Теорминимум по линейной алгебре

Пшеничный Никита*

Весна 2025 г.

Аннотация

Здесь собраны мои записки по линейной алгебре. Это не конспект лекций, а скорее справочник по наиболее практически важным темам (идеям, методам, ...) курса и техникам, которые позволяют эффективно решать рутинные задачи.

Я учил линейную алгебру по курсу Т. Е. Панова, он изложен в книге [Панов]. Из книг [Новиков — Тайманов] и [Арнольд] позаимствованы некоторые важные применения линейной алгебры к другим дисциплинам — дифференциальной геометрии и дифференциальным уравнениям, соответственно. Для лучшего понимания линейной алгебры именно с практической точки зрения рекомендую почитать файлы А. А. Клячко.

Список литературы

[Панов] Т. Е. Панов. *Линейная алгебра и геометрия. Курс лекций.* МЦНМО, 2024.

[Винберг] Э. Б. Винберг. *Курс алгебры.* МЦНМО, 2024.

[Клячко] А. А. Клячко. *Как найти жорданов базис для оператора?*

[Новиков — Тайманов] С. П. Новиков, И. А. Тайманов. *Современные геометрические структуры и поля.* МЦНМО, 2014.

[Арнольд] В. И. Арнольд. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* МЦНМО, 2024.

Содержание

*Последняя компилляция: 10 апреля 2025 г. Актуальную версию этого файла можно найти на моём GitHub.

1. Жорданова нормальная форма

Наша глобальная цель — научиться приводить матрицы к «хорошему» виду. Некоторые операторы можно диагонализировать, но не все. Ясно, что для этого необходимо и достаточно уметь выбирать базис из собственных векторов. Существование такого базиса равносильно выполнению следующих двух условий:

(1) характеристический многочлен оператора разлагается на линейные множители;
(2) кратность каждого корня характерискогo многочлена равна размерности соответствующего собственного подпространства.

От первого условия мы никуда не уйдём, а вот от второго условия сможем отказаться. При этом для выбора «хорошего» базиса нам потенциально может не хватить собственных векторов, поэтому естественно рассмотреть какое-то обобщение этого понятия.

Определение 1.1. Вектор $\boldsymbol{v} \in V$ называется *корневым* вектором линейного оператора $\mathcal{A}$, отвечающим числу $\lambda \in \Bbbk$, если

$$(\mathcal{A} - \lambda\,\mathrm{id})^m \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$$

для некоторого целого неотрицательного числа m. Наименьшее из таких чисел называется *высотой* корневого вектора $\boldsymbol{v}$.

Легко видеть, что ненулевые корневые векторы могут отвечать только собственным числам оператора, а также что корневые векторы, соответствующие фиксированному числу $\lambda \in \Bbbk$, образуют подпространство, оно называется *корневым.*

Оказывается, что если характеристический многочлен оператора разлагается на линейные множители, то пространство разлагается в сумму корневых подпространств этого оператора, поэтому нам достаточно выбрать «хорошие» базисы для таких подпространств. Нетрудно видеть, что ограничение $(\mathcal{A} - \lambda\,\mathrm{id})\big|_{R_\lambda}$ является нильпотентным оператором, а для нильпотентных операторов можно доказать следующую теорему.

Теорема 1.2. Для каждого нильпотентного оператора $\mathcal{N}$ можно выбрать базис, в котором его матрица блочно-диагональна с блоками вида

$$\begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

причём такой вид оператора единственен с точностью до перестановки блоков.

Действие оператора, заданного в некотором базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ матрицей (1.1), описывается схемой[1] $\boldsymbol{e}_1 \mapsto \boldsymbol{e}_2 \mapsto \ldots \mapsto \boldsymbol{e}_m \mapsto \mathbf{0}$. Построив указанный в теореме 1.2 базис в каждом из корневых подпространств, получим следующее утверждение.

Теорема 1.3. Для каждого линейного оператора, характеристический многочлен которого разлагается на линейные множители, можно выбрать базис, в котором его матрица блочно-диагональна с блоками вида

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

причём такой вид оператора единственен с точностью до перестановки блоков.

[1] Здесь мы (вслед за Антоном Александровичем) намеренно изображаем жордановы клетки «перевёрнутыми», нам так будет удобнее. Мы хотим, чтобы первый базисный вектор $\boldsymbol{e}_1$ имел максимальную высоту.

Определение 1.4. Вид оператора, указанный в теореме 1.3, называется *жордановой нормальной формой* оператора, а блоки вида (1.2) — *жордановыми клетками*. Базис, в котором оператор имеет интересующий нас вид, также называется *жордановым*.

Чтобы найти жорданову форму оператора $\mathcal{A}$, сначала находим характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ и выписываем его корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ и их кратности $k_1, \ldots, k_r$. На диагонали в жордановой форме стоят собственные значения:

$$J = \begin{pmatrix} \overbrace{\lambda_1 \ddots \lambda_1}^{k_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \overbrace{\lambda_r \ddots \lambda_r}^{k_r} \end{pmatrix}$$

Осталось понять, как эти собственные значения распределены по жордановым клеткам (ведь может быть и несколько клеток с одним собственным значением). Для начала отметим важный момент. Если A — матрица оператора в некотором базисе, а J — жорданова матрица, то существует матрица C замены базиса такая, что $A = C^{-1}JC$. При этом

$$\operatorname{rk}(A - \lambda E) = \operatorname{rk}\left(C^{-1}(A - \lambda E)C\right) = \operatorname{rk}\left(\underbrace{C^{-1}AC}_{J} - \lambda \underbrace{C^{-1}C}_{E}\right) = \operatorname{rk}(J - \lambda E).$$

для любого λ. (Первое равенство — это просто равенство рангов подобных матриц.)

Лемма 1.5. Количество жордановых клеток с собственным значением λ размера не меньше k равняется

$$\operatorname{rk}(A - \lambda E)^{k-1} - \operatorname{rk}(A - \lambda E)^k.$$

Доказательство. Пусть λ — единственное собственное значение матрицы A. Как мы уже заметили выше, $\operatorname{rk}(A - \lambda E) = \operatorname{rk}(J - \lambda E)$, поэтому можем доказывать то же самое, заменив A на J. Рассмотрим часть жордановой матрицы, соответствующей собственному значению λ. При переходе от матрицы $(J - \lambda E)^{k-1}$ к $(J - \lambda E)^k$ из всех жордановых клетки, кроме тех, которые уже целиком обнулились, исчезает по единице. В матрице $(J - \lambda E)^{k-1}$ целиком обнулились клетки размером меньше k, поэтому искомая разность есть количество клеток размера не меньше k.

Осталось доказать, почему клетки с другими собственными значениями не влияют на ранг. Иными словами, нужно доказать, что для клетки J_λ с $\lambda \neq 0$ размера $m \times m$ и для любого $l \in \mathbb{N}$ имеет место равенство $\operatorname{rk} J_\lambda^l = m$. Это сразу следует из предложения 2.11.1 из [Панов]: для любого многочлена f его значение на жордановой клетке есть

$$f(J_\lambda) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & & & 0 \\ \frac{f'(\lambda)}{1!} & f(\lambda) & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} & \ldots & \frac{f'(\lambda)}{1!} & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

Нас интересуют многочлены вида $f(t) = t^l$. Если $\lambda \neq 0$, то $f(\lambda) = \lambda^l \neq 0$ (в поле нет делителей нуля). Тогда матрица J_λ^l треугольная, с ненулевыми числами на диагонали, значит, её ранг равен её размеру. Осталось упомянуть, что многочлен от блочной матрицы (нас интересует жорданова форма оператора) применяется к ней поблочно. Отсюда и следует желаемое. ∎

С помощью этой леммы, для каждого k находим количество жордановых клеток размера k как количество клеток размера не меньше k за вычетом клеток размера не меньше $k+1$. Повторить для каждого собственного значения.

Задача 1.6. Найти жорданову форму для оператора $\mathcal{A}$, матрица которого в стандартном базисе имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Характеристический многочлен имеет вид $\chi_{\mathcal{A}}(t) = (2-t)^5$, отсюда имеем единственный корень 2 кратности 5. Так что жорданова матрица выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 2 \end{pmatrix}$$

Чтобы понять распределение собственных значений по клеткам, находим ранги матриц $(A-2E)^k$, где $k = 1, \ldots, 5$:

$$\operatorname{rk}(A-2E) = \operatorname{rk} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1,$$

$$\operatorname{rk}(A-2E)^3 = \operatorname{rk}(A-2E)^4 = \operatorname{rk}(A-2E)^5 = 0.$$

Получаем, что клеток размера хотя бы 1 (то есть, всего клеток) ровно $5-3=2$, хотя бы 2 — ровно $3-1=2$, хотя бы 3 — ровно $1-0=1$, клеток больших размеров нет. Таким образом, имеем одну клетку 3×3 и одну клетку размера 2×2, и жорданова форма данной матрицы имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

■

Теперь научимся находить жорданов базис. Метод, который здесь изложен, описан в файле Антона Александровича [Клячко]. Здесь к нему даны дополнительные пояснения и необходимые теоретические обоснования.

Напомним, что по сути то, чем мы занимаемся, — это выбор базиса для нильпотентного оператора $\mathcal{N}$, в котором он имеет вид, указанный в теореме 1.2.

Лемма 1.7. Если вектор $\boldsymbol{v}$ максимальной высоты m для нильпотентного оператора $\mathcal{N}$, то векторы $\boldsymbol{v}$, $\mathcal{N}\boldsymbol{v}$, $\mathcal{N}^2\boldsymbol{v}$, $\ldots$, $\mathcal{N}^{m-1}\boldsymbol{v}$ линейно независимы.

Доказательство. Напишем какую-то нетривиальную линейную комбинацию данных векторов с коэффициентами $\lambda_0, \ldots, \lambda_{m-1}$

$$\lambda_0\boldsymbol{v} + \lambda_1\mathcal{N}\boldsymbol{v} + \ldots + \lambda_{m-1}\mathcal{N}^{m-1}\boldsymbol{v},$$

и пусть k — номер первого ненулевого коэффициента, т. е. можно записывать эту линейную комбинацию, начиная с члена под номером k. Тогда

$$\mathcal{N}^{m-k-1}\left(\lambda_k \mathcal{N}^k \boldsymbol{v} + \ldots + \lambda_{m-1}\mathcal{N}^{m-1}\boldsymbol{v}\right) = \mathcal{N}^{m-1}\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0},$$

а нулевой вектор всегда переходит в нулевой под действием линейного оператора. ■

Таким образом, если мы хотим выбрать базис подпространства, соответствующего некоторой жордановой клетке J_λ размера $m \times m$, то нам достаточно выбрать вектор высоты m для нильпотентного оператора $\mathcal{A} - \lambda\,\mathrm{id}$. Для простоты изложения, здесь мы разберём несколько случаев — от простого к сложному.

I. В жордановой форме только одна клетка

$$J = \underbrace{\left.\begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{pmatrix}\right\}m}_{m}$$

В этом случае всё пространство есть корневое для собственного значения λ, и нам нужно выбрать из него вектор высоты m, а потом $m-1$ раз применить к нему оператор $\mathcal{A} - \lambda\,\mathrm{id}$.

Утверждается, что можно взять просто <u>случайный</u> вектор (да, какой первый в голову придёт). Действительно, всё что нам нужно от этого вектора — чтобы он не лежал в ядре $\mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\,\mathrm{id})^{m-1}$ (то есть его высота должна равняться m). А это ядро является подпространством, и вероятность (в любом разумном смысле этого слова), что случайный вектор попадёт в это подпространство, мала. Конечно, нам может не повезти, но тогда мы это заметим — применяя оператор $\mathcal{A} - \lambda\,\mathrm{id}$ к нашему вектору, мы получим нулевой вектор раньше, чем того хотели. В этом случае нужно просто вернуться назад и выбрать другой случайный вектор.

Задача 1.8. Найти жорданову форму и жорданов базис оператора $\mathcal{A}$, матрица которого в стандартном базисе имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Имеем одно собственное значение 3 кратности 4. Найдём жорданову форму:

$$\mathrm{rk}(A - 3E) = \mathrm{rk}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3,$$

и на этом можно закончить, потому что уже сейчас видно, что жорданова клетка только одна (жордановых клеток размера не меньше 1 ровно $4 - 3 = 1$). Итак, жорданова форма имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Приступим к нахождению жорданова базиса. В качестве случайного вектора возьмём, например,

$$\boldsymbol{e}_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Находим остальные векторы:

$$\boldsymbol{e}_2' = (A - 3E)\boldsymbol{e}_1' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_3' = (A - 3E)\boldsymbol{e}_2' = \mathbf{0}.$$

Итак, мы получили нулевой вектор, значит, выбранный нами случайный вектор $\boldsymbol{e}_1'$ не подходит. Ничего страшного, берём новый:

$$\boldsymbol{e}_1' = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Опять пытаемся найти остальные векторы:

$$\boldsymbol{e}_2' = (A - 3E)\boldsymbol{e}_1' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{e}_3' = (A - 3E)\boldsymbol{e}_2' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{e}_4' = (A - 3E)\boldsymbol{e}_3' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

На этот раз[2] вектор подошёл, и мы нашли базис целиком. ■

II. В жордановой форме несколько клеток одного размера

Теперь нужно повторить процесс из предыдущего пункта несколько раз (по разу для каждой клетки) и потом проверить линейную независимость полученных векторов. Мы утверждаем, что достаточно проверять линейную независимость только собственных векторов. Мы докажем это для базисов, соответствующих двум жордановым клеткам, но доказательство в общем случае проводится аналогично.

Лемма 1.9. Имеется вектор $\boldsymbol{v}$ высоты m и вектор $\boldsymbol{u}$ высоты k для нильпотентного оператора $\mathcal{N}$. Система векторов $\boldsymbol{v}, \mathcal{N}\boldsymbol{v}, \ldots, \mathcal{N}^{m-1}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}, \mathcal{N}\boldsymbol{u}, \ldots, \mathcal{N}^{k-1}\boldsymbol{u}$ линейно независима тогда и только тогда, когда линейно независимы собственные векторы $\mathcal{N}^{m-1}\boldsymbol{v}$ и $\mathcal{N}^{k-1}\boldsymbol{u}$.

Доказательство. Напишем линейную комбинацию данной системы с произвольными коэффициентами, отвечающую нулевому вектору:

$$\lambda_0\boldsymbol{v} + \lambda_1\mathcal{N}\boldsymbol{v} + \ldots + \lambda_{m-1}\mathcal{N}^{m-1}\boldsymbol{v} + \mu_0\boldsymbol{u} + \mu_1\mathcal{N}\boldsymbol{u} + \ldots + \mu_{k-1}\mathcal{N}^{k-1}\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$$

[2]Если выбирать вектор на самом деле случайно, то не везёт очень редко, особенно над бесконечными полями. В решении задачи первый вектор был намеренно выбран плохим.

и будем доказывать, что она тривиальна.

Сначала предположим, что m и k различны, тогда без ограничения общности $m > k$. Возьмём от обеих частей оператор $\mathcal{N}^{m-1}$, останется $\lambda_0\mathcal{N}^{m-1}\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, отсюда $\lambda_0 = 0$ (ведь $\mathcal{N}^{m-1}\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ из условия на высоту вектора $\boldsymbol{v}$). Аналогично доказывается, что $\lambda_0 = \ldots = \lambda_{m-k-1} = 0$. После этого можем перенумеровать коэффициенты $\lambda_i \rightsquigarrow \lambda_{i-m+k}$ для $i \geqslant k - m$ (про нулевые коэффициенты забываем) и заменить вектор $\boldsymbol{v} \rightsquigarrow \mathcal{N}^{m-k}\boldsymbol{v}$.

Итак, можем считать, что $m = k$. Тогда наша линейная комбинация принимает вид

$$\lambda_0\boldsymbol{v} + \lambda_1\mathcal{N}\boldsymbol{v} + \ldots + \lambda_{m-1}\mathcal{N}^{m-1}\boldsymbol{v} + \mu_0\boldsymbol{u} + \mu_1\mathcal{N}\boldsymbol{u} + \ldots + \mu_{m-1}\mathcal{N}^{m-1}\boldsymbol{u} = \mathbf{0}.$$

Возьмём оператор $\mathcal{N}^{m-1}$ от обеих частей, получим $\lambda_0\mathcal{N}^{m-1}\boldsymbol{v} + \mu_0\mathcal{N}^{m-1}\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$. Про векторы $\mathcal{N}^{m-1}\boldsymbol{v}$ и $\mathcal{N}^{m-1}\boldsymbol{u}$ мы знаем, что они линейно независимы, поэтому $\lambda_0 = \mu_0 = 0$. Теперь берём оператор $\mathcal{N}^{m-2}$ от обеих частей и так же получаем $\lambda_1 = \mu_1 = 0$. Так же доказываем, что все коэффициенты линейной зависимости нулевые, то есть она тривиальна. ■

Таким образом, когда мы нашли куски жорданова базиса, соответствующие разным клеткам, нам достаточно проверить линейную независимость последних (собственных) векторов каждого куска.

Задача 1.10. Найти жорданову форму и жорданов базис оператора $\mathcal{A}$, матрица которого в стандартном базисе имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Здесь опять одно собственное значение кратности 4. Находим жорданову форму, как обычно:

$$\operatorname{rk}(A - 3E) = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2, \qquad \operatorname{rk}(A - 3E)^2 = 0$$

Таким образом, у нас $2 - 0 = 2$ клетки размера хотя бы 2, отсюда сразу можно сделать вывод, что имеется ровно две клетки размера 2×2, то есть жорданова форма имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Выбираем случайный вектор и находим оставшийся кусок базиса для первой клетки:

$$\boldsymbol{e}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}'_2 = (A - 3E)\boldsymbol{e}'_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь то же самое для второй:

$$\boldsymbol{e}'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}'_4 = (A - 3E)\boldsymbol{e}'_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные векторы $\boldsymbol{e}_2'$ и $\boldsymbol{e}_4'$, очевидно, линейно независимы, так что построенная нами система действительно является жордановым базисом для данного оператора. ■

III. Есть клетки разных размеров с одним собственным значением

Упорядочим клетки по размерам: $m_1 > m_2 > \ldots > m_l$. Для самой большой клетки (размера m_1) делаем всё, как обычно. Для меньшей клетки размера m_2 нужно найти вектор высоты m_2 для оператора $\mathcal{A} - \lambda\,\mathrm{id}$, но который не выражается через вектор высоты $m_2 < < m_1$, который получился в процессе выбора базиса для предыдущей клетки. Для этого нам придётся выписать решения системы линейных уравнений

$$(A - \lambda E)^{m_2} X = \mathbf{0}$$

и выбрать среди них вектор, линейно независимый с векторами высоты, меньшей m_2, из уже полученного куска базиса. Для этого можно, опять же, взять случайный вектор из подпространства решений этой системы (по тем же причинам, что и раньше).

Так повторяем для всех клеток, а потом обязательно проверяем линейную независимость полученных собственных векторов. Здесь, опять же, если нам где-то не повезло с выбором случайного вектора, мы это обязательно заметим — вектора в конце получатся линейно зависимыми.

Задача 1.11. Найти жорданову форму и жорданов базис оператора $\mathcal{A}$, матрица которого в стандартном базисе имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Имеем одно собственное значение 2 кратности 5. Находим жорданову форму:

$$\mathrm{rk}(A - 2E) = \mathrm{rk}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3, \qquad \mathrm{rk}(A - 2E)^2 = \mathrm{rk}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1,$$
$$\mathrm{rk}(A - 2E)^3 = 0.$$

Имеем $5 - 3 = 2$ клетки, причём обе размера хотя бы 2 ($3 - 1 = 2$), но только одна размера хотя бы 3 ($1 - 0 = 1$), отсюда делаем вывод, что жорданова форма имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для клетки 3×3 делаем всё, как обычно:

$$\boldsymbol{e}_1' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_2' = (A - 2E)\boldsymbol{e}_1' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{e}_3' = (A - 2E)\boldsymbol{e}_2' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

У нас ещё осталась клетка 2×2. Для неё решаем линейную систему:

$$(A - 2E)^2 X = \mathbf{0}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В качестве $\boldsymbol{e}_4'$ можно взять любое решение этой системы (то есть, любой вектор с пятой координатой, равной 0), например,

$$\boldsymbol{e}_4' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_5' = (A - 2E)\boldsymbol{e}_4' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Векторы $\boldsymbol{e}_3'$ и $\boldsymbol{e}_5'$, очевидно, линейно независимы, так что векторы $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$, $\boldsymbol{e}_3'$, $\boldsymbol{e}_4'$, $\boldsymbol{e}_5'$ действительно образуют жорданов базис. ■

IV. Есть клетки с разными собственными значениями

Здесь мы, наконец, рассматриваем максимально общий случай. В этом месте возникает важный момент — теперь всё пространство не является корневым для определённого собственного значения. Как же нам теперь найти случайный корневой вектор?

Пусть нас интересует собственное значение λ. Сначала выберем какой-то аннулирующий многочлен f для оператора $\mathcal{A}$ (например, минимальный многочлен $\mu_{\mathcal{A}}$) и какой-то случайный вектор $\boldsymbol{v}$. А теперь подействуем на наш случайный вектор оператором

$$\left.\frac{f(t)}{(t - \lambda)^k}\right|_{\mathcal{A}},$$

где k — кратность λ как корня многочлена f. Таким образом мы получим желаемый случайный корневой вектор $\boldsymbol{u}$, отвечающий собственному значению λ. Действительно,

$$(\mathcal{A} - \lambda\,\mathrm{id})^k \boldsymbol{u} = \left.(t - \lambda)^k\right|_{\mathcal{A}} \left.\frac{f(t)}{(t - \lambda)^k}\right|_{\mathcal{A}} \boldsymbol{v} = f(\mathcal{A})\boldsymbol{v} = \mathbf{0},$$

так как многочлен f является аннулирующим для оператора $\mathcal{A}$. Для нахождения минимального многочлена можно воспользоваться стандартным утверждением.

Предложение 1.12. Если характеристический многочлен оператора $\mathcal{A}$ раскладывается на линейные множители, то минимальный аннулирующий многочлен этого оператора есть

$$\prod_{i=1}^{r} (t - \lambda_i)^{m_i},$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — все собственные значения оператора $\mathcal{A}$, а m_i — размер максимальной жордановой клетки, отвечающей собственному значению λ_i.

Задача 1.13. Найти жорданову форму и жорданов базис оператора $\mathcal{A}$, матрица которого в стандартном базисе имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Находим жорданову форму. На этот раз мы имеем одно собственное значение 2 кратности 4 и другое — 3 кратности 1. Но с тройкой, конечно, всё понятно — там точно одна жорданова клетка 1×1. Разбираемся с двойкой.

$$\operatorname{rk}(A - 2E) = \operatorname{rk} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3, \qquad \operatorname{rk}(A - 2E)^k = \operatorname{rk} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

для всех $k \geqslant 2$. Таким образом, жордановых клеток с собственным значением λ ровно $5 - 3 = 2$, клеток размера хотя бы 2 ровно $3 - 1 = 2$, а других клеток нет. Таким образом, жорданова форма имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдём случайный корневой, соответствующий собственному значению 2. Минимальный многочлен имеет вид $\mu_{\mathcal{A}}(t) = (t-2)^2(t-3)$. Выбираем случайный вектор

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

и действуем на него оператором $\left(\mu_{\mathcal{A}}(t)/(t-2)^2\right)\big|_{\mathcal{A}} = (t-3)|_{\mathcal{A}} = \mathcal{A} - 3\,\mathrm{id}$:

$$\boldsymbol{e}'_1 = (A - 3E)\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем случайный корневой вектор, соответствующий собственному значению λ, который и назовём первым базисным вектором. Находим второй:

$$\boldsymbol{e}'_2 = (A - 2E)\boldsymbol{e}'_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь разбираемся со второй клеткой, отвечающей собственному значению 2. Она того же размера, что и первая, поэтому никаких систем решать не нужно. Достаточно выбрать другой случайный вектор

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

и подействовать на него тем же оператором:

$$\boldsymbol{e}'_3 = (A - 3E)\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

После чего находим второй вектор базиса подпространства, соответствующего этой клетке:

$$\boldsymbol{e}'_4 = (A - 2E)\boldsymbol{e}'_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Векторы $\boldsymbol{e}'_2$ и $\boldsymbol{e}'_4$, очевидно, линейно независимы. Осталось найти единственный собственный вектор для значения собственного 3, так же, как мы искали корневые векторы для двойки. Только теперь случайный вектор можно взять $\boldsymbol{v}$ или $\boldsymbol{u}$, который мы уже брали раньше, потому что теперь мы работаем с другим собственным значением.

$$\boldsymbol{e}'_5 = (A - 2E)^2\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Линейную независимость $\boldsymbol{e}'_5$ ни с кем проверять уже не надо, он лежит в своём корневом подпространстве (вспомнить теорему о разложении пространства в прямую сумму корневых подпространств). ■