x^i(u^1, \dots, u^n),$$

задающие биекцию между областями  $U$  и  $V$ , достаточно гладкие в области  $V$ ;

(2) якобиан  $J = \det \left( \frac{\partial x^i}{\partial u^j} \right)$  отличен от нуля в области  $V$  (*условие регулярности*);

По теореме об обратной функции (якобиан не равен нулю) существуют достаточно гладкие обратные отображения  $u^i = u^i(x^1, \dots, x^n)$ , причём якобиан  $\tilde{J} = \det \left( \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \right)$  отличен от нуля (он равен  $J^{-1}$ ).

В области  $U$  условия  $u^i = \text{const}$  определяют  $n$  семейств *координатных гиперповерхностей*. (Координатные гиперповерхности одного и того же семейства не пересекаются.)

Любые  $n - 1$  координатных гиперповерхностей, принадлежащих различным семействам, пересекаются по некоторой кривой. Такие кривые называют *координатными линиями*.

**Определение 3.2.** Система криволинейных координат, вектора скорости координатных линий которой перпендикулярны друг другу, называется *ортогональной*.

**Задача 3.3.** Для эллипсоидальной системы координат, определяемой равенствами

$$\begin{aligned} x_1^2 &= \frac{(a_1 - u_1)(a_1 - u_2)(a_1 - u_3)}{(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)}, \\ x_2^2 &= \frac{(a_2 - u_1)(a_2 - u_2)(a_2 - u_3)}{(a_3 - a_2)(a_1 - a_2)}, \\ x_3^2 &= \frac{(a_3 - u_1)(a_3 - u_2)(a_3 - u_3)}{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)}, \end{aligned}$$

где  $a_1 > a_2 > a_3 > 0$ ,  $u_1 < a_3 < u_2 < a_2 < u_3 < a_1$ ,

(1) найти координатные поверхности и координатные линии;

(2) посчитать определители  $\det \left( \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \right)$  и  $\det \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$  и установить, в каких точках пространства  $\mathbb{R}^3$  нарушается взаимная однозначность соответствия между криволинейными и прямоугольными декартовыми координатами;

(3) определить, является ли эта система координат ортогональной.

**Решение.**

(1) Фиксируем  $u_1 = \lambda$ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{x_1^2}{a_1 - \lambda} + \frac{x_2^2}{a_2 - \lambda} + \frac{x_3^2}{a_3 - \lambda} &= \frac{(a_1 - u_2)(a_1 - u_3)}{(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)} + \frac{(a_2 - u_2)(a_2 - u_3)}{(a_3 - a_2)(a_1 - a_2)} + \\ &+ \frac{(a_3 - u_2)(a_3 - u_3)}{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)} = \frac{1}{(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)} \left( (a_3 - a_2)(a_1 - u_2)(a_1 - u_3) + \right. \\ &\left. + (a_1 - a_3)(a_2 - u_2)(a_2 - u_3) + (a_2 - a_1)(a_3 - u_2)(a_3 - u_3) \right) = \varphi(u_2, u_3). \end{aligned}$$

При этом  $\varphi = Au_2 + Bu_3 + Cu_2u_3 + D$ . Нетрудно убедиться, что все коэффициенты, кроме  $D$ , нулевые, а  $D$  равен 1. Например, для коэффициента при  $u_2$  имеем

$$\begin{aligned} (\dots) \cdot A &= (a_1a_2 - a_1a_3) + (a_2a_3 - a_1a_2) + (a_1a_3 - a_2a_3) = \\ &= \cancel{(a_1a_2 - a_1a_2)} + \cancel{(a_2a_3 - a_2a_3)} + \cancel{(a_3a_1 - a_3a_1)} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда,  $\varphi \equiv 1$ . Итак, имеем координатные поверхности

$$\frac{x_1^2}{a_1 - \lambda} + \frac{x_2^2}{a_2 - \lambda} + \frac{x_3^2}{a_3 - \lambda} = 1,$$

представляющие собой эллипсоиды.

Для остальных координат всё аналогично. Фиксируя  $u_2 = \mu$ , получаем семейство однополостных гиперболоидов:

$$\frac{x_1^2}{a_1 - \mu} + \frac{x_2^2}{a_2 - \mu} - \frac{x_3^2}{\mu - a_3} = 1.$$

(Формула та же, но  $a_3 < \mu$ .) Для фиксированного  $u_3 = \nu$  получаем семейство двуполостных гиперболоидов:

$$\frac{x_1^2}{a_1 - \nu} - \frac{x_2^2}{\nu - a_2} - \frac{x_3^2}{\nu - a_3} = 1.$$

(2) Найдём, например, производную  $\partial x_1 / \partial u_2$ :

$$\begin{aligned} x_1(u_2) &= \sqrt{\frac{(a_1 - u_1)(a_1 - u_2)(a_1 - u_3)}{(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)}} = \sqrt{\frac{(a_1 - u_1)(a_1 - u_3)}{(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)}} \cdot \sqrt{a_1 - u_2}, \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2} &= \sqrt{\frac{(a_1 - u_1)(a_1 - u_3)}{(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)}} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{a_1 - u_2}} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{(a_1 - u_1)(a_1 - u_3)}{(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_1 - u_2)}}. \end{aligned}$$

Отсюда понятен общий вид выражения  $\partial x_i / \partial u_j$ . Считаем определитель:

$$\begin{aligned}
 \det \left( \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \right) &= \\
 &= -\frac{1}{8} \det \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{(a_1-u_2)(a_1-u_3)}{(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_1-u_1)}} & \sqrt{\frac{(a_1-u_1)(a_1-u_3)}{(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_1-u_2)}} & \sqrt{\frac{(a_1-u_1)(a_1-u_2)}{(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_1-u_3)}} \\ \sqrt{\frac{(a_2-u_2)(a_2-u_3)}{(a_1-a_2)(a_3-a_2)(a_2-u_1)}} & \sqrt{\frac{(a_2-u_1)(a_2-u_3)}{(a_1-a_2)(a_3-a_2)(a_2-u_2)}} & \sqrt{\frac{(a_2-u_1)(a_2-u_2)}{(a_1-a_2)(a_3-a_2)(a_2-u_3)}} \\ \sqrt{\frac{(a_3-u_2)(a_3-u_3)}{(a_1-a_3)(a_2-a_3)(a_3-u_1)}} & \sqrt{\frac{(a_3-u_1)(a_3-u_3)}{(a_1-a_3)(a_2-a_3)(a_3-u_2)}} & \sqrt{\frac{(a_3-u_1)(a_3-u_2)}{(a_1-a_3)(a_2-a_3)(a_3-u_3)}} \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)} \det \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{(a_1-u_2)(a_1-u_3)}{a_1-u_1}} & \sqrt{\frac{(a_1-u_1)(a_1-u_3)}{a_1-u_2}} & \sqrt{\frac{(a_1-u_1)(a_1-u_2)}{a_1-u_3}} \\ \sqrt{\frac{(a_2-u_2)(a_2-u_3)}{a_2-u_1}} & \sqrt{\frac{(a_2-u_1)(a_2-u_3)}{a_2-u_2}} & \sqrt{\frac{(a_2-u_1)(a_2-u_2)}{a_2-u_3}} \\ \sqrt{\frac{(a_3-u_2)(a_3-u_3)}{a_3-u_1}} & \sqrt{\frac{(a_3-u_1)(a_3-u_3)}{a_3-u_2}} & \sqrt{\frac{(a_3-u_1)(a_3-u_2)}{a_3-u_3}} \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)} \sqrt{-\prod_{i,j=1}^3 (a_i - u_j)} \cdot \det \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1-u_1} & \frac{1}{a_1-u_2} & \frac{1}{a_1-u_3} \\ \frac{1}{a_2-u_1} & \frac{1}{a_2-u_2} & \frac{1}{a_2-u_3} \\ \frac{1}{a_3-u_1} & \frac{1}{a_3-u_2} & \frac{1}{a_3-u_3} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Чтобы вычислить оставшийся определитель, вычтем первую строку из двух других:

$$\begin{aligned}
 \det \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1-u_1} & \frac{1}{a_1-u_2} & \frac{1}{a_1-u_3} \\ \frac{1}{a_2-u_1} & \frac{1}{a_2-u_2} & \frac{1}{a_2-u_3} \\ \frac{1}{a_3-u_1} & \frac{1}{a_3-u_2} & \frac{1}{a_3-u_3} \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1-u_1} & \frac{1}{a_1-u_2} & \frac{1}{a_1-u_3} \\ \frac{a_1-u_1}{(a_1-u_1)(a_2-u_1)} & \frac{a_1-u_2}{(a_1-u_2)(a_2-u_2)} & \frac{a_1-u_3}{(a_1-u_3)(a_2-u_3)} \\ \frac{a_1-u_1}{(a_1-u_1)(a_3-u_1)} & \frac{a_1-u_2}{(a_1-u_2)(a_3-u_2)} & \frac{a_1-u_3}{(a_1-u_3)(a_3-u_3)} \end{pmatrix} = \\
 &= (a_1-a_2)(a_1-a_3) \cdot \det \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1-u_1} & \frac{1}{a_1-u_2} & \frac{1}{a_1-u_3} \\ \frac{1}{(a_1-u_1)(a_2-u_1)} & \frac{1}{(a_1-u_2)(a_2-u_2)} & \frac{1}{(a_1-u_3)(a_2-u_3)} \\ \frac{1}{(a_1-u_1)(a_3-u_1)} & \frac{1}{(a_1-u_2)(a_3-u_2)} & \frac{1}{(a_1-u_3)(a_3-u_3)} \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}{(a_1-u_1)(a_1-u_2)(a_1-u_3)} \det \begin{pmatrix} \frac{1}{a_2-u_1} & \frac{1}{a_2-u_2} & \frac{1}{a_2-u_3} \\ \frac{1}{a_3-u_1} & \frac{1}{a_3-u_2} & \frac{1}{a_3-u_3} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Здесь вычтем первый столбец из двух остальных:

$$\begin{aligned}
 \det \begin{pmatrix} \frac{1}{a_2-u_1} & \frac{1}{a_2-u_2} & \frac{1}{a_2-u_3} \\ \frac{1}{a_3-u_1} & \frac{1}{a_3-u_2} & \frac{1}{a_3-u_3} \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} \frac{1}{a_2-u_1} & 0 & 0 \\ \frac{u_1-u_2}{(a_2-u_2)(a_2-u_1)} & \frac{u_1-u_3}{(a_2-u_3)(a_2-u_1)} & \frac{u_1-u_2}{(a_2-u_2)(a_2-u_3)} \\ \frac{u_1-u_2}{(a_3-u_2)(a_3-u_1)} & \frac{u_1-u_3}{(a_3-u_3)(a_3-u_1)} & \frac{u_1-u_2}{(a_3-u_2)(a_3-u_3)} \end{pmatrix} = \\
 &= \det \begin{pmatrix} \frac{u_1-u_2}{(a_2-u_2)(a_2-u_1)} & \frac{u_1-u_3}{(a_2-u_3)(a_2-u_1)} \\ \frac{u_1-u_2}{(a_3-u_2)(a_3-u_1)} & \frac{u_1-u_3}{(a_3-u_3)(a_3-u_1)} \end{pmatrix} = \frac{(u_1-u_2)(u_1-u_3)}{(a_2-u_1)(a_3-u_1)} \det \begin{pmatrix} \frac{1}{a_2-u_2} & \frac{1}{a_2-u_3} \\ \frac{1}{a_3-u_2} & \frac{1}{a_3-u_3} \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{(u_1-u_2)(u_1-u_3)}{(a_2-u_1)(a_3-u_1)} \left( \frac{1}{(a_2-u_2)(a_3-u_3)} - \frac{1}{(a_3-u_2)(a_2-u_3)} \right) = \\
 &= \frac{(u_1-u_2)(u_1-u_3)(u_2-u_3)(a_3-a_2)}{(a_2-u_1)(a_3-u_1)(a_2-u_2)(a_3-u_3)(a_3-u_2)(a_2-u_3)}.
 \end{aligned}$$

Подставляем результат в промежуточную формулу:

$$\begin{aligned}
 &\frac{(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)}{8 \sqrt{-\prod_{i,j=1}^3 (a_i - u_j)}} (u_1-u_2)(u_2-u_3)(u_3-u_1). \\
 &\quad - \prod_{i,j=1}^3 (a_i - u_j)
 \end{aligned}$$

И, наконец, пишем ответ:

$$\det \left( \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \right) = \frac{(u_1-u_2)(u_2-u_3)(u_3-u_1)}{8 \sqrt{-\prod_{i,j=1}^3 (a_i - u_j)}}.$$

Взаимная однозначность координат нарушается в точках, где якобиан равен 0. Как видно из выведенной нами формулы, это происходит при  $u_i = u_j$  (для каких-то  $i \neq j$ ). Однако по условию  $u_1 < u_2 < u_3$ , так что в выбранной области эллипсоидальные координаты взаимно однозначны.

- (3) Из полученных уравнений координатных поверхностей видно, что они образуют квадратики, являющиеся телами вращения софокусных эллипсов и гипербол. А как известно из курса аналитической геометрии, софокусные эллипс и гипербола перпендикулярны друг другу. (А софокусные друг другу эллипсы не пересекаются, как и софокусные друг другу гиперболы.) Значит, и координатные линии, получающиеся как пересечения таких координатных поверхностей, перпендикулярны друг другу. Так что данная система координат является ортогональной. ■

### Риманова метрика в криволинейных координатах

Функции  $x^i = x^i(u^1, \dots, u^n)$  удобно рассматривать одновременно для всех  $i = 1, \dots, n$ , используя для этого вектор-функцию

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, \dots, u^n), \text{ где } \mathbf{r} = (x^1, \dots, x^n).$$

Векторы  $\mathbf{r}_i := \partial \mathbf{r} / \partial u^i$  имеют направления касательных к координатным линиям, так что в каждой точке области  $U$  они линейно независимы. Они определяют в окрестности некоторой точки  $(u^1, \dots, u^n)$  малый вектор  $d\mathbf{r} = \mathbf{r}_i du^i$ . Квадрат его длины, выраженный в криволинейных координатах, определяет метрику:

$$ds^2 = \langle d\mathbf{r}, d\mathbf{r} \rangle = \langle \mathbf{r}_i du^i, \mathbf{r}_j du^j \rangle = g_{ij} du^i du^j,$$

где  $g_{ij} = \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j \rangle$  — элементы матрицы Грама векторов  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$ . При переходе к другим координатам  $\tilde{u}^1, \dots, \tilde{u}^n$  матрица Грама преобразуется так, как и положено преобразовываться матрице квадратичной формы (по тензорному закону):

$$(3.1) \quad \tilde{g}_{ij} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tilde{u}^i}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tilde{u}^j} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^k} \frac{\partial u^k}{\partial \tilde{u}^i}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^l} \frac{\partial u^l}{\partial \tilde{u}^j} \right\rangle = \frac{\partial u^k}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^l}{\partial \tilde{u}^j} g_{kl}.$$

**Определение 3.4.** Говорят, что в области  $U \subset \mathbb{R}^n$  задана *риманова метрика*, если для любой криволинейной системы координат  $(u^1, \dots, u^n)$  в  $U$  задана матрица  $g_{ij}(u)$ , которая:

- (1) симметрична:  $g_{ij}(u) = g_{ji}(u)$ ;
- (2) невырожденна и положительно определена;
- (3) при замене координат изменяется по формулам (3.1).

**Задача 3.5.** Записать евклидову метрику в цилиндрической системе координат.

**Решение.** Запишем дифференциалы евклидовых координат:

$$dx = d(\rho \cos \varphi) = \cos \varphi d\rho - \rho \sin \varphi d\varphi, \quad dy = d(\rho \sin \varphi) = \sin \varphi d\rho + \rho \cos \varphi d\varphi, \quad dz = dh.$$

Подставляем их в запись евклидовой метрики:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 = (\cos \varphi d\rho - \rho \sin \varphi d\varphi)^2 + (\sin \varphi d\rho + \rho \cos \varphi d\varphi)^2 + dh^2 = \\ &= \underbrace{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}_{=1} d\rho^2 - \underbrace{\rho \sin(2\varphi)}_{=1} d\rho d\varphi + \rho^2 \underbrace{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}_{=1} d\varphi^2 + \\ &\quad + \rho \sin(2\varphi) d\rho d\varphi + dh^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dh^2. \end{aligned}$$

Пусть имеем параметризованную кривую  $\mathbf{r}(t)$  в криволинейных координатах  $(u^1, \dots, u^n)$  с римановой метрикой, заданной матрицей  $G = g_{ij}$ . Измеряем длину кривой, заметаемой при изменении параметра от  $a$  до  $b$ :

$$(3.2) \quad \ell = \int_a^b \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt = \int_a^b \sqrt{\left\langle \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\rangle} dt = \int_a^b \sqrt{\frac{ds^2}{(dt)^2}} dt = \int_a^b \sqrt{g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}} dt.$$

**Задача 3.6.** Проверить, что матрица

$$\mathcal{G}(u, v) = \frac{1}{1 - u^2 - v^2} \begin{pmatrix} 1 - v^2 & uv \\ uv & 1 - u^2 \end{pmatrix}$$

задаёт риманову метрику в единичном круге на плоскости с координатами  $(u, v)$ . Вычислить в этой метрике длину кривой  $u^2 + v^2 = a^2$ , где  $0 < a < 1$ .

**Доказательство.** Нужно проверить лишь то, что матрица  $G$  невырождена и положительно определена, для этого можно воспользоваться критерием Сильвестра. Для минора  $1 \times 1$  всё очевидно, остаётся проверить знак определителя всей матрицы  $2 \times 2$ :

$$\det \mathcal{G} = \frac{(1 - v^2)(1 - u^2) - u^2 v^2}{1 - u^2 - v^2} = \frac{1 - u^2 - v^2}{1 - u^2 - v^2} = 1.$$

Если параметризовать нашу кривую как  $\mathbf{r}(t) = (u(t), v(t))$ , где  $u(t) = a \cos t$ ,  $v(t) = a \sin t$  (где  $t$  меняется от 0 до  $2\pi$ ), то длина вычисляется по формуле (3.2):

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{\begin{pmatrix} \dot{u}(t) & \dot{v}(t) \end{pmatrix} \mathcal{G} \begin{pmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix}} dt.$$

Подставляем:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \sqrt{\begin{pmatrix} -a \sin t & a \cos t \end{pmatrix} \cdot \left( \frac{1}{1 - a^2} \begin{pmatrix} 1 - a^2 \sin^2 t & a^2 \sin t \cos t \\ a^2 \sin t \cos t & 1 - a^2 \cos^2 t \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \end{pmatrix}} dt = \\ & = \int_0^{2\pi} \sqrt{\begin{pmatrix} -a \sin t & a \cos t \end{pmatrix} \cdot \left( \frac{1}{1 - a^2} \begin{pmatrix} -a \sin t (1 - a^2) \\ a \cos t (1 - a^2) \end{pmatrix} \right)} dt = \\ & = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 (\cos^2 t + \sin^2 t)} dt = \int_0^{2\pi} a dt = 2\pi a. \end{aligned}$$

■

Правильно думать, что матрица  $\mathcal{G}(u^1, \dots, u^n)$  (как матрица Грама линейно независимых векторов) симметрична и положительно определена, а потому задаёт скалярное произведение (своё в каждой точке области  $U \subset \mathbb{R}^n$ ). В криволинейной системе координат  $(u^1, \dots, u^n)$  мы работаем именно в этом скалярном произведении. Например, можем считать длины кривых (что уже было продемонстрировано) или углы между кривыми.

**Задача 3.7.** Найти угол между кривыми  $v = 2u + 1$  и  $v = -2u + 1$  на плоскости с координатами  $(u, v)$  с метрикой

$$ds^2 = 2 du^2 + 2 du dv + 4 dv^2.$$

**Решение.** Данная в условии метрика задаётся матрицей

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Параметризуем обе эти кривые:  $\mathbf{r}_1(t) = (t, 2t + 1)$ ,  $\mathbf{r}_2(t) = (t, -2t + 1)$ . Они пересекаются в единственной точке  $(0, 1)$  при  $t = 0$ . Вектора скорости этих кривых в данной точке есть  $\mathbf{v}_1 = (1, 2)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (1, -2)$ . Находим угол между этими векторами по формуле:

$$\cos \angle(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle_{\mathcal{G}}}{\sqrt{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle_{\mathcal{G}}} \cdot \sqrt{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle_{\mathcal{G}}}} = \frac{-14}{\sqrt{22} \cdot \sqrt{14}} = -\sqrt{\frac{7}{11}}.$$

Отсюда получаем  $\angle(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \arccos \sqrt{\frac{7}{11}}$ . ■

### Определение поверхности. Локальные координаты

Наиболее наглядными и интересными с геометрической точки зрения для нас будут двумерные поверхности в  $\mathbb{R}^3$ , поэтому повествование будет строиться именно вокруг них.

**Определение 3.8.** *Простым куском поверхности* в  $\mathbb{R}^3$  называется подмножество в  $\mathbb{R}^3$ , гомеоморфное единичному кругу.

**Определение 3.9.** Если  $\mathcal{M}$  — простой кусок поверхности, то любой гомеоморфизм  $\mathbf{r}: \Omega \rightarrow \mathcal{M}$ , где  $\Omega$  — некоторая плоская область, гомеоморфная единичному кругу, называется *параметризацией* куска  $\mathcal{M}$ . Параметризация называется *гладкой*, если таково отображение  $\mathbf{r}$ . Она называется *регулярной*, если область  $\Omega$  имеет кусочно-гладкую границу и ранг матрицы дифференциала отображения  $\mathbf{r}$  равен двум во всех точках области  $\Omega$ .

**Определение 3.10.** Простой кусок поверхности называется *гладким*, если он допускает регулярную параметризацию.

*Гладкой поверхностью* в  $\mathbb{R}^3$  будем называть любое подмножество  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$  такое, что для любой точки  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  пересечение  $\mathcal{M} \cap \bar{B}_\varepsilon(\mathbf{x})$  множества  $\mathcal{M}$  с некоторым замкнутым шаром с центром в точке  $\mathbf{x}$  либо пусто, либо является гладким простым куском поверхности.

Любой гладкий простой кусок поверхности, содержащийся в  $\mathcal{M}$ , будем называть *куском* поверхности  $\mathcal{M}$ .

**Определение 3.11.** Точка  $\mathbf{x}$  простого куска поверхности  $\mathcal{M}$  называется для него *внутренней*, если она соответствует внутренней точке области  $\Omega$  при некоторой параметризации  $\Omega \rightarrow \mathcal{M}$ . В противном случае она называется *граничной*.

**Предложение 3.12.** Данное выше определение внутренней точки простого куска поверхности корректно, то есть не зависит от параметризации.

**Доказательство.** Пусть  $\mathbf{r}_1: \Omega_1 \rightarrow \mathcal{M}$  и  $\mathbf{r}_2: \Omega_2 \rightarrow \mathcal{M}$  — две параметризации простого куска поверхности  $\mathcal{M}$ , точка  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$  соответствует некоторой внутренней точке области  $\Omega_1$ . Так как отображение  $\mathbf{r}_1$  является гомеоморфизмом, то у точки  $\mathbf{x}$  есть окрестность, гомеоморфная открытому диску. Но тогда и у прообраза точки  $\mathbf{x}$  при гомеоморфизме  $\mathbf{r}_2$  тоже есть окрестность, гомеоморфная открытому диску. ■

**Определение 3.13.** Точка  $\mathbf{x}$  гладкой поверхности  $\mathcal{M}$  называется для этой поверхности *внутренней*, если для некоторого шара  $\bar{B}_\varepsilon(\mathbf{x})$  она является внутренней точкой простого куска  $\mathcal{M} \cap \bar{B}_\varepsilon(\mathbf{x})$ . В противном случае она называется *граничной*. Множество все граничных точек поверхности называется её *краем* и обозначается через  $\partial \mathcal{M}$ .

**Предложение 3.14.** Край поверхности либо пуст, либо состоит из не более чем счётного числа жордановых кривых. (Напомним, что замкнутой или незамкнутой *жордановой кривой* называется образ вложения окружности или отрезка соответственно.)

**Доказательство.** Сразу следует из определения гомеоморфизма. ■

Достаточно малая окрестность каждой точки поверхности является простым куском, на котором посредством параметризации появляется криволинейная система координат. Мы

будем называть такие координаты *локальными координатами* на этом простом куске. Если в некоторой области заданы две локальные системы координат, то функции, выражающие одни через другие, мы будем называть *функциями перехода*.

**Предложение 3.15.** В окрестности внутренней точки  $\mathbf{x}_0$  гладкая поверхность в  $\mathbb{R}^3$  может быть задана (без ограничения общности) уравнением вида

$$z = f(x, y),$$

где  $f$  — некоторая гладкая функция. В этой окрестности любые другие локальные координаты выражаются через  $(x, y)$  гладкими функциями.

**Доказательство.** Пусть  $(u, v)$  — локальные координаты в окрестности точки  $\mathbf{x}_0$ , соответствующие некоторой регулярной параметризации  $\mathbf{r}$ . Тогда матрица

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r^1}{\partial u} & \frac{\partial r^2}{\partial u} & \frac{\partial r^3}{\partial u} \\ \frac{\partial r^1}{\partial v} & \frac{\partial r^2}{\partial v} & \frac{\partial r^3}{\partial v} \end{pmatrix}$$

имеет ранг 2. Без ограничения общности можем считать, что невырожден минор  $2 \times 2$  слева. По теореме об обратной функции координаты  $u, v$  в окрестности точки  $\mathbf{x}_0$  можно выразить на данной поверхности через  $x, y$  гладкими функциями:  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$ . Получим, что в этой окрестности поверхность задаётся уравнением  $z = r^3(u(x, y), v(x, y))$ . ■

**Лемма 3.16.** В достаточно малых окрестностях всегда можно выбрать гладкие функции перехода между любыми локальными координатами.

**Доказательство.** В доказательстве предложения 3.15 упоминалось, что для любых локальных координат  $u$  и  $v$  в некоторой области на поверхности можно построить, не ограничивая общности, гладкие функции  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$ . Пусть в области заданы две локальные системы координат —  $(u, v)$  и  $(\tilde{u}, \tilde{v})$ . В, возможно меньшей, области можно выразить координаты  $u$  и  $v$  гладко через  $x$  и  $y$ , а последние — гладко через  $\tilde{u}$  и  $\tilde{v}$ . ■

**Следствие 3.17.** Пусть  $I \subset \mathbb{R}$  — промежуток, отображение  $\rho: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  задаёт кривую в  $\mathbb{R}^3$ , причём  $\text{Im } \rho \subset \mathcal{M}$ , где  $\mathcal{M}$  — гладкая поверхность в  $\mathbb{R}^3$ . Тогда для любой точки  $\mathbf{x}_0 \in I$  и любой регулярной параметризации  $\mathbf{r}(u, v)$  поверхности  $\mathcal{M}$  в окрестности точки  $\rho(\mathbf{x}_0)$  найдутся гладкие функции  $\varphi, \psi: I \rightarrow \mathbb{R}$  такие, что в этой окрестности точки  $\mathbf{x}_0$  следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} I \subset \mathbb{R} & & \\ \downarrow \varphi \times \psi & \searrow \rho & \\ \Omega \subset \mathbb{R}^2 & \nearrow \mathbf{r} & \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3 \end{array}$$

**Доказательство.** Поскольку любая пара локальных координат выражается через любую другую гладкими функциями, справедливость утверждения достаточно установить для какой-либо одной параметризации. Но для параметризации, заданной парой (каких-то) евклидовых координат, утверждение очевидно. ■

Это значит, что любая кривая на поверхности может быть в окрестности каждой своей точки запараметризована в локальных координатах:  $\rho(t) = (u(t), v(t))$ .

**Предложение 3.18.** Множество точек  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$  образует регулярную поверхность тогда и только тогда, когда для каждой точки  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$  существует такая окрестность  $U \subset \mathbb{R}^3$



этой точки, что в этой окрестности множество  $\mathcal{M}$  задаётся как множество нулей гладкой функции  $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ , и все точки из  $\mathcal{M}$  регулярные.

Напомним, что точка  $\mathbf{x}$  *регулярна* для отображения  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $m \leq n$ , если  $\text{rk } J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = m$ .

**Доказательство.** Здесь нам будет удобно доказывать равносильность с локальным заданием в виде графика функции.

$\Rightarrow$ . Возьмём локально  $F(x, y, z) = z - f(x, y)$ . При этом

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 1,$$

так что точки взятой окрестности регулярны для  $F$ .

$\Leftarrow$ . Предположим теперь, что в окрестности точки  $(x_0, y_0, z_0)$  задана функция  $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ , множество нулей которой состоит из регулярных точек. Без ограничения общности можем считать, что

$$\left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} \neq 0.$$

Тогда по теореме о неявной функции существует функция  $f$ , определённая в окрестности точки  $(x_0, y_0)$ , и такая область  $U' \subset U$ , что  $F(x, y, z) = 0$  при  $(x, y, z) \in U'$  тогда и только тогда, когда  $z = f(x, y)$ . ■

## Поверхности как двумерные многообразия

Рассмотрим гладкую кривую, лежащую на поверхности  $\mathcal{M}$ . Согласно следствию 3.17, она может быть задана в локальных координатах как отображение  $I \rightarrow \mathcal{M}$ :

$$t \mapsto \mathbf{r}(u(t), v(t)).$$

Её вектор скорости равен

$$\frac{d\mathbf{r}(u(t), v(t))}{dt} = \mathbf{r}_u \dot{u} + \mathbf{r}_v \dot{v}.$$

Более того, любой вектор вида  $\boldsymbol{\xi} = \xi^1 \mathbf{r}_u(u_0, v_0) + \xi^2 \mathbf{r}_v(u_0, v_0)$  является вектором скорости некоторой кривой на поверхности. Например, можно взять кривую, имеющую в локальных координатах вид

$$u = u_0 + \xi^1 t, \quad v = v_0 + \xi^2 t.$$

Такие векторы называются *касательными* в точке  $\mathbf{r}(u_0, v_0) \in \mathcal{M}$ .

**Определение 3.19.** Касательные векторы в каждой точке  $\mathbf{x}$  поверхности  $\mathcal{M}$  образуют линейное пространство, которое называется *касательным пространством* к поверхности в этой точке и обозначается  $\mathcal{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$ .

**Пример 3.20.** Если поверхность задана уравнением  $F(x, y, z) = 0$ , то её касательное пространство состоит из векторов, перпендикулярных градиенту  $\text{grad } F$  (см. напомним из аналитической геометрии).

На регулярной поверхности  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$  можно рассмотреть открытое покрытие внутренностями малых кусков этой поверхности. Согласно теореме Линделёфа<sup>7</sup>, такая поверхность покрывается не более чем счётным набором этих кусков:  $\mathcal{M} = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ , причём

- (1) на каждом куске  $U_{\alpha}$  можно ввести локальные координаты  $(u_{\alpha}^1, u_{\alpha}^2)$ ;
- (2) локальные координаты  $(u_{\alpha}^1, u_{\alpha}^2)$  принимают значения в некоторой области  $V_{\alpha} \subset \mathbb{R}^2$ , и каждой точке из области  $V_{\alpha}$  соответствует в точности одна точка из куска  $U_{\alpha}$ ;

<sup>7</sup>Если топологическое пространство обладает не более чем счётной базой, то из всякого открытого покрытия этого пространства можно выделить не более чем счётное подпокрытие.

- (3) в пересечении  $U_\alpha \cap U_\beta$  локальные координаты  $(u_\alpha^1, u_\alpha^2)$  и  $(u_\beta^1, u_\beta^2)$  связаны взаимно обратными гладкими отображениями — заменами координат

$$u_\alpha^i = u_\alpha^i(u_\beta^1, u_\beta^2), \quad u_\beta^j = u_\beta^j(u_\alpha^1, u_\alpha^2), \quad i, j = 1, 2,$$

с ненулевыми якобианами:

$$\det \left( \frac{\partial u_\alpha^i}{\partial u_\beta^j} \right) \neq 0, \quad \det \left( \frac{\partial u_\beta^i}{\partial u_\alpha^j} \right) \neq 0.$$

Теперь мы можем перенести на случай регулярных поверхностей некоторые определения из анализа:

- (а) *областью* на поверхности  $\mathcal{M}$  называется такое множество точек  $U \subset \mathcal{M}$ , что координаты  $(u_\alpha^1, u_\alpha^2)$  точек из пересечения множества  $U$  с любой картой  $U_\alpha$ , заполняют область в  $\mathbb{R}^2$ ;
- (б) любая область  $U$ , содержащая точку  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ , называется *окрестностью* точки  $\mathbf{x}$ ;
- (в) функция  $\mathbf{f}: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^m$  называется *гладкой*, если в каждой карте  $U_\alpha$  она задаётся как гладкая функция локальных координат  $(u_\alpha^1, u_\alpha^2)$ ;
- (г) отображение поверхностей  $\mathbf{f}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  называется *гладким*, если всюду в локальных координатах оно задаётся гладкими функциями

$$(u, v) \mapsto (\tilde{u}(u, v), \tilde{v}(u, v)),$$

где  $(u, v)$  — локальные координаты на  $\mathcal{M}$ , а  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  — локальные координаты на  $\mathcal{N}$ ;

- (д) отображение поверхностей  $\mathbf{f}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  называется *диффеоморфизмом*, если оно биективное и гладкое вместе со своим обратным.

Из леммы 3.16 и теоремы о дифференцируемости сложной функции вытекает, что гладкость функции на поверхности в точке  $\mathbf{x}_0$  достаточно проверить в какой-либо одной локальной системе координат в окрестности  $\mathbf{x}_0$ . В частности, получаем корректность определения гладкой функции на поверхности. Определение гладкого отображения поверхностей корректно по тем же причинам, что и определение гладкой функции на поверхности.

**Определение 3.21.** Совокупность областей  $U_\alpha$ , удовлетворяющих свойствам 1 — 3 называется *атласом поверхности*, а сами области  $U_\alpha$  называются *картами*.

Заметим, что регулярные поверхности в  $\mathbb{R}^3$  обладают дополнительным свойством хаусдорфовости:

- (4) для любой пары различных точек  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  на поверхности существуют их окрестности  $U_\mathbf{x}$  и  $U_\mathbf{y}$ , которые не пересекаются:

$$U_\mathbf{x} \cap U_\mathbf{y} = \emptyset, \quad \mathbf{x} \in U_\mathbf{x}, \quad \mathbf{y} \in U_\mathbf{y}.$$

**Определение 3.22.** Совокупность точек, для которой задан атлас, удовлетворяющий условиям (1) — (4), называется *двумерным гладким многообразием*.

Напомним, что касательным вектором  $\xi$  в точке  $\mathbf{x}_0$  поверхности мы называли вектор скорости гладкой кривой  $\mathbf{r}(t)$  в точке  $\mathbf{x}_0$ :

$$\xi = \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{t_0}, \quad \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{x}_0.$$

В разных координатах он записывается по-разному. Если точка  $\mathbf{x}_0$  лежит в пересечении двух карт  $U_\alpha$  и  $U_\beta$  и в координатах  $(u_\alpha^1, u_\alpha^2)$  мы имеем

$$\xi_\alpha = (\dot{u}_\alpha^1, \dot{u}_\alpha^2),$$

то по теореме о производной сложной функции в координатах  $(u_\beta^1, u_\beta^2)$  этот же касательный вектор записывается как

$$\xi_\beta = \left( \frac{du_\beta^1(u_\alpha^1(t), u_\alpha^2(t))}{dt}, \frac{du_\beta^2(u_\alpha^1(t), u_\alpha^2(t))}{dt} \right) = \left( \frac{\partial u_\beta^1}{\partial u_\alpha^i} \dot{u}_\alpha^i, \frac{\partial u_\beta^2}{\partial u_\alpha^i} \dot{u}_\alpha^i \right).$$

Это значит, что для касательных векторов к поверхности выполнен тензорный закон: при заменах координат они меняются так, как и положено меняться векторам.

**Определение 3.23.** Если  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^m$  — гладкая функция на поверхности  $\mathcal{M}$ , то её дифференциал в точке  $x \in \mathcal{M}$  — это линейная функция  $df|_x$  на касательной плоскости  $\mathcal{T}_x \mathcal{M}$ , определяемая как

$$df|_x(\xi) := \xi^i \frac{\partial f}{\partial u^i}(x).$$

Таким образом, мы можем придать смысл выражениям  $du$  и  $dv$ . Они задают линейные функции на касательном пространстве, причём  $(du)(r_u) = (dv)(r_v) = 1$ ,  $(du)(r_v) = (dv)(r_u) = 0$ . Так что дифференциалы  $(du, dv)$  задают двойственный к  $(r_u, r_v)$  базис пространства, двойственного к касательному (его часто называют *кокасательным*).

**Предложение 3.24.** Пусть имеем гладкое отображение поверхностей  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ . Тогда

$$\text{Im } df|_x \subset \mathcal{T}_{f(x)} \mathcal{N}.$$

**Доказательство.** Пусть касательный вектор  $\xi \in \mathcal{T}_x \mathcal{M}$  является вектором скорости кривой  $\gamma = \gamma(t)$  в точке  $t = 0$ . Тогда

$$df|_x(\xi) = \dot{\gamma}^i(0) \frac{\partial f}{\partial u^i}(x) = \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(0) \in \mathcal{T}_{f(x)} \mathcal{N}.$$

■

Смысл последнего предложения в том, что дифференциал гладкого отображения гладких поверхностей в каждой точке можно воспринимать как линейное отображение соответствующих касательных пространств.

### Риманова метрика на поверхностях

В окрестности каждой точки поверхности можно ввести локальные криволинейные координаты. Они, как обсуждалось выше, задают риманову метрику. На пересечениях атласов гладкие функции перехода дают согласованность между атласами. Таким образом, получаем естественное определение римановой метрики на поверхности.

Пусть на поверхности  $r(u, v)$  задана кривая  $(u(t), v(t))$ . Вектор скорости есть

$$(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = r_u \dot{u} + r_v \dot{v},$$

где

$$\dot{x} = x_u \dot{u} + x_v \dot{v}, \quad \dot{y} = y_u \dot{u} + y_v \dot{v}, \quad \dot{z} = z_u \dot{u} + z_v \dot{v}.$$

Длина (фрагмента) этой кривой равна

$$\ell = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt.$$

Подставляя в подынтегральное выражение формулы для  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  и  $\dot{z}$ , получаем

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2,$$

где

$$\begin{aligned} E &= \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \\ F &= \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \\ G &= \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2. \end{aligned}$$

Для использования нотации Эйнштейна коэффициенты  $E$ ,  $F$  и  $G$  можно обозначать через матрицу Грама

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} = \mathcal{G},$$

а координаты  $u$  и  $v$  — через  $u^1$  и  $u^2$ .

**Определение 3.25.** Выражение

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

называется *первой квадратичной формой* (или *римановой метрикой*) на поверхности. Здесь коэффициенты матрицы  $\mathcal{G} := (g_{ij})$ , вообще говоря, зависят от координат  $u$  и  $v$ .

В каждой точке поверхности эта форма задаёт на касательном пространстве евклидово скалярное произведение:

$$\xi = \xi^i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}, \quad \eta = \eta^j \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j} \rightsquigarrow \langle \xi, \eta \rangle_{\mathcal{G}} = g_{ij} \xi^i \eta^j.$$

С помощью него можно, например, находить длины кривых и углы между кривыми на поверхностях (что мы, на самом деле, раньше уже делали). Но сперва нужно доказать корректность этого определения, то есть согласованность с тем, что мы раньше называли римановой метрикой (определение 3.4).

**Предложение 3.26.** Коэффициенты первой квадратичной формы, записанной по отношению к разным системам координат  $(u^1, u^2)$  и  $(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$ , связаны соотношениями<sup>8</sup>

$$(3.3) \quad g_{ij} = \tilde{g}_{kl} \frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial u^i} \frac{\partial \tilde{u}^l}{\partial u^j}.$$

**Доказательство.** Пусть в какой-то области поверхности введены две разные системы координат  $(u^1, u^2)$  и  $(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$ , связанные формулами перехода. Один и тот же касательный вектор раскладывается по разным базисам:

$$\xi = \xi^i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} = \tilde{\xi}^j \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tilde{u}^j}.$$

Так как его длина не зависит от базиса, мы имеем

$$g_{ij} \xi^i \xi^j = \tilde{g}_{kl} \tilde{\xi}^k \tilde{\xi}^l.$$

Равенство длин переписывается как  $g_{ij} du^i du^j = \tilde{g}_{ij} d\tilde{u}^i d\tilde{u}^j$ . Подставляя в правую часть выражения вида  $d\tilde{u}^k = \frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial u^i} du^i$ , получаем

$$g_{ij} du^i du^j = \tilde{g}^{kl} \frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial u^i} \frac{\partial \tilde{u}^l}{\partial u^j} du^i du^j.$$

Равенство форм означает равенство всех коэффициентов, что и требовалось. ■

<sup>8</sup>Мы хотим доказать, что первая квадратичная форма действительно является квадратичной формой (на касательном пространстве) в смысле определения из линейной алгебры. Для этого нужно проверить выполнение тензорного закона, что мы здесь и делаем.

Напомним, что дифференциалы  $du$  и  $dv$  можно воспринимать как линейные функции на касательном пространстве к каждой точке  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ . Так что выражение  $ds^2$  задаёт корректно определённую квадратичную форму, которая обозначается через  $\mathbf{I}$ . Её значение на касательном векторе  $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$  есть просто квадрат длины этого вектора:

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\xi}) = \langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle.$$

Таким образом, риманова метрика на поверхности является ограничением евклидовой метрики в  $\mathbb{R}^3$  на эту поверхность.

**Пример 3.27.**

- (1) Если поверхность задана как график функции  $z = f(x, y)$ , то

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_x &= (1, 0, f_x), \quad \mathbf{r}_y = (0, 1, f_y), \\ g_{11} &= \langle \mathbf{r}_x, \mathbf{r}_x \rangle = 1 + f_x^2, \quad g_{12} = \langle \mathbf{r}_x, \mathbf{r}_y \rangle = f_x f_y, \quad g_{22} = \langle \mathbf{r}_y, \mathbf{r}_y \rangle = 1 + f_y^2. \end{aligned}$$

- (2) Пусть поверхность задана уравнением  $F(x, y, z) = 0$  и  $F_z \neq 0$  в окрестности точки  $(x_0, y_0, z_0)$ . Примем  $x$  и  $y$  за локальные координаты:  $u = x$ ,  $v = y$ . Условие  $F = 0$  влечёт тождество

$$F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z} = 0$$

для касательных векторов  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  к поверхности. Из него следует, что

$$\dot{z} = -\frac{1}{F_z}(F_x \dot{x} + F_y \dot{y}).$$

Отсюда выводим, что

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{1}{F_z^2}(F_x^2 \dot{x}^2 + 2F_x F_y \dot{x} \dot{y} + F_y^2 \dot{y}^2) = \\ &= \left(1 + \frac{F_x^2}{F_z^2}\right) \dot{x}^2 + 2\frac{F_x F_y}{F_z^2} \dot{x} \dot{y} + \left(1 + \frac{F_y^2}{F_z^2}\right) \dot{y}^2. \end{aligned}$$

В итоге получаем следующие формулы для метрики:

$$g_{11} = 1 + \frac{F_x^2}{F_z^2}, \quad g_{12} = \frac{F_x F_y}{F_z^2}, \quad g_{22} = 1 + \frac{F_y^2}{F_z^2}.$$

**Задача 3.28.** Вычислить первую квадратичную форму

- (1) *псевдосферы Бельтрами*

$$x = a \sin u \cos v, \quad y = a \sin u \sin v, \quad z = a \left( \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + \cos u \right),$$

где  $0 < u < \pi/2$ ,  $0 \leq v < 2\pi$ ,  $a \neq 0$ .

- (2) *поверхности главных нормалей*  $\mathbf{r}(t, \lambda) = \boldsymbol{\rho}(t) + \lambda \mathbf{n}(t)$  кривой  $\boldsymbol{\rho}(t)$ . (Здесь через  $t$  обозначен натуральный параметр на кривой.)

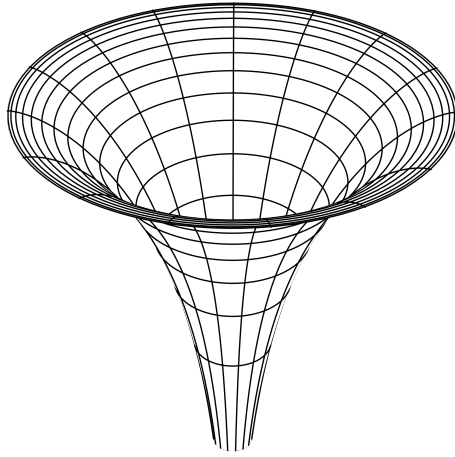


Рис. 3.7: Псевдосфера

**Решение.**

(1) Напрямую вычисляем коэффициенты<sup>9</sup>:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_u &= (a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, a \operatorname{ctg} u \cos u), \quad \mathbf{r}_v = (-a \sin u \sin v, a \sin u \cos v, 0), \\
 g_{11} = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle &= a^2 \cos^2 u \underbrace{(\cos^2 v + \sin^2 v)}_1 + \operatorname{ctg}^2 u = a^2 \cos^2 u \underbrace{(1 + \operatorname{ctg}^2 u)}_{1/\sin^2 u} = a^2 \operatorname{ctg}^2 u, \\
 g_{12} = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle &= -\frac{a^2}{4} \cancel{\sin 2u \sin 2v} + \frac{a^2}{4} \cancel{\sin 2u \sin 2v} = 0, \\
 g_{22} = \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle &= a^2 \sin^2 u \underbrace{(\sin^2 v + \cos^2 v)}_1 = a^2 \sin^2 u.
 \end{aligned}$$

Пишем первую квадратичную форму:

$$ds^2 = a^2 \operatorname{ctg}^2 u \, du^2 + a^2 \sin^2 u \, dv^2.$$

(2) Считаем частные производные, пользуясь формулами Френе:

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{v} + \lambda \dot{\mathbf{n}} = \mathbf{v} + \lambda(-k\mathbf{v} + \varkappa\mathbf{b}) = (1 - k\lambda)\mathbf{v} + \varkappa\lambda\mathbf{b}, \quad \mathbf{r}_\lambda = \mathbf{n}.$$

Вычисляем коэффициенты первой квадратичной формы:

$$\begin{aligned}
 g_{11} = \langle \mathbf{r}_t, \mathbf{r}_t \rangle &= (1 - k\lambda)^2 + \varkappa^2 \lambda^2, \\
 g_{12} = \langle \mathbf{r}_t, \mathbf{r}_\lambda \rangle &= 0, \\
 g_{22} = \langle \mathbf{r}_\lambda, \mathbf{r}_\lambda \rangle &= 1.
 \end{aligned}$$

Итак, выписываем первую квадратичную форму:

$$ds^2 = ((1 - k\lambda)^2 + \varkappa^2 \lambda^2) \, dt^2 + d\lambda^2.$$

■

**Задача 3.29.** Найти угол между пересекающимися кривыми  $u + v = 0$  и  $u - v = 0$  на *геликоиде* — поверхности вида

$$\mathbf{r}(u, v) = (u \sin v, u \cos v, av),$$

где  $u, v \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ .

<sup>9</sup>Выкладка:  $\left(\ln \operatorname{tg} \frac{u}{2}\right)' = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{u}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{u}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2 \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2}} = \frac{1}{\sin u}.$

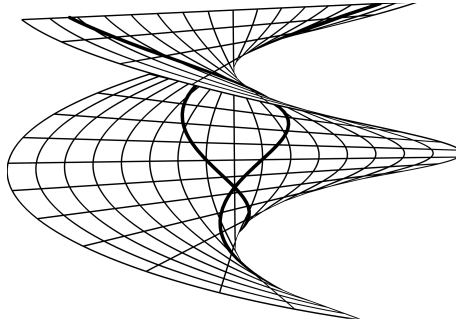


Рис. 3.8: Две линии на геликоиде

**Решение.** Посчитаем первую квадратичную форму нашей поверхности.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u &= (\sin v, \cos v, 0), & \mathbf{r}_v &= (u \cos v, -u \sin v, a), \\ g_{11} = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle &= \underbrace{\sin^2 v + \cos^2 v}_1 = 1, & g_{12} = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle &= 0, \\ g_{22} = \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle &= u^2 \underbrace{(\sin^2 v + \cos^2 v)}_1 + a^2 = u^2 + a^2, \\ \mathcal{G}(u, v) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 + a^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Данные кривые легко запараметризовать:  $(t, -t)$  и  $(t, t)$ . Они пересекаются в точке  $(0, 0)$ . Их вектора скорости в этой точке есть  $\mathbf{v}_1 = (1, -1)$  и  $\mathbf{v}_2 = (1, 1)$  соответственно. Угол между кривыми находим по формуле

$$\cos \angle(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle |_{\mathcal{G}(0,0)}}{\sqrt{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle |_{\mathcal{G}(0,0)}} \sqrt{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle |_{\mathcal{G}(0,0)}}} = \frac{1 - a^2}{1 + a^2}.$$

Отсюда  $\angle(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \arccos \frac{1 - a^2}{1 + a^2}$ . ■

**Определение 3.30.** *Площадью* области  $U$  на поверхности  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$  называется величина

$$\sigma(U) := \iint_U \sqrt{\det \mathcal{G}} \, du \, dv.$$

(Здесь область  $U$  задана параметрически координатами  $u$  и  $v$ .)

Мотивация такого определения заключается в том, что  $\sqrt{\det \mathcal{G}}$  — это площадь параллелограмма, натянутого на касательные вектора  $\mathbf{r}_u$  и  $\mathbf{r}_v$ . Естественно назвать выражение  $d\sigma := \sqrt{\det \mathcal{G}} \, du \, dv$  *элементом площади*. Тогда определение площади принимает вид

$$\sigma(U) = \iint_U d\sigma.$$

Отметим, что площадь можно определить таким же образом не только на поверхности, но и в целом для римановой метрики в криволинейных координатах.

**Задача 3.31.** Найти площадь криволинейного треугольника  $U$ , заданного неравенствами  $0 \leq v \leq \ln 2$  и  $0 \leq u \leq \operatorname{sh} v$ , на геликоиде

$$\mathbf{r}(u, v) = (u \sin v, u \cos v, v).$$

**Решение.** Напомним, что метрика на геликоиде имеет вид

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + u^2 \end{pmatrix},$$

отсюда  $\sqrt{\det \mathcal{G}} = \sqrt{1 + u^2}$ . Вычисляем двойной интеграл, сводя его к повторному:

$$\begin{aligned} \sigma(U) &= \iint_U d\sigma = \int_0^{\ln 2} dv \int_0^{\operatorname{sh} v} \sqrt{1 + u^2} du = \{1 + u^2 =: \operatorname{sh} \theta, du = \operatorname{ch} \theta d\theta\} = \\ &= \int_0^{\ln 2} dv \int_0^v \operatorname{ch}^2 \theta d\theta = \int_0^{\ln 2} dv \int_0^v \frac{1 + \operatorname{ch} 2\theta}{2} d\theta = \int_0^{\ln 2} \left( \frac{v}{2} + \frac{\operatorname{sh} 2v}{4} \right) dv = \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{v}{2} + \frac{\operatorname{sh} 2v}{4} \right) dv = \left( \frac{v^2}{4} + \frac{\operatorname{ch} 2v}{8} \right) \Big|_0^{\ln 2} = \frac{(\ln 2)^2}{4} + \frac{9}{64}. \end{aligned}$$

■

**Пример 3.32.** В качестве доказательства пунктов (2) и (3) смотреть пример 3.27.

- (1) Если поверхность задана в параметрической форме  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$  и  $V$  — такая область на плоскости  $(u, v)$ , что  $\mathbf{r}(V) = U$ , то

$$\sigma(U) = \iint_V |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv.$$

- (2) Если поверхность задана как график функции  $z = f(x, y)$  и область  $U$  проектируется на область  $V$  на плоскости  $(x, y)$ , то

$$\sigma(U) = \iint_V \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy.$$

- (3) Если поверхность задана уравнением  $F(x, y, z) = 0$ ,  $F_z \neq 0$  в области  $U$ , которая проектируется на область  $V$  на плоскости  $(x, y)$ . Тогда

$$\sigma(U) = \iint_V \frac{|\operatorname{grad} F|}{|F_z|} dx dy.$$

**Задача 3.33.** Найти площадь тора

$$\begin{cases} x = (R + r \cos \psi) \cos \varphi, \\ y = (R + r \cos \psi) \sin \varphi, \\ z = r \sin \psi, \end{cases}$$

где  $r < R$ ,  $0 \leq \varphi, \psi < 2\pi$ .

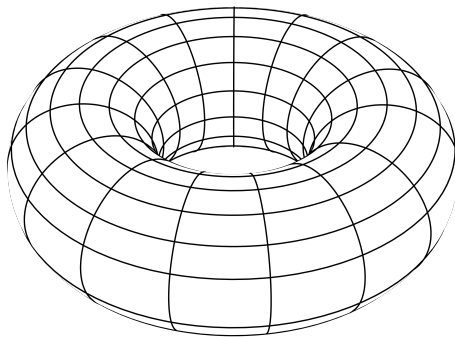


Рис. 3.9: Тор



**Решение.** Находим частные производные радиус-вектора:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\varphi &= (R + r \cos \psi)(-\sin \varphi, \cos \varphi, 0), \\ \mathbf{r}_\psi &= r(-\cos \varphi \sin \psi, -\sin \varphi \sin \psi, \cos \psi), \end{aligned}$$

затем риманову метрику на торе:

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} (R + r \cos \psi)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Считаем искомую площадь:

$$\begin{aligned} \sigma &= \iint_{\varphi, \psi} \sqrt{\det \mathcal{G}} \, d\varphi \, d\psi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} (R + r \cos \psi) r \, d\psi = \\ &= 2\pi r \int_0^{2\pi} (R + r \cos \psi) \, d\psi = 2\pi r \cdot 2\pi R = 4\pi^2 Rr. \end{aligned}$$

■

Из существования натурального параметра на кривой следует, что каждый участок кривой можно отобразить в прямую с сохранением расстояний между точками. Двумерные поверхности в трехмерном евклидовом пространстве уже обладают нетривиальной внутренней геометрией: в общем случае никакая окрестность точки поверхности не может быть отображена на область в евклидовой плоскости с сохранением расстояний.

**Определение 3.34.** Говорят, что поверхности  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{N}$  *локально изометричны*, если в какой-то окрестности каждой точки первой поверхности существует диффеоморфизм  $\varphi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ , который сохраняет длины всех кривых. Сам диффеоморфизм  $\varphi$  называется при этом *локальной изометрией*.

Гладкое отображение поверхностей

$$\mathbf{f}: (u^1, u^2) \mapsto (\tilde{u}^1(u^1, u^2), \tilde{u}^2(u^1, u^2)),$$

записанное в локальных координатах, сохраняет длины всех кривых, если и только если

$$(3.4) \quad \tilde{g}_{ij}|_{\mathbf{f}(u^1, u^2)} d\tilde{u}^i d\tilde{u}^j = g_{kl}|_{(u^1, u^2)} du^k du^l,$$

где  $g_{kl} du^k du^l$  и  $\tilde{g}_{ij} d\tilde{u}^i d\tilde{u}^j$  — первые квадратичные формы поверхностей. Идейно тут всё понятно — это условие и означает, что на поверхностях «одинаково измеряются расстояния». Распишем строго: пусть  $\gamma(t) = (u^1(t), u^2(t))$  — кривая и  $\tilde{\gamma}(t)$  — её образ,  $a \leq t \leq b$ ,

$$\int_a^b \sqrt{g_{kl}(\gamma(t)) \dot{u}^k \dot{u}^l} \, dt = \int_a^b \sqrt{\tilde{g}_{ij}(\tilde{\gamma}(t)) \dot{\tilde{u}}^i \dot{\tilde{u}}^j} \, dt.$$

При локальной изометрии это равенство выполняется для любой кривой  $\mathbf{r}(t)$ , что равносильно соотношению (3.4).

**Задача 3.35.** Доказать, что *геликоид*:

$$\mathbf{r}(u, v) = (u \sin v, u \cos v, v),$$

где  $u, v \in \mathbb{R}$ , локально изометричен *катеноиду*:

$$\tilde{\mathbf{r}}(u, v) = (\operatorname{ch} u \cos v, \operatorname{ch} u \sin v, u),$$

где  $u \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq v < 2\pi$ .

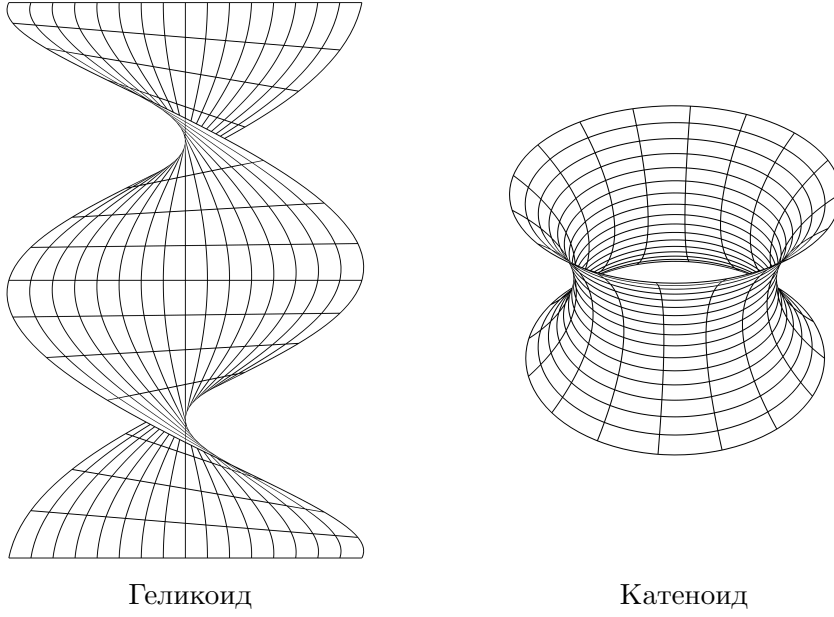


Рис. 3.10

**Решение.** Посчитаем первые квадратичные формы на наших поверхностях. Для геликоида:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_u &= (\sin v, \cos v, 0), & \mathbf{r}_v &= (u \cos v, -u \sin v, 1), \\
 g_{11} = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle &= \underbrace{\sin^2 v + \cos^2 v}_1 = 1, & g_{12} &= \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle = 0, \\
 g_{22} = \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle &= u^2 \underbrace{(\sin^2 v + \cos^2 v)}_1 + 1 = u^2 + 1, \\
 (3.5) \quad ds^2 &= du^2 + (u^2 + 1) dv^2.
 \end{aligned}$$

Для катеноида:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{r}}_u &= (\operatorname{sh} \tilde{u} \cos \tilde{v}, \operatorname{sh} \tilde{u} \sin \tilde{v}, 1), & \tilde{\mathbf{r}}_{\tilde{v}} &= (-\operatorname{ch} \tilde{u} \sin \tilde{v}, \operatorname{ch} \tilde{u} \cos \tilde{v}, 0), \\
 \tilde{g}_{11} = \langle \tilde{\mathbf{r}}_u, \tilde{\mathbf{r}}_u \rangle &= \operatorname{sh}^2 \tilde{u} \underbrace{(\cos^2 \tilde{v} + \sin^2 \tilde{v})}_1 + 1 = \operatorname{sh}^2 \tilde{u} + 1 = \operatorname{ch}^2 \tilde{u}, \\
 \tilde{g}_{12} = \langle \tilde{\mathbf{r}}_u, \tilde{\mathbf{r}}_{\tilde{v}} \rangle &= 0, & \tilde{g}_{22} = \langle \tilde{\mathbf{r}}_{\tilde{v}}, \tilde{\mathbf{r}}_{\tilde{v}} \rangle &= \operatorname{ch}^2 \tilde{u} \underbrace{(\sin^2 \tilde{v} + \cos^2 \tilde{v})}_1 = \operatorname{ch}^2 \tilde{u}, \\
 (3.6) \quad d\tilde{s}^2 &= \operatorname{ch}^2 \tilde{u} d\tilde{u}^2 + \operatorname{ch}^2 \tilde{u} d\tilde{v}^2.
 \end{aligned}$$

Согласно определению локальной изометрии, нам нужно в окрестности каждой точки предъявить диффеоморфизм, сохраняющий длины кривых. Попробуем найти «глобальный» диффеоморфизм такой, что форма (3.5) перейдёт в (3.6). Мы хотим, чтобы было выполнено  $du = \operatorname{ch} \tilde{u} d\tilde{u}$ . Проинтегрировав обе части, получаем  $u = \operatorname{sh} \tilde{u}$ . Тогда можем взять  $v = \tilde{v}$ , и получим

$$du^2 = (d \operatorname{sh} \tilde{u})^2 = \operatorname{ch}^2 \tilde{u} d\tilde{u}^2, \quad (\operatorname{sh}^2 \tilde{u} + 1) d\tilde{v}^2 = \operatorname{ch}^2 \tilde{u} d\tilde{v}^2.$$

■

**Задача 3.36.** Доказать, что деформация гиперболического параболоида, определяемая

следующими формулами, сохраняет площадь:

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \end{cases} \mapsto \begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = \frac{\cos t}{2}(u^2 - v^2) + uv \sin t. \end{cases}$$

**Решение.** Проверим, что при данном преобразовании сохраняется форма площади. Метрика гиперболического параболоида задаётся матрицей

$$\mathcal{G}_0 = \begin{pmatrix} 1 + u^2 & -uv \\ -uv & 1 + v^2 \end{pmatrix}.$$

(Эту матрицу легко выписать в уме, ведь поверхность по сути задана графиком, а для такого задания мы уже выводили формулы в примере 3.27). Форма площади есть

$$d\sigma = \sqrt{\mathcal{G}_0} du dv = \sqrt{1 + u^2 + v^2} du dv.$$

Деформация, описанная в условии, даёт метрику

$$\mathcal{G}_t = \begin{pmatrix} 1 + (u \cos t + v \sin t)^2 & (u \cos t + v \sin t)(u \sin t - v \cos t) \\ (u \cos t + v \sin t)(u \sin t - v \cos t) & 1 + (u \sin t - v \cos t)^2 \end{pmatrix}$$

Легко видеть, что форма площади равна

$$d\sigma_t = \sqrt{\mathcal{G}_t} du dv = \sqrt{1 + u^2 + v^2} du dv.$$

Итак,  $d\sigma = d\sigma_t$  при любом  $t$ , так что данная деформация сохраняет площадь. ■

### Кривизна поверхности

Сначала мы дадим «дурацкое» определение, а затем предоставим к нему исчерпывающую мотивацию. Рассмотрим поверхность, заданную параметрически:  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ . Зададим к ней нормаль  $\mathbf{n}$  в каждой точке:

$$\mathbf{n} := \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}.$$

**Определение 3.37.** Вторую квадратичную форму определим как выражение

$$L du^2 + 2M du dv + N dv^2,$$

где

$$L := \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n} \rangle, \quad M := \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n} \rangle, \quad N := \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n} \rangle.$$

Полагая  $u^1 = u$ ,  $u^2 = v$ , будем также записывать её в виде

$$b_{ij} du^i du^j,$$

где

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

Для второй квадратичной формы, как и для первой, нужно доказать корректность определения — то есть независимость от системы координат, в которой она записывается. Мы не будем утруждать себя лобовым доказательством тензорного закона, а увидим, что вторая квадратичная форма имеет геометрический смысл, инвариантный относительно выбора системы координат.

Рассмотрим кривую  $\rho = \rho(u(t), v(t))$  на нашей поверхности, параметризованную в локальных координатах в окрестности точки  $\mathbf{r}(u_0, v_0) \in \text{Im } \rho$ . Нормаль к поверхности в этой точке обозначим через  $\mathbf{n}$ . Тогда имеем (здесь через точку обозначена производная по  $t$ )

$$\begin{aligned}\ddot{\rho} &= \rho_{uu}\dot{u}^2 + 2\rho_{uv}\dot{u}\dot{v} + \rho_{vv}\dot{v}^2 + \rho_u\ddot{u} + \rho_v\ddot{v}, \\ \langle \ddot{\rho}, \mathbf{n} \rangle &= L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2,\end{aligned}$$

так как  $\rho_u \perp \mathbf{n}$  и  $\rho_v \perp \mathbf{n}$ . Получается, что значение второй квадратичной формы на векторе скорости кривой  $\rho$  (который, конечно же, является касательным вектором к поверхности) есть длина проекции вектора ускорения этой кривой на нормаль к поверхности.

Теперь имеем полное право называть определённое выше выражение квадратичной формой, обозначим её через  $\Pi$ . Попутно мы доказали следующее предложение.

**Предложение 3.38.** Если  $\rho = \rho(u(t), v(t))$  — гладкая кривая на поверхности, то

$$\langle \ddot{\rho}, \mathbf{n} \rangle = \Pi(\dot{\rho}).$$

Позже мы вернёмся к этому сюжету, но пока вынуждены отступить от него.

### Главные кривизны и нормальные сечения

Подытожим наши рассуждения. В касательном пространстве к каждой точке поверхности определены две квадратичные формы —  $\mathbf{I}$  и  $\mathbf{II}$ , — при этом форма  $\mathbf{I}$  положительно определена. Из курса линейной алгебры известно, что тогда эти квадратичные формы можно привести к главным осям, то есть выбрать базис (в касательном пространстве), в котором матрица формы  $\mathbf{I}$  будет единичной, а матрица формы  $\mathbf{II}$  — диагональной.

Кратно напомним, как это делать. Сначала нужно найти собственные значения пары квадратичных форм<sup>10</sup>, то есть решить уравнение

$$(3.7) \quad \det(\mathcal{B} - \lambda \mathcal{G}) = 0$$

относительно  $\lambda$ , где  $\mathcal{G}$  и  $\mathcal{B}$  — матрицы первой и второй квадратичной формы в каком-то базисе касательного пространства. Сразу отметим, что само уравнение (3.7) инвариантно относительно замен координат и определяется самой поверхностью. Поэтому его коэффициенты в развёрнутом и приведённом виде

$$\lambda^2 - H\lambda + K = 0$$

имеет смысл как-то обозначить.

**Определение 3.39.** Коэффициент  $H$  называется *средней кривизной* поверхности в данной точке<sup>11</sup>, а коэффициент  $K$  — *гауссовой кривизной*. Корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  уравнения (3.7) называются *главными кривизнами*. (По теореме Виета имеем  $H = \lambda_1 + \lambda_2$ ,  $K = \lambda_1 \lambda_2$ .)

Обычно среднюю кривизну определяют как среднее арифметическое главных кривизн, но такое определение влечёт лишь к небольшому усложнению формул за счёт возникновения множителя  $1/2$ . Все эти кривизны имеют для нас фундаментальное значение. Их очень глубокий геометрический смысл будет ясен позднее.

Если  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , то главные направления  $\xi_1$  и  $\xi_2$  ортогональны и находятся из уравнений

$$(\mathcal{B} - \lambda_i \mathcal{G})\xi_i = 0,$$

где  $i = 1, 2$ .

<sup>10</sup>На самом деле, мы находим собственные значения линейного оператора  $g^{ik}b_{kj}$ , полученного поднятием индекса у второй квадратичной формы. Полезно держать это в голове.

<sup>11</sup>«Данная точка» здесь — это та, в касательном пространстве к которой мы сейчас находимся.

А если  $\lambda_1 = \lambda_2$ , то первая и вторая квадратичные формы пропорциональны, и любые векторы подойдут как главные направления. Такие точки называются *омбилическими*.

Лобовым раскрытием скобок можем получить явные формулы для гауссовой и средней кривизн через коэффициенты первой и второй квадратичных форм:

$$K = \frac{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}{b_{11}b_{22} - b_{12}^2} = \frac{\det \mathcal{G}}{\det \mathcal{B}}, \quad H = \frac{g_{11}b_{22} + g_{22}b_{11} - 2g_{12}b_{12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \text{tr}(\mathcal{G}^{-1}\mathcal{B}).$$

**Пример 3.40.** Пусть поверхность задана как график функции  $z = f(x, y)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_x &= (1, 0, f_x), \quad \mathbf{r}_y = (0, 1, f_y), \quad \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (-f_x, -f_y, 1), \\ \mathbf{r}_{xx} &= (0, 0, f_{xx}), \quad \mathbf{r}_{xy} = (0, 0, f_{xy}), \quad \mathbf{r}_{yy} = (0, 0, f_{yy}), \\ \mathbf{n} &= \frac{\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y}{|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y|} = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \\ b_{11} &= \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad b_{12} = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad b_{22} = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}. \end{aligned}$$

Отсюда, гауссова кривизна поверхности, заданной в виде графика, равна

$$K = \frac{\det \mathcal{G}}{\det \mathcal{B}} = \frac{(1 + f_x^2)(1 + f_y^2) - f_x^2 f_y^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2} = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}.$$

**Задача 3.41.** Найти главные направления, гауссову и среднюю кривизны у псевдосферы

$$x = a \sin u \cos v, \quad y = a \sin u \sin v, \quad z = a \left( \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + \cos u \right),$$

где  $0 < u < \pi/2$ ,  $0 \leq v < 2\pi$ ,  $a \neq 0$ .

**Решение.** Первую квадратичную форму у псевдосферы мы уже считали в задаче 3.28, получили

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} a^2 \operatorname{ctg}^2 u & 0 \\ 0 & a^2 \sin^2 u \end{pmatrix}.$$

Посчитаем вторую квадратичную форму. Для этого нам нужно считать вторые производные от параметризации  $\mathbf{r}$  нашей поверхности. Первые, опять же, мы уже считали:

$$\mathbf{r}_u = (a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, a \operatorname{ctg} u \cos u), \quad \mathbf{r}_v = (-a \sin u \sin v, a \sin u \cos v, 0).$$

Считаем вторые:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{uu} &= (-a \sin u \cos v, -a \sin u \sin v, -a \cos u(2 + \operatorname{ctg}^2 u)), \\ \mathbf{r}_{uv} &= (-a \cos u \sin v, a \cos u \cos v, 0), \\ \mathbf{r}_{vv} &= (-a \sin u \cos v, -a \sin u \sin v, 0). \end{aligned}$$

Находим вектор нормали:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a \cos u \cos v & a \cos u \sin v & a \operatorname{ctg} u \cos u \\ -a \sin u \sin v & a \sin u \cos v & 0 \end{pmatrix} = \\ &= a^2 \left( -\cos^2 u \cos v, -\cos^2 u \sin v, \frac{1}{2} \sin 2u \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|^2 &= a^4 \cos^4 u \underbrace{(\cos^2 v + \sin^2 v)}_1 + \frac{1}{4} a^4 \sin^2 2u = \\
&= a^4 (\cos^4 u + \cos^2 u (1 - \cos^2 u)) = a^4 \cos^2 u,
\end{aligned}$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, \sin u).$$

Теперь можем найти коэффициенты второй квадратичной формы:

$$\begin{aligned}
b_{11} = \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n} \rangle &= a \cos u \sin u \underbrace{(\cos^2 v + \sin^2 v)}_1 - a \sin u \cos u (2 + \operatorname{ctg}^2 u) = \\
&= -a \sin u \cos u \underbrace{(1 + \operatorname{ctg}^2 u)}_{1/\sin^2 u} = -a \operatorname{ctg} u,
\end{aligned}$$

$$b_{12} = \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n} \rangle = 0,$$

$$b_{22} = \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n} \rangle = a \cos u \sin u \underbrace{(\cos^2 v + \sin^2 v)}_1 = \frac{a}{2} \sin 2u.$$

Можем выписать матрицу второй квадратичной формы:

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} -a \operatorname{ctg} u & 0 \\ 0 & \frac{a}{2} \sin 2u \end{pmatrix}.$$

Находим главные кривизны:

$$\begin{aligned}
\det(\mathcal{B} - \lambda \mathcal{G}) &= 0, \\
\det \begin{pmatrix} -\operatorname{ctg} u - a\lambda \operatorname{ctg}^2 u & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \sin 2u - a\lambda \sin^2 u \end{pmatrix} &= 0, \\
a^2 \cos^2 u \cdot \lambda^2 + a \left( -\frac{\cos^3 u}{\sin u} + \cos u \sin u \right) \cdot \lambda - \cos^2 u &= 0, \quad | : a^2 \cos^2 u \\
\lambda^2 - \frac{\operatorname{ctg} u - \operatorname{tg} u}{a} \lambda - \frac{1}{a^2} &= 0.
\end{aligned}$$

Отсюда,  $\lambda_1 = -a^{-1} \operatorname{tg} u$ ,  $\lambda_2 = a^{-1} \operatorname{ctg} u$  и  $H = a^{-1}(\operatorname{ctg} u - \operatorname{tg} u)$ ,  $K \equiv -a^{-2}$ . Наконец, можем найти главные направления.

$$\begin{aligned}
(\mathcal{B} - \lambda_1 \mathcal{G}) \boldsymbol{\xi}_1 &= \mathbf{0}, \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{tg} u \end{pmatrix} \boldsymbol{\xi}_1 &= \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

В качестве решения подойдёт, например, вектор  $\boldsymbol{\xi}_1 = (1, 0)$ . Ищем второй вектор:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{B} - \lambda_2 \mathcal{G}) \boldsymbol{\xi}_2 &= \mathbf{0}, \\
\begin{pmatrix} -\frac{\cos u}{\sin^3 u} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\xi}_2 &= \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Здесь подойдёт вектор  $\boldsymbol{\xi}_2 = (0, 1)$ . Итак, мы нашли главные направления в базисе  $(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)$  касательного пространства. Можно записать их и в базисе  $\mathbb{R}^3$ , в котором находится наша поверхность. Для этого пишем  $\boldsymbol{\xi}_i = \xi_i^1 \mathbf{r}_u + \xi_i^2 \mathbf{r}_v$ . В данном случае всё очевидно —  $\boldsymbol{\xi}_1 = \mathbf{r}_u$ ,  $\boldsymbol{\xi}_2 = \mathbf{r}_v$ . Нам повезло, и векторы изначального базиса  $(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)$  оказались главными

направлениями. Так происходит редко, в общем случае мы найдём подходящие векторы, нормируем их и запишем в трёхмерных координатах. ■

С каждой неомбилической точкой гладкой поверхности можно связать ортонормированный базис  $(\xi_1, \xi_2, \mathbf{n})$  из главных направлений и вектора единичной нормали. Вблизи этой точки можно задать нашу функцию как график  $z = f(x, y)$ , к такому заданию поверхностей мы уже обращались в примере 3.27. С одной стороны, первая квадратичная форма имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 + f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + f_y^2 \end{pmatrix}.$$

Но с другой стороны, в базисе из главных направлений матрица первой квадратичной формы в рассматриваемой точке единичная, отсюда находим  $f_x = f_y = 0$ . В выбранном базисе имеем  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ , поэтому легко находим и коэффициенты второй квадратичной формы:

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix},$$

при этом в выбранном базисе эта форма диагональна, то есть  $f_{xy} = 0$ . Таким образом, имеем следующие матрицы квадратичных форм:

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} f_{xx} & 0 \\ 0 & f_{yy} \end{pmatrix}.$$

Сразу видим главные кривизны:  $\lambda_1 = f_{xx}$ ,  $\lambda_2 = f_{yy}$ . Можно написать разложение функции  $z = f(x, y)$  в ряд Тейлора, которое в нашем случае выглядит так:

$$(3.8) \quad z = \frac{\lambda_1}{2}x^2 + \frac{\lambda_2}{2}y^2 + \bar{o}(x^2 + y^2).$$

Отбросив  $\bar{o}(x^2 + y^2)$ , мы получим уравнение параболоида, который приближает нашу поверхность вблизи начала координат. Эта соприкасающаяся поверхность второго порядка служит аналогом соприкасающейся окружности к кривой. В зависимости от вида этой приближающей поверхности, каждую неомбилическую точку поверхности можно отнести к одному из трёх типов.

**Определение 3.42.**

- (1) Если  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  оба ненулевые и одного знака ( $K > 0$ ), то такая точка называется *эллиптической* (в этом случае приближающая поверхность — эллиптический параболоид).
- (2) Если  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  разных знаков ( $K < 0$ ), то такая точка называется *гиперболической* (приближающая поверхность — гиперболический параболоид).
- (3) Если одно из  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  нулевое ( $K = 0$ ), то такая точка называется *параболической* (приближающая поверхность — параболический цилиндр).

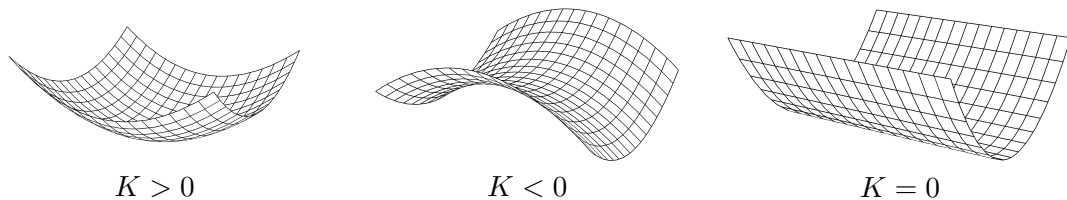


Рис. 3.11: Вид соприкасающегося параболоида в зависимости от гауссовой кривизны

Далее мы опишем геометрический смысл главных кривизн и второй квадратичной формы, для этого мы будем рассматривать сечения поверхности плоскостями.

**Определение 3.43.** *Нормальным сечением* поверхности  $\mathcal{M}$  в некоторой точке  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$  называется кривая в пересечении этой поверхности и плоскости, порождённой каким-то касательным вектором  $\xi \in \mathcal{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$  и нормалью к поверхности в точке  $\mathbf{x}$ .

Обозначим через  $\mathbf{n}_\rho$  вектор главной нормали кривой  $\rho$  в рассматриваемой точке, а через  $\theta$  — угол между ним и вектором нормали к поверхности, то есть  $\theta = \angle(\mathbf{n}_\rho, \mathbf{n})$ . Кривизна<sup>12</sup> кривой  $\rho$  определяется из соотношения

$$\frac{d^2 \rho}{ds^2} = k \mathbf{n}_\rho,$$

где  $s$  — натуральный параметр на кривой. Напишем

$$\left\langle \frac{d^2 \rho}{ds^2}, \mathbf{n} \right\rangle = b_{11} \left( \frac{du}{ds} \right)^2 + 2b_{12} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + b_{22} \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 = \frac{b_{ij} du^i du^j}{ds^2},$$

причём  $ds^2 = |\dot{\rho}|^2 dt^2 = \mathbf{I}(\dot{\rho}) dt^2$ . Согласно предложению 3.38,

$$k \underbrace{\langle \mathbf{n}_\rho, \mathbf{n} \rangle}_{\cos \theta} = \left\langle \frac{d^2 \rho}{ds^2}, \mathbf{n} \right\rangle = \frac{b_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j}{\mathbf{I}(\dot{\rho})} = \frac{\Pi(\dot{\rho})}{\mathbf{I}(\dot{\rho})},$$

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

**Теорема 3.44.** Если кривая лежит на поверхности в  $\mathbb{R}^3$ , то произведение кривизны кривой на косинус угла между нормалью к поверхности и главной нормалью к кривой равно отношению значений второй и первой квадратичных форм на векторе скорости этой кривой.

**Следствие 3.45** (Теорема Менье). Рассмотрим нормальное сечение поверхности  $\mathcal{M}$ , порождённое вектором  $\xi \in \mathcal{T}_x \mathcal{M}$ . Затем наклоним плоскость сечения вокруг вектора  $\xi$  на угол  $\theta$  ( $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ ). Кривизна в точке  $x$  получившегося сечения есть

$$\frac{1}{\cos \theta} \frac{\Pi(\xi)}{\mathbf{I}(\xi)}.$$

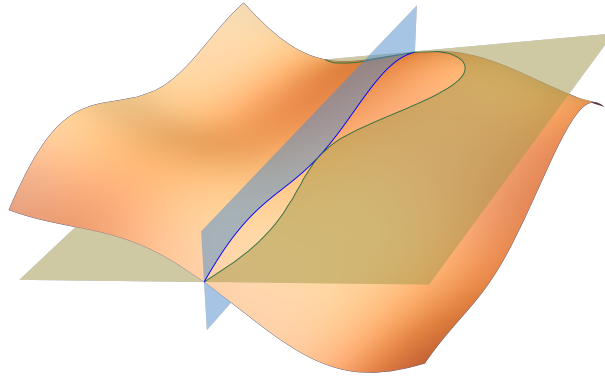


Рис. 3.12: Нормальное сечение (синим) и сечение наклонённой плоскостью (зелёным)

При  $\theta = 0$  получаем кривизну нормального сечения:

$$(3.9) \quad k_n = \frac{\Pi(\xi)}{\mathbf{I}(\xi)}.$$

(Вообще, тут должен стоять  $\pm$ , но мы можем выбрать знак. Важно везде сделать это одинаково.) Кривизна сечения под углом  $\theta$  выражается через кривизну нормального сечения:

$$k_\theta = \frac{k_n}{\cos \theta}.$$

<sup>12</sup>В этом разделе кривизны плоских сечений поверхностей будут пониматься в контексте кривизны со знаком, ведь они лежат в плоскости сечения, поэтому на них можно ввести коориентацию.



(Обычно теорему Менье формулируют именно в таком виде.)

Формула 3.9 даёт основной геометрический смысл второй квадратичной формы — её значение на единичном касательном векторе есть кривизна нормального сечения, порождённого этим вектором. Итак, пусть имеем касательный вектор  $\xi = \xi^1 \xi_1 + \xi^2 \xi_2$ , тогда:

$$k_\xi = \frac{\Pi(\xi)}{I(\xi)} = \frac{\lambda_1 (\xi^1)^2 + \lambda_2 (\xi^2)^2}{(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2} = \lambda_1 \cos^2 \varphi + \lambda_2 \sin^2 \varphi,$$

где  $\varphi = \angle(\xi, \xi_1)$ . Таким образом, нами доказана теорема.

**Теорема 3.46** (Формула Эйлера). Кривизна нормального сечения, порождённого касательным вектором  $\xi$ , равна

$$\lambda_1 \cos^2 \varphi + \lambda_2 \sin^2 \varphi,$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — главные кривизны, а  $\varphi$  — угол между  $\xi$  и главным направлением  $\xi_1$ .

Положим для определённости  $\lambda_1 \leq \lambda_2$ . Тогда главные кривизны  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — минимум и максимум соответственно, кривизн нормальных сечений в рассматриваемой точке. (Функция  $\lambda_1 \cos^2 \varphi + \lambda_2 \sin^2 \varphi$  определена на окружности, а окружность компактна, поэтому максимум и минимум достигаются.) При этом все значения между  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  достигаются в силу непрерывности. Отметим, что если  $\lambda_1 \lambda_2 \leq 0$ , то существует нормальное сечение с нулевой кривизной, то есть прямая.

**Задача 3.47.** Найти кривизну эллипса с полуосями  $a$  и  $b$  (причём,  $a < b$ ) в его вершинах.

**Решение.** Рассмотрим цилиндр  $x^2 + y^2 = a^2$  и его плоское сечение под углом  $\theta$  с плоскостью  $z = 0$ , где  $\cos \theta = \frac{a}{b}$ . Нормальное сечение есть окружность радиуса  $a$ , его кривизна равна  $k_n = 1/a$ . Сечение наклонённой плоскостью есть эллипс с полуосями  $a$  и  $b$ , согласно теореме Менье его кривизна в вершине, соответствующей большей полуоси, равна

$$k_b = \frac{k_n}{\cos \theta} = \frac{b}{a^2}.$$

Теперь рассмотрим его вершину, соответствующую меньшей полуоси. В ней нормальные сечения, соответствующие главным направлениям, есть прямая и окружность радиуса  $1/a$ . Угол, соответствующий нашему сечению, есть  $\theta$ . Таким образом, по формуле Эйлера имеем

$$k_a = \frac{1}{a} \cos^2 \theta + 0 \sin^2 \theta = \frac{a}{b^2}.$$

■

Легко видеть справедливость следующих двух следствий. Отметим, что первое из них может быть полезным для вычисления средней кривизны без подсчёта главных кривизн. Действительно, ведь значение второй квадратичной формы на единичном касательном векторе есть просто кривизна нормального сечения в направлении этого вектора, которую часто можно найти из геометрических соображений с помощью теоремы Менье.

**Следствие 3.48.** Для любых ортогональных касательных единичных векторов  $e_1, e_2$  выполнено  $H = \Pi(e_1) + \Pi(e_2)$ .

**Следствие 3.49.**  $H = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} k_{\xi_1 \cos \varphi + \xi_2 \sin \varphi} d\varphi$ .

Таким образом, средняя кривизна оправдывает своё название не только и даже не столько тем, что является удвоенным средним арифметическим главных кривизн. Она является удвоенным усреднённым значением по всем направлениям нормальной кривизны.

**Задача 3.50.** На поверхности  $z = 2x^2 + 9y^2$  найти среднюю кривизну в начале координат.

**Решение.** Данная поверхность является цилиндром над эллипсом

$$\frac{(z - 1/4)^2}{1/16} + \frac{y^2}{1/72} = 1$$

в плоскости  $x = 0$ . Нормальные сечения вдоль главных направлений в начале координат есть прямая и этот эллипс, так что средняя кривизна равна

$$H = 0 + \frac{1/4}{1/72} = 18.$$

■

**Задача 3.51.** На поверхности  $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$  найти среднюю кривизну в точке  $(1, 1, 1)$ .

**Решение.** Данная нам поверхность есть цилиндр. Нормальные сечения вдоль главных направлений в точке  $(1, 1, 1)$  есть (образующая цилиндра) и некоторый эллипс. Можно геометрически искать полуоси этого эллипса, но мы поступим в духе решения задачи 3.47.

Сечение конуса плоскостью  $z = 1$  есть окружность  $x^2 + y^2 = 2$ , её кривизна равна  $1/\sqrt{2}$ , а вектор её главной нормали в рассматриваемой точке направлена по вектору  $\tilde{\mathbf{n}} = (-1, -1, 0)$ . Нормаль поверхности в данной точке имеет направление  $\mathbf{n} = -\frac{1}{2}(\text{grad } F)|_{(1,1,1)} = (-1, -1, 2)$ . Косинус угла между плоскостями, содержащими эти сечения, равен

$$\cos \theta = \frac{\langle \tilde{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \rangle}{\langle \tilde{\mathbf{n}}, \tilde{\mathbf{n}} \rangle \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle} = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

По теореме Менье,

$$k_\theta = \frac{1/\sqrt{2}}{\cos \theta} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Итак, средняя кривизна в рассматриваемой точке равна

$$H = 0 + \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

■

## Минимальные поверхности

Этот раздел носит характер дополнительного, в нём мы рассмотрим один важный класс поверхностей. Для понимания происходящего следует сначала прочитать про дериационные формулы Гаусса — Вайнгартена.

**Определение 3.52.** Гладкая поверхность  $\mathcal{M}$  называется *минимальной*, если для любой её внутренней точки  $\mathbf{x}$  найдётся такая окрестность  $U$ , что любая другая гладкая поверхность  $\mathcal{M}'$ , совпадающая с  $\mathcal{M}$  вне  $U$  и имеющая тот же край  $\partial\mathcal{M}' = \partial\mathcal{M}$ , имеет площадь не меньшую, чем  $\mathcal{M}$ .

**Теорема 3.53.** Поверхность минимальна тогда и только тогда, когда её средняя кривизна всюду равна нулю.

**Доказательство.** Мы докажем только необходимость условия  $H = 0$  для того, чтобы поверхность была минимальна.

Пусть  $\mathcal{M}$  — минимальная поверхность,  $\mathbf{x}$  — её внутренняя точка,  $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$  — окрестность точки  $\mathbf{x}$  на поверхности  $\mathcal{M}$  такая, что площадь области  $\mathcal{N}$  не меньше площади любой другой области с тем же краем.

Выберем регулярную параметризацию  $\mathbf{r}(u, v)$  на  $\mathcal{N}$  и возьмём произвольную гладкую функцию  $\varphi: \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , обращающуюся в нуль вместе со своими производными на крае  $\partial\mathcal{N}$ , но такую, что  $\varphi(\mathbf{x}) \neq 0$ . Рассмотрим следующее семейство параметризованных поверхностей:

$$\mathbf{r}_t(u, v) = \mathbf{r}(u, v) + t\varphi(u, v)\mathbf{n}(u, v),$$

где  $\mathbf{n}$ , как обычно, — вектор нормали. При каждом фиксированном  $t$  из достаточно малой окрестности нуля эта формула задаёт регулярную параметризацию некоторой поверхности  $\mathcal{N}_t$  с тем же краем, что и  $\mathcal{N}$ . Так что по построению  $\sigma(\mathcal{N}_t) \geq \sigma(\mathcal{N})$ . Напомним формулу для площади на поверхности:

$$\sigma(\mathcal{N}) = \iint_{\mathcal{N}} \sqrt{\det \mathcal{G}} \, du \, dv,$$

где  $\mathcal{G}$  — риманова метрика на поверхности  $\mathcal{N}$ . Для регулярной параметризации подынтегральное выражение гладко зависит от первых производных радиус-вектора  $\mathbf{r}$  по  $u$  и  $v$ , поэтому  $\sigma(\mathcal{N}_t)$  — гладкая функция от  $t$ . Будем понимать  $g(t)$  определитель матрицы первой квадратичной формы поверхности  $\mathcal{N}_t$ . Далее хотим найти производную  $\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{g}$ .

$$g_{ij}(t) = \langle \mathbf{r}_i + t(\varphi_i \mathbf{n} + \varphi \mathbf{n}_i) + \bar{o}(t), \mathbf{r}_j + t(\varphi_j \mathbf{n} + \varphi \mathbf{n}_j) + \bar{o}(t) \rangle = \langle \mathbf{r}_i + t\varphi \mathbf{n}_i, \mathbf{r}_j + t\varphi \mathbf{n}_j \rangle + \bar{o}(t)$$

при  $t \rightarrow 0$ , поскольку  $\mathbf{n} \perp \mathbf{r}_k$ ,  $k = 1, 2$ . Таким образом,  $g(t)$  с точностью до  $\bar{o}(t)$  есть матрица Грама векторов  $\mathbf{r}_1 + t\varphi \mathbf{n}_1$ ,  $\mathbf{r}_2 + t\varphi \mathbf{n}_2$ , и выражается через них матрицей

$$E + t\varphi C,$$

где  $C = -\mathcal{G}^{-1}\mathcal{B}$  — матрица оператора Вайнгартена. (Это сразу следует из деривационных формул Вайнгартена.) Далее, вместо того, чтобы непосредственно вычислять  $\sqrt{g(t)}$ , вспомним, что эта величина равна площади параллелограмма, натянутого на соответствующую пару векторов, а отношение площадей равно абсолютной величине определителя соответствующей матрицы перехода, откуда

$$\frac{\sqrt{g(t)}}{\sqrt{g(0)}} = |\det(E + t\varphi C)| + \bar{o}(t) = 1 + t\varphi \operatorname{tr} C + \bar{o}(t) = 1 + t\varphi H + \bar{o}(t)$$

как следствие теоремы 4.10. Отсюда получаем  $\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{g} = \sqrt{\det \mathcal{G}} \varphi H$ . Таким образом,

$$\sigma(\mathcal{N}_t) = \sigma(\mathcal{N}) + t \iint_{\mathcal{N}} \sqrt{\det \mathcal{G}} \varphi H \, du \, dv + \bar{o}(t).$$

Поскольку площадь поверхности  $\mathcal{N}_t$  достигает минимума при  $t = 0$  мы должны иметь

$$0 = \left. \frac{d\sigma(\mathcal{N}_t)}{dt} \right|_{t=0} = \iint_{\mathcal{N}} \sqrt{\det \mathcal{G}} \varphi H \, du \, dv$$

при любом выборе функции  $\varphi$ . Покажем, что неравенство  $H \neq 0$  ведёт к противоречию с этим условием. Возьмём новую функцию  $\tilde{\varphi} = \varphi^2 H$ . Получим

$$\iint_{\mathcal{N}} \sqrt{\det \mathcal{G}} \tilde{\varphi} H \, du \, dv = \iint_{\mathcal{N}} \sqrt{\det \mathcal{G}} \varphi^2 H^2 \, du \, dv > 0,$$

так как подынтегральная функция неотрицательна, причём в точке  $\mathbf{x}$  она положительна. ■

Физический смысл минимальных поверхностей следующий. Если между двумя кривыми (или внутри одной замкнутой кривой) в пространстве натянуть мыльную плёнку, то она, стремясь всюду локально уменьшить свою площадь, примет форму минимальной поверхности. Самые простые примеры минимальных поверхностей — плоскость, геликоид и катеноид (на геликоид и катеноид можно посмотреть на рисунке 3.10). В этом легко убедиться, посчитав их среднюю кривизну.

## Векторные поля на поверхностях

**Определение 3.54.** Векторным полем на поверхности  $\mathcal{M}$  называется отображение, которое каждой точке  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$  ставит в соответствие вектор  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  из касательной плоскости  $\mathcal{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$ . Векторное поле  $\mathbf{v}$  называется *гладким*, если в локальной параметризации коэффициенты  $V^1, V^2$  разложения  $\mathbf{v} = V^i \mathbf{r}_i$  вектора  $\mathbf{v}$  по базису  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  являются гладкими функциями.

Отметим, что понятие гладкости векторного поля не зависит от выбора локальных координат, это сразу вытекает из теоремы о дифференцировании сложной функции.

С каждой локальной системой координат связаны два базисных векторных поля, определённых в соответствующей области на поверхности — это  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ . Их координаты по отношению к этой локальной системе постоянны:  $(1, 0)$  и  $(0, 1)$  соответственно. Зададим следующий вопрос: когда данная пара векторных полей  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$  может быть парой базисных векторных полей для некоторой локальной системы координат?

Разумеется, для начала нужно потребовать, чтобы  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}$  были линейно независимы в каждой точке. Однако этого, вообще говоря, недостаточно.

**Лемма 3.55.** Пусть  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  — два единичных линейно независимых векторных поля на поверхности  $\mathcal{M}$ . Тогда в окрестности каждой точки  $\mathbf{x}_0$  на поверхности  $\mathcal{M}$  можно выбрать локальные координаты  $(u^1, u^2)$  таким образом, чтобы  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{r}(0, 0)$ ,  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{e}_1$  при  $u^2 = 0$  и  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{e}_2$  всюду в некоторой окрестности точки  $\mathbf{x}_0$ .

Иными словами, любая линейно независимая пара векторных полей задаёт базис на некоторой достаточно малой простой дуге в заданной окрестности, а большего в общем случае сказать не получается.

**Доказательство.** Пусть  $(u^1, u^2)$  — произвольная система локальных координат в окрестности точки  $\mathbf{x}_0$ , причём  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{r}(u_0^1, u_0^2)$ . Обозначим координаты векторов  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$  по отношению к этой системе через  $(E_1^1, E_1^2)$  и  $(E_2^1, E_2^2)$  соответственно:

$$\mathbf{e}_i = E_i^j \mathbf{r}_j.$$

Решим уравнения

$$\frac{d}{ds} \varphi^i(s) = E_1^i(\varphi^1(s), \varphi^2(s))$$

с начальными условиями  $\varphi^i(0) = u_0^i$  для  $s$  из малой окрестности нуля. Геометрически это означает, что мы провели кривую  $\gamma$  на поверхности  $\mathcal{M}$  через точку  $\mathbf{x}_0$  так, чтобы её вектором скорости в каждой точке  $\mathbf{x}$  был вектор  $\mathbf{e}_1(\mathbf{x})$ . Параметр  $s$  является натуральным на этой кривой (потому что поля единичные).

Теперь для каждого фиксированного  $s$ , для которого определены функции  $\varphi^1$  и  $\varphi^2$ , решим уравнения

$$\frac{d}{dt} \psi^i = E_2^i(\psi^1, \psi^2)$$

с начальными условиями  $\psi^i|_{t=0} = \varphi^i(s)$ . Таким образом,  $\psi^1, \psi^2$  — функции двух аргументов,  $s$  и  $t$ :  $\psi^i = \psi^i(s, t)$ . По теореме о гладкой зависимости решения обыкновенного дифференциального уравнения от начальных условий,  $\psi^i(s, t)$  — гладкие функции. По построению,

$$\left( \begin{array}{cc} \frac{\partial \psi^1}{\partial s} & \frac{\partial \psi^1}{\partial t} \\ \frac{\partial \psi^2}{\partial s} & \frac{\partial \psi^2}{\partial t} \end{array} \right) \bigg|_{(s,t)=(0,0)} = \left( \begin{array}{cc} E_1^1 & E_2^1 \\ E_1^2 & E_2^2 \end{array} \right) \bigg|_{(u^1, u^2) = (u_0^1, u_0^2)}.$$

Эта матрица невырождена (потому что поля линейно независимы), поэтому локально

можно сделать замену координат  $u^1 = \psi^1(s, t)$ ,  $u^2 = \psi^2(s, t)$ . По построению будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{r}(\psi^1(s, t), \psi^2(s, t)) &= (\mathbf{r}_i E_1^i)(\psi^1(s, t), \psi^2(s, t)) = \mathbf{e}_1(\psi^1(s, t), \psi^2(s, t)) \text{ при } t = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r}(\psi^1(s, t), \psi^2(s, t)) &= (\mathbf{r}_i E_2^i)(\psi^1(s, t), \psi^2(s, t)) = \mathbf{e}_2(\psi^1(s, t), \psi^2(s, t)) \text{ при всех } s, t. \end{aligned}$$

■

Пусть гладкие векторные поля  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}$  линейно независимы в некоторой точке  $\mathbf{x}_0$ . Тогда они линейно независимы и в некоторой окрестности  $U$  точки  $\mathbf{x}_0$ . Пусть  $u^1, u^2$  — некоторая локальная система координат в этой окрестности. Мы хотим выяснить, существует ли другая система координат  $\tilde{u}^1, \tilde{u}^2$ , для которой всюду в  $U$  будет выполнено

$$(3.10) \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^1} \mathbf{r} = \mathbf{v}, \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^2} \mathbf{r} = \mathbf{w}.$$

Найти такую систему координат  $\tilde{u}^1, \tilde{u}^2$  означает найти функции перехода от неё к  $u^1, u^2$  (или наоборот, что эквивалентно). Равенства (3.10) равносильны следующим:

$$\frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}^1} \mathbf{r}_i = V^i \mathbf{r}_i, \quad \frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}^2} \mathbf{r}_i = W^i \mathbf{r}_i,$$

то есть следующей системе из двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}^1} = V^i(u^1, u^2), \\ \frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}^2} = W^i(u^1, u^2). \end{cases}$$

Выписываем для неё условие совместности (1.3):

$$\frac{\partial V^i}{\partial u^j} W^j = \frac{\partial W^i}{\partial u^j} V^j.$$

**Определение 3.56.** Для двух векторных полей  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$  их *коммутатором* называется векторное поле

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = \left( V^j \frac{\partial W^i}{\partial u^j} - W^j \frac{\partial V^i}{\partial u^j} \right) \mathbf{r}_i.$$

Если  $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] \equiv \mathbf{0}$ , то говорят, что поля  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}$  *коммутируют*.

**Предложение 3.57.** Определение коммутатора векторных полей корректно, то есть не зависит от выбора системы координат.

**Доказательство.** Рассмотрим  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}$  как отображения  $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ . По определению дифференциала, имеем для этих отображений:

$$d\mathbf{v}(\mathbf{w}) = \frac{\partial(V^i \mathbf{r}_i)}{\partial u^j} W^j = \left( \frac{\partial V^i}{\partial u^j} \mathbf{r}_i + V^i \mathbf{r}_{ij} \right) W^j.$$

Аналогично,

$$d\mathbf{w}(\mathbf{v}) = \left( \frac{\partial W^i}{\partial u^j} \mathbf{r}_i + W^i \mathbf{r}_{ij} \right) V^j.$$

Отметим, что второе слагаемое в обоих случаях одно и то же. Отсюда,

$$d\mathbf{w}(\mathbf{v}) - d\mathbf{v}(\mathbf{w}) = \left( V^j \frac{\partial W^i}{\partial u^j} - W^j \frac{\partial V^i}{\partial u^j} \right) \mathbf{r}_i = [\mathbf{v}, \mathbf{w}].$$

Таким образом, мы выразили коммутатор  $[v, w]$  через инвариантные величины  $d\mathbf{w}(v)$  и  $d\mathbf{v}(w)$ . Отметим, что каждая из этих двух величин не задаёт, вообще говоря, касательного поля к поверхности. ■

Используя введённое понятие коммутатора векторных полей, приведённое выше рассуждение резюмируется следующим образом.

**Теорема 3.58.** Два векторных поля  $v$  и  $w$  являются базисными векторными полями для некоторой локальной системы координат тогда и только тогда, когда они линейно независимы и коммутируют.

**Определение 3.59.** Производной функции  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  по направлению поля  $v$  называется новая функция  $L_v f: M \rightarrow \mathbb{R}$ , определяемая формулой  $(L_v f)(x) := \partial_{v(x)} f$ . Функция  $L_v f$  называется также производной Ли функции  $f$ .

Можно показать что оператор  $L_v L_w - L_w L_v$  — не второго порядка, как это кажется на первый взгляд, а первого, причём  $L_v L_w - L_w L_v = L_{[v, w]}$ . Так, например, определяется коммутатор векторных полей в книге [Арнольд]. (Из явной формулы для коммутатора, выведенной нами выше, сразу следует  $[v, w]^k = L_v W^k - L_w V^k$ .)

**Предложение 3.60.** Коммутатор  $[\cdot, \cdot]$  обладает следующими свойствами:

- (1)  $[v, u + \lambda w] = [v, u] + \lambda[v, w]$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  (линейность);
- (2)  $[v, w] + [w, v] = 0$  (кососимметричность);
- (3)  $[[v, u], w] + [[w, v], u] + [[u, w], v] = 0$  (тождество Якоби).

**Доказательство.** Явно проверить по выведенной выше формуле. ■

**Определение 3.61.** Линейное пространство с бинарной операцией, обладающей свойствами (1) — (3), называется алгеброй Ли.

Таким образом, векторные поля с операцией коммутирования образуют алгебру Ли. Известными примерами алгебр Ли служат также пространство  $\mathbb{R}^3$  с операцией векторного произведения и пространство линейных матриц  $n \times n$  с коммутатором  $[A, B] = AB - BA$ .

## Про обозначения для частных производных

Фраза, упомянутая в эпиграфе, была сказана Александром Александровичем на одном из семинаров в контексте неудачного выбора обозначений для частных производных. Аналогичное замечание я обнаружил в книге [Арнольд], так что привожу его ниже.

При работе с частными производными нужно твёрдо понимать, что в самом их обозначении кроется опасность: частная производная функции  $f$  по  $x$  зависит не только от того, какая функция в рассматриваемой области принята за координату  $x$ , но в ещё большей мере от того, как выбраны прочие координаты. Например, на плоскости с координатами  $(x, y)$  частная производная  $\partial f / \partial x$  функции  $y$  равна нулю, но частная производная  $\partial f / \partial x$  по той же функции точки плоскости по той же переменной  $x$  в системе координат  $(x, z)$ , где  $z = x + y$ , равна  $-1$ . Следовало бы писать  $\partial f / \partial x|_{y=\text{const}}$ ,  $\partial f / \partial x|_{z=\text{const}}$ .

## 4. Основные уравнения в теории поверхностей

Эти формулы надо запомнить, вот как хотите.<sup>13</sup>

А. А. Гайфуллин

### Деривационные уравнения. Тожества Кристоффеля

Мы хотим написать для поверхностей что-то похожее на формулы Френе, то есть наша цель — научиться дифференцировать векторы

$$\mathbf{r}_1 := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1}, \quad \mathbf{r}_2 := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2},$$

для этого нам будет удобно обозначить

$$\mathbf{r}_{ij} := \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^i \partial u^j}.$$

Векторы  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{n})$  образуют базис в каждой точке поверхности, поэтому каждый вектор  $\mathbf{r}_{ij}$  в нём как-то записывается. Заметим, что коэффициент при  $\mathbf{n}$  мы уже знаем — это соответствующий элемент матрицы второй квадратичной формы  $b_{ij}$ . Действительно, ведь по определению  $b_{ij} = \langle \mathbf{r}_{ij}, \mathbf{n} \rangle$ .

**Определение 4.1.** Коэффициенты  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$  в разложении

$$(4.1) \quad \mathbf{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{r}_k + b_{ij} \mathbf{n}$$

называются *символами Кристоффеля*.

**Лемма 4.2** (Тожества Кристоффеля). Символы Кристоффеля однозначно определяются метрикой на поверхности. Более точно, верна следующая формула:

$$(4.2) \quad \Gamma_{ij}^k = \frac{g^{kl}}{2} \left( \frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} \right),$$

где  $g^{kl}$  обозначают элементы матрицы  $\mathcal{G}^{-1}$ .

**Доказательство.** Напишем

$$(4.3) \quad \langle \mathbf{r}_{ij}, \mathbf{r}_l \rangle = \Gamma_{ij}^s \langle \mathbf{r}_s, \mathbf{r}_l \rangle = \Gamma_{ij}^s g_{sl}$$

и

$$\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} = \frac{\partial}{\partial u^j} \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_l \rangle = \langle \mathbf{r}_{ij}, \mathbf{r}_l \rangle + \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_{jl} \rangle.$$

Последнюю формулу напишем три раза, сдвигая координаты:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} &= \langle \mathbf{r}_{ij}, \mathbf{r}_l \rangle + \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_{jl} \rangle, \\ \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} &= \langle \mathbf{r}_{ij}, \mathbf{r}_l \rangle + \langle \mathbf{r}_j, \mathbf{r}_{il} \rangle, \\ \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} &= \langle \mathbf{r}_{il}, \mathbf{r}_j \rangle + \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_{jl} \rangle. \end{aligned}$$

<sup>13</sup>Речь шла о формулах (4.2) и (5.3).

Сложим первые две строки из них и вычтем третью, получим

$$\langle \mathbf{r}_{ij}, \mathbf{r}_l \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} \right).$$

Теперь подставляем (4.3):

$$g_{ls} \Gamma_{ij}^s = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} \right).$$

Домножаем обе части на  $g^{kl}$  и суммируем по  $k$ . Слева получим  $g^{kl} g_{ls} \Gamma_{ij}^s = \delta_s^k \Gamma_{ij}^s = \Gamma_{ij}^k$ :

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{g^{kl}}{2} \left( \frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} \right).$$

■

Отметим, что попутно мы доказали ещё один набор важных формул. Можно напрямую подставить в (4.1) формулы вида (4.3), получим следующее.

**Лемма 4.3.** Выполнены следующие тождества:

$$(4.5) \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = g_{js} \Gamma_{ik}^s + g_{is} \Gamma_{jk}^s.$$

Следует отметить, что символы Кристоффеля не задают никакого тензора в касательном пространстве к поверхности.

**Задача 4.4.** Вывести формулы преобразования символов Кристоффеля при переходе к новым координатам. (И убедиться, что они не совпадают с тензорными.)

**Решение.** Для удобства будем обозначать частную производную по  $u^i$  через  $\partial_i$  (аналогично для других индексов). Мы знаем тождества Кристоффеля:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{g^{kl}}{2} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}).$$

Метрика преобразуется, как тензор ранга 2:

$$\tilde{g}_{ij} = \frac{\partial u^p}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^q}{\partial \tilde{u}^j} g_{pq}, \quad \tilde{g}^{kl} = \frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial u^m} \frac{\partial \tilde{u}^l}{\partial u^n} g^{mn}.$$

Вычислим  $\partial_i g_{jl}$  в новых координатах:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{u}^i} \tilde{g}_{jl} = \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^i} \left( \frac{\partial u^q}{\partial \tilde{u}^j} \frac{\partial u^r}{\partial \tilde{u}^l} g_{qr} \right) = (\partial_p g_{qr}) \frac{\partial u^p}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^q}{\partial \tilde{u}^j} \frac{\partial u^r}{\partial \tilde{u}^l} + g_{qr} \left( \frac{\partial^2 u^q}{\partial \tilde{u}^i \partial \tilde{u}^j} \frac{\partial u^r}{\partial \tilde{u}^l} + \frac{\partial^2 u^r}{\partial \tilde{u}^i \partial \tilde{u}^l} \frac{\partial u^q}{\partial \tilde{u}^j} \right).$$

Подставляем в тождества Кристоффеля для  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{ij}^k &= \frac{\tilde{g}^{kl}}{2} \left( (\partial_p g_{qr}) \frac{\partial u^p}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^q}{\partial \tilde{u}^j} \frac{\partial u^r}{\partial \tilde{u}^l} + g_{qr} \left( \frac{\partial^2 u^q}{\partial \tilde{u}^i \partial \tilde{u}^j} \frac{\partial u^r}{\partial \tilde{u}^l} + \frac{\partial^2 u^r}{\partial \tilde{u}^i \partial \tilde{u}^l} \frac{\partial u^q}{\partial \tilde{u}^j} \right) + \right. \\ &\quad + (\partial_q g_{pr}) \frac{\partial u^p}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^q}{\partial \tilde{u}^j} \frac{\partial u^r}{\partial \tilde{u}^l} + g_{qr} \left( \frac{\partial^2 u^q}{\partial \tilde{u}^j \partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^r}{\partial \tilde{u}^l} + \frac{\partial^2 u^r}{\partial \tilde{u}^j \partial \tilde{u}^l} \frac{\partial u^q}{\partial \tilde{u}^i} \right) - \\ &\quad \left. - (\partial_r g_{pq}) \frac{\partial u^p}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^q}{\partial \tilde{u}^j} \frac{\partial u^r}{\partial \tilde{u}^l} - g_{qr} \left( \frac{\partial^2 u^q}{\partial \tilde{u}^l \partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^r}{\partial \tilde{u}^j} + \frac{\partial^2 u^r}{\partial \tilde{u}^l \partial \tilde{u}^j} \frac{\partial u^q}{\partial \tilde{u}^i} \right) \right). \end{aligned}$$



В последней формуле отдельно вынесим первые слагаемые в каждой большой скобке:

$$\begin{aligned}
 \frac{\tilde{g}^{kl}}{2} ((\partial_p g_{qr}) + (\partial_q g_{pr}) - (\partial_r g_{pq})) \frac{\partial u^p}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^q}{\partial \tilde{u}^j} \frac{\partial u^r}{\partial \tilde{u}^l} &= \\
 &= \frac{g^{mn}}{2} \frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial u^m} \frac{\partial \tilde{u}^l}{\partial u^n} ((\partial_p g_{qr}) + (\partial_q g_{pr}) - (\partial_r g_{pq})) \frac{\partial u^p}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^q}{\partial \tilde{u}^j} \frac{\partial u^r}{\partial \tilde{u}^l} = \\
 &= \frac{g^{mn}}{2} ((\partial_p g_{qr}) + (\partial_q g_{pr}) - (\partial_r g_{pq})) \frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial u^m} \frac{\partial u^p}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^q}{\partial \tilde{u}^j} \delta_n^r = \\
 &= \underbrace{\frac{g^{mr}}{2} ((\partial_p g_{qr}) + (\partial_q g_{pr}) - (\partial_r g_{pq}))}_{\Gamma_{pq}^m} \frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial u^m} \frac{\partial u^p}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^q}{\partial \tilde{u}^j}.
 \end{aligned}$$

Эта часть соответствует тензорному закону. Посчитаем остаток:

$$\begin{aligned}
 \tilde{g}^{kl} g_{qr} \left( \frac{\partial^2 u^q}{\partial \tilde{u}^i \partial \tilde{u}^j} \frac{\partial u^r}{\partial \tilde{u}^l} \right) &= g^{mn} g_{qr} \frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial u^m} \frac{\partial \tilde{u}^l}{\partial u^n} \left( \frac{\partial^2 u^q}{\partial \tilde{u}^i \partial \tilde{u}^j} \frac{\partial u^r}{\partial \tilde{u}^l} \right) = \\
 &= \left\{ \frac{\partial \tilde{u}^l}{\partial u^n} \frac{\partial u^r}{\partial \tilde{u}^l} = \delta_n^r \right\} = \underbrace{g^{mr} g_{rq}}_{\delta_q^m} \frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial u^m} \frac{\partial^2 u^m}{\partial \tilde{u}^i \partial \tilde{u}^j} = \frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial u^m} \frac{\partial^2 u^m}{\partial \tilde{u}^i \partial \tilde{u}^j}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, получаем формулу преобразования символов Кристоффеля при переходе к новым координатам:

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{pq}^m \frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial u^m} \frac{\partial u^p}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^q}{\partial \tilde{u}^j} + \frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial u^m} \frac{\partial^2 u^m}{\partial \tilde{u}^i \partial \tilde{u}^j}.$$

Из полученных формул видно, что символы Кристоффеля преобразуются, как тензоры, тогда и только тогда, когда замена координат  $(u^1, u^2) \rightarrow (\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$  линейна. ■

Уравнения (4.1) с подстановкой (4.2) называются *деривационными уравнениями Гаусса*.

Теперь хотим дифференцировать вектор  $\mathbf{n}$ . Обозначим

$$\mathbf{n}_1 := \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^1} \quad \text{и} \quad \mathbf{n}_2 := \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^2}.$$

Поскольку вектор  $\mathbf{n}$  имеет постоянную длину, оба этих вектора ортогональны  $\mathbf{n}$ , а значит, выражаются через базисные векторы  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  касательного пространства в соответствующей точке. Пока напишем формально:

$$(4.6) \quad \mathbf{n}_i = c_i^j \mathbf{r}_j,$$

позже мы придадим коэффициентам  $c_i^j$  какой-то смысл.

**Лемма 4.5.** Имеет место равенство

$$(4.7) \quad c_i^j = -g^{jk} b_{ki},$$

где  $g^{jk}$  обозначают элементы матрицы  $\mathcal{G}^{-1}$ .

**Доказательство.** Векторы  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{r}_k$  ортогональны (по построению), поэтому

$$\langle \mathbf{n}_i, \mathbf{r}_k \rangle = -\langle \mathbf{n}, \mathbf{r}_{ik} \rangle = -b_{ik}.$$

Подставляя выражение для  $\mathbf{n}_i$ , получаем

$$c_i^j \langle \mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k \rangle = c_i^j g_{jk} = -b_{ik}$$

Переписываем в матричном виде (с учётом  $b_{ik} = b_{ki}$ ):

$$\mathcal{G}C = -\mathcal{B}, \text{ где } C = (c_i^j).$$

Из него можно выразить матрицу  $C$  как  $C = -\mathcal{G}^{-1}\mathcal{B}$ , или, в обозначениях Эйнштейна,

$$c_i^j = -g^{jk}b_{ki}.$$

■

Уравнения (4.6) с подстановкой (4.7) называются *деривационными уравнениями Вайнгартена*. Вместе, уравнения

$$(4.8) \quad \begin{cases} \mathbf{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{r}_k + b_{ij} \mathbf{n}, \\ \mathbf{n}_i = c_i^j \mathbf{r}_j \end{cases}$$

называются *деривационными уравнениями Гаусса — Вайнгартена*. Заметим, что все коэффициенты этих уравнений выражаются через первую и вторую квадратичные формы поверхности. Так что, разрешив эти уравнения относительно  $\mathbf{r}$ , по первой и второй квадратичной форме мы восстановим поверхность. Так же мы раньше восстанавливали пространственные кривые по кривизне и кручению. Отметим, однако, что если кривую можно было восстановить про произвольным гладким функциям кривизны и кручения, то теперь для деривационных уравнений имеется нетривиальное условие совместности. Мы вернёмся к этому позже в следующем разделе.

Теперь обсудим смысл коэффициентов  $c_i^j$ . Разумеется, они зависят от параметризации, но матрица  $C$  преобразуется как матрица линейного оператора в касательном пространстве к поверхности, так как  $C = -\mathcal{G}^{-1}\mathcal{B}$ . (С точностью до знака мы просто подняли индекс у квадратичной формы  $\mathcal{B}$ .)

**Определение 4.6.** *Сферическим отображением* гладкой поверхности  $\mathcal{M}$  называется отображение  $\nu: \mathcal{M} \rightarrow S^2$ , которое каждой точке  $\mathbf{x}$  поверхности ставит в соответствие единичный вектор нормали  $\mathbf{n}$  к соответствующей касательной плоскости  $\mathcal{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$ .

Это определение, строго говоря, задаёт отображение  $\nu$  лишь с точностью до знака. Знак  $\mathbf{n}$  выбирается таким, чтобы тройка векторов  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{n})$  была положительно ориентированной.

**Предложение 4.7.** Для любой точки  $\mathbf{x}$  поверхности  $\mathcal{M}$  касательные пространства  $\mathcal{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$  и  $\mathcal{T}_{\nu(\mathbf{x})}S^2$  совпадают.

**Доказательство.** Вектор  $\xi$  лежит в касательной плоскости  $\mathcal{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$  тогда и только тогда, когда  $\xi \perp \mathbf{n}$ . При этом же условии он лежит в касательной плоскости  $\mathcal{T}_{\nu(\mathbf{x})}S^2$ . ■

Последнее предложение означает, что дифференциал  $d\nu|_{\mathbf{x}}$  сферического отображения можно понимать как линейный оператор в касательной плоскости  $\mathcal{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$ . Сопоставляя определение дифференциала и деривационные формулы Вайнгартена  $\mathbf{n}_i = -g^{jk}b_{ki}\mathbf{r}_j$ , мы немедленно получаем следующее утверждение.

**Предложение 4.8.** Оператор  $d\nu$  имеет в базисе  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  матрицу  $C = (c_i^j)$ , элементы которой определены формулами (4.7).

**Определение 4.9.** Оператор, заданный в касательном пространстве матрицей  $C$ , называется *оператором Вайнгартена*.

**Теорема 4.10.** Оператор Вайнгартена самосопряжён относительно скалярного произведения, заданного в  $\mathcal{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$  первой квадратичной формой. Векторы главных направлений  $\xi_1$  и  $\xi_2$  являются для него собственными, а соответствующие им собственные значения суть главные кривизны, взятые с обратным знаком:  $-\lambda_1, -\lambda_2$ . Кроме того,

$$\det(d\nu|_{\mathbf{x}}) = \frac{\det \mathcal{B}}{\det \mathcal{G}} = K.$$

Последняя теорема доказывается прямой проверкой всех определений.

**Следствие 4.11** (Формулы Родрига). Имеют место следующие формулы:

$$\partial_{\xi_k} \mathbf{n} = -\lambda_k \xi_k.$$

**Доказательство.** Напишем деривационные формулы Вайнгартена  $\mathbf{n}_i = c_i^j \mathbf{r}_j$  и домножим обе части на  $\xi_k^i$ . Получим

$$\underbrace{\xi_k^i \mathbf{n}_i}_{\partial_{\xi_k} \mathbf{n}} = \underbrace{c_i^j \xi_k^i \mathbf{r}_j}_{-\lambda_k \xi_k^j} = -\lambda_k \xi_k.$$

Последнее равенство выполнено, так как вектор  $\xi_k$  является собственным для оператора Вайнгартена с собственным значением  $-\lambda_k$ . ■

### Совместность деривационных уравнений, теорема Бонне

Запишем деривационные уравнения (4.8) в матричном виде:

$$\frac{\partial}{\partial u^i} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{n} \end{pmatrix} A_i,$$

где

$$A_i = \begin{pmatrix} \Gamma_{i1}^1 & \Gamma_{i1}^2 & -b_{ik}g^{k1} \\ \Gamma_{i2}^1 & \Gamma_{i2}^2 & -b_{ik}g^{k2} \\ b_{i1} & b_{i2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Если рассматривать эти уравнения как пару дифференциальных уравнений на матрицу  $X = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{n})$ , то условие совместности (1.3) из теоремы Дарбу для них принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial u^1} A_2 + A_1 A_2 = \frac{\partial}{\partial u^2} A_1 + A_2 A_1,$$

что можно переписать как

$$(4.9) \quad \frac{\partial A_1}{\partial u^2} - \frac{\partial A_2}{\partial u^1} = [A_1, A_2],$$

где  $[A_1, A_2] = A_1 A_2 - A_2 A_1$  — коммутатор матриц.

В формулировке следующей теоремы поверхность понимается в более широком смысле, чем в наших определениях. А именно, поверхности разрешается иметь самопересечения.

**Теорема 4.12** (Бонне). Пусть  $g_{ij}(u^1, u^2)$ ,  $b_{ij}(u^1, u^2)$ , где  $i, j = 1, 2$ , — набор гладких функций в замкнутой односвязной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , удовлетворяющие условиям: матрицы  $G = (g_{ij})$  и  $B = (b_{ij})$  симметричны для всех точек  $(u^1, u^2) \in \Omega$ , причём матрица  $G$  положительно определена. Тогда

- (1) в  $\mathbb{R}^3$  существует поверхность  $\mathcal{M}$  с регулярной параметризацией  $\Omega \rightarrow \mathcal{M}$ , для которой первая и вторая квадратичные формы равны

$$\mathbf{I} = g_{ij} du^i du^j, \quad \mathbf{II} = b_{ij} du^i du^j$$

тогда и только тогда, когда функции  $g_{ij}$ ,  $b_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) удовлетворяют условиям совместности (4.9);

- (2) если поверхность с такими квадратичными формами существует, то она единственна с точностью до движения всего пространства  $\mathbb{R}^3$ .

**Доказательство.** Чтобы не углубляться в технические детали, проведём доказательство в том случае, когда область  $\Omega$  является квадратом  $[0; 1] \times [0; 1]$ .

Покажем необходимость условий (4.9). Пусть данные коэффициенты  $(g_{ij})$  и  $(b_{ij})$  соответствуют некоторой поверхности в  $\mathbb{R}^3$  с параметризацией  $\mathbf{r}(u^1, u^2)$ . Тогда матрица  $X = (\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ \mathbf{n})$  удовлетворяет паре уравнений

$$\frac{\partial}{\partial u^1} X = X A_1, \quad \frac{\partial}{\partial u^2} X = X A_2,$$

то есть, казавось бы, мы умеем решать систему только при одном начальном условии  $X|_{(0,0)}$ , а хотим при всех (см. условие теоремы Дарбу 1.14). Но заметим, что уравнения (4.9) линейные, а потом замена  $X \mapsto CX$  (где  $C$  — любая матрица) переводит одно системы решение в другое. Так что возможность решить систему при каком-то одном начальном условии даёт нам возможность решить её при любых начальных условиях<sup>14</sup>.

Теперь обсудим единственность восстановления с точностью до движений  $\mathbb{R}^3$ . Векторы  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  и  $\mathbf{n}$  удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial}{\partial u^1} (\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ \mathbf{n}) = (\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ \mathbf{n}) A_1,$$

которое полностью определяет их в точках вида  $(u^1, 0)$  для всех  $u^1$  при известных начальных значениях  $\mathbf{r}_1|_{(0,0)}$ ,  $\mathbf{r}_2|_{(0,0)}$ ,  $\mathbf{n}|_{(0,0)}$ . Далее, из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial u^2} (\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ \mathbf{n}) = (\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ \mathbf{n}) A_2$$

значения  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  и  $\mathbf{n}$  находятся во всех точках  $(u^1, u^2) \in \Omega$ . Аналогичным образом, параметризация  $\mathbf{r}(u^1, u^2)$  находится однозначно при известных  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ , если известно начальное условие  $\mathbf{r}|_{(0,0)}$ .

Таким образом, вся неоднозначность восстановления поверхности сводится к выбору начальных значений  $\mathbf{r}|_{(0,0)}$ ,  $\mathbf{r}_1|_{(0,0)}$ ,  $\mathbf{r}_2|_{(0,0)}$  и  $\mathbf{n}|_{(0,0)}$ . При этом нам жёстко задана матрица Грама последних трёх векторов (а первый есть просто радиус-вектор точки, к которой приложен репер). Поэтому единственная свобода выбора начальных условий — это движения всего пространства  $\mathbb{R}^3$ .

Перейдём к сложной части — достаточности. Согласно теореме Дарбу 1.14 условия совместности (4.9) дают возможность найти векторы  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  и  $\mathbf{n}$ , удовлетворяющие уравнениям

$$(4.10) \quad \frac{\partial}{\partial u^1} (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{n}) = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{n}) A_1, \quad \frac{\partial}{\partial u^2} (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{n}) = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{n}) A_2$$

в некоторой окрестности точки  $(u^1, u^2) = (0, 0)$  при данном начальном условии. Так что вопрос здесь только в том, чтобы решить эти уравнения на всём квадрате  $\Omega$ , а не только в малой окрестности начала координат. В данном случае решение распространяется на всю область, так как рассматриваемые уравнения линейны, а линейные уравнения решаются «сколь угодно далеко». Здесь также важно, что процедура восстановления векторов  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  и  $\mathbf{n}$ , описанная на предыдущем шаге (где эти же векторы обозначались через, соответственно,  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  и  $\mathbf{n}$ ), в точности повторяет процедуру построения решения в доказательстве теоремы Дарбу 1.14. Как там было показано, при выполнении условий совместности, такая процедура приводит к решению обоих уравнений системы.

Далее, собственно для восстановления поверхности, нужно при уже известных векторах  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  решить уравнения

$$(4.11) \quad \frac{\partial}{\partial u^1} \mathbf{r} = \mathbf{v}_1, \quad \frac{\partial}{\partial u^2} \mathbf{r} = \mathbf{v}_2.$$

<sup>14</sup>Отметим, что это общая специфика линейных систем дифференциальных уравнений.

Условие совместности для этой системы имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial u^2} v_1 = \frac{\partial}{\partial u^1} v_2$$

(см. пример 1.15). Оно выполнено, так как верны формулы

$$\frac{\partial v_i}{\partial u^j} = \Gamma_{ij}^k v_k + b_{ij} n.$$

(Они, в свою очередь, верны просто в силу уравнений (4.10).) Действительно, ведь правые части этих формул симметричны по  $i$  и  $j$ , а значит, и левые тоже. Таким образом, локальных препятствий к решению системы (4.11) нет, а существование решения на всём квадрате снова следует из вида уравнений, здесь правая часть не зависит от  $\mathbf{r}$ , и они решаются простым интегрированием.

Итак, мы построили решения системы

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial u^i} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & n \end{pmatrix} A_i, \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j} = \mathbf{v}_j \end{cases}$$

с начальными условиями на  $\mathbf{r}|_{(0,0)}$ ,  $\mathbf{r}_1|_{(0,0)}$ ,  $\mathbf{r}_2|_{(0,0)}$  и  $\mathbf{n}|_{(0,0)}$ . Теперь нас беспокоит следующий вопрос — а действительно ли данные нам  $g_{ij}$  и  $b_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) являются коэффициентами, соответственно, первой и второй квадратичной формы построенной нами поверхности?

Рассмотрим матрицу  $\tilde{G}$  первой квадратичной формы нашей поверхности, то есть матрицу Грама векторов  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{n})$ :

$$\tilde{G} := \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & n \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & n \end{pmatrix}.$$

В силу уравнений (4.10) напомним:

$$\frac{\partial}{\partial u^i} \tilde{G} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & n \end{pmatrix}_{u^i}^t \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & n \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & n \end{pmatrix}_{u^i} = A_i^t \tilde{G} + \tilde{G} A_i.$$

А теперь рассмотрим матрицу

$$\hat{G} := \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{12} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оказывается, для неё выполнены те же формулы.

**Лемма 4.13.** Выполнено

$$\frac{\partial}{\partial u^i} \hat{G} = A_i^t \hat{G} + \hat{G} A_i.$$

**Доказательство.** Отметим, что матрица в правой части точно нулевая всюду, кроме главного минора  $2 \times 2$ . Действительно, для правой нижней клетки это очевидно, а для остальных легко проверить. Проверим, например, для нижней центральной клетки:

$$\begin{pmatrix} -b_{ik} g^{k1} & -b_{ik} g^{k2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{12} \\ g_{22} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^2 \\ \Gamma_{22}^2 \\ b_{12} \end{pmatrix} = -b_{ik} g^{ks} g_{s2} + b_{12} = -b_{12} + b_{12} = 0.$$

Таким образом, вне главного минора  $2 \times 2$  матрицы в левой и правой частях данного равенства обе нулевые. А внутри него у матрицы в правой части мы получаем правые части формул (4.5). ■

Итак, мы поняли, что матрицы  $\hat{G}$  и  $\tilde{G}$  удовлетворяют одним и тем же дифференциальным уравнениям. Мы также знаем, что в начальный момент эти матрицы совпадают:

$\widehat{G}|_{(0,0)} = \widetilde{G}|_{(0,0)}$ . В силу дифференциальных уравнений, наши матрицы однозначно восстанавливаются по начальному условию, поэтому на самом деле они совпадают всюду.

Таким образом,  $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = g_{ij}$  и  $\langle \mathbf{v}_k, \mathbf{n} \rangle = 0$ , поэтому наши  $g_{ij}$  действительно являются элементами матрицы первой квадратичной формы нашей поверхности, а  $\mathbf{n}$  — вектором нормали. Теперь

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial u^j}, \mathbf{n} \right\rangle = \langle \Gamma_{ij}^k \mathbf{v}_k + b_{ij} \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = b_{ij},$$

так как  $\mathbf{v}_k \perp \mathbf{n}$ . Поэтому и вторая квадратичная форма тоже правильная. ■

### Уравнения Гаусса — Кодаци, теорема Гаусса

На первый взгляд, система (4.9) содержит девять уравнений. Распишем их подробно, чтобы выяснить их истинное число и конкретный вид. Как и в предыдущем разделе, обозначим через  $\widehat{G}$  матрицу Грама векторов  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{n})$ :

$$\widehat{G} := \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{12} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что матрица  $\widehat{G}$  невырождена (её определитель равен определителю матрицы  $\mathcal{G}$  первой квадратичной формы), а потому, домножив левую часть матричного уравнения

$$\frac{\partial A_1}{\partial u^2} - \frac{\partial A_2}{\partial u^1} - A_1 A_2 + A_2 A_1 = 0$$

на  $\widehat{G}$ , получим равносильную систему уравнений.

**Лемма 4.14.** Матрица  $\widehat{G} \left( \frac{\partial A_1}{\partial u^2} - \frac{\partial A_2}{\partial u^1} - A_1 A_2 + A_2 A_1 \right)$  кососимметрична.

**Доказательство.** Обозначим эту матрицу через  $S$ . Применяя лемму 4.13, напомним

$$\begin{aligned} S &= \frac{\partial(\widehat{G}A_1)}{\partial u^2} - \frac{\partial \widehat{G}}{\partial u^2} A_1 - \frac{\partial(\widehat{G}A_2)}{\partial u^1} + \frac{\partial \widehat{G}}{\partial u^1} A_2 - \widehat{G}A_1 A_2 + \widehat{G}A_2 A_1 = \\ &= \frac{\partial(\widehat{G}A_1)}{\partial u^2} - A_2^t \widehat{G}A_1 - \widehat{G}A_2 A_1 - \frac{\partial(\widehat{G}A_2)}{\partial u^1} + A_1^t \widehat{G}A_2 + \widehat{G}A_1 A_2 - \widehat{G}A_1 A_2 + \widehat{G}A_2 A_1 = \\ &= \frac{\partial(\widehat{G}A_1)}{\partial u^2} - \frac{\partial(\widehat{G}A_2)}{\partial u^1} + \underbrace{A_1^t \widehat{G}A_2 - A_2^t \widehat{G}A_1}_{\text{кососимметрична}}. \end{aligned}$$

Далее пишем

$$S + S^t = \frac{\partial(\widehat{G}A_1 + A_1^t \widehat{G})}{\partial u^2} - \frac{\partial(\widehat{G}A_2 + A_2^t \widehat{G})}{\partial u^1} = \frac{\cancel{\partial^2 \widehat{G}}}{\cancel{\partial u^1 u^2}} - \frac{\cancel{\partial^2 \widehat{G}}}{\cancel{\partial u^1 u^2}} = 0.$$

Таким образом, матрица  $S$  кососимметрична. ■

Итак, мы свели систему уравнений (4.9) на матрицу  $3 \times 3$  к равносильной системе с кососимметричной матрицей. А у такой системы может быть не более трёх независимых уравнений. Будем изучать их по отдельности.

**Определение 4.15.** Уравнение

$$\left( \widehat{G} \left( \frac{\partial A_1}{\partial u^2} - \frac{\partial A_2}{\partial u^1} - A_1 A_2 + A_2 A_1 \right) \right)_{12} = 0$$

называется *уравнением Гаусса*.

Подставив матрицы  $\hat{G}$  и  $A_i$ , получаем развёрнутый вид уравнения Гаусса:

$$(4.12) \quad g_{1k} \left( \frac{\partial \Gamma_{22}^k}{\partial u^1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^k}{\partial u^2} + \Gamma_{k1}^s \Gamma_{22}^k - \Gamma_{s2}^k \Gamma_{21}^s \right) - b_{12} b_{22} + b_{12}^2 = 0.$$

Замечательно в этом уравнении то, что из него можно выразить определитель матрицы второй квадратичной формы через символы Кристоффеля, которые, в свою очередь, определяются только метрикой. Отсюда можем сделать следующие выводы.

**Теорема 4.16** (Гаусс). Гауссова кривизна однозначно определяется метрикой. Более точно, выполнена следующая формула:

$$(4.13) \quad K = \frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} g_{1k} \left( \frac{\partial \Gamma_{22}^k}{\partial u^1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^k}{\partial u^2} + \Gamma_{s1}^k \Gamma_{22}^s - \Gamma_{s2}^k \Gamma_{21}^s \right).$$

**Следствие 4.17.** Если  $\varphi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  — изометрия поверхностей, то для всех точек  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$  гауссова кривизна поверхности  $\mathcal{N}$  в точке  $\varphi(\mathbf{x})$  совпадает с гауссовой кривизной поверхности  $\mathcal{M}$  в точке  $\mathbf{x}$ .

Обратное, вообще говоря, неверно — существуют не локально изометричные поверхности с одинаковыми гауссовыми кривизнами.

Вернёмся к уравнениям совместности. Мы рассмотрели одно уравнение из трёх независимых, осталось ещё два.

**Определение 4.18.** Уравнения

$$\left( \hat{G} \left( \frac{\partial A_1}{\partial u^2} - \frac{\partial A_2}{\partial u^1} - A_1 A_2 + A_2 A_1 \right) \right)_{31} = 0, \quad \left( \hat{G} \left( \frac{\partial A_1}{\partial u^2} - \frac{\partial A_2}{\partial u^1} - A_1 A_2 + A_2 A_1 \right) \right)_{32} = 0$$

называются *уравнениями Кодацци*.

При выполнении нужных подстановок уравнения Кодацци обретают вид

$$(4.14) \quad \frac{\partial b_{12}}{\partial u^1} - \frac{\partial b_{11}}{\partial u^2} + b_{s1} \Gamma_{12}^s - b_{s2} \Gamma_{11}^s = 0, \quad \frac{\partial b_{22}}{\partial u^1} - \frac{\partial b_{21}}{\partial u^2} + b_{s1} \Gamma_{22}^s - b_{s2} \Gamma_{21}^s = 0.$$

Вместе уравнения (4.12) и (4.14) называются *уравнениями Гаусса — Кодацци* и выражают совместность деривационных уравнений Гаусса — Вайнгартена.

## Поверхности постоянной отрицательной кривизны

Уравнения Кодацци (4.14) — это, вообще говоря, сложные уравнения в частных производных первого порядка. Но есть специальный случай, в котором их удаётся решить, это поверхности с постоянной отрицательной гауссовой кривизной. Отметим, что при гомотетиях гауссова кривизна поверхности умножается всюду на одно и то же положительное число, так что достаточно рассмотреть случай  $K \equiv -1$ .

**Определение 4.19.** Касательный вектор  $\xi \in \mathcal{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$  называется *асимптотическим*, если  $\Pi|_{\mathbf{x}}(\xi) = 0$ . Кривая называется *асимптотической линией*, если её вектор скорости в каждой точке асимптотический.

Если гауссова кривизна поверхности отрицательна, то отрицателен и определитель матрицы  $B$  второй квадратичной формы, а для квадратичной формы с отрицательным определителем на плоскости имеется ровно два асимптотических направления. Это можно понять несколькими способами: вспомнить курс аналитической геометрии или посмотреть на формулу Эйлера 3.46 и воспользоваться соображениями непрерывности. Это также можно увидеть наглядно, вспомнив про приближающие поверхность параболоиды: содержащиеся в них прямые дают нулевые кривизны нормальных сечений вдоль соответствующих направлений.



Обозначим эти два асимптотических направления через  $e_1$  и  $e_2$ . (Ясно при этом, что на самом деле естественным образом их занумеровать не получается, однако можно как-то их занумеровать в каждой точке и продолжить на её малую окрестность по непрерывности.)

Итак, на поверхности отрицательной кривизны мы локально указали два векторных поля  $e_1, e_2$  (с точностью до знака каждого из них и перестановки). Оказывается, что на поверхности постоянной отрицательной кривизны эти поля являются базисными, что мы сейчас и покажем.

Далее считаем, что локально координаты введены, как в лемме 3.55. В этих координатах мы знаем вид первой и второй квадратичных форм. На всей области имеем

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & 0 \end{pmatrix}.$$

При  $u^2 = 0$  у матрицы  $\mathcal{G}$  на диагонали стоят единицы, а у матрицы  $\mathcal{B}$  — нули. Более того, мы знаем, что  $\det \mathcal{B} / \det \mathcal{G} = -1$  (из формулы для гауссовой кривизны), отсюда  $\det \mathcal{B} = -1$ . Поэтому на самом деле вне диагонали в матрице  $\mathcal{B}$  стоят  $\pm 1$ . Мы можем считать, что там стоят 1, потому что если это не так, можно сменить знак у координаты  $u^2$ :

$$(4.15) \quad \mathcal{G}|_{u^2=0} = \begin{pmatrix} 1 & * \\ * & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}|_{u^2=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

На всей области мы знаем (из  $K = -1$ ), что  $b_{12} = \sqrt{\det \mathcal{G}}$  (опять же, здесь надо писать  $\pm \det \mathcal{G}$ , но мы можем поменять знак у какой-то координаты), где  $\det \mathcal{G} = g_{11} - g_{12}^2$ .

Итак, у нас есть два уравнения Кодацци (4.14):

$$\frac{\partial b_{12}}{\partial u^1} - \frac{\partial b_{11}}{\partial u^2} + b_{s1}\Gamma_{12}^s - b_{s2}\Gamma_{11}^s = 0, \quad \frac{\partial b_{22}}{\partial u^1} - \frac{\partial b_{21}}{\partial u^2} + b_{s1}\Gamma_{22}^s - b_{s2}\Gamma_{21}^s = 0,$$

и три неизвестных функции  $g_{11}, g_{12}$  и  $b_{11}$  (напомним, что  $b_{12}$  мы уже выразили). Здесь нужно сделать трюк: предположим, что  $g_{12}$  — известная функция, и будем пытаться восстановить через неё  $g_{11}$  и  $b_{11}$ . В уравнениях Кодацци уже можно выполнить некоторые подстановки, при этом нам будет удобно<sup>15</sup> обозначить  $g := \det \mathcal{G}$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u^1} - \frac{\partial b_{11}}{\partial u^2} + b_{11}\Gamma_{12}^1 + b_{12}\Gamma_{12}^2 - b_{12}\Gamma_{11}^1 &= 0, \\ -\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u^2} + b_{11}\Gamma_{22}^1 + b_{12}\Gamma_{22}^2 - b_{12}\Gamma_{21}^2 &= 0. \end{aligned}$$

Мы хотим, чтобы на неизвестные функции  $g_{11}$  и  $b_{11}$  не было производных по  $u^1$ . Потому что при  $u^2 = 0$  у нас есть начальные условия (4.15), и мы сможем воспользоваться теоремой о существовании и единственности решения для обыкновенного дифференциального уравнения. А сейчас у нас уравнения в частных производных.

Итак, мы хотим найти в наших уравнениях производные  $\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1}$  и  $\frac{\partial b_{11}}{\partial u^1}$ . Сразу отметим, что вторых точно нигде не будет, поэтому ищем первые. Рассмотрим сначала первое уравнение. В нём сразу видим частную производную по  $u^1$  и пишем

$$(4.16) \quad \frac{1}{2\sqrt{g}} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} + \dots = 0.$$

(Мы хотим дописать в это уравнение всё, что найдём с частными производными  $\partial g_{11} / \partial u^1$  и убедиться, что всё сокращается.)

<sup>15</sup>Мне долго удавалось избегать этого обозначения (оно мне просто не нравится), но здесь приходится его принять, иначе совсем неудобно.



Ещё нам стоит бояться символов Кристоффеля, ведь на самом деле они здесь определяются через формулы (4.2), в которых могут присутствовать частные производные  $\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1}$ . Проверяем все символы Кристоффеля по очереди.

$$\Gamma_{12}^k = \frac{g^{kl}}{2} \left( \frac{\partial g_{1l}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{2l}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u^l} \right),$$

здесь всё хорошо, поэтому  $\Gamma_{12}^1$  и  $\Gamma_{12}^2$  нас более не интересуют. Проверяем оставшийся символ Кристоффеля в первом уравнении:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{g^{1l}}{2} \left( \frac{\partial g_{1l}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{1l}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^l} \right).$$

Видим, что при  $l = 1$  получаются искомые производные, а при  $l = 2$  их не будет. Дописывая их в уравнение (4.16), получаем:

$$\frac{1}{2\sqrt{g}} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} - \sqrt{g} \frac{1}{2g} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} = 0.$$

Видим, что всё сокращается.

У каждого символа Кристоффеля во втором уравнении один из индексов равен 2, поэтому  $\partial g_{11}/\partial u^1$  там появиться не может (это легко увидеть, взглянув на тождества Кристоффеля).

Таким образом, в случае поверхностей постоянной отрицательной гауссовой кривизны уравнения Кодацци являются обыкновенными дифференциальными уравнениями вида

$$\begin{cases} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} = \dots, \\ \frac{\partial b_{11}}{\partial u^2} = \dots \end{cases}$$

с начальными условиями (4.15). По теореме о существовании и единственности, у этих уравнений есть решение в некоторой достаточно малой окрестности любой начальной точки, то есть наши векторные поля локально являются базисными. Однако нас интересует не только возможность их решения, но и конкретный вид решений, при этом находить сами уравнения мы не хотим (это подразумевает большую техническую работу).

Сделаем смелое предположение: а вдруг в качестве решений на всей области подойдут начальные условия  $g_{11} \equiv 1$ ,  $b_{11} \equiv 0$ ? Мы хотим проверить, что уравнениям Кодацци удовлетворяют формы

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 1 & g_{12} \\ g_{12} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{g} \\ \sqrt{g} & 0 \end{pmatrix},$$

где  $g_{12}$  — произвольная гладкая функция и  $g = 1 - g_{12}^2$ .

Нужно посчитать все символы Кристоффеля, но в нашем случае это сделать легко, ведь все элементы матрицы  $\mathcal{G}$ , кроме  $g_{12}$  — константы, и их производные обнуляются. Так что можем сразу написать:

$$(4.17) \quad \begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= -\frac{g_{12}}{g} \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1}, & \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{g} \frac{\partial g_{12}}{\partial u^2}, & \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{g} \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1}, & \Gamma_{22}^2 &= -\frac{g_{12}}{g} \frac{\partial g_{12}}{\partial u^2}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 0. \end{aligned}$$

Подставляем в первое уравнение:

$$-\frac{g_{12}}{\sqrt{g}} \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} + \sqrt{g} \frac{g_{12}}{g} \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} = 0,$$

и видим, что всё сократилось. Аналогично для второго уравнения.

Итак, мы получили локально

$$\mathbf{I} = (du^1)^2 + (du^2)^2 + 2g_{12} du^1 du^2, \quad \mathbf{II} = 2\sqrt{g} du^1 du^2,$$

где про  $g_{12}$  мы пока ничего не знаем.

У нас осталось одна неизвестная функция  $g_{12}$  и уравнение Гаусса (4.12), на которое мы пока не смотрели. Далее мы подставим найденные матричные элементы в это уравнение и получим условие на функцию  $g_{12}$ . Но перед этим отметим следующее: мы знаем, что

$$g = 1 - g_{12}^2 = b_{12}^2.$$

Иными словами,  $g_{12}^2 + b_{12}^2 = 1$ . Тогда мы можем написать

$$(4.18) \quad g_{12} = \cos \omega, \quad b_{12} = \sin \omega,$$

где  $\omega$  — угол между асимптотическими линиями (так как  $\cos \omega = g_{12} = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ ). Напомним общий вид выражения гауссовой кривизны  $K$  через метрику:

$$K = \frac{g_{1k}}{g} \left( \frac{\partial \Gamma_{22}^k}{\partial u^1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^k}{\partial u^2} + \Gamma_{k1}^s \Gamma_{22}^k - \Gamma_{s2}^k \Gamma_{21}^s \right).$$

Подставляем сюда формулы (4.17):

$$\begin{aligned} -g &= g_{1k} \left( \frac{\partial \Gamma_{22}^k}{\partial u^1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^k}{\partial u^2} + \Gamma_{k1}^s \Gamma_{22}^k - \Gamma_{s2}^k \Gamma_{21}^s \right) = \\ &= \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial u^1} + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^1 + g_{12} \left( \frac{\partial \Gamma_{22}^2}{\partial u^1} + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 \right) = \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial u^1} + g_{12} \frac{\partial \Gamma_{22}^2}{\partial u^1}. \end{aligned}$$

Теперь пользуемся подстановкой (4.18):

$$\begin{aligned} g &= b_{12}^2 = \sin^2 \omega, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{g} \frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} = \frac{1}{\sin^2 \omega} \frac{\partial \cos \omega}{\partial u^2} = -\frac{1}{\sin \omega} \frac{\partial \omega}{\partial u^2}, \\ \Gamma_{22}^2 &= -\frac{g_{12}}{g} \frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} = -\frac{\cos \omega}{\sin^2 \omega} \frac{\partial \cos \omega}{\partial u^2} = \operatorname{ctg} \omega \frac{\partial \omega}{\partial u^2}. \end{aligned}$$

В итоге получаем

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial u^1} + g_{12} \frac{\partial \Gamma_{22}^2}{\partial u^1} + g = -\frac{\partial}{\partial u^1} \left( \frac{1}{\sin \omega} \frac{\partial \omega}{\partial u^2} \right) + \\ &+ \cos \omega \frac{\partial}{\partial u^1} \cdot \left( \operatorname{ctg} \omega \frac{\partial \omega}{\partial u^2} \right) + \sin^2 \omega = -\sin \omega \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial u^1 \partial u^2} + \sin^2 \omega, \end{aligned}$$

что равносильно следующему (поскольку  $\sin \omega \neq 0$ ):

$$(4.19) \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial u^1 \partial u^2} = \sin \omega.$$

Все наши рассуждения можно сформулировать в виде следующей теоремы.

**Теорема 4.20.**

- (1) На поверхности с постоянной гауссовой кривизной  $K \equiv -1$  в окрестности каждой точки существует система координат  $(u^1, u^2)$ , в которой первая и вторая квадратичные формы имеют вид

$$(4.20) \quad \mathbf{I} = (du^1)^2 + (du^2)^2 + 2 \cos \omega(u^1, u^2) du^1 du^2, \quad \mathbf{II} = 2 \sin \omega(u^1, u^2) du^1 du^2,$$

причём эта система координат определена однозначно с точностью до перестановки координат, их сдвигов на константы и смены знака любой из них.

- (2) В системе координат, указанной в предыдущем пункте, функция  $\omega$  удовлетворяет уравнению *sin-Гордон* (4.19).
- (3) Для любого этого уравнения с  $\sin \omega \neq 0$  существует поверхность постоянной кривизны  $K \equiv -1$  с первой и второй квадратичными формами вида (4.20).

Простейшим нетривиальным решением уравнения *sin-Гордон* является

$$\omega(u^1, u^2) = 4 \operatorname{arctg} e^{u^1 + u^2}.$$

Оно соответствует псевдосфере Бельтрами. Про неё, кстати, можно почитать [здесь](#).

## 5. Внутренняя геометрия поверхностей

### Ковариантное дифференцирование, параллельный перенос

Пусть  $\gamma: I \rightarrow \mathcal{M}$  — гладкая кривая на поверхности  $\mathcal{M}$ . Мы будем считать, что она задана в локальных координатах в виде  $u^1 = u^1(t)$ ,  $u^2 = u^2(t)$ . Пусть для каждого  $t \in I$  в касательной плоскости  $\mathcal{T}_{\gamma(t)}\mathcal{M}$  выбран вектор  $\mathbf{v}(t)$ , гладко зависящий от параметра  $t$ . В этом случае мы будем говорить, что задано *векторное поле вдоль кривой*  $\gamma$ .

Мы хотим построить анализ на поверхности, который будет опираться только на её внутреннюю геометрию. В частности, мы хотим научиться дифференцировать векторные поля вдоль кривых. Обычное дифференцирование нам не подойдёт, ведь поскольку касательные плоскости в разных точках поверхности могут быть различными, производная  $\dot{\mathbf{v}}(t)$ , вообще говоря, не задаёт векторного поля к поверхности. Поэтому на неё нельзя смотреть с точки зрения внутренней геометрии поверхности. Рассмотрим вместо этого векторное поле, получающееся проецированием  $\dot{\mathbf{v}}$  на касательное пространство.

**Определение 5.1.** Ковариантной производной векторного поля  $\mathbf{v}$  вдоль кривой  $\gamma$  называется векторное поле вдоль этой кривой, обозначаемое через  $\nabla_{\dot{\gamma}}\mathbf{v}$  и задаваемое формулой

$$(\nabla_{\dot{\gamma}}\mathbf{v})(t) = \text{proj}_{\mathcal{T}_{\gamma(t)}\mathcal{M}} \dot{\mathbf{v}}.$$

Выбранное нами обозначение неспроста сходно с обозначением производной по направлению, смысл этого сходства будет прояснён немного позже. Из определения сразу видны следующие свойства ковариантной производной вдоль пути.

**Предложение 5.2.** Ковариантное дифференцирование вдоль фиксированного пути линейно, и подчиняется правилу Ньютона — Лейбница при умножении на функцию.

**Определение 5.3.** Говорят, что векторное поле  $\mathbf{v}$  вдоль кривой *ковариантно постоянно* вдоль неё, если его ковариантная производная всюду равна нулю:  $\nabla_{\dot{\gamma}}\mathbf{v} \equiv \mathbf{0}$ .

Обобщим данное выше определение ковариантной производной. Пусть теперь векторное поле  $\mathbf{v}$  задано на всей поверхности  $\mathcal{M}$ , а не только вдоль некоторой кривой. Пусть также  $\mathbf{w} \in \mathcal{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$  — произвольный касательный вектор к поверхности в точке  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ . Возьмём произвольную гладко параметризованную кривую  $\gamma(t) = \mathbf{r}(u^1(t), u^2(t))$  на  $\mathcal{M}$ , выходящую из точки  $\mathbf{x}$  с вектором скорости  $\mathbf{w}$ :  $\gamma(0) = \mathbf{x}$ ,  $\dot{\gamma}(0) = \mathbf{v}$  и рассмотрим ограничение поля  $\mathbf{v}$  на эту кривую. Для его ковариантной производной будем иметь

$$(\nabla_{\dot{\gamma}}\mathbf{v})(t) = \text{proj}_{\mathcal{T}_{\gamma(t)}\mathcal{M}} \left( \frac{d}{dt} \mathbf{v}(\gamma(t)) \right) = \text{proj}_{\mathcal{T}_{\gamma(t)}\mathcal{M}} \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial u^i} \dot{u}^i \right).$$

При  $t = 0$  мы получим

$$(\nabla_{\dot{\gamma}}\mathbf{v})|_{t=0} = \text{proj}_{\mathcal{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{M}} (d\mathbf{v}|_{\mathbf{x}}(\mathbf{w})),$$

то есть вектор, не зависящий от выбора параметризованной кривой. Выражение  $d\mathbf{v}|_{\mathbf{x}}(\mathbf{w})$  можно понимать как производную векторного поля  $\mathbf{v}$  по направлению вектора  $\mathbf{w}$ .

**Определение 5.4.** Ковариантной производной векторного поля  $\mathbf{v}$  на поверхности  $\mathcal{M}$  по направлению вектора  $\mathbf{w} \in \mathcal{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$  в точке  $\mathbf{x}$  называется вектор

$$(\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{v})(\mathbf{x}) = \text{proj}_{\mathcal{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{M}} (d\mathbf{v}|_{\mathbf{x}}(\mathbf{w})).$$

Частными ковариантными производными  $\nabla_i \mathbf{v}$  назовём ковариантные производные вдоль базисных векторов  $\mathbf{r}_i$  касательной плоскости.

В этом определении мы взяли производную векторного поля  $\mathbf{v}$  по направлению вектора  $\mathbf{w} \in \mathcal{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$  и спроецировали её на касательную плоскость  $\mathcal{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$ . Проекция — линейная операция, а потому для любого вектора  $\mathbf{w} = W^i \mathbf{r}_i$  выполнено

$$\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{v} = W^i \nabla_i \mathbf{v},$$

так что ковариантная производная по направлению любого вектора однозначно определяется частными ковариантными производными, поэтому полезно вывести общие формулы для последних. Сначала найдём обычные частные производные векторного поля  $\mathbf{v}$ :

$$(5.1) \quad \partial_i \mathbf{v} = \frac{\partial V^k}{\partial u^i} \mathbf{r}_k + V^j \mathbf{r}_{ij} \stackrel{(4.1)}{=} \frac{\partial V^k}{\partial u^i} \mathbf{r}_k + V^j (\Gamma_{ij}^k \mathbf{r}_k + b_{ij} \mathbf{n}).$$

Из определения,  $(\nabla_i \mathbf{v})(\mathbf{x}) = \text{proj}_{\mathcal{T}_{\mathbf{x}} \mathcal{M}} \partial_i \mathbf{v}$ . Спроектировать на касательное пространство частные производные (5.1) — значит убрать у них слагаемые с  $\mathbf{n}$ . Получаем:

$$\nabla_i \mathbf{v} = \left( \frac{\partial V^k}{\partial u^i} + \Gamma_{ij}^k V^j \right) \mathbf{r}_k.$$

Часто эту формулу записывают так:

$$(5.2) \quad (\nabla_i \mathbf{v})^k = \frac{\partial V^k}{\partial u^i} + \Gamma_{ij}^k V^j$$

Выбор коэффициентов  $\Gamma_{ij}^k$  так, чтобы выражение (5.2) не зависело от выбора системы координат, называется *связностью* (на многообразии). Определяя  $\Gamma_{ij}^k$  как символы Кристоффеля, то есть по тождествам (4.2), мы получаем *симметричную риманову связность*. В этом курсе мы будем сталкиваться только с ней.

Итак, общая формула ковариантной производной по направлению имеет вид

$$(5.3) \quad (\nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{v})^k = (W^i \nabla_i \mathbf{v})^k = W^i \frac{\partial V^k}{\partial u^i} + \Gamma_{ij}^k W^i V^j.$$

**Предложение 5.5.** Для любых векторных полей  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  и векторов  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{w}_1$ ,  $\mathbf{w}_2$  в фиксированной точке  $\mathbf{x}$  поверхности, гладкой функции  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ , а также чисел  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  выполнено:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{w}}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) &= \nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{v}_1 + \nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{v}_2, \\ \nabla_{\mathbf{w}}(f \mathbf{v}) &= (\partial_{\mathbf{w}} f) \mathbf{v} + f(\nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{v}), \\ \nabla_{\lambda_1 \mathbf{w}_1 + \lambda_2 \mathbf{w}_2} \mathbf{v} &= \lambda_1 \nabla_{\mathbf{w}_1} \mathbf{v} + \lambda_2 \nabla_{\mathbf{w}_2} \mathbf{v}, \\ \partial_{\mathbf{w}} \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle &= \langle \nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle + \langle \mathbf{v}_1, \nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{v}_2 \rangle. \end{aligned}$$

**Доказательство.** Первые три равенства проверяются непосредственно. Для доказательства последнего нам пригодится тождество (4.5):

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{w}} \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle &= W^k \frac{\partial}{\partial u^k} (V_1^i V_2^j g_{ij}) = W^k \left( \frac{\partial V_1^i}{\partial u^k} V_2^j g_{ij} + V_1^i \frac{\partial V_2^j}{\partial u^k} g_{ij} + V_1^i V_2^j \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right) = \\ &= W^k \left( \frac{\partial V_1^i}{\partial u^k} V_2^j g_{ij} + V_1^i \frac{\partial V_2^j}{\partial u^k} g_{ij} + V_1^i V_2^j (g_{js} \Gamma_{ik}^s + g_{is} \Gamma_{jk}^s) \right) = \\ &= \underbrace{W^k \left( \frac{\partial V_1^i}{\partial u^k} + \Gamma_{sk}^i V_1^s \right) V_2^j g_{ij}}_{\nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{v}_1} + \underbrace{W^k \left( \frac{\partial V_2^j}{\partial u^k} + \Gamma_{sk}^j V_2^s \right) V_1^i g_{ij}}_{\nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{v}_2} = \langle \nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle + \langle \mathbf{v}_1, \nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{v}_2 \rangle. \end{aligned}$$

В предпоследнем равенстве мы переобозначили несколько индексов. Выкладка выглядит не совсем прозрачной, но в ней нетрудно разобраться. ■

Вернёмся к ковариантной производной вдоль кривой  $\gamma(t) = \mathbf{r}(u^1(t), u^2(t))$ . При подстановке  $\mathbf{w} = \dot{\gamma}$  в формулы (5.3) получим

$$(\nabla_{\dot{\gamma}} \mathbf{v})^k = (\dot{\gamma}^i \nabla_i \mathbf{v})^k = \dot{u}^i \frac{\partial V^k}{\partial u^i} + \dot{u}^i \Gamma_{ij}^k V^j = \frac{dV^k}{dt} + \Gamma_{ij}^k \dot{u}^i V^j.$$

**Теорема 5.6.** Для любого гладкого пути  $\gamma: [0; 1] \rightarrow \mathcal{M}$  на поверхности  $\mathcal{M}$  и любого касательного вектора  $\xi \in \mathcal{T}_{\gamma(0)}\mathcal{M}$  существует и единственно векторное поле  $v(t)$ , ковариантно постоянное вдоль этого пути и такое, что  $v(0) = \xi$ .

**Доказательство.** Утверждение теоремы следует из того, что условие ковариантной постоянности поля вдоль кривой равносильно следующей системе линейных дифференциальных уравнений на координаты  $(V^1, V^2)$  вектора  $v$  в базисе  $(r_1, r_2)$ :

$$\dot{V}^k(t) = \Gamma_{ij}^k(u^1(t), u^2(t))V^j(t)\dot{u}^i(t).$$

■

Подчеркнём, что линейность этих уравнений даёт возможность продолжить решение при всех  $t$ . Таким образом, для любой кривой по начальному касательному вектору в некоторой её точке мы можем однозначно построить в каждой точке этой кривой касательный вектор таким образом, чтобы векторное поле, образованное всеми этими векторами, было ковариантно постоянным вдоль нашей кривой.

**Определение 5.7.** *Параллельным переносом* вектора  $\xi$  вдоль кривой  $\gamma(t)$  называется построение векторного поля  $v(t)$ , для которого  $v(0) = \xi$  и  $\nabla_{\dot{\gamma}}v \equiv 0$ :

$$(5.4) \quad \frac{dV^k}{dt} + \Gamma_{ij}^k \dot{\gamma}^i V^j = 0.$$

Уравнения (5.4) при этом называются *уравнениями параллельного переноса*.

**Лемма 5.8.** Параллельный перенос сохраняет скалярное произведение. В частности, при параллельном переносе сохраняются длины векторов и углы между ними.

**Доказательство.** Достаточно проверить, что при параллельном переносе сохраняются длины векторов (так как билинейная форма однозначно восстанавливается по соответствующей ей квадратичной форме). А это следует из того, что для векторного поля  $v$ , ковариантно постоянного вдоль некоторого пути на поверхности, выполнено  $v \perp \dot{v}$  сразу из определения ковариантной производной. ■

Таким образом, при параллельном переносе вдоль любой кривой касательные вектора остаются неподвижными друг относительно друга. А значит, во время параллельного переноса касательная плоскость может лишь целиком поворачиваться в пространстве. Возникает естественный вопрос, а обязательно ли при параллельном переносе по замкнутой траектории касательная плоскость перейдёт в себя?

**Задача 5.9.** На какой угол повернётся касательный вектор к единичной сфере после параллельного переноса вдоль параллели  $\theta = \theta_0$  ( $0 \leq \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}$ ) на угол  $2\pi$ ?

**Решение 1.** Напомним, что параметризация  $r(\theta, \varphi)$  единичной сферы имеет вид

$$x = \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \cos \theta,$$

где  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . Отсюда можем легко найти первую квадратичную форму сферы:

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Глобально мы хотим написать уравнение (5.4) параллельного переноса вдоль замкнутой кривой  $\theta = \theta_0$  и решить его. Для этого нам нужно сначала найти символы Кристоффеля, воспользовавшись для этого тождествами Кристоффеля. Сначала хорошо бы явно выписать обратную матрицу метрики:

$$\mathcal{G}^{-1} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \begin{pmatrix} \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отметим два полезных факта: во-первых, метрика  $\mathcal{G}$  зависит только от значения параметра  $\theta$ , а во-вторых, матрицы  $\mathcal{G}$  и  $\mathcal{G}^{-1}$  диагональные. Это существенно сокращает вычисления. Получаем, что единственными ненулевыми символами Кристоффеля оказываются

$$\Gamma_{22}^1 = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \operatorname{ctg} \theta.$$

Параллель  $\theta = \theta_0$  в нашей параметризации параметризуется следующим образом:  $\theta(t) = \theta_0$ ,  $\varphi(t) = t$ ,  $0 \leq t < 2\pi$ . Тогда  $\dot{\theta} = 0$ ,  $\dot{\varphi} = 1$ . Уравнения параллельного переноса (5.4)

$$\frac{dV^k}{dt} + \Gamma_{ij}^k \dot{\gamma}^i V^j = 0$$

в нашем случае имеют вид

$$\begin{cases} \frac{dV^1}{dt} + \Gamma_{22}^1 \dot{\varphi} V^2 = 0, \\ \frac{dV^2}{dt} + \underbrace{\Gamma_{12}^2 \dot{\theta} V^2}_{=0} + \Gamma_{21}^2 \dot{\varphi} V^1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dV^1}{dt} - \sin \theta_0 \cos \theta_0 V^2 = 0, \\ \frac{dV^2}{dt} + \operatorname{ctg} \theta_0 V^1 = 0. \end{cases}$$

Это однородная линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений на компоненты  $(V^1, V^2)$  поля. Можно продемонстрировать мастерство и решить её стандартными методами, изученными в рамках соответствующего курса. Но мы схитрим — продифференцируем первое уравнение

$$\frac{dV^2}{dt} = \frac{1}{\sin \theta_0 \cos \theta_0} \frac{d^2 V^1}{dt^2}$$

и поставим во второе:

$$\frac{1}{\sin \theta_0 \cos \theta_0} \frac{d^2 V^1}{dt^2} + \frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0} V^1 = 0.$$

Получаем уравнение малых колебаний:

$$\frac{d^2 V^1}{dt^2} + \cos^2 \theta_0 V^1 = 0.$$

На самом деле, дальше нам дорешивать ничего не нужно. Отсюда мы уже видим, что при таком параллельном переносе вектор вращается с амплитудой  $\cos \theta_0$ . Так что при полном обороте вокруг параллели вектор повернётся на угол  $2\pi \cos \theta_0$ . ■

Из последней задачи видно, что при параллельном переносе по замкнутой траектории вектор может не перейти в себя, но повернуться на некоторый угол. Этот эффект вызван кривизной поверхности, по которой осуществляется перенос.

Отметим, что по определению ковариантная производная векторного поля  $\mathbf{v}$  вдоль кривой  $\gamma$  зависит только от векторного поля, кривой и положения касательной плоскости в точках кривой, так что очевидно следующее предложение.

**Предложение 5.10.** Пусть поверхности  $\mathcal{M}_1$  и  $\mathcal{M}_2$  касаются по кривой  $\gamma$ . Тогда векторное поле, ковариантно постоянное вдоль  $\gamma$  по отношению к  $\mathcal{M}_1$  является таковым и по отношению к  $\mathcal{M}_2$ .

Отсюда немедленно извлекаем, что если кривая лежит в пересечении двух поверхностей, то результат параллельного переноса любого вектора вдоль этой кривой не зависит от того, по какой именно поверхности осуществлялся перенос.

Это наблюдение часто помогает упрощать рассуждения в задачах, где фигурирует параллельный перенос. Действительно, ведь можно заменить данную нам поверхность на ту, в которой параллельный перенос выглядит проще. Пользуясь этим трюком, приведём ещё одно решение задачи 5.9.

**Решение 2.** Рассмотрим конус, пересекающийся с единичной сферой по параллели  $\theta = \theta_0$ . (Здесь есть два особых случая  $\theta_0 = 0$  и  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ , в которых мы получаем плоскость и цилиндр соответственно, но для дальнейших рассуждений нам это ничем не мешает.) Будем вместо сферы выполнять параллельный перенос по этому конусу, результат от этого не зависит.

Рассмотрим развёртку этого конуса, то есть отобразим его локально изометрично на плоскость. (Для этого конус необходимо «разрезать», но нас это тоже не волнует.) Так как уравнение параллельного переноса и значение угла между векторами зависят только от метрики, то можно осуществить параллельный перенос данного вектора по развёртке, результат также не поменяется. А в развёртке мы получаем параллельный перенос вектора по дуге окружности (в которую развернётся наша параллель). В начале этот вектор касается окружности, а так как в плоскости параллельный перенос устроен тривиально, он и в конце будет её касаться.

Легко находим угол между осью и образующей нашего конуса равен  $\frac{\pi}{2} - \theta_0$ , а значит, угол при вершине конуса в развёртке будет равен

$$2\pi \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) = 2\pi \cos \theta_0.$$

Легко видеть, что это и есть угол, на который повернётся наш вектор при параллельном переносе вдоль дуги окружности. ■

## Геодезические линии

**Определение 5.11.** Кривая  $\gamma(t)$ , параметризация которой пропорциональна натуральной, называется *геодезической линией*, если  $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} \equiv 0$ :

$$(5.5) \quad \ddot{\gamma}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j = 0.$$

Уравнения (5.5) называют *уравнениями геодезической*.

Далее мы будем называть параметр, пропорциональный натуральному, *аффинным натуральным* параметром. (Он получается из натурального аффинным преобразованием.)

Уравнения (5.5) — это дифференциальные уравнения второго порядка, а потому начальными условиями для него служат точка  $\gamma(0)$  и вектор скорости  $\dot{\gamma}(0)$ . Геодезические линии на искривлённой поверхности служат аналогами прямых на плоскости. В дальнейшем мы будем развивать эту интуицию.

Итак, мы знаем, что для каждой внутренней точки  $x$  поверхности  $M$  и ненулевого касательного вектора  $v \in T_x M$  существует ровно одна геодезическая дуга достаточно малой длины, начинающаяся в точке  $x$  и выходящая из неё в направлении  $v$ . Рассмотрим вопрос о продолжаемости геодезических.

**Теорема 5.12.** Пусть  $x$  — внутренняя точка поверхности  $M$ ,  $v \in T_x M$  — ненулевой касательный вектор. Тогда на  $M$  существует геодезическая  $\gamma = \gamma(t)$  с аффинным натуральным параметром, выходящая при  $t = 0$  из точки  $x$  в направлении вектора  $v$  и продолжаемая либо бесконечно, либо до края  $\partial M$  данной поверхности.

**Доказательство.** Рассмотрим сначала параметризованный простой кусок  $\mathcal{N}$  данной поверхности, для которого данная точка  $x$  внутренняя. Координаты в  $\mathcal{N}$  будем, как обычно, обозначать через  $(u^1, u^2)$ . Координаты точки  $x$  обозначим через  $(u_0^1, u_0^2)$ . Построение начального куска искомой геодезической сводится к решению уравнения (5.5) с начальными условиями в точке  $x$  и начальным вектором скорости  $v/|v|$  (начальный вектор для удобства нормируем). Согласно теореме 1.16 о продолжении решений обыкновенного дифференциального уравнения, этот начальный кусок можно продолжить до границы любого наперёд заданного компакта в фазовом пространстве.

Напомним, что координатами в фазовом пространстве служат  $(u^1, u^2, \dot{u}^1, \dot{u}^2)$ . При попытке продолжения решения до границы компакта мы можем «упереться» в его границу по



координатам  $u^1$  или  $u^2$  (что будет соответствовать тому, что мы дошли до края  $\partial\mathcal{N}$  нашего куска), либо же по координатам  $\dot{u}^1$  или  $\dot{u}^2$ . Докажем, что мы можем выбрать такой компакт в фазовом пространстве, что будет реализовываться именно первый случай.

Ключевую роль здесь играет тот факт, что в силу уравнений (5.5) длина вектора скорости сохраняется:  $g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j = 1$ .

**Лемма 5.13.** Существует  $\varepsilon > 0$  такое, что во всех точках  $(u^1, u^2)$  куска поверхности  $\mathcal{N}$  для любого ненулевого касательного вектора  $\mathbf{w} = W^i \mathbf{r}_i$  выполнено неравенство

$$g_{ij}W^iW^j > \varepsilon((W^1)^2 + (W^2)^2).$$

**Доказательство.** Пусть  $\lambda(u^1, u^2)$  — меньшее из собственных значений матрицы  $(g_{ij})$ . Если  $\varepsilon < \lambda$ , то матрица  $\mathcal{G} - \varepsilon E$  положительно определена. На компактном куске  $\mathcal{N}$  (напомним, что простой кусок поверхности гомеоморфен диску) непрерывная функция  $\lambda$  достигает минимума  $\lambda_{\min} > 0$ . Любая константа  $\varepsilon$  на интервале  $(0; \lambda_{\min})$  удовлетворяет условию во всех точках куска  $\mathcal{N}$ . ■

Из только что доказанной леммы следует, что вдоль решения  $(u^1(t), u^2(t))$  выполнено неравенство

$$(5.6) \quad (\dot{u}^1)^2 + (\dot{u}^2)^2 < 1/\varepsilon$$

для некоторого  $\varepsilon > 0$ . Вооружившись такой константой  $\varepsilon$ , рассмотрим компакт в фазовом пространстве, задаваемый некоторыми неравенствами на  $u^1, u^2$  (чтобы не «вылезти» за границы куска  $\mathcal{N}$ ) и неравенством  $(\dot{u}^1)^2 + (\dot{u}^2)^2 \leq 1/\varepsilon$ . Дойти до границы по  $\dot{u}^1$  или  $\dot{u}^2$  нам мешает неравенство (5.6), так что решение либо продолжается неограниченно внутри этого компакта (внутри куска  $\mathcal{N}$ ), либо «упирается» в границу по  $u^1$  или  $u^2$  (в край  $\partial\mathcal{N}$ ).

Забудем теперь о фиксированном куске  $\mathcal{N}$ . Пусть  $t_{\max}$  — это супремум тех  $t$ , для которых возможно продолжить геодезическую  $\gamma(t)$ . Если  $t_{\max} = +\infty$ , то теорема доказана. Иначе, существует предел

$$\lim_{t \rightarrow t_{\max}^-} \gamma(t) =: \mathbf{x}_1,$$

поскольку вектор скорости  $\dot{\gamma}(t)$  единичный для всех  $t < t_{\max}$ . Значит, кривая  $\gamma(t)$  определена и при  $t = t_{\max}$ . Если точка  $\mathbf{x}_1$  внутренняя для поверхности  $\mathcal{M}$ , то можно применить рассуждение выше и показать, что решение продолжается дальше  $t_{\max}$ , что противоречит выбору последнего. Следовательно,  $\mathbf{x}_1 \in \partial\mathcal{M}$ , и мы продолжили решение до края поверхности. ■

**Задача 5.14.** Найти геодезические на геликоиде.

**Решение.** Напомним, что параметризация  $\mathbf{r}(u, v)$  геликоида имеет вид

$$x = u \sin v, \quad y = u \cos v, \quad z = v,$$

где  $u, v \in \mathbb{R}$ . Находим метрику:

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

Затем находим символы Кристоффеля. Аналогично прошлой задаче получим, что единственные ненулевые символы есть

$$\Gamma_{22}^1 = -u, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{u}{u^2 + 1}.$$

Теперь хотим написать уравнения геодезических (5.5)

$$\ddot{\gamma}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j = 0$$

и решить их. В нашем случае уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \ddot{u} + \Gamma_{22}^1 \dot{v}^2 = 0, \\ \ddot{v} + 2\Gamma_{12}^2 \dot{u}\dot{v} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{u} - u\dot{v}^2 = 0, \\ \ddot{v} + \frac{2u\dot{u}}{u^2 + 1} \dot{v} = 0. \end{cases}$$

Заметим, что можно домножить второе уравнение на  $u^2 + 1$ , получив в левой части полный дифференциал. Тогда получаем следующие уравнения:

$$\begin{cases} \ddot{u} - u\dot{v}^2 = 0, \\ \frac{d}{dt}((u^2 + 1)\dot{v}) = 0. \end{cases}$$

Получаем, что  $(u^2 + 1)\dot{v} = C_1$  ( $C_1 \in \mathbb{R}$ ). Отсюда выражаем  $\dot{v} = C_1/(u^2 + 1)$  и подставляем в первое уравнение:

$$\ddot{u} - \frac{C_1^2 u}{(u^2 + 1)^2} = 0.$$

Чтобы решить это уравнение, необходимо вспомнить трюк из задачника Филиппова: рассмотрим  $\dot{u}$  как функцию  $P(u)$  от  $u$ . В таких обозначениях будем иметь

$$\ddot{u} = \frac{d}{dt}(\dot{u}) = \frac{d}{dt}(P(u)) = \dot{u}P' = PP'.$$

(Здесь штрихом обозначена производная по  $u$ .) Подставляем:

$$PP' - \frac{C_1^2 u}{(u^2 + 1)^2} = 0, \quad P dP = \frac{C_1^2 u}{(u^2 + 1)^2} du, \\ \int P dP = C_1^2 \int \frac{u du}{(u^2 + 1)^2}.$$

Первообразная в левой части с точностью до константы есть  $\frac{P^2}{2}$ . Интеграл в правой части легко считается:

$$\int \frac{u du}{(u^2 + 1)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(u^2 + 1)}{(u^2 + 1)^2} = -\frac{1}{2(u^2 + 1)} + C.$$

Итого получаем

$$P^2 = -\frac{C_1^2}{(u^2 + 1)} + C_2.$$

Явно это дифференциальное уравнение уже не решается. Но мы получили возможность в приемлемом виде выразить ответ:

$$du = \pm \sqrt{-\frac{C_1^2}{(u^2 + 1)} + C_2} dt, \\ \frac{dv}{du} = \pm \frac{C_1}{(u^2 + 1)\sqrt{-\frac{C_1^2}{(u^2 + 1)} + C_2}} = \pm \frac{C_1}{\sqrt{C_2(u^2 + 1)^2 - C_1^2(u^2 + 1)}}.$$

■

**Задача 5.15.** Доказать, что геодезические на сфере суть большие круги.

**Решение.** Можно решать эту задачу так же, как предыдущую — считать символы Кристоффеля, выписывать уравнения геодезических, решать их и сверять ответ. Но мы так делать не будем<sup>16</sup>.

<sup>16</sup> «При виде дифференциального уравнение сначала подумайте, как бы его не решать», — А. В. Пенской.

Сначала проверим, что большие круги действительно являются геодезическими. Пусть кривая  $\gamma$  в натуральной параметризации задаёт большой круг. Тогда очевидно, что  $\ddot{\gamma}$  задаёт нормаль к сфере, а это значит, что  $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} \equiv \mathbf{0}$ .

Ясно, что для каждой точки и каждого направления существует большой круг, проходящий через данную точку в этом направлении, и он является геодезической. Но по теореме о существовании и единственности для решений обыкновенных дифференциальных уравнений больше никаких геодезических быть не может, ведь мы умеем строить решение уравнения (5.5) для каждого начального условия. ■

Трюк, которым мы воспользовались в решении последней задачи, часто оказывается полезным. Можем сделать ещё одно наблюдение, упрощающее поиск геодезических. Пусть мы доказали, что некоторая кривая  $\gamma$  на поверхности  $\mathcal{M}$  является геодезической (это можно сделать, просто подставив её в уравнение). Тогда рассмотрим любую изометрию  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ : она сохраняет метрику, так что кривая  $f(\gamma)$  тоже будет геодезической. (Ведь уравнение геодезических (5.5) целиком определяется метрикой.) Мы ещё будем пользоваться этими наблюдениями для нахождения геодезических на плоскости Лобачевского.

Приведём здесь ещё два полезных наблюдения, часто пригождающихся в решении задач, связанных с геодезическими и параллельным переносом.

**Предложение 5.16.** Если прямая целиком лежит в поверхности, то она является геодезической на этой поверхности.

**Доказательство.** Пусть  $\gamma = \gamma(t)$  — аффинная натуральная параметризация данной прямой. Тогда

$$(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma})(x) = \text{proj}_{T_x\mathcal{M}} \underbrace{\frac{d}{dt}\dot{\gamma}}_{\dot{\gamma}=\mathbf{0}} = \mathbf{0}.$$

Таким образом,  $\gamma$  — геодезическая по определению. ■

**Предложение 5.17.** Если  $\gamma$  — геодезическая, то при параллельном переносе вектора  $\xi$  вдоль  $\gamma$  угол между ним и  $\dot{\gamma}$  не меняется.

Как мы помним, при параллельном переносе касательная плоскость может целиком поворачиваться на некоторый угол. Последнее предложение говорит нам о том, что при параллельном переносе вдоль геодезической касательная плоскость остаётся неподвижной.

**Доказательство.** Параллельный перенос вектора  $\xi$  вдоль  $\gamma$  — это процесс построения ковариантно постоянного вдоль  $\dot{\gamma}$  векторного поля  $v$  такого, что  $v(0) = \xi$ . Из определения геодезической  $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = \mathbf{0}$ , поэтому при параллельном переносе вектор скорости геодезической переходит в себя. При этом параллельный перенос сохраняет углы, поэтому для каждого  $t$  имеем  $\angle(v(t), \dot{\gamma}) = \angle(\xi, \dot{\gamma})$ , что и требовалось. ■

**Задача 5.18.** В точке  $A = (1, -1, 2)$  однополостного гиперболоида  $4x^2 + y^2 - z^2 = 1$  выбрать произвольный касательный вектор, касающийся сечения этого гиперболоида плоскостью  $z = 2$ . Перенести этот вектор параллельно по однополостному гиперболоиду вдоль одной из его прямолинейных образующих до пересечения с горловым эллипсом  $4x^2 + y^2 = 1, z = 0$ .

**Решение.** Сначала нам нужно выбрать вектор  $\xi$ , лежащий в плоскости  $z = 2$  и касательной плоскости к гиперболоиду в точке  $A$ . Нормаль последней пишется как  $n = \frac{1}{2} \text{grad } F|_A = (4x, y, -z)|_{(1,-1,2)} = (4, -1, -2)$ . В качестве вектора  $\xi$  можем взять

$$\xi = e_3 \times n = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} = (1, 4, 0).$$

Мы хотим перенести этот вектор вдоль прямолинейной образующей гиперболоида. Это прямая, которая целиком содержится в нашей поверхности, так что она является

геодезической на ней (предложение 5.16), а при параллельном переносе вдоль геодезической угол между переносимым вектором и этой геодезической сохраняется (предложение 5.17). Таким образом, при параллельном переносе касательная плоскость лишь вращается вокруг направляющего вектора прямолинейной образующей.

Выпишем оба семейства прямолинейных образующих данного гиперboloида:

$$\begin{aligned} 4x^2 + y^2 - z^2 &= 1, \\ 4x^2 - z^2 &= 1 - y^2, \\ (2x - z)(2x + z) &= (1 - y)(1 + y), \\ \text{I: } \frac{2x - z}{1 + y} &= \frac{1 - y}{2x + z} = \alpha, \quad \text{II: } \frac{2x - z}{1 - y} = \frac{1 + y}{2x + z} = \beta. \end{aligned}$$

Здесь про  $\alpha$  и  $\beta$  стоит думать, что они лежат в пополненной вещественной прямой  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Найдём образующую из семейства I, содержащую точку A. При подстановке координат этой точки в полученные уравнения получаем  $\alpha = \infty$ , поэтому уравнение искомой образующей имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{2x - z}{1 + y} &= \frac{1 - y}{2x + z} = \infty, \\ 1 + y &\rightarrow 0, \quad 2x - z \rightarrow 0, \\ \ell: \begin{cases} y + 1 = 0, \\ 2x - z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

или, в параметрическом виде  $(1, -1, 2) + t\mathbf{v}$ , где  $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, 2)$  — направляющий вектор прямолинейной образующей. Эта прямая пересекает горловой эллипс в точке  $B = (0, -1, 0)$ .

Нам нужно перенести вектор  $\xi$  из точки A в точку B по отрезку, соединяющему эти точки. Мы уже поняли, что касательная плоскость при переносе по прямой поворачивается вокруг неё. Найдём угол поворота  $\theta$  от начальной точки до конечной. В точке B нормаль к касательной плоскости есть  $\tilde{\mathbf{n}} = \frac{1}{2} \text{grad } F|_B = (4x, y, -z)|_{(0, -1, 0)} = (0, 1, 0)$

$$\cos \theta = \cos \angle(\mathbf{n}, \tilde{\mathbf{n}}) = \frac{\langle (4, -1, -2), (0, 1, 0) \rangle}{|(4, -1, -2)| \cdot |(0, 1, 0)|} = -\frac{1}{\sqrt{21}},$$

при этом  $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{\frac{20}{21}}$ . Таким образом, искомый вектор  $\tilde{\xi}$  получается из вектора  $\xi$  поворотом на угол  $\theta$  вокруг оси  $\mathbf{v}$ . Находим его с помощью формулы (1.1):

$$\tilde{\xi} = \cos \theta \cdot \xi + \sin \theta \cdot (\mathbf{v} \times \xi) + \langle \mathbf{v}, \xi \rangle (1 - \cos \theta) \cdot \mathbf{v} = \left( \frac{1}{5} - \frac{84}{5\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{2}{5} + \frac{32}{5\sqrt{21}} \right).$$

■

Напомним, что *первым интегралом* для системы дифференциальных уравнений называется величина, которая не меняется вдоль её решений. Известно, что для того, чтобы решить систему из двух дифференциальных уравнений, нужно найти два независимых первых интеграла этой системы. Одним из первых интегралов для уравнения геодезических (5.5) является первая квадратичная форма (ведь при параллельном переносе сохраняются длины векторов). Нетривиальной частью нахождения геодезических является, по сути, поиск другого первого интеграла. Есть частные случаи, в котором его можно написать явно, один из них рассматривает следующая теорема.

**Теорема 5.19** (Клеро). Вдоль геодезической на поверхности вращения сохраняется величина  $\rho \cos \theta$ , где  $\rho$  — расстояние до оси, а  $\theta$  — угол пересечения геодезической с параллелью.

**Доказательство.** Пусть кривая  $\gamma = \gamma(t)$  — некоторая геодезическая, параметризация которой пропорциональна натуральной, на поверхности вращения. Для каждой точки

$\mathbf{x} = \gamma(t)$  рассмотрим единичный направляющий вектор  $\mathbf{e}$  оси вращения, а также единичный вектор  $\mathbf{r}(t)$  направления из точки  $\mathbf{x}$  на ось. Тогда вектор  $\mathbf{r} \times \mathbf{e}$  всегда коллинеарен вектору скорости параллели в нашей точке, поэтому всюду выполнено равенство

$$\rho \cos \theta = \pm \langle \dot{\gamma}, \mathbf{r} \times \mathbf{e} \rangle = \pm \text{Vol}_{\text{or}}(\dot{\gamma}, \mathbf{r}, \mathbf{e}).$$

Продифференцируем обе части по  $t$ :

$$\frac{d}{dt}(\rho \cos \theta) = \pm (\underbrace{\text{Vol}_{\text{or}}(\ddot{\gamma}, \mathbf{r}, \mathbf{e})}_{=0} + \underbrace{\text{Vol}_{\text{or}}(\dot{\gamma}, \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{e})}_{=0} + \underbrace{\text{Vol}_{\text{or}}(\dot{\gamma}, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{e}})}_{=0}) = 0.$$

Первое слагаемое нулевое, так как вектор ускорения  $\ddot{\gamma}$  геодезической в натуральной параметризации перпендикулярен поверхности. В частности, он перпендикулярен касательному вектору  $\dot{\gamma}$  параллели, а он, в свою очередь, перпендикулярен обоим векторам  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{e}$ . Таким образом, вектор  $\ddot{\gamma}$  представляется как линейная комбинация векторов  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{e}$ .

С остальными двумя слагаемыми всё проще. Во втором слагаемом имеем  $\dot{\mathbf{r}} \parallel \mathbf{e}$  (так как вектор  $\mathbf{r}$  вращается вокруг оси), а в третьем  $\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{0}$  (так как вектор  $\mathbf{e}$  постоянно направлен вдоль неподвижной оси вращения). ■

Таким образом, для поверхностей вращения мы нашли два независимых первых интеграла:  $\mathbf{I}$  и  $\rho \cos \varphi$ , а значит, научились полностью решать уравнения геодезических.

Для кривых в  $\mathbb{R}^n$  мы определяли кривизну — величину, выражающую степень отличия кривой от прямой. Поэтому на поверхностях кажется естественным определить величину, выражающую степень отличия кривой от геодезической.

Вектор  $\mathbf{k}_g := \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$  называется *вектором геодезической кривизны* кривой  $\gamma$  (здесь на кривой  $\gamma$  введён натуральный параметр). Геодезической кривизной можно было бы назвать длину этого вектора, однако мы поступим несколько иначе. Так же, как и для кривых на плоскости, геодезической кривизне линии на двумерной поверхности имеет смысл приписывать знак, если кривая коориентирована в смысле следующего определения.

**Определение 5.20.** *Коориентацией* кусочно-гладкой кривой  $\gamma$  на поверхности  $M$  называется согласованный выбор в каждой её точке гладкости  $\mathbf{x}$  единичного вектора геодезической нормали  $\mathbf{n}_g$ , касательного к поверхности ортогонального кривой  $\gamma$  в этой точке. Согласованность означает, что при введении на  $\gamma$  параметризации, которая регулярна на каждой гладкой дуге, вектор нормали к поверхности, определённый из равенства

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{n}_g \times \mathbf{v}}{|\mathbf{n}_g \times \mathbf{v}|},$$

где  $\mathbf{v}$  — вектор скорости кривой, непрерывно зависит от точки кривой там, где кривая гладкая и непрерывно продолжается на те точки, где вектор скорости  $\mathbf{v}$  меняется скачком. (В частности, если кривая замкнута, то векторы нормали  $\mathbf{n}$  в начальный и конечный моменты должны быть одинаковы.)

Заметим, что кривая может иметь коориентацию и на поверхностях, на которых нельзя всюду определить единичный вектор нормали  $\mathbf{n}$  так, чтобы он непрерывно зависел от точки поверхности. Примером такой поверхности служит лента Мёбиуса: её можно обогнуть гладкой кривой, вернувшись в ту же точку, но сменив направление вектора нормали, что иллюстрирует рисунок ниже. Красную кривую коориентировать нельзя, однако границу ленты — можно (направив все вектора геодезической нормали внутрь поверхности). Отметим, что если кривую можно коориентировать, то ровно двумя способами.

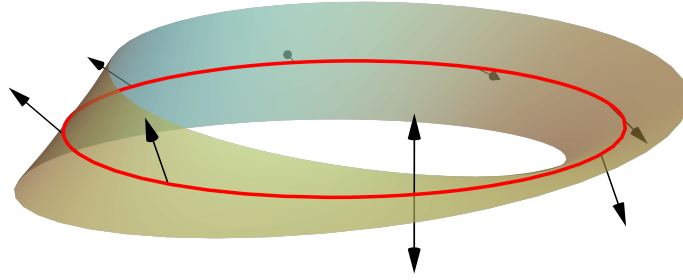


Рис. 5.13: Лента Мёбиуса — пример неориентируемой поверхности

Легко видеть, что в каждой точке коориентированной кривой выполнено  $\mathbf{k}_g \parallel \mathbf{n}_g$ , так что можем определить геодезическую кривизну (со знаком) так же, как мы это делали для ориентированной кривизны на плоскости.

**Определение 5.21.** Геодезической кривизной коориентированной кривой на двумерной поверхности называется гладкая функция  $k_g := \langle \mathbf{k}_g, \mathbf{n}_g \rangle$ .

В случае, когда  $\mathcal{M}$  — евклидова плоскость, геодезическая кривизна совпадает с ориентированной кривизной плоской кривой. Очевидны также следующие утверждения.

**Предложение 5.22.** Кривая  $\gamma$  является геодезической тогда и только тогда, когда её геодезическая кривизна всюду равна нулю.

**Предложение 5.23.** При изометрии поверхностей геодезические кривизны всех кривых сохраняются. В частности, геодезические линии переходят в геодезические.

Последнее предложение вытекает из того, что геодезическая кривизна, как легко видеть, однозначно определяется метрикой. (Строго говоря, важен ещё выбор коориентации на кривых, ведь иначе утверждение верно лишь с точностью до знака. Но коориентации на двух кривых всегда можно выбрать согласованно.)

Мы видели, что кривизна плоской кривой равна скорости вращения вектора скорости при условии, что длина последнего равна единице. Аналогичное утверждение верно для геодезической кривизны кривой на произвольной поверхности, только теперь вектор скорости вращается не в неподвижной плоскости, а в касательной плоскости к поверхности, которая движется вместе с точкой. В качестве «неподвижного» репера в этой плоскости выбирается репер, векторы которого получены параллельным перенесением вдоль данной кривой.

Если на поверхности  $\mathcal{M}$  дана гладкая коориентированная кривая с регулярной параметризацией  $\gamma(t)$  и векторные поля  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ , вдоль неё, то при определении угла от  $\mathbf{v}_1(t)$  до  $\mathbf{v}_2(t)$  мы используем ориентацию в  $\mathcal{T}_{\gamma(t)}\mathcal{M}$ , для которой базис  $(\dot{\gamma}, \mathbf{n}_g)$  положительно ориентирован<sup>17</sup>.

**Предложение 5.24.** Пусть  $\gamma(t)$  — аффинная натуральная параметризация коориентированной гладкой кривой  $\gamma$  на поверхности  $\mathcal{M}$ ,  $\mathbf{w}$  — ковариантно постоянное векторное поле вдоль этой кривой, а  $\varphi(t)$  — угол от  $\mathbf{w}(t)$  до вектора скорости  $\dot{\gamma}(t)$ . Тогда во всех точках данной кривой выполнено  $k_g = \varphi'$ .

**Доказательство.** Обозначим через  $\tilde{\mathbf{w}}(t) \in \mathcal{T}_{\gamma(t)}\mathcal{M}$  вектор, полученный из  $\mathbf{w}(t)$  поворотом на угол  $\pi/2$  в положительном направлении. Так как параллельный перенос сохраняет углы между векторами и их длины, векторное поле  $\tilde{\mathbf{w}}$  также ковариантно постоянно вдоль  $\gamma$ .

По условию во всех точках кривой выполнено

$$\dot{\gamma} = \mathbf{w} \cos \varphi + \tilde{\mathbf{w}} \sin \varphi, \quad \mathbf{n}_g = -\mathbf{w} \sin \varphi + \tilde{\mathbf{w}} \cos \varphi.$$

Применим к обеим частям разложения вектора  $\dot{\gamma}$  линейный оператор  $\nabla_{\dot{\gamma}}$ :

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = \mathbf{w}(\cos \varphi)' + \tilde{\mathbf{w}}(\sin \varphi)' = \varphi' \mathbf{n}_g.$$

<sup>17</sup>Отметим, что определение угла между векторными полями в таком виде зависит от ориентации кривой  $\gamma$ . Далее мы полагаем её фиксированной.

(Из  $\nabla_{\dot{\gamma}} \mathbf{w} \equiv \mathbf{0}$ ,  $\nabla_{\dot{\gamma}} \tilde{\mathbf{w}} \equiv \mathbf{0}$ .) Из определения геодезической кривизны получаем  $k_g = \varphi'$ . ■

Для кривых на поверхности имеет место аналог формул Френе. Пусть на поверхности  $\mathcal{M}$  дана кривая с натуральной параметризацией  $\gamma(s)$ . Обозначим через  $\mathbf{v}$  её вектор скорости, через  $\mathbf{n}$  — вектор нормали к поверхности, а через  $\mathbf{n}_g = \pm(\mathbf{v} \times \mathbf{n})$  — вектор геодезической нормали к кривой, задающий на ней коориентацию.

**Предложение 5.25.** В указанных предположениях имеют место равенства

$$(5.7) \quad \nabla_{\dot{\gamma}} k_g \mathbf{n}_g, \quad \nabla_{\dot{\gamma}} \mathbf{v} = -k_g \mathbf{v}.$$

**Доказательство.** Поскольку параметризация кривой натуральна, вектор ускорения  $d\mathbf{v}/ds$  равен вектору кривизны, а его проекция  $\nabla_{\dot{\gamma}} \mathbf{v}$  на касательную плоскость — вектору геодезической кривизны. Отсюда следует первое равенство в (5.7). Для доказательства второго достаточно заметить, что матрица  $A$  в уравнении

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \mathbf{v} & \mathbf{n}_g & \mathbf{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} & \mathbf{n}_g & \mathbf{n} \end{pmatrix} \cdot A$$

должна быть кососимметричной, поскольку указанные три вектора при всех  $s$  образуют ортонормированный базис. (Вспомнить доказательство теоремы 2.52 о восстановлении кривой в  $\mathbb{R}^n$  и, в частности, лемму 2.32.) ■

Отметим, что геодезическую кривизну кривой можно легко связать с кривизной этой кривой в  $\mathbb{R}^3$ . У кривой  $\gamma = \gamma(s)$  на поверхности  $\mathcal{M}$  есть вектор главной нормали  $\mathbf{n}$ , который «ничего не знает про поверхность», и вектор геодезической нормали  $\mathbf{n}_g$ , который лежит в касательной плоскости. Тогда в произвольной точке  $\mathbf{x}$  кривой  $\gamma$  имеем

$$k = |\ddot{\gamma}|, \quad k_g = \langle \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}, \mathbf{n}_g \rangle = \langle \text{proj}_{T_{\mathbf{x}} \mathcal{M}} \ddot{\gamma}, \mathbf{n}_g \rangle.$$

Теперь из геометрических соображений уже легко видеть, что эти величины связаны соотношением  $k_g = k \cos \theta$ , где  $\theta = \angle(\mathbf{n}, \mathbf{n}_g)$ .

### Геодезические как экстремали функционала действия

Пусть  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$  — гладкая функция трёх аргументов  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$ . Эту функцию будем называть *лагранжианом*. Для гладкого пути  $\gamma: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  определим *действие*  $\mathcal{S}(\gamma)$  этого пути по формуле

$$(5.8) \quad \mathcal{S}(\gamma) := \int_0^1 \mathcal{L}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t) dt$$

и зададим следующий вопрос: когда действие данного пути  $\gamma$  принимает наименьшее значение среди всех путей с тем же началом  $\gamma(0)$  и концом  $\gamma(1)$ ?

Оказывается, эволюция многих физических систем подчинена простому принципу: ограничение траектории движения на малый промежуток времени минимизирует некоторый функционал действия. Чтобы описать такую систему, достаточно указать её лагранжиан<sup>18</sup>.

Необходимым условием достижения минимума, как известно, является равенство нулю первых производных. Сейчас мы введём аналог именно этого более слабого условия для бесконечномерного пространства всех путей.

**Определение 5.26.** Пусть  $\gamma: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  — некоторый путь. Под его *вариацией* понимается любая гладкая функция  $\gamma_\tau(t)$  от двух переменных  $\tau$  и  $t$  такая, что  $\gamma_0(t) = \gamma(t)$  при всех  $t$  и  $\gamma_\tau(0) = \gamma(0)$ ,  $\gamma_\tau(1) = \gamma(1)$  при всех  $\tau$ .

<sup>18</sup>Например, таковы все системы классической механики, лагранжианом для них является разность кинетической и потенциальной энергий.



Говорят, что путь  $\gamma$  является *экстремалью* для функционала действия (5.8), если для любой его вариации  $\gamma_\tau$  выполнено

$$\left. \frac{d}{d\tau} \mathcal{S}(\gamma_\tau) \right|_{\tau=0} = 0.$$

Поскольку в лагранжиан  $\mathcal{L}(x, y, t)$  вместо  $x$  и  $y$  всегда подставляются  $\gamma(t)$  и  $\dot{\gamma}(t)$  для некоторого пути, частные производные  $\partial \mathcal{L} / \partial x^i$  и  $\partial \mathcal{L} / \partial y^i$ , в которых также сделаны эти подстановки, будут обозначаться через  $\partial \mathcal{L} / \partial \gamma^i$  и  $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{\gamma}^i$  соответственно.

**Лемма 5.27.** Гладкий путь  $\gamma$  является экстремалью для функционала действия (5.8) тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$(5.9) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}^i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma^i}.$$

**Доказательство.** Пусть  $\gamma_\tau$  — некоторая вариация пути  $\gamma: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Обозначим через  $v(t)$  вектор  $\partial \gamma_\tau(t) / \partial \tau$ . Поскольку при вариации концы предполагаются фиксированными, мы имеем  $v(0) = v(1) = 0$ . Вычислим  $d\mathcal{S}(\gamma_\tau)/d\tau$ , занеся производную под знак интеграла:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{S}(\gamma_\tau)}{d\tau} &= \int_0^1 \frac{\partial \mathcal{L}(\gamma_\tau(t), \dot{\gamma}_\tau(t), t)}{\partial \tau} dt = \\ &= \int_0^1 \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma^i} v^i(t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}^i} \dot{v}^i(t) \right) dt \stackrel{(5.9)}{=} \int_0^1 \left( \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}^i} \right) v^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}^i} \dot{v}^i \right) (t) dt = \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}^i} v^i \right) dt = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}^i} v^i \right|_0^1 = 0, \end{aligned}$$

так как  $v(0) = v(1) = 0$ , что отмечалось выше.

Наоборот, пусть  $\gamma$  — экстремаль. Возьмём произвольную гладкую функцию  $\varphi: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  со свойствами  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ ,  $\varphi(t) > 0$  для всех  $0 < t < 1$ , и положим

$$v(t) := \varphi(t) \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}^i} \right), \quad \gamma_\tau(t) := \gamma(t) + \tau v(t).$$

Получим

$$0 = \frac{d\mathcal{S}(\gamma_\tau)}{d\tau} = \int_0^1 \varphi(t) |v(t)|^2 dt,$$

откуда  $v(t) = 0$  при всех  $0 \leq t \leq 1$ , что влечёт выполнение условий (5.9). ■

Уравнения (5.9) называются *уравнениями Эйлера — Лагранжа*. Набор величин  $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{\gamma}^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , называется *импульсом* данной системы, а набор  $\partial \mathcal{L} / \partial \gamma^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , — действующей на неё *силой*. Тогда уравнения Эйлера — Лагранжа представляют собой обобщение второго закона Ньютона: производная импульса по времени равна действующей силе.

**Теорема 5.28.** Для параметризованной кривой  $\gamma: [0; 1] \rightarrow \mathcal{M}$  на поверхности  $\mathcal{M}$  следующие условия равносильны:

- (1) кривая  $\gamma$  является геодезической, а её параметризация пропорциональна натуральной;
- (2) кривая  $\gamma$  является экстремалью следующего функционала действия в классе путей на поверхности  $\mathcal{M}$ :

$$\mathcal{S}(\gamma) = \int_0^1 \frac{1}{2} |\dot{\gamma}(t)|^2 dt.$$



**Доказательство.** Лагранжиан рассматриваемого действия в локальных координатах поверхности записывается следующим образом:

$$\mathcal{L}(\gamma, \dot{\gamma}) = \frac{1}{2} g_{ij}(\gamma) \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j.$$

Вычислим  $i$ -е компоненты импульса  $\mathbf{p}$  и силы  $\mathbf{f}$ :

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}^i} = g_{ij} \dot{\gamma}^j, \quad f_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma^i} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial \gamma^i} \dot{\gamma}^k \dot{\gamma}^l.$$

Используя (4.5), получаем

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= \frac{d}{dt}(g_{ij} \dot{\gamma}^j) = g_{ij} \ddot{\gamma}^j + \frac{\partial g_{ij}}{\partial \gamma^k} \dot{\gamma}^j \dot{\gamma}^k = g_{ij} \ddot{\gamma}^j + \Gamma_{ik}^s g_{sj} \dot{\gamma}^k \dot{\gamma}^j + \Gamma_{jk}^s g_{si} \dot{\gamma}^k \dot{\gamma}^j, \\ f_i &= \frac{1}{2} (\Gamma_{ik}^s g_{sl} + \Gamma_{il}^s g_{sk}) \dot{\gamma}^k \dot{\gamma}^l. \end{aligned}$$

Подстановка найденных выражений в уравнения Эйлера — Лагранжа  $\dot{p}_i = f_i$  даёт:

$$\begin{aligned} g_{ij} \ddot{\gamma}^j + (\Gamma_{ik}^s g_{sj} + \Gamma_{jk}^s g_{si}) \dot{\gamma}^k \dot{\gamma}^j &= \frac{1}{2} (\Gamma_{ik}^s g_{sl} + \Gamma_{il}^s g_{sk}) \dot{\gamma}^k \dot{\gamma}^l, \\ g_{ij} (\ddot{\gamma}^j + \Gamma_{kl}^j \dot{\gamma}^k \dot{\gamma}^l) &= 0, \end{aligned}$$

что равносильно уравнению геодезических, ведь  $\mathcal{G} = (g_{ij})$  — невырожденная матрица. ■

В теореме 5.28 мы рассматривали функционал, в котором интегрировали квадрат длины вектора скорости. Теперь рассмотрим функционал

$$\mathcal{S}(\gamma) = \int_0^1 |\dot{\gamma}| dt$$

длины кривой ( $\mathcal{L}(\gamma, \dot{\gamma}) = \sqrt{g_{ij} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j}$ ). Для него уравнения Эйлера — Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{g_{kj} \dot{\gamma}^j}{\sqrt{g_{ij} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j}} \right) = \frac{\frac{\partial g_{ij}}{\partial \gamma^k} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j}{2 \sqrt{g_{ij} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j}},$$

и если взять на кривой аффинный натуральный параметр, для которого  $\sqrt{g_{ij} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j} = \text{const}$ , то они примут вид

$$\frac{d}{dt} (g_{kj} \dot{\gamma}^j) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j,$$

а это в точности уравнение геодезических, что нетрудно проверить. Таким образом, мы доказали следующую теорему:

**Теорема 5.29.** Уравнения Эйлера — Лагранжа для функционала длины кривой совпадают с уравнением геодезических, если на кривой выбирается аффинный натуральный параметр.

**Следствие 5.30.** Гладкая кривая, которая является кратчайшей кривой, соединяющей две заданные точки, удовлетворяет уравнению геодезических по отношению к аффинному натуральному параметру.

Последнее следствие развивает интуицию о том, что геодезические на поверхностях (как и прямые на плоскости) реализуют кратчайшие расстояния: мы поняли, что любая кратчайшая обязательно является геодезической. В следующем разделе мы обсудим, что локально верно и обратное — в малых окрестностях геодезические являются кратчайшими. Глобально геодезические не являются кратчайшими. Например, как мы показали в задаче 5.15, геодезические на единичной сфере — большие круги. Две точки, которые не противоположны друг другу, разбивают проходящий через них большой круг на две геодезические дуги, одна из которых является кратчайшей, а другая — нет.

## Геодезические как локально кратчайшие

Пусть  $x_0$  — некоторая внутренняя точка поверхности  $M$  и пусть в некоторой окрестности точки  $x_0$  выбрана локальная система координат  $(u^1, u^2)$ . Для всевозможных векторов  $v_0 \in \mathcal{T}_{x_0}M$  рассмотрим решение  $F(v_0, t)$  уравнения геодезических (5.5) с начальной точкой  $x_0$  и вектором скорости  $v_0$ . (То есть, просто выпускаем геодезическую из данной точки по данному направлению.)

**Предложение 5.31.** Имеет место тождество (там, где определены обе его части):

$$F(\lambda v_0, t) = F(v_0, \lambda t).$$

**Доказательство.** Если  $\gamma(t) = (u^1(t), u^2(t))$  задаёт решение уравнения геодезических (5.5), то и  $\gamma(\lambda t)$  тоже (левая часть умножается на  $\lambda^2$ ), при этом вектор скорости в начальной точке решения умножается на  $\lambda$ . ■

**Определение 5.32.** Отображение  $\mathcal{T}_{x_0}M \rightarrow M$ , действующее по схеме  $v_0 \mapsto F(v_0, 1)$ , называется *экспоненциальным* и обозначается через  $\exp_{x_0}$ .

Геометрический смысл экспоненциального отображения следующий: вектору  $v_0 \in \mathcal{T}_{x_0}M$  сопоставляется конец геодезической длины  $|v_0|$ , выпущенной из точки  $x_0$  в направлении вектора  $v_0$ . Отметим, что если  $\partial M \neq \emptyset$ , то экспоненциальное отображение определено, вообще говоря, не на всей касательной плоскости  $\mathcal{T}_{x_0}M$ , поскольку может оказаться, что не всегда решение уравнения геодезических можно продолжить до  $t = 1$ . Однако имеет место следующий факт.

**Теорема 5.33.** Для каждой внутренней точки  $x_0 \in M$  найдётся  $\varepsilon > 0$  такое, что  $\exp_{x_0}(v_0)$  определено для всех векторов длины  $|v_0| < \varepsilon$ , причём ограничение отображения  $\exp_{x_0}$  на множество таких векторов регулярно и является гомеоморфизмом на свой образ.

То есть, всегда можно вырезать круг малого радиуса из плоскости и «гладко перекачивать» его по нашей поверхности. Наглядно это очевидно, приведём строгое обоснование.

**Доказательство.** Найдётся такое  $\varepsilon > 0$ , что шар  $B_\varepsilon(x_0)$  не пересекается с краем  $\partial M$ , а значит, все геодезические с начальной точкой  $x_0$  продолжаются до длины  $\varepsilon$ . Отсюда следует, что экспоненциальное отображение определено в некоторой окрестности нулевого вектора. Гладкость экспоненциального отображения следует из общей теоремы о гладкости зависимости решения обыкновенного дифференциального уравнения от начальных условий.

С каждой локальной системой координат  $(u^1, u^2)$  на поверхности  $M$  в окрестности точки  $x_0 \in M$  связана линейная система координат с базисом  $(r_1, r_2)$  на касательном пространстве  $\mathcal{T}_{x_0}M$ . Утверждается, что в этих координатах матрица Якоби отображения  $\exp_{x_0}$  единичная. Действительно,

$$\exp_{x_0}(tv_0) = F(tv_0, 1) = F(v_0, t) = x_0 + tv_0 + \bar{o}(t),$$

где подразумевается, что вычисления проведены в системе координат  $(u^1, u^2)$ , а вектор  $v_0$  рассмотрен в базисе  $(r_1, r_2)$ . Таким образом, матрица Якоби экспоненциального отображения невырождена в точке  $v_0 = 0$ , откуда в достаточно малой окрестности нуля экспоненциальное отображение регулярно и обратимо. ■

**Теорема 5.34.** Для любой внутренней точки  $x_0$  поверхности  $M$  найдётся такая её окрестность  $U$ , что для любой точки  $x$  из  $U$  найдётся геодезическая, соединяющая  $x_0$  с  $x$  и целиком содержащаяся в  $U$ , причём эта геодезическая короче любой другой кривой с теми же концами.

**Доказательство.** Зафиксируем в касательной плоскости  $\mathcal{T}_{x_0}M$  полярную систему координат  $(\rho, \varphi)$  и перенесём её с помощью экспоненциального отображения с малой окрестности нуля в  $\mathcal{T}_{x_0}M$  на окрестность точки  $x_0$  в  $M$ . Из последней теоремы следует, что мы получим регулярную параметризацию некоторой проколотой окрестности точки  $x_0$  (с оговоркой,

что координата  $\varphi$  определена по модулю  $2\pi$ ). По построению лучи  $\varphi = \text{const}$  являются геодезическими, причём  $\rho$  является на них натуральным параметром.

**Лемма 5.35.** Пусть локальные координаты  $(u^1, u^2)$  на поверхности таковы, что координатные линии  $u^2 = \text{const}$  являются геодезическими, а  $u^1$  является для них натуральным параметром. Тогда коэффициент  $g_{12}$  первой квадратичной формы не зависит от  $u^1$ .

**Доказательство.** По условию леммы параметрические уравнения  $u^1(t) = t$ ,  $u^2(t) = \text{const}$  задают натурально параметризованную геодезическую. Подставляя в уравнения геодезической (5.5), получаем  $\Gamma_{11}^1 = 0$ , но в то же время

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} \left( g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} + g^{12} \left( 2 \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} \right) \right).$$

Так как  $u^1$  — натуральный параметр на координатных линиях  $u^2 = \text{const}$ , мы имеем  $g_{11} = 1$  во всех точках. Отсюда последнее выражение равно

$$g^{12} \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} = 0.$$

Отсюда  $\partial g_{12} / \partial u^1 = 0$  (тут нужно вспомнить явную формулу для обратной матрицы). ■

Применим только что доказанную лемму к системе координат  $(\rho, \varphi)$ , считая  $\rho$  первой координатой, а  $\varphi$  — второй. Согласно лемме коэффициент  $g_{12}$  не зависит от  $\rho$ . Но при  $\rho \rightarrow 0$  вектор  $\mathbf{r}_\varphi$  стремится к нулевому, а вектор  $\mathbf{r}_\rho$  остаётся ограниченным, откуда  $g_{12} \rightarrow 0$ , а следовательно,  $g_{12} = 0$  при всех  $\rho > 0$ .

Таким образом, первая квадратичная форма в введённой нами системе координат (она называется *обобщённой полярной*) в окрестности точки  $\mathbf{x}_0$  имеет вид

$$\mathbf{I} = d\rho^2 + g_{22}(\rho, \varphi) d\varphi^2.$$

Возьмём  $\varepsilon > 0$  настолько малым, чтобы эта система координат была регулярна в проколоте  $\varepsilon$ -окрестности точки  $\mathbf{x}_0$ . Пусть  $\mathbf{x}_1$  — произвольная точка этой окрестности с координатами  $(\rho_1, \varphi_1)$ , где  $\rho_1 < \varepsilon$ . Точки  $\mathbf{x}_0$  и  $\mathbf{x}_1$  соединяются геодезической дугой  $\varphi = \varphi_1$ ,  $0 \leq \rho \leq \rho_1$ , длина которой равна  $\rho_1$ . Любая другая кусочно-гладкая кривая  $\gamma: [0; 1] \rightarrow \mathcal{M}$ , лежащая внутри рассматриваемой окрестности, соединяющая эти две точки будет длиннее:

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{\dot{\rho}^2 + g_{22}\dot{\varphi}^2} dt \geq \int_0^1 |\dot{\rho}| dt \geq \left| \int_0^1 \dot{\rho} dt \right| = |\rho_1|,$$

причём равенство достигается только если  $\varphi(t) \equiv \varphi_1$ , а  $\rho(t)$  — монотонная функция, и тогда кривая  $\gamma$  совпадает с указанной геодезической дугой. Если же кривая  $\gamma$  покидает пределы окрестности, то её длина никак не меньше  $\varepsilon > \rho_1$ . ■

## Полугеодезические координаты

Здесь мы рассмотрим особые системы координат на поверхности, в которых нам будет удобно работать. (Мы увидим это позже при доказательстве теоремы Гаусса — Бонне.)

**Определение 5.36.** Локальная система координат  $(u^1, u^2)$  на поверхности называется *полугеодезической*, если первая квадратичная форма поверхности в ней имеет вид

$$\mathbf{I} = (du^1)^2 + g_{22}(du^2)^2,$$

где  $g_{22}$  — некоторая гладкая функция от  $u^1, u^2$ .

**Теорема 5.37.** Для каждой внутренней точки  $\mathbf{x}_0$  произвольной гладкой поверхности  $\mathcal{M}$  в некоторой окрестности  $U \subset \mathcal{M}$  точки  $\mathbf{x}_0$  существует полугеодезическая система координат.

Отметим, что обобщённая полярная система координат, которая была нами построена в доказательстве теоремы 5.34, нам не подходит, ведь она имеет особенность в точке  $\mathbf{x}_0$ .

**Доказательство.** Пусть  $\gamma(t)$ ,  $t \in (-\varepsilon; \varepsilon)$ , — произвольная регулярная параметризация некоторой гладкой дуги, проходящей через  $\mathbf{x}_0$  при  $t = 0$ . Зададим коориентацию этой дуги, определив в каждой её точке  $\gamma(t)$  вектор геодезической нормали  $\mathbf{n}_g(t)$ , гладко зависящий от  $t$ . Рассмотрим следующее отображение из окрестности начала координат в  $\mathbb{R}^2$  в  $\mathcal{M}$ :

$$\mathbf{r}(u^1, u^2) = \exp_{\gamma(u^2)}(u^1 \mathbf{n}_g(u^2)).$$

По теореме о гладкой зависимости решения обыкновенного дифференциального уравнения от начальных условий это отображение гладко. При  $u^1 = 0$  векторы  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  равны, соответственно,  $\mathbf{n}_g(0)$  и  $\dot{\gamma}(0)$ . По построению эти векторы ортогональны и не обращаются в ноль. Поэтому они линейно независимы, откуда в достаточно малой окрестности начала координат такое отображение задаёт регулярную параметризацию поверхности  $\mathcal{M}$ . Кроме того, отсюда следует, что  $g_{12}(0, u^2) = 0$  при всех  $u^2$ .

По построению формулы  $\gamma(t) = \mathbf{r}(t, u_0^2)$ , где  $u_0^2 = \text{const}$ , при каждом  $u_0^2$  задают натурально параметризованную геодезическую на  $\mathcal{M}$ . Отсюда следует, что вектор  $\mathbf{r}_1$  всегда имеет единичную длину, то есть  $g_{11} \equiv 1$ . По лемме 5.35 коэффициент  $g_{12}$  не зависит от  $u^1$ . Но, как мы видели выше, он обращается в ноль при  $u^1 = 0$ , а значит, он тождественно нулевой. ■

**Лемма 5.38.** В полугеодезической системе координат гауссова кривизна вычисляется по формуле

$$(5.10) \quad K = -\frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial^2 \sqrt{g_{22}}}{(\partial u^1)^2}.$$

**Доказательство.** Обозначим  $\Phi := \sqrt{g_{22}}$ . Из тождеств Кристоффеля находим:

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} = -\Phi \Phi_{u^1}, \quad \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} = \Phi_{u^1}.$$

Теперь подставляем эти выражения в формулу (4.13), учитывая вид матрицы  $\mathcal{G}$ :

$$K = \frac{g_{1k}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \left( \frac{\partial \Gamma_{22}^k}{\partial u^1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^k}{\partial u^2} + \Gamma_{s1}^k \Gamma_{22}^s - \Gamma_{s2}^k \Gamma_{21}^s \right) = \frac{1}{\Phi^2} (-(\Phi \Phi_{u^1})_{u^1} + (\Phi_{u^1})^2) = \frac{-\Phi_{u^1 u^1}}{\Phi}.$$

■

**Теорема 5.39.** Пусть  $\mathcal{M}$  — поверхность постоянной гауссовой кривизны  $K$ . Тогда в достаточно малой окрестности любой её внутренней точки первая квадратичная форма заменой координат приводится к виду:

- (1)  $\mathbf{I} = (du^1)^2 + (du^2)^2$ , если  $K = 0$ ;
- (2)  $\mathbf{I} = \frac{1}{K} ((du^1)^2 + \cos^2(u^1)(du^2)^2)$ , если  $K > 0$ ;
- (3)  $\mathbf{I} = -\frac{1}{K} ((du^1)^2 + \text{ch}^2(u^1)(du^2)^2)$ , если  $K < 0$ ;

**Доказательство.** При построении полугеодезической системы координат в доказательстве теоремы 5.37 мы начинали с выбора произвольной гладкой кривой на данной поверхности, которая затем принималась за координатную линию  $u^1 = 0$ . Выполним это построение, взяв в качестве такой кривой некоторую натурально параметризованную геодезическую, проходящую через данную точку.

По аналогии с доказательством леммы 5.35 будем иметь  $\Gamma_{22}^1 = 0$  при  $u^1 = 0$ . Кроме того, так как  $u^2$  по построению является натуральным параметром на координатной линии

$u^1 = 0$ , мы имеем  $g_{22}(0, u^2) = 1$ . В полугеодезических координатах символ Кристоффеля  $\Gamma_{22}^1$  равен

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}.$$

Таким образом, при каждом фиксированном значении  $u^2$  функция  $g_{22}(u^1, u^2)$  есть решение обыкновенного дифференциального уравнения (5.10) с начальными условиями

$$g_{22}(0, u^2) = 1, \quad \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}(0, u^2) = 0.$$

Это решение единственно и в случае, когда  $K$  постоянно, задаётся формулой

$$g_{22} = \left( \operatorname{Re} \left( e^{u^1 \sqrt{-K}} \right) \right)^2.$$

(Уравнение в нашем случае легко решить, ведь оно линейно относительно  $\sqrt{g_{22}}$ .) Чтобы получить утверждение теоремы, остаётся в случае  $K \neq 0$  сделать замену  $(u^1, u^2) \mapsto (u^1/\sqrt{|K|}, u^2/\sqrt{|K|})$ . ■

**Следствие 5.40.** Если две поверхности имеют одинаковую постоянную гауссову кривизну, то они локально изометричны.

Из теоремы Гаусса 4.16 мы знаем, что локально изометричные поверхности имеют одинаковые гауссовы кривизны. Однако обратное, вообще говоря неверно. Сейчас мы поняли, что обратное утверждение верно в том случае, если гауссовы кривизны постоянны.

**Задача 5.41.** Определить, является ли метрика

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(u^2 + v^2 + c)^2}, \quad c = \text{const},$$

локально изометричной метрике сферы?

**Решение.** Мы знаем, что гауссова кривизна сферы радиуса  $R$  равна  $1/R^2$ . Поэтому, согласно последнему следствию, данная нам метрика изометрична метрике сферы в том и только том случае, когда для неё гауссова кривизна  $K$  постоянна и положительна. Считаем гауссову кривизну по формуле (4.13) из теоремы Гаусса. Для этого сначала считаем символы Кристоффеля для данной нам метрики.

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(u^2 + v^2 + c)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(u^2 + v^2 + c)^2} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{G}^{-1} = \begin{pmatrix} (u^2 + v^2 + c)^2 & 0 \\ 0 & (u^2 + v^2 + c)^2 \end{pmatrix}.$$

Нам нужно будет считать производные элементов матрицы  $\mathcal{G}$ , так что сделаем это заранее:

$$\left( \frac{1}{(u^2 + v^2 + c)^2} \right)'_u = -\frac{4u}{(u^2 + v^2 + c)^3}, \quad \left( \frac{1}{(u^2 + v^2 + c)^2} \right)'_v = -\frac{4v}{(u^2 + v^2 + c)^3}.$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{(u^2 + v^2 + c)^2}{2} \left( -\frac{4u}{(u^2 + v^2 + c)^3} \right) = -\frac{2u}{u^2 + v^2 + c}, \\
\Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \frac{(u^2 + v^2 + c)^2}{2} \left( -\frac{4v}{(u^2 + v^2 + c)^3} \right) = -\frac{2v}{u^2 + v^2 + c}, \\
\Gamma_{22}^1 &= \frac{(u^2 + v^2 + c)^2}{2} \frac{4u}{(u^2 + v^2 + c)^3} = \frac{2u}{u^2 + v^2 + c}, \\
\Gamma_{11}^2 &= \frac{(u^2 + v^2 + c)^2}{2} \frac{4v}{(u^2 + v^2 + c)^3} = \frac{2v}{u^2 + v^2 + c}, \\
\Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{(u^2 + v^2 + c)^2}{2} \left( -\frac{4u}{(u^2 + v^2 + c)^3} \right) = -\frac{2u}{u^2 + v^2 + c}, \\
\Gamma_{22}^2 &= \frac{(u^2 + v^2 + c)^2}{2} \left( -\frac{4v}{(u^2 + v^2 + c)^3} \right) = -\frac{2v}{u^2 + v^2 + c}.
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем выражения для символов Кристоффеля:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = -\frac{2u}{u^2 + v^2 + c}, \\
\Gamma_{22}^2 &= \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = -\frac{2v}{u^2 + v^2 + c}, \\
\Gamma_{22}^1 &= \frac{2u}{u^2 + v^2 + c}, \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{2v}{u^2 + v^2 + c}.
\end{aligned}$$

Теперь считаем гауссову кривизну:

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} g_{1k} \left( \frac{\partial \Gamma_{22}^k}{\partial u^1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^k}{\partial u^2} + \Gamma_{s1}^k \Gamma_{22}^s - \Gamma_{s2}^k \Gamma_{21}^s \right) = \\
&= \frac{(u^2 + v^2 + c)^2}{2} \left( \frac{2(-u^2 + v^2 + c)}{(u^2 + v^2 + c)^2} + \frac{2(u^2 - v^2 + c)}{(u^2 + v^2 + c)^2} - \frac{4u^2}{(u^2 + v^2 + c)^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{4v^2}{(u^2 + v^2 + c)^2} - \frac{4v^2}{(u^2 + v^2 + c)^2} + \frac{4u^2}{(u^2 + v^2 + c)^2} \right) = 4c.
\end{aligned}$$

Итак, данная метрика изометрична метрике сферы при  $c > 0$ , а при  $c \leq 0$  — нет. ■

### Эйлерова характеристика, теорема Гаусса — Бонне

Мы будем рассматривать компактные поверхности с кусочно-гладким краем. Край всегда будем коориентировать так, что в точках его гладкости вектор нормали  $\mathbf{n}_g$  направлен внутрь поверхности.

Под *разрезанием поверхности  $\mathcal{M}$  на простые куски* будем понимать представление  $\mathcal{M}$  в виде  $\mathcal{M} = \bigcup_i \mathcal{M}_i$ , где  $\mathcal{M}_i$  — простые куски поверхности, причём любые два различных куска  $\mathcal{M}_i$  и  $\mathcal{M}_j$  пересекаются только по общему краю:  $\mathcal{M}_i \cap \mathcal{M}_j \subset \partial \mathcal{M}_i \cap \partial \mathcal{M}_j$ . Примем без доказательства следующее наглядно очевидное утверждение.

**Предложение 5.42.** Любые два разрезания компактной поверхности на простые куски можно получить друг из друга с помощью последовательности операций следующих двух взаимно обратных видов:

- (1) замена одного из кусков  $\mathcal{M}_i$  на два, полученных из  $\mathcal{M}_i$  разрезанием на два куска;
- (2) замена двух кусков на их объединение, если оно является простым куском.

Пусть  $\mathcal{M} = \bigcup_{i=1}^{n_2} \mathcal{M}_i$  — разрезание компактной поверхности  $\mathcal{M}$  на  $n_2$  простых кусков. Обозначим через  $V$  множество всех точек, где граница хотя бы одного из этих кусков

негладкая, к которому произвольным образом добавлено конечное число граничных точек кусков  $\mathcal{M}_i$  так, чтобы множество  $\bigcup_{i=1}^{n_2} \partial\mathcal{M}_i \setminus V$  состояло из открытых гладких дуг. Замыкание каждой из этих дуг будем называть *ребром* разрезания, а каждую точку из  $V$  — его *вершиной*. Сами куски  $\mathcal{M}_i$  называются *гранями* разрезания. Обозначим число вершин через  $n_0$ , а число рёбер через  $n_1$ .

**Определение 5.43.** В обозначениях выше величина  $n_0 - n_1 + n_2$  называется *эйлеровой характеристикой* поверхности  $\mathcal{M}$  и обозначается через  $\chi(\mathcal{M})$ .

Пользуясь предложением 5.42 нетрудно доказать, что это определение корректно, то есть не зависит от выбора разрезания поверхности. (Достаточно проверить, что эйлерова характеристика не меняется при указанных операциях.)

**Теорема 5.44** (Гаусс, Бонне). Пусть  $\mathcal{M}$  — компактная поверхность с кусочно-гладким краем. Тогда имеет место формула

$$(5.11) \quad \oint_{\partial\mathcal{M}} k_g ds + \sum_{i=1}^k \theta_i + \int_{\mathcal{M}} K d\sigma = 2\pi\chi(\mathcal{M}),$$

где интеграл по граничному контуру берётся в направлении против часовой стрелки, а через  $\theta_1, \dots, \theta_k$  обозначены внешние углы кривой  $\partial\mathcal{M}$  в концах её гладких дуг.

Отметим, что первые два слагаемых формулы (5.11) дают суммарный угол, на который мы поворачиваемся в касательной плоскости при проходе по  $\partial\mathcal{M}$  против часовой стрелки. Действительно, согласно предложению 5.24 первое слагаемое есть угол, на который мы поворачиваемся при проходе по гладким дугам, а вторым слагаемым мы учитываем «резкие» повороты на склейках. На плоскости третье слагаемое отсутствует (сравнить с теоремой 2.24), а на произвольном куске поверхности оно даёт, так называемый, *угловой дефект*.

**Доказательство.** Рассмотрим достаточно маленький простой кусок  $\Omega$  данной поверхности, в котором введены полугеодезические координаты  $(u, v)$ :  $ds^2 = du^2 + g_{22} dv^2$ . По лемме 5.38

$$K = -\frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial^2 \sqrt{g_{22}}}{\partial u^2}.$$

Вектор нормали к кривой имеет вид

$$\mathbf{n}_g = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} (-g_{22} \dot{v} \mathbf{r}_u + \dot{u} \mathbf{r}_v).$$

Подставим эти выражения в формулу для геодезической кривизны и получим

$$k_g = \sqrt{g_{22}} \left( -\ddot{u}\dot{v} + \dot{u}\ddot{v} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u} \dot{v}^3 + \frac{1}{g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u} \dot{u}^2 \dot{v} + \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial v} \dot{u} \dot{v}^2 \right).$$

Напомним, что  $|\dot{\gamma}| = \dot{u}^2 + g_{22} \dot{v}^2 = 1$ , откуда мы выводим, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{g_{22}} \dot{v}}{\dot{u}} \right) &= \sqrt{g_{22}} \left( -\ddot{u}\dot{v} + \dot{u}\ddot{v} + \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u} \dot{u}^2 \dot{v} + \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial v} \dot{u} \dot{v}^2 \right), \\ \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial u} \dot{v} &= (\dot{u}^2 + g_{22} \dot{v}^2) \frac{\dot{v}}{2\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u} = \sqrt{g_{22}} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u} \dot{v}^3 + \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u} \dot{u}^2 \dot{v} \right). \end{aligned}$$

Мы видим, что выражение для  $k_g ds$  записывается следующим образом:

$$k_g ds = \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial u} \dot{v} ds + d \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{g_{22}} \dot{v}}{\dot{u}} \right).$$

Согласно формуле Грина интеграл по границе от  $\frac{\partial\sqrt{g_{22}}}{\partial u}\dot{v}ds$  равен

$$\oint_{\partial\Omega} \frac{\partial\sqrt{g_{22}}}{\partial u}\dot{v}ds = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\sqrt{g_{22}}}{\partial u}dv = \iint_{\Omega} \frac{\partial^2\sqrt{g_{22}}}{\partial u^2}du dv \stackrel{(5.10)}{=} - \int_{\Omega} K d\sigma.$$

Угол  $\arctg\left(\frac{\sqrt{g_{22}}\dot{v}}{\dot{u}}\right)$  равен (с точностью до  $\pi$ ) углу  $\theta$  от  $r_u$  до  $\dot{\gamma}$ , при этом имеем

$$\oint_{\partial U} d\theta = 2\pi - \sum_{i=1}^k \theta_i.$$

Окончательно мы получаем

$$\oint_{\partial\Omega} k_g ds = \oint_{\partial\Omega} \left( d\theta + \frac{\partial\sqrt{g_{22}}}{\partial u}\dot{v}ds \right) = 2\pi - \sum_{i=1}^k \theta_i - \int_{\Omega} K d\sigma.$$

Итак, мы доказали формулу для достаточно маленького простого куска. Для всей поверхности формула доказывается следующим образом. Рассмотрим разрезание поверхности  $\mathcal{M} = \bigcup_i \mathcal{M}_i$  на достаточно маленькие куски (в каждом из которых можно ввести полугеодезические координаты), и просуммируем полученные формулы для каждой грани. (В силу компактности поверхности  $\mathcal{M}$  можем считать, что кусков конечное число.) Граничные контуры этих кусков, которые будут лежать внутри  $\mathcal{M}$ , попадут в сумму два раза с разными знаками, и поэтому  $\oint_{\partial\mathcal{M}} k_g ds = \sum_i \oint_{\partial\mathcal{M}_i} k_g ds$ . Интегралы гауссовой кривизны по всем областям  $\mathcal{M}_i$  тоже просуммируются в интеграл по всей поверхности.

Осталось разобраться с углами. Пусть в нашем разрезании  $n_0$  вершин,  $n_1$  рёбер и  $n_2$  граней. Рассмотрим произвольную вершину валентности  $j$ . Пусть она внутренняя, и  $\theta_1, \dots, \theta_j$  — внешние углы граней, примыкающих к ней. Мы имеем  $\sum_{i=1}^j (\pi - \theta_i) = 2\pi$ , поэтому вклад этой вершины в общую сумму равен

$$\sum_{i=1}^j \theta_i = (j-2)\pi.$$

Пусть теперь вершина лежит на границе рассматриваемой области, а внешние углы равны  $\theta_1, \dots, \theta_{j-1}$  (в этом случае их на один меньше). Внешний угол края  $\partial\Omega$  в нашей вершине равен  $\pi - \sum_{i=1}^{j-1} (\pi - \theta_i)$ , и вклад вершины за вычетом внешнего угла при ней получается равным

$$\sum_{i=1}^{j-1} \theta_i - \pi + \sum_{i=1}^{j-1} (\pi - \theta_i) = (j-2)\pi,$$

то есть он такой же, как и полный вклад внутренней вершины. Обозначив количество вершин валентности  $j$  через  $n_{0,j}$ , посчитаем суммарный вклад всех вершин за вычетом внешних углов:

$$\sum_j n_{0,j} (j-2)\pi = \pi \underbrace{\sum_j j n_{0,j}}_{=2n_1} - 2\pi \underbrace{\sum_j n_{0,j}}_{=n_0} = 2\pi(n_1 - n_0).$$



Также при суммировании формул (5.11) по всем кускам  $\mathcal{M}_i$  в правой части  $2\pi$  просуммируется ровно  $n_2$  раз (по одному разу на каждый кусок). Итого получаем

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\mathcal{M}} k_g \, ds + \sum_{i=1}^k \theta_i + 2\pi(n_1 - n_0) + \int_{\mathcal{M}} K \, d\sigma &= 2\pi n_2, \\ \oint_{\partial\mathcal{M}} k_g \, ds + \sum_{i=1}^k \theta_i + \int_{\mathcal{M}} K \, d\sigma &= 2\pi \underbrace{(n_0 - n_1 + n_2)}_{\chi(\mathcal{M})}, \\ \oint_{\partial\mathcal{M}} k_g \, ds + \sum_{i=1}^k \theta_i + \int_{\mathcal{M}} K \, d\sigma &= 2\pi\chi(\mathcal{M}). \end{aligned}$$

■

Из доказательства теоремы Гаусса — Бонне легко видеть, что если компактная поверхность  $\mathcal{M}$  не имеет края, то выполнено равенство

$$\int_{\mathcal{M}} K \, d\sigma = 2\pi\chi(\mathcal{M}).$$

## 6. Дополнения

### Тензор кривизны Римана

Мы определяли символы Кристоффеля и ковариантную производную для двумерных поверхностей, а затем получили их выражения через метрику. Можно взять выведенные формулы за определения этих понятий в криволинейных координатах (никак не связанных с поверхностями), переходя таким образом к несколько более общей ситуации. Отметим также, что при выводе этих формул размерность нигде не использовалась, так что далее будем работать с криволинейными координатами в области евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$ .

Зададимся естественным вопросом: можно ли по римановой метрике в области восстановить систему криволинейных координат, метрика которой совпадает с указанной? Ответ следует искать в деривационных уравнениях Гаусса:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^i \partial u^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^k}.$$

Действительно, ведь если какая-то матрица претендует быть метрикой криволинейной системы координат, то она должна удовлетворять системе деривационных уравнений, куда она входит через символы Кристоффеля. Запишем для данной системы условия совместности из теоремы Дарбу 1.14:

$$\frac{\partial^3 \mathbf{r}}{\partial u^i \partial u^j \partial u^l} = \frac{\partial^3 \mathbf{r}}{\partial u^i \partial u^l \partial u^j}.$$

Распишем левую часть:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \mathbf{r}}{\partial u^i \partial u^j \partial u^l} &= \frac{\partial}{\partial u^l} \left( \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^i \partial u^j} \right) = \frac{\partial}{\partial u^l} \left( \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^k} \right) = \\ &= \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial u^l} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^k} + \Gamma_{ij}^k \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^k \partial u^l} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial u^l} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^k} + \Gamma_{ij}^k \Gamma_{kl}^s \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^s} = \left( \frac{\partial \Gamma_{ij}^s}{\partial u^l} + \Gamma_{ij}^k \Gamma_{kl}^s \right) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^s}. \end{aligned}$$

Аналогично пишем для правой части, подставляем в условие совместности и раскладываем по базису в криволинейных координатах:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{ij}^s}{\partial u^l} + \Gamma_{ij}^k \Gamma_{kl}^s &= \frac{\partial \Gamma_{il}^s}{\partial u^j} + \Gamma_{il}^k \Gamma_{kj}^s, \\ \frac{\partial \Gamma_{il}^s}{\partial u^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^s}{\partial u^l} + \Gamma_{il}^k \Gamma_{kj}^s - \Gamma_{ij}^k \Gamma_{kl}^s &= 0. \end{aligned}$$

Выражение, стоящее слева, называется *тензором кривизны Римана* и обозначается  $R_{ijl}^s$ .

**Лемма 6.1.** Выполнено следующее тождество:

$$R_{ijl}^s \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^s} = [\nabla_j, \nabla_l] \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}.$$

Здесь  $[\nabla_j, \nabla_l] = \nabla_j \nabla_l - \nabla_l \nabla_j$  — коммутатор операторов.

**Доказательство.** Для начала посчитаем ковариантную производную  $\nabla_j \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}$ . Для поля  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} =: \mathbf{v} = V^s \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^s}$  имеем  $V^i = 1$ , а остальные компоненты нулевые. Тогда

$$\nabla_j \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} = \nabla_j \mathbf{v} = \left( \frac{\partial V^s}{\partial u^j} + \Gamma_{jk}^s V^k \right) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^s} = \Gamma_{ij}^s \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^s}.$$

Теперь посчитаем повторную ковариантную производную  $\nabla_l \nabla_j \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}$ . Мы уже получили, что компоненты векторного поля  $\nabla_j \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} =: \mathbf{w} = W^s \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^s}$  равны  $W^s = \Gamma_{ij}^s$ . Отсюда

$$\nabla_l \left( \nabla_j \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} \right) = \nabla_l \mathbf{w} = \left( \frac{\partial W^s}{\partial u^l} + \Gamma_{lk}^s W^k \right) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^s} = \left( \frac{\partial \Gamma_{ij}^s}{\partial u^l} + \Gamma_{kl}^s \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^s}.$$

Итак, получаем

$$\begin{aligned} (\nabla_j \nabla_l - \nabla_l \nabla_j) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} &= \left( \frac{\partial \Gamma_{il}^s}{\partial u^j} + \Gamma_{il}^k \Gamma_{kj}^s \right) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^s} - \left( \frac{\partial \Gamma_{ij}^s}{\partial u^l} + \Gamma_{kl}^s \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^s} = \\ &= \underbrace{\left( \frac{\partial \Gamma_{il}^s}{\partial u^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^s}{\partial u^l} + \Gamma_{il}^k \Gamma_{kj}^s - \Gamma_{ij}^k \Gamma_{kl}^s \right)}_{=R_{ijl}^s} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^s} = R_{ijl}^s \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^s}. \end{aligned}$$

■

Таким образом, условие совместности деривационных уравнений Гаусса есть коммутирование ковариантных производных.

У доказанной леммы есть ещё одно важное следствие —  $R_{ijl}^s$  является тензором типа  $(1, 3)$ , кососимметричным по двум последним индексам:  $R_{ijl}^s = -R_{ilj}^s$ . Действительно, пусть  $(u^1, \dots, u^n)$  и  $(u^{1'}, \dots, u^{n'})$  — две криволинейные системы координат<sup>19</sup>, тогда для любого векторного поля  $\mathbf{v} = V^i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} = V^{i'} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^{i'}}$  имеем

$$\begin{aligned} R_{i'j'l'}^{s'} &= \left( (\nabla_{j'} \nabla_{l'} - \nabla_{l'} \nabla_{j'}) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^{i'}} \right)^{s'} = \frac{\partial u^{s'}}{\partial u^s} \left( (\nabla_{j'} \nabla_{l'} - \nabla_{l'} \nabla_{j'}) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^{i'}} \right)^s = \\ &= \frac{\partial u^{s'}}{\partial u^s} \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} \frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}} \frac{\partial u^l}{\partial u^{l'}} \underbrace{\left( (\nabla_j \nabla_l - \nabla_l \nabla_j) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} \right)^s}_{=R_{ijl}^s} = \frac{\partial u^{s'}}{\partial u^s} \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} \frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}} \frac{\partial u^l}{\partial u^{l'}} R_{ijl}^s. \end{aligned}$$

Из теоремы Дарбу следует, что если тензор кривизны Римана заданной матрицы Грама равен нулю (такие метрики называются *плоскими*), то для неё существует криволинейная система координат, метрика которой совпадает с заданной матрицей Грама.

**Теорема 6.2.** Симметричная положительно определённая матрица  $g_{ij}$  является матрицей Грама некоторой криволинейной системы координат тогда и только тогда, когда

- (1) существует замена координат, в которой она принимает вид единичной матрицы;
- (2) существует замена координат, в которой символы Кристоффеля обращаются в ноль;
- (3) тензор кривизны Римана обращается в ноль.

**Доказательство.** Пусть задана матрица  $g_{ij}$  с указанными свойствами. Если тензор кривизны для этой матрицы равен нулю, то по теореме Дарбу существует криволинейная система координат с такой матрицей Грама. Для любой матрицы Грама криволинейной системы координат в евклидовом пространстве существует замена координат, с помощью которой она приводится к единичной матрице. Раз матрица Грама единичная, то из формул для символов Кристоффеля следует, что все они равны нулю. Если символы Кристоффеля равны нулю, то и тензор кривизны Римана равен нулю. ■

Мы определяли ковариантное дифференцирование только для векторов, однако можно тем же способом определить его и для тензоров типа  $(p, q)$ . Пусть  $T = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ , тогда ковариантная производная вдоль вектора  $\mathbf{w} = W^k \partial_k$  даётся формулой

$$(\nabla_{\mathbf{w}} T)_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = W^k \left( \partial_k T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} + \sum_{m=1}^p \Gamma_{ks}^{i_m} T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_{m-1} s i_{m+1} \dots i_p} - \sum_{n=1}^q \Gamma_{kj_n}^s T_{j_1 \dots j_{n-1} s j_{n+1} j_q}^{i_1 \dots i_p} \right).$$

Отметим, что тождества (4.5) дают  $\nabla_k g_{ij} \equiv 0$ . Иными словами, метрика в криволинейных координатах ковариантно постоянна вдоль любого направления.

<sup>19</sup>При работе с тензорами для обозначения новых координат оказывается удобным менять не буквы, а индексы. Часто у новых координат индексы обозначают штрихами.

## Поверхности произвольной размерности

В этом разделе мы перейдём от двумерных поверхностей к высшим размерностям. Определение  $k$ -мерной поверхности схоже с двумерным случаем.

**Определение 6.3.** *Элементарной  $k$ -мерной поверхностью* в  $\mathbb{R}^n$  называется образ диффеоморфизма из области в  $\mathbb{R}^k$ , ранг матрицы Якоби которого всюду имеет ранг  $k$  (*условие регулярности*).

**Определение 6.4.** Подмножество  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$  называется *регулярной  $k$ -мерной поверхностью*, если для любой точки  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  пересечение  $\mathcal{M} \cap \overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x})$  множества  $\mathcal{M}$  с некоторым замкнутым шаром с центром в точке  $\mathbf{x}$  либо пусто, либо является элементарной  $k$ -мерной поверхностью.

Из теоремы о неявной функции сразу следует равносильность локального параметрического задания с локальным заданием в виде множества нулей гладкой функции. Доказывается так же, как и в двумерном случае.

Аналогично с двумерным случаем, можем определить *касательное пространство* в точке  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$  как линейную оболочку касательных векторов координатных линий:

$$\mathcal{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{M} := \text{span} \left( \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} \right|_{\mathbf{x}}, \dots, \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^k} \right|_{\mathbf{x}} \right).$$

В евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$  можем выбрать ортогональное дополнение подпространства  $\mathcal{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$ , назовём его *нормальным пространством* поверхности  $\mathcal{M}$  и будем обозначать через  $\mathcal{N}_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$ . Тогда имеет место разложение

$$\mathcal{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{M} \oplus \mathcal{N}_{\mathbf{x}}\mathcal{M} = \mathbb{R}^n.$$

Выберем в нём ортонормированный базис  $(\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_{n-k})$ . Размерность  $n - k$  нормального пространства называется *коразмерностью* поверхности  $\mathcal{M}$ . Поверхности коразмерности 1 часто называют *гиперповерхностями*.

Выведем аналоги деривационных уравнений для  $k$ -мерных поверхностей. Так же, как и в двумерном случае, определяем риманову метрику  $g_{ij} := \left\langle \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j} \right\rangle$ . По ней можно определить тензор кривизны Римана, как мы это делали для произвольных систем криволинейных координат. Отметим лишь, что теперь тензор кривизны не обязан обращаться в ноль. Можем формально написать

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^i \partial u^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^k} + \sum_{\alpha=1}^{n-k} b_{ij,\alpha} \mathbf{n}_\alpha, \\ \frac{\partial \mathbf{n}_\alpha}{\partial u^i} = c_{i,\alpha}^k \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^k} + \sum_{\beta=1}^{n-k} d_{i,\alpha\beta} \mathbf{n}_\beta. \end{cases}$$

Первое разложение называется *разложением Гаусса*, второе — *разложением Вайнгартена* (при найденных коэффициентах). Коэффициенты  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ , как и раньше, называются *символами Кристоффеля*. Аналогично двумерному случаю доказываются тождества

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{g^{kl}}{2} \left( \frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} \right).$$

Теперь рассмотрим коэффициенты  $b_{ij,\alpha} = b_{ji,\alpha}$ , которые называются *вторыми квадратичными формами*. (Для каждого базисного вектора нормального пространства имеем свою квадратичную форму, всего их  $n - k$ .) Из разложения Гаусса сразу очевидны формулы

$$b_{ij,\alpha} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i \partial u^j}, \mathbf{n}_\alpha \right\rangle.$$

Коэффициенты  $c_{i,\alpha}^k$  называются, как и в двумерном случае, *операторами Вайнгартена* (их теперь тоже несколько). Вычисляются они схожим образом:

$$c_{i,\alpha}^k g_{kl} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{n}_\alpha}{\partial u^i}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^l} \right\rangle \Big|_{|\mathbf{n}_\alpha|=1} - \left\langle \mathbf{n}_\alpha, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i \partial u^l} \right\rangle = -b_{il,\alpha} \Rightarrow c_{i,\alpha}^k = -g^{kl} b_{il,\alpha}.$$

Коэффициенты  $d_{i,\alpha\beta}$  называются *коэффициентами кручения* поверхности и также являются её фундаментальными геометрическими характеристиками. Для них

$$d_{i,\alpha\beta} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{n}_\alpha}{\partial u^i}, \mathbf{n}_\beta \right\rangle \Big|_{|\mathbf{n}_\alpha|=1} - \left\langle \mathbf{n}_\alpha, \frac{\partial \mathbf{n}_\beta}{\partial u^i} \right\rangle = -d_{i,\beta\alpha}.$$

Таким образом, коэффициенты кручения кососимметричны по индексам  $\alpha$  и  $\beta$ . Если в нормальном пространстве существует базис, в котором все коэффициенты кручения равны нулю, то такая поверхность называется *поверхностью без кручения*. Гиперповерхности всегда не имеют кручения.

Легко проверить, что при заменах координат коэффициенты  $b_{ij,\alpha}$ ,  $c_{i,\alpha}^k$  и  $b_{i,\alpha\beta}$  меняются как тензоры типа  $(0, 2)$ ,  $(1, 1)$  и  $(0, 1)$  соответственно.

На  $k$ -мерных регулярных поверхностях можно, как и в двумерном случае, определить ковариантное дифференцирование. Все формулы при этом, как легко видеть, сохраняются. По определению ковариантной производной как проекции обычной производной на касательное пространство, можем переписать разложение Гаусса в виде

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^i \partial u^j} = \nabla_j \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} + \sum_{\alpha=1}^{n-k} b_{ij,\alpha} \mathbf{n}_\alpha$$

или, обобщая на произвольное векторное поле  $\mathbf{v}$ ,

$$(6.1) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial u^i} = \nabla_i \mathbf{v} + \sum_{\alpha=1}^{n-k} \left\langle \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial u^i}, \mathbf{n}_\alpha \right\rangle \mathbf{n}_\alpha.$$

Будем смотреть на эти уравнения как на систему дифференциальных уравнений относительно компонент векторов касательного и нормального пространств и запишем для них условие совместности из теоремы Дарбу 1.14. При этом рассмотрим отдельно разложения Гаусса и Вайнгартена. В первом случае условия совместности имеют вид

$$\frac{\partial^3 \mathbf{r}}{\partial u^i \partial u^j \partial u^l} = \frac{\partial^3 \mathbf{r}}{\partial u^i \partial u^l \partial u^j}.$$

Распишем подробнее:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u^l} \left( \nabla_j \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} + \sum_{\alpha=1}^{n-k} b_{ij,\alpha} \mathbf{n}_\alpha \right) &= \frac{\partial}{\partial u^j} \left( \nabla_l \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} + \sum_{\alpha=1}^{n-k} b_{il,\alpha} \mathbf{n}_\alpha \right), \\ \frac{\partial}{\partial u^l} \left( \nabla_j \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} \right) + \left( \sum_{\alpha=1}^{n-k} b_{ij,\alpha} \frac{\partial \mathbf{n}_\alpha}{\partial u^l} \right) &= \frac{\partial}{\partial u^j} \left( \nabla_l \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} \right) + \left( \sum_{\alpha=1}^{n-k} b_{il,\alpha} \frac{\partial \mathbf{n}_\alpha}{\partial u^j} \right). \end{aligned}$$

Пользуясь (6.1), напомним

$$\begin{aligned} (6.2) \quad (\nabla_l \nabla_j - \nabla_j \nabla_l) \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} \right) + \sum_{\alpha=1}^{n-k} \left\langle \mathbf{n}_\alpha, \frac{\partial}{\partial u^l} \left( \nabla_j \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} \right) - \frac{\partial}{\partial u^j} \left( \nabla_l \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} \right) \right\rangle \mathbf{n}_\alpha + \\ + \sum_{\alpha=1}^{n-k} \left( \frac{\partial b_{ij,\alpha}}{\partial u^l} - \frac{\partial b_{il,\alpha}}{\partial u^j} \right) \mathbf{n}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{n-k} \left( b_{ij,\alpha} \frac{\partial \mathbf{n}_\alpha}{\partial u^l} - b_{il,\alpha} \frac{\partial \mathbf{n}_\alpha}{\partial u^j} \right) = 0. \end{aligned}$$

Далее рассмотрим компоненту этого вектора, лежащую в касательном пространстве:

$$\begin{aligned} & (\nabla_l \nabla_j - \nabla_j \nabla_l) \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} \right) + \sum_{\alpha=1}^{n-k} (b_{ij,\alpha} c_{l,\alpha}^s - b_{il,\alpha} c_{j,\alpha}^s) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^s} = 0, \\ & \underbrace{(\nabla_l \nabla_j - \nabla_j \nabla_l) \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} \right)}_{\stackrel{6.1}{=} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^s} R_{ilj}^s} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^s} g^{sm} \sum_{\alpha=1}^{n-k} (b_{ij,\alpha} b_{ml,\alpha} - b_{il,\alpha} b_{mj,\alpha}), \\ & R_{ijl}^s = g^{sm} \sum_{\alpha=1}^{n-k} (b_{il,\alpha} b_{mj,\alpha} - b_{ij,\alpha} b_{ml,\alpha}). \end{aligned}$$

Перейдя к последнему уравнению, мы воспользовались кососимметричностью тензора кривизны по двум последним индексам. Опустив индекс у тензора кривизны, получим

$$R_{mijl} = g_{ms} R_{ijl}^s = \sum_{\alpha=1}^{n-k} (b_{il,\alpha} b_{mj,\alpha} - b_{ij,\alpha} b_{ml,\alpha}).$$

(Часто тензор  $R_{mijl}$ , полученный из тензора кривизны Римана опусканием индекса, тоже называют *тензором Римана*.) Полученное нами уравнение называется *уравнением Гаусса*. Из него видны следующие симметрии тензора Римана:

$$R_{mijl} = -R_{imjl}, \quad R_{mijl} = -R_{milj}, \quad R_{mijl} = R_{jlm i}.$$

Таких симметрий достаточно много, поэтому в случае двумерных поверхностей единственной нетривиальной компонентой остаётся  $R_{1212} = b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = \det \mathcal{B}$ . Теперь можем написать

$$\frac{R_{1212}}{\det \mathcal{G}} = K,$$

тем самым ещё раз доказав теорему Гаусса 4.16.

Далее расписываем нормальную компоненту вектора в левой части уравнения (6.2):

$$\left\langle \mathbf{n}_\alpha, \frac{\partial}{\partial u^l} \left( \nabla_j \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} \right) \right\rangle - \left\langle \mathbf{n}_\alpha, \frac{\partial}{\partial u^j} \left( \nabla_l \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} \right) \right\rangle + \frac{\partial b_{ij,\alpha}}{\partial u^l} - \frac{\partial b_{il,\alpha}}{\partial u^j} + \sum_{\beta=1}^{n-k} (b_{ij,\alpha} d_{l,\beta\alpha} - b_{il,\alpha} d_{j,\beta\alpha}) = 0.$$

Посчитаем первое слагаемое (второе аналогично):

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{n}_\alpha, \frac{\partial}{\partial u^l} \left( \nabla_j \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} \right) \right\rangle &= \left\langle \mathbf{n}_\alpha, \frac{\partial}{\partial u^l} \left( \Gamma_{ij}^p \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^p} \right) \right\rangle = \\ &= \underbrace{\left\langle \mathbf{n}_\alpha, \frac{\partial \Gamma_{ij}^p}{\partial u^l} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^p} \right\rangle}_{=0} + \Gamma_{ij}^p \left\langle \mathbf{n}_\alpha, \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^p \partial u^l} \right\rangle = \Gamma_{ij}^p b_{pl,\alpha}. \end{aligned}$$

Получаем

$$\Gamma_{ij}^p b_{pl,\alpha} - \Gamma_{il}^p b_{pj,\alpha} + \frac{\partial b_{ij,\alpha}}{\partial u^l} - \frac{\partial b_{il,\alpha}}{\partial u^j} + \sum_{\beta=1}^{n-k} (b_{ij,\alpha} d_{l,\beta\alpha} - b_{il,\alpha} d_{j,\beta\alpha}) = 0.$$

Эти уравнения называются *уравнениями Кодацци*. Они принимают более компактный вид, если переписать их через ковариантные производные:

$$\nabla_l b_{ij,\alpha} - \nabla_j b_{il,\alpha} = \sum_{\beta=1}^{n-k} (b_{ij,\alpha} d_{l,\alpha\beta} - b_{il,\alpha} d_{j,\alpha\beta}).$$

Для гиперповерхностей уравнения Кодацци принимают вид  $\nabla_l b_{ij} = \nabla_j b_{il}$ . Выражение  $\nabla_l b_{ij}$  является тензором типа  $(0, 3)$ , который называется *тензором Кодацци*. Отметим, что он симметричен по всем индексам, что следует из уравнений Кодацци и симметричности второй квадратичной формы.

Теперь выпишем условия совместности для разложения Вайнгартена. Оно имеет вид

$$\frac{\partial^2 \mathbf{n}_\alpha}{\partial u^i \partial u^j} = \frac{\partial^2 \mathbf{n}_\alpha}{\partial u^j \partial u^i}.$$

Распишем левую часть, пользуясь разложениями Гаусса и Вайнгартена:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{n}_\alpha}{\partial u^i \partial u^j} &= \frac{\partial}{\partial u^j} \left( c_{i,\alpha}^k \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^k} + \sum_{\beta=1}^{n-k} d_{i,\alpha\beta} \mathbf{n}_\beta \right) = \frac{\partial c_{i,\alpha}^k}{\partial u^j} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^k} + \\ &+ c_{i,\alpha}^k \left( \Gamma_{jk}^s \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^s} + \sum_{\gamma=1}^{n-k} b_{jk,\gamma} \mathbf{n}_\gamma \right) + \sum_{\beta=1}^{n-k} \frac{d_{i,\alpha\beta}}{\partial u^j} \mathbf{n}_\beta + \sum_{\beta=1}^{n-k} d_{i,\alpha\beta} \left( c_{j,\beta}^s \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^s} + \sum_{\gamma=1}^{n-k} d_{j,\beta\gamma} \mathbf{n}_\gamma \right). \end{aligned}$$

Если рассмотреть уравнение, полученное приравнованием коэффициентов при векторах касательного пространства после смены индексов  $i$  и  $j$ , то получится уравнение Кодацци. Если же приравнять коэффициенты при векторах нормального пространства  $\mathbf{n}_\gamma$ , мы получим *уравнения Риччи*:

$$c_{i,\alpha}^k b_{kj,\gamma} - c_{j,\alpha}^k b_{ki,\gamma} + \frac{\partial d_{i,\alpha\gamma}}{\partial u^l} - \frac{\partial d_{j,\alpha\gamma}}{\partial u^i} + \sum_{\beta=1}^{n-k} (d_{i,\alpha\beta} d_{j,\beta\gamma} - d_{j,\alpha\beta} d_{i,\beta\gamma}) = 0.$$

(Здесь дополнительно следует заменить операторы Вайнгартена и коэффициенты кручения через первую и вторые квадратичные формы.) Если поверхность не имеет кручения, то уравнения Риччи обращаются в условие коммутирования операторов Вайнгартена. Но в случае коразмерности 1 у нас всего один оператор Вайнгартена, который, конечно, сам с собой коммутирует. Так что уравнений Риччи для гиперповерхностей нет.

Как и в двумерном случае, здесь имеет место теорема Бонне, которая говорит о восстановлении поверхности по её геометрическим характеристикам: метрике, вторым квадратичным формам и коэффициентам кручения.

**Теорема 6.5** (Бонне). Пусть в некоторой замкнутой односвязной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$  заданы гладкие по  $u^1, \dots, u^k$ : симметричная положительно определённая матрица  $g_{ij}(u^1, \dots, u^k)$ , симметричные матрицы  $b_{ij,\alpha}(u^1, \dots, u^k)$  и кососимметричные по индексам  $\alpha$  и  $\beta$  коэффициенты  $d_{i,\alpha\beta}(u^1, \dots, u^k)$ . Тогда, если приведённые объекты удовлетворяют уравнениям Гаусса, Кодацци и Риччи, то существует единственная с точностью до движения  $k$ -мерная регулярная поверхность, у которой первой квадратичной формой будет матрица  $g_{ij}$ , вторыми квадратичными формами будут матрицы  $b_{ij,\alpha}$ , а коэффициентами кручения будут  $d_{i,\alpha\beta}$ .

Следующую задачу А. А. Гайфуллин давал на досрочном экзамене. (На самом экзамене он формулировал задачу для  $n = 3$ , но приведённое решение не чувствительно к выбору  $n$ .)

**Задача 6.6.** Описать все геодезические на  $SO(n)$  как на поверхности в  $\mathbb{R}^{n \times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$ .

**Решение.** Разобьём решение на несколько шагов.

- (1) Докажем, что умножение (слева или справа) на матрицу из  $O(n)$  является изометрией в  $\mathbb{R}^{n \times n}$ : если  $Q \in O(n)$ , то

$$\begin{aligned} \langle QA, QB \rangle &= \text{tr}((QA)^t QB) = \text{tr}(A^t \underbrace{Q^t Q}_=E B) = \text{tr} A^t B = \langle A, B \rangle, \\ \langle AQ, BQ \rangle &= \text{tr}(Q^t (A^t B) Q) = \text{tr}(Q^{-1} (A^t B) Q) = \text{tr} A^t B = \langle A, B \rangle. \end{aligned}$$

(2) Докажем, что касательное пространство в точке  $A \in \mathrm{SO}(n)$  имеет вид

$$\mathcal{T}_A \mathrm{SO}(n) = \{A \cdot S : S \in \mathbb{R}^{n \times n}, S + S^t = 0\}.$$

Пусть  $X(t)$  — кривая в  $\mathrm{SO}(n)$ , причём  $X(0) = A$ . По лемме 2.32 при каждом  $t$  матрица  $X^{-1}\dot{X} =: S$  кососимметрична, откуда получаем  $\dot{X} = X \cdot S$ , где  $S + S^t = 0$ . Тем самым,  $\mathcal{T}_A \mathrm{SO}(n) \subseteq \{A \cdot S : S \in \mathbb{R}^{n \times n}, S + S^t = 0\}$ . С другой стороны, размерность  $\mathrm{SO}(n)$  как поверхности в  $\mathbb{R}^{n \times n}$  равна

$$n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2},$$

так как условие ортогональности  $A^t A = E$  задаёт ровно  $n(n+1)/2$  независимых алгебраических условий. Это в точности совпадает с размерностью пространства кососимметрических матриц  $n \times n$ , поэтому выполнено и обратное включение.

(3) Любую точку  $A \in \mathrm{SO}(n)$  можно изометрией (домножением на матрицу  $A^{-1}$  слева или справа) перевести в точку  $E \in \mathrm{SO}(n)$ , поэтому достаточно найти геодезические, проходящие через неё. В этой точке касательное пространство  $\mathcal{T}_E \mathrm{SO}(n)$  представляет из себя пространство кососимметрических матриц.

Напомним, что *экспонентой* матрицы  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  называется матрица

$$\exp A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Легко видеть, что экспонента от кососимметрической матрицы является собственной ортогональной: если  $S + S^t = 0$  и  $Q = \exp S$ , то

$$Q^t = (\exp S)^t = \exp S^t = \exp(-S) = Q^{-1}, \quad \det Q = \det \exp S = e^{\mathrm{tr} S} = e^0 = 1.$$

Таким образом, можем рассмотреть отображение  $\exp: \mathcal{T}_E \mathrm{SO}(n) \rightarrow \mathrm{SO}(n)$ . Докажем, что оно является экспоненциальным отображением в точке  $E$  поверхности  $\mathrm{SO}(n)$  в смысле определения 5.32. Иными словами, мы хотим доказать, что кривая  $\Phi(t) = \exp(tS)$  является геодезической на  $\mathrm{SO}(n)$ . Для этого проверим, что  $\nabla_{\dot{\Phi}} \dot{\Phi} \equiv 0$ :

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) &= S \exp(tS), \quad \ddot{\Phi}(t) = S^2 \exp(tS), \\ \langle \dot{\Phi}(t), \ddot{\Phi}(t) \rangle &= \langle S^2 \exp(tS), S \exp(tS) \rangle \stackrel{(1)}{=} \langle S^2, S \rangle = \mathrm{tr}(S^3) = 0. \end{aligned}$$

Предпоследний переход корректен, так как матрица  $\exp(tS)$  ортогональна, а потому домножение на неё является изометрией. Последний переход выполнен в силу кососимметричности матрицы  $S^3$ .

Таким образом, все геодезические на  $\mathrm{SO}(n)$  как на поверхности в  $\mathbb{R}^{n \times n}$  имеют вид  $\gamma(t) = A \exp(tS)$ , где  $A \in \mathrm{SO}(n)$ , а  $S$  кососимметрична. ■

## Понятие многообразия

Ранее мы кратко обсуждали двумерные многообразия. В этом разделе мы остановимся на них подробнее и не будем уделять внимание размерности, в которой мы работаем.

**Определение 6.7.** *Топологическим многообразием (размерности  $n$ )* называется хаусдорфово топологическое пространство  $\mathcal{M}$  со счётной базой, каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную области в  $\mathbb{R}^n$ .

Условие счётности базы эквивалентно тому, что многообразие вкладывается в евклидово пространство конечной размерности (теорема Уитни о вложении). В книге [Шарп] оно заменяется на более слабое условие паракомпактности.



**Определение 6.8.** Для топологического многообразия  $\mathcal{M}$  пара  $(U, \varphi)$ , где  $\varphi$  — гомеоморфизм из открытого множества  $U \subset \mathcal{M}$  на открытое подмножество  $\mathbb{R}^n$ , называется *картой*. Набор карт, целиком покрывающих  $\mathcal{M}$ , называется *атласом*.

Как и в случае поверхностей, карта  $(U, \varphi)$  локально задаёт на многообразии криволинейные координаты, которые мы, как и раньше, будем называть *локальными координатами*. По определению, каждое топологическое многообразие можно покрыть конечным числом карт  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ,  $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ . Пересечение двух карт  $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$  отображается гомеоморфизмом  $\varphi_\alpha$  на область  $V_{\alpha\beta} \subset V_\alpha$ , а гомеоморфизмом  $\varphi_\beta$  — на область  $V_{\beta\alpha} \subset V_\beta$ .

**Определение 6.9.** Гомеоморфизм  $\varphi_{\alpha\beta} := \varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1}$  области  $V_{\alpha\beta}$  на область  $V_{\beta\alpha}$  называется *функцией перехода из карты  $U_\alpha$  в карту  $U_\beta$* .

Две пересекающиеся карты задают на своём пересечении две системы координат. Тогда существует замена координат, переводящая одни в другие, она и выражается соответствующей функцией перехода.

Обсуждавшаяся ранее теория поверхностей основана на применении аппарата дифференциального исчисления. Отметим, что на топологическом многообразии такой аппарат, вообще говоря, развить невозможно. Действительно, если функция  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируема в некоторых локальных координатах, то в других координатах она, вообще говоря, дифференцируемой не будет, поскольку функции перехода непрерывны, но не обязаны быть гладкими. Поэтому для того, чтобы использовать аппарат производных, необходимо снабдить топологическое многообразие дополнительной структурой, призванной обеспечить гладкость функций перехода.

**Определение 6.10.** *Гладким многообразием* называется топологическое многообразие, на котором фиксирован атлас, все функции перехода в котором гладкие<sup>20</sup>.

На гладком многообразии уже имеет смысл понятие гладкой функции.

**Определение 6.11.** Функция  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  на гладком многообразии  $\mathcal{M}$  называется *гладкой* в точке  $\mathbf{x}$ , если в некоторой карте  $(U, \varphi)$ , покрывающей точку  $\mathbf{x}$ , функция  $f \circ \varphi_\alpha^{-1}: V_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$  гладкая в точке  $\varphi(\mathbf{x})$ . (Эквивалентно, в некоторой карте функция  $f(u^1, \dots, u^n)$  от локальных координат гладкая как функция от  $n$  переменных.)

Это определение корректно (не зависит от выбора карты), потому что все функции перехода гладкие. Теперь можем определить гладкое отображение гладких многообразий.

**Определение 6.12.** Если  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  гладких многообразий называется *гладким* в точке  $\mathbf{x}$ , если для некоторых карт  $(U, \varphi)$  на  $\mathcal{M}$  и  $(V, \psi)$  на  $\mathcal{N}$  таких, что  $f(U) \subset V$  и отображение  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$  гладкое в точке  $\varphi(\mathbf{x})$ . (Эквивалентно, в некоторых картах отображение  $f(u^1, \dots, u^m)$  от локальных координат гладкое как отображение  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ .)

Теория поверхностей начинается с рассмотрения касательных пространств к поверхности в каждой точке. Касательные векторы при этом определялись как векторы скорости гладких кривых на поверхности.

**Определение 6.13.** *Гладкой кривой* на многообразии  $\mathcal{M}$  называется гладкое отображение  $\gamma: I \rightarrow \mathcal{M}$ . То есть в любой карте  $(U, \varphi)$  композиция  $\varphi^{-1} \circ \gamma: \gamma^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$  гладкая. (Эквивалентно, в окрестности каждой точки отображение  $\gamma$  задаётся набором гладких функций  $u^1(t), \dots, u^n(t)$  локальных координат.)

Перейдём теперь к определению касательного вектора к многообразию. Здесь мы сталкиваемся с трудностью, связанной с отсутствием объемлющего пространства: вектор скорости кривой, лежащей на многообразии, не представляется в виде вектора какого-то наперёд заданного линейного пространства. Так что теперь нужно действовать тоньше.

**Определение 6.14.** Пусть  $\mathcal{M}$  — гладкое многообразие,  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ . Рассмотрим множество всех гладких кривых  $\gamma: (-\varepsilon; \varepsilon) \rightarrow \mathcal{M}$ ,  $\gamma(0) = \mathbf{x}$ . Скажем, что кривые  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  *эквивалентны*

<sup>20</sup>Гладкими мы здесь называем отображения класса  $C^1$ . Можно рассматривать кривые класса  $C^\infty$ , но в рамках этого раздела в таком требовании нет необходимости.

$(\gamma_1 \sim \gamma_2)$ , если в некоторой (а значит, и в любой) карте  $(U, \varphi)$  вокруг  $\mathbf{x}$  выполняется

$$\left. \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_1) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_2) \right|_{t=0}.$$

*Касательным вектором* в точке  $\mathbf{x}$  будем называть класс эквивалентности гладких кривых по введённому отношению. *Касательное пространство*  $\mathcal{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$  в точке  $\mathbf{x}$  — это множество всех касательных векторов в этой точке.

На  $\mathcal{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$  можно ввести структуру линейного пространства:

$$\begin{aligned} [\gamma_1] + [\gamma_2] &:= [\gamma_3], \text{ где } \varphi \circ \gamma_3(t) = \varphi \circ \gamma_1(t) + \varphi \circ \gamma_2(t) - \varphi(\mathbf{x}), \\ \lambda[\gamma] &:= [\gamma_\lambda], \text{ где } \varphi \circ \gamma_\lambda(t) = \varphi(\mathbf{x}) + \lambda(\varphi \circ \gamma(t) - \varphi(\mathbf{x})). \end{aligned}$$

Касательные векторы  $[\gamma_i]$ , где  $\varphi \circ \gamma_i(t) = \varphi(\mathbf{x}) + t \cdot \mathbf{e}_i$ , образуют базис  $\mathcal{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$ , так что мы можем рассматривать координаты касательных векторов в этом базисе. Если касательный вектор  $\xi$  задаётся кривой  $\gamma(t) = (u^1(t), \dots, u^n(t))$ , то  $\xi^i = \dot{u}^i(0)$ . Легко видеть, что при замене координат (выборе другой карты) координатные представления касательных векторов меняются согласно тензорному закону. (Что вполне естественно.)

Теперь мы можем определить дифференцирование вдоль касательных векторов на многообразии. Рассмотрим гладкую функцию  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ , и пусть  $\xi \in \mathcal{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$  — касательный вектор, представленный кривой  $\gamma: (-\varepsilon; \varepsilon) \rightarrow \mathcal{M}$  такой, что  $\gamma(0) = \mathbf{x}$ .

**Определение 6.15.** Производной функции  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  вдоль касательного вектора  $\xi = [\gamma] \in \mathcal{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$  в точке  $\mathbf{x}$  называется число

$$\partial_{\xi} f := \left. \frac{d}{dt}(f \circ \gamma) \right|_{t=0}.$$

**Предложение 6.16.** Приведённое выше определение корректно, то есть не зависит от выбора кривой  $\gamma$ , представляющей касательный вектор  $\xi$ .

**Доказательство.** Напишем

$$\partial_{\xi} f = \left. \frac{d}{dt} f(u^1(t), \dots, u^n(t)) \right|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial u^i}(\mathbf{x}) \left. \frac{du^i}{dt} \right|_{t=0} = \xi^i \frac{\partial f}{\partial u^i}(\mathbf{x}).$$

Последнее выражение зависит только от функции  $f$  и вектора  $\xi$ . ■

Полезно сравнить полученный результат с определением 3.23 дифференциала гладкой функции на поверхности.

Таким образом, каждый касательный вектор  $\xi \in \mathcal{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$  определяет отображение  $\partial_{\xi}$  множества гладких функций, заданных в окрестности точки  $\mathbf{x}$ , в  $\mathbb{R}$ , причём это отображение удовлетворяет очевидным свойствам:

- (1)  $\partial_{\xi}(\lambda f + \mu g) = \lambda \cdot \partial_{\xi} f + \mu \cdot \partial_{\xi} g$  для любых  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  (*линейность*);
- (2)  $\partial_{\xi}(fg) = f(\mathbf{x}) \cdot \partial_{\xi} g + g(\mathbf{x}) \cdot \partial_{\xi} f$  (*правило Лейбница*).

**Определение 6.17.** Отображение множества гладких функций на  $\mathcal{M}$  в  $\mathbb{R}$ , удовлетворяющее условиям (1) — (2) называется *дифференцированием в точке  $\mathbf{x}$* .

Из правила Лейбница следует, что  $\mathcal{D}(\text{const}) = 0$  для любого дифференцирования  $\mathcal{D}$ .

**Теорема 6.18.** Каждому дифференцированию  $\mathcal{D}$  в точке  $\mathbf{x}$  соответствует единственный вектор  $\xi \in \mathcal{T}_{\mathbf{x}_0}\mathcal{M}$ , для которого

$$\mathcal{D}f = \partial_{\xi} f$$

для всех гладких функций  $f$ , заданных в окрестности точки  $\mathbf{x}_0$ .

**Доказательство.** Зафиксируем систему координат  $u^1, \dots, u^n$  в окрестности точки  $\mathbf{x}$  и рассмотрим произвольную гладкую функцию  $f$ . Из формулы Тейлора следует, что в окрестности точки  $\mathbf{x}_0 = (u_0^1, \dots, u_0^n)$  эта функция представляется в виде

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial u^i} \right|_{\mathbf{x}} (u^i - u_0^i) + h_i(\mathbf{x})(u^i - u_0^i),$$

где  $h_i: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкие функции, причём  $h_i(\mathbf{x}_0) = 0$ . Применим к этой функции отображение дифференцирования  $\mathcal{D}$ :

$$\mathcal{D}f = \left. \frac{\partial f}{\partial u^i} \right|_{\mathbf{x}} \mathcal{D}(u^i - u_0^i) + \underbrace{\mathcal{D}(h_i(\mathbf{x})(u^i - u_0^i))}_{=0}.$$

Из правила Лейбница сразу видно, что второе слагаемое нулевое (каждое слагаемое в сумме внутри скобок представлено в виде произведения двух функций, каждая из которых обращается в нуль в точке  $\mathbf{x}_0$ .) Обозначая  $\xi^i := \mathcal{D}(u^i - u_0^i)$ , получим

$$\mathcal{D}f = \left. \frac{\partial f}{\partial u^i} \right|_{\mathbf{x}} \xi^i = \partial_{\xi} f,$$

где  $\xi$  — касательный вектор, заданный в координатах  $(u^1, \dots, u^n)$  числами  $\xi^1, \dots, \xi^n$ . Таким образом, мы имеем две взаимно-обратные инъекции  $\xi \mapsto \partial_{\xi}$  и  $\mathcal{D} \mapsto \partial_{\mathcal{D}(u^i - u_0^i)}$  между касательными векторами и операторами дифференцирования. ■

Мы получили новый, аналитический взгляд на касательные векторы как на операторы дифференцирования на многообразии. Он часто оказывается более удобным, чем геометрический взгляд через кривые: например, базис касательного пространства, построенный нами ранее, в новых терминах записывается намного изящнее:

$$\frac{\partial}{\partial u^1}, \quad \dots, \quad \frac{\partial}{\partial u^n}.$$

Ситуация с касательными векторами описывается в книге [Шарп]:

*«Касательные векторы имеют двойственную природу. С одной стороны, у них имеется геометрический аспект, заключающийся в том, что они задают направления в пространстве: если я стою на многообразии, то могу двигаться в различных направлениях, которые можно описать касательными векторами в точке моего положения. С другой стороны, у них имеется аналитический аспект, в котором они выступают как „производные по направлению“».*

Более подробно многообразия обсуждаются в курсе дифференциальной геометрии и топологии, здесь мы остановимся на введении базовых понятий.

## Модели плоскости Лобачевского

Ранее мы классифицировали поверхности постоянной гауссовой кривизны. Заметим, что для  $K \geq 0$  мы можем предъявить поверхность без края, гауссова кривизна которой всюду равна  $K$ . Для  $K > 0$  это сфера радиуса  $1/\sqrt{K}$ , а для  $K = 0$  — плоскость (на которую можно смотреть как на сферу бесконечного радиуса).

Гильберт доказал, что гладкие поверхности постоянной отрицательной гауссовой кривизны в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$  не могут быть полными, что в контексте настоящего курса означает, что любая такая поверхность обязательно имеет край. (Со схемой доказательства теоремы Гильберта можно ознакомиться в §4.4 книги [Новиков — Тайманов].) Однако существует способ построить не имеющий края аналог сферы с постоянной отрицательной кривизной, если отказаться от евклидовости пространства  $\mathbb{R}^3$ .

Рассмотрим псевдоевклидово пространство  $\mathbb{R}^{2,1}$ , скалярное произведение  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  в котором задано матрицей  $\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ . В этом пространстве рассмотрим *псевдосферу*

$$\mathbb{L} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^{2,1} : x^2 + y^2 - z^2 = -1\}.$$

С точки зрения евклидовой геометрии в  $\mathbb{R}^3$  псевдосфера  $\mathbb{L}$  — это двуполостный гиперболоид. Однако чаще всего нам будет интересна только его связная компонента  $z > 0$ , мы будем обозначать её через  $\mathbb{L}_+$ .

Изучение геометрии на всякой поверхности начинается с рассмотрения пространства её касательных векторов. Рассмотрим произвольную кривую  $\gamma = \gamma(t)$ , лежащую на псевдосфере. Дифференцируя равенство  $\langle \gamma, \gamma \rangle = -1$ , получим  $\langle \gamma', \gamma \rangle = 0$ , то есть вектор скорости любой кривой, лежащей на псевдосфере, ортогонален радиус-вектору. Отсюда, в частности, следует, что скалярный квадрат любого ненулевого касательного вектора положителен. Это обстоятельство играет важнейшую роль в построении геометрии Лобачевского — пользуясь им, мы можем аналогично евклидовому случаю определить на псевдосфере длины кривых, углы между ними, векторные поля, ковариантное дифференцирование, параллельный перенос и прочие понятия теории поверхностей.

Таким образом, на псевдосфере пространства  $\mathbb{R}^{2,1}$  возникает геометрия, схожая с геометрией на поверхности в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$ . Эта геометрия и называется *геометрией Лобачевского*, а псевдосферу часто называют *векторной моделью* плоскости Лобачевского. Асимптотические направления двуполостного гиперболоида  $\mathbb{L}$  имеют вид  $(\cos \varphi : \sin \varphi : 1)$ , их совокупность называют *абсолютом* плоскости Лобачевского в векторной модели.

Все перечисленные выше геометрические структуры вычисляются через риманову метрику на поверхности. Чтобы её выписать, параметризуем псевдосферу  $\mathbb{L}$  следующим образом:

$$\mathbf{r}(u, v) = (\operatorname{sh} u \cos v, \operatorname{sh} u \sin v, \operatorname{ch} u).$$

(Просто выписали поверхность вращения гиперболы  $(\operatorname{sh} u, \operatorname{ch} u)$  вокруг оси  $z$ .) Стандартное вычисление приводит к следующему выражению для римановой метрики:

$$ds^2 = du^2 + \operatorname{sh}^2 u dv^2.$$

По выписанной метрике мы можем посчитать символы Кристоффеля через формулы (4.2) и гауссову кривизну (по теореме Гаусса). Нетрудно убедиться, что гауссова кривизна псевдосферы постоянна и всюду равна  $-1$ .

**Теорема 6.19.** Геodesическими в векторной модели плоскости Лобачевского являются сечения псевдосферы плоскостями, проходящими через начало координат, и только они.

**Доказательство.** Из определения ковариантной производной вытекает, что геodesические — ровно те кривые, ускорение которых в натуральной параметризации ортогонально поверхности (в данном случае, псевдосфере). Пересечения псевдосферы с плоскостями, проходящими через начало координат, как раз обладают этим свойством. Действительно, ускорение ортогонально скорости, а вектор скорости такой кривой ортогонален радиус-вектору, причём все эти три вектора лежат в одной плоскости. Значит, ускорение всегда сонаправленно с радиус-вектором, а потому перпендикулярно псевдосфере.

То, что других геodesических нет, проверяется так же, как для сферы. Выберем на гиперболоиде точку и касательный вектор. По ним можно построить единственную плоскость, проходящую через начало координат, выбранную точку и содержащую указанный касательный вектор. Сечение псевдосферы этой плоскостью и будет той единственной геodesической, которая проходит через данную точку в данном направлении. ■

Выбранная нами параметризация псевдосферы  $\mathbb{L}_+$  обладает одним существенным недостатком — она имеет особенность в вершине  $(0, 0, 1)$ . Этим проявляется ещё одно сходство

псевдосферы со сферой (классическая параметризация сферы имеет особенность в северном полюсе). Но если на сфере эту проблему решить не удаётся, для псевдосферы это можно сделать, рассмотрев её *стереографическую проекцию*.

Спроецируем верхнюю компоненту  $\mathbb{L}_+$  двуполостного гиперboloида  $x^2 + y^2 - z^2 = -1$  из вершины нижней компоненты  $(0, 0, -1)$  на плоскость  $z = 0$ . Легко видеть, что полярные координаты  $(\rho, \varphi)$  в плоскости связаны с исходными  $(u, v)$  на псевдосфере  $\mathbb{L}$  по формулам

$$(6.3) \quad \rho = \frac{\operatorname{sh} u}{1 + \operatorname{ch} u}, \quad \varphi = v.$$

Выразив координату  $u$  из первого равенства и подставив её в выражение матрицы первой квадратичной формы, получим метрику

$$ds^2 = \frac{4}{(1 - \rho^2)^2} (d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2).$$

Переходя от полярных координат  $(\rho, \varphi)$  к евклидовым  $(x, y)$ , получим первую квадратичную форму в этих координатах:

$$(6.4) \quad ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2},$$

при этом компонента  $\mathbb{L}_+$  псевдосферы целиком параметризуется внутренностью единичного круга. Тем самым мы получили *модель Пуанкаре в круге* плоскости Лобачевского. Граница круга, единичная окружность  $x^2 + y^2 = 1$ , отождествляется с абсолют:  $(x, y) \mapsto (x : y : 1)$ .

Метрика (6.4) обладает важным свойством — она *конформно-евклидова*, то есть отличается от метрики евклидовой плоскости  $dx^2 + dy^2$  умножением на функцию. Это означает, что углы между кривыми в такой метрике совпадают с евклидовыми углами.

**Теорема 6.20.** Геодезическими в модели Пуанкаре плоскости Лобачевского являются диаметры единичного круга и дуги окружностей, пересекающих абсолют под прямым углом.

**Доказательство.** Ясно, что геодезические в рассматриваемой модели — это образы геодезических в векторной модели при стереографической проекции. Рассмотрим сечение компоненты  $\mathbb{L}_+$  псевдосферы плоскостью, проходящей через начало координат, с вектором нормали  $(a, b, c)$ . Тогда соответствующая геодезическая в координатах  $(u, v)$  на гиперboloиде задаётся уравнением

$$a \operatorname{ch} u + b \operatorname{sh} u \cos v + c \operatorname{sh} u \sin v = 0.$$

Подставим в это уравнение формулы (6.3), предварительно разделив его на  $1 + \operatorname{ch} u$ :

$$a \frac{\rho^2 + 1}{2} + b \rho \cos \varphi + c \rho \sin \varphi = 0.$$

Переписывая в координатах  $(x, y)$ , получаем

$$a(x^2 + y^2 + 1) + 2bx + 2cy = 0.$$

Если  $a = 0$ , то это уравнение задаёт диаметр круга. Если  $a \neq 0$ , то оно задаёт окружность  $\omega$  с центром в точке  $(-\frac{b}{a}, -\frac{c}{a})$  и радиусом  $R = \sqrt{(\frac{b}{a})^2 + (\frac{c}{a})^2 - 1}$ . Из последних формул немедленно следует, что квадрат расстояния между центрами окружности  $\omega$  и единичной окружности равен сумме квадратов их радиусов. Так что геодезическая пересекает границу единичного круга под прямым углом. ■

Теперь мы хотим увидеть группу движений плоскости Лобачевского. Для этого нам будет удобно ввести комплексный параметр  $z = x + iy$ , в котором метрика переписется как

$$(6.5) \quad \mathbf{I} = \frac{4 dz d\bar{z}}{(1 - |z|^2)^2}$$

На  $\mathbb{CP}^1$  действуют *дробно-линейные преобразования* (их ещё называют *преобразованиями Мёбиуса*), это преобразования вида

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d},$$

где  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  и  $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$ . (Отметим, что коэффициенты всегда можно нормировать так, что  $ad - bc = 1$ .) Выполним простую проверку, демонстрирующую, что композиция дробно-линейных преобразований есть также дробно-линейное преобразование. Пусть имеем два преобразования:

$$z \mapsto \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}, \quad z \mapsto \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}.$$

Их композиция записывается как

$$z \mapsto \frac{a_1 \left( \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} \right) + b_1}{c_1 \left( \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} \right) + d_1} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2)z + (a_1 b_2 + b_1 d_2)}{(c_1 a_2 + d_1 c_2)z + (c_1 b_2 + d_1 d_2)}.$$

Заметим, что коэффициенты композиции двух преобразований есть элементы произведения матриц, соответствующих этим двум преобразованиям:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 & c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что то же самое происходит с обратным преобразованием (его коэффициенты есть элементы обратной матрицы) и тождественным преобразованием. Таким образом, мы построили изоморфизм между группой дробно-линейных преобразований над  $\mathbb{CP}^1$  и группой  $\text{PSL}(2, \mathbb{C}) = \text{SL}(2, \mathbb{C}) / \{\pm 1\}$ . Фактор по  $\pm 1$  берётся для того, чтобы отождествить матрицы, отличающиеся сменой знака (ведь соответствующие дробно-линейные преобразования одинаковые).

**Предложение 6.21.** Дробно-линейное преобразование переводит прямые и окружности в прямые и окружности.

**Доказательство 1.** Напомним, что для любой четвёрки точек из  $\mathbb{CP}^1$  определено *двойное отношение*:

$$[z_1 z_2; z_3 z_4] := \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}.$$

Известно, что четыре точки в  $\mathbb{CP}^1$  лежат на одной прямой или окружности тогда и только тогда, когда их двойное отношение вещественно. Явной проверкой можно убедиться, что дробно-линейные преобразования сохраняют двойное отношение, что завершает доказательство. ■

**Доказательство 2.** Любое дробно-линейное преобразование раскладывается в композицию линейных преобразований  $f(z) = az + b$  и инверсии  $f(z) = \frac{1}{z}$ . Линейные преобразования сохраняют прямые и окружности. Инверсия же переводит прямые или окружности, проходящие через 0, в прямые, а не проходящие через 0 — в окружности. ■

Дробно-линейное преобразование

$$z \mapsto w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1,$$

задаёт движение плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре, если

$$\frac{dw d\bar{w}}{(1 - |w|^2)^2} = \frac{dz d\bar{z}}{(1 - |z|^2)^2}$$

и оно переводит круг  $|z| < 1$  в круг  $|w| < 1$ . Распишем последнее уравнение подробнее:

$$\begin{aligned} \frac{dw d\bar{w}}{(1 - |w|^2)^2} &= \frac{dz d\bar{z}}{(|cz + d|^2 - |az + b|^2)^2} = \\ &= \frac{dz d\bar{z}}{((|c|^2 - |a|^2)z\bar{z} + (\bar{c}d - a\bar{b})z + (\bar{c}d - \bar{a}b)\bar{z} + (|d|^2 - |b|^2))^2}, \end{aligned}$$

и поэтому наше условие выполняется при

$$|a|^2 - |c|^2 = |d|^2 - |b|^2 = \pm 1, \quad \bar{a}b - c\bar{d} = 0.$$

Условие  $|w| < 1$  влечёт равенства

$$|a|^2 - |c|^2 = 1, \quad |d|^2 - |b|^2 = 1.$$

(Достаточно посмотреть на образ точки 0, лежащей внутри диска.) Значит, матрица  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ , задающая дробно-линейное преобразование, являющееся движением плоскости Лобачевского, принадлежит группе псевдоунитарных матриц  $\text{PSU}(1, 1)$ . Напомним, что *псевдоунитарными* называют линейные операторы  $\mathcal{A}$ , сохраняющие псевдоевклидово скалярное произведение

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^p x_i \bar{y}_i - \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i \bar{y}_i.$$

При этом пишут  $\mathcal{A} \in \text{U}(p, q)$ . Можно доказать, что выписанные преобразования — это все собственные движения плоскости Лобачевского. (Слово *собственные* здесь употребляется том смысле, что можно, конечно, брать композицию таких преобразований и сопряжения, но больше ничего не бывает.) Отсюда получаем следующее утверждение.

**Теорема 6.22.** Группа собственных движений плоскости Лобачевского изоморфна  $\text{PSU}(1, 1)$ .

Выведем формулу расстояния между двумя точками  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ,  $|z_1|, |z_2| < 1$  в модели Пуанкаре. Если  $\text{Im } z_1 = \text{Im } z_2 = 0$ , то обе точки лежат на горизонтальном диаметре единичного круга, и расстояние между ними можно получить напрямую:

$$\rho_{\mathbb{L}}(z_1, z_2) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{2 dz}{1 - z^2} = \int_{z_1}^{z_2} \left( \frac{1}{1 + z} + \frac{1}{1 - z} \right) dz = \ln \left( \frac{1 + z}{1 - z} \right) \Big|_{z_1}^{z_2} = \ln \left( \frac{1 - z_1}{1 + z_1} \frac{1 + z_2}{1 - z_2} \right).$$

Отметим, что поворот с центром в начале координат в модели Пуанкаре, конечно, является движением. Поэтому выведенная нами формула годится для измерения расстояний от любой точки до центра единичного круга, при этом она имеет вид

$$(6.6) \quad \rho_{\mathbb{L}}(0, z) = \ln \left( \frac{1 + z}{1 - z} \right).$$

Вывод формулы для произвольных точек опустим. Идея в том, что нужно движением перевести одну из точек в начало координат. Движение сохраняет расстояния, а формула измерения расстояния до начала координат нам уже известна. Итоговая формула выглядит весьма громоздко, да и почти никогда не нужна. Важно понимать идею, что можно сначала одну из точек перевести в начало координат, и лишь потом мерять расстояния.

**Предложение 6.23.** Окружности в модели Пуанкаре в круге геометрии Лобачевского имеют вид евклидовых окружностей.



**Доказательство.** Рассмотрим окружность в модели Пуанкаре. Произвольным движением переведём её центр в начало координат. Теперь в силу формулы (6.6) окружность радиуса  $r_{\mathbb{L}}$  в геометрии Лобачевского есть евклидова окружность радиуса

$$(6.7) \quad r_{\mathbb{E}} = \frac{e^{r_{\mathbb{L}}} - 1}{e^{r_{\mathbb{L}}} + 1} = \operatorname{th} \frac{r_{\mathbb{L}}}{2}.$$

Значит, и прообраз этой окружности тоже был евклидовой окружностью. ■

**Задача 6.24.** На плоскости Лобачевского вычислить:

- (1) геодезическую кривизну окружности радиуса  $r_{\mathbb{L}}$ ;
- (2) площадь круга радиуса  $r_{\mathbb{L}}$ .

**Решение.** В модели Пуанкаре разместим центр нашей окружности в центре единичного круга. Тогда она будет представлять из себя евклидову окружность радиуса  $r = \operatorname{th} \frac{r_{\mathbb{L}}}{2}$ . Матрица метрики имеет вид

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} \frac{4}{(1-x^2-y^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{(1-x^2-y^2)^2} \end{pmatrix}.$$

По ней вычисляем символы Кристоффеля:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{2x}{1-x^2-y^2}, \\ \Gamma_{22}^2 &= \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{2y}{1-x^2-y^2}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{2x}{1-x^2-y^2}, \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{2y}{1-x^2-y^2}. \end{aligned}$$

Параметризуем нашу кривую:  $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t)$ , где  $0 \leq t < 2\pi$ . Далее сосчитаем вектор  $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$ . Отметим, что он не является вектором геодезической кривизны, ведь введённая нами параметризация не натуральная. Однако легко видеть, что всюду выполнено  $|\dot{\gamma}| = 2r/(1-r^2)$ , так что наша параметризация пропорциональна натуральной. Таким образом, согласно предложению 5.5 имеем  $\mathbf{k}_g = \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} / |\dot{\gamma}|^2$ . Напомним, что  $(\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma})^k = \ddot{\gamma}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j$ :

$$\begin{aligned} (\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma})^1 &= -r \cos t + \Gamma_{11}^1 r^2 \sin^2 t - 2\Gamma_{12}^1 r^2 \sin t \cos t + \Gamma_{22}^1 r^2 \cos^2 t = \\ &= -r \cos t + \frac{2r^3}{1-r^2} (\cos t \sin^2 t - 2 \cos t \sin^2 t - \cos^3 t) = \\ &= -r \cos t - \frac{2r^3}{1-r^2} \cos t = r \frac{r^2+1}{r^2-1} \cos t. \end{aligned}$$

Аналогично,  $(\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma})^2 = r \frac{r^2+1}{r^2-1} \sin t$ . Итак,

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = r \frac{r^2+1}{r^2-1} (\cos t, \sin t).$$

Теперь нужно задать коориентацию нашей окружности. Так как модель конформно-евклидова, нормаль в точке  $\gamma(t)$  можно задать вектором  $(-\cos t, -\sin t)$ , однако его ещё нужно нормировать:

$$\mathbf{n}_g = \frac{r^2-1}{2} (\cos t, \sin t).$$



Итак, геодезическая кривизна окружности равна

$$k_g = \frac{\langle \nabla \dot{\gamma}, \mathbf{n}_g \rangle}{\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle} = \frac{1}{r^2} \cdot r \frac{r^2 + 1}{r^2 - 1} \frac{r^2 - 1}{2} = \frac{1 + r^2}{2r}.$$

Подставим  $r = \operatorname{th} \frac{r_{\mathbb{L}}}{2}$ . По формуле двойного угла для гиперболического тангенса имеем

$$k_g = \frac{1 + \operatorname{th}^2 \frac{r_{\mathbb{L}}}{2}}{2 \operatorname{th} \frac{r_{\mathbb{L}}}{2}} = \frac{1}{\operatorname{th} r_{\mathbb{L}}}.$$

Теперь ищем площадь круга, ограниченного этой окружностью. По теореме Гаусса — Бонне

$$\oint_{\partial\Omega} k_g ds + \sum_{i=1}^k \theta_i + \int_{\Omega} K d\sigma = 2\pi,$$

где область  $\Omega$  — наш круг. Область ограничена гладкой кривой, так что внешних углов нет. Гауссова кривизна постоянна и равна  $K \equiv -1$ , геодезическая кривизна также постоянна. Итого, получаем

$$\begin{aligned} k_g \underbrace{\oint_{\partial\Omega} ds}_{\ell(\partial\Omega)} - \underbrace{\int_{\Omega} d\sigma}_{\sigma(\Omega)} &= 2\pi, \\ \sigma(\Omega) &= \frac{\ell(\partial\Omega)}{\operatorname{th} r_{\mathbb{L}}} - 2\pi, \end{aligned}$$

где  $\sigma(\Omega)$  — искомая площадь области  $\Omega$ , а  $\ell(\partial\Omega)$  — длина граничного контура. Вычислим последнюю, явно посчитав соответствующий интеграл:

$$\ell(\partial\Omega) = \int_0^{2\pi} |\dot{\gamma}|_g dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{4(r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t)}{(1 - r^2)^2}} dt = \int_0^{2\pi} \frac{2r}{1 - r^2} dt = \frac{4\pi r}{1 - r^2} = 2\pi \operatorname{sh} r_{\mathbb{L}}.$$

Итого, получаем  $\sigma(\Omega) = 2\pi(\operatorname{ch} r_{\mathbb{L}} - 1)$ . ■

Мы уже поняли, что в случае постоянной гауссовой кривизны теорема Гаусса — Бонне иногда позволяет эффективно вычислять площадь. В последней задаче мы воспользовались тем, что кривая, ограничивающая интересующую нас область, была гладкой и имела постоянную геодезическую кривизну. Можем выделить ещё один важный случай — это, так называемые, *геодезические многоугольники*. Из названия легко понять, что это многоугольники, стороны которых суть геодезические в некоторой метрике. В этом случае геодезическая кривизна всюду нулевая, так что первое слагаемое в формуле (5.11) из теоремы Гаусса — Бонне пропадает. В частности, если  $\Omega$  — треугольник с внутренними углами  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  на плоскости Лобачевского, то его площадь равна  $\sigma(\Omega) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$ . Таким образом, сумма углов любого треугольника на плоскости Лобачевского не больше  $\pi$ . (Аналогично, на сфере выполнена формула  $\sigma(\Omega) = \pi + \alpha + \beta + \gamma$ , так что на сфере сумма углов треугольника не меньше  $\pi$ .)

Далее рассмотрим ещё одну модель плоскости Лобачевского. Можем выполнить дробно-линейное преобразование плоскости  $\mathbb{CP}^1$ , которое «распрямит» абсолют. Действительно, рассмотрим следующее преобразование:

$$-i \mapsto 0, \quad 1 \mapsto 1, \quad i \mapsto \infty.$$

Окружность однозначно задаётся тремя точками, так что при таком отображении единичная окружность переходит в прямую  $\operatorname{Im} z = 0$ . Это преобразование легко явно выписать в терминах нашего комплексного параметра:

$$z \mapsto w = -i \frac{z + i}{z - i}.$$

При этом  $0 \mapsto i$ , так что внутренность единичного круга переходит в верхнюю полуплоскость. Обозначая  $w =: x + iy$ , получим

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Отметим, что вид метрики упростился — теперь коэффициенты первой квадратичной формы зависят только от координаты  $y$ , при этом метрика осталась конформно-евклидовой (в частности, диагональной). Поэтому выражения для символов Кристоффеля существенно упрощаются, так что вычисления становятся гораздо компактнее. Такая модель плоскости Лобачевского называется *моделью Пуанкаре в полуплоскости*.

Геодезические в модели в верхней полуплоскости являются образами геодезических в модели в круге. Теперь это вертикальные лучи и полуокружности, перпендикулярные абсолюту (напомним, что абсолют в полуплоскости есть прямая  $y = 0$ ).

**Задача 6.25.** В модели геометрии Лобачевского в верхней полуплоскости найти площадь треугольника, ограниченного кривыми

$$x = 0, \quad (x - 1)^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 9.$$

**Решение 1.** Имеем  $\sqrt{\det \mathcal{G}(x, y)} = 1/y^2$ . Отсюда площадь данного треугольника равна  $\sigma(U) = \iint_U \frac{1}{y^2} dx dy$ , что после перехода к повторному интегралу даёт

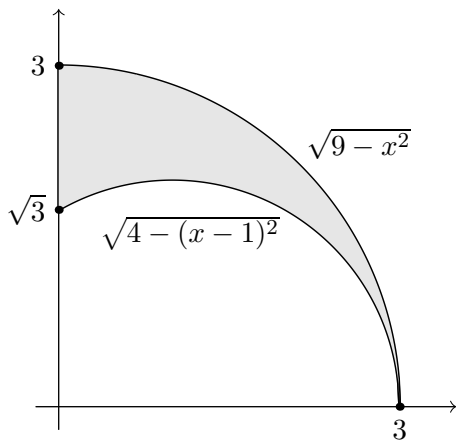
$$\begin{aligned} \sigma(U) &= \int_0^3 dx \int_{\sqrt{4-(x-1)^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \frac{1}{y^2} dy = \int_0^3 \left( \frac{1}{\sqrt{4-(x-1)^2}} - \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} \right) dx = \\ &= \left( \arcsin \frac{x-1}{2} - \arcsin \frac{x}{3} \right) \Big|_0^3 = 0 - \left( -\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

■

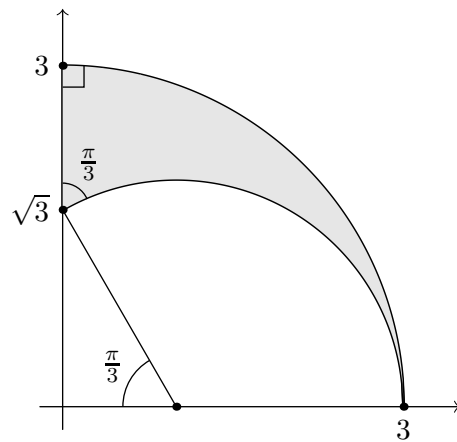
**Решение 2.** Сосчитав углы данного криволинейного треугольника, получаем:

$$\sigma(U) = \pi - 0 - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

■



Переход к повторному интегралу



Углы криволинейного треугольника

Рис. 6.14