Экзамен по алгебре

Лектор: Гайфуллин С. А. • Автор: Пшеничный Никита[*], группа 109

I курс • Осенний семестр 2023 г.

Аннотация

При подготовке этого файла я использовал: курс лекций С. А. Гайфуллина, записи лекций Ю. Г. Прохорова на *teach-in*, книгу «Курс алгебры» Э. Б. Винберга и курс семинаров А. А. Клячко.

Экзаменационные вопросы

[*]Telegram: @pshenikita

1 Системы линейных уравнений. Матрица коэффициентов и расширенная матрица коэффициентов. Элементарные преобразования. Эквивалентные системы. Элементарные преобразования переводят СЛУ в эквивалентную

Определение 1.1. **Матрицей** размера $m \times n$ над полем $\mathcal{K}$ называется прямоугольная таблица из элементов поля $\mathcal{K}$, имеющая m **строк** и n **столбцов**:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Определение 1.2. **Линейным уравнением** с неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$ над полем $\mathcal{K}$ называется уравнение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

где **коэффициенты** $a_1, a_2, \dots, a_n$ и **свободный член** b являются элементами поля $\mathcal{K}$.

Система m линейных уравнений с n неизвестными в общем виде пишется так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{$*$}$$

Определение 1.3. Матрица

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется **матрицей коэффициентов**, а матрица

$$\widetilde{\mathcal{A}} := \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

— **расширенной матрицей коэффициентов** системы $(*)$.

Определение 1.4. **Решение системы** — это элемент поля $\mathcal{K}^n$, который при подстановке вместо $(x_1, \dots, x_n)$ обращает каждое уравнение в верное равенство. Система уравнений называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, и **несовместной** в противном случае. Совместная система называется **определённой**, если её решение единственно.

Определение 1.5. **Элементарными преобразованиями** системы линейных уравнений называются преобразования следующих трёх типов:

1. прибавление к одному уравнению другого, умноженного на число;
2. перестановка двух уравнений;
3. умножение одного уравнения на число, отличное от нуля.

Элементарными преобразованиями строк матрицы называются преобразования следующих трёх типов:

1. прибавления к одной строке другой, умноженной на число;

2. перестановка двух строк;
3. умножение одной строки на число, отличное от нуля.

Определение 1.6. Две СЛУ называются **эквивалентными**, если множества их решений совпадают. Обозначение для расширенных матриц: $\widetilde{\mathcal{A}} \sim \widetilde{\mathcal{B}}$.

Теорема 1.1. Если одну систему можно перевести в другую элементарными преобразованиями, то они эквивалентны.

Докажем сначала вспомогательное утверждение:

Лемма 1.1. Преобразование, обратное к элементарному, тоже элементарное.

Доказательство. Докажем для каждого преобразования:

1. («прибавить i-ое уравнение к j-му с коэффициентом λ»)$^{-1}$ = (прибавить i-ое к j-му с коэффициентом $-\lambda$»)
2. Преобразование второго типа обратно к самому себе
3. («умножить i-ое уравнение на $c \neq 0$»)$^{-1}$ = («умножить i-ое уравнение на $c^{-1} \neq 0$»)

■

Теперь докажем теорему:

Доказательство. Докажем, что каждое решение первой системы является решением второй. Это очевидно для преобразований второго и третьего типа, докажем и для первого:

$$(a_{j1} + \lambda a_{i1})x_1 + \ldots + (a_{jn} + \lambda a_{in})x_n = \underbrace{a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n}_{=0} + \lambda \underbrace{(a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n)}_{=0} = 0.$$

Далее, из леммы 1.1 обратное к элементарному преобразвоание тоже элементарное. Поэтому всякое решение второй системы является решением первой. Значит, множества решений этих систем совпадают, т. е. они эквивалентны. ■

Примечание. Обратное утверждение неверно — если СЛУ эквивалентны, то они не всегда переводятся друг в друга элементарными преобразованиями. Контрпример — две системы с пустыми множествами решений:

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \equiv B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Никаким элементарным преобразованием строк нельзя занулить первый столбец матрицы $\mathcal{B}$.

2 Экзотические уравнения. Свободные и главные переменные. Ступенчатый и улучшенный ступенчатый вид матрицы. Метод Гаусса решения СЛУ

Определение 2.1. **Лидером** (**ведущим элементом**) ненулевой строки $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathcal{K}^n$ её первый ненулевой элемент.

Определение 2.2. Матрица называется **ступенчатой**, если номера ведущих элементов её ненулевых строк образуют строго возрастающую последовательность, а нулевые строки расположены в конце:

$$\left(\begin{array}{cccccc} & * & * & * & * & * \\ & & * & * & * & * \\ & & & & * & * \\ & \text{\Large 0} & & & & * \end{array}\right)$$

Матрица называется улучшенной ступенчатой, если она ступенчатая, её ведущие элементы равны 1, а элементы над ними равны 0:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & * & 0 & 0 \\ & 1 & * & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 \\ & \text{\Large 0} & & & 1 \end{pmatrix}$$

Теорема 2.1. Всякую матрицу путём элементарных преобразований строк можно привести к ступенчатому виду.

Доказательство. Если данная матрица нулевая, то она уже ступенчатая. Если она ненулевая, то пусть j_1 — номер её первого ненулевого столбца. Переставив, если нужно, строки, добьёмся того, чтобы $a_{1j_1} \neq 0$. После этого прибавим к каждой строке, начиная со второй, первую строку, умноженную на подходящее число, с таким расчётом, чтобы все элементы j_1-го столбца, кроме первого, стали равными нулю. Теперь рассмотрим матрицу без первой строки и первый j_1 столбцов. Приведём её таким же методом к ступенчатому виду. Продолжая процесс таким же образом, мы получим ступенчатую матрицу. ■

Процесс, проводимый нами в доказательстве последней теоремы, называется *прямым ходом метода Гаусса.*

Примечание. Для приведения матрицы к ступенчатому виду достаточно преобразований первого типа. Действительно, преобразования второго типа нужны были нам лишь для того, чтобы поднять на первую строчку ненулевой элемент. Однако, эту задачу можно выполнить преобразованием первого типа. Пусть $a_{i_1j_1} \neq 0$. Тогда прибавим i_1 строку расширенной матрицы к первой. Теперь получаем $a_{0j_1} = a_{i_1j_1} \neq 0$. А далее действуем так же.

Теперь приведём расширенную матрицу коэффициентов СЛУ к улучшенному ступенчатому виду. По теореме 1.1 множество её решений не изменилось, а решать её в таком виде куда проще.

Определение 2.3. Пусть $j_1, j_2, \ldots, j_r$ — номера ведущих коэффициентов ненулевых уравнений системы. Неизвестные $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$ назовём **главными**, а остальные — **свободными**.

Определение 2.4. Уравнения вида

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b,$$

где $b \neq 0$ назовём **экзотическими**.

Теорема 2.2. Для каждого набора значений свободных переменных существует единственный набор значений главных переменных, который дополняет данный набор до решения совместной системы.

Доказательство. Идём по строкам ступечатой расширенной матрицы коэффициентов СЛУ снизу вверх. Рассмотрим первую встреченную нами ненулевую строку, её номер i_r. В соответствующем уравнении ровно одна главная переменная — x_{j_r}. Её можно выразить через свободные переменные и свободный член уравнения единственным образом. Теперь возьмём следующую строку. Её номер i_{r-1}, и в ней ровно две главные неизвестные — x_{j_r} и $x_{j_{r-1}}$. Выразим $x_{j_{r-1}}$ через x_{j_r}, свободные переменные и свободный член. А теперь подставим выражения x_{j_r} через свободные переменные, полученное на предыдущем шаге. Получается, $x_{j_{r-1}}$ тоже выражается через свободный член и свободные переменные единственным образом. Продолжив процесс, получим выражения для всех главных переменных через свободные. ■

Процесс, проводимый нами в доказательстве последней теоремы, называется *обратным ходом метода Гаусса.*

Примечание. Как следствие, любая СЛУ над бесконечным полем имеет либо ни одного, либо одно, либо бесконечно много решений. А над конечным — либо ни одного, либо одно, либо $|\mathcal{K}|^{n-r}$, где r — количество ступенек в ступенчатой матрице (иными словами, $n - r$ — количество свободных переменных). Доказательство того, что это число r определенно корректно, будет позднее.

3 Единственность улучшенного ступенчатого вида матрицы. Понятие ранга матрицы (через ступенчатый вид) и его корректность

Теорема 3.1. Каждая матрица имеет единственный улучшенный ступенчатый вид.

Доказательство. Рассмотрим матрицу A. Допустим, она может быть приведена элементарными преобразованиями к двум улучшенным ступенчатым видам B и C. Наша цель — доказать, что $B = C$. Рассмотрим однородную систему уравнений с матрицей коэффициентов A. Расширенная матрица коэффициентов $\widetilde{A} = (A \mid 0)$ приводится теми же элементарными преобразованиями к виду ступенчатым видам $\widetilde{B} = (B \mid 0)$ и $\widetilde{C} = (C \mid 0)$. Это означает, что однородные системы с матрицами коэффициентов B и C эквивалентны. Пусть $B \neq C$. Отбросим нулевые строки в матрицах $\widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$, при этом системы останутся эквивалентными. Будем идти по строкам матриц $\widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$, пока не дойдём до места, где будет различие. Попадаем в один из трёх случаев:

1. *Строки с первой по $(k-1)$-ую снизу в матрицах $\widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$ совпадают, а лидеры k-ой строки снизу в матрицах $\widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$ имеют различные позиции.* Пусть лидеры стоят в столбцах p и q соответственно. Не ограничивая общности, можем считать, что $p < q$. Из того, что строки ниже, чем k-ые снизу у матриц $\widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$ совпадают, следует, что разделение переменный x_i при $i > q$ на главные и свободные в системах $\widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$ одинаково. Положим все свободные переменные с номерами $> q$ равными нулю. В системе $(C \mid 0)$ переменная x_q главная и, следвоательно (т. к. система однородная) при указанному задании переменных она также обязательно равна нулю. В системе $(B \mid 0)$ переменная x_q свободная, а потому при указанному задании переменных она может принимать значение 1. Таким образом, нашли решение одной системы, которое не является решением другой. Противоречие с эквивалентностью систем $(B \mid 0)$ и $(C \mid 0)$.

2. *Строки с первой по $(k-1)$-ую снизу в матрицах $\widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$ совпадают, лидеры k-ой строки снизу у этих матриц имеют одинаковые позиции p, но есть номер $s > p$ такой, что в s-ом столбце в рассматриваемой строке у матриц $\widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$ стоят различные числа.* Пусть эти числа b и c соответственно. Не ограничивая общности, $b \neq 0$. Тогда x_s — свободная переменая для системы $(B \mid 0)$, т. к. в столбцах, соответствующих главным переменным стоят нули за счёт улучшенного ступенчатого вида. А значит, x_s — свободная переменнная и для $(C \mid 0)$. Положим все свободные переменные, кроме x_s, равными нулю, а $x_s = 1$. Тогда из системы $(B \mid 0)$ получаем, что $x_s = -b$, а из системы $(C \mid 0)$ — что $x_s = -c$, но $b \neq c$. Противоречие.

3. *Проходя снизу вверхн по ненулевым строкам матриц $\widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$, мы всё время видели, что очередные строки совпадают, но строки в одной из матриц закончились, а в другой — нет.* Пусть строки закончились в матрице $\widetilde{B}$, тогда в матрице $\widetilde{C}$ есть ещё одна нулевая строка. Из того, что строки ниже, чем данная, у матриц $\widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$ совпадают, следует, что разделение переменных x_i при $i > q$ на главные и свободные в соответствующих системах одинаково. Но в системе $(B \mid 0)$ переменная x_q свободная (нет строки, где лидер имеет позицию q), а в системе $(C \mid 0)$ — свободная. Далее можем поступить так же, как и в первом случае.

■

Примечание. Отсюда следует, что количество ненулевых строк в любом ступенчатом виде данной матрицы одинаково. Действительно, ведь для любого ступенчатого вида можно построить улучшенный ступенчатый с таким же количеством ненулевых строк — достаточно каждую ненулевую строку разделить на её ведущий элемент, а затем вычесть её из всех строк выше с подходящим коэффициентом. А ступенчатый вид единственный.

Определение 3.1 (Ступенчатый ранг матрицы). Количество ненулевых строк в ступенчатом виде данной матрицы A называется **рангом матрицы** A и обозначается $\operatorname{rk} A$.

4 Векторное пространство. Простейшие свойства из аксиом. Подпространство. Критерий того, что подмножество является подпространством

Определение 4.1. **Векторным пространством** над полем $\mathcal{K}$ называется такое множество V с операциями слоежния и умножения на элементы поля $\mathcal{K}$, обладающими следующими свойствами:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \forall a,b,c \in V\ (a+b)+c = a+(b+c) \\ 2.\ \exists \mathbf{0} \in V : \forall v \in V\ v+\mathbf{0} = v \\ 3.\ \forall v \in V\ \exists(-v) \in V : (-v)+v = \mathbf{0}. \\ 4.\ \forall a,b \in V\ a+b = b+a \end{array}\right\} V \text{ — абелева группа по } +$$

5. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, u, v \in V\ \lambda \cdot (u+v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$
6. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, v \in V\ (\lambda+\mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$
7. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, v \in V\ (\lambda\mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$
8. $\forall v \in V\ 1 \cdot v = v$

Примечание. Докажем, что аксиома 4 выводится через остальные. Сделаем это в несколько шагов (над знаками равенства указан номер аксиомы или пункта доказательства, благодаря которой сделан переход):

1^*. $0 \cdot v = (0+0) \cdot v \stackrel{6}{=} 0 \cdot v + 0 \cdot v \Rightarrow \boxed{0 \cdot v = \mathbf{0}}$

2^*. $(-1) \cdot v + v \stackrel{8}{=} (-1 \cdot v) + 1 \cdot v \stackrel{6}{=} (-1+1) \cdot v = 0 \cdot v \stackrel{1^*}{=} \mathbf{0} \Rightarrow \boxed{(-1) \cdot v = -v}$

3^*. $v - v \stackrel{8,2^*}{=\!=} 1 \cdot v + (-1) \cdot v \stackrel{6}{=} (1-1) \cdot v = 0 \cdot v = \mathbf{0} \Rightarrow \boxed{v - v = \mathbf{0}}$

Теперь выведем 4 аксиому из остальных:

$$u+v \stackrel{2}{=} (u+v)+\mathbf{0} \stackrel{3}{=} (u+v)+(-(v+u)+(v+u)) \stackrel{1}{=} ((u+v)-(v+u))+(v+u) =$$
$$= (u+\underbrace{v-v}_{=0}-u)+(v+u) \stackrel{3^*}{=} (\underbrace{u-u}_{=0})+(v+u) = v+u.$$

Антон Александрович сказал, что остальные не выводятся. Но мы с Костей Зюбиным не смогли доказать это для 5-ой аксиомы. Доказательство независимости от остальных для каждой аксиомы проводится так: нужно привести пример такой структуры, в которой выполняются все аксиомы, кроме выбранной.

- **1 аксиома**. Рассмотрим множество $M = \{e, a, b\}$ с операцией $*$, заданной следующей таблицей:

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	a	e
b	b	e	b

Заметим, что операция $*$ коммутативна, в M существует нейтральный элемент e по $*$ и каждый элемент имеет обратный по $*$. Однако эта операция не ассоциативна:

$$(b*a)*a = e*a = a, \quad b*(a*a) = b*a = e.$$

Теперь возьмём алгебраическую систему $V = (\mathbb{R}\times M, +, \star)$ с операциями, определёнными по следующим правилам:

$$u+v = (a,x)+(b,y) := (a+b, x*y), \quad \lambda \star v = \lambda \star (a,x) := (\lambda a, x).$$

Аксиома 1 не выполнена, т. к. $*$ неассоциативна. Выполнение аксиом 2-4 следует из того, что они выполняются для $+$ над $\mathbb{R}$ и $*$ над M. Проверим выполнение остальных аксиом:

$$\begin{array}{ll} 5: & \lambda \star (a+b, x*y) = (\lambda(a+b), x*y) = (\lambda a + \lambda b, x*y) = (\lambda a, x) + (\lambda b, y) = \lambda \star ((a,x)+(b,y)) \\ 6: & (\lambda+\mu) \cdot (a,x) = ((\lambda+\mu)a, x) = (\lambda a + \mu a, x*x) = (\lambda a, x) + (\mu a, x) = \lambda \star (a,x) + \mu \star (a,x) \\ 7: & (\lambda\mu) \star (a,x) = (\lambda\mu a, x) = \lambda \star (\mu a, x) \\ 8: & 1 \star (a,x) = (1 \cdot a, x) = (a,x) \end{array}$$

- **2 аксиома**. Без второй аксиомы нельзя ввести третью, поэтому её удаление не имеет смысла.
- **3 аксиома**. Рассмотрим алгебраическу систему $V = (\mathbb{R} \cup \{\infty\}, +, \cdot)$. Доопределим сложение и умножение для ∞ следующим образом:

  $$\infty + a = a + \infty := \infty, \quad \lambda \cdot \infty := \infty.$$

  Выполнение аксиом 1, 2 и 4 сразу вытекает из определения. Аксиома 3 не выполнена, т. к. у ∞ нет обратного по $+$. Выполнение аксиом 5-8 проверяется перебором нескольких случаев.
- **6 аксиома**. Рассмотрим алгебраическую систему $V = (\mathbb{R}, +, \star)$, в которой сложение определено так же, как в действительных числах, а умножение так:

  $$\lambda \star v := v.$$

  Аксиомы 1-4 выполнены, т. к. они выполнены для $\mathbb{R}$ и $+$. Выполнение аксиом 5, 7 и 8 сразу вытекает из определения. Аксиома 6 не выполнена:

  $$u + u = 1 \star u + 1 \star u, \quad (1 + 1) \star u = u.$$
- **7 аксиома**. Рассмотрим $\mathbb{R}$ как векторное пространство над полем $\mathbb{Q}$ с базисом $M \supset \{1, \sqrt{2}\}$. Пусть отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задаётся своими значениями на числах из M, а для других чисел определяется соотношением

  $$f(q_1 v_1 + q_2 v_2 + \ldots + q_n v_n) = q_1 f(v_1) + q_2 f(v_2) + \ldots + q_n f(v_n),$$

  где v_i — некоторые векторы из базиса M. Такое отображение является линейным, сохраняющим все рациональыне числа.

  Теперь возьмём алгебраическую систему $V = (\mathbb{R}, +, \star)$, в которой сложение $+$ определено естественным образом, а умножение $\star$ определяется через f и естественное умножение $\cdot$:

  $$\lambda \star u := f(\lambda) \cdot u.$$

  Аксиомы 1-4 выполнены, т. к. они выполнены для $\mathbb{R}$ и $+$. Выполнение аксиомы 5 проверяется непосредственно. Аксиома 6 выполнена, т. к. отображение f линейно. Проверим, что аксиома 7 не выполнена:

  $$\sqrt{2} \star (\sqrt{2} \star u) = \sqrt{2} \star u = u, \quad (\sqrt{2} \star \sqrt{2}) \star u = 2u.$$

  Выполнение аксиомы 8 вытекает из определения.
- **8 аксиома**. Рассмотрим алгебраическую систему $V = (\mathbb{R}, +, \star)$, в которой сложение определено естественным образом, а умножение так:

  $$\lambda \star u := \mathbf{0}.$$

  Аксиомы 1-4 выполнены, т. к. они выполнены для $\mathbb{R}$ и $+$. Выполнение аксиом 5, 6 и 7 проверяется непосредственно. Аксиома 8 не выполнена.

Теорема 4.1 (Свойства векторного пространства).

1. В любом векторном пространстве нулевой вектор единственный
2. Для любого вектора v противоположный вектор $-v$ единственный
3. Для любого вектора выполнено $0 \cdot v = \mathbf{0}$
4. Для любого числа λ выполнено $\lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$
5. Для любого вектора v выполнено $(-1) \cdot v = -v$
6. Для любого вектора v выполнено $-(-v) = v$
7. Для любых векторов u и v $-(u + v) = (-u) + (-v)$
8. $\lambda v = \mathbf{0} \Rightarrow (\lambda = 0) \wedge (v = \mathbf{0})$

Доказательство.

1. Пусть есть два нулевых вектора — $\mathbf{0}_1$ и $\mathbf{0}_2$. Тогда $\mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_1$ с одной стороны (т. к. $\mathbf{0}_2$ нулевой) и $\mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2$ (т. к. $\mathbf{0}_1$ нулевой). Отсюда $\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2$.

2. Пусть таких векторов два: $(-v)_1$ и $(-v)_2$. Тогда имеем
$$(-v)_1 = \underbrace{(-v)_1 + v}_{=\mathbf{0}} + (-v)_2 = (-v)_2.$$

3. Доказывалось ранее.

4. $\lambda \cdot \mathbf{0} = \lambda \cdot (\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \lambda \cdot \mathbf{0} + \lambda \cdot \mathbf{0}$. Вычитая $\lambda \cdot \mathbf{0}$ из обеих частей равенства, получаем требуемое.

5. Доказывалось ранее.

6. $-(-v) + (-v) = (-1) \cdot (-v) + (-1) \cdot v = (-1) \cdot \underbrace{(-v + v)}_{=\mathbf{0}} = \mathbf{0}$

7. $-(u + v) = (-1) \cdot (u + v) = (-1)u + (-1)v = (-u) + (-v)$.

8. Допустим, $\lambda \neq 0$. Тогда существует число $1/\lambda \neq 0$. Имеем
$$\mathbf{0} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{0} = \frac{1}{\lambda}(\lambda v) = \left(\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda\right) v = v.$$

■

Определение 4.2. Подмножество U векторного пространства V над полем $\mathcal{K}$ называется **подпространством** в V, если оно является векторным пространством над полем $\mathcal{K}$.

Теорема 4.2 (Критерий подпространства). Подмножество U векторного пространства V над полем $\mathcal{K}$ является подпространством тогда и только тогда, когда:

1. $\forall u_1, u_2 \in U \ (u_1 + u_2) \in U$
2. $\forall u \in U, \lambda \in \mathcal{K} \ \lambda u \in U$

Доказательство. $\Rightarrow$. Пусть U — подпространство в V. Тогда сумма двух его элементов лежит снова в U и умножение любого элемента на число лежит в U.

$\Leftarrow$. Наоборот, пусть выполнены условия теоремы. Тогда выполнение аксиом 1, 4-8 сразу следует из того, что они выполнены над V. Чтобы доказать справедливость аксиомы 2, нужно, чтобы $\mathbf{0} \in V$. Это так в силу того, что $U \ni 0 \cdot u = \mathbf{0}$. А для выполнения аксиомы 3 требуется, что $\forall u \in U \ (-u) \in U$. Это выполнется, т. к. $U \ni (-1) \cdot u = -u$. ■

5 Понятие линейной зависимости системы векторов. Три свойства линейной зависимости

Определение 5.1. Пусть $v_1, \ldots, v_k$ — векторы из векторного пространства V, а $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — элементы поля $\mathcal{K}$. Тогда **линейной комбинацией** векторов $v_1, \ldots, v_k$ с коэффициентами $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — это выражение
$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k.$$

При $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$ линейная комбинация называется **тривиальной**.

Определение 5.2. Конечная система векторов называется **линейно зависимой**, если существует нетривиальная нулевая линейная комбинация. Бесконечная система векторов называется **линейно зависимой**, если в ней можно выделить конечную линейно зависимую подсистему. Система векторов называется **линейно независимой**, если она не линейно зависима.

Теорема 5.1 (Три свойства линейной зависимости).

1. Пусть $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$ — две системы векторов, причём $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$. Тогда если $\mathcal{S}$ линейно зависима, то и $\mathcal{S}'$ линейно зависима.
2. Система V линейно зависима тогда и только тогда, когда в ней есть вектор v, который линейно выражается через остальные.
3. Пусть система V линейно независима, а система $V \cup \{u\}$ линейно зависима. Тогда существует единственный набор элементов поля $\mathcal{K}$: $\mu_1, \ldots, \mu_k$ такой, что $u = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_k v_k$, где $\{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq V$ (равенство достигается для конечной системы).

Доказательство. Докажем сначала для конечных систем:

1. $\mathcal{S} = \{v_1, \ldots, v_k\}$ линейно зависима, поэтому в ней есть вектор u, выражающийся линейно через некоторые векторы $v_1, \ldots, v_k$. Однако заметим, что $\{u, v_1, \ldots, v_k\} \subseteq \mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$. Поэтому u выражается через векторы системы $\mathcal{S}'$: коэффициенты при $v_1, \ldots, v_k$ не меняем, а коэффициенты при остальных векторах выбираем нулевыми.
2. $V = \{v_1, \ldots, v_k\}$ линейно зависима, значит, существует нетривиальная линейная комбинация, такая что
$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k = 0, \quad (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \neq (0, \ldots, 0).$$
Существует j такой, что $\lambda_j \neq 0$, поэтому можно выразить v_j:
$$v_j = \sum_{i \neq j} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_j} \right) v_i.$$
Обратно, пусть существует вектор $v_j = \sum\limits_{i \neq j} \lambda_i v_i$. Тогда
$$\lambda_1 v_1 + \ldots + (-1) v_j + \ldots + \lambda_k v_k = 0.$$
Эта линейная комбинация нетривиальная, т. к. $-1 \neq 0$.
3. Существует нетривиальная линейная комбинация
$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k + \mu u = 0 \tag{$*$}$$
При этом $\mu \neq 0$, т. к. иначе останется линейная комбинация $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k = 0$, а она обязательно тривиальная (т. к. система $\{v_1, \ldots, v_k\}$ линейно независима), а поэтому и комбинация $(*)$ тривиальная. Итак, $\mu \neq 0$, поэтому можно так же, как в пункте 2, выразить его через остальные:
$$u = \sum_i \left(-\frac{\lambda_i}{\mu} \right) v_i.$$

А теперь — для бесконечных:

1. $\mathcal{S}$ линейно зависима, а значит, в ней можно выделить конечную линейно зависимую подсистему. А из того, что $\mathcal{S}' \supseteq \mathcal{S}$, в $\mathcal{S}'$ можно выделить эту же линейно зависимую подсистему
2. Выделим в V конечную линейно зависимую систему и применим утверждение теоремы для неё.
3. Выделим в $V \cup \{u\}$ линейно зависимую подсистему и применим утверждение теоремы для неё.

■

6 Однородные системы с количеством неизвестных большим количества уравнений. Основная лемма о линейной зависимости

Определение 6.1. СЛУ называется однородной, если свободные члены во всех уравнениях равны нулю.

Примечание. Однородные СЛУ всегда совместны, в качестве решения подходит строка $(0, \ldots, 0) \in \mathcal{K}^n$.

Лемма 6.1. Если в однородной системе неизвестных больше, чем уравнений, то она имеет ненулевое решение.

Доказательство. Количество главных переменных равно количеству лидеров, а оно, в свою очередь, не превышает количества уравнений (строк матрицы коэффициентов), а оно меньше количества неизвестных.

Значит, количество главных переменных меньше количества всех переменных, значит, среди переменных есть свободные, т. е. решений этой системы бесконечно много. Среди них можно выбрать ненулевое. ∎

Лемма 6.2 (Основная лемма о линейной зависимости). Пусть $\{v_1, \dots, v_n\}$ и $\{u_1, \dots, u_m\}$ — две системы векторов из V. Допустим, что каждый вектор v_i линейно выражается через систему векторов $\{u_1, \dots, u_m\}$ и при этом $n > m$. Тогда система $\{v_1, \dots, v_n\}$ линейно зависима.

Доказательство. Из условия, существуют такие λ_{ij}, что

$$v_i = \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij} u_j.$$

Составим линейную комбинацию

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\mu_i \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij} u_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (\mu_i \lambda_{ij} u_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} (\mu_i \lambda_{ij} u_j) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i \lambda_{ij} \right) u_j.$$

Эта линейная комбинация (уж точно) равна нулю, если $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i \lambda_{ij} = 0 \ \forall j$. Докажем, что мы можем подобрать подходящие μ_i. Имеем однородную СЛУ с переменными μ_i (n штук) и коэффициентами λ_{ij} (m штук), причём $n > m$, значит (по предыдущей лемме), у этой системы есть ненулевое решение. Итак, существуют такие коэффициенты μ_i, не все равные нулю, что $\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n = 0$. ∎