

ТЕОРИМИНИМУМ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Пшеничный Никита*

Весна 2025 г.

Аннотация

Здесь собраны мои записки по линейной алгебре. Это не конспект лекций, а скорее справочник по наиболее практически важным темам (идеям, методам, ...) курса и техникам, которые позволяют эффективно решать рутинные задачи.

Я учил линейную алгебру по курсу Т. Е. Панова, он изложен в книге [Панов]. Из книг [Новиков — Тайманов] и [Арнольд] позаимствованы некоторые важные применения линейной алгебры к другим дисциплинам — дифференциальной геометрии и дифференциальным уравнениям, соответственно. Для лучшего понимания линейной алгебры именно с практической точки зрения рекомендую почитать файлы А. А. Клячко.

Список литературы

[Панов] Т. Е. Панов. *Линейная алгебра и геометрия. Курс лекций*. МЦНМО, 2024.

[Винберг] Э. Б. Винберг. *Курс алгебры*. МЦНМО, 2024.

[Клячко] А. А. Клячко. *Как найти жорданов базис для оператора?*

[Новиков — Тайманов] С. П. Новиков, И. А. Тайманов. *Современные геометрические структуры и поля*. МЦНМО, 2014.

[Арнольд] В. И. Арнольд. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. МЦНМО, 2024.

Содержание

1 Жорданова нормальная форма

2

*Последняя компиляция: 11 апреля 2025 г. Актуальную версию этого файла можно найти на [моём GitHub](#).

1. Жорданова нормальная форма

Наша глобальная цель — научиться приводить матрицы к «хорошему» виду. Некоторые операторы можно диагонализировать, но не все. Ясно, что для этого необходимо и достаточно уметь выбирать базис из собственных векторов. Существование такого базиса равносильно выполнению следующих двух условий:

- (1) характеристический многочлен оператора разлагается на линейные множители;
- (2) кратность каждого корня характеристического многочлена равна размерности соответствующего собственного подпространства.

От первого условия мы никуда не уйдём, а вот от второго условия сможем отказаться. При этом для выбора «хорошего» базиса нам потенциально может не хватить собственных векторов, поэтому естественно рассмотреть какое-то обобщение этого понятия.

Определение 1.1. Вектор $v \in V$ называется *корневым* вектором линейного оператора A , отвечающим числу $\lambda \in \mathbb{K}$, если

$$(A - \lambda \text{id})^m v = 0$$

для некоторого целого неотрицательного числа m . Наименьшее из таких чисел называется *высотой* корневого вектора v .

Легко видеть, что ненулевые корневые векторы могут отвечать только собственным числам оператора, а также что корневые векторы, соответствующие фиксированному числу $\lambda \in \mathbb{K}$, образуют подпространство, оно называется *корневым*.

Оказывается, что если характеристический многочлен оператора разлагается на линейные множители, то пространство разлагается в сумму корневых подпространств этого оператора, поэтому нам достаточно выбрать «хорошие» базисы для таких подпространств. Нетрудно видеть, что ограничение $(A - \lambda \text{id})|_{R_\lambda}$ является нильпотентным оператором, а для нильпотентных операторов можно доказать следующую теорему.

Теорема 1.2. Для каждого нильпотентного оператора N можно выбрать базис, в котором его матрица блочно-диагональна с блоками вида

$$(1.1) \quad \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

причём такой вид оператора единственен с точностью до перестановки блоков.

Действие оператора, заданного в некотором базисе e_1, \dots, e_m матрицей (1.1), описывается схемой¹ $e_1 \mapsto e_2 \mapsto \dots \mapsto e_m \mapsto 0$. Построив указанный в теореме 1.2 базис в каждом из корневых подпространств, получим следующее утверждение.

Теорема 1.3. Для каждого линейного оператора, характеристический многочлен которого разлагается на линейные множители, можно выбрать базис, в котором его матрица блочно-диагональна с блоками вида

$$(1.2) \quad J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{pmatrix},$$

причём такой вид оператора единственен с точностью до перестановки блоков.

¹Здесь мы (вслед за Антоном Александровичем) намеренно изображаем жордановы клетки «перевернутыми», нам так будет удобнее. Мы хотим, чтобы первый базисный вектор e_1 имел максимальную высоту.

Определение 1.4. Вид оператора, указанный в теореме 1.3, называется *жордановой нормальной формой* оператора, а блоки вида (1.2) — *жордановыми клетками*. Базис, в котором оператор имеет интересующий нас вид, также называется *жордановым*.

Чтобы найти жорданову форму оператора \mathcal{A} , сначала находим характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ и выписываем его корни $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ и их кратности k_1, \dots, k_r . На диагонали в жордановой форме стоят собственные значения:

$$J = \begin{pmatrix} \overbrace{\lambda_1 \dots \lambda_1}^{k_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \overbrace{\lambda_r \dots \lambda_r}^{k_r} \end{pmatrix}$$

Осталось понять, как эти собственные значения распределены по жордановым клеткам (ведь может быть и несколько клеток с одним собственным значением). Для начала отметим важный момент. Если A — матрица оператора в некотором базисе, а J — жорданова матрица, то существует матрица C замены базиса такая, что $A = C^{-1}JC$. При этом

$$\operatorname{rk}(A - \lambda E) = \operatorname{rk}(C^{-1}(A - \lambda E)C) = \operatorname{rk}\left(\underbrace{C^{-1}AC}_J - \lambda \underbrace{C^{-1}C}_E\right) = \operatorname{rk}(J - \lambda E).$$

для любого λ . (Первое равенство — это просто равенство рангов подобных матриц.)

Лемма 1.5. Количество жордановых клеток с собственным значением λ размера не меньше k равняется

$$\operatorname{rk}(A - \lambda E)^{k-1} - \operatorname{rk}(A - \lambda E)^k.$$

Доказательство. Пусть λ — единственное собственное значение матрицы A . Как мы уже заметили выше, $\operatorname{rk}(A - \lambda E) = \operatorname{rk}(J - \lambda E)$, поэтому можем доказывать то же самое, заменив A на J . Рассмотрим часть жордановой матрицы, соответствующей собственному значению λ . При переходе от матрицы $(J - \lambda E)^{k-1}$ к $(J - \lambda E)^k$ из всех жордановых клетки, кроме тех, которые уже целиком обнулились, исчезает по единице. В матрице $(J - \lambda E)^{k-1}$ целиком обнулились клетки размером меньше k , поэтому искомая разность есть количество клеток размера не меньше k .

Осталось доказать, почему клетки с другими собственными значениями не влияют на ранг. Иными словами, нужно доказать, что для клетки J_λ с $\lambda \neq 0$ размера $m \times m$ и для любого $l \in \mathbb{N}$ имеет место равенство $\operatorname{rk} J_\lambda^l = m$. Это сразу следует из предложения 2.11.1 из [Панов]: для любого многочлена f его значение на жордановой клетке есть

$$f(J_\lambda) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & & 0 \\ \frac{f'(\lambda)}{1!} & f(\lambda) & \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} & \dots & \frac{f'(\lambda)}{1!} & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

Нас интересуют многочлены вида $f(t) = t^l$. Если $\lambda \neq 0$, то $f(\lambda) = \lambda^l \neq 0$ (в поле нет делителей нуля). Тогда матрица J_λ^l треугольная, с ненулевыми числами на диагонали, значит, её ранг равен её размеру. Осталось упомянуть, что многочлен от блочной матрицы (нас интересует жорданова форма оператора) применяется к ней поблочно. Отсюда и следует желаемое. ■

Следствие 1.6. Количество собственных векторов оператора \mathcal{A} , соответствующих собственному значению λ , равняется в точности $n - \text{rk}(\mathcal{A} - \lambda E)$.

С помощью этой леммы, для каждого k находим количество жордановых клеток размера k как количество клеток размера не меньше k за вычетом клеток размера не меньше $k + 1$. Повторить для каждого собственного значения.

Задача 1.7. Найти жорданову форму для оператора \mathcal{A} , матрица которого в стандартном базисе имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Характеристический многочлен имеет вид $\chi_A(t) = (2 - t)^5$, отсюда имеем единственный корень 2 кратности 5. Так что жорданова матрица выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 2 \end{pmatrix}$$

Чтобы понять распределение собственных значений по клеткам, находим ранги матриц $(A - 2E)^k$, где $k = 1, \dots, 5$:

$$\begin{aligned} \text{rk}(A - 2E) &= \text{rk} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3, & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1, \\ \text{rk}(A - 2E)^3 &= \text{rk}(A - 2E)^4 = \text{rk}(A - 2E)^5 = 0. \end{aligned}$$

Получаем, что клеток размера хотя бы 1 (то есть, всего клеток) ровно $5 - 3 = 2$, хотя бы 2 — ровно $3 - 1 = 2$, хотя бы 3 — ровно $1 - 0 = 1$, клеток больших размеров нет. Таким образом, имеем одну клетку 3×3 и одну клетку размера 2×2 , и жорданова форма данной матрицы имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

■

Теперь научимся находить жорданов базис. Метод, который здесь изложен, описан в файле Антона Александровича [Клячко]. Здесь к нему даны дополнительные пояснения и необходимые теоретические обоснования.

Напомним, что по сути то, чем мы занимаемся, — это выбор базиса для нильпотентного оператора \mathcal{N} , в котором он имеет вид, указанный в теореме 1.2.

Лемма 1.8. Если вектор \mathbf{v} максимальной высоты m для нильпотентного оператора \mathcal{N} , то векторы $\mathbf{v}, \mathcal{N}\mathbf{v}, \mathcal{N}^2\mathbf{v}, \dots, \mathcal{N}^{m-1}\mathbf{v}$ линейно независимы.

Доказательство. Напишем какую-то нетривиальную линейную комбинацию данных векторов с коэффициентами $\lambda_0, \dots, \lambda_{m-1}$

$$\lambda_0 \mathbf{v} + \lambda_1 \mathcal{N}\mathbf{v} + \dots + \lambda_{m-1} \mathcal{N}^{m-1}\mathbf{v},$$

и пусть k — номер первого ненулевого коэффициента, т. е. можно записывать эту линейную комбинацию, начиная с члена под номером k . Тогда

$$\mathcal{N}^{m-k-1} (\lambda_k \mathcal{N}^k \mathbf{v} + \dots + \lambda_{m-1} \mathcal{N}^{m-1} \mathbf{v}) = \mathcal{N}^{m-1} \mathbf{v} \neq \mathbf{0},$$

а нулевой вектор всегда переходит в нулевой под действием линейного оператора. ■

Таким образом, если мы хотим выбрать базис подпространства, соответствующего некоторой жордановой клетке J_λ размера $m \times m$, то нам достаточно выбрать вектор высоты m для нильпотентного оператора $\mathcal{A} - \lambda \text{id}$. Для простоты изложения, здесь мы разберём несколько случаев — от простого к сложному.

I. В жордановой форме только одна клетка

$$J = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{pmatrix}}_m \Bigg\}^m$$

В этом случае всё пространство есть корневое для собственного значения λ , и нам нужно выбрать из него вектор высоты m , а потом $m - 1$ раз применить к нему оператор $\mathcal{A} - \lambda \text{id}$.

Утверждается, что можно взять просто случайный вектор (да, какой первый в голову придёт). Действительно, всё что нам нужно от этого вектора — чтобы он не лежал в ядре $\text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \text{id})^{m-1}$ (то есть его высота должна равняться m). А это ядро является подпространством, и вероятность (в любом разумном смысле этого слова), что случайный вектор попадёт в это подпространство, мала. Конечно, нам может не повезти, но тогда мы это заметим — применяя оператор $\mathcal{A} - \lambda \text{id}$ к нашему вектору, мы получим нулевой вектор раньше, чем того хотели. В этом случае нужно просто вернуться назад и выбрать другой случайный вектор.

Задача 1.9. Найти жорданову форму и жорданов базис оператора \mathcal{A} , матрица которого в стандартном базисе имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Имеем одно собственное значение 3 кратности 4. Найдём жорданову форму:

$$\text{rk}(A - 3E) = \text{rk} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3,$$

и на этом можно закончить, потому что уже сейчас видно, что жорданова клетка только одна (жордановых клеток размера не меньше 1 ровно $4 - 3 = 1$). Итак, жорданова форма имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Приступим к нахождению жорданова базиса. В качестве случайного вектора возьмём, например,

$$\mathbf{e}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Находим остальные векторы:

$$\mathbf{e}'_2 = (A - 3E)\mathbf{e}'_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}'_3 = (A - 3E)\mathbf{e}'_2 = \mathbf{0}.$$

Итак, мы получили нулевой вектор, значит, выбранный нами случайный вектор \mathbf{e}'_1 не подходит. Ничего страшного, берём новый:

$$\mathbf{e}'_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Опять пытаемся найти остальные векторы:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_2 &= (A - 3E)\mathbf{e}'_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{e}'_3 &= (A - 3E)\mathbf{e}'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{e}'_4 &= (A - 3E)\mathbf{e}'_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

На этот раз² вектор подошёл, и мы нашли базис целиком. ■

II. В жордановой форме несколько клеток одного размера

Теперь нужно повторить процесс из предыдущего пункта несколько раз (по разу для каждой клетки) и потом проверить линейную независимость полученных векторов. Мы утверждаем, что достаточно проверять линейную независимость только собственных векторов. Мы докажем это для базисов, соответствующих двум жордановым клеткам, но доказательство в общем случае проводится аналогично.

Лемма 1.10. Имеется вектор \mathbf{v} высоты m и вектор \mathbf{u} высоты k для нильпотентного оператора \mathcal{N} . Система векторов $\mathbf{v}, \mathcal{N}\mathbf{v}, \dots, \mathcal{N}^{m-1}\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathcal{N}\mathbf{u}, \dots, \mathcal{N}^{k-1}\mathbf{u}$ линейно независима тогда и только тогда, когда линейно независимы собственные векторы $\mathcal{N}^{m-1}\mathbf{v}$ и $\mathcal{N}^{k-1}\mathbf{u}$.

Доказательство. Напишем линейную комбинацию данной системы с произвольными коэффициентами, отвечающую нулевому вектору:

$$\lambda_0 \mathbf{v} + \lambda_1 \mathcal{N}\mathbf{v} + \dots + \lambda_{m-1} \mathcal{N}^{m-1}\mathbf{v} + \mu_0 \mathbf{u} + \mu_1 \mathcal{N}\mathbf{u} + \dots + \mu_{k-1} \mathcal{N}^{k-1}\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

²Если выбирать вектор на самом деле случайно, то не везёт очень редко, особенно над бесконечными полями. В решении задачи первый вектор был намеренно выбран плохим.

и будем доказывать, что она тривиальна.

Сначала предположим, что m и k различны, тогда без ограничения общности $m > k$. Возьмём от обеих частей оператор \mathcal{N}^{m-1} , останется $\lambda_0 \mathcal{N}^{m-1} \mathbf{v} = \mathbf{0}$, отсюда $\lambda_0 = 0$ (ведь $\mathcal{N}^{m-1} \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ из условия на высоту вектора \mathbf{v}). Аналогично доказывается, что $\lambda_0 = \dots = \lambda_{m-k-1} = 0$. После этого можем перенумеровать коэффициенты $\lambda_i \rightsquigarrow \lambda_{i-m+k}$ для $i \geq k - m$ (про нулевые коэффициенты забываем) и заменить вектор $\mathbf{v} \rightsquigarrow \mathcal{N}^{m-k} \mathbf{v}$.

Итак, можем считать, что $m = k$. Тогда наша линейная комбинация принимает вид

$$\lambda_0 \mathbf{v} + \lambda_1 \mathcal{N} \mathbf{v} + \dots + \lambda_{m-1} \mathcal{N}^{m-1} \mathbf{v} + \mu_0 \mathbf{u} + \mu_1 \mathcal{N} \mathbf{u} + \dots + \mu_{m-1} \mathcal{N}^{m-1} \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Возьмём оператор \mathcal{N}^{m-1} от обеих частей, получим $\lambda_0 \mathcal{N}^{m-1} \mathbf{v} + \mu_0 \mathcal{N}^{m-1} \mathbf{u} = \mathbf{0}$. Про векторы $\mathcal{N}^{m-1} \mathbf{v}$ и $\mathcal{N}^{m-1} \mathbf{u}$ мы знаем, что они линейно независимы, поэтому $\lambda_0 = \mu_0 = 0$. Теперь берём оператор \mathcal{N}^{m-2} от обеих частей и так же получаем $\lambda_1 = \mu_1 = 0$. Так же доказываем, что все коэффициенты линейной зависимости нулевые, то есть она тривиальна. ■

Таким образом, когда мы нашли куски жорданова базиса, соответствующие разным клеткам, нам достаточно проверить линейную независимость последних (собственных) векторов каждого куска.

Задача 1.11. Найти жорданову форму и жорданов базис оператора \mathcal{A} , матрица которого в стандартном базисе имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Здесь опять одно собственное значение кратности 4. Находим жорданову форму, как обычно:

$$\text{rk}(A - 3E) = \text{rk} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2, \quad \text{rk}(A - 3E)^2 = 0$$

Таким образом, у нас $2 - 0 = 2$ клетки размера хотя бы 2, отсюда сразу можно сделать вывод, что имеется ровно две клетки размера 2×2 , то есть жорданова форма имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Выбираем случайный вектор и находим оставшийся кусок базиса для первой клетки:

$$\mathbf{e}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}'_2 = (A - 3E)\mathbf{e}'_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь то же самое для второй:

$$\mathbf{e}'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}'_4 = (A - 3E)\mathbf{e}'_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные векторы e'_2 и e'_4 , очевидно, линейно независимы, так что построенная нами система действительно является жордановым базисом для данного оператора. ■

III. Есть клетки разных размеров с одним собственным значением

Упорядочим клетки по размерам: $m_1 > m_2 > \dots > m_l$. Для самой большой клетки (размера m_1) делаем всё, как обычно. Для меньшей клетки размера m_2 нужно найти вектор высоты m_2 для оператора $\mathcal{A} - \lambda \text{id}$, но который не выражается через вектор высоты $m_2 < m_1$, который получился в процессе выбора базиса для предыдущей клетки. Для этого нам придётся выписать решения системы линейных уравнений

$$(A - \lambda E)^{m_2} X = 0$$

и выбрать среди них вектор, линейно независимый с векторами высоты, меньшей m_2 , из уже полученного куска базиса. Для этого можно, опять же, взять случайный вектор из подпространства решений этой системы (по тем же причинам, что и раньше).

Так повторяем для всех клеток, а потом обязательно проверяем линейную независимость полученных собственных векторов. Здесь, опять же, если нам где-то не повезло с выбором случайного вектора, мы это обязательно заметим — вектора в конце получатся линейно зависимыми.

Задача 1.12. Найти жорданову форму и жорданов базис оператора \mathcal{A} , матрица которого в стандартном базисе имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Имеем одно собственное значение 2 кратности 5. Находим жорданову форму:

$$\begin{aligned} \text{rk}(A - 2E) &= \text{rk} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3, & \text{rk}(A - 2E)^2 &= \text{rk} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1, \\ \text{rk}(A - 2E)^3 &= 0. \end{aligned}$$

Имеем $5 - 3 = 2$ клетки, причём обе размера хотя бы 2 ($3 - 1 = 2$), но только одна размера хотя бы 3 ($1 - 0 = 1$), отсюда делаем вывод, что жорданова форма имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для клетки 3×3 делаем всё, как обычно:

$$e'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e'_2 = (A - 2E)e'_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$e'_3 = (A - 2E)e'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

У нас ещё осталась клетка 2×2 . Для неё решаем линейную систему:

$$(A - 2E)^2 X = \mathbf{0}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В качестве e'_4 можно взять любое решение этой системы (то есть, любой вектор с пятой координатой, равной 0), например,

$$e'_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e'_5 = (A - 2E)e'_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Векторы e'_3 и e'_5 , очевидно, линейно независимы, так что векторы $e'_1, e'_2, e'_3, e'_4, e'_5$ действительно образуют жорданов базис. ■

IV. Есть клетки с разными собственными значениями

Здесь мы, наконец, рассматриваем максимально общий случай. В этом месте возникает важный момент — теперь всё пространство не является корневым для определённого собственного значения. Как же нам теперь найти случайный корневой вектор?

Пусть нас интересует собственное значение λ . Сначала выберем какой-то аннулирующий многочлен f для оператора \mathcal{A} (например, минимальный многочлен $\mu_{\mathcal{A}}$) и какой-то случайный вектор v . А теперь подействуем на наш случайный вектор оператором

$$\left. \frac{f(t)}{(t - \lambda)^k} \right|_{\mathcal{A}},$$

где k — кратность λ как корня многочлена f . Таким образом мы получим желаемый случайный корневой вектор u , отвечающий собственному значению λ . Действительно,

$$(\mathcal{A} - \lambda \text{id})^k u = (t - \lambda)^k \left|_{\mathcal{A}} \frac{f(t)}{(t - \lambda)^k} \right|_{\mathcal{A}} v = f(\mathcal{A})v = \mathbf{0},$$

так как многочлен f является аннулирующим для оператора \mathcal{A} . Для нахождения минимального многочлена можно воспользоваться стандартным утверждением.

Предложение 1.13. Если характеристический многочлен оператора \mathcal{A} раскладывается на линейные множители, то минимальный аннулирующий многочлен этого оператора есть

$$\prod_{i=1}^r (t - \lambda_i)^{m_i},$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ — все собственные значения оператора \mathcal{A} , а m_i — размер максимальной жордановой клетки, отвечающей собственному значению λ_i .

Задача 1.14. Найти жорданову форму и жорданов базис оператора \mathcal{A} , матрица которого в стандартном базисе имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Находим жорданову форму. На этот раз мы имеем одно собственное значение 2 кратности 4 и другое — 3 кратности 1. Но с тройкой, конечно, всё понятно — там точно одна жорданова клетка 1×1 . Разбираемся с двойкой.

$$\operatorname{rk}(A - 2E) = \operatorname{rk} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3, \quad \operatorname{rk}(A - 2E)^k = \operatorname{rk} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

для всех $k \geq 2$. Таким образом, жордановых клеток с собственным значением λ равно $5 - 3 = 2$, клеток размера хотя бы 2 равно $3 - 1 = 2$, а других клеток нет. Таким образом, жорданова форма имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдём случайный корневой, соответствующий собственному значению 2. Минимальный многочлен имеет вид $\mu_{\mathcal{A}}(t) = (t - 2)^2(t - 3)$. Выбираем случайный вектор

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

и действуем на него оператором $(\mu_{\mathcal{A}}(t)/(t - 2)^2)|_{\mathcal{A}} = (t - 3)|_{\mathcal{A}} = \mathcal{A} - 3\operatorname{id}$:

$$\mathbf{e}'_1 = (A - 3E)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем случайный корневой вектор, соответствующий собственному значению λ , который и назовём первым базисным вектором. Находим второй:

$$\mathbf{e}'_2 = (A - 2E)\mathbf{e}'_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь разбираемся со второй клеткой, отвечающей собственному значению 2. Она того же размера, что и первая, поэтому никаких систем решать не нужно. Достаточно выбрать другой случайный вектор

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

и подействовать на него тем же оператором:

$$\mathbf{e}'_3 = (A - 3E)\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

После чего находим второй вектор базиса подпространства, соответствующего этой клетке:

$$\mathbf{e}'_4 = (A - 2E)\mathbf{e}'_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Векторы \mathbf{e}'_2 и \mathbf{e}'_4 , очевидно, линейно независимы. Осталось найти единственный собственный вектор для значения собственного 3, так же, как мы искали корневые векторы для двойки. Только теперь случайный вектор можно взять \mathbf{v} или \mathbf{u} , который мы уже брали раньше, потому что теперь мы работаем с другим собственным значением.

$$\mathbf{e}'_5 = (A - 2E)^2\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Линейную независимость \mathbf{e}'_5 ни с кем проверять уже не надо, он лежит в своём корневом подпространстве (вспомнить теорему о разложении пространства в прямую сумму корневых подпространств). ■