

# КОЛЛОКВИУМ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Лектор: Плотников М. Г. • Автор: Пшеничный Никита,\* группа 109

1 курс • Весенний семестр 2024 г.

## Аннотация

В конце есть раздел с решением задач из списка Михаила Геннадьевича. Все решения мои, так что настоятельно рекомендую проверять их на адекватность.

Обо всех ошибках и опечатках пишите мне, исправлю.

## Программа коллоквиума

- |    |   |    |
|----|---|----|
| 1  | Первообразная, обобщённая первообразная, неопределённый интеграл. Теоремы о множестве всех первообразных и обобщённых первообразных. Дифференцирование и интегрирование — обратные операции. Интегрирование — линейная операция | 3  |
| 2  | Вычисление первообразных непосредственным интегрированием, интегрированием по частям и заменой переменной. Примеры  | 3  |
| 3  | Интегральные суммы Римана. Интеграл Римана. Интегрируемость по Риману и ограниченность  | 4  |
| 4  | Суммы Дарбу. Интеграл Дарбу   | 6  |
| 5  | Колебания функции на множестве  | 8  |
| 6  | Теорема Дарбу. Критерий Дарбу интегрируемости по Риману   | 10 |
| 7  | Интегрируемость по Риману непрерывных и монотонных функций. Геометрический смысл интегралов Дарбу и Римана  | 11 |
| 8  | Свойства интеграла Римана (единственность, линейность, интеграл от постоянной функции, интегрирование неравенств, интегрируемость модуля функции и произведения функций)  | 12 |
| 9  | Свойства интеграла Римана (достаточное условие интегрируемости композиции функций, интегрируемость на подотрезках и аддитивность интеграла Римана)  | 14 |
| 10 | Свойства интеграла Римана (интегрируемость изменённой функции, достаточное условие положительности интеграла, интеграл по симметричному отрезку от чётных и нечётных функций, интегрируемость кусочно-непрерывных функций)      | 16 |
| 11 | Интеграл Римана с переменным верхним пределом, его непрерывность и достаточное условие дифференцируемости. Теоремы о существовании первообразной/обобщённой первообразной на отрезке. Формула Ньютона — Лейбница                | 18 |

---

\*Telegram: @pshenikita. Последняя компиляция: 18 апреля 2024 г.

12 Замена переменной и интегрирование по частям в интеграле Римана. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме	19
13 Формула Валлиса	21
14 Первая теорема о среднем для интеграла Римана. Преобразование Абеля	22
15 Преобразование Абеля. Вторая теорема о среднем для интеграла Римана	24
16 Вариация функции и функции ограниченной вариации ( $BV$ -функции). О связи ограниченности вариации с монотонностью и ограниченностью функции. Аддитивность вариации и структура $BV$ -функции	26
17 Вариация непрерывно дифференцируемых функций. Спрямоаемые кривые, критерий спрямоаемости	28
18 Теорема о длине гладкой кривой. Длина гладкой кривой, описываемой явно заданной функцией	29
19 Вычисление длин кривых и площадей в полярных координатах	31
20 Площади плоских фигур в прямоугольных координатах. Объёмы тел вращения	33
21 Интеграл Римана — Стильеса: определение, линейность, достаточное условие существования, оценка абсолютной величины	34
22 Аддитивность интеграла Римана — Стильеса от непрерывных функций. Связь интегралов Римана — Стильеса и Римана	36
23 Метрические и нормированные пространства. Примеры метрических пространств. Пространство $\mathbb{R}^n$ , метрики и нормы в нём	37
24 Метрические и нормированные пространства. Внутренность, внешность, граница множества, производное множество	39
25 Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве, критерий замкнутости. Открытость и замкнутость шаров. Пересечения и объединения открытых и замкнутых множеств. Замкнутость границы множества	40
26 Предел последовательностей в метрических и нормированных пространствах. Критерий сходимости последовательности в $\mathbb{R}^n$ . Понятие о фундаментальной последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности в $\mathbb{R}^n$	42
27 Задачи	44

## 1. ПЕРВООБРАЗНАЯ, ОБОБЩЁННАЯ ПЕРВООБРАЗНАЯ, НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ.

ТЕОРЕМЫ О МНОЖЕСТВЕ ВСЕХ ПЕРВООБРАЗНЫХ И ОБОБЩЁННЫХ ПЕРВООБРАЗНЫХ.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ — ОБРАТНЫЕ ОПЕРАЦИИ.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ — ЛИНЕЙНАЯ ОПЕРАЦИЯ

**Определение 1.** Пусть функция  $f$  определена на промежутке  $X$ . (Непрерывная) функция  $F$  на  $X$  называется *первообразной* (*обобщённой первообразной*) функции  $f$ , если  $F'(x) = f(x)$  для всех  $x \in X$  (для всех  $x \in X$ , кроме конечного числа).

**Примечание.** Если функция  $f$  непрерывна на промежутке  $X$ , то на этом промежутке для неё существует первообразная. Если  $f$  кусочно-непрерывна на промежутке  $X$ , то на  $X$  для неё существует обобщённая первообразная. Доказано это будет позднее.

**Утверждение 1.**  $F' \equiv 0$  на  $X \iff F = \text{const.}$

**Доказательство.**  $\Leftarrow$  Очевидно.  $\Rightarrow$  По теореме Лагранжа

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad F(x_1) - F(x_2) = \underbrace{F'(c)}_{=0}(x_1 - x_2) = 0$$

для некоторого  $c \in X$ , значит,  $F = \text{const.}$  ■

Аналогичное утверждение верно и для обобщённой первообразной, достаточно провести вышеописанное доказательство для отрезков между выкинутыми точками. Оно всё ещё корректно, т. к. в теореме Лагранжа требуется дифференцируемость только во внутренних точках отрезка.

**Теорема 1** (О множестве (обобщённых) первообразных). Если  $F_1$  и  $F_2$  — (обобщённые) первообразные  $f$  на  $X$ , то  $F_1 - F_2 = \text{const.}$

**Доказательство.**  $(F_1 - F_2)' = f - f = 0$ . ■

Произвольная первообразная функции  $f$  на промежутке  $X$  обозначается через  $\int f(x)dx$ . Если  $F$  — первообразная  $f$ , то пишут  $\int f(x)dx = F(x) + C$ . Первообразную  $\int f(x)dx$  называют *неопределённым интегралом*.

Нетрудно заметить, что выполняется следующее:

$$\int dF = \int F'(x)dx = F(x) + C, \quad d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

Поэтому говорят, что дифференцирование и интегрирование — обратные операции. Известно, что дифференцирование — линейная операция, т. е.

$$d(\alpha F + \beta G) = \alpha \cdot dF + \beta \cdot dG.$$

Возьмём первообразную обеих частей, получим

$$\int (\alpha dF + \beta dG) = \int (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx.$$

Поэтому говорят, что интегрирование — линейная операция.

## 2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЕРВООБРАЗНЫХ НЕПОСРЕДСТВЕННЫМ ИНТЕГРИРОВАНИЕМ, ИНТЕГРИРОВАНИЕМ ПО ЧАСТЯМ И ЗАМЕНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ПРИМЕРЫ

Указанные ниже равенства верны на соответствующих областях определения (промежутках):

$$\begin{array}{lll}
1. \int 0 dx = const. & 4. \int e^x dx = e^x + C & 6. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \\
2. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1 & 5. \int \cos x dx = \sin x + C & \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \\
3. \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C & \int \sin x dx = -\cos x + C & 7. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \\
& & \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C
\end{array}$$

8. Длинный логарифм:

$$\left( \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| \right)' = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 \pm 1}}}{x + \sqrt{x^2 \pm 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + C$$

Высокий логарифм:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2 - 1} &= \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)} = \int \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} = \frac{1}{2} \ln |x-1| - \frac{1}{2} \ln |x+1| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C
\end{aligned}$$

По правилу Лейбница,

$$d(uv) = du \cdot v + u \cdot dv.$$

Найдём первообразную от обеих частей:

$$\int v du + \int u dv = uv + C \quad \text{или же} \quad \int u' v dx = uv - \int uv' dx.$$

Эта формула называется *формулой интегрирования по частям*.

По правилу дифференцированию сложной функции

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Найдём первообразную от обеих частей:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(x)dx \Big|_{x=\varphi(t)}.$$

Читать последнее равенство также можно как  $\int f(\varphi(t)) \underbrace{\varphi'(t)dt}_{d\varphi} = \int f(\varphi)d\varphi$ .

### 3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СУММЫ РИМАНА. ИНТЕГРАЛ РИМАНА. ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ПО РИМАНУ И ОГРАНИЧЕННОСТЬ

**Определение 1.** Возьмём отрезок  $[a; b]$  и построим конечный набор точек

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_{m-1} < a_m = b,$$

тем самым разбив  $[a; b]$  на попарно неперекрывающиеся отрезки  $\Delta_i := [a_{i-1}; a_i]$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Набор  $T = \{\Delta_i\}_{i=1}^m$  этих отрезков — *разбиение* отрезка  $[a; b]$ .

**Определение 2.** Добавим к  $T$  произвольный набор  $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^m$  точек  $\xi_i \in \Delta_i$  (*меток разбиения*  $T$ ). *Отмеченное разбиение*  $T\xi$  отрезка  $[a; b]$  — это множество пар  $\{(\Delta_i, \xi_i)\}_{i=1}^m$ .

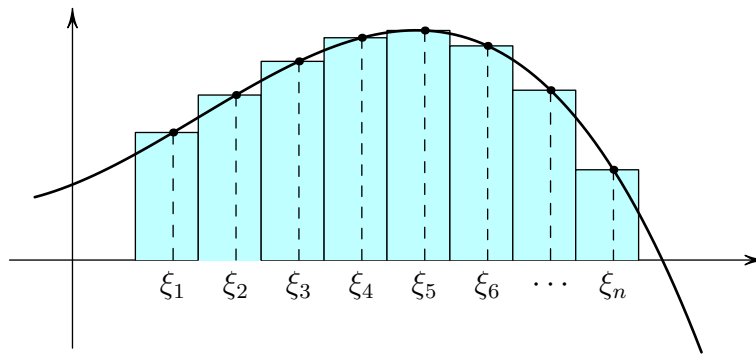
**Определение 3.** *Интегральная сумма (сумма Римана)* функции  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ , соответствующая отмеченному разбиению  $T\xi = \{(\Delta_i, \xi_i)\}_{i=1}^m$  отрезка  $[a; b]$ , есть сумма

$$\mathcal{S}(f, T\xi) := \sum_{i=1}^m f(\xi_i) |\Delta_i|.$$

**Геометрический смысл сумм Римана.** Рассмотрим определённую на  $[a; b]$  неотрицательную функцию  $f$  и криволинейную трапецию

$$A = A_{f, [a; b]} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a; b] \wedge y \in [0; f(x)]\} \subset \mathbb{R}^2,$$

связанную с графиком функции  $f$ . Тогда интегральная сумма  $\mathcal{S}(f, T\xi)$  совпадает с площадью объединения прямоугольников, построенных на отрезках разбиения  $T$  как на основаниях и имеющих высоту  $f(\xi_i)$ :



**Определение 4.** *Диаметр* разбиения  $T = \{\Delta_i\}_{i=1}^m$  — число

$$d(T) := \max_{i=1, \dots, m} |\Delta_i|.$$

**Определение 5.** Если  $d(T) < \delta$ , то разбиение  $T$  назовём  $\delta$ -разбиением.

**Определение 6** (Интеграл Римана). Функция  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  называется *интегрируемой по Риману* на отрезке  $[a; b]$  (пишем  $f \in R[a; b]$ ), если существует число  $I \in \mathbb{R}$  такое, что для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся  $\delta > 0$  такое, что для любого  $\delta$ -разбиения  $T\xi = \{(\Delta_i, \xi_i)\}_{i=1}^m$  отрезка  $[a; b]$  выполнено неравенство

$$|\mathcal{S}(f, T\xi) - I| = \left| \sum_{i=1}^m f(\xi_i) |\Delta_i| - I \right| < \varepsilon.$$

Число  $I$  называют *интегралом Римана* функции  $f$  по отрезку  $[a; b]$ , обозначается  $\int_a^b f(x) dx$ .

Задача 1° даёт способ вычисления интеграла Римана.

**Предложение 1.** Если  $f$  интегрируема по Риману на отрезке  $[a; b]$ , то она ограничена на  $[a; b]$ .

**Доказательство.** Допустим,  $f \in R[a; b]$ , но  $f \notin B[a; b]$ . Возьмём любые  $C > 0$  и разбиение  $T = \{\Delta_i\}$ . Тогда  $f$  не ограничена на  $\Delta_i$  по крайней мере для одного  $i$  ( $=: i_0$ ). При всех  $i \neq i_0$  расставим метки  $\xi_i \in \Delta_i$  произвольным образом, а метку  $\xi_{i_0} \in \Delta_{i_0}$  выберем так, что

$$|\mathcal{S}(f, T\xi)| = \left| \sum_i f(\xi_i) |\Delta_i| \right| \geq |f(\xi_{i_0}) |\Delta_{i_0}| - \left| \sum_{i \neq i_0} f(\xi_i) |\Delta_i| \right| > C.$$

Это возможно благодаря неограниченности  $f$  на отрезке  $\Delta_{i_0}$ . Итак, для всех разбиений  $T$  имеем  $\sup_{\xi} |\mathcal{S}(f, T\xi)| = \infty$ , поэтому ни для какого  $\varepsilon > 0$  мы не сможем найти  $\delta > 0$  такое, что неравенство

$$\left| \mathcal{S}(f, T\xi) - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon$$

выполнялось бы для всех отмеченных  $\delta$ -разбиений  $T\xi$ , что противоречит тому, что  $f \in R[a; b]$ . ■

#### 4. СУММЫ ДАРБУ. ИНТЕГРАЛ ДАРБУ

До конца пункта считаем, что задана функция  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Определение 1.** Пусть  $T = \{\Delta_i\}_{i=1}^m$  — разбиение отрезка  $[a; b]$ ,

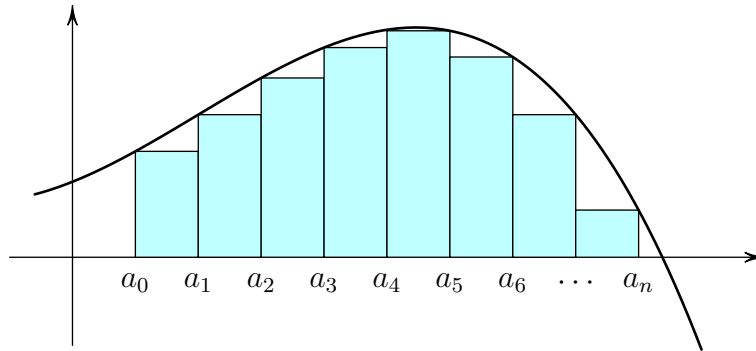
$$m_i := \inf_{x \in \Delta_i} f(x), \quad M_i := \sup_{x \in \Delta_i} f(x).$$

Величины

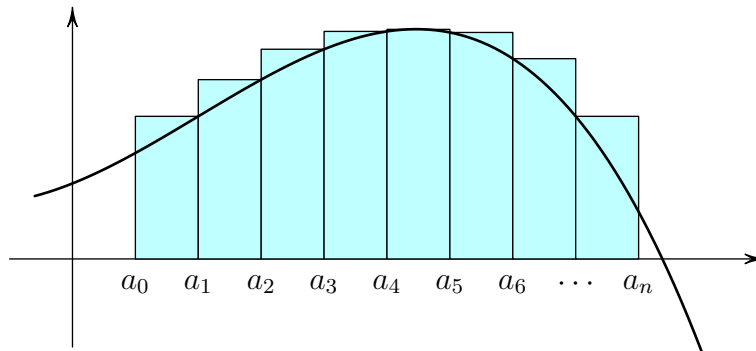
$$s(f, T) := \sum_{i=1}^m m_i |\Delta_i| \quad \text{и} \quad S(f, T) := \sum_{i=1}^m M_i |\Delta_i|$$

— *нижняя и верхняя суммы Дарбу* функции  $f$  для разбиения  $T$  (соответственно).

**Геометрический смысл сумм Дарбу.** Пусть функция  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  положительна (не обязательно непрерывна),  $A = A_{f, [a; b]}$  — криволинейная трапеция под её графиком. Тогда нижняя сумма Дарбу  $s(f, T)$  совпадает с точной верхней гранью площадей  $T$ -фигур, вписанных в  $A$ .



В свою очередь, верхняя сумма Дарбу  $S(f, T)$  совпадает с точной нижней гранью площадей  $T$ -фигур, описанных над  $A$ .



Часто приходится рассматривать *разность Дарбу*  $\omega(f, T) := S(f, T) - s(f, T)$ . Геометрически величина  $\omega(f, T)$  для непрерывной функции есть площадь «зазора» между наименьшей описанной над  $A$  и наибольшей вписанной в  $A$  фигурами.

Выразим разность Дарбу  $\omega(f, T)$  через колебания функции  $f$  на отрезках разбиения  $T = \{\Delta_i\}$ :

$$\omega(f, T) = S(f, T) - s(f, T) = \sum_i \left( \sup_{\Delta_i} f - \inf_{\Delta_i} f \right) |\Delta_i| = \sum_i \omega(f, \Delta_i) |\Delta_i|.$$

Установим связь между суммами Дарбу и Римана.

**Лемма 1.** Для любого разбиения  $T$  имеем

$$s(f, T) = \inf_{\xi} \mathcal{S}(f, T\xi), \quad S(f, T) = \sup_{\xi} \mathcal{S}(f, T\xi)$$

(точные грани берутся по всем наборам  $\xi$  меток разбиения  $T$ ).

**Доказательство.** Пусть  $T = \{\Delta_i\}_{i=1}^m$ . Поскольку  $m_i \leq f(\xi_i)$  для любых  $\xi_i \in \Delta_i$ , то

$$s(f, T) = \sum_i m_i |\Delta_i| \leq \mathcal{S}(f, T\xi)$$

для каждого набора  $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^m$  меток разбиения  $T$ . С другой стороны, для любого  $\varepsilon > 0$  найдутся такие  $\xi_i \in \Delta_i$ , что  $f(\xi_i) |\Delta_i| < m_i |\Delta_i| + \frac{\varepsilon}{m}$ . Тогда соответствующая интегральная сумма

$$\mathcal{S}(f, T\xi) = \sum_{i=1}^m f(\xi_i) |\Delta_i| < \sum_{i=1}^m \left( m_i |\Delta_i| + \frac{\varepsilon}{m} \right) = s(f, T) + \varepsilon.$$

Отсюда следует, что  $s(f, T) = \sup_{\xi} \mathcal{S}(f, T\xi)$ . Вторая формула доказывается аналогично. ■

**Определение 2.** Пусть даны разбиения  $T_1$  и  $T_2$ . Тогда говорят, что  $T_1$  *мельче*  $T_2$  (и пишут  $T_1 \leq T_2$ ), если для любого  $\Delta \in T_1$  найдётся  $\Theta \in T_2$  такой, что  $\Delta \subseteq \Theta$ . Иными словами,  $T_1$  получено из  $T_2$  добавлением ещё нескольких точек разбиения.

Введённое выше отношение транзитивно. В самом деле, пусть  $T_1 \leq T_2$  и  $T_2 \leq T_3$ , пусть также  $T_1, T_2$  и  $T_3$  определяются наборами точек соответственно  $A_1, A_2$  и  $A_3$ . Тогда  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3$ , откуда  $A_1 \supseteq A_3$ , т. е.  $T_1 \leq T_3$ .

**Лемма 2.** Если  $T_1 \leq T_2$ , то

$$s(f, T_1) \geq s(f, T_2), \quad S(f, T_1) \leq S(f, T_2), \quad \omega(f, T_1) \leq \omega(f, T_2).$$

Иными словами, при измельчении разбиения нижние суммы Дарбу не убывают, а верхние суммы Дарбу и разности Дарбу не возрастают.

**Доказательство.** Достаточно показать утверждение в случае, когда  $T_1$  получается из  $T_2 = \{\Delta_i\}_{i=1}^m$  путём разбиения одного из отрезков  $\Delta_i$  ( $=: \Delta_{i_0}$ ) на два неперекрывающихся отрезка ( $=: \Delta'$  и  $=: \Delta''$ ). Имеем:

$$\begin{aligned} S(f, T_2) &= \sum_{i=1}^m \sup_{\Delta_i} f \cdot |\Delta_i| = \sum_{i \neq i_0} \sup_{\Delta_i} f \cdot |\Delta_i| + \sup_{\Delta_{i_0}} f \cdot |\Delta_{i_0}| = \\ &= \sum_{i \neq i_0} \sup_{\Delta_i} f \cdot |\Delta_i| + \sup_{\Delta_{i_0}} f \cdot |\Delta'| + \sup_{\Delta_{i_0}} f \cdot |\Delta''| \geq \\ &\geq \sum_{i \neq i_0} \sup_{\Delta_i} f \cdot |\Delta_i| + \sup_{\Delta'} f \cdot |\Delta'| + \sup_{\Delta''} f \cdot |\Delta''| = S(f, T_1). \end{aligned}$$

Второе равенство доказывается аналогично, а третье есть прямое следствие первых двух. ■

**Определение 3.** Пусть даны разбиения  $T_1 = \{\Delta_i\}$  и  $T_2 = \{\Theta_j\}$ . Разбиение

$$T_1 \cap T_2 := \{\Delta_i \cap \Theta_j \text{ с непустой внутренней частью}\}$$

называется *пересечением* разбиений  $T_1$  и  $T_2$ .

Очевидно,  $T_1 \cap T_2 \leq T_1$  и  $T_1 \cap T_2 \leq T_2$ .

**Лемма 3.** Для любых разбиений  $T_1$  и  $T_2$  выполнено  $s(f, T_1) \leq S(f, T_2)$ .

**Доказательство.** Лемма 2 даёт  $s(f, T_1) \leq s(f, T_1 \cap T_2) \leq S(f, T_1 \cap T_2) \leq S(f, T_2)$ . ■

**Определение 4** (Интеграл Дарбу). Величины

$$(D) \int_a^b f(x) dx := \sup_T s(f, T) \quad \text{и} \quad (D) \int_a^b f(x) dx := \inf_T S(f, T)$$

называются соответственно *нижним* и *верхним интегралами Дарбу* функции  $f$  (по отрезку  $[a; b]$ ). Если нижний и верхний интегралы Дарбу совпадают, то их общее значение назовём *интегралом*

Дарбу функции  $f$  по отрезку  $[a; b]$  и обозначим  $(D) \int_a^b f(x) dx$ .

Из леммы 3 видно, что  $(D) \int_a^b f(x) dx \leq (D) \int_a^b f(x) dx$ .

## 5. КОЛЕБАНИЯ ФУНКЦИИ НА МНОЖЕСТВЕ

**Определение 1.** Колебание функции  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  на множестве  $A \subset X$  — величина

$$\omega(f, A) := \sup_{x_1, x_2 \in A} |f(x_1) - f(x_2)|.$$

Если  $f$  ограничена на  $A$ , то величина  $\omega(f, A)$  конечна. В самом деле, ограниченность означает существование  $C > 0$  такого, что  $|f(x)| \leq C$  для любого  $x \in A$ . В этом случае

$$\forall x_1, x_2 \in A \quad |f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1)| + |f(x_2)| \leq 2C \Rightarrow \omega(f, A) \leq 2C.$$

Напротив, если  $f$  не ограничена на  $A$ , то  $\omega(f, A) = +\infty$ , т.к. можно, фиксировав  $x_2$ , за счёт выбора  $x_1$  сделать величину  $|f(x_1) - f(x_2)|$  больше любого наперёд заданного  $C$ .

**Предложение 1.** Если  $f$  ограничена на множестве  $A$ , то

$$\omega(f, A) = \sup_{x \in A} f(x) - \inf_{x \in A} f(x). \quad (*)$$

**Доказательство.** Возьмём произвольное  $\varepsilon > 0$ . Согласно определению  $\sup$  и  $\inf$  найдутся такие  $x_1, x_2 \in A$ , что

$$\sup_{x \in A} f(x) - \varepsilon < f(x_1), \quad f(x_2) < \inf_{x \in A} f(x) + \varepsilon.$$

Из определения колебания функции на множестве вытекает существование  $x_3, x_4 \in A$ , для которых  $\omega(f, A) - \varepsilon < |f(x_3) - f(x_4)|$ . Не ограничивая общности, считаем  $f(x_3) \geq f(x_4)$ , так что

$$\omega(f, A) - \varepsilon < f(x_3) - f(x_4).$$

Получаем:

$$\omega(f, A) - \varepsilon < f(x_3) - f(x_4) \leq \sup_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x) < f(x_1) - f(x_2) + 2\varepsilon \leq \omega(f, A) + 2\varepsilon,$$



откуда  $\omega(f, A) - \varepsilon < \sup_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x) < \omega(f, A) + 2\varepsilon$ . Т.к.  $\varepsilon > 0$  выбиралось произвольно, то имеет место (\*). ■

**Предложение 2** (Свойства колебания). Пусть  $|f(x)| \leq M$  и  $|g(x)| \leq M$  для некоторого  $M > 0$  и всех  $x \in [a; b]$  и  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Тогда

1.  $\omega(|f|, A) \leq \omega(f, A)$ ;
2.  $\omega(fg, A) \leq M(\omega(f, A) + \omega(g, A))$ ;
3.  $\omega(\alpha f, A) = |\alpha| \omega(f, A)$ ;
4.  $\omega(f + g, A) \leq \omega(f, A) + \omega(g, A)$ ;
5.  $\omega(\alpha f + \beta g, A) \leq |\alpha| \omega(f, A) + |\beta| \omega(g, A)$ .

**Доказательство.**

1. Проверяем:

$$\begin{aligned} ||f(x_1)| - |f(x_2)|| &\leq |f(x_1) - f(x_2)| \leq \omega(f, A), \quad x_1, x_2 \in A; \\ \omega(|f|, A) &= \sup_{x_1, x_2 \in A} ||f(x_1)| - |f(x_2)|| \leq \omega(f, A). \end{aligned}$$

2. Проверяем:

$$\begin{aligned} |f(x_1)g(x_1) - f(x_2)g(x_2)| &= |f(x_1)(g(x_1) - g(x_2)) + g(x_2)(f(x_1) - f(x_2))| \leq \\ &M|g(x_1) - g(x_2)| + M|f(x_1) - f(x_2)| \leq M(\omega(f, A) + \omega(g, A)), \quad x_1, x_2 \in A; \\ \omega(fg, A) &= \sup_{x_1, x_2 \in A} |f(x_1)g(x_1) - f(x_2)g(x_2)| \leq M(\omega(f, A) + \omega(g, A)). \end{aligned}$$

3. Если  $\alpha = 0$ , обе части неравенства равны нулю, и всё доказано. Если  $\alpha \neq 0$ , то (\*):

$$\begin{aligned} |\alpha f(x_1) - \alpha f(x_2)| &= |\alpha| |f(x_1) - f(x_2)| \leq |\alpha| \omega(f, A), \quad x_1, x_2 \in A \\ \omega(\alpha f, A) &= \sup_{x_1, x_2 \in A} |\alpha f(x_1) - \alpha f(x_2)| \leq |\alpha| \omega(f, A) \end{aligned}$$

Теперь возьмём любое  $\varepsilon > 0$  и отыщем  $x_1, x_2 \in A$  такие, что

$$\omega(f, A) < |f(x_1) - f(x_2)| + \frac{\varepsilon}{|\alpha|}.$$

Тогда

$$|\alpha| \omega(f, A) < |\alpha f(x_1) - \alpha f(x_2)| + \varepsilon \leq \omega(\alpha f, A) + \varepsilon. \quad (*)$$

Из (\*) и (\*) вытекает, с учётом произвольности  $\varepsilon > 0$ , требуемое равенство.

4. Проверяем:

$$\begin{aligned} |(f + g)(x_1) - (f + g)(x_2)| &\leq |f(x_1) - f(x_2)| + |g(x_1) - g(x_2)| \leq \\ &\leq \omega(f, A) + \omega(g, A), \quad x_1, x_2 \in A \\ \omega(f + g, A) &= \sup_{x_1, x_2 \in A} |(f + g)(x_1) - (f + g)(x_2)| \leq \omega(f, A) + \omega(g, A). \end{aligned}$$

5. Следствие п. 3 и 4

■

## 6. ТЕОРЕМА ДАРБУ. КРИТЕРИЙ ДАРБУ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ПО РИМАНУ

**Теорема 1** (Дарбу). Пусть функция  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  ограничена. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. Существует  $(R) \int_a^b f(x)dx = I$ .
2. Существует  $(D) \int_a^b f(x)dx = I$ .
3. Для всякого  $\varepsilon > 0$  найдётся разбиение  $\tilde{T}$  отрезка  $[a; b]$  такое, что  $\omega(f, \tilde{T}) < \varepsilon$ .

**Доказательство.** (1)  $\Rightarrow$  (2). Допустим, существует  $(R) \int_a^b f(x)dx = I$ , т.е. для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся  $\delta > 0$  такое, что соотношение

$$I - \varepsilon < \mathcal{S}(f, T\xi) < I + \varepsilon$$

выполнено для каждого  $\delta$ -разбиения и набора  $\xi$  меток к нему. Тогда

$$I - \varepsilon \leq \inf_{\xi} \mathcal{S}(f, T\xi) = s(f, T) \leq S(f, T) = \sup_{\xi} \mathcal{S}(f, T\xi) \leq I + \varepsilon,$$

$$I - \varepsilon \leq s(f, T) \leq S(f, T) \leq I + \varepsilon; \quad I - \varepsilon \leq (D) \int_a^b f(x)dx \leq (D) \int_a^b f(x)dx \leq I + \varepsilon.$$

Т.к.  $\varepsilon > 0$  выбиралось произвольно, то  $I = (D) \int_a^b f(x)dx = (D) \int_a^b f(x)dx = (D) \int_a^b f(x)dx$ .

$$(2) \Rightarrow (3). \text{ Допустим, что существует } (D) \int_a^b f(x)dx = I, \text{ т.е. } (D) \int_a^b f(x)dx = (D) \int_a^b f(x)dx.$$

Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  найдутся разбиения  $T_1$  и  $T_2$  такие, что

$$S(f, T_2) - \frac{\varepsilon}{2} < I < s(f, T_1) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если  $\tilde{T} := T_1 \cap T_2$ , то  $\tilde{T} \leq T_1, T_2$  и (по лемме 2)

$$\omega(f, \tilde{T}) = S(f, \tilde{T}) - s(f, \tilde{T}) \leq S(f, T_2) - s(f, T_1) < \varepsilon.$$

(3)  $\Rightarrow$  (1). Т.к. функция  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  ограничена, найдётся  $M > 0$  такое, что  $|f(x)| \leq M$  для всех  $x \in [a; b]$ . Выберем любое  $\varepsilon > 0$  и найдём разбиение  $\tilde{T} = \{[a_{i-1}, a_i]\}_{i=1}^m$  отрезка  $[a; b]$  такое, что  $\omega(f, \tilde{T}) < \varepsilon$ . Положим  $\delta := \varepsilon/m$  и рассмотрим все концы, исключая крайние, отрезков из  $\tilde{T}$ , т.е. точки  $a_1, \dots, a_{m-1}$ . Окружим каждую из них  $\delta$ -окрестностью и  $2\delta$ -окрестностью и возьмём объединения

$$A := \bigcup_{i=1}^{m-1} (a_i - \delta, a_i + \delta), \quad B := \bigcup_{i=1}^{m-1} (a_i - 2\delta, a_i + 2\delta),$$

Пусть  $T\xi = \{(\Delta_j, \xi_j)\}$  — произвольное отмеченное  $\delta$ -разбиение отрезка  $[a; b]$ . Если  $\xi_j \in A$ , то  $\Delta_j \subset B$ . Если же  $\xi_j \in [a; b] \setminus A$ , то  $\Delta_j \subset [a_{i-1}, a_i]$  для некоторого  $i$ . Имеем:

$$\begin{aligned} \omega(f, T) &= \sum_j \omega(f, \Delta_j) |\Delta_j| = \sum_{\xi_j \in A} \omega(f, \Delta_j) |\Delta_j| + \sum_{\xi_j \notin A} \omega(f, \Delta_j) |\Delta_j| \leq \\ &\leq 2M \cdot 4\delta m + \sum_{i=1}^m \sum_{\Delta_j \subset [a_{i-1}, a_i]} \omega(f, \Delta_j) |\Delta_j| \leq 8M\varepsilon + \sum_{i=1}^m \omega(f, [a_{i-1}, a_i]) \sum_{\Delta_j \subset [a_{i-1}, a_i]} |\Delta_j| \leq \\ &\leq 8M\varepsilon + \sum_{i=1}^m \omega(f, [a_{i-1}, a_i]) (a_i - a_{i-1}) \leq 8M\varepsilon + \omega(f, \tilde{T}) < \varepsilon C, \quad C := 8M + 1. \end{aligned}$$

Таким образом,  $\omega(f, T) < \varepsilon C$ . Положим  $I := (D) \int_a^b f(x) dx$  (можно взять и верхний). Имеем:

$$s(f, T) \leq \mathcal{S}(f, T\xi) \leq S(f, T), \quad s(f, T) \leq I \leq (D) \int_a^b f(x) dx \leq S(f, T).$$

Отсюда  $|\mathcal{S}(f, T\xi) - I| < S(f, T) - s(f, T) = \omega(f, T) < \varepsilon C$ . Т.к.  $\varepsilon > 0$  и отмеченное  $\delta$ -разбиение  $T\xi$  произвольные, а  $C > 0$  от них не зависит, то  $f \in R[a; b]$  и  $(R) \int_a^b f(x) dx = I$ . ■

**Следствие 1** (Критерий Дарбу интегрируемости по Риману). Если функция  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  ограничена, то  $\exists (R) \int_a^b f(x) dx = I \Leftrightarrow \exists (D) \int_a^b f(x) dx = I$ .

**Утверждение 1.** Функция Дирихле

$$\text{Dir}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{если } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

не интегрируема по Риману ни на каком отрезке  $[a; b]$ .

**Доказательство.** В самом деле, возьмём произвольное разбиение  $T = \{\Delta_i\}$  отрезка  $[a; b]$ . В каждом отрезке  $\Delta_i$  есть точки как из  $\mathbb{Q}$ , так и не из  $\mathbb{Q}$ . Следовательно,

$$s(\text{Dir}, T) = \sum_i \inf_{\Delta_i} \text{Dir} \cdot |\Delta_i| = 0, \quad S(\text{Dir}, T) = \sum_i \sup_{\Delta_i} \text{Dir} \cdot |\Delta_i| = \sum_i 1 \cdot |\Delta_i| = b - a.$$

Значит,  $(D) \int_a^b \text{Dir} = 0$  и  $(D) \int_a^b \text{Dir} = b - a$ . Несовпадение интегралов даёт  $f \notin R[a; b]$ . ■

## 7. ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ПО РИМАНУ НЕПРЕРЫВНЫХ И МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ИНТЕГРАЛОВ ДАРБУ И РИМАНА

**Утверждение 1.** Если функция  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  имеет конечное число точек разрыва и ограничена, она интегрируема по Риману на этом отрезке.

**Доказательство.** Возьмём  $\varepsilon > 0$  и такое  $C > 0$ , что  $|f(x)| \leq C$  для всех  $x \in [a; b]$  (существует из ограниченности  $f$ ). Пользуясь тем, что функция  $f$  имеет конечное число точек разрыва, построим разбиение  $T = T^1 \sqcup T^2$  отрезка  $[a; b]$  так, что сумма длин отрезков  $\Delta_i \in T^1$  меньше  $\frac{\varepsilon}{4C}$ , а на всех отрезках  $\Delta_i \in T^2$  функция  $f$  непрерывна. Последнее означает, что  $f$  равномерно непрерывна на  $\Delta_i$ , поэтому найдётся  $\delta_i > 0$  такое, что  $(|x - z| < \delta_i) \wedge (x, z \in \Delta_i) \Rightarrow |f(x) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ .

Т.к. набор  $T^2$  конечен,  $\delta > 0$  можно выбрать общим для всех  $\Delta_i \in T^2$  (взяв  $\delta := \min_i \delta_i$ ). Имеем:

$$\begin{aligned} S(f, T) - s(f, T) &= S(f, T^1) - s(f, T^1) + S(f, T^2) - s(f, T^2) = \sum_{\Delta_i \in T^1} \left( \sup_{\Delta_i} f - \inf_{\Delta_i} f \right) |\Delta_i| + \\ &+ \sum_{\Delta_i \in T^2} \left( \sup_{\Delta_i} f - \inf_{\Delta_i} f \right) |\Delta_i| < 2C \sum_{\Delta_i \in T^1} |\Delta_i| + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{\Delta_i \in T^2} |\Delta_i| < \varepsilon. \end{aligned}$$

■

**Следствие 1.** Если функция  $f$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$  функция  $f$  интегрируема по Риману на этом отрезке.

**Утверждение 2.** Любая монотонная функция на отрезке  $[a; b]$  функция  $f$  интегрируема по Риману на этом  $[a; b]$ .

**Доказательство.** Без ограничения общности считаем, что  $f$  не постоянна и не убывает на  $[a; b]$ . Очевидно, что  $f$  ограничена на  $[a; b]$ . Далее, возьмём любое  $\varepsilon > 0$ , положим  $\delta := \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$  и рассмотрим произвольное  $\delta$ -разбиение  $T = \{\Delta_i = [a_{i-1}; a_i]\}_{i=1}^m$  отрезка  $[a; b]$ . Пользуясь неубыванием  $f$ , оценим величину  $\omega(f, T)$ :

$$\begin{aligned}\omega(f, T) &= \sum_{i=1}^m \left( \sup_{\Delta_i} f - \inf_{\Delta_i} f \right) |\Delta_i| \stackrel{f \text{ не убывает}}{=} \sum_{i=1}^m (f(a_i) - f(a_{i-1})) |\Delta_i| < \\ &< \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=1}^m (f(a_i) - f(a_{i-1})) = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} (f(b) - f(a)) = \varepsilon.\end{aligned}$$

■

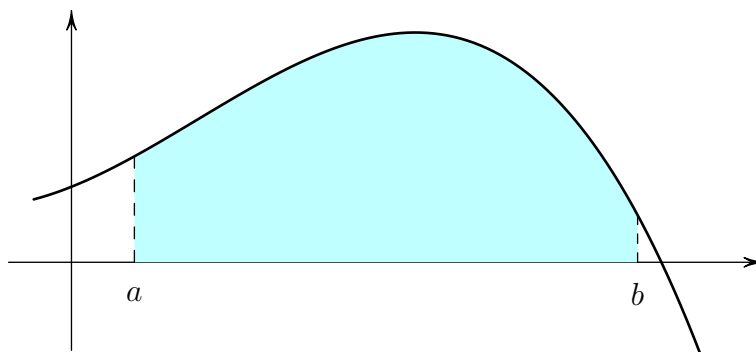
**Геометрический смысл интегралов Дарбу и Римана.** Пусть функция  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  положительна,  $A$  — криволинейная трапеция под её графиком. Тогда нижний интеграл Дарбу совпадает с точной верхней гранью  $T$ -фигур, вписанных в  $A$ , а верхний интеграл Дарбу — с точной нижней гранью  $T$ -фигур, описанных над  $A$ . Пусть функция  $f \in R[a; b]$  положительна,  $A = A(f, [a; b])$  — криволинейная трапеция под её графиком,  $S(A)$  — площадь этой трапеции. Тогда

$$s(f, T) \leq S(A) \leq S(f, T)$$

для любого разбиения  $T$ , следовательно,

$$(D) \int_a^b f \leq S(A) \leq (D) \int_a^b f.$$

Т. к. (критерий Дарбу) верхний и нижний интегралы равны, то  $S(A) = \int_a^b f(x) dx$ .



## 8. СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛА РИМАНА (ЕДИНСТВЕННОСТЬ, ЛИНЕЙНОСТЬ, ИНТЕГРАЛ ОТ ПОСТОЯННОЙ ФУНКЦИИ, ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕРАВЕНСТВ, ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ МОДУЛЯ ФУНКЦИИ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ)

**Теорема 1** (Единственность интеграла). Если  $(R) \int_a^b f(x) dx$  существует, то он единственен.

**Доказательство.** Если  $(R) \int_a^b f(x)dx$  существует, он совпадает с интегралом Дарбу  $(D) \int_a^b f(x)dx$ , а последний определяется однозначно. ■

**Теорема 2** (О линейности интеграла). Если  $f, g \in R[a; b]$  и  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , то  $\alpha f + \beta g \in R[a; b]$  и

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

**Доказательство.** Для каждого разбиения  $T\xi = \{(\Delta_i, \xi_i)\}$  отрезка  $[a; b]$  имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\alpha f + \beta g, T\xi) &= \sum_i (\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i)) |\Delta_i| = \alpha \sum_i f(\xi_i) |\Delta_i| + \beta \sum_i g(\xi_i) |\Delta_i| = \\ &= \alpha \mathcal{S}(f, T\xi) + \beta \mathcal{S}(g, T\xi). \end{aligned}$$

Пусть  $\varepsilon > 0$ ,  $I_f := \int_a^b f$ ,  $I_g := \int_a^b g$ . По определению, существует  $\delta > 0$  такое, что

$$|\mathcal{S}(f, T\xi) - I_f| < \varepsilon \text{ и } |\mathcal{S}(g, T\xi) - I_g| < \varepsilon$$

для всех отмеченных  $\delta$ -разбиений  $T\xi$  отрезка  $[a; b]$ . Для тех же  $T\xi$

$$\begin{aligned} |\mathcal{S}(\alpha f + \beta g, T\xi) - (\alpha I_f + \beta I_g)| &= |\alpha \mathcal{S}(f, T\xi) + \beta \mathcal{S}(g, T\xi) - (\alpha I_f + \beta I_g)| \leq \\ &\leq |\alpha| |\mathcal{S}(f, T\xi) - I_f| + |\beta| |\mathcal{S}(g, T\xi) - I_g| < (|\alpha| + |\beta|) \varepsilon. \end{aligned}$$

Это и значит, что утверждение теоремы верно. ■

**Утверждение 1** (Интеграл константы).  $\int_a^b C dx = C(b - a)$ .

**Доказательство.** Если  $F(x) \equiv C$  на  $[a; b]$ , то  $\mathcal{S}(f, T\xi) = \sum_{T\xi} C |\Delta_i| = C(b - a)$  для каждого отмеченного разбиения  $T\xi = \{(\Delta_i, \xi_i)\}$ . ■

**Теорема 3** (Об интегрировании неравенств). Если  $f, g \in R[a; b]$  и  $f(x) \leq g(x)$  для всех  $x \in [a; b]$ , то  $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ .

**Доказательство.** Если  $f \leq g$  на  $[a; b]$ , на каждом отмеченном разбиении  $T\xi = \{(\Delta_i, \xi_i)\}$  выполнено

$$\mathcal{S}(f, T\xi) = \sum_{T\xi} f(\xi_i) |\Delta_i| \leq \sum_{T\xi} g(\xi_i) |\Delta_i| = \mathcal{S}(g, T\xi).$$

Отсюда  $s(f, T) \leq s(g, T)$ , что влечёт  $(D) \int_a^b f \leq (D) \int_a^b g$ . По теореме Дарбу нижние интегралы Дарбу можно заменить на интегралы Римана. Это даёт нужное равенство. ■

**Теорема 4** (Об интегрируемости модуля функции). Если  $f \in R[a; b]$ , то  $|f| \in R[a; b]$  и

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

**Доказательство.** Если  $f \in R[a; b]$ , то  $f$  ограничена на  $[a; b]$ ,  $|f|$  тоже. По теореме Дарбу для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся такое разбиение  $T = \{\Delta_i\}$  такое, что  $\omega(f, T) < \varepsilon$ . Тогда

$$\omega(|f|, T) = \sum_i \omega(|f|, \Delta_i) |\Delta_i| \leq \sum_i \omega(f, \Delta_i) |\Delta_i| = \omega(f, T) < \varepsilon.$$

Неравенство выполнено в силу свойств колебаний функции. Применяя в обратную сторону теорему Дарбу, получаем  $|f| \in R[a; b]$ . Линейность даёт  $-|f| \in R[a; b]$ . Интегрируя неравенство  $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ , получим

$$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|,$$

что и есть утверждение теоремы. ■

**Теорема 5** (Об интегрируемости произведения). Пусть  $f, g \in R[a; b]$ , тогда  $fg \in R[a; b]$ .

**Доказательство.** Интегрируемость влечёт ограниченность:  $|f(x)| \leq M$  и  $|g(x)| \leq M$  для некоторого  $M > 0$  и всех  $x \in [a; b]$ . Из интегрируемости также вытекает (теорема Дарбу), что для любого  $\varepsilon > 0$  найдутся разбиения  $T_1$  и  $T_2$  отрезка  $[a; b]$  такие, что  $\omega(f, T_1) < \varepsilon$  и  $\omega(g, T_2) < \varepsilon$ . Разбиение  $T = \{\Delta_i\} := T_1 \cap T_2$  мельче  $T_1$  и  $T_2$ , отсюда

$$\begin{aligned} \omega(fg, T) &\leq \omega(f, T_1) < \varepsilon, \quad \omega(g, T) \leq \omega(g, T_2) < \varepsilon; \\ \omega(fg, T) &= \sum_i \omega(fg, \Delta_i) |\Delta_i| \leq M \sum_i (\omega(f, \Delta_i) + \omega(g, \Delta_i)) |\Delta_i| = M (\omega(f, T) + \omega(g, T)) < 2M\varepsilon. \end{aligned}$$

Применяя в обратную сторону теорему Дарбу, получаем  $fg \in R[a; b]$ . ■

## 9. СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛА РИМАНА (ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ КОМПОЗИЦИИ ФУНКЦИЙ, ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ НА ПОДОТРЕЗКАХ И АДДИТИВНОСТЬ ИНТЕГРАЛА РИМАНА)

Здесь мы приведём (без доказательства) более прозрачный и мощный, нежели критерий Дарбу, критерий интегрируемости по Риману.

**Определение 1.** Множество  $E \subset \mathbb{R}$  имеет *меру нуль по Лебегу*, если для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся не более чем счётная система отрезков  $\{\Delta_i : i \in I\}$  ( $I$  — не более чем счётное множество индексов) такая, что  $E \subset \bigcup_{i \in I} \Delta_i$  и  $\sum_{i \in I} |\Delta_i| < \varepsilon$ .

**Теорема 1** (Критерий Лебега интегрируемости по Риману).  $f \in R[a; b]$  тогда и только тогда, когда  $f$  ограничена на  $[a; b]$  и множество её точек разрыва имеет меру нуль по Лебегу.

**Теорема 2** (Достаточное условие интегрируемости композиции). Пусть  $f \in R[a; b]$ , а функция  $\varphi$  ограничена и непрерывна на  $f([a; b])$ . Тогда  $\varphi \circ f \in R[a; b]$ .

**Доказательство.** Здесь применим (пока не доказанный) критерий Лебега. Согласно ему,  $f$  ограничена, а множество её точек разрыва имеет меру нуль по Лебегу.

Из ограниченности  $f$  и  $\varphi$  следует ограниченность  $\varphi \circ f$ . Из непрерывности  $\varphi$  на  $f([a; b])$  следует, что в тех точках, где  $f$  непрерывна,  $\varphi \circ f$  тоже (теорема о непрерывности композиции функций). Следовательно, множество точек разрыва  $\varphi \circ f$  тоже имеет меру нуль по Лебегу. Снова применяя критерий Лебега, получаем  $\varphi \circ f \in R[a; b]$ . ■

**Пример 1.** Возьмём функции

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad f(x) = \text{Riem}(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } x = \frac{m}{n}, \frac{m}{n} \text{ — несократимая дробь,} \\ 0, & \text{если } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Функция  $f$  интегрируема по Риману на любом отрезке  $[a; b]$ , а  $\varphi(x)$  ограничена на  $\mathbb{R}$  и разрывна только при  $x = 0$ . Композиция  $\varphi \circ f$  есть функция Дирихле, которая не интегрируема по Риману ни на каком отрезке  $[a; b]$ . Таким образом, последняя теорема может не выполняться, если функция  $\varphi$  разрывна хотя бы в одной точке.

**Теорема 3** (Об интегрируемости на подотрезках). Если  $f \in R[a; b]$  и  $[c; d] \subset [a; b]$ , то  $f \in R[c; d]$ .

**Доказательство.** Из интегрируемости  $f$  вытекает (теорема Дарбу) существование разбиения  $T$  такого, что  $\omega(f, T) < \varepsilon$ . Добавим к набору точек, порождающих  $T$ , точки  $c$  и  $d$ . Получим более мелкое разбиение  $\tilde{T}$  отрезка  $[a; b]$  (для него  $\omega(f, \tilde{T}) \leq \omega(f, T) < \varepsilon$ ), содержащее в себе разбиение  $\tilde{T}^0$  отрезка  $[c; d]$ . Получаем

$$\varepsilon > \omega(f, \tilde{T}) = \sum_{\Delta \in \tilde{T}^0} \left( \sup_{\Delta} f - \inf_{\Delta} f \right) |\Delta| + \sum_{\Delta \notin \tilde{T}^0} \left( \sup_{\Delta} f - \inf_{\Delta} f \right) |\Delta| \geq \sum_{\Delta \in \tilde{T}^0} \left( \sup_{\Delta} f - \inf_{\Delta} f \right) |\Delta| = \omega(f, \tilde{T}^0).$$

Согласно теореме Дарбу,  $f \in R[c; d]$ . ■

**Теорема 4** (Об аддитивности интеграла Римана). Допустим,  $a < c < b$  и  $f \in R[a; c] \cap R[c; b]$ . Тогда  $f \in R[a; b]$  и

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Для доказательства этой теоремы нам понадобится лемма:

**Лемма 1.** Если  $f$  ограничена на отрезке  $[a; b]$  и  $a < c < b$ , то

$$(D) \int_a^b f = (D) \int_a^c f + (D) \int_c^b f, \quad (*)$$

и аналогичное равенство справедливо для верхних интегралов Дарбу.

**Доказательство.** Возьмём любое  $\varepsilon > 0$ . Определение нижнего интеграла Дарбу даёт существование разбиений  $T^1$  отрезка  $[a; c]$  и  $T^2$  отрезка  $[c; b]$  таких, что

$$s(f, T^1) > (D) \int_a^c f - \varepsilon, \quad s(f, T^2) > (D) \int_c^b f - \varepsilon.$$

Для разбиений  $T = T^1 \sqcup T^2$  отрезка  $[a; b]$  имеем:

$$\begin{aligned} (D) \int_a^b f &\geq s(f, T) = \sum_{\Delta_i \in T} \inf_{\Delta_i} f \cdot |\Delta_i| = \sum_{\Delta_i \in T^1} \inf_{\Delta_i} f \cdot |\Delta_i| + \sum_{\Delta_i \in T^2} \inf_{\Delta_i} f \cdot |\Delta_i| = \\ &= s(f, T^1) + s(f, T^2) > (D) \int_a^c f + (D) \int_c^b f - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Т. к.  $\varepsilon > 0$  произвольно, левая часть  $(*)$  не меньше правой.

Снова возьмём произвольное  $\varepsilon > 0$  и найдём разбиение  $T$  отрезка  $[a; b]$  такое, что

$$s(f, T) > (D) \int_a^b f - \varepsilon.$$

Если в набор точек, порождающих  $T$ , не входила точка  $c$ , добавим её и получим новое, более мелкое разбиение (оставим ему старое название  $T$ ), для которого тем более верно последнее неравенство (при измельчении разбиения нижние суммы Дарбу могут только возрасти). Разбиение  $T$  есть  $T^1 \sqcup T^2$ , где  $T^1$  — разбиение отрезка  $[a; c]$ , а  $T^2$  — разбиение отрезка  $[c; b]$ . Имеем:

$$(D) \int_a^b f < s(f, T) + \varepsilon = s(f, T^1) + s(f, T^2) + \varepsilon \leq (D) \int_a^c f + (D) \int_c^b f + \varepsilon.$$

Т. к.  $\varepsilon > 0$  произвольно, левая часть (\*) не больше правой.

Таким образом, имеет место равенство (\*), а его аналог для верхних интегралов Дарбу доказывается аналогично. ■

А теперь докажем теорему об аддитивности интеграла:

**Доказательство.** Из интегрируемости вытекает ограниченность  $f$  и на  $[a; c]$ , и на  $[c; b]$ , значит, и на  $[a; b]$  тоже. Далее,

$$(D) \int_a^b f = (D) \int_a^c f + (D) \int_c^b f \stackrel{\text{критерий Дарбу}}{=} (D) \int_a^c f + (D) \int_c^b f = (D) \int_a^b f.$$

Согласно, критерию Дарбу,  $f \in R[a; b]$  и каждый верхний или нижний интеграл Дарбу в последнем выражении можно заменить на интеграл Римана. ■

**Примечание.** До сих пор предполагалось, что верхний предел интегрирования больше нижнего. Ситуацию можно расширить, положив по определению

$$\int_b^a f(x) dx := - \int_a^b f(x) dx.$$

Можно показать, что последняя теорема верна для всех  $a$ ,  $b$  и  $c$  с учётом дополненного нами определения.

## 10. СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛА РИМАНА (ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ИЗМЕНЁННОЙ ФУНКЦИИ, ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТИ ИНТЕГРАЛА, ИНТЕГРАЛ ПО СИММЕТРИЧНОМУ ОТРЕЗКУ ОТ ЧЁТНЫХ И НЕЧЁТНЫХ ФУНКЦИЙ, ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ)

**Теорема 1** (Об интегрируемости изменённой функции). Если функцию  $f \in R[a; b]$  изменить на конечном множестве, то изменённая функция  $\tilde{f} \in R[a; b]$  и  $\int_a^b f = \int_a^b \tilde{f}$ .

Нам понадобится лемма:

**Лемма 1.** Допустим,  $E \subset [a; b]$  — конечное множество, и функция  $g$  равна нулю вне  $E$ . Тогда  $g \in R[a; b]$  и  $\int_a^b g(x) dx = 0$ .

**Доказательство.** Пусть  $E = \{a_1, \dots, a_n\}$ ,  $C := \max\{f(a_1), \dots, f(a_n)\}$ . Выберем любое  $\varepsilon > 0$ , положим  $\delta := \varepsilon/(Cn)$  и возьмём произвольное  $\delta$ -разбиение  $T\xi = \{(\Delta_i, \xi_i)\}$  отрезка  $[a; b]$ . Тогда

$$|S(f, T\xi)| < \left| \sum_{\xi_i \in E} g(\xi_i) |\Delta_i| \right| + \left| \sum_{\xi_i \notin E} g(\xi_i) |\Delta_i| \right| \leq Cn\delta + 0 = \varepsilon.$$



Согласно определению интеграла Римана,  $g \in R[a; b]$  и  $\int_a^b g = 0$ . ■

**Доказательство.** Разность  $\tilde{f} - f =: g$  равна нулю вне конечного множества  $E \subset [a; b]$ . Тогда  $g \in R[a; b]$  и  $\int_a^b g = 0$ . Значит,  $\tilde{f} = f + g \in R[a; b]$  и  $\int_a^b \tilde{f} = \int_a^b f + \int_a^b g = \int_a^b f$ . ■

**Теорема 2** (Достаточное условие положительности интеграла). Допустим, функция  $f$  интегрируема по Риману и неотрицательна на отрезке  $[a; b]$ , а также непрерывна в точке  $x_0 \in [a; b]$ , в которой  $f(x_0) > 0$ . Тогда  $\int_a^b f(x)dx > 0$ .

**Доказательство.** Т.к.  $f \in C(x_0)$  и  $f(x_0) > 0$ , найдётся отрезок  $I \subset [a; b]$  такой, что  $f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2} > 0$  на  $I$ . Положим

$$g(x) := \begin{cases} \frac{f(x_0)}{2}, & x \in I, \\ 0, & x \in [a; b] \setminus I. \end{cases}$$

Тогда  $f \geq g$  на  $[a; b]$ , отрезок  $[a; b]$  есть объединение двух или трёх неперекрывающихся отрезков, один из которых есть  $I$ ,

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g = \int_I g = \frac{f(x_0)}{2} |I| > 0.$$

**Теорема 3** (Об интеграле по симметричному отрезку от чётных и нечётных функций). Пусть  $f \in R[-a; a]$ . Если функция  $f$  чётна, то

$$\int_{-a}^0 f = \int_0^a f, \quad \int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f,$$

а если нечётна, то

$$\int_{-a}^0 f = - \int_0^a f, \quad \int_{-a}^a f = 0.$$

**Доказательство.** Каждому отмеченному разбиению  $T\xi = \{(\Delta_i, \xi_i)\}_i$  отрезка  $[0; a]$  однозначно соответствует «симметричное» отмеченное разбиение  $\tilde{T}$  (того же диаметра), отрезки и метки в котором симметричны  $\Delta_i$  и  $\xi_i$  относительно нуля. Для чётной функции  $f$

$$\mathcal{S}(f, T\xi) = \sum_{i=1}^m f(\xi_i) |\Delta_i| = \sum_{i=1}^m f(-\xi_i) |\Delta_i| = \mathcal{S}(f, \tilde{T}\tilde{\xi}),$$

и определение интеграла Римана даёт  $\int_0^a f = \int_{-a}^0 f$ . Далее,

$$\int_{-a}^a f = \int_{-a}^0 f + \int_0^a f = 2 \int_0^a f.$$

Если  $f$  нечётна, то

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(f, T\xi) &= \sum_{i=1}^m f(\xi_i) |\Delta_i| = \sum_{i=1}^m -f(-\xi_i) |\Delta_i| = -\mathcal{S}(f, \widetilde{T\xi}), \\ \int_{-a}^0 f &= -\int_0^a f, \quad \int_{-a}^a f = \int_{-a}^0 f + \int_0^a f = -\int_0^a f + \int_0^a f = 0.\end{aligned}$$

■

**Теорема 4** (Об интегрируемости кусочно-непрерывных функций). Если функция  $f$  кусочно-непрерывна на отрезке  $[a; b]$ , то  $f \in R[a; b]$ .

**Доказательство.** См. утверждение 1 в вопросе 7.

■

# 11. ИНТЕГРАЛ РИМАНА С ПЕРЕМЕННЫМ ВЕРХНИМ ПРЕДЕЛОМ, ЕГО НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ. ТЕОРЕМЫ О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРВООБРАЗНОЙ/ОБООБЩЁННОЙ ПЕРВООБРАЗНОЙ НА ОТРЕЗКЕ. ФОРМУЛА НЬЮТОНА — ЛЕЙБНИЦА

**Определение 1.** Если задана функция  $f \in R[a; b]$ , то функцию  $F : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt, \quad F(a) := 0,$$

называют *интегралом (Римана) с переменным верхним пределом*.

**Теорема 1.**  $F \in C[a; b]$ .

**Доказательство.** Т. к.  $f \in R[a; b]$ ,  $f \in B[a; b]$ , то  $|f(x)| \leq C$  для некоторого  $C > 0$  и всех  $x \in [a; b]$ . Имеем:

$$\begin{aligned}F(x+h) - F(x) &= \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt; \\ |F(x+h) - F(x)| &= \left| \int_x^{x+h} f(t)dt \right| \leq \left| \int_x^{x+h} |f(t)| dt \right| \leq C|h|.\end{aligned}$$

При  $h \rightarrow 0$  имеем  $C|h| \rightarrow 0$ , поэтому и  $|F(x+h) - F(x)| \rightarrow 0$ , т. е.  $F \in C(x)$ . Точка  $x \in [a; b]$  могла быть любой, следовательно,  $F \in C[a; b]$ .

■

**Теорема 2.** Если  $f \in C(x)$ , то  $F \in D(x)$  и  $F'(x) = f(x)$ .

**Доказательство.** Воспользуемся тем, что  $f \in C(x)$  и для каждого  $\varepsilon > 0$  найдём  $\delta > 0$  такое, что

$$|t - x| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon.$$

При  $0 < h < \delta$  имеем:

$$\begin{aligned}\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| &= \frac{1}{h} |F(x+h) - F(x) - f(x)h| = \frac{1}{h} \left| \int_x^{x+h} f(t)dt - f(x)h \right| = \\ &= \frac{1}{h} \left| \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt \right| \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt \leq \frac{1}{h} \cdot \varepsilon h = \varepsilon.\end{aligned}$$

При  $-\delta < h < 0$  оценка тоже верна. Т. к.  $\varepsilon > 0$  выбиралось произвольным,

$$\exists F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

■

**Теорема 3** (О существовании первообразной/обобщённой первообразной на отрезке). Если  $f \in C[a; b]$  (или  $f$  ограничена и имеет конечное число точек разрыва либо кусочно-непрерывна на  $[a; b]$ ), то всякая функция вида  $F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$  является (обобщённой) первообразной для функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$  и верна *формула Ньютона — Лейбница*:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

**Доказательство.** Если  $f \in C[a; b]$ , то  $f \in R[a; b]$  и  $F'(x) = f(x)$  для всех  $x \in [a; b]$  (по предыдущей теореме), т. е.  $F$  — первообразная для  $f$  на  $[a; b]$ . Из определения функции  $F$  следует

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt + C - C = \int_a^b f(t)dt.$$

Если  $f$  ограничена и имеет конечное число точек разрыва, то  $f \in R[a; b]$  (см. утверждение 1 в вопросе 7). Далее, пусть  $a_1, \dots, a_n$  — точки разрыва функции  $f$ . Из предыдущих теорем в этом вопросе вытекает, что  $F \in C[a; b]$  и  $F'(x) = f(x)$  для всех  $x \in [a; b] \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ , т. е.  $F$  — обобщённая первообразная для  $f$  на  $[a; b]$ . Доказательство формулы Ньютона — Лейбница такое же. ■

**Примечание.** Случай кусочно-непрерывной функции включается в уже доказанный во втором абзаце.

**Теорема 4.** Если  $f \in C[a; b]$  (или ограничена и имеет конечное число точек разрыва), а  $F$  — (обобщённая) первообразная для  $f$  на  $[a; b]$ , то верна формула Ньютона — Лейбница.

**Доказательство.** Докажем первое утверждение, а второе доказывается по той же схеме. По предыдущей теореме все функции вида  $\int_a^x f(t)dt + C$  есть первообразные для  $f(x)$  на  $[a; b]$  и других

первообразных нет (по теореме о множестве всех первообразных). Поэтому  $F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$  при некотором  $C$ . Остаётся применить предыдущую теорему. ■

## 12. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ В ИНТЕГРАЛЕ РИМАНА. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА С ОСТАТОЧНЫМ ЧЛЕНОМ В ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМЕ

**Теорема 1** (О замене переменной в интеграле Римана). Пусть заданы функции  $f \in C[a; b]$  и  $\varphi : [\alpha; \beta] \rightarrow [a; b]$ , причём  $\varphi \in C^1[\alpha; \beta]$ ,  $\varphi(\alpha) = a$  и  $\varphi(\beta) = b$ . Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)dt.$$

**Доказательство.** По условию теоремы все функции  $f$ ,  $\varphi$  и  $\varphi'$  непрерывны, поэтому подынтегральная функция в интеграле справа непрерывна.

Пусть  $F$  — первообразная для непрерывной функции  $f$  на отрезке  $[a; b]$ . Имеем

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Далее,  $F'(x) = f(x) \forall x \in [a; b]$ . Поэтому (теорема о производной композиции функций)

$$(F \circ \varphi)'(t) = (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t) \quad \forall t \in [\alpha; \beta],$$

т. е.  $F \circ \varphi$  — первообразная для непрерывной функции  $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$  на отрезке  $[\alpha; \beta]$ . Отсюда

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)dt = (F \circ \varphi)(\beta) - (F \circ \varphi)(\alpha) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

■

**Теорема 2** (Об интегрировании по частям в интеграле Римана). Если  $u, v \in C^1[a; b]$ , то

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx, \quad \int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

**Доказательство.** Второе из равенств в условии — лишь другая форма записи первого равенства, поэтому будем доказывать лишь первое равенство. Т. к.  $u, v \in C^1[a; b]$ , то  $uv \in C^1[a; b]$ . Значит,  $(uv)'$  непрерывна, и  $uv$  служит для неё первообразной на отрезке  $[a; b]$ . Тогда

$$\int_a^b (u(x)v(x))' dx = u(x)v(x)\Big|_a^b.$$

Отсюда, применяя правило Лейбница, и получаем требуемое. ■

**Теорема 3.** Пусть  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $f \in C^{n+1}(a; b)$  и  $x_0 \in (a; b)$ . Тогда для всех  $x \in (a; b)$  имеет место формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

**Доказательство.** Докажем индукцией по  $n$ . Если  $n = 0$ , то  $f \in C^1(a; b)$ , а  $f' \in C(a; b)$ . Значит,  $f$  — первообразная для функции  $f'$  на интервале  $(a; b) \supset [x_0; x]$ , и верна формула Ньютона — Лейбница:

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t) dt.$$

После переноса  $f(x_0)$  в правую часть получается формула из условия при  $n = 0$ .

Допустим, что утверждение верно для  $n - 1$ :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x - t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt. \quad (*)$$

Покажем, что утверждение верно и для  $n$ . Вычислим интеграл в (\*) по частям:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt &= \left\{ \begin{array}{l} u = f^{(n)}(t), \quad du = f^{(n+1)}(t) dt, \\ dv = (x-t)^{n-1} dt, \quad v = -\frac{1}{n}(x-t)^n \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \left( -f^{(n)}(t) \frac{1}{n} (x-t)^n \Big|_{x_0}^x + \int_{x_0}^x \frac{1}{n} (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \right) = \\ &= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt. \end{aligned}$$

Функции  $u(t) = f^{(n)}(t)$  и  $v(t) = -\frac{1}{n}(x-t)^n$  непрерывно дифференцируемы на  $(a; b) \supset [x_0; x]$ , поэтому можно применять интегрирование по частям. Подставив найденный интеграл в (\*), получим формулу из формулировки теоремы. ■

### 13. ФОРМУЛА ВАЛЛИСА

Положим  $I_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Если  $n \geq 2$ , то

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \sin x dx = - \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x d \cos x = \\ &= - \sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x d \sin^{n-1} x = 0 + (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^{n-2} x dx = \\ &= (n-1) \int_0^{\pi/2} (\sin^{n-2} x - \sin^n x) dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n). \end{aligned}$$

Отсюда  $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$  — рекуррентная формула для последовательности  $I_n$ . Рассмотрим её отдельно для чётных и нечётных  $n$ .

$$\begin{array}{ll} I_0 = \frac{\pi}{2}, & I_1 = 1, \\ I_2 = \frac{1}{2} \cdot I_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & I_3 = \frac{2}{3} \cdot I_1 = \frac{2}{3}, \\ I_4 = \frac{3}{4} \cdot I_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & I_5 = \frac{4}{5} \cdot I_3 = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}, \\ \vdots & \vdots \\ I_{2k} = \dots = \frac{(2k-1) \cdot (2k-3) \cdot \dots \cdot 1}{2k \cdot (2k-2) \cdot \dots \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}, & I_{2k+1} = \dots = \frac{2k \cdot (2k-2) \cdot \dots \cdot 2}{(2k+1) \cdot (2k-1) \cdot \dots \cdot 1}, \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Отсюда

$$I_{2k} = \frac{2k \cdot (2k-1) \cdot (2k-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{(2k \cdot (2k-2) \cdot \dots \cdot 2)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2k)!}{4^k \cdot (k!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{C_{2k}^k}{4^k} \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$I_{2k+1} = \frac{(2k \cdot (2k-2) \cdot \dots \cdot 2)^2}{(2k+1) \cdot 2k \cdot (2k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{4^k (k!)^2}{(2k+1)!} = \frac{4^k}{2k+1} \cdot \frac{1}{C_{2k}^k}.$$

Рассмотрим последовательность  $\{I_k\}_{k=0}^{\infty}$ . Т.к.  $\sin^n x \geq \sin^{n+1} x$  для всех  $x \in [0; \pi/2]$ , причём неравенство строгое при  $x \in (0; \pi/2)$ , то (достаточное условие положительности интеграла)  $I_k > I_{k+1}$ , т.е. последовательность  $\{I_k\}$  убывает. Итак,

$$I_{2k+1} < I_{2k} < I_{2k-1},$$

$$\frac{4^k}{2k+1} \cdot \frac{1}{C_{2k}^k} < \frac{C_{2k}^k}{4^k} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{4^{k-1}}{2k-1} \cdot \frac{1}{C_{2k-2}^{k-1}},$$

$$\frac{4^{2k}}{2k+1} \cdot \frac{1}{(C_{2k}^k)^2} < \frac{\pi}{2} < \frac{4^{2k-1}}{2k-1} \cdot \frac{1}{C_{2k-2}^{k-1} \cdot C_{2k}^k},$$

$$\underbrace{\frac{4^{2k}}{2k+1} \cdot \frac{1}{(C_{2k}^k)^2}}_{A_k} < \frac{\pi}{2} < \underbrace{\frac{4^{2k}}{2k} \cdot \frac{1}{(C_{2k}^k)^2}}_{B_k = \frac{2k+1}{2k} A_k}.$$

Последовательность  $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$  возрастает:

$$A_{k+1} = \frac{4^{2k+2}}{2k+3} \cdot \frac{1}{(C_{2k+2}^{k+1})^2} = \frac{4^{2k}}{2k+1} \cdot \frac{1}{(C_{2k}^k)^2} \cdot \frac{2k+1}{2k+3} \cdot 16 \cdot \frac{(k+1)^4}{(2k+1)^2 (2k+2)^2} = A_k \cdot \frac{(2k+2)^2}{(2k+1)(2k+3)} > A_k.$$

Т.к.  $\{A_k\}$  возрастает и ограничена сверху (числом  $\pi/2$ ),  $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A$ . Далее,

$$B_k = A_k \cdot \frac{2k+1}{2k}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} B_k = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k+1}{2k} = A.$$

По теореме о трёх последовательностях,  $A \leq \frac{\pi}{2} \leq A$ , откуда  $A = \frac{\pi}{2}$ . В итоге

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{4^{2k}}{2k+1} \cdot \frac{1}{(C_{2k}^k)^2}.$$

— формула Валлиса.

#### 14. ПЕРВАЯ ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ ДЛЯ ИНТЕГРАЛА РИМАНА. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АБЕЛЯ

**Теорема 1** (Первая теорема о среднем для интеграла Римана). Пусть:

1.  $f \in B[a; b]$ ,  $m \leq f(x) \leq M$  для всех  $x \in [a; b]$ ;
2.  $g \in R[a; b]$  и  $g(x) \geq 0$  для каждого  $x \in [a; b]$ ;
3.  $fg \in R[a; b]$ .

Тогда

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx. \quad (*)$$

Если, дополнительно,  $f \in C[a; b]$ , то существует  $c \in [a; b]$  такое, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx. \quad (\star)$$

**Доказательство.** Если  $g(x) \geq 0$ , то  $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$ . Интегрируя, получаем (\*).

Докажем второе утверждение теоремы. Если интеграл  $\int_a^b g$  равен нулю, то из (\*) видно, что

$\int_a^b fg = 0$ , и равенство (\*) верно при любом  $c \in [a; b]$ ; если не равен, поделим на него (\*):

$$m \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \Big/ \int_a^b g(x)dx \leq M.$$

По теореме о промежуточном значении для непрерывной функции, заключаем, что найдётся  $c \in [a; b]$  такое, что

$$f(c) = \int_a^b f(x)g(x)dx \Big/ \int_a^b g(x)dx.$$

■

Взяв  $g \equiv 1$ , получаем

**Следствие 1.** Если  $f \in C[a; b]$ , то для некоторого  $c \in [a; b]$  справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

**Примечание.** Формула (\*) даёт следующую оценку для интеграла в её левой части:

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \max_{x \in [a; b]} |f(x)| \int_a^b g(x)dx.$$

**Теорема 2** (Преобразование Абеля). Пусть  $A_k := \sum_{i=1}^k a_i$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  (при  $k = 0$  пустая сумма).

Тогда

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = A_n b_n + \sum_{i=1}^{n-1} A_i (b_i - b_{i+1}).$$

**Доказательство.** В самом деле,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i b_i &= \sum_{i=1}^n (A_i - A_{i-1}) b_i = \sum_{i=1}^n A_i b_i - \sum_{i=1}^n A_{i-1} b_i = \sum_{i=1}^n A_i b_i - \sum_{i=0}^{n-1} A_i b_{i+1} = \\ &= A_n b_n - A_0 b_1 + \sum_{i=1}^{n-1} A_i (b_i - b_{i+1}) = A_n b_n + \sum_{i=1}^{n-1} A_i (b_i - b_{i+1}). \end{aligned}$$

■

## 15. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АБЕЛЯ. ВТОРАЯ ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ ДЛЯ ИНТЕГРАЛА РИМАНА

**Лемма 1.** Пусть числа  $A_k := \sum_{i=1}^k a_i$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , удовлетворяют неравенствам  $m \leq A_k \leq M$ , а  $b_i \geq b_{i+1} \geq 0$  при  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . Тогда

$$mb_1 \leq \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq Mb_1.$$

**Доказательство.** Докажем правое из неравенств (левое аналогично):

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = A_n b_n + \sum_{i=1}^{n-1} A_i (b_i - b_{i+1}) \leq Mb_n + \sum_{i=1}^{n-1} M(b_i - b_{i+1}) = Mb_n + Mb_1 - Mb_n = Mb_1.$$

■

**Теорема 1** (Вторая теорема о среднем для интеграла Римана). Допустим,  $f, g \in R[a; b]$  и функция  $f$  монотонна на  $[a; b]$ . Тогда  $\exists \xi \in [a; b]$  такое, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^\xi g(x)dx + f(b) \int_\xi^b g(x)dx.$$

Нам понадобится лемма:

**Лемма 2.** Допустим,  $f, g \in R[a; b]$ , причём функция  $f$  неотрицательна и не возрастает на отрезке  $[a; b]$ . Тогда  $\exists \xi \in [a; b]$  такое, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^\xi g(x)dx.$$

**Доказательство.** Функция  $G(x) := \int_a^x g(t)dt$  непрерывна на  $[a; b]$ . Поэтому она ограничена на  $[a; b]$ , обозначим  $m := \min_{x \in [a; b]} G(x)$ ,  $M := \max_{x \in [a; b]} G(x)$ . Сначала установим неравенство

$$mf(a) \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq Mf(a). \quad (*)$$

Возьмём любое  $\varepsilon > 0$ . Т.к.  $g \in R[a; b]$ , то  $|g(x)| \leq C < +\infty$  на  $[a; b]$ , а т.к.  $f \in R[a; b]$ , согласно теореме Дарбу найдётся разбиение  $T = \{\Delta_i = [x_{i-1}; x_i]\}_{i=1}^n$  отрезка  $[a; b]$ , для которого  $\omega(f, T) < \varepsilon/C$ . Имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x)dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x_{i-1}) + f(x) - f(x_{i-1}))g(x)dx = \\ &= \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)dx + E, \quad E := \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(x_{i-1}))g(x)dx, \end{aligned}$$



причём  $E$  мало по абсолютной величине:

$$\begin{aligned}
 |E| &\leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - f(x_{i-1})| |g(x)| dx \leq C \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \omega(f, \Delta_i) dx = \\
 &= C \sum_{i=1}^n \omega(f, \Delta_i) |\Delta_i| = C\omega(f, T) < \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Учтём неотрицательность и невозрастание функции  $f$  на  $[a; b]$  и применим лемму 1 с

$$\begin{aligned}
 a_i &:= G(x_i) - G(x_{i-1}), \quad b_i := f(x_{i-1}), \\
 A_k &= \sum_{i=1}^k a_i = \sum_{i=1}^k (G(x_i) - G(x_{i-1})) = G(x_k) - G(x_0) = G(x_k); \\
 m &\leq A_k = G(x_k) \leq M.
 \end{aligned}$$

Получим

$$\begin{aligned}
 mf(a) &\leq \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) (G(x_i) - G(x_{i-1})) \leq Mf(a); \\
 mf(a) &\leq \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x) dx \leq Mf(a); \\
 mf(a) &\leq \int_a^b f(x)g(x)dx - E \leq Mf(a), \quad |E| < \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Т. к.  $\varepsilon > 0$  произвольно, то из последнего неравенства вытекает (\*).

Теперь выведем из (\*) утверждение теоремы. Отметим, что если  $f(a) = 0$ , то из (\*) следует, что  $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ , а значит, обе части равенства из формулировки леммы равны нулю, значит, утверждение выполнено. Пусть теперь  $f(a) > 0$ . Функция  $G(x)$ , как было отмечено ранее, непрерывна, причём найдутся такие точки  $c, d \in [a; b]$ , что

$$G(c) \leq \int_a^b f(x)g(x)dx / f(a) \leq G(d).$$

Таким образом, по теореме о промежуточных значениях непрерывной функции, найдётся точка  $\xi \in [a; b]$  такая, что  $G(\xi) = \int_a^b f(x)g(x)dx$ , а это и есть утверждение леммы. ■

Теперь докажем теорему, ради которой тут собрались:

**Доказательство.** Если  $f$  не убывает на  $[a; b]$ , то функция  $h(x) := f(b) - f(x)$  неотрицательна, не возрастает и интегрируема на  $[a; b]$ . Применим лемму и проведём преобразования:

$$\begin{aligned}
 \int_a^b h(x)g(x)dx &= h(a) \int_a^\xi g(x)dx; \quad \int_a^b (f(b) - f(x))g(x)dx = (f(b) - f(a)) \int_a^\xi g(x)dx; \\
 f(b) \left( \int_a^b g(x)dx - \int_a^\xi g(x)dx \right) &+ f(a) \int_a^\xi g(x)dx = \int_a^b f(x)g(x)dx.
 \end{aligned}$$

Если  $f$  не возрастает на  $[a; b]$ , функция  $h(x) := f(x) - f(b)$  неотрицательна, не возрастает и интегрируема на  $[a; b]$ . Повторяя выкладки выше, снова получим требуемое. ■

16. ВАРИАЦИЯ ФУНКЦИИ И ФУНКЦИИ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ ( $BV$ -ФУНКЦИИ). О СВЯЗИ ОГРАНИЧЕННОСТИ ВАРИАЦИИ С МОНОТОННОСТЬЮ И ОГРАНИЧЕННОСТЬЮ ФУНКЦИИ. АДДИТИВНОСТЬ ВАРИАЦИИ И СТРУКТУРА  $BV$ -ФУНКЦИИ

**Определение 1.** *Вариация* функции  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  (на отрезке  $[a; b]$ ) — величина

$$\overset{b}{V}_a f := \sup_T \sum_{i=1}^m |f(a_i) - f(a_{i-1})|,$$

где  $\sup$  берётся по всем разбиениям  $T = \{[a_{i-1}, a_i]\}_{i=1}^m$  отрезка  $[a; b]$ . Если  $\overset{b}{V}_a f < +\infty$ , то  $f$  — *функция ограниченной вариации* на  $[a; b]$ . Запись:  $f \in BV[a; b]$ .

Для разбиения  $T = \{[a_{i-1}, a_i]\}_{i=1}^m$  отрезка  $[a; b]$  введём обозначение

$$V(f, T) := \sum_{i=1}^m |f(a_i) - f(a_{i-1})|.$$

**Предложение 1.** Любая монотонная на отрезке функция имеет ограниченную вариацию. При этом  $\overset{b}{V}_a f$  равна  $f(b) - f(a)$ , если  $f$  не убывает и  $f(a) - f(b)$ , если  $f$  не возрастает.

**Доказательство.** Пусть  $T = \{[a_{i-1}, a_i]\}_{i=1}^m$  — произвольное разбиение отрезка  $[a; b]$ . Если  $f$  не убывает, то

$$V(f, T) = \sum_{i=1}^m |f(a_i) - f(a_{i-1})| = \sum_{i=1}^m (f(a_i) - f(a_{i-1})) = f(b) - f(a),$$

$$\overset{b}{V}_a f = \sup_T V(f, T) = f(b) - f(a).$$

Другой случай рассматривается аналогично. ■

**Предложение 2.** Любая функция ограниченной вариации ограничена.

**Доказательство.** Для каждого  $x \in [a; b]$  имеем

$$2|f(x)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| + |f(a)| + |f(b)|.$$

Набор из двух отрезков  $[a; x]$  и  $[x; b]$  есть разбиение  $[a; b]$ , поэтому

$$|f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq \overset{b}{V}_a f.$$

В итоге,

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2} \left( \overset{b}{V}_a f + |f(a)| + |f(b)| \right) \text{ для всех } x \in [a; b].$$

Отсюда следует требуемое. ■

**Теорема 1** (Об аддитивности вариации). Если  $f \in BV[a; b]$  и  $a < c < b$ , то  $\overset{b}{V}_a f = \overset{c}{V}_a f + \overset{b}{V}_c f$ .

**Доказательство.** Возьмём произвольное  $\varepsilon > 0$ . Найдём разбиения  $T_1$  и  $T_2$  отрезков  $[a; c]$  и  $[c; b]$ , соответственное, такие, что

$$V(f, T_1) > \overset{c}{V}_a f - \varepsilon \quad \text{и} \quad V(f, T_2) > \overset{b}{V}_c f - \varepsilon.$$

Тогда  $T_1 \sqcup T_2$  — разбиение отрезка  $[a; b]$  и

$$\bigvee_a^b f \geq V(f, T_1 \sqcup T_2) = V(f, T_1) + V(f, T_2) > \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f - 2\varepsilon.$$

Т. к.  $\varepsilon > 0$  выбиралось произвольно,

$$\bigvee_a^b f \geq \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f.$$

Докажем обратное неравенство. Для каждого  $\varepsilon > 0$  отыщем разбиение  $T$  отрезка  $[a; b]$ , для которого

$$V(f, T) > \bigvee_a^b f - \varepsilon.$$

Если порождающий разбиение  $T$  набор точек не содержит  $c$ , добавим её в этот набор и получим новое разбиение (оставим ему старое обозначение  $T$ ), для которого тем более выполнено последнее. При этом  $T = T_1 \sqcup T_2$  — разбиения отрезков  $[a; c]$  и  $[c; b]$ . Получаем

$$\bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f \geq V(f, T_1) + V(f, T_2) = V(f, T) > \bigvee_a^b f - \varepsilon,$$

откуда

$$\bigvee_a^b f \leq \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f.$$

■

**Лемма 1.** Если  $f \in BV[a; b]$ , то:

1. функции  $V$  и  $V - f$  не убывают на  $[a; b]$ ,  $V(x) := \bigvee_a^x f$ ;
2.  $f$  есть разность двух неубывающих функций.

**Доказательство.**

1. Пусть  $x_2 > x_1$ . Имеем:

$$V(x_2) = \bigvee_a^{x_2} f = \bigvee_a^{x_1} f + \bigvee_{x_1}^{x_2} f \geq \bigvee_a^{x_1} f = V(x_1); \quad V(x_2) - V(x_1) = \bigvee_{x_1}^{x_2} f \geq |f(x_2) - f(x_1)| \geq f(x_2) - f(x_1),$$

а значит,  $(V - f)(x_2) \geq (V - f)(x_1)$ .

2.  $f$  есть разность функций  $V$  и  $V - f$ , которые не убывают, согласно п. 1.

■

**Теорема 2** (О структуре  $BV$ -функций).  $f \in BV[a; b] \Leftrightarrow f$  есть разность двух неубывающих функций.

**Доказательство.**  $\Rightarrow$ . Доказано в предыдущей лемме.

$\Leftarrow$ . Пусть  $f = g - h$ , где  $g$  и  $h$  не убывают на  $[a; b]$ . Возьмём произвольное разбиение  $T = \{[a_{i-1}; a_i]\}_{i=1}^m$  отрезка  $[a; b]$ . Тогда:

$$\begin{aligned} V(f, T) &= \sum_{i=1}^m |g(a_i) + h(a_i) - g(a_{i-1}) - h(a_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^m |g(a_i) - g(a_{i-1})| + \\ &\quad + \sum_{i=1}^m |h(a_i) - h(a_{i-1})| = g(b) - g(a) + h(b) - h(a); \end{aligned}$$

$$\bigvee_a^b f = \sup_T V(f, T) \leq g(b) - g(a) + h(b) - h(a) < +\infty.$$

Значит,  $f \in BV[a; b]$  по определению.

■

17. ВАРИАЦИЯ НЕПРЕРЫВНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ. СПРЯМЛЯЕМЫЕ КРИВЫЕ, КРИТЕРИЙ СПРЯМЛЯЕМОСТИ

**Теорема 1.** Допустим,  $f \in C^{(1)}[a; b]$ . Тогда  $f \in BV[a; b]$  и  $\bigvee_a^b f = \int_a^b |f'(x)| dx$ .

**Доказательство.** По условию,  $f' \in C[a; b]$ , значит,  $|f'| \in R[a; b]$  и  $\int_a^b |f'(x)| dx =: I$  определён.

Докажем, что  $\bigvee_a^b f = I$ .

Сначала установим неравенство  $\bigvee_a^b f < +\infty$ . Возьмём любое разбиение  $T = \{[a_{i-1}; a_i]\}_{i=1}^m$  отрезка  $[a; b]$  и оценим  $V(f, T)$ :

$$\begin{aligned} V(f, T) &= \sum_{i=1}^m |f(a_i) - f(a_{i-1})| \stackrel{\text{т. Лагранжа}}{=} \sum_{i=1}^m |f'(\xi_i)| (a_i - a_{i-1}) \leq \\ &\leq \max_{x \in [a; b]} |f'(x)| \sum_{i=1}^m (a_i - a_{i-1}) = \max_{x \in [a; b]} |f'(x)| (b - a). \end{aligned}$$

Мы воспользовались тем, что функция  $|f'|$  непрерывна, а потому ограничена на  $[a; b]$ . Из последнего неравенства мы видим, что  $\bigvee_a^b f \leq \max_{x \in [a; b]} |f'(x)| (b - a) < +\infty$ .

Далее, возьмём произвольное  $\varepsilon > 0$ . Найдётся  $\delta > 0$  такое, что для всякого отмеченного  $\delta$ -разбиения  $T\xi$  отрезка  $[a; b]$  верно  $|\mathcal{S}(|f'|, T\xi) - I| < \varepsilon$ . Найдём разбиение  $T = \{[a_{i-1}; a_i]\}_{i=1}^m$ , для которого

$$\bigvee_a^b f - \varepsilon < V(f, T) \leq \bigvee_a^b f.$$

Размельчая  $T$  так, чтобы диаметр стал меньше  $\delta$ , мы не уменьшим  $V(f, T)$  и сохраним последнее неравенство. Поэтому сразу считаем  $d(T) < \delta$ . Получаем:  $V(f, T) = \mathcal{S}(|f'|, T\xi)$ .

$$\left| \bigvee_a^b f - I \right| \leq \left| \bigvee_a^b f - V(f, T) \right| + |V(f, T) - \mathcal{S}(|f'|, T\xi)| + |\mathcal{S}(|f'|, T\xi) - I| \leq 2\varepsilon.$$

Т. к.  $\varepsilon > 0$  выбиралось произвольным,  $\bigvee_a^b f = I$ . ■

**Определение 1.** Плоская кривая  $\gamma \subset \mathbb{R}^2$  задаётся параметрически заданной функцией (путём)

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a; b].$$

Формально,  $\gamma$  есть образ отрезка  $[a; b]$  при отображении

$$t \in [a; b] \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2.$$

**Примечание.** Считаем  $x(t), y(t) \in C[a; b]$ ; в этом случае как сама кривая, так и задающий её путь называется *непрерывными*. Также предполагаем, что  $\gamma$  — простая кривая без кратных точек, что означает следующее. Если  $P_1 = (x(t_1), y(t_1))$  и  $P_2 = (x(t_2), y(t_2))$  и  $t_1 \neq t_2$ , то  $P_1 \neq P_2$ .

Разобьём кривую точками  $P_i$  ( $i = 0, \dots, m$ ) на  $m$  дуг. Т. к. кривая не имеет самопересечений, такому разбиению на дуги однозначно соответствует некоторое разбиение  $T = \{\Delta_i = [a_{i-1}; a_i]\}_{i=1}^m$

отрезка  $[a; b]$ . А именно, если  $(x_i, y_i)$  — координаты точек  $P_i$ , то  $x_i = x(a_i)$  и  $y_i = y(a_i)$  для  $i = 0, \dots, m$ .

Длина хорды, стягивающей дугу  $P_{i-1}P_i$  есть  $|P_{i-1}P_i|$ . Длина  $\ell(P_0P_1 \dots P_m)$  всей ломаной равна  $\sum_{i=1}^m |P_{i-1}P_i|$ .

**Определение 2.** Если  $\ell(\gamma) < +\infty$ ,

$$\ell(\gamma) := \sup_{P_0P_1 \dots P_m} \sum_{i=1}^m |P_{i-1}P_i| = \sup_T \sum_{i=1}^m |P_{i-1}P_i|,$$

то кривая  $\gamma$  называется *спрямляемой*, а  $\ell(\gamma)$  — её *длиной*.

**Теорема 2** (Критерий спрямляемости кривой). Плоская непрерывная кривая

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a; b]$$

без кратных точек спрямляема тогда и только тогда, когда  $x(t)$  и  $y(t)$  — функции ограниченной вариации.

**Доказательство.**  $\Rightarrow$ . Допустим,  $\gamma$  — спрямляемая кривая, т. е.

$$\sup_T \sum_{i=1}^m |P_{i-1}P_i| = \ell(\gamma) < +\infty.$$

Тогда имеем

$$\sum_{i=1}^m |x(a_i) - x(a_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^m |P_{i-1}P_i| \leq \sup_T \sum_{i=1}^m |P_{i-1}P_i| = \ell(\gamma).$$

Значит,  $\bigvee_a^b x(t) \leq \ell(\gamma) < +\infty$ , т. е.  $x(t) \in BV[a; b]$ . Аналогично,  $y(t) \in BV[a; b]$ .

$\Leftarrow$ . Пусть  $\bigvee_a^b x(t) < +\infty$  и  $\bigvee_a^b y(t) < +\infty$ . Тогда

$$\sum_{i=1}^m |P_{i-1}P_i| \leq \sum_{i=1}^m |x(a_i) - x(a_{i-1})| + \sum_{i=1}^m |y(a_i) - y(a_{i-1})| \leq \bigvee_a^b x + \bigvee_a^b y.$$

Значит,  $\ell(\gamma) = \sup_T \sum_{i=1}^m |P_{i-1}P_i| \leq \bigvee_a^b x + \bigvee_a^b y < +\infty$ . ■

**Примечание.** Все неравенства выше — это просто следствия из неравенства треугольника.

## 18. ТЕОРЕМА О ДЛИНЕ ГЛАДКОЙ КРИВОЙ. ДЛИНА ГЛАДКОЙ КРИВОЙ, ОПИСЫВАЮЩЕЙСЯ ЯВНО ЗАДАННОЙ ФУНКЦИЕЙ

**Теорема 1** (О длине гладкой кривой). Пусть задана плоская простая кривая

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a; b],$$

причём  $x(t), y(t) \in C^{(1)}[a; b]$ . Тогда  $\gamma$  спрямляема и

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (*)$$

**Доказательство.** Т.к.  $x(t), y(t) \in C^{(1)}[a; b]$ , то  $x(t)$  и  $y(t)$  — функции ограниченной вариации. Тогда (критерий спрямляемости кривой) кривая  $\gamma$  спрямляема.

Докажем формулу (\*). По условию,  $x(t), y(t) \in C^{(1)}[a; b]$ , поэтому  $x'(t), y'(t) \in C[a; b]$ . Значит, функция  $f(t) := \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$  непрерывна, и интеграл в (\*) определён.

Возьмём какое-нибудь  $\varepsilon > 0$ . Т.к.  $f \in R[a; b]$ , найдётся  $\delta_1 > 0$  такое, что для каждого отмеченного  $\delta_1$ -разбиения  $T\xi$  отрезка  $[a; b]$  верно

$$\left| \mathcal{S}(f, T\xi) - \int_a^b f(t) dt \right| < \varepsilon.$$

Т.к.  $y'(t)$  непрерывна на  $[a; b]$ , то она равномерно непрерывна на  $[a; b]$ , т.е. существует  $\delta_2 > 0$  такое, что

$$(\varphi - \psi) < \delta_2 \Rightarrow |y'(\varphi) - y'(\psi)| < \varepsilon.$$

Положим  $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . Далее, найдём разбиение  $T = \{\Delta_i = [a_{i-1}, a_i]\}_{i=1}^m$ , для которого длина вписанной ломаной  $\varepsilon$ -близка к длине кривой:

$$\ell(\gamma) - \varepsilon < \sum_{i=1}^m |P_{i-1}P_i| \leq \ell(\gamma).$$

При размельчении  $T$  сумма  $\sum_{i=1}^m |P_{i-1}P_i|$  не уменьшается, а последнее неравенство сохраняется. Размельчим  $T$  так, чтобы  $d(T) < \delta$ . Оценим длину вписанной ломаной:

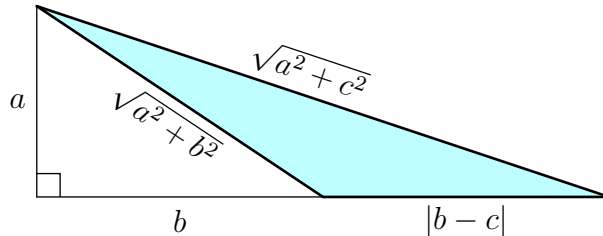
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m |P_{i-1}P_i| &= \sum_{i=1}^m \sqrt{(x(a_i) - x(a_{i-1}))^2 + (y(a_i) - y(a_{i-1}))^2} \text{ т. Лагранжа} \\ &= \sum_{i=1}^m \sqrt{(x'(\varphi_i))^2 + (y'(\psi_i))^2} |\Delta_i| = \sum_{i=1}^m \sqrt{(x'(\varphi_i))^2 + (y'(\varphi_i))^2} |\Delta_i| + E = \mathcal{S}(f, T\xi) + E, \end{aligned}$$

где  $E := \sum_{i=1}^m \left( \sqrt{(x'(\varphi_i))^2 + (y'(\psi_i))^2} - \sqrt{(x'(\varphi_i))^2 + (y'(\varphi_i))^2} \right) |\Delta_i|$ , а отмеченное разбиение  $T\xi$  получилось добавлением меток  $\xi_i$  к имеющемуся разбиению  $T$ .

Для оценки величины  $E$  нам потребуется неравенство

$$\left| \sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2} \right| \leq |b - c|, \quad a, b, c \geq 0.$$

Это опять же просто неравенство для вот такого треугольника:



$$\begin{aligned} |E| &= \left| \sum_{i=1}^m \left( \sqrt{(x'(\varphi_i))^2 + (y'(\psi_i))^2} - \sqrt{(x'(\varphi_i))^2 + (y'(\varphi_i))^2} \right) |\Delta_i| \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^m |y'(\psi_i) - y'(\varphi_i)| |\Delta_i| < \varepsilon(b - a). \end{aligned}$$

Наконец, оценим разность между длиной кривой и интегралом:

$$\begin{aligned} \left| \ell(\gamma) - \int_a^b f(t) dt \right| &\leq \left| \ell(\gamma) - \sum_{i=1}^m |P_{i-1}P_i| \right| + \left| \sum_{i=1}^m |P_{i-1}P_i| - \mathcal{S}(f, T\xi) \right| + \left| \mathcal{S}(f, T\xi) - \int_a^b f(t) dt \right| \leq \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon(b-a) + \varepsilon = \varepsilon(2+b-a). \end{aligned}$$

Т. к.  $\varepsilon > 0$  выбиралось произвольным, верна формула (\*). ■

**О длине гладкой кривой, описываемой явно заданной функцией.** Пусть кривая  $\gamma$  задаётся уравнением  $y = f(x)$ ,  $x \in [a; b]$ . Считаем  $f' \in C[a; b]$ . Тогда

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

В самом деле, положим

$$x(t) = t, \quad y(t) = (y \circ x)(t), \quad a \leq t \leq b.$$

Тогда

$$x'(t) = 1, \quad y'(t) = y'(x)x'(t) = y'(x), \quad dx = dt.$$

Остаётся применить теорему о длине гладкой кривой.

## 19. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЛИН КРИВЫХ И ПЛОЩАДЕЙ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

**Теорема 1** (О длине кривой в полярных координатах). Пусть кривая  $\gamma$  задана в полярных координатах функцией  $r = r(\varphi)$ ,  $\varphi \in [\alpha; \beta]$ . Считаем  $r(\varphi) \in C^{(1)}[\alpha; \beta]$ . Тогда

$$\ell(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r'(\varphi))^2 + r^2(\varphi)} d\varphi.$$

**Доказательство.** Равенства  $x = r \cos \varphi$  и  $y = r \sin \varphi$  связывают декартовы координаты с полярными, поэтому можно считать, что  $\gamma$  параметризована параметром  $\varphi$  так:

$$\varphi : \begin{cases} x = x(\varphi) := r(\varphi) \cos \varphi, \\ y = y(\varphi) := r(\varphi) \sin \varphi \end{cases} \quad \varphi \in [\alpha; \beta].$$

Т. к.  $r(\varphi) \in C^{(1)}[\alpha; \beta]$ , то  $x(\varphi), y(\varphi) \in C^{(1)}[\alpha; \beta]$ . По теореме о длине гладкой кривой  $\gamma$  спрямляема и

$$\ell(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2} d\varphi.$$

Вычислим  $x'(\varphi)$  и  $y'(\varphi)$ :

$$\begin{aligned} x'(\varphi) &= (r(\varphi) \cos \varphi)' = r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi; \\ y'(\varphi) &= (r(\varphi) \sin \varphi)' = r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi; \\ (x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2 &= (r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi)^2 + (r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi)^2 = (r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2. \end{aligned}$$

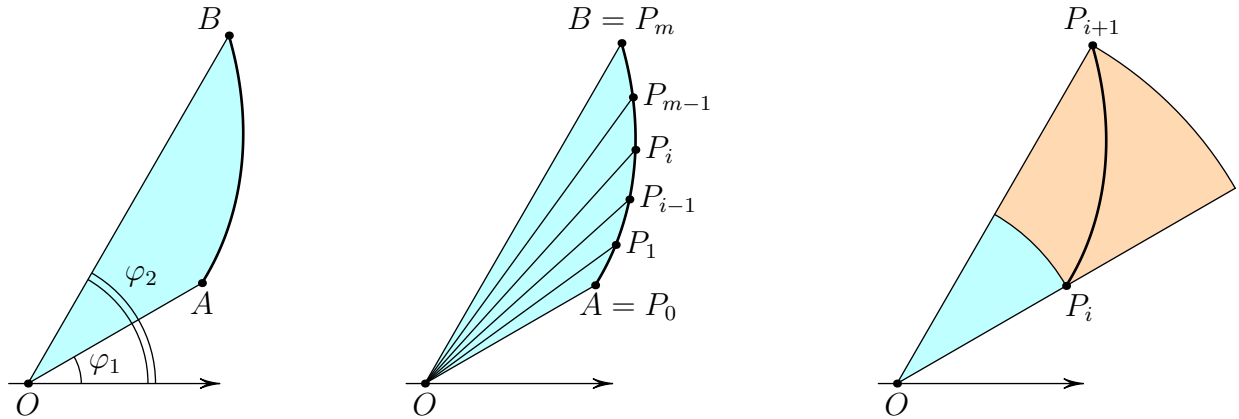
Подставив в формулу длины гладкой кривой, получаем требуемое. ■

**Теорема 2** (О площади плоских фигур в полярных координатах). Пусть на отрезке  $[\varphi_1; \varphi_2] \subset [0; 2\pi]$  задана непрерывная функция  $r(\varphi) \in R[\varphi_1; \varphi_2]$ . Рассмотрим в полярной системе координат

криволинейный сектор  $OAB$ , ограниченный графиком функции  $r(\varphi)$  и лучами  $\varphi = \varphi_1$  и  $\varphi = \varphi_2$ . Тогда площадь этого сектора равна

$$S(OAB) = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi) d\varphi.$$

**Доказательство.** Рассмотрим произвольное разбиение  $T = \{[a_{i-1}; a_i]\}_{i=1}^m$  отрезка  $[\varphi_1; \varphi_2]$ . Ему соответствуют точки  $P_i(a_i, r(a_i))$  на кривой  $AB$ .



Тогда (аддитивность функции площади)  $S(OAB) = \sum_{i=1}^m S(OP_{i-1}P_i)$ . Каждый криволинейный сектор  $OP_{i-1}P_i$  содержит сектор круга с вершиной  $O$  и двумя радиусами длины  $\inf_{\varphi \in [a_{i-1}; a_i]} r(\varphi)$ , лежащими на лучах  $OP_{i-1}$  и  $OP_i$ . В то же время,  $OP_{i-1}P_i$  лежит в секторе круга с вершиной  $O$  и двумя радиусами длины  $\sup_{\varphi \in [a_{i-1}; a_i]} r(\varphi)$ , лежащими на лучах  $OP_{i-1}$  и  $OP_i$ . Значит (монотонность функции площади) верна оценка

$$m_i(a_i - a_{i-1}) \leq S(OP_{i-1}P_i) \leq M_i(a_i - a_{i-1}),$$

$$m_i := \inf_{\varphi \in [a_{i-1}; a_i]} \frac{1}{2} r^2(\varphi), \quad M_i := \sup_{\varphi \in [a_{i-1}; a_i]} \frac{1}{2} r^2(\varphi).$$

Складываем по  $i$ :

$$\sum_{i=1}^m m_i(a_i - a_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^m S(OP_{i-1}P_i) \leq \sum_{i=1}^m M_i(a_i - a_{i-1});$$

$$s\left(\frac{r^2}{2}, T\right) \leq S(OAB) \leq S\left(\frac{r^2}{2}, T\right);$$

$$\sup_T s\left(\frac{r^2}{2}, T\right) \leq S(OAB) \leq \inf_T S\left(\frac{r^2}{2}, T\right);$$

$$(D) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{r^2(\varphi)}{2} d\varphi \leq S(OAB) \leq (D) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{r^2(\varphi)}{2} d\varphi.$$

Заметим, что (критерий Дарбу)  $(D) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{r^2(\varphi)}{2} d\varphi = (D) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{r^2(\varphi)}{2} d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{r^2(\varphi)}{2} d\varphi$ , откуда получа-

ем требуемое. ■



## 20. ПЛОЩАДИ ПЛОСКИХ ФИГУР В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ. ОБЪЁМЫ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

Пусть заданы функции  $y(t) \in C[\alpha; \beta]$  и  $x(t) \in C^{(1)}[\alpha; \beta]$ , причём  $y(t) \geq 0 \forall t \in [\alpha; \beta]$ , а  $x(t)$  возрастает на  $[\alpha; \beta]$ . Рассмотрим плоскую кривую

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha; \beta].$$

Т. к. функция  $x(t)$  возрастает, то  $a < b$ , где  $a := x(\alpha)$ ,  $b := x(\beta)$ , а также

$$\forall (x, y) \in \gamma \exists! t \in [\alpha; \beta] : (x = x(t) \wedge y = y(t)).$$

Отсюда вытекает, в частности, что  $\gamma$  — кривая без самопересечений.

Снова воспользуемся тем, что функция  $x(t) : [\alpha; \beta] \rightarrow [a; b]$  возрастает. Т. к. она ещё и непрерывна, то (теорема об обратной функции) найдётся непрерывная обратная функция  $t = t(x) : [a; b] \rightarrow [\alpha; \beta]$ . Покажем, что  $\gamma$  — график функции  $y = f(x) : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $f(x) := (y \circ t)(x)$ .

В самом деле,

$$(x, y) \in \gamma \Leftrightarrow \exists! t \in [\alpha; \beta] : (x = x(t) \wedge y = y(t)) \Leftrightarrow f(x) = (y \circ t)(x).$$

**Теорема 1** (О площади плоских фигур в прямоугольных координатах). Площадь криволинейной трапеции с параметрически заданной верхней границей равна

$$S(A(f, [a; b])) = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt.$$

**Доказательство.** Площадь этой криволинейной трапеции равна  $S(A(f, [a; b])) = \int_a^b f(x)dx$ . Применим теорему о замене переменной в интеграле Римана

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ x)(t)x'(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} (y \circ t \circ x)(t)x'(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt.$$

■

**Теорема 2** (Об объёме тела вращения). Пусть  $f \in C[a; b]$  и  $f(x) \geq 0 \forall x \in [a; b]$ . Рассмотрим криволинейную трапецию  $A(f, [a; b])$ ; будем вращать её вокруг отрезка  $[a; b]$ . Тогда объём получающегося при этом тела равен

$$V_f(a, b) = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

**Доказательство.** Обозначим за  $V_f(c, d)$  объём тела, полученного вращением криволинейной трапеции  $A(f, [c; d])$  вокруг отрезка  $[c; d] \subseteq [a; b]$ . Возьмём произвольное разбиение  $T = \{[a_{i-1}; a_i]\}_{i=1}^m$  отрезка  $[a; b]$ . Ему соответствуют точки  $P_i(a_i, f(a_i))$  на кривой стороне  $AB$ . По свойству аддитивности объёма:

$$V_f(a, b) = \sum_{i=1}^m V_f(a_{i-1}, a_i).$$

Согласно свойству монотонности объёма, величины  $V_f(a_{i-1}, a_i)$  оцениваются через объёмы вписанного и описанного цилиндров:

$$\sum_{i=1}^m \pi m_i^2 (a_i - a_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^m V_f(a_{i-1}, a_i) = V_f(a, b) \leq \sum_{i=1}^m \pi M_i^2 (a_i - a_{i-1}),$$

$$m_i := \inf_{x \in [a_{i-1}, a_i]} f(x), \quad M_i := \sup_{x \in [a_{i-1}, a_i]} f(x).$$

Объём цилиндра есть произведение площади круга на высоту цилиндра. Перепишем неравенство выше, перейдя к суммам и интегралам Дарбу:

$$\pi \cdot s(f^2(x), T) \leq V(a, b) \leq \pi \cdot S(f^2(x), T),$$

откуда

$$\pi \cdot (D) \int_a^b f^2(x) dx \leq V(a, b) \leq \pi \cdot (D) \int_a^b f^2(x) dx.$$

Имеем (критерий Дарбу):

$$\pi \cdot (D) \int_a^b f^2(x) dx = \pi \cdot (D) \int_a^b f^2(x) dx = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) dx.$$

В итоге,

$$V(a, b) = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

■

## 21. ИНТЕГРАЛ РИМАНА — СТИЛТЬЕСА: ОПРЕДЕЛЕНИЕ, ЛИНЕЙНОСТЬ, ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ, ОЦЕНКА АБСОЛЮТНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Чтобы определить интеграл Римана — Стильтеса, сначала задаётся *интегрирующая функция* ограниченной вариации  $G(x) : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Определение 1.** *Интегральной суммой Римана — Стильтеса* функции  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  по функции  $G \in BV[a; b]$ , соответствующей отмеченному разбиению  $T\xi = \{([a_{i-1}, a_i], \xi_i)\}_{i=1}^m$  отрезка  $[a; b]$ , называют сумму

$$S(fdG, T\xi) := \sum_{i=1}^m f(\xi_i)(G(a_i) - G(a_{i-1})).$$

**Определение 2** (Интеграл Римана — Стильтеса). Функция  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  *интегрируема в смысле Римана — Стильтеса* по функции  $G \in BV[a; b]$  к значению  $I \in \mathbb{R}$ , если для каждого  $\varepsilon > 0$  найдётся  $\delta > 0$  такое, что всех отмеченных  $\delta$ -разбиений  $T\xi = \{([a_{i-1}, a_i], \xi_i)\}_{i=1}^m$  отрезка  $[a; b]$  выполнено неравенство

$$|S(fdG, T\xi) - I| = \left| \sum_{i=1}^m f(\xi_i)(G(a_i) - G(a_{i-1})) - I \right| < \varepsilon.$$

Запись:  $(RS) \int_a^b f(x) dG(x) = I$ . Число  $I$  есть *интеграл Римана — Стильтеса* от функции  $f$  по функции  $G$  на отрезке  $[a; b]$ .

**Примечание.** При  $G(x) = x$  интегральная сумма Римана — Стильеса превращается в обычную интегральную сумму Римана  $\sum_{i=1}^m f(\xi_i)(a_i - a_{i-1})$ , а интеграл Римана — Стильеса становится интегралом Римана.

**Теорема 1** (Единственность интеграла). Если  $(RS) \int_a^b f(x)dG(x)$  существует, то он единственен.

**Доказательство.** Допустим,  $(RS) \int_a^b f(x)dG(x) = I_1$  и  $= I_2$ ,  $I_1 \neq I_2$ . Возьмём  $\varepsilon := |I_1 - I_2|/2$  и найдём  $\delta_1, \delta_2 > 0$  такие, что для всех отмеченных  $\delta_1$ - и  $\delta_2$ -разбиений  $T\xi$  отрезка  $[a; b]$  выполнено соответственно

$$|S(fdG, T\xi) - I_1| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |S(fdG, T\xi) - I_2| < \varepsilon.$$

Тогда для любого отмеченного  $\delta$ -разбиения  $T\xi$ ,  $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , выполнены оба последних неравенства, что приводит к противоречивому неравенству  $|I_1 - I_2| < |I_1 - I_2|$ . ■

**Теорема 2** (Линейность интеграла). Интеграл Римана — Стильеса является линейным как по интегрируемой функции, так и по интегрирующей.

**Примечание.** Теорема доказывается по той же схеме, что и для интеграла Римана. Сначала нужно установить линейность интегральных сумм по  $f$  и по  $G$ :

$$\begin{aligned} S((\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)dG, T\xi) &= \alpha_1 S(f_1 dG, T\xi) + \alpha_2 S(f_2 dG, T\xi), \\ S(fd(\alpha_1 G_1 + \alpha_2 G_2), T\xi) &= \alpha_1 S(fdG_1, T\xi) + \alpha_2 S(fdG_2, T\xi). \end{aligned}$$

**Теорема 3** (Достаточное условие существования интеграла Римана — Стильеса). Если  $f \in C[a; b]$ , то  $f$  интегрируема по Риману — Стильесу на отрезке  $[a; b]$  по любой функции  $G \in BV[a; b]$ .

**Доказательство.** Любая функция ограниченной вариации есть разность двух неубывающих функций, поэтому в силу линейности достаточно провести доказательство для неубывающих  $G$ .

Итак, пусть  $G$  не убывает. Для каждого разбиения  $T = \{[a_{i-1}; a_i]\}$  отрезка  $[a; b]$  составим *нижнюю* и *верхнюю суммы Дарбу* для интеграла Римана — Стильеса  $\int_a^b fdG$ :

$$\begin{aligned} s(fdG, T) &= \sum_i m_i (G(a_i) - G(a_{i-1})), \quad m_i := \min_{[a_{i-1}; a_i]} f; \\ S(fdG, T) &= \sum_i M_i (G(a_i) - G(a_{i-1})), \quad M_i := \max_{[a_{i-1}; a_i]} f. \end{aligned}$$

Почти дословно повторяя рассуждения, изложенные выше, несложно доказать, что

$$s(fdG, T) \leq S(fdG, \tilde{T}) \quad \text{для любых разбиений } T \text{ и } \tilde{T} \text{ отрезка } [a; b]$$

(здесь существенно, что  $G$  не убывает). Положим  $I := \sup_T s(fdG, T)$  и покажем, что  $\int_a^b fdG = I$ .

Берём любое  $\varepsilon > 0$ . Пользуясь равномерной непрерывностью на  $[a; b]$  функции  $f$ , отыщем  $\delta > 0$  такое, что

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \quad \text{как только} \quad |x_1 - x_2| < \delta.$$

Возьмём любое  $\delta$ -разбиение  $T = \{[a_{i-1}; a_i]\}$  отрезка  $[a; b]$  и любой набор  $\xi$  меток к нему. Имеем:

$$s(fdG, T) \leq S(fdG, T\xi) \leq S(fdG, T), \quad s(fdG, T) \leq I \leq S(fdG, T). \quad (*)$$

Кроме того,

$$S(fdG, T) - s(fdG, T) = \sum_i (M_i - m_i)(G(a_i) - G(a_{i-1})) < \varepsilon \sum_i (G(a_i) - G(a_{i-1})) = \varepsilon(G(b) - G(a)).$$

Отсюда и из (\*) получаем  $|\mathcal{S}(fdG, T\xi) - I| < \varepsilon(G(b) - G(a))$ . Следовательно,  $f$  интегрируема по  $G$  на отрезке  $[a; b]$  и  $(RS) \int_a^b fdG = I$ . ■

**Теорема 4** (Оценка абсолютной величины интеграла Римана — Стильеса). Если  $f \in B[a; b]$ ,  $G \in BV[a; b]$  и существует  $(RS) \int_a^b fdG$ , то

$$(RS) \int_a^b fdG \leq \sup_{[a; b]} |f| \cdot \overset{b}{\underset{a}{V}} G.$$

**Доказательство.** Вытекает из цепочки

$$|\mathcal{S}(fdG, T\xi)| \leq \left| \sum_{T\xi} f(\xi_i)(G(a_i) - G(a_{i-1})) \right| \leq \sup_{[a; b]} |f| \cdot \sum_T |G(a_i) - G(a_{i-1})| \leq \sup_{[a; b]} |f| \cdot \overset{b}{\underset{a}{V}} G.$$
■

## 22. АДДИТИВНОСТЬ ИНТЕГРАЛА РИМАНА — СТИЛЬЕСА ОТ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ. СВЯЗЬ ИНТЕГРАЛОВ РИМАНА — СТИЛЬЕСА И РИМАНА

**Теорема 1** (Об аддитивности интеграла Римана — Стильеса). Если  $f \in C[a; b]$ ,  $G \in BV[a; b]$  и  $c \in (a; b)$ , то

$$(RS) \int_a^b fdG = (RS) \int_a^c fdG + (RS) \int_c^b fdG.$$

**Примечание.** Т. к.  $G \in BV[a; b]$  и  $a < c < b$ , то  $G \in BV[a; c] \cap BV[c; b]$ , все интегралы в последнем выражении существуют согласно достаточному условию интегрируемости по Риману — Стильесу.

**Доказательство.** Все интегралы в этом доказательстве понимаем как интегралы в смысле Римана — Стильеса от  $f$  по  $G$ . Возьмём любое  $\varepsilon > 0$  и найдём  $\delta > 0$  такое, что

$$\left| \mathcal{S}(fdG, T^1\xi^1) - \int_a^c fdG \right| < \varepsilon, \quad \left| \mathcal{S}(fdG, T^2\xi^2) - \int_c^b fdG \right| < \varepsilon, \quad \left| \mathcal{S}(fdG, T\xi) - \int_a^b fdG \right| < \varepsilon$$

для любых отмеченных  $\delta$ -разбиений  $T^1\xi^1$ ,  $T^2\xi^2$  и  $T\xi$  отрезков  $[a; c]$ ,  $[c; b]$  и  $[a; b]$ , соответственно. Возьмём какие-нибудь  $T^1\xi^1$  и  $T^2\xi^2$  указанного типа. Тогда  $T\xi := T^1\xi^1 \sqcup T^2\xi^2$  — отмеченное  $\delta$ -разбиение отрезка  $[a; b]$  и, очевидно,

$$\mathcal{S}(fdG, T\xi) = \mathcal{S}(fdG, T^1\xi^1) + \mathcal{S}(fdG, T^2\xi^2).$$

С учётом последнего равенства получаем следующее:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_a^b f dG - \int_a^c f dG - \int_c^b f dG \right| = \\
& = \left| \left( \int_a^b f dG - \int_a^c f dG - \int_c^b f dG \right) - (\mathcal{S}(fdG, T\xi) - \mathcal{S}(fdG, T^1\xi^1) - \mathcal{S}(fdG, T^2\xi^2)) \right| \leq \\
& \leq \left| \int_a^b f dG - \mathcal{S}(fdG, T\xi) \right| + \left| \int_a^c f dG - \mathcal{S}(fdG, T^1\xi^1) \right| + \left| \int_c^b f dG - \mathcal{S}(fdG, T^2\xi^2) \right| < 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

В силу произвольности выбора  $\varepsilon > 0$ , последняя цепочка влечёт требуемое.  $\blacksquare$

**Теорема 2** (О сведении интеграла Римана — Стильеса к интегралу Римана). Допустим,  $f \in R[a; b]$  и  $G \in C^{(1)}[a; b]$ . Тогда  $f$  интегрируема по  $G$  на отрезке  $[a; b]$  в смысле Римана — Стильеса и

$$(RS) \int_a^b f(x) dG(x) = (R) \int_a^b f(x) G'(x) dx.$$

**Доказательство.** Т.к.  $G' \in C[a; b]$ , то  $G' \in R[a; b]$ , и  $fG'$  интегрируема по Риману на  $[a; b]$  как произведение двух интегрируемых функций. Таким образом, интеграл справа в условии теоремы существует. Берём любое  $\varepsilon > 0$ . Пользуясь равномерной непрерывностью на отрезке  $[a; b]$  функции  $G'$ , находим  $\delta_1 > 0$ , для которого  $|G'(\varphi_i) - G'(\psi_i)| < \varepsilon$ , как только  $|\varphi_i - \psi_i| < \delta_1$ . Обозначим за  $I$  интеграл справа в условии. Подберём  $\delta_2 > 0$  так, чтобы  $|\mathcal{S}(fG', T\xi) - I| < \varepsilon$ , если  $d(T) < \delta_2$ .

Положим  $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$  и возьмём произвольное отмеченное  $\delta$ -разбиение  $T\xi = \{([a_{i-1}; a_i], \xi_i)\}$  отрезка  $[a; b]$ . Для него

$$|\mathcal{S}(fdG, T\xi) - I| \leq |\mathcal{S}(fdG, T\xi) - \mathcal{S}(fG', T\xi)| + |\mathcal{S}(fG', T\xi) - I|, \quad (*)$$

причём второе слагаемое справа меньше  $\varepsilon$ , а первое есть

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_i f(\xi_i) (G(a_i) - G(a_{i-1})) - \sum_i f(\xi_i) G'(\xi_i) (a_i - a_{i-1}) \right| \stackrel{\text{т. Лагранжа}}{=} \\
& = \left| \sum_i f(\xi_i) G'(\eta_i) (a_i - a_{i-1}) - \sum_i f(\xi_i) G'(\xi_i) (a_i - a_{i-1}) \right| = \\
& = \left| \sum_i f(\xi_i) (G'(\eta_i) - G'(\xi_i)) (a_i - a_{i-1}) \right| \leq \sup_{[a; b]} |f| \cdot \varepsilon (b - a), \quad \eta_i \in (a_{i-1}; a_i).
\end{aligned}$$

В итоге левая часть (\*) меньше  $\varepsilon \left( 1 + \sup_{[a; b]} |f| (b - a) \right)$ , откуда вытекает требуемое.  $\blacksquare$

## 23. МЕТРИЧЕСКИЕ И НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ПРИМЕРЫ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ. ПРОСТРАНСТВО $\mathbb{R}^n$ , МЕТРИКИ И НОРМЫ В НЁМ

**Определение 1.** *Метрическое пространство* — пара  $(X, \rho)$ , где  $X$  — некоторое непустое множество, а  $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  (*метрика на  $X$* ), удовлетворяющая следующим аксиомам расстояния:

1.  $\rho(x, y) \geq 0$ ,  $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall x, y \in X$ ;

2.  $\rho(x, y) = \rho(y, x) \forall x, y \in X$ ;
3.  $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \forall x, y, z \in X$ .

**Пример 1.** Здесь приведены некоторые примеры метрик:

1. Пусть  $X$  — произвольное множество, а  $\rho$  — *дискретная метрика*,

$$\rho(x, y) := \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y \end{cases}.$$

2. Пусть  $X$  — произвольное множество,  $c \in X$ . Возьмём любую функцию  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  такую, что  $f(c) = 0$  и  $f(x) > 0$  при  $x \neq c$ . Эта функция задаёт *парижскую метрику*

$$\rho(x, y) := \begin{cases} f(x) + f(y), & \text{если } x \neq y, \\ 0, & \text{если } x = y. \end{cases}$$

3. Пусть  $X = \{0, 1\}^n$ . Рассмотрим *метрику Хэмминга*

$$\rho(x, y) := \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|, \quad x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in X.$$

4. Пара  $(C[a, b], \rho)$ , где  $\rho(f, g) := \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$ , является метрическим пространством.

5. Если  $\rho(a, b)$  — метрика на  $X$ , то и  $\frac{\rho(a, b)}{1 + \rho(a, b)}$  — тоже метрика на  $X$ .

**Примечание.** Если  $(X, \rho)$  — метрическое пространство и  $X \supset Y \neq \emptyset$ , то и  $(Y, \rho)$  — метрическое пространство. При этом говорят, что метрика  $\rho$  на  $X$  индуцирует метрику  $\rho'$  на  $Y$ .

**Определение 2.** *Нормированное пространство* — пара  $(V, \|\cdot\|)$ , где  $V$  — линейное (векторное) пространство над полем  $\mathbb{F}$ , а  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  (*норма* в  $V$ ), для которой выполнены следующие аксиомы:

1.  $\|x\| \geq 0$ ,  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0} \forall x \in V$ ;
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \forall \lambda \in \mathbb{F}, \forall x \in V$ ;
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \forall x, y \in V$ .

Любая норма индуцирует метрику. Положим  $\rho(x, y) := \|x - y\|$ . Проверим выполнение для функции  $\rho$  аксиом метрики. Аксиома 1 для  $\rho$  сразу вытекает из аксиомы 1 для  $\|\cdot\|$ . Далее,

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \|-(y - x)\| = |-1| \|y - x\| = \rho(y, x),$$

и выполнена аксиома 2. Неравенство треугольника для метрики вытекает из неравенства треугольника для нормы:

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

Итак, каждое нормированное пространство можно рассматривать как метрическое.

**Пространство  $\mathbb{R}^n$ , метрики и нормы на нём.** Рассмотрим множество

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n)^t : x_j \in \mathbb{R} \text{ для всех } j = 1, \dots, n\}.$$

$\mathbb{R}^n$  является линейным пространством относительно операций умножения вектора на число и сложения двух векторов, которые выполняются покомпонентно. Покажем, что  $\mathbb{R}^n$  является нормированным пространством, причём существуют разнообразные способы определить норму в  $\mathbb{R}^n$  (не только те, что приведены ниже).

Для  $x = (x_1, \dots, x_n)^t$  положим

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$$

— *манхэттенская норма* и

$$\|x\|_\infty := \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$$

— *max-норма*.

Пожалуй, наиболее распространённой нормой в  $\mathbb{R}^n$  является *евклидова норма*

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Она является частным случае целой серии норм. А именно, для любого  $p > 1$  положим

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

Проверим выполнение аксиом нормы для  $\|\cdot\|_p$ :

- (1)  $\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \begin{cases} > 0, & x \neq 0, \\ = 0, & x = 0; \end{cases}$
- (2)  $\left( \sum_{i=1}^n |\lambda x_i|^p \right)^{1/p} = \left( |\lambda|^p \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} = |\lambda| \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} = |\lambda| \|x\|_p;$
- (3)  $\|x + y\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \stackrel{\text{нер-во Минковского}}{\leq} \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p} = \|x\|_p + \|y\|_p.$

Нормы  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_p$  и  $\|\cdot\|_\infty$  порождают метрики

$$\begin{aligned} \rho_1(x, y) &= \|x - y\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|, & \rho_p(x, y) &= \|x - y\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}, \\ \rho_\infty(x, y) &= \|x - y\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i|. \end{aligned}$$

## 24. МЕТРИЧЕСКИЕ И НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ВНУТРЕННОСТЬ, ВНЕШНОСТЬ, ГРАНИЦА МНОЖЕСТВА, ПРОИЗВОДНОЕ МНОЖЕСТВО

**Определение 1.** Пусть  $(X, \rho)$  — метрическое пространство. *Открытым шаром* радиуса  $r$  с центром в точке  $a \in X$  называется множество

$$B_r(a) := \{x \in X : \rho(x, a) < r\},$$

а *замкнутым шаром* с теми же радиусом и центром — множество

$$\overline{B}_r(a) := \{x \in X : \rho(x, a) \leq r\}.$$

**Определение 2.** Любой открытый шар, содержащий точку  $x$ , называется её *окрестностью*. Иногда будем писать  $U(x)$  для окрестности точки  $x$ , а  $\mathring{U}(x)$  — для *проколотой окрестности* точки  $x$ ,  $\mathring{U}(x) := U(x) \setminus \{x\}$ . Шар  $B_r(x)$  с центром в самой точке  $x$  называют ещё и  *$r$ -окрестностью* (центрированной окрестностью) точки  $x$ .

**Предложение 1.** Всякая окрестность точки  $x$  содержит некоторую  $r$ -окрестность точки  $x$ .

**Доказательство.** В самом деле, пусть  $B_{r_1}(a)$  — окрестность точки  $x$ . Тогда  $\rho(x, a) = r_2 < r_1$ . Положим  $r := (r_1 - r_2)/2$  и рассмотрим открытый шар  $B_r(x)$ . Для всех  $y \in B_r(a)$  имеем:

$$\rho(y, a) \leq \rho(y, x) + \rho(x, a) < r + r_2 = \frac{r_1 - r_2}{2} + r_2 = \frac{r_1 + r_2}{2} < r_1.$$

Значит,  $y \in B_{r_1}(a)$ , поэтому  $B_r(x) \subset B_{r_1}(a)$ . ■

**Предложение 2.** Пересечение конечного числа центрированных окрестностей одной и той же точки есть центрированная окрестность этой точки:

**Доказательство.**  $\bigcap_{i=1}^m B_{r_i}(x) = B_r(x)$ ,  $r = \min_{i=1, \dots, m} r_i$ . ■

**Определение 3.** Пусть  $(X, \rho)$  — метрическое пространство,  $E \subset X$ . Точка  $a \in X$  является:

1. *внутренней* точкой множества  $E$ , если найдётся окрестность  $U(a) \subseteq E$ ;
2. *внешней* для  $E$ , если существует  $U(a) \subseteq (X \setminus E)$ ;
3. *граничной точкой*  $E$ , если каждая окрестность  $U(a)$  имеет непустое пересечение как с  $E$ , так и с  $X \setminus E$ ;
4. *предельной точкой* множества  $E$ , если в любой её окрестности находится бесконечное число точек из  $E$ ;
5. *изолированной точкой*  $E$ , если  $U(a) \cap E = \{a\}$  для некоторой окрестности  $U(a)$ .

Далее:

1. *внутренность* множества  $E$  — множество  $\text{int } E$  всех внутренних точек  $E$ ;
2. *внешность* множества  $E$  — множество  $\text{ext } E$  всех внешних точек  $E$ ;
3. *граница* множества  $E$  — множество  $\partial E$  граничных точек  $E$ ;
4. *производное множество* для  $E$  — множество  $E'$  всех предельных точек  $E$ .

Ясно, что  $X = \text{int } E \sqcup \text{ext } E \sqcup \partial E$ .

**Пример 1.** Положим  $X = \mathbb{R}$ , тогда:

1.  $\text{int } \mathbb{N} = \emptyset$ ,  $\text{ext } \mathbb{N} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ ,  $\partial \mathbb{N} = \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{N}' = \emptyset$ .
2.  $\text{int } \mathbb{Q} = \emptyset$ ,  $\text{ext } \mathbb{Q} = \emptyset$ ,  $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$ .
3.  $\text{int}(0; 1) = (0; 1)$ ,  $\text{ext}(0; 1) = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$ ,  $\partial(0; 1) = \{0, 1\}$ ,  $(0; 1)' = [0; 1]$ .

## 25. ОТКРЫТЫЕ И ЗАМКНУТЫЕ МНОЖЕСТВА В МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ, КРИТЕРИЙ ЗАМКНУТОСТИ. ОТКРЫТОСТЬ И ЗАМКНУТОСТЬ ШАРОВ. ПЕРЕСЕЧЕНИЯ И ОБЪЕДИНЕНИЯ ОТКРЫТЫХ И ЗАМКНУТЫХ МНОЖЕСТВ. ЗАМКНУТОСТЬ ГРАНИЦЫ МНОЖЕСТВА

**Определение 1.**  $E$  — *открытое* множество в метрическом пространстве  $(X, \rho)$ , если  $E = \text{int } E$ .  $E$  — *замкнутое* множество в  $(X, \rho)$ , если  $E' \subseteq E$ .

Из определений открытого и замкнутого множеств вытекает, что каждое из множеств  $\emptyset$  и  $X$  является и открытым, и замкнутым.

**Предложение 1.** Внутренность и внешность любого множества открыты.

**Доказательство.** Если  $a$  — внутренняя точка  $E$ , найдётся окрестность  $U(a) \subseteq E$ . Но  $U(a)$  является окрестностью всех лежащих в ней точек. Значит, все точки  $x \in U(a)$  есть внутренние точки множества  $E$ , т.е.  $U(a) \subseteq \text{int } E$ . Следовательно,  $\text{int } E$  — открытое множество. Доказательство открытости  $\text{ext } E$  проходит аналогично. ■

**Теорема 1** (Критерий замкнутости). Следующие условия равносильны:



1.  $E$  замкнуто;
2.  $X \setminus E$  открыто;
3.  $\partial E \subseteq E$ .

**Доказательство.**  $1 \Rightarrow 2$ . Допустим,  $E$  замкнуто. Возьмём какую-нибудь точку  $x \in X \setminus E$ . Если  $x$  была бы предельной точкой множества  $E$ , то  $x \in E$ , т. к.  $E$  замкнуто, но  $x \notin E$ . Следовательно,  $x$  не является предельной точкой для  $E$ . Значит, найдётся проколота окрестность  $\dot{U}(x)$ , где нет точек из  $E$ . Сама точка  $x$  также не находится в  $E$ , поэтому в окрестности  $U(x)$  нет точек из  $E$ , т. е.  $U(x) \subseteq X \setminus E$ . Итак,  $\forall x \in X \setminus E$  мы нашли окрестность  $U(x) \subseteq X \setminus E$ . Это означает, что множество  $X \setminus E$  открыто.

$2 \Rightarrow 3$ . Предположим, что  $X \setminus E$  открыто. Возьмём произвольную граничную точку  $x$  множества  $E$  и допустим, что  $x \notin E$ . Тогда  $(X \setminus E)$  открыто найдётся окрестность  $U(x) \subseteq X \setminus E$ . Но в этом случае  $x$  не может быть граничной точкой множества  $E$  — противоречие. Значит, каждая граничная точка  $x$  лежит в  $E$ .

$3 \Rightarrow 1$ . Пусть  $x$  — любая предельная для  $X$  точка; необходимо показать, что  $x \in E$ . Точка  $x$  может быть внутренней, граничной или внешней точкой множества  $E$ . Если  $x$  внутренняя, то  $x \in E$  согласно определению внутренней точки. Если  $x$  граничная, то  $x \in E$  по условию. Если же  $x$  внешняя точка для  $E$ , то найдётся окрестность  $U(x)$ , в которой нет точек из  $E$ . Однако это невозможно, т. к.  $x$  — предельная точка множества  $X$ . ■

**Предложение 2.** Открытый шар — открытое множество, замкнутый шар — замкнутое множество.

**Доказательство.** Пусть  $B_r(a)$  — открытый шар и  $x \in B_r(a)$ . Тогда этот шар является окрестностью точки  $x$ , т. е. он открыт.

Пусть  $\bar{B}_r(a)$  — замкнутый шар,  $x \in \bar{B}_r(a)'$ . Случай  $\rho(x, a) := r_1 > r$  невозможен, т. к. в этом случае  $B_\delta(x) \cap \bar{B}_r(a) = \emptyset$  при  $\delta = (r_1 - r)/2$ , поэтому  $x \notin \bar{B}_r(a)'$ . Значит,  $\rho(x, a) \leq r$ , т. е.  $x \in \bar{B}_r(a)$ . Итак,  $\bar{B}_r(a)' \subset \bar{B}_r(a)$ , т. е. шар  $\bar{B}_r(a)$  замкнут. ■

## Теорема 2.

1. Объединение открытых множеств открыто, пересечение замкнутых — замкнуто.
2. Пересечение конечного числа открытых множеств открыто, объединение конечного числа замкнутых — замкнуто.

**Доказательство.**

1. Пусть все множества  $\{U_i : i \in I\}$  (где  $I$  — некоторое множество индексов) открыты. Возьмём любую точку  $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$ . Тогда  $x \in U_\alpha$  для некоторого  $\alpha \in I$ , а т. к.  $U_\alpha$  открыто, то найдётся окрестность  $V(x) \subset U_\alpha$ . Но тогда  $V(x) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ , откуда множество  $\bigcup_{i \in I} U_i$  открыто.

Теперь пусть все множества  $\{F_i : i \in I\}$  замкнуты, т. е.  $F_i = X \setminus U_i$ , где  $U_i$  открыто  $\forall i \in I$ . Имеем

$$\bigcap_{i \in I} F_i = \bigcap_{i \in I} (X \setminus U_i) = X \setminus \left( \bigcup_{i \in I} U_i \right).$$

При этом  $\bigcup_{i \in I} U_i$  открыто, поэтому его дополнение  $\bigcap_{i \in I} F_i$  замкнуто.

2. Пусть  $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i$ , тогда  $x \in U_i \forall i = 1, \dots, n$ . Если все множества  $U_i$  открыты, то для каждого  $k$  можно найти шар  $B_{r_i}(x) \subset U_i$ . Множество  $V(x) := \bigcap_{i=1}^n B_{r_i}(x)$  есть окрестность точки  $x$ , которая лежит в  $\bigcap_{i=1}^n U_i$ . Следовательно, множество  $\bigcap_{i=1}^n U_i$  открыто.

Допустим, для каждого  $i = 1, \dots, n$  множество  $F_i$  замкнуто:  $F_i = X \setminus U_i$ , где  $U_i$  открыто. Тогда

$$\bigcup_{i=1}^n F_i = \bigcup_{i=1}^n (X \setminus U_i) = X \setminus \left( \bigcap_{i=1}^n U_i \right).$$

При этом  $\bigcap_{i=1}^n U_i$  открыто, поэтому его дополнение  $\bigcup_{i=1}^n F_i$  замкнуто. ■

## 26. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ В МЕТРИЧЕСКИХ И НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. КРИТЕРИЙ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В $\mathbb{R}^n$ . ПОНЯТИЕ О ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. КРИТЕРИЙ КОШИ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В $\mathbb{R}^n$

**Определение 1.** Пусть  $(X, \rho)$  — метрическое пространство и  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  — последовательность элементов  $X$ . Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, A) = 0$ , то последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  называется *сходящейся*, а элемент  $A \in X$  — её *пределом*. Запись:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

**Предложение 1.**  $A$  — предел последовательности  $\{x_n\}$  тогда и только тогда, когда в любой окрестности  $U(A)$  содержатся все члены последовательности за исключением конечного их числа.

**Доказательство.**  $\Rightarrow$ . Если  $x_n \rightarrow A$  при  $n \rightarrow \infty$ , то возьмём произвольную окрестность  $B_r(A)$  и, согласно определению предела, найдём  $N \in \mathbb{N}$  такое, что  $\rho(x_n, A) < r$  для всех  $n \geq N$ . Тогда все члены последовательности за исключением  $x_1, \dots, x_{N-1}$  содержатся в  $B_r(A)$ .

$\Leftarrow$ . Допустим, в каждой окрестности  $U(A)$  содержатся все члены последовательности  $\{x_n\}$  за исключением конечного их числа. Возьмём произвольный шар  $B_r(A)$ , и пусть  $N$  — максимальный из номеров  $n$  таких, что  $x_n \notin B_r(A)$ . Тогда  $x_n \in B_r(A)$  для всех  $n \geq N + 1$ . Т. к.  $B_r(A)$  выбирался произвольно, то  $x_n \rightarrow A$  при  $n \rightarrow \infty$ . ■

### Теорема 1.

1. Предел сходящейся последовательности единственен.
2. Любая сходящаяся последовательность ограничена.
3. Если найдётся  $N \in \mathbb{N}$  такое, что  $x_n = A$  для каждого  $n \geq N$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ .
4. Пусть  $(V, \|\cdot\|)$  — нормированное пространство. Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ , а  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B$ .

### Доказательство.

1. Допустим, последовательность  $\{x_n\}$  имеет два предела  $A \neq B$ . Найдём окрестности  $U(A)$  и  $V(B)$ , для которых  $U(A) \cap V(B) = \emptyset$ . Т. к.  $A$  и  $B$  — пределы  $\{x_n\}$ , в каждую из этих окрестностей попадают все члены последовательности, кроме конечного их числа. А это невозможно, т. к.  $U(A) \cap V(B) = \emptyset$ .
2. Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ . Тогда все точки, кроме  $a_{i_1}, \dots, a_{i_m}$  лежат в некоторой окрестности  $B_{r_1}(A_1)$  точки  $A$ . Положим  $r_2 := \rho(A, A_1) + r_1$ . Тогда  $B_{r_2}(A) \supseteq B_{r_1}(A_1)$ . Действительно, пусть  $x \in B_{r_1}(A_1)$ , т. е.  $\rho(A_1, x) < r_1$ . Тогда

$$\rho(A, x) \leq \rho(A, A_1) + \rho(A_1, x) < \rho(A, A_1) + r_1,$$

значит,  $x \in B_{r_2}(A)$ . Теперь положим  $r = \max\{r_2, \rho(A, x_{i_1}), \dots, \rho(A, x_{i_m})\}$ . Тогда шар  $B_r(A)$  содержит все точки последовательности  $\{x_n\}$ .

3. В окрестности  $B_r(A)$  для любого  $r$  содержатся все точки  $\{x_n\}$ , кроме конечного их числа.

4. Возьмём произвольное  $\varepsilon > 0$ . Т. к.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ , то  $\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$  такие, что

$$\left(n \geq N_1 \Rightarrow x_n \in B_{\varepsilon/2}(A) \Rightarrow \|x_n - A\| < \frac{\varepsilon}{2}\right) \wedge \left(n \geq N_2 \Rightarrow x_n \in B_{\varepsilon/2}(B) \Rightarrow \|x_n - B\| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

(шары рассматриваются в метрике  $\rho$ , индуцированной с нормы  $\|\cdot\|$ ). Пусть  $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$ , тогда выполнены оба неравенства выше, отсюда

$$\|(\alpha a_n + \beta b_n) - (\alpha A + \beta B)\| \leq |\alpha| \|a_n - A\| + |\beta| \|b_n - B\| < \frac{|\alpha| + |\beta|}{2} \cdot \varepsilon.$$

Т. к.  $\varepsilon > 0$  выбиралось произвольно, отсюда следует требуемое. ■

**Теорема 2** (Критерий сходимости последовательности в  $\mathbb{R}^n$ ). Допустим,  $\{x^m = (x_1^m, \dots, x_n^m)^t\}_{m=1}^\infty$  — последовательность в пространстве  $(\mathbb{R}^n, \rho_2)$  с евклидовой метрикой,  $a = (a_1, \dots, a_n)^t \in \mathbb{R}^n$ . Тогда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x^m = a \Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} x_i^m = a_i \quad \text{для всех } i = 1, \dots, n.$$

**Доказательство.** Из неравенства

$$\max_{i=1, \dots, n} |b_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \leq \sum_{i=1}^n |b_i|$$

вытекает, что

$$|x_i^m - a_i| \leq \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^m - a_i)^2}}_{\rho_2(x^m, a)} \leq \sum_{i=1}^n |x_i^m - a_i| \quad \text{для всех } i = 1, \dots, n. \quad (*)$$

Воспользуемся теоремой о предельном переходе в неравенствах для числовых последовательностей.

$\Rightarrow$ . Допустим,  $\lim_{m \rightarrow \infty} x^m = a$ , т. е. выражение в середине (\*) стремится к нулю при  $m \rightarrow \infty$ ; следовательно, выражение слева тоже, т. е.  $\lim_{m \rightarrow \infty} x_i^m = a_i$  для каждого  $i$ .

$\Leftarrow$ . Допустим,  $\lim_{m \rightarrow \infty} x_i^m = a_i$  для каждого  $i$ , т. е. каждое слагаемое справа в (\*) стремится к нулю при  $m \rightarrow \infty$ ; значит, и вся сумма тоже. Но тогда выражение в середине (\*) тоже стремится к нулю, т. е.  $\lim_{m \rightarrow \infty} x^m = a$ . ■

**Определение 2.** Последовательность  $\{x^m\}_{m=1}^\infty$  в метрическом пространстве  $(X, \rho)$  *фундаментальна* (иначе, *последовательность Коши*), если для всякого  $\varepsilon > 0$  найдётся натуральное  $M$  такое, что  $\rho(x^m, x^\ell) < \varepsilon$  для всех  $m, \ell \geq M$ .

**Определение 3.** Метрическое пространство *полно*, если всякая фундаментальная последовательность в этом пространстве сходится.

**Пример 1.**

1. Пространство  $(\mathbb{R}, \rho)$  (где  $\rho$  индуцирована с нормы  $|\cdot|$ ) полно (вытекает из критерия Коши сходимости числовой последовательности).
2. Пространство  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \rho)$  (с той же метрикой  $\rho$ ) не является полным: последовательность  $\{x^m = 1/m\}$  фундаментальна, но не имеет предела в  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

**Теорема 3** (Критерий Коши сходимости последовательности в  $\mathbb{R}^n$ ). Последовательность в  $(\mathbb{R}^n, \rho)$  фундаментальна тогда и только тогда, когда она сходится.

**Доказательство.** Заметим, что

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} x^m = a = (a_1, \dots, a_n) &\stackrel{\text{кр. сходимости в } \mathbb{R}^n}{\iff} \lim_{m \rightarrow \infty} x_i^m = a_i \quad \forall i \stackrel{\text{кр. Коши}}{\iff} \\ &\iff \{x_i^m\}_{m=1}^\infty \text{ фундаментальна для всех } i. \end{aligned}$$

Докажем, что последнее равносильно фундаментальности последовательности  $\{x^m\}_{m=1}^\infty$ . Из уже выписываемого нами неравенства (см. начало доказательства т. 2 в этом вопросе) следует

$$\max_{i=1, \dots, n} |x_i^m - x_i^\ell| \leq \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i^m - x_i^\ell|^2}}_{\rho(x^m, x^\ell)} \leq \sum_{i=1}^n |x_i^m - x_i^\ell|. \quad (\star)$$

Возьмём любое  $\varepsilon > 0$ . Если для каждого  $i$  последовательность  $\{x_i^m\}$  фундаментальна, то при достаточно больших  $m$  и  $\ell$  каждое слагаемое справа в  $(\star)$  меньше  $\varepsilon/n$ , а вся сумма меньше  $\varepsilon$ . Тогда  $\rho(x^m, x^\ell) < \varepsilon$  для тех же  $m$  и  $\ell$ , т. е. последовательность  $\{x^m\}$  фундаментальна.

Обратно, если  $\{x^m\}$  фундаментальна, то  $\rho(x^m, x^\ell) < \varepsilon$  для всех достаточно больших  $m$  и  $\ell$ . Но тогда, из  $(\star)$ ,  $|x_i^m - x_i^\ell| < \varepsilon$  для тех же  $m$  и  $\ell$  и всех  $i$ , т. е. каждая последовательность  $\{x_i^m\}_{m=1}^\infty$  фундаментальна. ■

## 27. ЗАДАЧИ

В этом разделе размещены мои решения некоторых задач из списка Михаила Геннадьевича. Символом «о» помечены задачи, которые Михаил Геннадьевич считает обязательными (не уверен, что здесь появятся какие-то другие). То есть, это те же задачи, что помечены кружочком и у него. Нумерация задач также совпадает с Михаилом Геннадьевичем.

**Задача 1°.** (А) Пусть  $f \in R[a; b]$ ,  $\{T^n \xi^n\}_{n=1}^\infty$  — последовательность отмеченных разбиений отрезка  $[a; b]$ , причём  $d(T^n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Докажите, что

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}(f, T^n \xi^n).$$

(Б) Разобьём отрезок  $[a; b]$  на  $n$  равных отрезков  $\Delta_j^{(n)}$ ,  $1 \leq j \leq n$  длины  $(b-a)/n$ , а затем в каждом из них произвольным образом выберем метку  $\xi_j^{(n)}$ . Покажите, что

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n f(\xi_j^{(n)}).$$

▷ (А) По определению предела последовательности  $d(T^n)$ ,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \mathcal{N}_\varepsilon : (n > \mathcal{N}_\varepsilon) \Rightarrow (|d(T^n)| < \varepsilon) \quad (*)$$

По определению интеграла Римана

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (d(T) < \delta) \Rightarrow (|\mathcal{S}(f, T\xi) - I| < \varepsilon).$$

Перепишем последнее высказывание с учётом (\*):

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon := \mathcal{N}_\varepsilon : (n > N_\varepsilon) \Rightarrow (|\mathcal{S}(f, T\xi) - I| < \varepsilon).$$

Значит, утверждение теоремы верно по определению предела последовательности.

(Б) По предыдущему пункту

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}(f, T^n \xi^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=1}^n f(\xi_j^{(n)}) |\Delta_j^{(n)}| \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n f(\xi_j^{(n)}).$$

**Задача 2°.** Вычислите с помощью формулы из задачи 1.Б интегралы  $\int_0^b x^2 dx$  и  $\int_0^b x^3 dx$ . В качестве  $\xi_j^n$  возьмите правые концы соответствующих отрезков разбиения.

▷ В разбиении на равные отрезки длины  $n$  отрезка  $[a; b]$  правый конец  $j$ -го отрезка будет иметь координату

$$\frac{b-a}{n} \cdot j + a = \frac{b \cdot j + (n-j) \cdot a}{n}.$$

Однако с учётом  $a = 0$  (в нашей задаче), получаем  $\xi_j^{(n)} = j \cdot b/n$ . Пользуясь задачей 1, находим первый интеграл:

$$\begin{aligned} \int_0^b x^2 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b}{n} \sum_{j=1}^n \left( \frac{b \cdot j}{n} \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{b}{n} \right)^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \\ &= \frac{b^3}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3} = \frac{b^3}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \left( 2 + \frac{1}{n} \right) = \boxed{\frac{b^3}{3}} \end{aligned}$$

Теперь найдём второй интеграл:

$$\int_0^b x^3 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b}{n} \sum_{j=1}^n \left( \frac{b \cdot j}{n} \right)^3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{b}{n} \right)^4 \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{b^4}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = \boxed{\frac{b^4}{4}}$$

**Задача 4°.** Докажите, что не более чем счётное объединение множеств меры нуль по Лебегу имеет меру нуль по Лебегу. Покажите, что не более чем счётное множество имеет меру нуль по Лебегу.

▷ Докажем первое утверждение. Пусть  $\{E_i : i \in I\}$  — система множеств меры нуль по Лебегу. Возьмём произвольное  $\varepsilon > 0$  и найдём для каждого множества  $E_i$  ( $i \in I$ ) такое покрытие отрезками  $\{\Delta_j^{(i)} : j \in J\}$ , что  $\sum_{j \in J} |\Delta_j^{(i)}| < \varepsilon/2^{i+1}$ . Полученная система отрезков  $\{\Delta_j^{(i)} : i \in I, j \in J\}$  образует покрытие множества  $\bigcup_{i \in I} E_i$ . Просуммировав по всем  $i$  и  $j$ , получим

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} |\Delta_j^{(i)}| \leq \frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \dots \right) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Согласно определению, множество  $\bigcup_{i \in I} E_i$  имеет меру нуль по Лебегу.

Второе утверждение свведём к первому. Если множество  $E$  не более чем счётно, то его элементы можно занумеровать натуральными числами:  $E = \{e_i : i \in I\}$  ( $I$  — не более чем счётное множество

индексов). Записав по-другому, получим  $E = \bigcup_{i \in I} \{e_i\}$ . Множества  $\{e_i\}$ , очевидно, имеют меру нуль по Лебегу, поэтому (согласно первому утверждению) и  $E$  имеет меру нуль по Лебегу. ◀

**Задача 6°.** Построим *канторовское троичное множество*  $F_{1/3}$ . Из отрезка  $[0; 1]$  вырежем среднюю треть — интервал  $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$ . Затем из двух оставшихся отрезков  $[0; \frac{1}{3}]$  и  $[\frac{2}{3}; 1]$  снова вырезаем интервал-среднюю треть. Повторим процедуру счётное число раз и получим после всех вырезаний множество  $F_{1/3}$ . Покажите, что это множество замкнуто и меры нуль по Лебегу.

▷ Дополнение к нему есть объединение лучей  $(-\infty; 1)$  и  $(1; +\infty)$  и вырезанных интервалов. Объединение любого числа открытых множеств открыто, поэтому  $\mathbb{R} \setminus F_{1/3}$  открыто, а значит,  $F_{1/3}$  замкнуто.

Заметим, что после  $i$ -го шага у нас получается  $2^i$  отрезков длины  $1/3^i$ . Значит, суммарная длина отрезков после  $i$ -го шага равна  $\ell_i := (2/3)^i$ . Отметим, что  $\ell_i \rightarrow 0$  при  $i \rightarrow \infty$ , поэтому для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $N \in \mathbb{N}$  такое, что  $\ell_N < \varepsilon$ . Значит, в качестве искомого множества отрезков можно взять отрезки, получающиеся на  $N$ -ом шаге алгоритма. Итак, нашли не более чем счётную систему отрезков, образующих покрытие  $F_{1/3}$  и имеющих суммарную длину  $< \varepsilon$ . Значит,  $F_{1/3}$  имеет меру нуль по Лебегу. ◀

**Задача 11°.** Если  $f \in R[a; b]$ , то функцию  $F : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) := \int_a^x f(t)dt$  называют *интегралом Римана с переменным нижним пределом*. Докажите, что  $F \in C[a; b]$ . Покажите, что если  $f \in C(x)$ , то  $F \in D(x)$  и  $F'(x) = f(x)$ .

▷ Решение почти дословно повторяет доказательства теорем 1 и 2 в вопросе 11. ◀

**Задача 12°.** Приведите пример функции, которая интегрируема по Риману на некотором отрезке, но не имеет на нём первообразной.

▷ Рассмотрим функцию  $\operatorname{sgn} x$ . Интегрируемость  $\operatorname{sgn}$  по Риману на отрезке  $[-1; 1]$  сразу следует из критерия Лебега. Пусть  $\operatorname{sgn}$  имеет первообразную  $F$  на  $[-1; 1]$ . Тогда она имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} -x + C_1, & \text{при } x < 0, \\ x + C_2, & \text{при } x \geq 0, \end{cases}$$

где  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .  $F'(x) = \operatorname{sgn} x$  для всех  $x \neq 0$ . Чтобы функция была дифференцируема в точке  $x = 0$ , она должна быть непрерывна в этой точке, а для этого должно выполняться  $C_1 = C_2$ , однако в таком случае  $F(x) = |x| + C$  ( $C \in \mathbb{R}$ ), а она, как известно, не дифференцируема в точке  $x = 0$ . ◀

**Задача 13°.** Приведите пример функции, которая на некотором отрезке имеет первообразную, но не интегрируема по Риману.

▷ Рассмотрим функцию

$$F(x) := \begin{cases} x\sqrt{x} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Эта функция дифференцируема на  $(0; 1]$ :

$$\left(x^{3/2} \sin \frac{1}{x}\right)' = \frac{3x \sin \frac{1}{x} - 2 \cos \frac{1}{x}}{2\sqrt{x}}.$$

Проверим дифференцируемость в точке  $x = 0$ :

$$F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Последнее равенство верно в силу того, что  $\sqrt{x}$  — БМФ при  $x \rightarrow 0$ , а  $\sin \frac{1}{x}$  — ограниченная функция. Итак, обозначим  $f(x) := F'(x)$ . Эта функция неограничена на отрезке  $[0; 1]$ , а потому не интегрируема по Риману. В то же время, у неё есть первообразная  $F$  на этом отрезке. ◀

**Задача 15°.** Используя первую теорему о среднем для интеграла Римана, получите из остаточного члена формулы Тейлора в интегральной форме

$$\frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

остаточный член в форме Лагранжа

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}, \quad \xi \text{ лежит между } x_0 \text{ и } x.$$

▷ Функция  $f^{(n+1)}(t)$  непрерывна (т. к.  $f \in C^{(n+1)}[a; b]$ ); применив первую теорему о среднем для интеграла Римана (см. вопрос 14), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt &= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \int_{x_0}^x (x-t)^n dt = \\ &= -\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \Big|_{x_0}^x = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}, \end{aligned}$$

где  $\xi$  лежит между  $x_0$  и  $x$ . ◀

**Задача 17°.** Вычислите  $\int_0^1 f$ , где

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ \sin x, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

▷ Не понял, как делать. ◀