

КОЛЛОКВИУМ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Лектор: Плотников М. Г. • Автор: Пшеничный Никита*, группа 109

1 курс • Весенний семестр 2024 г.

Аннотация

При подготовке данного файла я использовал курсы лекций М. Г. Плотникова и С. В. Шапошникова.

Обо всех ошибках и опечатках пишите мне, исправлю.

Программа коллоквиума

*Telegram: @pshenikita. Последняя компиляция: 12 апреля 2024 г.

1. ПЕРВООБРАЗНАЯ, ОБОБЩЁННАЯ ПЕРВООБРАЗНАЯ, НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ.
 ТЕОРЕМЫ О МНОЖЕСТВЕ ВЕХ ПЕРВООБРАЗНЫХ И ОБОБЩЁННЫХ ПЕРВООБРАЗНЫХ.
 ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ — ОБРАТНЫЕ ОПЕРАЦИИ.
 ИНТЕГРИРОВАНИЕ — ЛИНЕЙНАЯ ОПЕРАЦИЯ

Определение 1. Пусть функция f определена на промежутке X . (Непрерывная) функция F на X называется *первообразной* (*обобщённой первообразной*) функции f , если $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in X$ (для всех $x \in X$, кроме конечного числа).

Примечание. Если функция f непрерывна на промежутке X , то на этом промежутке для неё существует первообразная. Если f кусочно-непрерывна на промежутке X , то на X для неё существует обобщённая первообразная. Доказано это будет позднее.

Утверждение 1. $F' \equiv 0$ на $X \iff F = \text{const.}$

Доказательство. \Leftarrow Очевидно. \Rightarrow По теореме Лагранжа

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad F(x_1) - F(x_2) = \underbrace{F'(c)}_{=0} (x_1 - x_2) = 0$$

для некоторого $c \in X$, значит $F = \text{const.}$ ■

Аналогичное утверждение верно и для обобщённой первообразной, достаточно провести вышеописанное доказательство для отрезков между выкинутыми точками. Оно всё ещё корректно, т. к. в теореме Лагранжа требуется дифференцируемость только во внутренних точках отрезка.

Теорема 1 (О множестве (обобщённых) первообразных). Если F_1 и F_2 — (обобщённые) первообразные f на X , то $F_1 - F_2 = \text{const.}$

Доказательство. $(F_1 - F_2)' = f - f = 0$. ■

Произвольная первообразная функции f на промежутке X обозначается через $\int f(x)dx$. Если F — первообразная f , то пишут $\int f(x)dx = F(x) + C$. Первообразную $\int f(x)dx$ называют *неопределённым интегралом*.

Нетрудно заметить, что выполняется следующее:

$$\int dF = \int F'(x)dx = F(x) + C, \quad d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

Поэтому говорят, что дифференцирование и интегрирование — обратные операции. Известно, что дифференцирование — линейная операция, т. е.

$$d(\alpha F + \beta G) = \alpha \cdot dF + \beta \cdot dG.$$

Возьмём первообразную обеих частей, получим

$$\int (\alpha dF + \beta dG) = \int (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx.$$

Поэтому говорят, что интегрирование — линейная операция.

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЕРВООБРАЗНЫХ НЕПОСРЕДСТВЕННЫМ ИНТЕГРИРОВАНИЕМ,
 ИНТЕГРИРОВАНИЕМ ПО ЧАСТЯМ И ЗАМЕНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ПРИМЕРЫ

Указанные ниже равенства верны на соответствующих областях определения (промежутках):

$$\begin{array}{lll}
1. \int 0 dx = const. & 4. \int e^x dx = e^x + C & 6. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \\
2. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1 & 5. \int \cos x dx = \sin x + C & \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \\
3. \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C & \int \sin x dx = -\cos x + C & 7. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \\
& & \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C
\end{array}$$

8. Длинный логарифм:

$$\left(\ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| \right)' = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 \pm 1}}}{x + \sqrt{x^2 \pm 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + C$$

Высокий логарифм:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2 - 1} &= \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)} = \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} = \frac{1}{2} \ln |x-1| - \frac{1}{2} \ln |x+1| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C
\end{aligned}$$

По правилу Лейбница,

$$d(uv) = du \cdot v + u \cdot dv.$$

Найдём первообразную от обеих частей:

$$\int v du + \int u dv = uv + C \quad \text{или же} \quad \int u' v dx = uv - \int uv' dx.$$

Эта формула называется *формулой интегрирования по частям*.

По правилу дифференцированию сложной функции

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Найдём первообразную от обеих частей:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(x)dx \Big|_{x=\varphi(t)}.$$

Читать последнее равенство также можно как $\int f(\varphi(t)) \underbrace{\varphi'(t)dt}_{d\varphi} = \int f(\varphi)d\varphi$.

3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СУММЫ РИМАНА. ИНТЕГРАЛ РИМАНА. ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ПО РИМАНУ И ОГРАНИЧЕННОСТЬ

Определение 1. Пусть имеем отрезок $[a; b]$ и конечный набор точек

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_{m-1} < a_m = b,$$

тем самым разбив $[a; b]$ на попарно неперекрывающиеся отрезки $\Delta_i := [a_{i-1}; a_i]$, $1 \leq i \leq m$. Набор $T = \{\Delta_i\}_{i=1}^m$ этих отрезков — *разбиение* отрезка $[a; b]$.

Определение 2. Добавим к T произвольный набор $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^m$ точек $\xi_i \in \Delta_i$ (*меток разбиения* T). *Отмеченное разбиение* $T\xi$ отрезка $[a; b]$ — это множество пар $\{(\Delta_i, \xi_i)\}_{i=1}^m$.

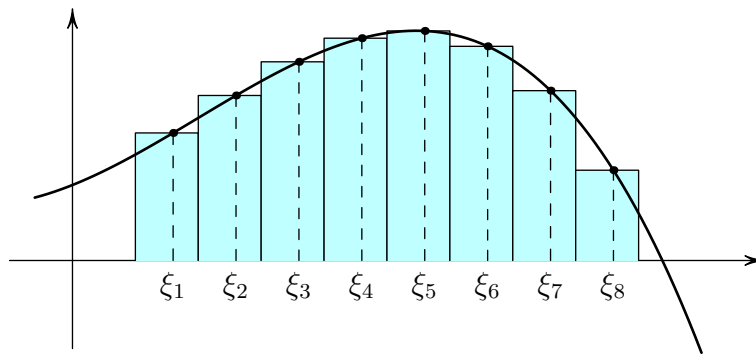
Определение 3. *Интегральная сумма (сумма Римана)* функции $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, соответствующая отмеченному разбиению $T\xi = \{(\Delta_i, \xi_i)\}_{i=1}^m$ отрезка $[a; b]$, есть сумма

$$\mathcal{S}(f, T\xi) := \sum_{i=1}^m f(\xi_i) |\Delta_i|.$$

Геометрический смысл сумм Римана. Рассмотрим определённую на $[a; b]$ неотрицательную функцию f и криволинейную трапецию

$$A = A_{f, [a; b]} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a; b] \wedge y \in [0; f(x)]\} \subset \mathbb{R}^2,$$

связанную с графиком функции f . Тогда интегральная сумма $\mathcal{S}(f, T\xi)$ совпадает с площадью объединения прямоугольников, построенных на отрезке разбиения T как на основаниях и имеющих высоту $f(\xi_i)$:



Определение 4. *Диаметр* разбиения $T = \{\Delta_i\}_{i=1}^m$ — число

$$d(T) := \max_{i=1, \dots, m} |\Delta_i|.$$

Определение 5. Если $d(T) < \delta$, то разбиение T назовём δ -разбиением.

Определение 6 (Интеграл Римана). Функция $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется *интегрируемой по Риману* на отрезке $[a; b]$ (пишем $f \in R[a; b]$), если существует число $I \in \mathbb{R}$ такое, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что для любого δ -разбиения $T\xi = \{(\Delta_i, \xi_i)\}_{i=1}^m$ отрезка $[a; b]$ выполнено неравенство

$$|\mathcal{S}(f, T\xi) - I| = \left| \sum_{i=1}^m f(\xi_i) |\Delta_i| - I \right| < \varepsilon.$$

Число I называют *интегралом Римана* функции f по отрезку $[a; b]$, обозначается $\int_a^b f(x) dx$.

Следующая задача даёт способ вычисления интеграла Римана:

Задача 1. (А) Пусть $f \in R[a; b]$, $\{T^n \xi^n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность отмеченных разбиений отрезка $[a; b]$, причём $d(T^n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Докажите, что

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}(f, T^n \xi^n).$$

(Б) Разобьём отрезок $[a; b]$ на n равных отрезков $\Delta_j^{(n)}$, $1 \leq j \leq n$ длины $(b-a)/n$, а затем в каждом из них произвольным образом выберем метку $\xi_j^{(n)}$. Покажите, что

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n f(\xi_j^{(n)}).$$

▷ (А) По определению предела последовательности $d(T^n)$,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \mathcal{N}_\varepsilon : (n > \mathcal{N}_\varepsilon) \Rightarrow (|d(T^n)| < \varepsilon) \quad (*)$$

По определению интеграла Римана

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (d(T) < \delta) \Rightarrow (|\mathcal{S}(f, T\xi) - I| < \varepsilon).$$

Перепишем последнее высказывание с учётом (*):

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon := \mathcal{N}_\varepsilon : (n > N_\varepsilon) \Rightarrow (|\mathcal{S}(f, T\xi) - I| < \varepsilon).$$

Значит, утверждение теоремы верно по определению предела последовательности.

(Б) По предыдущему пункту

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}(f, T^n \xi^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^n f(\xi_j^{(n)}) |\Delta_j^{(n)}| \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n f(\xi_j^{(n)}).$$

◀

Предложение 1. Если f интегрируема по Риману на отрезке $[a; b]$, то она ограничена на $[a; b]$.

Доказательство. Допустим, $f \in R[a; b]$, но $f \notin B[a; b]$. Возьмём любые $C > 0$ и разбиение $T = \{\Delta_i\}$. Тогда f не ограничена на Δ_i по крайней мере для одного i ($=: i_0$). При всех $i \neq i_0$ расставим метки $\xi_i \in \Delta_i$ произвольным образом, а метку $\xi_{i_0} \in \Delta_{i_0}$ выберем так, что

$$|\mathcal{S}(f, T\xi)| = \left| \sum_i f(\xi_i) |\Delta_i| \right| \geq |f(\xi_{i_0}) |\Delta_{i_0}| - \left| \sum_{i \neq i_0} f(\xi_i) |\Delta_i| \right| > C.$$

Это возможно благодаря неограниченности f на отрезке Δ_{i_0} . Итак, для всех разбиений T имеем $\sup_\xi |\mathcal{S}(f, T\xi)| = \infty$, поэтому ни для какого $\varepsilon > 0$ мы не сможем найти $\delta > 0$ такое, что неравенство

$$\left| \mathcal{S}(f, T\xi) - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon$$

выполнялось бы для всех ометченных δ -разбиений $T\xi$, что противоречит тому, что $f \in R[a; b]$. ■

4. СУММЫ ДАРБУ. ИНТЕГРАЛ ДАРБУ

До конца пункта считаем, что задана функция $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Определение 1. Пусть $T = \{\Delta_i\}_{i=1}^m$ — разбиение отрезка $[a; b]$,

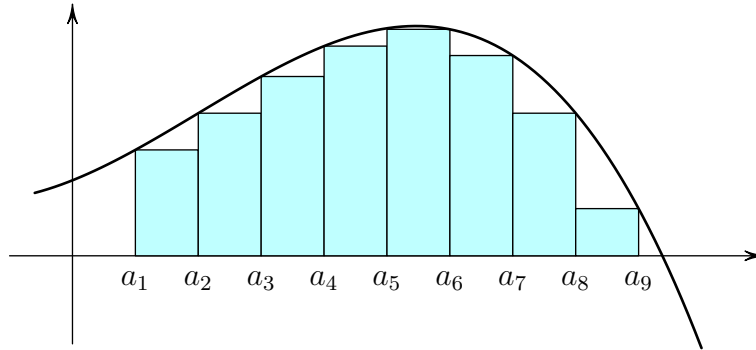
$$m_i := \inf_{x \in \Delta_i} f(x), \quad M_i := \sup_{x \in \Delta_i} f(x).$$

Величины

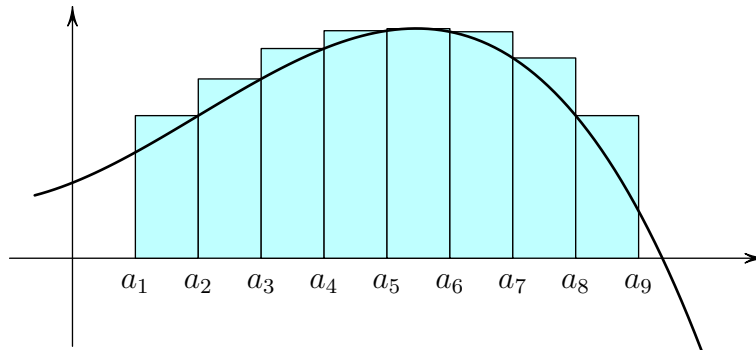
$$s(f, T) := \sum_{i=1}^m m_i |\Delta_i| \quad \text{и} \quad S(f, T) := \sum_{i=1}^m M_i |\Delta_i|$$

— *нижняя и верхняя сумма Дарбу* функции f для разбиения T (соответственно).

Геометрический смысл сумм Дарбу. Пусть функция $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ положительна (не обязательно непрерывна), $A = A_{f,[a;b]}$ — криволинейная трапеция под её графиком. Тогда нижняя сумма Дарбу $s(f, T)$ совпадает с точной верхней гранью площадей T -фигур, вписанных в A .



В свою очередь, верхняя сумма Дарбу $S(f, T)$ совпадает с точной нижней гранью площадей T -фигур, описанных над A .



Часто приходится рассматривать *разность Дарбу* $\omega(f, T) := S(f, T) - s(f, T)$. Геометрически величина $\omega(f, T)$ для непрерывной функции есть площадь «зазора» между наименьшей описанной над A и наибольшей вписанной в A фигурами.

Выразим разность Дарбу $\omega(f, T)$ через колебания функции f на отрезках разбиения $T = \{\Delta_i\}$:

$$\omega(f, T) = S(f, T) - s(f, T) = \sum_i \left(\sum_{\Delta_i} f - \inf_{\Delta_i} f \right) |\Delta_i| = \sum_i \omega(f, T) |\Delta_i|.$$

Установим связь между суммами Дарбу и Римана.

Лемма 1. Для любого разбиения T имеем

$$s(f, T) = \inf_{\xi} \mathcal{S}(f, T\xi), \quad S(f, T) = \sup_{\xi} \mathcal{S}(f, T\xi)$$

(точные грани берутся по всем наборам ξ меток разбиения T).

Доказательство. Пусть $T = \{\Delta_i\}_{i=1}^m$. Поскольку $m_i \leq f(\xi_i)$ для любых $\xi_i \in \Delta_i$, то

$$s(f, T) = \sum_i m_i |\Delta_i| \leq \mathcal{S}(f, T\xi)$$

для каждого набора $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^m$ меток разбиения T . С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\xi_i \in \Delta_i$, что $f(\xi_i)|\Delta_i| < m_i|\Delta_i| + \frac{\varepsilon}{m}$. Тогда соответствующая интегральная сумма

$$S(f, T\xi) = \sum_{i=1}^m f(\xi_i)|\Delta_i| < \sum_{i=1}^m \left(m_i|\Delta_i| + \frac{\varepsilon}{m}\right) = s(f, T) + \varepsilon.$$

Отсюда следует, что $s(f, T) = \sup_{\xi} S(f, T\xi)$. Вторая формула доказывается аналогично. \blacksquare

Определение 2. Пусть даны разбиения T_1 и T_2 . Тогда говорят, что T_1 *мельче* T_2 (и пишут $T_1 \leq T_2$), если для любого $\Delta \in T_1$ найдётся $\Theta \in T_2$ такой, что $\Delta \subseteq \Theta$. Иными словами, T_1 получено из T_2 добавлением ещё нескольких точек разбиения.

Введённое выше отношение транзитивно. В самом деле, пусть $T_1 \leq T_2$ и $T_2 \leq T_3$, пусть также T_1, T_2 и T_3 определяются наборами точек соответственно A_1, A_2 и A_3 . Тогда $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3$, откуда $A_1 \supseteq A_3$, т. е. $T_1 \leq T_3$.

Лемма 2. Если $T_1 \leq T_2$, то

$$s(f, T_1) \geq s(f, T_2), \quad S(f, T_1) \leq S(f, T_2), \quad \omega(f, T_1) \leq \omega(f, T_2).$$

Иными словами, при измельчении разбиения нижние суммы Дарбу не убывают, а верхние суммы Дарбу и разности Дарбу не возрастают.

Доказательство. Достаточно показать утверждение в случае, когда T_1 получается из $T_2 = \{\Delta_i\}_{i=1}^m$ путём разбиения одного из отрезков Δ_i ($=: \Delta_{i_0}$) на два неперекрывающихся отрезка ($=: \Delta'$ и $=: \Delta''$). Имеем:

$$\begin{aligned} S(f, T_2) &= \sum_{i=1}^m \sup_{\Delta_i} f \cdot |\Delta_i| = \sum_{i \neq i_0} \sup_{\Delta_i} f \cdot |\Delta_i| + \sup_{\Delta_{i_0}} f \cdot |\Delta_{i_0}| = \\ &= \sum_{i \neq i_0} \sup_{\Delta_i} f \cdot |\Delta_i| + \sup_{\Delta_{i_0}} f \cdot |\Delta'| + \sup_{\Delta_{i_0}} f \cdot |\Delta''| \geq \\ &\geq \sum_{i \neq i_0} \sup_{\Delta_i} f \cdot |\Delta_i| + \sup_{\Delta'} f \cdot |\Delta'| + \sup_{\Delta''} f \cdot |\Delta''| = S(f, T_1). \end{aligned}$$

Второе равенство доказывается аналогично, а третье есть прямое следствие первых двух. \blacksquare

Определение 3. Пусть даны разбиения $T_1 = \{\Delta_i\}$ и $T_2 = \{\Theta_j\}$. Разбиение

$$T_1 \cap T_2 := \{\Delta_i \cap \Theta_j \text{ с непустой внутренней частью}\}$$

называется *пересечением* разбиений T_1 и T_2 .

Очевидно, $T_1 \cap T_2 \leq T_1$ и $T_1 \cap T_2 \leq T_2$.

Лемма 3. Для любых разбиений T_1 и T_2 выполнено $s(f, T_1) \leq S(f, T_2)$.

Доказательство. Лемма 2 даёт $s(f, T_1) \leq s(f, T_1 \cap T_2) \leq S(f, T_1 \cap T_2) \leq S(f, T_2)$. \blacksquare

Определение 4 (Интеграл Дарбу). Величины

$$(D) \int_a^b f(x) dx := \sup_T s(f, T) \quad \text{и} \quad (D) \int_a^b f(x) dx := \inf_T S(f, T)$$

называются соответственно *нижним* и *верхним интегралами Дарбу* функции f (по отрезку $[a; b]$). Если нижний и верхний интегралы Дарбу совпадают, то их общее значение назовём *интегралом*

Дарбу функции f по отрезку $[a; b]$ и обозначим $(D) \int_a^b f(x) dx$.

Из леммы 3 видно, что $(D) \int_a^b f(x) dx \leq (D) \int_a^b f(x) dx$.

5. КОЛЕБАНИЯ ФУНКЦИИ НА МНОЖЕСТВЕ

Определение 1. Колебание функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ на множестве $A \subset X$ — величина

$$\omega(f, A) := \sup_{x_1, x_2 \in A} |f(x_1) - f(x_2)|.$$

Если f ограничена на A , то величина $\omega(f, A)$ конечна. В самом деле, ограниченность означает существование $C > 0$ такого, что $|f(x)| \leq C$ для любого $x \in A$. В этом случае

$$\forall x_1, x_2 \in A \quad |f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1)| + |f(x_2)| \leq 2C \Rightarrow \omega(f, A) \leq 2C.$$

Напротив, если f не ограничена на A , то $\omega(f, A) = +\infty$, т. к. можно, фиксировав x_2 , за счёт выбора x_1 сделать величину $|f(x_1) - f(x_2)|$ больше любого наперёд заданного C .

Предложение 1. Если f ограничена на множестве A , то

$$\omega(f, A) = \sup_{x \in A} f(x) - \inf_{x \in A} f(x). \quad (*)$$

Доказательство. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Согласно определению \sup и \inf найдутся такие $x_1, x_2 \in A$, что

$$\sup_{x \in A} f(x) - \varepsilon < f(x_1), \quad f(x_2) < \inf_{x \in A} f(x) + \varepsilon.$$

Из определения колебания функции на множестве вытекает существование $x_3, x_4 \in A$, для которых $\omega(f, A) - \varepsilon < |f(x_3) - f(x_4)|$. Не ограничивая общности, считаем $f(x_3) \geq f(x_4)$, так что

$$\omega(f, A) - \varepsilon < f(x_3) - f(x_4).$$

Получаем:

$$\omega(f, A) - \varepsilon < f(x_3) - f(x_4) \leq \sup_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x) < f(x_1) - f(x_2) + 2\varepsilon \leq \omega(f, A) + 2\varepsilon,$$

откуда $\omega(f, A) - \varepsilon < \sup_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x) < \omega(f, A) + 2\varepsilon$. Т. к. $\varepsilon > 0$ выбиралось произвольно, то имеет место (*). ■

Предложение 2 (Свойства колебания). Пусть $|f(x)| \leq M$ и $|g(x)| \leq M$ для некоторого $M > 0$ и всех $x \in [a; b]$, а $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда

1. $\omega(|f|, A) \leq \omega(f, A)$;
2. $\omega(fg, A) \leq M(\omega(f, A) + \omega(g, A))$;
3. $\omega(\alpha f, A) = |\alpha| \omega(f, A)$;
4. $\omega(f + g, A) \leq \omega(f, A) + \omega(g, A)$;
5. $\omega(\alpha f + \beta g, A) \leq |\alpha| \omega(f, A) + |\beta| \omega(g, A)$.

Доказательство. Найду силы — напишу. ■

6. ТЕОРЕМА ДАРБУ. КРИТЕРИЙ ДАРБУ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ПО РИМАНУ

Теорема 1 (Дарбу). Пусть функция $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. Существует $(R) \int_a^b f(x)dx = I$.
2. Существует $(D) \int_a^b f(x)dx = I$.
3. Для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся разбиение \tilde{T} отрезка $[a; b]$ такое, что $\omega(f, \tilde{T}) < \varepsilon$.

Доказательство. (1) \Rightarrow (2). Допустим, существует $(R) \int_a^b f(x)dx = I$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что соотношение

$$I - \varepsilon < \mathcal{S}(f, T\xi) < I + \varepsilon$$

выполнено для каждого δ -разбиения и набора ξ меток к нему. Тогда

$$I - \varepsilon \leq \inf_{\xi} \mathcal{S}(f, T\xi) = s(f, T) \leq S(f, T) = \sup_{\xi} \mathcal{S}(f, T\xi) \leq I + \varepsilon,$$

$$I - \varepsilon \leq s(f, T) \leq S(f, T) \leq I + \varepsilon; \quad I - \varepsilon \leq (D) \int_a^b f(x)dx \leq (D) \int_a^b f(x)dx \leq I + \varepsilon.$$

Т.к. $\varepsilon > 0$ выбиралось произвольно, то $I = (D) \int_a^b f(x)dx = (D) \int_a^b f(x)dx = (D) \int_a^b f(x)dx$.

(2) \Rightarrow (3). Допустим, то существует $(D) \int_a^b f(x)dx = I$, т.е. $(D) \int_a^b f(x)dx = (D) \int_a^b f(x)dx$. Тогда

для любого $\varepsilon > 0$ найдутся разбиения T_1 и T_2 такие, что

$$S(f, T_2) - \frac{\varepsilon}{2} < I < s(f, T_1) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если $\tilde{T} := T_1 \cap T_2$, то $\tilde{T} \leq T_1, T_2$ и (по лемме 2)

$$\omega(f, \tilde{T}) = S(f, \tilde{T}) - s(f, \tilde{T}) \leq S(f, T_2) - s(f, T_1) < \varepsilon.$$

(3) \Rightarrow (1). Т.к. функция $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена, найдётся $M > 0$ такое, что $|f(x)| \leq M$ для всех $x \in [a; b]$. Выберем любое $\varepsilon > 0$ и найдём разбиение $\tilde{T} = \{[a_{i-1}, a_i]\}_{i=1}^m$ отрезка $[a; b]$ такое, что $\omega(f, \tilde{T}) < \varepsilon$. Положим $\delta := \varepsilon/m$ и рассмотрим все концы, исключая крайние, отрезков из \tilde{T} , т.е. точки a_1, \dots, a_{m-1} . Окружим каждую из них δ -окрестностью и 2δ -окрестностью и возьмём объединения

$$A := \bigcup_{i=1}^{m-1} (a_i - \delta, a_i + \delta), \quad B := \bigcup_{i=1}^{m-1} (a_i - 2\delta, a_i + 2\delta),$$

Пусть $T\xi = \{(\Delta_j, \xi_j)\}$ — произвольное отмеченное δ -разбиение отрезка $[a; b]$. Если $\xi_j \in A$, то $\Delta_j \subset B$. Если же $\xi_j \in [a; b] \setminus A$, то $\Delta_j \subset [a_{i-1}, a_i]$ для некоторого i . Имеем:

$$\begin{aligned} \omega(f, T) &= \sum_j \omega(f, \Delta_j) |\Delta_j| = \sum_{\xi_j \in A} \omega(f, \Delta_j) |\Delta_j| + \sum_{\xi_j \notin A} \omega(f, \Delta_j) |\Delta_j| \leq \\ &\leq 2M \cdot 4\delta m + \sum_{i=1}^m \sum_{\Delta_j \subset [a_{i-1}, a_i]} \omega(f, \Delta_j) |\Delta_j| = 8M\varepsilon + \sum_{i=1}^m \omega(f, [a_{i-1}, a_i]) \sum_{\Delta_j \subset [a_{i-1}, a_i]} |\Delta_j| \leq \\ &\leq 8M\varepsilon + \sum_{i=1}^m \omega(f, [a_{i-1}, a_i]) (a_i - a_{i-1}) \leq 8M\varepsilon + \omega(f, \tilde{T}) < \varepsilon C, \quad C := 8M + 1. \end{aligned}$$

Таким образом, $\omega(f, T) < \varepsilon C$. Положим $I := (D) \int_a^b f(x) dx$ (можно взять и верхний). Имеем:

$$s(f, T) \leq \mathcal{S}(f, T\xi) \leq S(f, T), \quad s(f, T) \leq I \leq (D) \int_a^b f(x) dx \leq S(f, T).$$

Отсюда $|\mathcal{S}(f, T\xi) - I| < S(f, T) - s(f, T) = \omega(f, T) < \varepsilon C$. Т.к. $\varepsilon > 0$ и отмеченное δ -разбиение $T\xi$ произвольные, а $C > 0$ от них не зависит, то $f \in R[a; b]$ и $(R) \int_a^b f(x) dx = I$. ■

Следствие 1 (Критерий Дарбу интегрируемости по Риману). Если функция $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена, то $\exists(R) \int_a^b f(x) dx = I \Leftrightarrow \exists(D) \int_a^b f(x) dx = I$.

Утверждение 1. Функция Дирихле

$$\text{Dir}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{если } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

не интегрируема по Риману ни на каком отрезке $[a; b]$.

Доказательство. В самом деле, возьмём произвольное разбиение $T = \{\Delta_i\}$ отрезка $[a; b]$. В каждом отрезке Δ_i есть точки как из \mathbb{Q} , так и не из \mathbb{Q} . Следовательно,

$$s(\text{Dir}, T) = \sum_i \inf_{\Delta_i} \text{Dir} \cdot |\Delta_i| = 0, \quad S(\text{Dir}, T) = \sum_i \sup_{\Delta_i} \text{Dir} \cdot |\Delta_i| = \sum_i 1 \cdot \Delta_i = b - a.$$

Значит, $(D) \int_a^b \text{Dir} = 0$ и $(D) \int_a^b \text{Dir} = b - a$. Несовпадение интегралов даёт $f \notin R[a; b]$. ■

Задача 2. Докажите, что функция Римана

$$\text{Riem}(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } x = \frac{m}{n}, \frac{m}{n} \text{ — несократимая дробь,} \\ 0, & \text{если } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

интегрируема по Риману на каждом отрезке $[a; b]$ и вычислите $(R) \int_a^b \text{Riem}(x) dx$.

▷ Пока не решил, но знаю правильный ответ — интеграл функции Римана равен 0 на любом отрезке. ◀

7. ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ПО РИМАНУ НЕПРЕРЫВНЫХ И МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ИНТЕГРАЛОВ ДАРБУ И РИМАНА

Утверждение 1. Если функция $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ имеет конечное число точек разрыва и ограничена, она интегрируема по Риману на этом отрезке.

Доказательство. Возьмём $\varepsilon > 0$ и такое $C > 0$, что $|f(x)| \leq C$ для всех $x \in [a; b]$ (существует из ограниченности f). Пользуясь тем, что функция f имеет конечное число точек разрыва, построим разбиение $T = T^1 \sqcup T^2$ отрезка $[a; b]$ так, что сумма длин отрезков $\Delta_i \in T^1$ меньше $\frac{\varepsilon}{4C}$, а на всех

отрезках $\Delta_i \in T^2$ функция f непрерывна. Последнее означает, что f равномерно непрерывна на Δ_i , поэтому найдётся $\delta > 0$ такое, что $(|x - z| < \delta) \wedge (x, z \in \Delta_i) \Rightarrow |f(x) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Т. к. набор T^2 конечен, $\delta > 0$ можно выбрать общим для всех $\Delta_i \in T^2$ (взяв $\delta := \min_i \delta_i$). Имеем:

$$\begin{aligned} S(f, T) - s(f, T) &= S(f, T^1) - s(f, T^1) + S(f, T^2) - s(f, T^2) = \sum_{\Delta_i \in T^1} \left(\sup_{\Delta_i} f - \inf_{\Delta_i} f \right) |\Delta_i| + \\ &+ \sum_{\Delta_i \in T^2} \left(\sup_{\Delta_i} f - \inf_{\Delta_i} f \right) |\Delta_i| < 2C \sum_{\Delta_i \in T^1} |\Delta_i| + \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{\Delta_i \in T^2} |\Delta_i| < \varepsilon. \end{aligned}$$

■

Следствие 1. Если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$ функция f интегрируема по Риману на этом отрезке.

Утверждение 2. Любая монотонная функция на отрезке $[a; b]$ функция f интегрируема по Риману на этом $[a; b]$.

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что f не постоянна и не убывает на $[a; b]$. Очевидно, что f ограничена на $[a; b]$. Далее, возьмём любое $\varepsilon > 0$, положим $\delta := \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$ и рассмотрим произвольное δ -разбиение $T = \{\Delta_i = [a_{i-1}; a_i]\}_{i=1}^m$ отрезка $[a; b]$. Пользуясь неубыванием f , оценим величину $\omega(f, T)$:

$$\begin{aligned} \omega(f, T) &= \sum_{i=1}^m \left(\sup_{\Delta_i} f - \inf_{\Delta_i} f \right) |\Delta_i| \stackrel{f \text{ не убывает}}{=} \sum_{i=1}^m (f(a_i) - f(a_{i-1})) |\Delta_i| < \\ &< \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=1}^m (f(a_i) - f(a_{i-1})) = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} (f(b) - f(a)) = \varepsilon. \end{aligned}$$

■

Геометрический смысл интегралов Дарбу и Римана. Пусть функция $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ положительна, A — криволинейная трапеция под её графиком. Тогда нижний интеграл Дарбу совпадает с точной верхней гранью T -фигур, вписанных в A , а верхний интеграл Дарбу — с точной нижней гранью T -фигур, описанных над A . Пусть функция $f \in R[a; b]$ положительна, $A = A(f, [a; b])$ — криволинейная трапеция под её графиком, $S(A)$ — площадь этой трапеции. Тогда

$$s(f, T) \leq S(A) \leq S(f, T)$$

для любого разбиения T , следовательно,

$$(D) \int_a^b f \leq S(A) \leq (D) \int_a^b f.$$

Т. к. (критерий Дарбу) верхний и нижний интегралы равны, то $S(A) = \int_a^b f(x) dx$.

8. СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛА РИМАНА (ЕДИНСТВЕННОСТЬ, ЛИНЕЙНОСТЬ, ИНТЕГРАЛ ОТ ПОСТОЯННОЙ ФУНКЦИИ, ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕРАВЕНСТВ, ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ МОДУЛЯ ФУНКЦИИ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ)

Теорема 1 (Единственность интеграла). Если $(R) \int_a^b f(x) dx$ существует, то он единственен.

Доказательство. Если $(R) \int_a^b f(x)dx$ существует, он совпадает с интегралом Дарбу $(D) \int_a^b f(x)dx$, а последний определяется однозначно. ■

Теорема 2 (О линейности интеграла). Если $f, g \in R[a; b]$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то $\alpha f + \beta g \in R[a; b]$ и

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Для каждого разбиения $T\xi = \{(\Delta_i, \xi_i)\}$ отрезка $[a; b]$ имеем:

$$\mathcal{S}(\alpha f + \beta g, T\xi) = \sum_i (\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i)) |\Delta_i| = \alpha \sum_i f(\xi_i) |\Delta_i| + \beta \sum_i g(\xi_i) |\Delta_i| = \alpha \mathcal{S}(f, T\xi) + \beta \mathcal{S}(g, T\xi).$$

Пусть $\varepsilon > 0$, $I_f := \int_a^b f$, $I_g := \int_a^b g$. По определению, существует $\delta > 0$ такое, что

$$|\mathcal{S}(f, T\xi) - I_f| < \varepsilon \text{ и } |\mathcal{S}(g, T\xi) - I_g| < \varepsilon$$

для всех отмеченных δ -разбиений $T\xi$ отрезка $[a; b]$. Для тех же $T\xi$

$$\begin{aligned} |\mathcal{S}(\alpha f + \beta g, T\xi) - (\alpha I_f + \beta I_g)| &= |\alpha \mathcal{S}(f, T\xi) + \beta \mathcal{S}(g, T\xi) - (\alpha I_f + \beta I_g)| \leq \\ &\leq |\alpha| |\mathcal{S}(f, T\xi) - I_f| + |\beta| |\mathcal{S}(g, T\xi) - I_g| < (|\alpha| + |\beta|) \varepsilon. \end{aligned}$$

Это и значит, что утверждение теоремы верно. ■

Утверждение 1 (Интеграл константы). $\int_a^b C dx = C(b - a)$.

Доказательство. Если $F(x) \equiv C$ на $[a; b]$, то $\mathcal{S}(f, T\xi) = \sum_{T\xi} C |\Delta_i| = C(b - a)$ для каждого отмеченного разбиения $T\xi = \{(\Delta_i, \xi_i)\}$. ■

Теорема 3 (Об интегрировании неравенств). Если $f, g \in R[a; b]$ и $f(x) \leq g(x)$ для всех $x \in [a; b]$, то $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Доказательство. Если $f \leq g$ на $[a; b]$, на каждом отмеченном разбиении $T\xi = \{(\Delta_i, \xi_i)\}$ выполнено

$$\mathcal{S}(f, T\xi) = \sum_{T\xi} f(\xi_i) |\Delta_i| \leq \sum_{T\xi} g(\xi_i) |\Delta_i| = \mathcal{S}(g, T\xi).$$

Отсюда $s(f, T) \leq s(g, T)$, что влечёт $(D) \int_a^b f \leq (D) \int_a^b g$. По теореме Дарбу нижние интегралы Дарбу можно заменить на интегралы Римана. Это даёт нужное равенство. ■

Теорема 4 (Об интегрируемости модуля функции). Если $f \in R[a; b]$, то $|f| \in R[a; b]$ и

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Доказательство. Если $f \in R[a; b]$, то f ограничена на $[a; b]$, $|f|$ тоже. По теореме Дарбу для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое разбиение $T = \{\Delta_i\}$ такое, что $\omega(f, T) < \varepsilon$. Тогда

$$\omega(|f|, T) = \sum_i \omega(|f|, \Delta_i) |\Delta_i| \leq \sum_i \omega(f, \Delta_i) |\Delta_i| = \omega(f, T) < \varepsilon.$$

Неравенство выполнено в силу свойств колебаний функции. Применяя в обратную сторону теорему Дарбу, получаем $|f| \in R[a; b]$. Линейность даёт $-|f| \in R[a; b]$. Интегрируя неравенство $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, получим

$$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|,$$

что и есть утверждение теоремы. ■

Теорема 5 (Об интегрируемости произведения). Пусть $f, g \in R[a; b]$, тогда $fg \in R[a; b]$.

Доказательство. Интегрируемость влечёт ограниченность: $|f(x)| \leq M$ и $|g(x)| \leq M$ для некоторого $M > 0$ и всех $x \in [a; b]$. Из интегрируемости также вытекает (теорема Дарбу), что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся разбиения T_1 и T_2 отрезка $[a; b]$ такие, что $\omega(f, T_1) < \varepsilon$ и $\omega(g, T_2) < \varepsilon$. Разбиение $T = \{\Delta_i\} := T_1 \cap T_2$ мельче T_1 и T_2 , отсюда

$$\begin{aligned} \omega(fg, T) &= \sum_i \omega(fg, \Delta_i) |\Delta_i| \leq M \sum_i (\omega(f, \Delta_i) + \omega(g, \Delta_i)) |\Delta_i| = M (\omega(f, T) + \omega(g, T)) < 2M\varepsilon. \\ \omega(f, T) &\leq \omega(f, T_1) < \varepsilon, \quad \omega(g, T) \leq \omega(g, T_2) < \varepsilon; \end{aligned}$$

Применяя в обратную сторону теорему Дарбу, получаем $fg \in R[a; b]$. ■

9. СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛА РИМАНА (ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ КОМПОЗИЦИИ ФУНКЦИЙ, ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ НА ПОДОТРЕЗКАХ И АДДИТИВНОСТЬ ИНТЕГРАЛА РИМАНА)

Теорема 1 (Достаточное условие интегрируемости композиции). Пусть $f \in R[a; b]$, а функция φ ограничена и непрерывна на $f([a; b])$. Тогда $\varphi \circ f \in R[a; b]$.

Доказательство. Здесь применим (пока не доказанный) критерий Лебега. Согласно ему, f ограничена, а множество её точек разрыва имеет меру нуль по Лебегу.

Из ограниченности f и φ следует ограниченность $\varphi \circ f$. Из непрерывности φ на $f([a; b])$ следует, что в тех точках, где f непрерывна, $\varphi \circ f$ тоже (теорема о непрерывности композиции функций). Следовательно, множество точек разрыва $\varphi \circ f$ тоже имеет меру нуль по Лебегу. Снова применяя критерий Лебега, получаем $\varphi \circ f \in R[a; b]$. ■

Пример 1. Возьмём функции

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad f(x) = \text{Riem}(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } x = \frac{m}{n}, \frac{m}{n} \text{ — несократимая дробь,} \\ 0, & \text{если } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Функция f интегрируема по Риману на любом отрезке $[a; b]$, а $\varphi(x)$ ограничена на \mathbb{R} и разрывна только при $x = 0$. Композиция $\varphi \circ f$ есть функция Дирихле, которая не интегрируема по Риману ни на каком отрезке $[a; b]$. Таким образом, последняя теорема может не выполняться, если функция φ разрывна хотя бы в одной точке.

Теорема 2 (Об интегрируемости на подотрезках). Если $f \in R[a; b]$ и $[c; d] \subset [a; b]$, то $f \in R[c; d]$.

Доказательство. Из интегрируемости f вытекает (теорема Дарбу) существование разбиения T такого, что $\omega(f, T) < \varepsilon$. Добавим к набору точек, порождающих T , точки c и d . Получим более

мелкое разбиение \tilde{T} отрезка $[a; b]$ (для него $\omega(f, \tilde{T}) < \omega(f, T) < \varepsilon$), содержащее в себе разбиение \tilde{T}^0 отрезка $[c; d]$. Получаем

$$\varepsilon > \omega(f, \tilde{T}) = \sum_{\Delta \in \tilde{T}^0} \left(\sup_{\Delta} f - \inf_{\Delta} f \right) |\Delta| + \sum_{\Delta \notin \tilde{T}^0} \left(\sup_{\Delta} f - \inf_{\Delta} f \right) |\Delta| \geq \sum_{\Delta \in \tilde{T}^0} \left(\sup_{\Delta} f - \inf_{\Delta} f \right) |\Delta| = \omega(f, \tilde{T}^0).$$

Согласно теореме Дарбу, $f \in R[c; d]$. ■

Теорема 3 (Об аддитивности интеграла Римана). Допустим, $a < c < b$ и $f \in R[a; c] \cap R[c; b]$. Тогда $f \in R[a; b]$ и

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Для доказательства этой теоремы нам понадобится лемма:

Лемма 1. Если f ограничена на отрезке $[a; b]$ и $a < c < b$, то

$$(D) \int_a^b f = (D) \int_a^c f + (D) \int_c^b f, \quad (*)$$

и аналогичное равенство справедливо для верхний интегралов Дарбу.

Доказательство. Возьмём любое $\varepsilon > 0$. Определение нижнего интеграла Дарбу даёт существование разбиений T^1 отрезка $[a; c]$ и T^2 отрезка $[c; b]$ таких, что

$$s(f, T^1) > (D) \int_a^c f - \varepsilon, \quad s(f, T^2) > (D) \int_c^b f - \varepsilon.$$

Для разбиений $T = T^1 \sqcup T^2$ отрезка $[a; b]$ имеем:

$$\begin{aligned} (D) \int_a^b f &\geq s(f, T) = \sum_{\Delta_i \in T} \inf_{\Delta_i} f \cdot |\Delta_i| = \sum_{\Delta_i \in T^1} \inf_{\Delta_i} f \cdot |\Delta_i| + \sum_{\Delta_i \in T^2} \inf_{\Delta_i} f \cdot |\Delta_i| = \\ &= s(f, T^1) + s(f, T^2) > (D) \int_a^c f + (D) \int_c^b f - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Т. к. $\varepsilon > 0$ произвольно, левая часть (*) не меньше правой.

Снова зададимся произвольным $\varepsilon > 0$ и найдём разбиение T отрезка $[a; b]$ такое, что

$$s(f, T) > (D) \int_a^b f - \varepsilon.$$

Если в набор точек, порождающих T , не входила точка c , добавим её и получим новое, более мелкое разбиение (оставим ему старое название T), для которого тем более верно последнее неравенство (при измельчении разбиения нижние суммы Дарбу могут только возрасти). Разбиение T есть $T^1 \sqcup T^2$, где T^1 — разбиение отрезка $[a; c]$, а T^2 — разбиение отрезка $[c; b]$. Имеем:

$$(D) \int_a^b f < s(f, T) + \varepsilon = s(f, T^1) + s(f, T^2) + \varepsilon \leq (D) \int_a^c f + (D) \int_c^b f + \varepsilon.$$

Т. к. $\varepsilon > 0$ произвольно, левая часть (*) не больше правой.

Таким образом, имеет место равенство (*), а его аналог для верхних интегралов Дарбу доказывается аналогично. ■

А теперь докажем теорему об аддитивности интеграла:

Доказательство. Из интегрируемости вытекает ограниченность f и на $[a; c]$, и на $[c; b]$, значит, и на $[a; b]$ тоже. Далее,

$$(D) \int_a^b f = (D) \int_a^c f + (D) \int_c^b f \stackrel{\text{критерий Дарбу}}{=} (D) \overline{\int}_a^c f + (D) \overline{\int}_c^b f = (D) \int_a^b f.$$

Согласно критерию Дарбу, $f \in R[a; b]$ и каждый верхний или нижний интеграл Дарбу в последнем выражении можно заменить на интеграл Римана. ■

Примечание. До сих пор предполагалось, что верхний предел интегрирования больше нижнего. Ситуацию можно расширить, положив по определению

$$\int_b^a f(x) dx := - \int_a^b f(x) dx.$$

Можно показать, что последняя теорема верна для всех a , b и c с учётом дополненного нами определения.

10. СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛА РИМАНА (ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ИЗМЕНЁННОЙ ФУНКЦИИ, ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТИ ИНТЕГРАЛА, ИНТЕГРАЛ ПО СИММЕТРИЧНОМУ ОТРЕЗКУ ОТ ЧЁТНЫХ И НЕЧЁТНЫХ ФУНКЦИЙ, ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ)

Теорема 1 (Об интегрируемости изменённой функции). Если функцию $f \in R[a; b]$ изменить на конечном множестве, то изменённая функция $\tilde{f} \in R[a; b]$ и $\int_a^b f = \int_a^b \tilde{f}$.

Нам понадобится лемма:

Лемма 1. Допустим, $E \subset [a; b]$ — конечное множество, и функция g равна нулю вне E . Тогда $g \in R[a; b]$ и $\int_a^b g(x) dx = 0$.

Доказательство. Пусть $E = \{a_1, \dots, a_n\}$, $C := \max\{f(a_1), \dots, f(a_n)\}$. Выберем любое $\varepsilon > 0$, положим $\delta := \varepsilon/(Cn)$ и возьмём произвольное δ -разбиение $T\xi = \{(\Delta_i, \xi_i)\}$ отрезка $[a; b]$. Тогда

$$|\mathcal{S}(f, T\xi)| < \left| \sum_{\xi_i \in E} g(\xi_i) |\Delta_i| \right| + \left| \sum_{\xi_i \notin E} g(\xi_i) |\Delta_i| \right| \leq Cn\delta + 0 = \varepsilon.$$

Согласно определению интеграла Римана, $g \in R[a; b]$ и $\int_a^b g = 0$. ■

Доказательство. Разность $\tilde{f} - f =: g$ равна нулю вне конечного множества $E \subset [a; b]$. Тогда $g \in R[a; b]$ и $\int_a^b g = 0$. Значит, $\tilde{f} = f + g \in R[a; b]$ и $\int_a^b \tilde{f} = \int_a^b f + \int_a^b g = \int_a^b f$. ■

Теорема 2 (Достаточное условие положительности интеграла). Допустим, функция f интегрируема по Риману и неотрицательна на отрезке $[a; b]$, а также непрерывна в точке $x_0 \in [a; b]$, в которой $f(x_0) > 0$. Тогда $\int_a^b f(x)dx > 0$.

Доказательство. Т.к. $f \in C(x_0)$ и $f(x_0) > 0$, найдётся отрезок $I \subset [a; b]$ такой, что $f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2} > 0$ на I . Положим

$$g(x) := \begin{cases} \frac{f(x_0)}{2}, & x \in I, \\ 0, & x \in [a; b] \setminus I. \end{cases}$$

Тогда $f \geq g$ на $[a; b]$, отрезок $[a; b]$ есть объединение двух или трёх неперекрывающихся отрезков, один из которых есть I ,

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g = \int_I g = \frac{f(x_0)}{2} |I| > 0.$$

■

Теорема 3 (Об интеграле по симметричному отрезку от чётных и нечётных функций). Пусть $f \in R[-a; a]$. Если функция f чётна, то

$$\int_{-a}^a f = \int_0^a f, \quad \int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f,$$

а если нечётна, то

$$\int_{-a}^0 f = - \int_0^a f, \quad \int_{-a}^a f = 0.$$

Доказательство. Каждому отмеченному разбиению $T\xi = \{(\Delta_i, \xi_i)\}_i$ отрезка $[0; a]$ однозначно соответствует «симметричное» отмеченное разбиение \tilde{T} (того же диаметра), отрезки и метки в котором симметричны Δ_i и ξ_i относительно нуля. Для чётной функции f

$$\mathcal{S}(f, T\xi) = \sum_{i=1}^m f(\xi_i) |\Delta_i| = \sum_{i=1}^m f(-\xi_i) |\Delta_i| = \mathcal{S}(f, \tilde{T}\tilde{\xi}),$$

и определение интеграла Римана даёт $\int_0^a f = \int_{-a}^0 f$. Далее,

$$\int_{-a}^a f = \int_{-a}^0 f + \int_0^a f = 2 \int_0^a f.$$

Если f нечётна, то

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(f, T\xi) &= \sum_{i=1}^m f(\xi_i) |\Delta_i| = \sum_{i=1}^m -f(-\xi_i) |\Delta_i| = -\mathcal{S}(f, \tilde{T}\tilde{\xi}), \\ \int_{-a}^0 f &= - \int_0^a f, \quad \int_{-a}^a f = \int_{-a}^0 f + \int_0^a f = - \int_0^a f + \int_0^a f = 0. \end{aligned}$$

■

Теорема 4 (Об интегрируемости кусочно-непрерывных функций). Если функция f кусочно-непрерывна на отрезке $[a; b]$, то $f \in R[a; b]$.

Доказательство. См. утверждение 1 в вопросе 7. ■

11. ИНТЕГРАЛ РИМАНА С ПЕРЕМЕННЫМ ВЕРХНИМ ПРЕДЕЛОМ, ЕГО НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ. ТЕОРЕМЫ О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРВООБРАЗНОЙ/ОБОБЩЁННОЙ ПЕРВООБРАЗНОЙ НА ОТРЕЗКЕ. ФОРМУЛА НЬЮТОНА — ЛЕЙБНИЦА

Определение 1. Если задана функция $f \in R[a; b]$, то функцию $F : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt, \quad F(a) := 0,$$

называют *интегралом (Римана) с переменным верхним пределом*.

Теорема 1. $F \in C[a; b]$.

Доказательство. Т. к. $f \in R[a; b]$, $f \in B[a; b]$, то $|f(x)| \leq C$ для некоторого $C > 0$ и всех $x \in [a; b]$. Имеем:

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt; \\ |F(x+h) - F(x)| &= \left| \int_x^{x+h} f(t)dt \right| \leq \left| \int_x^{x+h} |f(t)| dt \right| \leq C|h|. \end{aligned}$$

При $h \rightarrow 0$ имеем $C|h| \rightarrow 0$, поэтому и $|F(x+h) - F(x)| \rightarrow 0$, т. е. $F \in C(x)$. Точка $x \in [a; b]$ могла быть любой, следовательно, $F \in C[a; b]$. ■

Теорема 2. Если $f \in C(x)$, то $F \in D(x)$ и $F'(x) = f(x)$.

Доказательство. Воспользуемся тем, что $f \in C(x)$ и для каждого $\varepsilon > 0$ найдём $\delta > 0$ такое, что

$$|t - x| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon.$$

При $0 < h < \delta$ имеем:

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| &= \frac{1}{h} |F(x+h) - F(x) - f(x)h| = \frac{1}{h} \left| \int_x^{x+h} f(t)dt - f(x)h \right| = \\ &= \frac{1}{h} \left| \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt \right| \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt \leq \frac{1}{h} \cdot \varepsilon h = \varepsilon. \end{aligned}$$

При $-\delta < h < 0$ оценка тоже верна. Т. к. $\varepsilon > 0$ выбиралось произвольным,

$$\exists F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

Теорема 3 (О существовании первообразной/обобщённой первообразной на отрезке). Если $f \in C[a; b]$ (или f ограничена и имеет конечное число точек разрыва либо кусочно-непрерывна на $[a; b]$),

то всякая функция вида $F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$ является (обобщённой) первообразной для функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и верна *формула Ньютона — Лейбница*:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Доказательство. Если $f \in C[a; b]$, то $f \in R[a; b]$ и $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in [a; b]$ (по предыдущей теореме), т. е. F — первообразная для f на $[a; b]$. Из определения функции F следует

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt + C - C = \int_a^b f(t)dt.$$

Если f ограничена и имеет конечное число точек разрыва, то $f \in R[a; b]$ (см. утверждение 1 в вопросе 7). Далее, пусть a_1, \dots, a_n — точки разрыва функции f . Из предыдущих теорем в этом вопросе вытекает, что $F \in C[a; b]$ и $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in [a; b] \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$, т. е. F — обобщённая первообразная для f на $[a; b]$. Доказательство формулы Ньютона — Лейбница такое же. ■

Примечание. Случай кусочно-непрерывной функции включается в уже доказанный во втором абзаце.

Теорема 4. Если $f \in C[a; b]$ (или ограничена и имеет конечное число точек разрыва), а F — (обобщённая) первообразная для f на $[a; b]$, то верна формула Ньютона — Лейбница.

Доказательство. Докажем первое утверждение, а второе доказывается по той же схеме. По предыдущей теореме все функции вида $\int_a^x f(t)dt + C$ есть первообразные для $f(x)$ на $[a; b]$ и других

первообразных нет (по теореме о множестве всех первообразных). Поэтому $F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$ при некотором C . Остаётся применить предыдущую теорему. ■

12. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ В ИНТЕГРАЛЕ РИМАНА. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА С ОСТАТОЧНЫМ ЧЛЕНОМ В ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Теорема 1 (О замене переменной в интеграле Римана). Пусть заданы функции $f \in C[a; b]$ и $\varphi : [\alpha; \beta] \rightarrow [a; b]$, причём $\varphi \in C^1[\alpha; \beta]$, $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)dt.$$

Доказательство. По условию теоремы все функции f , φ и φ' непрерывны, поэтому подынтегральная функция в интеграле справа непрерывна.

Пусть F — первообразная для непрерывной функции f на отрезке $[a; b]$. Имеем

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Далее, $F'(x) = f(x) \forall x \in [a; b]$. Поэтому (теорема о производной композиции функций)

$$(F \circ \varphi)'(t) = (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t) \quad \forall t \in [\alpha; \beta],$$

т. е. $F \circ \varphi$ — первообразная для непрерывной функции $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ на отрезке $[\alpha; \beta]$. Отсюда

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)dt = (F \circ \varphi)(\beta) - (F \circ \varphi)(\alpha) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

■

Теорема 2 (Об интегрировании по частям в интеграле Римана). Если $u, v \in C^1[a; b]$, то

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx, \quad \int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Доказательство. Второе из равенств в условии — лишь другая форма записи первого равенства, поэтому будем доказывать лишь первое равенство. Т. к. $u, v \in C^1[a; b]$, то $uv \in C^1[a; b]$. Значит, $(uv)'$ непрерывна, и uv служит для неё первообразной на отрезке $[a; b]$. Тогда

$$\int_a^b (u(x)v(x))' dx = u(x)v(x)\Big|_a^b.$$

Отсюда, применяя правило Лейбница, и получаем требуемое. ■

Теорема 3. Пусть $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f \in C^{n+1}(a; b)$ и $x_0 \in (a; b)$. Тогда для всех $x \in (a; b)$ имеет место формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

Доказательство. Докажем индукцией по n . Если $n = 0$, то $f \in C^1(a; b)$, а $f' \in C(a; b)$. Значит, f — первообразная для функции f' на интервале $(a; b) \supset [x_0; x]$, и верна формула Ньютона — Лейбница:

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t) dt.$$

После переноса $f(x_0)$ в правую часть получается формула из условия при $n = 0$.

Допустим, что утверждение верно для $n - 1$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x - t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt. \quad (*)$$

Покажем, что утверждение верно и для n . Вычислим интеграл в (*) по частям:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x - t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt &= \left\{ \begin{array}{l} u = f^{(n)}(t), \quad du = f^{(n+1)}(t) dt, \\ dv = (x - t)^{n-1} dt, \quad v = -\frac{1}{n}(x - t)^n \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \left(-f^{(n)}(t) \frac{1}{n} (x - t)^n \Big|_{x_0}^x + \int_{x_0}^x \frac{1}{n} (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt \right) = \\ &= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt. \end{aligned}$$

Функции $u(t) = f^{(n)}(t)$ и $v(t) = -\frac{1}{n}(x-t)^n$ непрерывно дифференцируемы на $(a; b) \supset [x_0; x]$, поэтому можно применять интегрирование по частям. Подставив найденный интеграл в (*), получим формулу из формулировки теоремы. ■

13. ФОРМУЛА ВАЛЛИСА

Положим $I_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Если $n \geq 2$, то

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \sin x dx = - \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x d \cos x = \\ &= - \sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x d \sin^{n-1} x = 0 + (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^{n-2} x dx = \\ &= (n-1) \int_0^{\pi/2} (\sin^{n-2} x - \sin^n x) dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n). \end{aligned}$$

Отсюда $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ — рекуррентная формула для последовательности I_n . Рассмотрим её отдельно для чётных и нечётных n .

$$\begin{array}{ll} I_0 = \frac{\pi}{2}, & I_1 = 1, \\ I_2 = \frac{1}{2} \cdot I_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & I_3 = \frac{2}{3} \cdot I_1 = \frac{2}{3}, \\ I_4 = \frac{3}{4} \cdot I_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & I_5 = \frac{4}{5} \cdot I_3 = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}, \\ \vdots & \vdots \\ I_{2k} = \dots = \frac{(2k-1) \cdot (2k-3) \cdot \dots \cdot 1}{2k \cdot (2k-2) \cdot \dots \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}, & I_{2k+1} = \dots = \frac{2k \cdot (2k-2) \cdot \dots \cdot 2}{(2k+1) \cdot (2k-1) \cdot \dots \cdot 1}, \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} I_{2k} &= \frac{2k \cdot (2k-1) \cdot (2k-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{(2k \cdot (2k-2) \cdot \dots \cdot 2)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2k)!}{4^k \cdot (k!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{C_{2k}^k}{4^k} \cdot \frac{\pi}{2}, \\ I_{2k+1} &= \frac{(2k \cdot (2k-2) \cdot \dots \cdot 2)^2}{(2k+1) \cdot 2k \cdot (2k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{4^k (k!)^2}{(2k+1)!} = \frac{4^k}{2k+1} \cdot \frac{1}{C_{2k}^k}. \end{aligned}$$

Рассмотрим последовательность $\{I_k\}_{k=0}^{\infty}$. Т.к. $\sin^n x \geq \sin^{n+1} x$ для всех $x \in [0; \pi/2]$, причём неравенство строгое при $x \in (0; \pi/2)$, то (достаточное условие положительности интеграла) $I_k >$

I_{k+1} , т. е. последовательность $\{I_k\}$ убывает. Итак,

$$\begin{aligned} I_{2k+1} &< I_{2k} < I_{2k-1}, \\ \frac{4^k}{2k+1} \cdot \frac{1}{C_{2k}^k} &< \frac{C_{2k}^k}{4^k} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{4^{k-1}}{2k-1} \cdot \frac{1}{C_{2k-2}^{k-1}}, \\ \frac{4^{2k}}{2k+1} \cdot \frac{1}{(C_{2k}^k)^2} &< \frac{\pi}{2} < \frac{4^{2k-1}}{2k-1} \cdot \frac{1}{C_{2k-2}^{k-1} \cdot C_{2k}^k}, \\ \underbrace{\frac{4^{2k}}{2k+1} \cdot \frac{1}{(C_{2k}^k)^2}}_{A_k} &< \frac{\pi}{2} < \underbrace{\frac{4^{2k}}{2k} \cdot \frac{1}{(C_{2k}^k)^2}}_{B_k = \frac{2k+1}{2k} A_k}. \end{aligned}$$

Последовательность $\{A_k\}_{k=0}^\infty$ возрастает:

$$A_{k+1} = \frac{4^{2k+2}}{2k+3} \cdot \frac{1}{(C_{2k+2}^{k+1})^2} = \frac{4^{2k}}{2k+1} \cdot \frac{1}{(C_{2k}^k)^2} \cdot \frac{2k+1}{2k+3} \cdot 16 \cdot \frac{(k+1)^4}{(2k+1)^2(2k+2)^2} = A_k \cdot \frac{(2k+2)^2}{(2k+1)(2k+3)} > A_k.$$

Т. к. $\{A_k\}$ возрастает и ограничена сверху (числом $\pi/2$), $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A$. Далее,

$$B_k = A_k \cdot \frac{2k+1}{2k}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} B_k = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k+1}{2k} = A.$$

По теореме о трёх последовательностях, $A \leq \frac{\pi}{2} \leq A$, откуда $A = \frac{\pi}{2}$. В итоге

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{4^{2k}}{2k+1} \cdot \frac{1}{(C_{2k}^k)^2}.$$

— формула Валлиса.

14. ПЕРВАЯ ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ ДЛЯ ИНТЕГРАЛА РИМАНА. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АБЕЛЯ

Теорема 1 (Первая теорема о среднем для интеграла Римана). Пусть:

1. $f \in B[a; b]$, $m \leq f(x) \leq M$ для всех $x \in [a; b]$;
2. $g \in R[a; b]$ и $g(x) \geq 0$ для каждого $x \in [a; b]$;
3. $fg \in R[a; b]$.

Тогда

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx. \quad (*)$$

Если, дополнительно, $f \in C[a; b]$, то существует $c \in [a; b]$ такое, что

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx. \quad (*)$$

Доказательство. Если $g(x) \geq 0$, то $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$. Интегрируя, получаем (*).

Докажем второе утверждение теоремы. Если интеграл $\int_a^b g$ равен нулю, то из (*) видно, что $\int_a^b fg = 0$, и равенство (*) верно при любом $c \in [a; b]$; если не равен, поделим на него (*):

$$m \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \Big/ \int_a^b g(x)dx \leq M.$$

По теореме о промежуточном значении для непрерывной функции, заключаем, что найдётся $c \in [a; b]$ такое, что

$$f(c) = \int_a^b f(x)g(x)dx \Big/ \int_a^b g(x)dx.$$

■

Взяв $g \equiv 1$, получаем

Следствие 1. Если $f \in C[a; b]$, то для некоторого $c \in [a; b]$ справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a).$$

Примечание. Формула (*) даёт следующую оценку для интеграла в её левой части:

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \max_{x \in [a; b]} |f(x)| \int_a^b g(x)dx.$$

Теорема 2 (Преобразование Абеля). Пусть $A_k := \sum_{i=1}^k a_i$, $k = 0, 1, \dots, n$ (при $k = 0$ пустая сумма).

Тогда

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = A_n b_n + \sum_{i=1}^{n-1} A_i (b_i - b_{i+1}).$$

Доказательство. В самом деле,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i b_i &= \sum_{i=1}^n (A_i - A_{i-1}) b_i = \sum_{i=1}^n A_i b_i - \sum_{i=1}^n A_{i-1} b_i = \sum_{i=1}^n A_i b_i - \sum_{i=0}^{n-1} A_i b_{i+1} = \\ &= A_n b_n - A_0 b_1 + \sum_{i=1}^{n-1} A_i (b_i - b_{i+1}) = A_n b_n + \sum_{i=1}^{n-1} A_i (b_i - b_{i+1}). \end{aligned}$$

■

15. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АБЕЛЯ. ВТОРАЯ ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ ДЛЯ ИНТЕГРАЛА РИМАНА

Лемма 1. Пусть числа $A_k := \sum_{i=1}^k a_i$, $k = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяют неравенствам $m \leq A_k \leq M$, а $b_i \geq b_{i+1} \geq 0$ при $i = 1, 2, \dots, n-1$. Тогда

$$mb_i \leq \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq Mb_1.$$

Доказательство. Докажем правое из неравенств (левое аналогично):

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = A_n b_n + \sum_{i=1}^{n-1} A_i (b_i - b_{i+1}) \leq M b_n + \sum_{i=1}^{n-1} M (b_i b_{i+1}) = M b_n + M b_1 - M b_n = M b_1.$$

■

Теорема 1 (Вторая теорема о среднем для интеграла Римана). Допустим, $f, g \in R[a; b]$ и функция f монотонна на $[a; b]$. Тогда $\exists \xi \in [a; b]$ такое, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^\xi g(x)dx + f(b) \int_\xi^b g(x)dx.$$

Нам понадобится лемма:

Лемма 2. Допустим, $f, g \in R[a; b]$, причём функция f неотрицательна и не возрастает на отрезке $[a; b]$. Тогда $\exists \xi \in [a; b]$ такое, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^\xi g(x)dx.$$

Доказательство. Функция $G(x) := \int_a^x g(t)dt$ непрерывна на $[a; b]$. Поэтому она ограничена на $[a; b]$, обозначим $m := \min_{x \in [a; b]} G(x)$, $M := \max_{x \in [a; b]} G(x)$. Сначала установим формулу

$$mf(a) \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq Mf(a). \quad (*)$$

Возьмём любое $\varepsilon > 0$. Т. к. $g \in R[a; b]$, то $|g(x)| \leq C < +\infty$ на $[a; b]$, а т. к. $f \in R[a; b]$, согласно теореме Дарбу найдётся разбиение $T = \{\Delta_i = [x_{i-1}; x_i]\}_{i=1}^n$ отрезка $[a; b]$, для которого $\omega(f, T) < \varepsilon/C$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x)dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x_{i-1}) + f(x) - f(x_{i-1}))g(x)dx = \\ &= \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)dx + E, \quad E := \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(x_{i-1}))g(x)dx, \end{aligned}$$

причём E мало по абсолютной величине:

$$\begin{aligned} |E| &\leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - f(x_{i-1})| |g(x)| dx \leq C \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \omega(g, \Delta_i) dx = C \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \omega(f, \Delta_i) dx = \\ &= C \sum_{i=1}^n \omega(f, \Delta_i) |\Delta_i| = C\omega(f, T) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Учтём неотрицательность и невозрастание функции f на $[a; b]$ и применим лемму 1 с

$$\begin{aligned} a_i &:= G(x_i) - G(x_{i-1}), \quad b_i := f(x_{i-1}), \\ A_k &= \sum_{i=1}^k a_i = \sum_{i=1}^k (G(x_i) - G(x_{i-1})) = G(x_k) - G(x_0) = G(x_k); \\ m &\leq A_k = G(x_k) \leq M. \end{aligned}$$

Получим

$$\begin{aligned} mf(a) &\leq \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) (G(x_i) - G(x_{i-1})) \leq Mf(a); \\ mf(a) &\leq \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x) dx \leq Mf(a); \\ mf(a) &\leq \int_a^b f(x)g(x)dx - E \leq Mf(a), \quad |E| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Т. к. $\varepsilon > 0$ произвольно, то из последнего неравенства вытекает (*).

Теперь выведем из (*) утверждение теоремы. Отметим, что если $f(a) = 0$, то из (*) следует, что $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$, а значит, обе части равенства из формулировки леммы равны нулю, значит, утверждение выполнено. Пусть теперь $f(a) > 0$. Функция $G(x)$, как было отмечено ранее, непрерывна, причём найдутся такие точки $c, d \in [a; b]$, что

$$G(c) \leq \int_a^b f(x)g(x)dx / f(a) \leq G(d).$$

Таким образом, по теореме о промежуточных значениях непрерывной функции, найдётся точка $\xi \in [a; b]$ такая, что $G(\xi) = \int_a^b f(x)g(x)dx$, а это и есть утверждение леммы. ■

Теперь докажем теорему, ради которой тут собрались:

Доказательство. Если f не убывает на $[a; b]$, то функция $h(x) := f(b) - f(x)$ неотрицательна, невозрастает и интегрируема на $[a; b]$. Применим лемму и проведём преобразования:

$$\begin{aligned} \int_a^b h(x)g(x)dx &= h(a) \int_a^\xi g(x)dx; \quad \int_a^b (f(b) - f(x))g(x)dx = (f(b) - f(a)) \int_a^\xi g(x)dx; \\ f(b) \left(\int_a^b f(x)dx - \int_a^\xi f(x)dx \right) &+ f(a) \int_a^\xi g(x)dx = \int_a^b f(x)g(x)dx. \end{aligned}$$

Если f не возрастает на $[a; b]$, функция $h(x) := f(x) - f(b)$ неотрицательна, не возрастает и интегрируема на $[a; b]$. Повторяя выкладки выше, снова получим требуемое. ■

16. ВАРИАЦИЯ ФУНКЦИИ И ФУНКЦИИ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ (VB -ФУНКЦИИ). О СВЯЗИ ОГРАНИЧЕННОСТИ ВАРИАЦИИ С МОНОТОННОСТЬЮ И ОГРАНИЧЕННОСТЬЮ ФУНКЦИИ. АДДИТИВНОСТЬ ВАРИАЦИИ И СТРУКТУРА VB -ФУНКЦИИ

Определение 1. *Вариация* функции $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ (на отрезке $[a; b]$) — величина

$$\overset{b}{V}_a f := \sup_T \sum_{i=1}^m |f(a_i) - f(a_{i-1})|,$$

где \sup берётся по всем разбиениям $T = \{[a_{i-1}, a_i]\}_{i=1}^m$ отрезка $[a; b]$.

Если $\overset{b}{V}_a f < +\infty$, то f — *функция ограниченной вариации* на $[a; b]$. Запись: $f \in BV[a; b]$.

Для разбиения $T = \{[a_{i-1}, a_i]\}_{i=1}^m$ отрезка $[a; b]$ введём обозначение

$$V(f, T) := \sum_{i=1}^m |f(a_i) - f(a_{i-1})|.$$

Предложение 1. Любая монотонная на отрезке функция имеет ограниченную вариацию. При этом $\overset{b}{V}_a f$ равна $f(b) - f(a)$, если f не убывает и $f(a) - f(b)$, если f не возрастает.

Доказательство. Пусть $T = \{[a_{i-1}, a_i]\}_{i=1}^m$ — произвольное разбиение отрезка $[a; b]$. Если f не убывает, то

$$V(f, T) = \sum_{i=1}^m |f(a_i) - f(a_{i-1})| = \sum_{i=1}^m (f(a_i) - f(a_{i-1})) = f(b) - f(a),$$

$$\overset{b}{V}_a f = \sup_T V(f, T) = f(b) - f(a).$$

Другой случай рассматривается аналогично. ■

Предложение 2. Любая функция ограниченной вариации ограничена.

Доказательство. Для каждого $x \in [a; b]$ имеем

$$2|f(x)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| + |f(a)| + |f(b)|.$$

Набор из двух отрезков $[a; x]$ и $[x; b]$ есть разбиение $[a; b]$, поэтому

$$|f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq \overset{b}{V}_a f.$$

В итоге,

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2} \left(\overset{b}{V}_a f + |f(a)| + |f(b)| \right) \text{ для всех } x \in [a; b].$$

Отсюда следует требуемое. ■

Теорема 1 (Об аддитивности вариации). Если $f \in BV[a; b]$ и $a < c < b$, то $\overset{b}{V}_a f = \overset{c}{V}_a f + \overset{b}{V}_c f$.

Доказательство. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Найдём разбиения T_1 и T_2 отрезков $[a; c]$ и $[c; b]$, соответственное, такие, что

$$V(f, T_1) > \overset{c}{V}_a f - \varepsilon \quad \text{и} \quad V(f, T_2) > \overset{b}{V}_c f - \varepsilon.$$

Тогда $T_1 \sqcup T_2$ — разбиение отрезка $[a; b]$ и

$$\overset{b}{V}_a f \geq V(f, T_1 \cup T_2) = V(f, T_1) + V(f, T_2) > \overset{c}{V}_a f + \overset{b}{V}_c f - 2\varepsilon.$$

Т. к. $\varepsilon > 0$ выбиралось произвольно,

$$\overset{b}{V}_a f \geq \overset{c}{V}_a f + \overset{b}{V}_c f.$$

Докажем обратное неравенство. Для каждого $\varepsilon > 0$ отыщем разбиение T отрезка $[a; b]$, для которого

$$V(f, T) > \overset{b}{V}_a f - \varepsilon.$$

Если порождающий разбиение T набор точек не содержит c , добавим её в этот набор и получим новое разбиение (оставим ему старое обозначение T), для которого тем более выполнено последнее. При этом $T = T_1 \sqcup T_2$ — разбиения отрезков $[a; c]$ и $[c; b]$. Получаем

$$\overset{c}{V}_a f + \overset{b}{V}_c f \geq V(f, T_1) + V(f, T_2) = V(f, T) > \overset{b}{V}_a f - \varepsilon,$$

откуда

$$\overset{b}{V}_a f \leq \overset{c}{V}_a f + \overset{b}{V}_c f.$$

■

17. ВАРИАЦИЯ НЕПРЕРЫВНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ. СПРЯМЛЯЕМЫЕ КРИВЫЕ, КРИТЕРИЙ СПРЯМЛЯЕМОСТИ

Теорема 1. Допустим, $f \in C^{(1)}[a; b]$. Тогда $f \in BV[a; b]$ и $\overset{b}{V}_a f = \int_a^b |f'(x)| dx$.

Доказательство. По условию, $f' \in C[a; b]$, значит, $|f'| \in R[a; b]$ и $\int_a^b |f'(x)| dx =: I$ определён.

Докажем, что $\overset{b}{V}_a f = I$.

Сначала установим неравенство $\overset{b}{V}_a f < +\infty$. Возьмём любое разбиение $T = \{[a_{i-1}; a_i]\}_{i=1}^m$ отрезка $[a; b]$ и оценим $V(f, T)$:

$$\begin{aligned} V(f, T) &= \sum_{i=1}^m |f(a_i) - f(a_{i-1})| \stackrel{\text{т. Лагранжа}}{=} \sum_{i=1}^m |f'(\xi_i)| (a_i - a_{i-1}) \leq \\ &\leq \max_{x \in [a; b]} |f'(x)| \sum_{i=1}^m (a_i - a_{i-1}) = \max_{x \in [a; b]} |f'(x)| (b - a). \end{aligned}$$

Мы воспользовались тем, что функция $|f'|$ непрерывна, а потому ограничена на $[a; b]$. Из последнего неравенства мы видим, что $\overset{b}{V}_a f \leq \max_{x \in [a; b]} |f'(x)| (b - a) < +\infty$.

Далее, возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Найдётся $\delta > 0$ такое, что для всякого отмеченного δ -разбиения $T\xi$ отрезка $[a; b]$ верно $|\mathcal{S}(|f'|, T\xi) - I| < \varepsilon$. Найдём разбиение $T = \{[a_{i-1}; a_i]\}_{i=1}^m$, для которого

$$\overset{b}{V}_a f - \varepsilon < V(f, T) \leq \overset{b}{V}_a f.$$

Размельчая T так, чтобы диаметр стал меньше δ , мы не уменьшим $V(f, T)$ и сохраним последнее неравенство. Поэтому сразу считаем $d(T) < \delta$. Получаем: $V(f, T) = \mathcal{S}(|f'|, T\xi)$.

$$\left| \int_a^b f - I \right| \leq \left| \int_a^b f - V(f, T) \right| + |V(f, T) - \mathcal{S}(|f'|, T\xi)| + |\mathcal{S}(|f'|, T\xi) - I| \leq 2\varepsilon.$$

Т. к. $\varepsilon > 0$ выбиралось произвольным, $\int_a^b f = I$. ■

Определение 1. Плоская кривая $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ задаётся параметрически заданной функцией (*путём*)

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a; b].$$

Формально, γ есть образ отрезка $[a; b]$ при отображении

$$t \in [a; b] \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2.$$

Примечание. Считаем $x(t), y(t) \in C[a; b]$; в этом случае как сама кривая, так и задающий её путь называется *непрерывными*. Также предполагаем, что γ — простая кривая без кратных точек, что означает следующее. Если $P_1 = (x(t_1), y(t_1))$ и $P_2 = (x(t_2), y(t_2))$ и $t_1 \neq t_2$, то $P_1 \neq P_2$.

Разобьём кривую точками P_i ($i = 0, \dots, m$) на m дуг. Т. к. кривая не имеет самопересечений, такому разбиению на дуги однозначно соответствует некоторое разбиение $T = \{\Delta_i = [a_{i-1}; a_i]\}_{i=1}^m$ отрезка $[a; b]$. А именно, если (x_i, y_i) — координаты точек P_i , то $x_i = x(a_i)$ и $y_i = y(a_i)$ для $i = 0, \dots, m$.

Длина хорды, стягивающей дугу $P_{i-1}P_i$ есть $|P_{i-1}P_i|$. Длина $\ell(P_0P_1 \dots P_m)$ всей ломаной равна $\sum_{i=1}^m |P_{i-1}P_i|$.

Определение 2. Если $\ell(\gamma) < +\infty$,

$$\ell(\gamma) := \sup_{P_0P_1 \dots P_m} \sum_{i=1}^m |P_{i-1}P_i| = \sup_T \sum_{i=1}^m |P_{i-1}P_i|,$$

то кривая γ называется *спрямляемой*, а $\ell(\gamma)$ — её *длиной*.

Теорема 2 (Критерий спрямляемости кривой). Плоская непрерывная кривая

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a; b]$$

без кратных точек спрямляема тогда и только тогда, когда $x(t)$ и $y(t)$ — функции ограниченной вариации.

Доказательство. \Rightarrow . Допустим, γ — спрямляемая кривая, т. е.

$$\sup_T \sum_{i=1}^m |P_{i-1}P_i| = \ell(\gamma) < +\infty.$$

Тогда имеем

$$\sum_{i=1}^m |x(a_i) - x(a_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^m |P_{i-1}P_i| \leq \sup_T \sum_{i=1}^m |P_{i-1}P_i| = \ell(\gamma).$$

Значит, $\int_a^b x(t) \leq \ell(\gamma) < +\infty$, т. е. $x(t) \in BV[a; b]$. Аналогично, $y(t) \in BV[a; b]$.

\Leftarrow . Пусть $\overset{b}{V}_a x(t) < +\infty$ и $\overset{b}{V}_a y(t) < +\infty$. Тогда

$$\sum_{i=1}^m |P_{i-1}P_i| \leq \sum_{i=1}^m |x(a_i) - x(a_{i-1})| + \sum_{i=1}^m |y(a_i) - y(a_{i-1})| \leq \overset{b}{V}_a x + \overset{b}{V}_a y.$$

Значит, $\ell(\gamma) = \sup_T \sum_{i=1}^m |P_{i-1}P_i| \leq \overset{b}{V}_a x + \overset{b}{V}_a y < +\infty$. ■

Примечание. Все неравенства выше — это просто следствия из неравенства треугольника.

18. ТЕОРЕМА О ДЛИНЕ ГЛАДКОЙ КРИВОЙ. ДЛИНА ГЛАДКОЙ КРИВОЙ, ОПИСЫВАЮЩЕЙСЯ ЯВНО ЗАДАННОЙ ФУНКЦИЕЙ

Теорема 1 (О длине гладкой кривой). Пусть задана плоская простая кривая

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a; b],$$

причём $x(t), y(t) \in C^{(1)}[a; b]$. Тогда γ спрямляема и

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (*)$$

Доказательство. Т.к. $x(t), y(t) \in C^{(1)}[a; b]$, то $x(t)$ и $y(t)$ — функции ограниченной вариации. Тогда (критерий спрямляемости кривой) кривая γ спрямляема.

Докажем формулу (*). По условию, $x(t), y(t) \in C^{(1)}[a; b]$, поэтому $x'(t), y'(t) \in C[a; b]$. Значит, функция $f(t) := \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ непрерывна, и интеграл в (*) определён.

Возьмём какое-нибудь $\varepsilon > 0$. Т.к. $f \in R[a; b]$, найдётся $\delta_1 > 0$ такое, что для каждого отмеченного δ_i -разбиения $T\xi$ отрезка $[a; b]$ верно

$$\left| \mathcal{S}(f, T\xi) - \int_a^b f(t) dt \right| < \varepsilon.$$

Т.к. $y'(t)$ непрерывна на $[a; b]$, то она равномерно непрерывна на $[a; b]$, т.е. существует $\delta_2 > 0$ такое, что

$$(\varphi - \psi) < \delta_2 \Rightarrow |y'(\varphi) - y'(\psi)| < \varepsilon.$$

Положим $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Далее, найдём разбиение $T = \{\Delta_i = [a_{i-1}, a_i]\}_{i=1}^m$, для которого длина вписанной ломаной ε -близка к длине кривой:

$$\ell(\gamma) - \varepsilon < \sum_{i=1}^m |P_{i-1}P_i| \leq \ell(\gamma).$$

При размельчении T сумма $\sum_{i=1}^m |P_{i-1}P_i|$ не уменьшается, а последнее неравенство сохраняется. Размельчим T так, чтобы $d(T) < \delta$. Оценим длину вписанной ломаной:

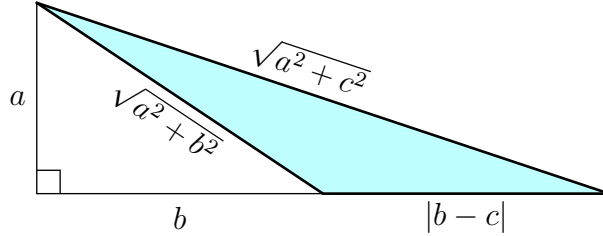
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m |P_{i-1}P_i| &= \sum_{i=1}^m \sqrt{(x(a_i) - x(a_{i-1}))^2 + (y(a_i) - y(a_{i-1}))^2} \stackrel{\text{т. Лагранжа}}{=} \\ &= \sum_{i=1}^m \sqrt{(x'(\varphi_i))^2 + (y'(\psi_i))^2} |\Delta_i| = \sum_{i=1}^m \sqrt{(x'(\varphi_i))^2 + (y'(\varphi_i))^2} |\Delta_i| + E = \mathcal{S}(f, T\xi) + E, \end{aligned}$$

где $E := \sum_{i=1}^m \left(\sqrt{(x'(\varphi_i))^2 + (y'(\psi_i))^2} - \sqrt{(x'(\varphi_i))^2 + (y'(\varphi_i))^2} |\Delta_i| \right)$, а отмеченное разбиение $T\xi$ получилось добавлением меток ξ_i к имеющемуся разбиению T .

Для оценки величины E нам потребуется неравенство

$$\left| \sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2} \right| \leq |b - c|, \quad a, b, c \geq 0.$$

Это опять же просто неравенство для вот такого треугольника:



$$\begin{aligned} |E| &= \left| \sum_{i=1}^m \left(\sqrt{(x'(\varphi_i))^2 + (y'(\psi_i))^2} - \sqrt{(x'(\varphi_i))^2 + (y'(\varphi_i))^2} |\Delta_i| \right) \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^m |y'(\psi_i) - y'(\varphi_i)| |\Delta_i| < \varepsilon(b-a). \end{aligned}$$

Наконец, оценим разность между длиной кривой и интегралом:

$$\begin{aligned} \left| \ell(\gamma) - \int_a^b f(t) dt \right| &\leq \left| \ell(\gamma) - \sum_{i=1}^m |P_{i-1}P_i| \right| + \left| \sum_{i=1}^m |P_{i-1}P_i| - \mathcal{S}(f, T\xi) \right| + \left| \mathcal{S}(f, T\xi) - \int_a^b f(t) dt \right| \leq \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon(b-a) + \varepsilon = \varepsilon(2+b-a). \end{aligned}$$

Т. к. $\varepsilon > 0$ выбиралось произвольным, верна формула (*). ■

О длине гладкой кривой, описываемой явно заданной функцией. Пусть кривая γ задаётся уравнением $y = f(x)$, $x \in [a; b]$. Считаем $f' \in C[a; b]$. Тогда

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

В самом деле, положим

$$x(t) = t, \quad y(t) = (y \circ x)(t), \quad a \leq t \leq b.$$

Тогда

$$x'(t) = 1, \quad y'(t) = y'(x)x'(t) = y'(x), \quad dx = dt.$$

Остаётся применить теорему о длине гладкой кривой.