Теорминимум по линейной алгебре

Пшеничный Никита*

Весна 2025 г.

Аннотация

Здесь собраны мои записки по линейной алгебре. Это не конспект лекций, а скорее справочник по наиболее практически важным темам (идеям, методам, ...) курса и техникам, которые позволяют эффективно решать рутинные задачи.

Большая часть используемого теоретического материала содержится в книгах [Панов] и [Винберг]. Из книг [Новиков — Тайманов] и [Арнольд] позаимствованы некоторые важные применения линейной алгебры к другим дисциплинам — дифференциальной геометрии и дифференциальным уравнениям, соответственно.

Список литературы

[Панов] Т. Е. Панов. *Линейная алгебра и геометрия. Курс лекций.* МЦНМО, 2024.

[Винберг] Э. Б. Винберг. *Курс алгебры.* МЦНМО, 2024.

[Клячко] А. А. Клячко. *Как найти жорданов базис для оператора?*

[Новиков — Тайманов] С. П. Новиков, И. А. Тайманов. *Современные геометрические структуры и поля.* МЦНМО, 2014.

[Арнольд] В. И. Арнольд. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* МЦНМО, 2024.

Содержание

*Последняя компилляция: 25 апреля 2025 г. Актуальную версию этого файла можно найти на моём GitHub.

1. Жорданова нормальная форма

Теоретические сведения

Наша глобальная цель — научиться приводить матрицы к «хорошему» виду. Некоторые операторы можно диагонализировать, но не все. Ясно, что для этого необходимо и достаточно уметь выбирать базис из собственных векторов. Существование такого базиса равносильно выполнению следующих двух условий:

(1) характеристический многочлен оператора разлагается на линейные множители;
(2) кратность каждого корня характериского многочлена равна размерности соответствующего собственного подпространства.

От первого условия мы никуда не уйдём, а вот от второго условия сможем отказаться. При этом для выбора «хорошего» базиса нам потенциально может не хватить собственных векторов, поэтому естественно рассмотреть какое-то обобщение этого понятия.

Определение 1.1. Вектор $\boldsymbol{v} \in V$ называется *корневым* вектором линейного оператора $\mathcal{A}$, отвечающим числу $\lambda \in \Bbbk$, если

$$(\mathcal{A} - \lambda\,\mathrm{id})^m \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$$

для некоторого целого неотрицательного числа m. Наименьшее из таких чисел называется *высотой* корневого вектора $\boldsymbol{v}$.

Легко видеть, что ненулевые корневые векторы могут отвечать только собственным числам оператора, а также что корневые векторы, соответствующие фиксированному числу $\lambda \in \Bbbk$, образуют подпространство, оно называется *корневым.*

Оказывается, что если характеристический многочлен оператора разлагается на линейные множители, то пространство разлагается в сумму корневых подпространств этого оператора, поэтому нам достаточно выбрать «хорошие» базисы для таких подпространств. Нетрудно видеть, что ограничение $(\mathcal{A} - \lambda\,\mathrm{id})\big|_{R_\lambda}$ является нильпотентным оператором, а для нильпотентных операторов можно доказать следующую теорему.

Теорема 1.2. Для каждого нильпотентного оператора $\mathcal{N}$ можно выбрать базис, в котором его матрица блочно-диагональна с блоками вида

$$\begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

причём такой вид оператора единственен с точностью до перестановки блоков.

Действие оператора, заданного в некотором базисе $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_m$ матрицей (1.1), описывается схемой[1] $\boldsymbol{e}_1 \mapsto \boldsymbol{e}_2 \mapsto \dots \mapsto \boldsymbol{e}_m \mapsto \mathbf{0}$. Построив указанный в теореме 1.2 базис в каждом из корневых подпространств, получим следующее утверждение.

Теорема 1.3. Для каждого линейного оператора, характеристический многочлен которого разлагается на линейные множители, можно выбрать базис, в котором его матрица блочно-диагональна с блоками вида

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

причём такой вид оператора единственен с точностью до перестановки блоков.

[1] Здесь мы (вслед за Антоном Александровичем) намеренно изображаем жордановы клетки «перевёрнутыми», нам так будет удобнее. Мы хотим, чтобы первый базисный вектор $\boldsymbol{e}_1$ имел максимальную высоту.

Определение 1.4. Вид оператора, указанный в теореме 1.3, называется *жордановой нормальной формой* оператора, а блоки вида (1.2) — *жордановыми клетками*. Базис, в котором оператор имеет интересующий нас вид, также называется *жордановым*.

Нахождение жордановой формы оператора

Чтобы найти жорданову форму оператора $\mathcal{A}$, сначала находим характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ и выписываем его корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ и их кратности $k_1, \ldots, k_r$. На диагонали в жордановой форме стоят собственные значения:

$$J = \begin{pmatrix} \overbrace{\lambda_1 \quad \cdots \quad \lambda_1}^{k_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \overbrace{\lambda_r \quad \cdots \quad \lambda_r}^{k_r} \end{pmatrix}$$

Осталось понять, как эти собственные значения распределены по жордановым клеткам (ведь может быть и несколько клеток с одним собственным значением). Для начала отметим важный момент. Если A — матрица оператора в некотором базисе, а J — жорданова матрица, то существует матрица C замены базиса такая, что $A = C^{-1}JC$. При этом

$$\operatorname{rk}(A - \lambda E) = \operatorname{rk}\left(C^{-1}(A - \lambda E)C\right) = \operatorname{rk}\left(\underbrace{C^{-1}AC}_{J} - \lambda \underbrace{C^{-1}C}_{E}\right) = \operatorname{rk}(J - \lambda E).$$

для любого λ. (Первое равенство — это просто равенство рангов подобных матриц.)

Лемма 1.5. Количество жордановых клеток с собственным значением λ размера не меньше k равняется

$$\operatorname{rk}(A - \lambda E)^{k-1} - \operatorname{rk}(A - \lambda E)^k.$$

Доказательство. Пусть λ — единственное собственное значение матрицы A. Как мы уже заметили выше, $\operatorname{rk}(A - \lambda E) = \operatorname{rk}(J - \lambda E)$, поэтому можем доказывать то же самое, заменив A на J. Рассмотрим часть жордановой матрицы, соответствующей собственному значению λ. При переходе от матрицы $(J - \lambda E)^{k-1}$ к $(J - \lambda E)^k$ из всех жордановых клетки, кроме тех, которые уже целиком обнулились, исчезает по единице. В матрице $(J - \lambda E)^{k-1}$ целиком обнулились клетки размером меньше k, поэтому искомая разность есть количество клеток размера не меньше k.

Осталось доказать, почему клетки с другими собственными значениями не влияют на ранг. Иными словами, нужно доказать, что для клетки J_λ с $\lambda \neq 0$ размера $m \times m$ и для любого $k \in \mathbb{N}$ имеет место равенство $\operatorname{rk} J_\lambda^k = m$. Это сразу следует из предложения 2.11.1 из [Панов]: для любого многочлена f его значение на жордановой клетке есть

$$f(J_\lambda) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & & & 0 \\ \frac{f'(\lambda)}{1!} & f(\lambda) & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} & \ldots & \frac{f'(\lambda)}{1!} & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

Нас интересуют многочлены вида $f(t) = t^k$. Если $\lambda \neq 0$, то $f(\lambda) = \lambda^k \neq 0$ (в поле нет делителей нуля). Тогда матрица J_λ^k треугольная, с ненулевыми числами на диагонали, значит, её ранг равен её размеру. Осталось упомянуть, что многочлен от блочно-диагональной матрицы (нас интересует матрица $J-\lambda E$) применяется к ней поблочно. Отсюда и получается, что клетки, отвечающие другим собственным значениям (кроме λ) при возведении в степень матрицы $J-\lambda E$ не влияют на ранг. ■

Следствие 1.6. Количество собственных векторов оператора $\mathcal{A}$, соответствующих собственному значению λ, равняется в точности $n - \mathrm{rk}(\mathcal{A} - \lambda\,\mathrm{id})$.

С помощью этой леммы для каждого k находим количество жордановых клеток размера k как количество клеток размера не меньше k за вычетом клеток размера не меньше $k+1$. Повторить для каждого собственного значения.

Задача 1.7. Найти жорданову форму для оператора $\mathcal{A}$, матрица которого в стандартном базисе имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Характеристический многочлен имеет вид $\chi_{\mathcal{A}}(t) = (2-t)^5$, отсюда имеем единственный корень 2 кратности 5. Так что жорданова матрица выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 2 \end{pmatrix}$$

Чтобы понять распределение собственных значений по клеткам, находим ранги матриц $(A-2E)^k$, где $k = 1, \ldots, 5$:

$$\mathrm{rk}(A-2E) = \mathrm{rk}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1,$$
$$\mathrm{rk}(A-2E)^3 = \mathrm{rk}(A-2E)^4 = \mathrm{rk}(A-2E)^5 = 0.$$

Получаем, что клеток размера хотя бы 1 (то есть, всего клеток) ровно $5-3=2$, хотя бы 2 — ровно $3-1=2$, хотя бы 3 — ровно $1-0=1$, клеток больших размеров нет. Таким образом, имеем одну клетку 3×3 и одну клетку размера 2×2, и жорданова форма данной матрицы имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

■

Теперь научимся находить жорданов базис. Метод, который здесь изложен, описан в файле Антона Александровича [Клячко]. Здесь к нему даны дополнительные пояснения и необходимые теоретические обоснования.

Напомним, что по сути то, чем мы занимаемся, — это выбор базиса для нильпотентного оператора $\mathcal{N}$, в котором он имеет вид, указанный в теореме 1.2.

Лемма 1.8. Если вектор $\boldsymbol{v}$ максимальной высоты m для нильпотентного оператора $\mathcal{N}$, то векторы $\boldsymbol{v}$, $\mathcal{N}\boldsymbol{v}$, $\mathcal{N}^2\boldsymbol{v}$, ..., $\mathcal{N}^{m-1}\boldsymbol{v}$ линейно независимы.

Доказательство. Напишем какую-то нетривиальную линейную комбинацию данных векторов с коэффициентами $\lambda_0, \ldots, \lambda_{m-1}$

$$\lambda_0\boldsymbol{v} + \lambda_1\mathcal{N}\boldsymbol{v} + \ldots + \lambda_{m-1}\mathcal{N}^{m-1}\boldsymbol{v},$$

и пусть k — номер первого ненулевого коэффициента, т. е. можно записывать эту линейную комбинацию, начиная с члена под номером k. Тогда

$$\mathcal{N}^{m-k-1}\left(\lambda_k\mathcal{N}^k\boldsymbol{v} + \ldots + \lambda_{m-1}\mathcal{N}^{m-1}\boldsymbol{v}\right) = \mathcal{N}^{m-1}\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0},$$

а нулевой вектор всегда переходит в нулевой под действием линейного оператора. ■

Таким образом, если мы хотим выбрать базис подпространства, соответствующего некоторой жордановой клетке J_λ размера $m \times m$, то нам достаточно выбрать вектор высоты m для нильпотентного оператора $\mathcal{A} - \lambda\,\mathrm{id}$. Для простоты изложения, здесь мы разберём несколько случаев — от простого к сложному.

В жордановой форме только одна клетка

$$J = \underbrace{\left.\begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{pmatrix}\right\}m}_{m}$$

В этом случае всё пространство есть корневое для собственного значения λ, и нам нужно выбрать из него вектор высоты m, а потом $m-1$ раз применить к нему оператор $\mathcal{A} - \lambda\,\mathrm{id}$.

Утверждается, что можно взять просто случайный вектор (да, какой первый в голову придёт). Действительно, всё что нам нужно от этого вектора — чтобы он не лежал в ядре $\mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\,\mathrm{id})^{m-1}$ (то есть его высота должна равняться m). А это ядро является подпространством, и вероятность (в любом разумном смысле этого слова), что случайный вектор попадёт в это подпространство, мала. Конечно, нам может не повезти, но тогда мы это заметим — применяя оператор $\mathcal{A} - \lambda\,\mathrm{id}$ к нашему вектору, мы получим нулевой вектор раньше, чем того хотели. В этом случае нужно просто вернуться назад и выбрать другой случайный вектор.

Задача 1.9. Найти жорданову форму и жорданов базис оператора $\mathcal{A}$, матрица которого в стандартном базисе имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Имеем одно собственное значение 3 кратности 4. Найдём жорданову форму:

$$\mathrm{rk}(A - 3E) = \mathrm{rk}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3,$$

и на этом можно закончить, потому что уже сейчас видно, что жорданова клетка только одна (жордановых клеток размера не меньше 1 ровно $4 - 3 = 1$). Итак, жорданова форма имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Приступим к нахождению жорданова базиса. В качестве случайного вектора возьмём, например,

$$\boldsymbol{e}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Находим остальные векторы:

$$\boldsymbol{e}'_2 = (A - 3E)\boldsymbol{e}'_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}'_3 = (A - 3E)\boldsymbol{e}'_2 = \mathbf{0}.$$

Итак, мы получили нулевой вектор, значит, выбранный нами случайный вектор $\boldsymbol{e}'_1$ не подходит. Ничего страшного, берём новый:

$$\boldsymbol{e}'_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Опять пытаемся найти остальные векторы:

$$\boldsymbol{e}'_2 = (A - 3E)\boldsymbol{e}'_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{e}'_3 = (A - 3E)\boldsymbol{e}'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{e}'_4 = (A - 3E)\boldsymbol{e}'_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

На этот раз[2] вектор подошёл, и мы нашли базис целиком. ■

В жордановой форме несколько клеток одного размера

Теперь нужно повторить процесс из предыдущего пункта несколько раз (по разу для каждой клетки) и потом проверить линейную независимость полученных векторов. Мы

[2] Если выбирать вектор на самом деле случайно, то не везёт очень редко, особенно над бесконечными полями. В решении задачи первый вектор был намеренно выбран плохим.

утверждаем, что достаточно проверять линейную независимость только собственных векторов. Мы докажем это для базисов, соответствующих двум жордановым клеткам, но доказательство в общем случае проводится аналогично.

Лемма 1.10. Имеется вектор $\boldsymbol{v}$ высоты m и вектор $\boldsymbol{u}$ высоты k для нильпотентного оператора $\mathcal{N}$. Система векторов $\boldsymbol{v}$, $\mathcal{N}\boldsymbol{v}$, …, $\mathcal{N}^{m-1}\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}$, $\mathcal{N}\boldsymbol{u}$, …, $\mathcal{N}^{k-1}\boldsymbol{u}$ линейно независима тогда и только тогда, когда линейно независимы собственные векторы $\mathcal{N}^{m-1}\boldsymbol{v}$ и $\mathcal{N}^{k-1}\boldsymbol{u}$.

Доказательство. Напишем линейную комбинацию данной системы с произвольными коэффициентами, отвечающую нулевому вектору:

$$\lambda_0\boldsymbol{v} + \lambda_1\mathcal{N}\boldsymbol{v} + \ldots + \lambda_{m-1}\mathcal{N}^{m-1}\boldsymbol{v} + \mu_0\boldsymbol{u} + \mu_1\mathcal{N}\boldsymbol{u} + \ldots + \mu_{k-1}\mathcal{N}^{k-1}\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$$

и будем доказывать, что она тривиальна.

Сначала предположим, что m и k различны, тогда без ограничения общности $m > k$. Возьмём от обеих частей оператор $\mathcal{N}^{m-1}$, останется $\lambda_0\mathcal{N}^{m-1}\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, отсюда $\lambda_0 = 0$ (ведь $\mathcal{N}^{m-1}\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ из условия на высоту вектора $\boldsymbol{v}$). Аналогично доказывается, что $\lambda_0 = \ldots = \lambda_{m-k-1} = 0$. После этого можем перенумеровать коэффициенты $\lambda_i \rightsquigarrow \lambda_{i-m+k}$ для $i \geqslant k-m$ (про нулевые коэффициенты забываем) и заменить вектор $\boldsymbol{v} \rightsquigarrow \mathcal{N}^{m-k}\boldsymbol{v}$.

Итак, можем считать, что $m = k$. Тогда наша линейная комбинация принимает вид

$$\lambda_0\boldsymbol{v} + \lambda_1\mathcal{N}\boldsymbol{v} + \ldots + \lambda_{m-1}\mathcal{N}^{m-1}\boldsymbol{v} + \mu_0\boldsymbol{u} + \mu_1\mathcal{N}\boldsymbol{u} + \ldots + \mu_{m-1}\mathcal{N}^{m-1}\boldsymbol{u} = \mathbf{0}.$$

Возьмём оператор $\mathcal{N}^{m-1}$ от обеих частей, получим $\lambda_0\mathcal{N}^{m-1}\boldsymbol{v} + \mu_0\mathcal{N}^{m-1}\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$. Про векторы $\mathcal{N}^{m-1}\boldsymbol{v}$ и $\mathcal{N}^{m-1}\boldsymbol{u}$ мы знаем, что они линейно независимы, поэтому $\lambda_0 = \mu_0 = 0$. Теперь берём оператор $\mathcal{N}^{m-2}$ от обеих частей и так же получаем $\lambda_1 = \mu_1 = 0$. Так же доказываем, что все коэффициенты линейной зависимости нулевые, то есть она тривиальна. ■

Таким образом, когда мы нашли куски жорданова базиса, соответствующие разным клеткам, нам достаточно проверить линейную независимость последних (собственных) векторов каждого куска.

Задача 1.11. Найти жорданову форму и жорданов базис оператора $\mathcal{A}$, матрица которого в стандартном базисе имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Здесь опять одно собственное значение кратности 4. Находим жорданову форму, как обычно:

$$\operatorname{rk}(A - 3E) = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2, \qquad \operatorname{rk}(A - 3E)^2 = 0$$

Таким образом, у нас $2 - 0 = 2$ клетки размера хотя бы 2, отсюда сразу можно сделать вывод, что имеется ровно две клетки размера 2×2, то есть жорданова форма имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Выбираем случайный вектор и находим оставшийся кусок базиса для первой клетки:

$$\boldsymbol{e}_1' = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_2' = (A-3E)\boldsymbol{e}_1' = \begin{pmatrix}0&0&2&2\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Теперь то же самое для второй:

$$\boldsymbol{e}_3' = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_4' = (A-3E)\boldsymbol{e}_3' = \begin{pmatrix}0&0&2&2\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\2\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Собственные векторы $\boldsymbol{e}_2'$ и $\boldsymbol{e}_4'$, очевидно, линейно независимы, так что построенная нами система действительно является жордановым базисом для данного оператора. ■

Есть клетки разных размеров с одним собственным значением

Упорядочим клетки по размерам: $m_1 > m_2 > \ldots > m_l$. Для самой большой клетки (размера m_1) делаем всё, как обычно. Для меньшей клетки размера m_2 нужно найти вектор высоты m_2 для оператора $\mathcal{A} - \lambda\,\mathrm{id}$, но который не выражается через вектор высоты $m_2 < m_1$, который получился в процессе выбора базиса для предыдущей клетки. Для этого нам придётся выписать решения системы линейных уравнений

$$(A-\lambda E)^{m_2} X = \mathbf{0}$$

и выбрать среди них вектор, линейно независимый с векторами высоты, меньшей m_2, из уже полученного куска базиса. Для этого можно, опять же, взять случайный вектор из подпространства решений этой системы (по тем же причинам, что и раньше).

Так повторяем для всех клеток, а потом обязательно проверяем линейную независимость полученных собственных векторов. Здесь, опять же, если нам где-то не повезло с выбором случайного вектора, мы это обязательно заметим — вектора в конце получатся линейно зависимыми.

Задача 1.12. Найти жорданову форму и жорданов базис оператора $\mathcal{A}$, матрица которого в стандартном базисе имеет вид

$$A = \begin{pmatrix}2&0&3&4&1\\0&2&0&5&1\\0&0&2&0&1\\0&0&0&2&0\\0&0&0&0&2\end{pmatrix}.$$

Решение. Имеем одно собственное значение 2 кратности 5. Находим жорданову форму:

$$\mathrm{rk}(A-2E) = \mathrm{rk}\begin{pmatrix}0&0&3&4&1\\0&0&0&5&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix} = 3, \qquad \mathrm{rk}(A-2E)^2 = \mathrm{rk}\begin{pmatrix}0&0&0&0&3\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix} = 1,$$

$$\mathrm{rk}(A-2E)^3 = 0.$$

Имеем $5 - 3 = 2$ клетки, причём обе размера хотя бы 2 ($3 - 1 = 2$), но только одна размера хотя бы 3 ($1 - 0 = 1$), отсюда делаем вывод, что жорданова форма имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для клетки 3×3 делаем всё, как обычно:

$$\boldsymbol{e}_1' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_2' = (A - 2E)\boldsymbol{e}_1' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{e}_3' = (A - 2E)\boldsymbol{e}_2' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

У нас ещё осталась клетка 2×2. Для неё решаем линейную систему:

$$(A - 2E)^2 X = \mathbf{0}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В качестве $\boldsymbol{e}_4'$ можно взять любое решение этой системы (то есть, любой вектор с пятой координатой, равной 0), например,

$$\boldsymbol{e}_4' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_5' = (A - 2E)\boldsymbol{e}_4' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Векторы $\boldsymbol{e}_3'$ и $\boldsymbol{e}_5'$, очевидно, линейно независимы, так что векторы $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$, $\boldsymbol{e}_3'$, $\boldsymbol{e}_4'$, $\boldsymbol{e}_5'$ действительно образуют жорданов базис. ■

Есть клетки с разными собственными значениями

Здесь мы, наконец, рассматриваем максимально общий случай. В этом месте возникает важный момент — теперь всё пространство не является корневым для определённого собственного значения. Как же нам теперь найти случайный корневой вектор?

Пусть нас интересует собственное значение λ. Сначала выберем какой-то аннулирующий многочлен f для оператора $\mathcal{A}$ (например, минимальный многочлен $\mu_{\mathcal{A}}$) и какой-то случайный вектор $\boldsymbol{v}$. А теперь подействуем на наш случайный вектор оператором

$$\left.\frac{f(t)}{(t-\lambda)^k}\right|_{\mathcal{A}},$$

где k — кратность λ как корня многочлена f. Таким образом мы получим желаемый случайный корневой вектор $\boldsymbol{u}$, отвечающий собственному значению λ. Действительно,

$$(\mathcal{A}-\lambda\,\mathrm{id})^k\boldsymbol{u} = (t-\lambda)^k\Big|_{\mathcal{A}}\,\frac{f(t)}{(t-\lambda)^k}\Big|_{\mathcal{A}}\,\boldsymbol{v} = f(\mathcal{A})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0},$$

так как многочлен f является аннулирующим для оператора $\mathcal{A}$. Для нахождения минимального многочлена можно воспользоваться стандартным утверждением.

Предложение 1.13. Если характеристический многочлен оператора $\mathcal{A}$ раскладывается на линейные множители, то минимальный аннулирующий многочлен этого оператора есть

$$\prod_{i=1}^{r}(t-\lambda_i)^{m_i},$$

где $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ — все собственные значения оператора $\mathcal{A}$, а m_i — размер максимальной жордановой клетки, отвечающей собственному значению λ_i.

Задача 1.14. Найти жорданову форму и жорданов базис оператора $\mathcal{A}$, матрица которого в стандартном базисе имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 5 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Находим жорданову форму. На этот раз мы имеем одно собственное значение 2 кратности 4 и другое — 3 кратности 1. Но с тройкой, конечно, всё понятно — там точно одна жорданова клетка 1×1. Разбираемся с двойкой.

$$\mathrm{rk}(A-2E) = \mathrm{rk}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3, \qquad \mathrm{rk}(A-2E)^k = \mathrm{rk}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

для всех $k \geqslant 2$. Таким образом, жордановых клеток с собственным значением λ ровно $5-3=2$, клеток размера хотя бы 2 ровно $3-1=2$, а других клеток нет. Таким образом, жорданова форма имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдём случайный корневой, соответствующий собственному значению 2. Минимальный многочлен имеет вид $\mu_{\mathcal{A}}(t) = (t-2)^2(t-3)$. Выбираем случайный вектор

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix}$$

и действуем на него оператором $\left(\mu_{\mathcal{A}}(t)/(t-2)^2\right)\big|_{\mathcal{A}} = (t-3)|_{\mathcal{A}} = \mathcal{A} - 3\,\mathrm{id}$:

$$\boldsymbol{e}_1' = (A-3E)\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем случайный корневой вектор, соответствующий собственному значению λ, который и назовём первым базисным вектором. Находим второй:

$$\boldsymbol{e}_2' = (A-2E)\boldsymbol{e}_1' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь разбираемся со второй клеткой, отвечающей собственному значению 2. Она того же размера, что и первая, поэтому никаких систем решать не нужно. Достаточно выбрать другой случайный вектор

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

и подействовать на него тем же оператором:

$$\boldsymbol{e}_3' = (A-3E)\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

После чего находим второй вектор базиса подпространства, соответствующего этой клетке:

$$\boldsymbol{e}_4' = (A-2E)\boldsymbol{e}_3' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Векторы $\boldsymbol{e}_2'$ и $\boldsymbol{e}_4'$, очевидно, линейно независимы. Осталось найти единственный собственный вектор для значения собственного 3, так же, как мы искали корневые векторы для двойки. Только теперь случайный вектор можно взять $\boldsymbol{v}$ или $\boldsymbol{u}$, который мы уже брали раньше, потому что теперь мы работаем с другим собственным значением.

$$\boldsymbol{e}_5' = (A-2E)^2\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Линейную независимость $\boldsymbol{e}_5'$ ни с кем проверять уже не надо, он лежит в своём корневом подпространстве. ■

2. Тензоры

Повествование в этом разделе основано на главе 7 книги [Новиков — Тайманов], в основном нас будут интересовать геометрический и аналитический взгляды на тензоры.

Мотивация определения, тензоры ранга 1 и 2

Пусть $(x^1, \ldots, x^n)$ — локальные координаты в области U на многообразии. (Можно без потери смысла думать про двумерные поверхности в трёхмерном пространстве, которые подробно обсуждаются в курсе классической дифференциальной геометрии.) Любой касательный вектор можно реализовать как вектор скорости кривой на этой поверхности. А именно, рассмотрим кривую, запись которой в локальных координатах имеет вид

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{\xi} t,$$

где $\boldsymbol{x}_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$ — координаты точки, в которой вектор $\boldsymbol{\xi}$ касается поверхности. Тогда

$$\dot{\boldsymbol{x}}(0) = \left.\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}\right|_{t=0} = \boldsymbol{\xi}.$$

Вектор скорости имеет физический смысл и поэтому не зависит от системы координат. Однако в разных система координат запись вектора различна. Действительно, введём новые координаты

$$z^i = z^i(x^1, \ldots, x^n), \quad i = 1, \ldots, n,$$

и зададим кривую $\boldsymbol{x}(t)$ в терминах новых координат:

$$\boldsymbol{z}(t) = (z^1(x^1(t), \ldots, x^n(t)), \ldots, z^n(x^1(t), \ldots, x^n(t))).$$

По теореме о дифференцировании сложной функции

$$\dot{\boldsymbol{z}}(0) = \left.\frac{d\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}(t))}{dt}\right|_{t=0} = \left.\left(\frac{\partial z^1}{\partial x^j}\frac{dx^j(t)}{dt}, \ldots, \frac{\partial z^n}{\partial x^j}\frac{dx^j(t)}{dt}\right)\right|_{t=0}.$$

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 2.1. Векторы скорости $\boldsymbol{\xi} = \dot{\boldsymbol{x}}(0)$ и $\tilde{\boldsymbol{\xi}} = \dot{\boldsymbol{z}}(0)$ движущейся точки в различных системах координат $(z^1, \ldots, x^n)$ и $(z^1, \ldots, z^n)$ связаны соотношением

$$\tilde{\xi}^i = \frac{\partial z^i}{\partial x^j}\xi^j. \tag{2.1}$$

А теперь заметим, что если у нас есть какой-то объект, связанный с локальными координатами на многообразии и изменяющийся при заменах этих локлальных координат по формулам (2.1), то для нас этот объект не отличим от касательного вектора. Поэтому закон преобразования фундаментален в том смысле, что он определяет объект, который меняется по такому закону.

Так что мы можем назвать *векторами* величины $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ меняется при замене координат по формулам (2.1). *Скалярами* при этом можно называть величины, которые не меняются при заменах координат. Простейшими примерами скаляров могут служит числовые функции $f(x^1, \ldots, x^n)$.

Приведём другие естественные примеры тензоров. Для этого рассмотрим *градиент* функции — выражение

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\right).$$

Теорема 2.2. Значение градиента функции зависит от выбора системы координат. При замене координат величины

$$\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\right), \quad \tilde{\boldsymbol{\xi}} = (\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial z^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z^n}\right)$$

связаны соотношением

$$\tilde{\xi}_i = \frac{\partial x^j}{\partial z^i} \xi_j. \tag{2.2}$$

Доказательство. Применить теорему о дифференцировании сложной функции к композиции $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}))$:

$$\frac{\partial f}{\partial z^i} = \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial z^i}.$$

■

Формулы (2.1) и (2.2) различны, и поэтому градиент функции не является вектором. Он является примером другого вида тензоров; величина $(\xi_1, \dots, \xi_n)$, которая при переходе к другой системе координат преобразуется по формулам (2.2), называется *ковектором*. Однако в курсах геометрии и анализа мы часто воспринимаем градиент функции именно как вектор. Следует разобраться, почему такое восприятие «законно».

Напомним, что матрицей Якоби J замены координат $(x^1, \dots, x^n) \to (z^1, \dots, z^n)$ называется матрица

$$J = (a^i_j) = \left(\frac{\partial z^i}{\partial x^j}\right).$$

Транспонированная к ней матрица J^t имеет вид $J^t = (b^i_j)$, где $a^i_j = b^j_i$. Формулы (2.1) и (2.2) принимают вид

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}} = J\boldsymbol{\xi} \text{ (вектор скорости)}, \quad \boldsymbol{\xi} = J^t\tilde{\boldsymbol{\xi}} \text{ (градиент)}.$$

Замены координат обратимы, и поэтому мы можем переписать формулу, полученную для градиентов, в виде

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}} = (J^t)^{-1}\boldsymbol{\xi}.$$

Мы приходим к важному выводу: векторы и ковекторы преобразуются одинаково, если $J = (J^t)^{-1}$, то есть если матрица J ортогональна. Поэтому в случае ортонормированных координат в евклидовом пространстве мы иногда говорим о градиенте как о векторе и не различаем верхние и нижние индексы: в этом случае векторы и ковекторы преобразуются по одним и тем же законам.

Лемма 2.3. Пусть $(z^1, \dots, z^n) \to (x^1, \dots, x^n)$ — замена координат, обратная к замене $(x^1, \dots, x^n) \to (z^1, \dots, z^n)$. Тогда

$$\frac{\partial x^i}{\partial z^j} \frac{\partial z^j}{\partial x^k} = \delta^i_k. \tag{2.3}$$

Доказательство. Применить теорему о дифференцировании сложной функции к тождественному отображению композиции замен координат, указанных в условии леммы. ■

Теорема 2.4. Ковекторы являются линейными функциями на векторах: если $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ — ковектор в точке $\boldsymbol{x}$, то на пространстве $\mathbb{R}^n$ векторов в этой точке он задаёт линейную функцию $\eta\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ по формуле

$$\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\xi}) = \eta_i \xi^i.$$

Доказательство. Линейность этой функции очевидна. Остаётся доказать, что она корректно определена, то есть независимость от выбора координат. При переходе к новым координатам $(z^1, \dots, z^n)$ согласно формулам (2.1) и (2.2) имеем $\tilde{\xi}^i = \dfrac{\partial z^i}{\partial x^j}\xi^j$, $\tilde{\eta}_i = \dfrac{\partial x^k}{\partial z^i}\eta_k$, откуда следует, что

$$\tilde{\eta}_i\tilde{\xi}^i = \left(\frac{\partial x^k}{\partial z^i}\eta_k\right)\left(\frac{\partial z^i}{\partial x^j}\xi^j\right) = \delta^k_j\eta_k\xi^j = \eta_k\xi^k.$$

■

Если ковектор $\boldsymbol{\eta} = \operatorname{grad} f$ является градиентом функции f, то задаваемая им линейная функция

$$\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial f}{\partial x^i}\xi^i$$

есть производная функции f по направлению вектора $\boldsymbol{\xi}$.

В курсе дифференциальной геометрии мы наблюдали ещё один важный пример тензоров — риманову метрику в криволинейных координатах.

Теорема 2.5. При заменах координат $(x^1, \dots, x^n) \to (z^1, \dots, z^n)$ риманова метрика $g_{ij}dx^idx^j = \tilde{g}_{kl}dz^kdz^l$ преобразуется по формуле

$$\tilde{g}_{kl} = g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial z^k}\frac{\partial x^j}{\partial z^l}. \tag{2.4}$$

Доказательство. Риманова метрика каждой паре векторов $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\eta}$, касательных в точке $\boldsymbol{x}$, сопоставляет их скалярное произведение

$$\langle\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}\rangle = g_{ij}(\boldsymbol{x})\xi^i\eta^j.$$

Так как длина кривой $\boldsymbol{x}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, равна $\displaystyle\int_a^b \sqrt{\langle\dot{\boldsymbol{x}}, \dot{\boldsymbol{x}}\rangle}\, dt$ не зависит о выбора координат, и значение скалярного произведение $\langle\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}\rangle$ не зависит от выбора координат. При замене координат мы имеем $\xi^i = \dfrac{\partial x^i}{\partial x^k}\tilde{\xi}^k$ и $\eta^j = \dfrac{\partial x^j}{\partial x^l}\tilde{\eta}^l$. Отсюда следует, что

$$g_{ij}\xi^i\eta^j = g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial x^k}\tilde{\xi}^k\frac{\partial x^j}{\partial x^l}\tilde{\eta}^l = \left(g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^j}{\partial x^l}\right)\tilde{\xi}^k\tilde{\eta}^l = \tilde{g}_{kl}\tilde{\xi}^k\tilde{\eta}^l.$$

Так как векторы $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\eta}$ произвольны, из последнего равенства вытекает формула (2.4). ■

Линейные операторы, действующие на векторах, задаются матрицей из элементов с одним нижним с одним верхним индексом:

$$\boldsymbol{\xi} = \mathcal{A}\boldsymbol{\eta}, \quad \xi^i = a^i_j\eta^j.$$

При заменах координат $\tilde{\xi}^i = \dfrac{\partial z^i}{\partial z^k}\xi^k$, $\tilde{\eta}^j = \dfrac{\partial z^j}{\partial x^l}\eta^l$ равенство $\tilde{\xi}^i = \tilde{a}^i_j\tilde{\eta}^j$ имеет вид

$$\left(\frac{\partial z^i}{\partial x^k}\xi^k\right) = \tilde{a}^i_j\left(\frac{\partial z^j}{\partial x^l}\eta^l\right).$$

Умножая обе части на $\dfrac{\partial x^m}{\partial z^i}$ и суммируя по i, с учётом леммы 2.3, получаем

$$\xi^m = \left(\tilde{a}^i_j\frac{\partial z^j}{\partial x^l}\frac{\partial x^m}{\partial z^i}\right)\eta^l = a^m_l\eta^l.$$

Отсюда мы получаем следующий результат.

Теорема 2.6. При заменах координат элементы матрицы $A = (a^i_j)$ линейного оператора преобразуется по правилу

$$\tilde{a}^i_j = \frac{\partial z^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial z^j}a^k_l.$$

Можем привести и пример тензора с двумя верхними индексами, которое задаёт кососимметрическое скалярное произведение ковекторов:

$$\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \rangle = g^{ij} \xi_i \eta_j.$$

Здесь $g^{ij} = \{x^i, x^j\}$, где $\{\cdot, \cdot\}$ — скобка Пуассона в области (про неё можно почитать в [Новиков — Тайманов], §6.1.9). Согласно определению этой скобки,

$$\tilde{g}^{ij} = \{z^i, z^j\} = \frac{\partial z^i}{\partial x^k} \frac{\partial z^j}{\partial x^l} \{x^k, x^l\} = \frac{\partial z^i}{\partial x^k} \frac{\partial z^j}{\partial x^l} g^{kl}.$$

Тензоры произвольного ранга

Указанные выше правила преобразования тензоров малого ранга при заменах координат приводят нас к общему определению тензора.

Определение 2.7. *Тензором* называется объект, задаваемый в каждой системе координат $(x^1, \dots, x^n)$ набором чисел $T^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}$, которые при замене координат $(x^1, \dots, x^n) \to (z^1, \dots, z^n)$, преобразуются по следующему правилу:

$$\widetilde{T}^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q} = \frac{\partial z^{i_1}}{\partial x^{k_1}} \dots \frac{\partial z^{i_p}}{\partial x^{k_p}} \frac{\partial x^{l_1}}{\partial z^{j_1}} \dots \frac{\partial z^{l_q}}{\partial x^{j_q}} T^{k_1,\dots,k_p}_{l_1,\dots,l_q},$$

где $\widetilde{T}^{i_1,\dots,i_p}_{j_q,\dots,j_q}$ — числовая запись тензора в координатах $(z^1, \dots, z^n)$. Про тензор T с p верхними и q нижними индексами говорят, что он имеет *тип* (p, q) и *ранг* $p + q$.