

КОЛЛОКВИУМ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Лектор: Плотников М. Г. • Автор: Пшеничный Никита*, группа 109

1 курс • Весенний семестр 2024 г.

Аннотация

В конце есть раздел с решением задач из списка Михаила Геннадьевича. За помощь с их решением большое спасибо Рамилю Хакамову. Решения (если не указано иного) наши, так что настоятельно рекомендую проверять их на адекватность.

Также благодарю за помощь Ваню Коренева и Лёву Ерченкова. Они предоставили многие решения последних задач, которые я уже не успевал сделать.

Обо всех ошибках и опечатках пишите мне, исправлю.

Программа коллоквиума

- | | | |
|----|---|----|
| 1 | Первообразная, обобщённая первообразная, неопределённый интеграл. Теоремы о множестве всех первообразных и обобщённых первообразных. Дифференцирование и интегрирование — обратные операции. Интегрирование — линейная операция | 3 |
| 2 | Вычисление первообразных непосредственным интегрированием, интегрированием по частям и заменой переменной. Примеры | 3 |
| 3 | Интегральные суммы Римана. Интеграл Римана. Интегрируемость по Риману и ограниченность | 4 |
| 4 | Суммы Дарбу. Интеграл Дарбу | 6 |
| 5 | Колебания функции на множестве | 8 |
| 6 | Теорема Дарбу. Критерий Дарбу интегрируемости по Риману | 10 |
| 7 | Интегрируемость по Риману непрерывных и монотонных функций. Геометрический смысл интегралов Дарбу и Римана | 11 |
| 8 | Свойства интеграла Римана (единственность, линейность, интеграл от постоянной функции, интегрирование неравенств, интегрируемость модуля функции и произведения функций) | 12 |
| 9 | Свойства интеграла Римана (достаточное условие интегрируемости композиции функций, интегрируемость на подотрезках и аддитивность интеграла Римана) | 14 |
| 10 | Свойства интеграла Римана (интегрируемость изменённой функции, достаточное условие положительности интеграла, интеграл по симметричному отрезку от чётных и нечётных функций, интегрируемость кусочно-непрерывных функций) | 16 |

*Telegram: @pshenikita. Последняя компиляция: 14 мая 2024 г.

11	Интеграл Римана с переменным верхним пределом, его непрерывность и достаточное условие дифференцируемости. Теоремы о существовании первообразной/обобщённой первообразной на отрезке. Формула Ньютона — Лейбница	18
12	Замена переменной и интегрирование по частям в интеграле Римана. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме	19
13	Формула Валлиса	21
14	Первая теорема о среднем для интеграла Римана. Преобразование Абеля	22
15	Преобразование Абеля. Вторая теорема о среднем для интеграла Римана	24
16	Вариация функции и функции ограниченной вариации (BV -функции). О связи ограниченности вариации с монотонностью и ограниченностью функции. Аддитивность вариации и структура BV -функции	26
17	Вариация непрерывно дифференцируемых функций. Спрямоаемые кривые, критерий спрямоаемости	28
18	Теорема о длине гладкой кривой. Длина гладкой кривой, описываемой явно заданной функцией	29
19	Вычисление длин кривых и площадей в полярных координатах	31
20	Площади плоских фигур в прямоугольных координатах. Объёмы тел вращения	33
21	Интеграл Римана — Стильеса: определение, линейность, достаточное условие существования, оценка абсолютной величины	34
22	Аддитивность интеграла Римана — Стильеса от непрерывных функций. Связь интегралов Римана — Стильеса и Римана	36
23	Метрические и нормированные пространства. Примеры метрических пространств. Пространство \mathbb{R}^n , метрики и нормы в нём	37
24	Метрические и нормированные пространства. Внутренность, внешность, граница множества, производное множество	39
25	Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве, критерий замкнутости. Открытость и замкнутость шаров. Пересечения и объединения открытых и замкнутых множеств. Замкнутость границы множества	40
26	Предел последовательностей в метрических и нормированных пространствах. Критерий сходимости последовательности в \mathbb{R}^n . Понятие о фундаментальной последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности в \mathbb{R}^n	42
27	Задачи	44

1. ПЕРВООБРАЗНАЯ, ОБОБЩЁННАЯ ПЕРВООБРАЗНАЯ, НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ.

ТЕОРЕМЫ О МНОЖЕСТВЕ ВСЕХ ПЕРВООБРАЗНЫХ И ОБОБЩЁННЫХ ПЕРВООБРАЗНЫХ.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ — ОБРАТНЫЕ ОПЕРАЦИИ.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ — ЛИНЕЙНАЯ ОПЕРАЦИЯ

Определение 1. Пусть функция f определена на промежутке X . (Непрерывная) функция F на X называется *первообразной* (*обобщённой первообразной*) функции f , если $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in X$ (для всех $x \in X$, кроме конечного числа).

Примечание. Если функция f непрерывна на промежутке X , то на этом промежутке для неё существует первообразная. Если f кусочно-непрерывна на промежутке X , то на X для неё существует обобщённая первообразная. Доказано это будет позднее.

Утверждение 1. $F' \equiv 0$ на $X \iff F = \text{const.}$

Доказательство. \Leftarrow Очевидно. \Rightarrow По теореме Лагранжа

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad F(x_1) - F(x_2) = \underbrace{F'(c)}_{=0}(x_1 - x_2) = 0$$

для некоторого $c \in X$, значит, $F = \text{const.}$ ■

Аналогичное утверждение верно и для обобщённой первообразной, достаточно провести вышеописанное доказательство для отрезков между выкинутыми точками. Оно всё ещё корректно, т. к. в теореме Лагранжа требуется дифференцируемость только во внутренних точках отрезка.

Теорема 1 (О множестве (обобщённых) первообразных). Если F_1 и F_2 — (обобщённые) первообразные f на X , то $F_1 - F_2 = \text{const.}$

Доказательство. $(F_1 - F_2)' = f - f = 0$. ■

Произвольная первообразная функции f на промежутке X обозначается через $\int f(x)dx$. Если F — первообразная f , то пишут $\int f(x)dx = F(x) + C$. Первообразную $\int f(x)dx$ называют *неопределённым интегралом*.

Нетрудно заметить, что выполняется следующее:

$$\int dF = \int F'(x)dx = F(x) + C, \quad d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

Поэтому говорят, что дифференцирование и интегрирование — обратные операции. Известно, что дифференцирование — линейная операция, т. е.

$$d(\alpha F + \beta G) = \alpha \cdot dF + \beta \cdot dG.$$

Возьмём первообразную обеих частей, получим

$$\int (\alpha dF + \beta dG) = \int (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx.$$

Поэтому говорят, что интегрирование — линейная операция.

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЕРВООБРАЗНЫХ НЕПОСРЕДСТВЕННЫМ ИНТЕГРИРОВАНИЕМ, ИНТЕГРИРОВАНИЕМ ПО ЧАСТЯМ И ЗАМЕНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ПРИМЕРЫ

Указанные ниже равенства верны на соответствующих областях определения (промежутках):

$$\begin{array}{lll}
1. \int 0 dx = const. & 4. \int e^x dx = e^x + C & 6. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \\
2. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1 & 5. \int \cos x dx = \sin x + C & \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \\
3. \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C & \int \sin x dx = -\cos x + C & 7. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \\
& & \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C
\end{array}$$

8. Длинный логарифм:

$$\left(\ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| \right)' = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 \pm 1}}}{x + \sqrt{x^2 \pm 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + C$$

Высокий логарифм:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2 - 1} &= \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)} = \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} = \frac{1}{2} \ln |x-1| - \frac{1}{2} \ln |x+1| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C
\end{aligned}$$

По правилу Лейбница,

$$d(uv) = du \cdot v + u \cdot dv.$$

Найдём первообразную от обеих частей:

$$\int v du + \int u dv = uv + C \quad \text{или же} \quad \int u' v dx = uv - \int uv' dx.$$

Эта формула называется *формулой интегрирования по частям*.

По правилу дифференцированию сложной функции

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Найдём первообразную от обеих частей:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(x)dx \Big|_{x=\varphi(t)}.$$

Читать последнее равенство также можно как $\int f(\varphi(t)) \underbrace{\varphi'(t)dt}_{d\varphi} = \int f(\varphi)d\varphi$.

3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СУММЫ РИМАНА. ИНТЕГРАЛ РИМАНА. ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ПО РИМАНУ И ОГРАНИЧЕННОСТЬ

Определение 1. Возьмём отрезок $[a; b]$ и построим конечный набор точек

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_{m-1} < a_m = b,$$

тем самым разбив $[a; b]$ на попарно неперекрывающиеся отрезки $\Delta_i := [a_{i-1}; a_i]$, $1 \leq i \leq m$. Набор $T = \{\Delta_i\}_{i=1}^m$ этих отрезков — *разбиение* отрезка $[a; b]$.

Определение 2. Добавим к T произвольный набор $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^m$ точек $\xi_i \in \Delta_i$ (*меток разбиения* T). *Отмеченное разбиение* $T\xi$ отрезка $[a; b]$ — это множество пар $\{(\Delta_i, \xi_i)\}_{i=1}^m$.

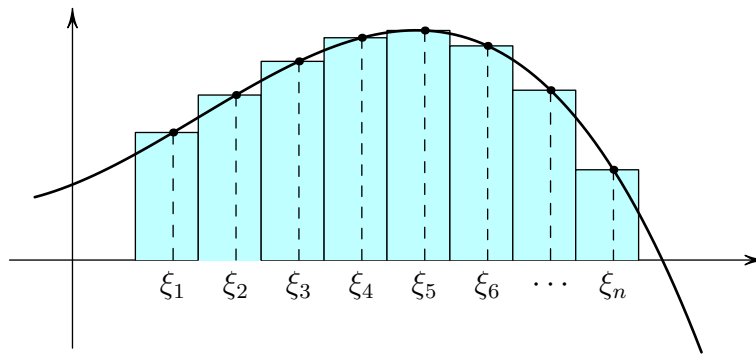
Определение 3. *Интегральная сумма (сумма Римана)* функции $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, соответствующая отмеченному разбиению $T\xi = \{(\Delta_i, \xi_i)\}_{i=1}^m$ отрезка $[a; b]$, есть сумма

$$\mathcal{S}(f, T\xi) := \sum_{i=1}^m f(\xi_i) |\Delta_i|.$$

Геометрический смысл сумм Римана. Рассмотрим определённую на $[a; b]$ неотрицательную функцию f и криволинейную трапецию

$$A = A_{f, [a; b]} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a; b] \wedge y \in [0; f(x)]\} \subset \mathbb{R}^2,$$

связанную с графиком функции f . Тогда интегральная сумма $\mathcal{S}(f, T\xi)$ совпадает с площадью объединения прямоугольников, построенных на отрезках разбиения T как на основаниях и имеющих высоту $f(\xi_i)$:



Определение 4. *Диаметр* разбиения $T = \{\Delta_i\}_{i=1}^m$ — число

$$d(T) := \max_{i=1, \dots, m} |\Delta_i|.$$

Определение 5. Если $d(T) < \delta$, то разбиение T назовём δ -разбиением.

Определение 6 (Интеграл Римана). Функция $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется *интегрируемой по Риману* на отрезке $[a; b]$ (пишем $f \in R[a; b]$), если существует число $I \in \mathbb{R}$ такое, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что для любого δ -разбиения $T\xi = \{(\Delta_i, \xi_i)\}_{i=1}^m$ отрезка $[a; b]$ выполнено неравенство

$$|\mathcal{S}(f, T\xi) - I| = \left| \sum_{i=1}^m f(\xi_i) |\Delta_i| - I \right| < \varepsilon.$$

Число I называют *интегралом Римана* функции f по отрезку $[a; b]$, обозначается $\int_a^b f(x) dx$.

Задача 1° даёт способ вычисления интеграла Римана.

Предложение 1. Если f интегрируема по Риману на отрезке $[a; b]$, то она ограничена на $[a; b]$.

Доказательство. Допустим, $f \in R[a; b]$, но $f \notin B[a; b]$. Возьмём любые $C > 0$ и разбиение $T = \{\Delta_i\}$. Тогда f не ограничена на Δ_i по крайней мере для одного i ($=: i_0$). При всех $i \neq i_0$ расставим метки $\xi_i \in \Delta_i$ произвольным образом, а метку $\xi_{i_0} \in \Delta_{i_0}$ выберем так, что

$$|\mathcal{S}(f, T\xi)| = \left| \sum_i f(\xi_i) |\Delta_i| \right| \geq |f(\xi_{i_0}) |\Delta_{i_0}| - \left| \sum_{i \neq i_0} f(\xi_i) |\Delta_i| \right| > C.$$

Это возможно благодаря неограниченности f на отрезке Δ_{i_0} . Итак, для всех разбиений T имеем $\sup_{\xi} |\mathcal{S}(f, T\xi)| = \infty$, поэтому ни для какого $\varepsilon > 0$ мы не сможем найти $\delta > 0$ такое, что неравенство

$$\left| \mathcal{S}(f, T\xi) - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon$$

выполнялось бы для всех отмеченных δ -разбиений $T\xi$, что противоречит тому, что $f \in R[a; b]$. ■

4. СУММЫ ДАРБУ. ИНТЕГРАЛ ДАРБУ

До конца пункта считаем, что задана функция $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Определение 1. Пусть $T = \{\Delta_i\}_{i=1}^m$ — разбиение отрезка $[a; b]$,

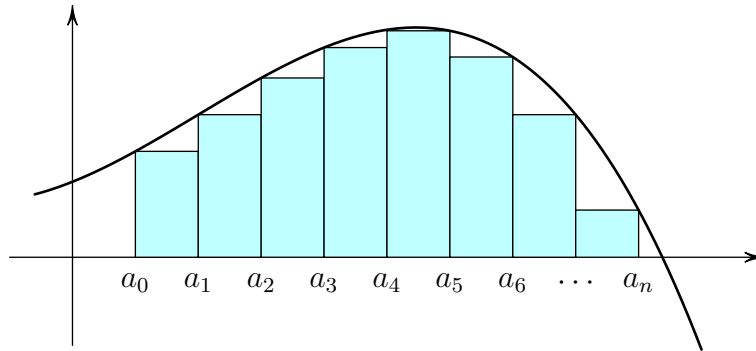
$$m_i := \inf_{x \in \Delta_i} f(x), \quad M_i := \sup_{x \in \Delta_i} f(x).$$

Величины

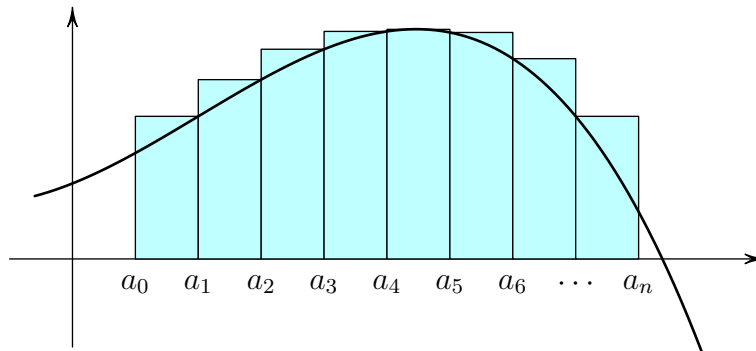
$$s(f, T) := \sum_{i=1}^m m_i |\Delta_i| \quad \text{и} \quad S(f, T) := \sum_{i=1}^m M_i |\Delta_i|$$

— *нижняя и верхняя суммы Дарбу* функции f для разбиения T (соответственно).

Геометрический смысл сумм Дарбу. Пусть функция $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ положительна (не обязательно непрерывна), $A = A_{f, [a; b]}$ — криволинейная трапеция под её графиком. Тогда нижняя сумма Дарбу $s(f, T)$ совпадает с точной верхней гранью площадей T -фигур, вписанных в A .



В свою очередь, верхняя сумма Дарбу $S(f, T)$ совпадает с точной нижней гранью площадей T -фигур, описанных над A .



Часто приходится рассматривать *разность Дарбу* $\omega(f, T) := S(f, T) - s(f, T)$. Геометрически величина $\omega(f, T)$ для непрерывной функции есть площадь «зазора» между наименьшей описанной над A и наибольшей вписанной в A фигурами.

Выразим разность Дарбу $\omega(f, T)$ через колебания функции f на отрезках разбиения $T = \{\Delta_i\}$:

$$\omega(f, T) = S(f, T) - s(f, T) = \sum_i \left(\sup_{\Delta_i} f - \inf_{\Delta_i} f \right) |\Delta_i| = \sum_i \omega(f, \Delta_i) |\Delta_i|.$$

Установим связь между суммами Дарбу и Римана.

Лемма 1. Для любого разбиения T имеем

$$s(f, T) = \inf_{\xi} \mathcal{S}(f, T\xi), \quad S(f, T) = \sup_{\xi} \mathcal{S}(f, T\xi)$$

(точные грани берутся по всем наборам ξ меток разбиения T).

Доказательство. Пусть $T = \{\Delta_i\}_{i=1}^m$. Поскольку $m_i \leq f(\xi_i)$ для любых $\xi_i \in \Delta_i$, то

$$s(f, T) = \sum_i m_i |\Delta_i| \leq \mathcal{S}(f, T\xi)$$

для каждого набора $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^m$ меток разбиения T . С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\xi_i \in \Delta_i$, что $f(\xi_i) |\Delta_i| < m_i |\Delta_i| + \frac{\varepsilon}{m}$. Тогда соответствующая интегральная сумма

$$\mathcal{S}(f, T\xi) = \sum_{i=1}^m f(\xi_i) |\Delta_i| < \sum_{i=1}^m \left(m_i |\Delta_i| + \frac{\varepsilon}{m} \right) = s(f, T) + \varepsilon.$$

Отсюда следует, что $s(f, T) = \sup_{\xi} \mathcal{S}(f, T\xi)$. Вторая формула доказывается аналогично. ■

Определение 2. Пусть даны разбиения T_1 и T_2 . Тогда говорят, что T_1 *мельче* T_2 (и пишут $T_1 \leq T_2$), если для любого $\Delta \in T_1$ найдётся $\Theta \in T_2$ такой, что $\Delta \subseteq \Theta$. Иными словами, T_1 получено из T_2 добавлением ещё нескольких точек разбиения.

Введённое выше отношение транзитивно. В самом деле, пусть $T_1 \leq T_2$ и $T_2 \leq T_3$, пусть также T_1, T_2 и T_3 определяются наборами точек соответственно A_1, A_2 и A_3 . Тогда $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3$, откуда $A_1 \supseteq A_3$, т. е. $T_1 \leq T_3$.

Лемма 2. Если $T_1 \leq T_2$, то

$$s(f, T_1) \geq s(f, T_2), \quad S(f, T_1) \leq S(f, T_2), \quad \omega(f, T_1) \leq \omega(f, T_2).$$

Иными словами, при измельчении разбиения нижние суммы Дарбу не убывают, а верхние суммы Дарбу и разности Дарбу не возрастают.

Доказательство. Достаточно показать утверждение в случае, когда T_1 получается из $T_2 = \{\Delta_i\}_{i=1}^m$ путём разбиения одного из отрезков Δ_i ($=: \Delta_{i_0}$) на два неперекрывающихся отрезка ($=: \Delta'$ и $=: \Delta''$). Имеем:

$$\begin{aligned} S(f, T_2) &= \sum_{i=1}^m \sup_{\Delta_i} f \cdot |\Delta_i| = \sum_{i \neq i_0} \sup_{\Delta_i} f \cdot |\Delta_i| + \sup_{\Delta_{i_0}} f \cdot |\Delta_{i_0}| = \\ &= \sum_{i \neq i_0} \sup_{\Delta_i} f \cdot |\Delta_i| + \sup_{\Delta_{i_0}} f \cdot |\Delta'| + \sup_{\Delta_{i_0}} f \cdot |\Delta''| \geq \\ &\geq \sum_{i \neq i_0} \sup_{\Delta_i} f \cdot |\Delta_i| + \sup_{\Delta'} f \cdot |\Delta'| + \sup_{\Delta''} f \cdot |\Delta''| = S(f, T_1). \end{aligned}$$

Второе равенство доказывается аналогично, а третье есть прямое следствие первых двух. ■

Определение 3. Пусть даны разбиения $T_1 = \{\Delta_i\}$ и $T_2 = \{\Theta_j\}$. Разбиение

$$T_1 \cap T_2 := \{\Delta_i \cap \Theta_j \text{ с непустой внутренней частью}\}$$

называется *пересечением* разбиений T_1 и T_2 .

Очевидно, $T_1 \cap T_2 \leq T_1$ и $T_1 \cap T_2 \leq T_2$.

Лемма 3. Для любых разбиений T_1 и T_2 выполнено $s(f, T_1) \leq S(f, T_2)$.

Доказательство. Лемма 2 даёт $s(f, T_1) \leq s(f, T_1 \cap T_2) \leq S(f, T_1 \cap T_2) \leq S(f, T_2)$. ■

Определение 4 (Интеграл Дарбу). Величины

$$(D) \int_a^b f(x) dx := \sup_T s(f, T) \quad \text{и} \quad (D) \int_a^b f(x) dx := \inf_T S(f, T)$$

называются соответственно *нижним* и *верхним интегралами Дарбу* функции f (по отрезку $[a; b]$). Если нижний и верхний интегралы Дарбу совпадают, то их общее значение назовём *интегралом*

Дарбу функции f по отрезку $[a; b]$ и обозначим $(D) \int_a^b f(x) dx$.

Из леммы 3 видно, что $(D) \int_a^b f(x) dx \leq (D) \int_a^b f(x) dx$.

5. КОЛЕБАНИЯ ФУНКЦИИ НА МНОЖЕСТВЕ

Определение 1. Колебание функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ на множестве $A \subset X$ — величина

$$\omega(f, A) := \sup_{x_1, x_2 \in A} |f(x_1) - f(x_2)|.$$

Если f ограничена на A , то величина $\omega(f, A)$ конечна. В самом деле, ограниченность означает существование $C > 0$ такого, что $|f(x)| \leq C$ для любого $x \in A$. В этом случае

$$\forall x_1, x_2 \in A \quad |f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1)| + |f(x_2)| \leq 2C \Rightarrow \omega(f, A) \leq 2C.$$

Напротив, если f не ограничена на A , то $\omega(f, A) = +\infty$, т.к. можно, фиксировав x_2 , за счёт выбора x_1 сделать величину $|f(x_1) - f(x_2)|$ больше любого наперёд заданного C .

Предложение 1. Если f ограничена на множестве A , то

$$\omega(f, A) = \sup_{x \in A} f(x) - \inf_{x \in A} f(x). \quad (*)$$

Доказательство. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Согласно определению \sup и \inf найдутся такие $x_1, x_2 \in A$, что

$$\sup_{x \in A} f(x) - \varepsilon < f(x_1), \quad f(x_2) < \inf_{x \in A} f(x) + \varepsilon.$$

Из определения колебания функции на множестве вытекает существование $x_3, x_4 \in A$, для которых $\omega(f, A) - \varepsilon < |f(x_3) - f(x_4)|$. Не ограничивая общности, считаем $f(x_3) \geq f(x_4)$, так что

$$\omega(f, A) - \varepsilon < f(x_3) - f(x_4).$$

Получаем:

$$\omega(f, A) - \varepsilon < f(x_3) - f(x_4) \leq \sup_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x) < f(x_1) - f(x_2) + 2\varepsilon \leq \omega(f, A) + 2\varepsilon,$$

откуда $\omega(f, A) - \varepsilon < \sup_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x) < \omega(f, A) + 2\varepsilon$. Т.к. $\varepsilon > 0$ выбиралось произвольно, то имеет место (*). ■

Предложение 2 (Свойства колебания). Пусть $|f(x)| \leq M$ и $|g(x)| \leq M$ для некоторого $M > 0$ и всех $x \in [a; b]$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда

1. $\omega(|f|, A) \leq \omega(f, A)$;
2. $\omega(fg, A) \leq M(\omega(f, A) + \omega(g, A))$;
3. $\omega(\alpha f, A) = |\alpha| \omega(f, A)$;
4. $\omega(f + g, A) \leq \omega(f, A) + \omega(g, A)$;
5. $\omega(\alpha f + \beta g, A) \leq |\alpha| \omega(f, A) + |\beta| \omega(g, A)$.

Доказательство.

1. Проверяем:

$$\begin{aligned} ||f(x_1)| - |f(x_2)|| &\leq |f(x_1) - f(x_2)| \leq \omega(f, A), \quad x_1, x_2 \in A; \\ \omega(|f|, A) &= \sup_{x_1, x_2 \in A} ||f(x_1)| - |f(x_2)|| \leq \omega(f, A). \end{aligned}$$

2. Проверяем:

$$\begin{aligned} |f(x_1)g(x_1) - f(x_2)g(x_2)| &= |f(x_1)(g(x_1) - g(x_2)) + g(x_2)(f(x_1) - f(x_2))| \leq \\ &M|g(x_1) - g(x_2)| + M|f(x_1) - f(x_2)| \leq M(\omega(f, A) + \omega(g, A)), \quad x_1, x_2 \in A; \\ \omega(fg, A) &= \sup_{x_1, x_2 \in A} |f(x_1)g(x_1) - f(x_2)g(x_2)| \leq M(\omega(f, A) + \omega(g, A)). \end{aligned}$$

3. Если $\alpha = 0$, обе части неравенства равны нулю, и всё доказано. Если $\alpha \neq 0$, то (*):

$$\begin{aligned} |\alpha f(x_1) - \alpha f(x_2)| &= |\alpha| |f(x_1) - f(x_2)| \leq |\alpha| \omega(f, A), \quad x_1, x_2 \in A \\ \omega(\alpha f, A) &= \sup_{x_1, x_2 \in A} |\alpha f(x_1) - \alpha f(x_2)| \leq |\alpha| \omega(f, A) \end{aligned}$$

Теперь возьмём любое $\varepsilon > 0$ и отыщем $x_1, x_2 \in A$ такие, что

$$\omega(f, A) < |f(x_1) - f(x_2)| + \frac{\varepsilon}{|\alpha|}.$$

Тогда

$$|\alpha| \omega(f, A) < |\alpha f(x_1) - \alpha f(x_2)| + \varepsilon \leq \omega(\alpha f, A) + \varepsilon. \quad (*)$$

Из (*) и (*) вытекает, с учётом произвольности $\varepsilon > 0$, требуемое равенство.

4. Проверяем:

$$\begin{aligned} |(f + g)(x_1) - (f + g)(x_2)| &\leq |f(x_1) - f(x_2)| + |g(x_1) - g(x_2)| \leq \\ &\leq \omega(f, A) + \omega(g, A), \quad x_1, x_2 \in A \\ \omega(f + g, A) &= \sup_{x_1, x_2 \in A} |(f + g)(x_1) - (f + g)(x_2)| \leq \omega(f, A) + \omega(g, A). \end{aligned}$$

5. Следствие п. 3 и 4

■

6. ТЕОРЕМА ДАРБУ. КРИТЕРИЙ ДАРБУ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ПО РИМАНУ

Теорема 1 (Дарбу). Пусть функция $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. Существует $(R) \int_a^b f(x)dx = I$.
2. Существует $(D) \int_a^b f(x)dx = I$.
3. Для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся разбиение \tilde{T} отрезка $[a; b]$ такое, что $\omega(f, \tilde{T}) < \varepsilon$.

Доказательство. (1) \Rightarrow (2). Допустим, существует $(R) \int_a^b f(x)dx = I$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что соотношение

$$I - \varepsilon < \mathcal{S}(f, T\xi) < I + \varepsilon$$

выполнено для каждого δ -разбиения и набора ξ меток к нему. Тогда

$$I - \varepsilon \leq \inf_{\xi} \mathcal{S}(f, T\xi) = s(f, T) \leq S(f, T) = \sup_{\xi} \mathcal{S}(f, T\xi) \leq I + \varepsilon,$$

$$I - \varepsilon \leq s(f, T) \leq S(f, T) \leq I + \varepsilon; \quad I - \varepsilon \leq (D) \int_a^b f(x)dx \leq (D) \int_a^b f(x)dx \leq I + \varepsilon.$$

Т.к. $\varepsilon > 0$ выбиралось произвольно, то $I = (D) \int_a^b f(x)dx = (D) \int_a^b f(x)dx = (D) \int_a^b f(x)dx$.

$$(2) \Rightarrow (3). \text{ Допустим, что существует } (D) \int_a^b f(x)dx = I, \text{ т.е. } (D) \int_a^b f(x)dx = (D) \int_a^b f(x)dx.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся разбиения T_1 и T_2 такие, что

$$S(f, T_2) - \frac{\varepsilon}{2} < I < s(f, T_1) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если $\tilde{T} := T_1 \cap T_2$, то $\tilde{T} \leq T_1, T_2$ и (по лемме 2)

$$\omega(f, \tilde{T}) = S(f, \tilde{T}) - s(f, \tilde{T}) \leq S(f, T_2) - s(f, T_1) < \varepsilon.$$

(3) \Rightarrow (1). Т.к. функция $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена, найдётся $M > 0$ такое, что $|f(x)| \leq M$ для всех $x \in [a; b]$. Выберем любое $\varepsilon > 0$ и найдём разбиение $\tilde{T} = \{[a_{i-1}, a_i]\}_{i=1}^m$ отрезка $[a; b]$ такое, что $\omega(f, \tilde{T}) < \varepsilon$. Положим $\delta := \varepsilon/m$ и рассмотрим все концы, исключая крайние, отрезков из \tilde{T} , т.е. точки a_1, \dots, a_{m-1} . Окружим каждую из них δ -окрестностью и 2δ -окрестностью и возьмём объединения

$$A := \bigcup_{i=1}^{m-1} (a_i - \delta, a_i + \delta), \quad B := \bigcup_{i=1}^{m-1} (a_i - 2\delta, a_i + 2\delta),$$

Пусть $T\xi = \{(\Delta_j, \xi_j)\}$ — произвольное отмеченное δ -разбиение отрезка $[a; b]$. Если $\xi_j \in A$, то $\Delta_j \subset B$. Если же $\xi_j \in [a; b] \setminus A$, то $\Delta_j \subset [a_{i-1}, a_i]$ для некоторого i . Имеем:

$$\begin{aligned} \omega(f, T) &= \sum_j \omega(f, \Delta_j) |\Delta_j| = \sum_{\xi_j \in A} \omega(f, \Delta_j) |\Delta_j| + \sum_{\xi_j \notin A} \omega(f, \Delta_j) |\Delta_j| \leq \\ &\leq 2M \cdot 4\delta m + \sum_{i=1}^m \sum_{\Delta_j \subset [a_{i-1}, a_i]} \omega(f, \Delta_j) |\Delta_j| \leq 8M\varepsilon + \sum_{i=1}^m \omega(f, [a_{i-1}, a_i]) \sum_{\Delta_j \subset [a_{i-1}, a_i]} |\Delta_j| \leq \\ &\leq 8M\varepsilon + \sum_{i=1}^m \omega(f, [a_{i-1}, a_i]) (a_i - a_{i-1}) \leq 8M\varepsilon + \omega(f, \tilde{T}) < \varepsilon C, \quad C := 8M + 1. \end{aligned}$$

Таким образом, $\omega(f, T) < \varepsilon C$. Положим $I := (D) \int_a^b f(x) dx$ (можно взять и верхний). Имеем:

$$s(f, T) \leq \mathcal{S}(f, T\xi) \leq S(f, T), \quad s(f, T) \leq I \leq (D) \int_a^b f(x) dx \leq S(f, T).$$

Отсюда $|\mathcal{S}(f, T\xi) - I| < S(f, T) - s(f, T) = \omega(f, T) < \varepsilon C$. Т.к. $\varepsilon > 0$ и отмеченное δ -разбиение $T\xi$ произвольные, а $C > 0$ от них не зависит, то $f \in R[a; b]$ и $(R) \int_a^b f(x) dx = I$. ■

Следствие 1 (Критерий Дарбу интегрируемости по Риману). Если функция $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена, то $\exists (R) \int_a^b f(x) dx = I \Leftrightarrow \exists (D) \int_a^b f(x) dx = I$.

Утверждение 1. Функция Дирихле

$$\text{Dir}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{если } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

не интегрируема по Риману ни на каком отрезке $[a; b]$.

Доказательство. В самом деле, возьмём произвольное разбиение $T = \{\Delta_i\}$ отрезка $[a; b]$. В каждом отрезке Δ_i есть точки как из \mathbb{Q} , так и не из \mathbb{Q} . Следовательно,

$$s(\text{Dir}, T) = \sum_i \inf_{\Delta_i} \text{Dir} \cdot |\Delta_i| = 0, \quad S(\text{Dir}, T) = \sum_i \sup_{\Delta_i} \text{Dir} \cdot |\Delta_i| = \sum_i 1 \cdot |\Delta_i| = b - a.$$

Значит, $(D) \int_a^b \text{Dir} = 0$ и $(D) \int_a^b \text{Dir} = b - a$. Несовпадение интегралов даёт $f \notin R[a; b]$. ■

7. ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ПО РИМАНУ НЕПРЕРЫВНЫХ И МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ИНТЕГРАЛОВ ДАРБУ И РИМАНА

Утверждение 1. Если функция $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ имеет конечное число точек разрыва и ограничена, она интегрируема по Риману на этом отрезке.

Доказательство. Возьмём $\varepsilon > 0$ и такое $C > 0$, что $|f(x)| \leq C$ для всех $x \in [a; b]$ (существует из ограниченности f). Пользуясь тем, что функция f имеет конечное число точек разрыва, построим разбиение $T = T^1 \sqcup T^2$ отрезка $[a; b]$ так, что сумма длин отрезков $\Delta_i \in T^1$ меньше $\frac{\varepsilon}{4C}$, а на всех отрезках $\Delta_i \in T^2$ функция f непрерывна. Последнее означает, что f равномерно непрерывна на Δ_i , поэтому найдётся $\delta_i > 0$ такое, что $(|x - z| < \delta_i) \wedge (x, z \in \Delta_i) \Rightarrow |f(x) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Т.к. набор T^2 конечен, $\delta > 0$ можно выбрать общим для всех $\Delta_i \in T^2$ (взяв $\delta := \min_i \delta_i$). Имеем:

$$\begin{aligned} S(f, T) - s(f, T) &= S(f, T^1) - s(f, T^1) + S(f, T^2) - s(f, T^2) = \sum_{\Delta_i \in T^1} \left(\sup_{\Delta_i} f - \inf_{\Delta_i} f \right) |\Delta_i| + \\ &+ \sum_{\Delta_i \in T^2} \left(\sup_{\Delta_i} f - \inf_{\Delta_i} f \right) |\Delta_i| < 2C \sum_{\Delta_i \in T^1} |\Delta_i| + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{\Delta_i \in T^2} |\Delta_i| < \varepsilon. \end{aligned}$$

■

Следствие 1. Если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$ функция f интегрируема по Риману на этом отрезке.

Утверждение 2. Любая монотонная функция на отрезке $[a; b]$ функция f интегрируема по Риману на этом $[a; b]$.

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что f не постоянна и не убывает на $[a; b]$. Очевидно, что f ограничена на $[a; b]$. Далее, возьмём любое $\varepsilon > 0$, положим $\delta := \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$ и рассмотрим произвольное δ -разбиение $T = \{\Delta_i = [a_{i-1}; a_i]\}_{i=1}^m$ отрезка $[a; b]$. Пользуясь неубыванием f , оценим величину $\omega(f, T)$:

$$\begin{aligned} \omega(f, T) &= \sum_{i=1}^m \left(\sup_{\Delta_i} f - \inf_{\Delta_i} f \right) |\Delta_i| \stackrel{f \text{ не убывает}}{=} \sum_{i=1}^m (f(a_i) - f(a_{i-1})) |\Delta_i| < \\ &< \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=1}^m (f(a_i) - f(a_{i-1})) = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} (f(b) - f(a)) = \varepsilon. \end{aligned}$$

■

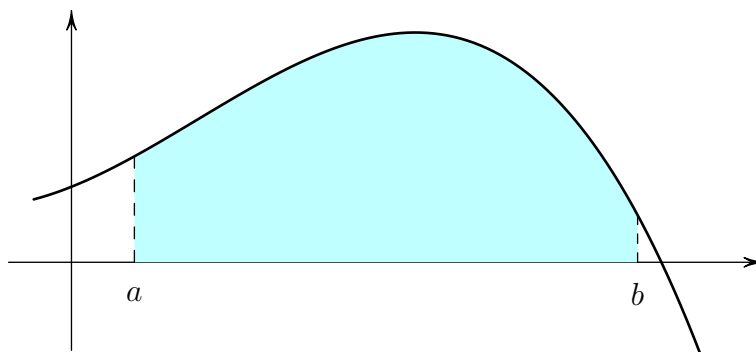
Геометрический смысл интегралов Дарбу и Римана. Пусть функция $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ положительна, A — криволинейная трапеция под её графиком. Тогда нижний интеграл Дарбу совпадает с точной верхней гранью T -фигур, вписанных в A , а верхний интеграл Дарбу — с точной нижней гранью T -фигур, описанных над A . Пусть функция $f \in R[a; b]$ положительна, $A = A(f, [a; b])$ — криволинейная трапеция под её графиком, $S(A)$ — площадь этой трапеции. Тогда

$$s(f, T) \leq S(A) \leq S(f, T)$$

для любого разбиения T , следовательно,

$$(D) \int_a^b f \leq S(A) \leq (D) \int_a^b f.$$

Т. к. (критерий Дарбу) верхний и нижний интегралы равны, то $S(A) = \int_a^b f(x) dx$.



8. СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛА РИМАНА (ЕДИНСТВЕННОСТЬ, ЛИНЕЙНОСТЬ, ИНТЕГРАЛ ОТ ПОСТОЯННОЙ ФУНКЦИИ, ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕРАВЕНСТВ, ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ МОДУЛЯ ФУНКЦИИ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ)

Теорема 1 (Единственность интеграла). Если $(R) \int_a^b f(x) dx$ существует, то он единственен.

Доказательство. Если $(R) \int_a^b f(x)dx$ существует, он совпадает с интегралом Дарбу $(D) \int_a^b f(x)dx$, а последний определяется однозначно. ■

Теорема 2 (О линейности интеграла). Если $f, g \in R[a; b]$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то $\alpha f + \beta g \in R[a; b]$ и

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Для каждого разбиения $T\xi = \{(\Delta_i, \xi_i)\}$ отрезка $[a; b]$ имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\alpha f + \beta g, T\xi) &= \sum_i (\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i)) |\Delta_i| = \alpha \sum_i f(\xi_i) |\Delta_i| + \beta \sum_i g(\xi_i) |\Delta_i| = \\ &= \alpha \mathcal{S}(f, T\xi) + \beta \mathcal{S}(g, T\xi). \end{aligned}$$

Пусть $\varepsilon > 0$, $I_f := \int_a^b f$, $I_g := \int_a^b g$. По определению, существует $\delta > 0$ такое, что

$$|\mathcal{S}(f, T\xi) - I_f| < \varepsilon \text{ и } |\mathcal{S}(g, T\xi) - I_g| < \varepsilon$$

для всех отмеченных δ -разбиений $T\xi$ отрезка $[a; b]$. Для тех же $T\xi$

$$\begin{aligned} |\mathcal{S}(\alpha f + \beta g, T\xi) - (\alpha I_f + \beta I_g)| &= |\alpha \mathcal{S}(f, T\xi) + \beta \mathcal{S}(g, T\xi) - (\alpha I_f + \beta I_g)| \leq \\ &\leq |\alpha| |\mathcal{S}(f, T\xi) - I_f| + |\beta| |\mathcal{S}(g, T\xi) - I_g| < (|\alpha| + |\beta|) \varepsilon. \end{aligned}$$

Это и значит, что утверждение теоремы верно. ■

Утверждение 1 (Интеграл константы). $\int_a^b C dx = C(b - a)$.

Доказательство. Если $F(x) \equiv C$ на $[a; b]$, то $\mathcal{S}(f, T\xi) = \sum_{T\xi} C |\Delta_i| = C(b - a)$ для каждого отмеченного разбиения $T\xi = \{(\Delta_i, \xi_i)\}$. ■

Теорема 3 (Об интегрировании неравенств). Если $f, g \in R[a; b]$ и $f(x) \leq g(x)$ для всех $x \in [a; b]$, то $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Доказательство. Если $f \leq g$ на $[a; b]$, на каждом отмеченном разбиении $T\xi = \{(\Delta_i, \xi_i)\}$ выполнено

$$\mathcal{S}(f, T\xi) = \sum_{T\xi} f(\xi_i) |\Delta_i| \leq \sum_{T\xi} g(\xi_i) |\Delta_i| = \mathcal{S}(g, T\xi).$$

Отсюда $s(f, T) \leq s(g, T)$, что влечёт $(D) \int_a^b f \leq (D) \int_a^b g$. По теореме Дарбу нижние интегралы Дарбу можно заменить на интегралы Римана. Это даёт нужное равенство. ■

Теорема 4 (Об интегрируемости модуля функции). Если $f \in R[a; b]$, то $|f| \in R[a; b]$ и

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Доказательство. Если $f \in R[a; b]$, то f ограничена на $[a; b]$, $|f|$ тоже. По теореме Дарбу для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое разбиение $T = \{\Delta_i\}$ такое, что $\omega(f, T) < \varepsilon$. Тогда

$$\omega(|f|, T) = \sum_i \omega(|f|, \Delta_i) |\Delta_i| \leq \sum_i \omega(f, \Delta_i) |\Delta_i| = \omega(f, T) < \varepsilon.$$

Неравенство выполнено в силу свойств колебаний функции. Применяя в обратную сторону теорему Дарбу, получаем $|f| \in R[a; b]$. Линейность даёт $-|f| \in R[a; b]$. Интегрируя неравенство $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, получим

$$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|,$$

что и есть утверждение теоремы. ■

Теорема 5 (Об интегрируемости произведения). Пусть $f, g \in R[a; b]$, тогда $fg \in R[a; b]$.

Доказательство. Интегрируемость влечёт ограниченность: $|f(x)| \leq M$ и $|g(x)| \leq M$ для некоторого $M > 0$ и всех $x \in [a; b]$. Из интегрируемости также вытекает (теорема Дарбу), что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся разбиения T_1 и T_2 отрезка $[a; b]$ такие, что $\omega(f, T_1) < \varepsilon$ и $\omega(g, T_2) < \varepsilon$. Разбиение $T = \{\Delta_i\} := T_1 \cap T_2$ мельче T_1 и T_2 , отсюда

$$\begin{aligned} \omega(fg, T) &\leq \omega(f, T_1) < \varepsilon, \quad \omega(g, T) \leq \omega(g, T_2) < \varepsilon; \\ \omega(fg, T) &= \sum_i \omega(fg, \Delta_i) |\Delta_i| \leq M \sum_i (\omega(f, \Delta_i) + \omega(g, \Delta_i)) |\Delta_i| = M (\omega(f, T) + \omega(g, T)) < 2M\varepsilon. \end{aligned}$$

Применяя в обратную сторону теорему Дарбу, получаем $fg \in R[a; b]$. ■

9. СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛА РИМАНА (ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ КОМПОЗИЦИИ ФУНКЦИЙ, ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ НА ПОДОТРЕЗКАХ И АДДИТИВНОСТЬ ИНТЕГРАЛА РИМАНА)

Здесь мы приведём (без доказательства) более прозрачный и мощный, нежели критерий Дарбу, критерий интегрируемости по Риману.

Определение 1. Множество $E \subset \mathbb{R}$ имеет *меру нуль по Лебегу*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся не более чем счётная система отрезков $\{\Delta_i : i \in I\}$ (I — не более чем счётное множество индексов) такая, что $E \subset \bigcup_{i \in I} \Delta_i$ и $\sum_{i \in I} |\Delta_i| < \varepsilon$.

Теорема 1 (Критерий Лебега интегрируемости по Риману). $f \in R[a; b]$ тогда и только тогда, когда f ограничена на $[a; b]$ и множество её точек разрыва имеет меру нуль по Лебегу.

Теорема 2 (Достаточное условие интегрируемости композиции). Пусть $f \in R[a; b]$, а функция φ ограничена и непрерывна на $f([a; b])$. Тогда $\varphi \circ f \in R[a; b]$.

Доказательство. Здесь применим (пока не доказанный) критерий Лебега. Согласно ему, f ограничена, а множество её точек разрыва имеет меру нуль по Лебегу.

Из ограниченности f и φ следует ограниченность $\varphi \circ f$. Из непрерывности φ на $f([a; b])$ следует, что в тех точках, где f непрерывна, $\varphi \circ f$ тоже (теорема о непрерывности композиции функций). Следовательно, множество точек разрыва $\varphi \circ f$ тоже имеет меру нуль по Лебегу. Снова применяя критерий Лебега, получаем $\varphi \circ f \in R[a; b]$. ■

Пример 1. Возьмём функции

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad f(x) = \text{Riem}(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } x = \frac{m}{n}, \frac{m}{n} \text{ — несократимая дробь,} \\ 0, & \text{если } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Функция f интегрируема по Риману на любом отрезке $[a; b]$, а $\varphi(x)$ ограничена на \mathbb{R} и разрывна только при $x = 0$. Композиция $\varphi \circ f$ есть функция Дирихле, которая не интегрируема по Риману ни на каком отрезке $[a; b]$. Таким образом, последняя теорема может не выполняться, если функция φ разрывна хотя бы в одной точке.

Теорема 3 (Об интегрируемости на подотрезках). Если $f \in R[a; b]$ и $[c; d] \subset [a; b]$, то $f \in R[c; d]$.

Доказательство. Из интегрируемости f вытекает (теорема Дарбу) существование разбиения T такого, что $\omega(f, T) < \varepsilon$. Добавим к набору точек, порождающих T , точки c и d . Получим более мелкое разбиение \tilde{T} отрезка $[a; b]$ (для него $\omega(f, \tilde{T}) \leq \omega(f, T) < \varepsilon$), содержащее в себе разбиение \tilde{T}^0 отрезка $[c; d]$. Получаем

$$\varepsilon > \omega(f, \tilde{T}) = \sum_{\Delta \in \tilde{T}^0} \left(\sup_{\Delta} f - \inf_{\Delta} f \right) |\Delta| + \sum_{\Delta \notin \tilde{T}^0} \left(\sup_{\Delta} f - \inf_{\Delta} f \right) |\Delta| \geq \sum_{\Delta \in \tilde{T}^0} \left(\sup_{\Delta} f - \inf_{\Delta} f \right) |\Delta| = \omega(f, \tilde{T}^0).$$

Согласно теореме Дарбу, $f \in R[c; d]$. ■

Теорема 4 (Об аддитивности интеграла Римана). Допустим, $a < c < b$ и $f \in R[a; c] \cap R[c; b]$. Тогда $f \in R[a; b]$ и

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Для доказательства этой теоремы нам понадобится лемма:

Лемма 1. Если f ограничена на отрезке $[a; b]$ и $a < c < b$, то

$$(D) \int_a^b f = (D) \int_a^c f + (D) \int_c^b f, \quad (*)$$

и аналогичное равенство справедливо для верхних интегралов Дарбу.

Доказательство. Возьмём любое $\varepsilon > 0$. Определение нижнего интеграла Дарбу даёт существование разбиений T^1 отрезка $[a; c]$ и T^2 отрезка $[c; b]$ таких, что

$$s(f, T^1) > (D) \int_a^c f - \varepsilon, \quad s(f, T^2) > (D) \int_c^b f - \varepsilon.$$

Для разбиений $T = T^1 \sqcup T^2$ отрезка $[a; b]$ имеем:

$$\begin{aligned} (D) \int_a^b f &\geq s(f, T) = \sum_{\Delta_i \in T} \inf_{\Delta_i} f \cdot |\Delta_i| = \sum_{\Delta_i \in T^1} \inf_{\Delta_i} f \cdot |\Delta_i| + \sum_{\Delta_i \in T^2} \inf_{\Delta_i} f \cdot |\Delta_i| = \\ &= s(f, T^1) + s(f, T^2) > (D) \int_a^c f + (D) \int_c^b f - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Т. к. $\varepsilon > 0$ произвольно, левая часть $(*)$ не меньше правой.

Снова возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и найдём разбиение T отрезка $[a; b]$ такое, что

$$s(f, T) > (D) \int_a^b f - \varepsilon.$$

Если в набор точек, порождающих T , не входила точка c , добавим её и получим новое, более мелкое разбиение (оставим ему старое название T), для которого тем более верно последнее неравенство (при измельчении разбиения нижние суммы Дарбу могут только возрасти). Разбиение T есть $T^1 \sqcup T^2$, где T^1 — разбиение отрезка $[a; c]$, а T^2 — разбиение отрезка $[c; b]$. Имеем:

$$(D) \int_a^b f < s(f, T) + \varepsilon = s(f, T^1) + s(f, T^2) + \varepsilon \leq (D) \int_a^c f + (D) \int_c^b f + \varepsilon.$$

Т. к. $\varepsilon > 0$ произвольно, левая часть (*) не больше правой.

Таким образом, имеет место равенство (*), а его аналог для верхних интегралов Дарбу доказывается аналогично. ■

А теперь докажем теорему об аддитивности интеграла:

Доказательство. Из интегрируемости вытекает ограниченность f и на $[a; c]$, и на $[c; b]$, значит, и на $[a; b]$ тоже. Далее,

$$(D) \int_a^b f = (D) \int_a^c f + (D) \int_c^b f \stackrel{\text{критерий Дарбу}}{=} (D) \int_a^c f + (D) \int_c^b f = (D) \int_a^b f.$$

Согласно, критерию Дарбу, $f \in R[a; b]$ и каждый верхний или нижний интеграл Дарбу в последнем выражении можно заменить на интеграл Римана. ■

Примечание. До сих пор предполагалось, что верхний предел интегрирования больше нижнего. Ситуацию можно расширить, положив по определению

$$\int_b^a f(x) dx := - \int_a^b f(x) dx.$$

Можно показать, что последняя теорема верна для всех a , b и c с учётом дополненного нами определения.

10. СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛА РИМАНА (ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ИЗМЕНЁННОЙ ФУНКЦИИ, ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТИ ИНТЕГРАЛА, ИНТЕГРАЛ ПО СИММЕТРИЧНОМУ ОТРЕЗКУ ОТ ЧЁТНЫХ И НЕЧЁТНЫХ ФУНКЦИЙ, ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ)

Теорема 1 (Об интегрируемости изменённой функции). Если функцию $f \in R[a; b]$ изменить на конечном множестве, то изменённая функция $\tilde{f} \in R[a; b]$ и $\int_a^b f = \int_a^b \tilde{f}$.

Нам понадобится лемма:

Лемма 1. Допустим, $E \subset [a; b]$ — конечное множество, и функция g равна нулю вне E . Тогда $g \in R[a; b]$ и $\int_a^b g(x) dx = 0$.

Доказательство. Пусть $E = \{a_1, \dots, a_n\}$, $C := \max\{f(a_1), \dots, f(a_n)\}$. Выберем любое $\varepsilon > 0$, положим $\delta := \varepsilon/(Cn)$ и возьмём произвольное δ -разбиение $T\xi = \{(\Delta_i, \xi_i)\}$ отрезка $[a; b]$. Тогда

$$|S(f, T\xi)| < \left| \sum_{\xi_i \in E} g(\xi_i) |\Delta_i| \right| + \left| \sum_{\xi_i \notin E} g(\xi_i) |\Delta_i| \right| \leq Cn\delta + 0 = \varepsilon.$$

Согласно определению интеграла Римана, $g \in R[a; b]$ и $\int_a^b g = 0$. ■

Доказательство. Разность $\tilde{f} - f =: g$ равна нулю вне конечного множества $E \subset [a; b]$. Тогда $g \in R[a; b]$ и $\int_a^b g = 0$. Значит, $\tilde{f} = f + g \in R[a; b]$ и $\int_a^b \tilde{f} = \int_a^b f + \int_a^b g = \int_a^b f$. ■

Теорема 2 (Достаточное условие положительности интеграла). Допустим, функция f интегрируема по Риману и неотрицательна на отрезке $[a; b]$, а также непрерывна в точке $x_0 \in [a; b]$, в которой $f(x_0) > 0$. Тогда $\int_a^b f(x)dx > 0$.

Доказательство. Т.к. $f \in C(x_0)$ и $f(x_0) > 0$, найдётся отрезок $I \subset [a; b]$ такой, что $f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2} > 0$ на I . Положим

$$g(x) := \begin{cases} \frac{f(x_0)}{2}, & x \in I, \\ 0, & x \in [a; b] \setminus I. \end{cases}$$

Тогда $f \geq g$ на $[a; b]$, отрезок $[a; b]$ есть объединение двух или трёх неперекрывающихся отрезков, один из которых есть I ,

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g = \int_I g = \frac{f(x_0)}{2} |I| > 0.$$

Теорема 3 (Об интеграле по симметричному отрезку от чётных и нечётных функций). Пусть $f \in R[-a; a]$. Если функция f чётна, то

$$\int_{-a}^0 f = \int_0^a f, \quad \int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f,$$

а если нечётна, то

$$\int_{-a}^0 f = - \int_0^a f, \quad \int_{-a}^a f = 0.$$

Доказательство. Каждому отмеченному разбиению $T\xi = \{(\Delta_i, \xi_i)\}_i$ отрезка $[0; a]$ однозначно соответствует «симметричное» отмеченное разбиение \tilde{T} (того же диаметра), отрезки и метки в котором симметричны Δ_i и ξ_i относительно нуля. Для чётной функции f

$$\mathcal{S}(f, T\xi) = \sum_{i=1}^m f(\xi_i) |\Delta_i| = \sum_{i=1}^m f(-\xi_i) |\Delta_i| = \mathcal{S}(f, \tilde{T}\tilde{\xi}),$$

и определение интеграла Римана даёт $\int_0^a f = \int_{-a}^0 f$. Далее,

$$\int_{-a}^a f = \int_{-a}^0 f + \int_0^a f = 2 \int_0^a f.$$

Если f нечётна, то

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(f, T\xi) &= \sum_{i=1}^m f(\xi_i) |\Delta_i| = \sum_{i=1}^m -f(-\xi_i) |\Delta_i| = -\mathcal{S}(f, \widetilde{T\xi}), \\ \int_{-a}^0 f &= -\int_0^a f, \quad \int_{-a}^a f = \int_{-a}^0 f + \int_0^a f = -\int_0^a f + \int_0^a f = 0.\end{aligned}$$

■

Теорема 4 (Об интегрируемости кусочно-непрерывных функций). Если функция f кусочно-непрерывна на отрезке $[a; b]$, то $f \in R[a; b]$.

Доказательство. См. утверждение 1 в вопросе 7.

■

11. ИНТЕГРАЛ РИМАНА С ПЕРЕМЕННЫМ ВЕРХНИМ ПРЕДЕЛОМ, ЕГО НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ. ТЕОРЕМЫ О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРВООБРАЗНОЙ/ОБООБЩЁННОЙ ПЕРВООБРАЗНОЙ НА ОТРЕЗКЕ. ФОРМУЛА НЬЮТОНА — ЛЕЙБНИЦА

Определение 1. Если задана функция $f \in R[a; b]$, то функцию $F : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt, \quad F(a) := 0,$$

называют *интегралом (Римана) с переменным верхним пределом*.

Теорема 1. $F \in C[a; b]$.

Доказательство. Т. к. $f \in R[a; b]$, $f \in B[a; b]$, то $|f(x)| \leq C$ для некоторого $C > 0$ и всех $x \in [a; b]$. Имеем:

$$\begin{aligned}F(x+h) - F(x) &= \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt; \\ |F(x+h) - F(x)| &= \left| \int_x^{x+h} f(t)dt \right| \leq \left| \int_x^{x+h} |f(t)| dt \right| \leq C|h|.\end{aligned}$$

При $h \rightarrow 0$ имеем $C|h| \rightarrow 0$, поэтому и $|F(x+h) - F(x)| \rightarrow 0$, т. е. $F \in C(x)$. Точка $x \in [a; b]$ могла быть любой, следовательно, $F \in C[a; b]$.

■

Теорема 2. Если $f \in C(x)$, то $F \in D(x)$ и $F'(x) = f(x)$.

Доказательство. Воспользуемся тем, что $f \in C(x)$ и для каждого $\varepsilon > 0$ найдём $\delta > 0$ такое, что

$$|t - x| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon.$$

При $0 < h < \delta$ имеем:

$$\begin{aligned}\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| &= \frac{1}{h} |F(x+h) - F(x) - f(x)h| = \frac{1}{h} \left| \int_x^{x+h} f(t)dt - f(x)h \right| = \\ &= \frac{1}{h} \left| \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt \right| \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt \leq \frac{1}{h} \cdot \varepsilon h = \varepsilon.\end{aligned}$$

При $-\delta < h < 0$ оценка тоже верна. Т. к. $\varepsilon > 0$ выбиралось произвольным,

$$\exists F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

■

Теорема 3 (О существовании первообразной/обобщённой первообразной на отрезке). Если $f \in C[a; b]$ (или f ограничена и имеет конечное число точек разрыва либо кусочно-непрерывна на $[a; b]$), то всякая функция вида $F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$ является (обобщённой) первообразной для функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и верна *формула Ньютона — Лейбница*:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Доказательство. Если $f \in C[a; b]$, то $f \in R[a; b]$ и $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in [a; b]$ (по предыдущей теореме), т. е. F — первообразная для f на $[a; b]$. Из определения функции F следует

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt + C - C = \int_a^b f(t)dt.$$

Если f ограничена и имеет конечное число точек разрыва, то $f \in R[a; b]$ (см. утверждение 1 в вопросе 7). Далее, пусть a_1, \dots, a_n — точки разрыва функции f . Из предыдущих теорем в этом вопросе вытекает, что $F \in C[a; b]$ и $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in [a; b] \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$, т. е. F — обобщённая первообразная для f на $[a; b]$. Доказательство формулы Ньютона — Лейбница такое же. ■

Примечание. Случай кусочно-непрерывной функции включается в уже доказанный во втором абзаце.

Теорема 4. Если $f \in C[a; b]$ (или ограничена и имеет конечное число точек разрыва), а F — (обобщённая) первообразная для f на $[a; b]$, то верна формула Ньютона — Лейбница.

Доказательство. Докажем первое утверждение, а второе доказывается по той же схеме. По предыдущей теореме все функции вида $\int_a^x f(t)dt + C$ есть первообразные для $f(x)$ на $[a; b]$ и других

первообразных нет (по теореме о множестве всех первообразных). Поэтому $F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$ при некотором C . Остаётся применить предыдущую теорему. ■

12. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ В ИНТЕГРАЛЕ РИМАНА. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА С ОСТАТОЧНЫМ ЧЛЕНОМ В ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Теорема 1 (О замене переменной в интеграле Римана). Пусть заданы функции $f \in C[a; b]$ и $\varphi : [\alpha; \beta] \rightarrow [a; b]$, причём $\varphi \in C^1[\alpha; \beta]$, $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)dt.$$

Доказательство. По условию теоремы все функции f , φ и φ' непрерывны, поэтому подынтегральная функция в интеграле справа непрерывна.

Пусть F — первообразная для непрерывной функции f на отрезке $[a; b]$. Имеем

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Далее, $F'(x) = f(x) \forall x \in [a; b]$. Поэтому (теорема о производной композиции функций)

$$(F \circ \varphi)'(t) = (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t) \quad \forall t \in [\alpha; \beta],$$

т. е. $F \circ \varphi$ — первообразная для непрерывной функции $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ на отрезке $[\alpha; \beta]$. Отсюда

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)dt = (F \circ \varphi)(\beta) - (F \circ \varphi)(\alpha) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

■

Теорема 2 (Об интегрировании по частям в интеграле Римана). Если $u, v \in C^1[a; b]$, то

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx, \quad \int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Доказательство. Второе из равенств в условии — лишь другая форма записи первого равенства, поэтому будем доказывать лишь первое равенство. Т. к. $u, v, \in C^1[a; b]$, то $uv \in C^1[a; b]$. Значит, $(uv)'$ непрерывна, и uv служит для неё первообразной на отрезке $[a; b]$. Тогда

$$\int_a^b (u(x)v(x))' dx = u(x)v(x)\Big|_a^b.$$

Отсюда, применяя правило Лейбница, и получаем требуемое. ■

Теорема 3. Пусть $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f \in C^{n+1}(a; b)$ и $x_0 \in (a; b)$. Тогда для всех $x \in (a; b)$ имеет место формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

Доказательство. Докажем индукцией по n . Если $n = 0$, то $f \in C^1(a; b)$, а $f' \in C(a; b)$. Значит, f — первообразная для функции f' на интервале $(a; b) \supset [x_0; x]$, и верна формула Ньютона — Лейбница:

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t) dt.$$

После переноса $f(x_0)$ в правую часть получается формула из условия при $n = 0$.

Допустим, что утверждение верно для $n - 1$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x - t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt. \quad (*)$$

Покажем, что утверждение верно и для n . Вычислим интеграл в (*) по частям:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt &= \left\{ \begin{array}{l} u = f^{(n)}(t), \quad du = f^{(n+1)}(t) dt, \\ dv = (x-t)^{n-1} dt, \quad v = -\frac{1}{n}(x-t)^n \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \left(-f^{(n)}(t) \frac{1}{n} (x-t)^n \Big|_{x_0}^x + \int_{x_0}^x \frac{1}{n} (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \right) = \\ &= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt. \end{aligned}$$

Функции $u(t) = f^{(n)}(t)$ и $v(t) = -\frac{1}{n}(x-t)^n$ непрерывно дифференцируемы на $(a; b) \supset [x_0; x]$, поэтому можно применять интегрирование по частям. Подставив найденный интеграл в (*), получим формулу из формулировки теоремы. ■

13. ФОРМУЛА ВАЛЛИСА

Положим $I_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Если $n \geq 2$, то

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \sin x dx = - \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x d \cos x = \\ &= - \sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x d \sin^{n-1} x = 0 + (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^{n-2} x dx = \\ &= (n-1) \int_0^{\pi/2} (\sin^{n-2} x - \sin^n x) dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n). \end{aligned}$$

Отсюда $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ — рекуррентная формула для последовательности I_n . Рассмотрим её отдельно для чётных и нечётных n .

$$\begin{array}{ll} I_0 = \frac{\pi}{2}, & I_1 = 1, \\ I_2 = \frac{1}{2} \cdot I_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & I_3 = \frac{2}{3} \cdot I_1 = \frac{2}{3}, \\ I_4 = \frac{3}{4} \cdot I_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & I_5 = \frac{4}{5} \cdot I_3 = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}, \\ \vdots & \vdots \\ I_{2k} = \dots = \frac{(2k-1) \cdot (2k-3) \cdot \dots \cdot 1}{2k \cdot (2k-2) \cdot \dots \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}, & I_{2k+1} = \dots = \frac{2k \cdot (2k-2) \cdot \dots \cdot 2}{(2k+1) \cdot (2k-1) \cdot \dots \cdot 1}, \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Отсюда

$$I_{2k} = \frac{2k \cdot (2k-1) \cdot (2k-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{(2k \cdot (2k-2) \cdot \dots \cdot 2)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2k)!}{4^k \cdot (k!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{C_{2k}^k}{4^k} \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$I_{2k+1} = \frac{(2k \cdot (2k-2) \cdot \dots \cdot 2)^2}{(2k+1) \cdot 2k \cdot (2k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{4^k (k!)^2}{(2k+1)!} = \frac{4^k}{2k+1} \cdot \frac{1}{C_{2k}^k}.$$

Рассмотрим последовательность $\{I_k\}_{k=0}^{\infty}$. Т.к. $\sin^n x \geq \sin^{n+1} x$ для всех $x \in [0; \pi/2]$, причём неравенство строгое при $x \in (0; \pi/2)$, то (достаточное условие положительности интеграла) $I_k > I_{k+1}$, т.е. последовательность $\{I_k\}$ убывает. Итак,

$$I_{2k+1} < I_{2k} < I_{2k-1},$$

$$\frac{4^k}{2k+1} \cdot \frac{1}{C_{2k}^k} < \frac{C_{2k}^k}{4^k} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{4^{k-1}}{2k-1} \cdot \frac{1}{C_{2k-2}^{k-1}},$$

$$\frac{4^{2k}}{2k+1} \cdot \frac{1}{(C_{2k}^k)^2} < \frac{\pi}{2} < \frac{4^{2k-1}}{2k-1} \cdot \frac{1}{C_{2k-2}^{k-1} \cdot C_{2k}^k},$$

$$\underbrace{\frac{4^{2k}}{2k+1} \cdot \frac{1}{(C_{2k}^k)^2}}_{A_k} < \frac{\pi}{2} < \underbrace{\frac{4^{2k}}{2k} \cdot \frac{1}{(C_{2k}^k)^2}}_{B_k = \frac{2k+1}{2k} A_k}.$$

Последовательность $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ возрастает:

$$A_{k+1} = \frac{4^{2k+2}}{2k+3} \cdot \frac{1}{(C_{2k+2}^{k+1})^2} = \frac{4^{2k}}{2k+1} \cdot \frac{1}{(C_{2k}^k)^2} \cdot \frac{2k+1}{2k+3} \cdot 16 \cdot \frac{(k+1)^4}{(2k+1)^2 (2k+2)^2} = A_k \cdot \frac{(2k+2)^2}{(2k+1)(2k+3)} > A_k.$$

Т.к. $\{A_k\}$ возрастает и ограничена сверху (числом $\pi/2$), $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A$. Далее,

$$B_k = A_k \cdot \frac{2k+1}{2k}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} B_k = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k+1}{2k} = A.$$

По теореме о трёх последовательностях, $A \leq \frac{\pi}{2} \leq A$, откуда $A = \frac{\pi}{2}$. В итоге

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{4^{2k}}{2k+1} \cdot \frac{1}{(C_{2k}^k)^2}.$$

— формула Валлиса.

14. ПЕРВАЯ ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ ДЛЯ ИНТЕГРАЛА РИМАНА. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АБЕЛЯ

Теорема 1 (Первая теорема о среднем для интеграла Римана). Пусть:

1. $f \in B[a; b]$, $m \leq f(x) \leq M$ для всех $x \in [a; b]$;
2. $g \in R[a; b]$ и $g(x) \geq 0$ для каждого $x \in [a; b]$;
3. $fg \in R[a; b]$.

Тогда

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx. \quad (*)$$

Если, дополнительно, $f \in C[a; b]$, то существует $c \in [a; b]$ такое, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx. \quad (\star)$$

Доказательство. Если $g(x) \geq 0$, то $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$. Интегрируя, получаем (*).

Докажем второе утверждение теоремы. Если интеграл $\int_a^b g$ равен нулю, то из (*) видно, что

$\int_a^b fg = 0$, и равенство (*) верно при любом $c \in [a; b]$; если не равен, поделим на него (*):

$$m \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \Big/ \int_a^b g(x)dx \leq M.$$

По теореме о промежуточном значении для непрерывной функции, заключаем, что найдётся $c \in [a; b]$ такое, что

$$f(c) = \int_a^b f(x)g(x)dx \Big/ \int_a^b g(x)dx.$$

■

Взяв $g \equiv 1$, получаем

Следствие 1. Если $f \in C[a; b]$, то для некоторого $c \in [a; b]$ справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a).$$

Примечание. Формула (*) даёт следующую оценку для интеграла в её левой части:

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \max_{x \in [a; b]} |f(x)| \int_a^b g(x)dx.$$

Теорема 2 (Преобразование Абеля). Пусть $A_k := \sum_{i=1}^k a_i$, $k = 0, 1, \dots, n$ (при $k = 0$ пустая сумма).

Тогда

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = A_n b_n + \sum_{i=1}^{n-1} A_i (b_i - b_{i+1}).$$

Доказательство. В самом деле,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i b_i &= \sum_{i=1}^n (A_i - A_{i-1}) b_i = \sum_{i=1}^n A_i b_i - \sum_{i=1}^n A_{i-1} b_i = \sum_{i=1}^n A_i b_i - \sum_{i=0}^{n-1} A_i b_{i+1} = \\ &= A_n b_n - A_0 b_1 + \sum_{i=1}^{n-1} A_i (b_i - b_{i+1}) = A_n b_n + \sum_{i=1}^{n-1} A_i (b_i - b_{i+1}). \end{aligned}$$

■

15. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АБЕЛЯ. ВТОРАЯ ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ ДЛЯ ИНТЕГРАЛА РИМАНА

Лемма 1. Пусть числа $A_k := \sum_{i=1}^k a_i$, $k = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяют неравенствам $m \leq A_k \leq M$, а $b_i \geq b_{i+1} \geq 0$ при $i = 1, 2, \dots, n-1$. Тогда

$$mb_1 \leq \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq Mb_1.$$

Доказательство. Докажем правое из неравенств (левое аналогично):

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = A_n b_n + \sum_{i=1}^{n-1} A_i (b_i - b_{i+1}) \leq Mb_n + \sum_{i=1}^{n-1} M(b_i - b_{i+1}) = Mb_n + Mb_1 - Mb_n = Mb_1.$$

■

Теорема 1 (Вторая теорема о среднем для интеграла Римана). Допустим, $f, g \in R[a; b]$ и функция f монотонна на $[a; b]$. Тогда $\exists \xi \in [a; b]$ такое, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^\xi g(x)dx + f(b) \int_\xi^b g(x)dx.$$

Нам понадобится лемма:

Лемма 2. Допустим, $f, g \in R[a; b]$, причём функция f неотрицательна и не возрастает на отрезке $[a; b]$. Тогда $\exists \xi \in [a; b]$ такое, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^\xi g(x)dx.$$

Доказательство. Функция $G(x) := \int_a^x g(t)dt$ непрерывна на $[a; b]$. Поэтому она ограничена на $[a; b]$, обозначим $m := \min_{x \in [a; b]} G(x)$, $M := \max_{x \in [a; b]} G(x)$. Сначала установим неравенство

$$mf(a) \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq Mf(a). \quad (*)$$

Возьмём любое $\varepsilon > 0$. Т.к. $g \in R[a; b]$, то $|g(x)| \leq C < +\infty$ на $[a; b]$, а т.к. $f \in R[a; b]$, согласно теореме Дарбу найдётся разбиение $T = \{\Delta_i = [x_{i-1}; x_i]\}_{i=1}^n$ отрезка $[a; b]$, для которого $\omega(f, T) < \varepsilon/C$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x)dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x_{i-1}) + f(x) - f(x_{i-1}))g(x)dx = \\ &= \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)dx + E, \quad E := \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(x_{i-1}))g(x)dx, \end{aligned}$$

причём E мало по абсолютной величине:

$$\begin{aligned}
 |E| &\leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - f(x_{i-1})| |g(x)| dx \leq C \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \omega(f, \Delta_i) dx = \\
 &= C \sum_{i=1}^n \omega(f, \Delta_i) |\Delta_i| = C\omega(f, T) < \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Учтём неотрицательность и невозрастание функции f на $[a; b]$ и применим лемму 1 с

$$\begin{aligned}
 a_i &:= G(x_i) - G(x_{i-1}), \quad b_i := f(x_{i-1}), \\
 A_k &= \sum_{i=1}^k a_i = \sum_{i=1}^k (G(x_i) - G(x_{i-1})) = G(x_k) - G(x_0) = G(x_k); \\
 m &\leq A_k = G(x_k) \leq M.
 \end{aligned}$$

Получим

$$\begin{aligned}
 mf(a) &\leq \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) (G(x_i) - G(x_{i-1})) \leq Mf(a); \\
 mf(a) &\leq \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x) dx \leq Mf(a); \\
 mf(a) &\leq \int_a^b f(x)g(x)dx - E \leq Mf(a), \quad |E| < \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Т. к. $\varepsilon > 0$ произвольно, то из последнего неравенства вытекает (*).

Теперь выведем из (*) утверждение теоремы. Отметим, что если $f(a) = 0$, то из (*) следует, что $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$, а значит, обе части равенства из формулировки леммы равны нулю, значит, утверждение выполнено. Пусть теперь $f(a) > 0$. Функция $G(x)$, как было отмечено ранее, непрерывна, причём найдутся такие точки $c, d \in [a; b]$, что

$$G(c) \leq \int_a^b f(x)g(x)dx / f(a) \leq G(d).$$

Таким образом, по теореме о промежуточных значениях непрерывной функции, найдётся точка $\xi \in [a; b]$ такая, что $G(\xi) = \int_a^b f(x)g(x)dx$, а это и есть утверждение леммы. ■

Теперь докажем теорему, ради которой тут собрались:

Доказательство. Если f не убывает на $[a; b]$, то функция $h(x) := f(b) - f(x)$ неотрицательна, не возрастает и интегрируема на $[a; b]$. Применим лемму и проведём преобразования:

$$\begin{aligned}
 \int_a^b h(x)g(x)dx &= h(a) \int_a^\xi g(x)dx; \quad \int_a^b (f(b) - f(x))g(x)dx = (f(b) - f(a)) \int_a^\xi g(x)dx; \\
 f(b) \left(\int_a^b g(x)dx - \int_a^\xi g(x)dx \right) &+ f(a) \int_a^\xi g(x)dx = \int_a^b f(x)g(x)dx.
 \end{aligned}$$

Если f не возрастает на $[a; b]$, функция $h(x) := f(x) - f(b)$ неотрицательна, не возрастает и интегрируема на $[a; b]$. Повторяя выкладки выше, снова получим требуемое. ■

16. ВАРИАЦИЯ ФУНКЦИИ И ФУНКЦИИ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ (BV -ФУНКЦИИ). О СВЯЗИ ОГРАНИЧЕННОСТИ ВАРИАЦИИ С МОНОТОННОСТЬЮ И ОГРАНИЧЕННОСТЬЮ ФУНКЦИИ. АДДИТИВНОСТЬ ВАРИАЦИИ И СТРУКТУРА BV -ФУНКЦИИ

Определение 1. *Вариация* функции $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ (на отрезке $[a; b]$) — величина

$$\overset{b}{V}_a f := \sup_T \sum_{i=1}^m |f(a_i) - f(a_{i-1})|,$$

где \sup берётся по всем разбиениям $T = \{[a_{i-1}, a_i]\}_{i=1}^m$ отрезка $[a; b]$. Если $\overset{b}{V}_a f < +\infty$, то f — *функция ограниченной вариации* на $[a; b]$. Запись: $f \in BV[a; b]$.

Для разбиения $T = \{[a_{i-1}, a_i]\}_{i=1}^m$ отрезка $[a; b]$ введём обозначение

$$V(f, T) := \sum_{i=1}^m |f(a_i) - f(a_{i-1})|.$$

Предложение 1. Любая монотонная на отрезке функция имеет ограниченную вариацию. При этом $\overset{b}{V}_a f$ равна $f(b) - f(a)$, если f не убывает и $f(a) - f(b)$, если f не возрастает.

Доказательство. Пусть $T = \{[a_{i-1}, a_i]\}_{i=1}^m$ — произвольное разбиение отрезка $[a; b]$. Если f не убывает, то

$$V(f, T) = \sum_{i=1}^m |f(a_i) - f(a_{i-1})| = \sum_{i=1}^m (f(a_i) - f(a_{i-1})) = f(b) - f(a),$$

$$\overset{b}{V}_a f = \sup_T V(f, T) = f(b) - f(a).$$

Другой случай рассматривается аналогично. ■

Предложение 2. Любая функция ограниченной вариации ограничена.

Доказательство. Для каждого $x \in [a; b]$ имеем

$$2|f(x)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| + |f(a)| + |f(b)|.$$

Набор из двух отрезков $[a; x]$ и $[x; b]$ есть разбиение $[a; b]$, поэтому

$$|f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq \overset{b}{V}_a f.$$

В итоге,

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2} \left(\overset{b}{V}_a f + |f(a)| + |f(b)| \right) \text{ для всех } x \in [a; b].$$

Отсюда следует требуемое. ■

Теорема 1 (Об аддитивности вариации). Если $f \in BV[a; b]$ и $a < c < b$, то $\overset{b}{V}_a f = \overset{c}{V}_a f + \overset{b}{V}_c f$.

Доказательство. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Найдём разбиения T_1 и T_2 отрезков $[a; c]$ и $[c; b]$, соответственное, такие, что

$$V(f, T_1) > \overset{c}{V}_a f - \varepsilon \quad \text{и} \quad V(f, T_2) > \overset{b}{V}_c f - \varepsilon.$$

Тогда $T_1 \sqcup T_2$ — разбиение отрезка $[a; b]$ и

$$\bigvee_a^b f \geq V(f, T_1 \sqcup T_2) = V(f, T_1) + V(f, T_2) > \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f - 2\varepsilon.$$

Т. к. $\varepsilon > 0$ выбиралось произвольно,

$$\bigvee_a^b f \geq \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f.$$

Докажем обратное неравенство. Для каждого $\varepsilon > 0$ отыщем разбиение T отрезка $[a; b]$, для которого

$$V(f, T) > \bigvee_a^b f - \varepsilon.$$

Если порождающий разбиение T набор точек не содержит c , добавим её в этот набор и получим новое разбиение (оставим ему старое обозначение T), для которого тем более выполнено последнее. При этом $T = T_1 \sqcup T_2$ — разбиения отрезков $[a; c]$ и $[c; b]$. Получаем

$$\bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f \geq V(f, T_1) + V(f, T_2) = V(f, T) > \bigvee_a^b f - \varepsilon,$$

откуда

$$\bigvee_a^b f \leq \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f.$$

■

Лемма 1. Если $f \in BV[a; b]$, то:

1. функции V и $V - f$ не убывают на $[a; b]$, $V(x) := \bigvee_a^x f$;
2. f есть разность двух неубывающих функций.

Доказательство.

1. Пусть $x_2 > x_1$. Имеем:

$$V(x_2) = \bigvee_a^{x_2} f = \bigvee_a^{x_1} f + \bigvee_{x_1}^{x_2} f \geq \bigvee_a^{x_1} f = V(x_1); \quad V(x_2) - V(x_1) = \bigvee_{x_1}^{x_2} f \geq |f(x_2) - f(x_1)| \geq f(x_2) - f(x_1),$$

а значит, $(V - f)(x_2) \geq (V - f)(x_1)$.

2. f есть разность функций V и $V - f$, которые не убывают, согласно п. 1.

■

Теорема 2 (О структуре BV -функций). $f \in BV[a; b] \Leftrightarrow f$ есть разность двух неубывающих функций.

Доказательство. \Rightarrow . Доказано в предыдущей лемме.

\Leftarrow . Пусть $f = g - h$, где g и h не убывают на $[a; b]$. Возьмём произвольное разбиение $T = \{[a_{i-1}; a_i]\}_{i=1}^m$ отрезка $[a; b]$. Тогда:

$$\begin{aligned} V(f, T) &= \sum_{i=1}^m |g(a_i) + h(a_i) - g(a_{i-1}) - h(a_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^m |g(a_i) - g(a_{i-1})| + \\ &\quad + \sum_{i=1}^m |h(a_i) - h(a_{i-1})| = g(b) - g(a) + h(b) - h(a); \end{aligned}$$

$$\bigvee_a^b f = \sup_T V(f, T) \leq g(b) - g(a) + h(b) - h(a) < +\infty.$$

Значит, $f \in BV[a; b]$ по определению.

■

17. ВАРИАЦИЯ НЕПРЕРЫВНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ. СПРЯМЛЯЕМЫЕ КРИВЫЕ, КРИТЕРИЙ СПРЯМЛЯЕМОСТИ

Теорема 1. Допустим, $f \in C^{(1)}[a; b]$. Тогда $f \in BV[a; b]$ и $\bigvee_a^b f = \int_a^b |f'(x)| dx$.

Доказательство. По условию, $f' \in C[a; b]$, значит, $|f'| \in R[a; b]$ и $\int_a^b |f'(x)| dx =: I$ определён.

Докажем, что $\bigvee_a^b f = I$.

Сначала установим неравенство $\bigvee_a^b f < +\infty$. Возьмём любое разбиение $T = \{[a_{i-1}; a_i]\}_{i=1}^m$ отрезка $[a; b]$ и оценим $V(f, T)$:

$$\begin{aligned} V(f, T) &= \sum_{i=1}^m |f(a_i) - f(a_{i-1})| \stackrel{\text{т. Лагранжа}}{=} \sum_{i=1}^m |f'(\xi_i)| (a_i - a_{i-1}) \leq \\ &\leq \max_{x \in [a; b]} |f'(x)| \sum_{i=1}^m (a_i - a_{i-1}) = \max_{x \in [a; b]} |f'(x)| (b - a). \end{aligned}$$

Мы воспользовались тем, что функция $|f'|$ непрерывна, а потому ограничена на $[a; b]$. Из последнего неравенства мы видим, что $\bigvee_a^b f \leq \max_{x \in [a; b]} |f'(x)| (b - a) < +\infty$.

Далее, возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Найдётся $\delta > 0$ такое, что для всякого отмеченного δ -разбиения $T\xi$ отрезка $[a; b]$ верно $|\mathcal{S}(|f'|, T\xi) - I| < \varepsilon$. Найдём разбиение $T = \{[a_{i-1}; a_i]\}_{i=1}^m$, для которого

$$\bigvee_a^b f - \varepsilon < V(f, T) \leq \bigvee_a^b f.$$

Размельчая T так, чтобы диаметр стал меньше δ , мы не уменьшим $V(f, T)$ и сохраним последнее неравенство. Поэтому сразу считаем $d(T) < \delta$. Получаем: $V(f, T) = \mathcal{S}(|f'|, T\xi)$.

$$\left| \bigvee_a^b f - I \right| \leq \left| \bigvee_a^b f - V(f, T) \right| + |V(f, T) - \mathcal{S}(|f'|, T\xi)| + |\mathcal{S}(|f'|, T\xi) - I| \leq 2\varepsilon.$$

Т. к. $\varepsilon > 0$ выбиралось произвольным, $\bigvee_a^b f = I$. ■

Определение 1. Плоская кривая $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ задаётся параметрически заданной функцией (путём)

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a; b].$$

Формально, γ есть образ отрезка $[a; b]$ при отображении

$$t \in [a; b] \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2.$$

Примечание. Считаем $x(t), y(t) \in C[a; b]$; в этом случае как сама кривая, так и задающий её путь называется *непрерывными*. Также предполагаем, что γ — простая кривая без кратных точек, что означает следующее. Если $P_1 = (x(t_1), y(t_1))$ и $P_2 = (x(t_2), y(t_2))$ и $t_1 \neq t_2$, то $P_1 \neq P_2$.

Разобьём кривую точками P_i ($i = 0, \dots, m$) на m дуг. Т. к. кривая не имеет самопересечений, такому разбиению на дуги однозначно соответствует некоторое разбиение $T = \{\Delta_i = [a_{i-1}; a_i]\}_{i=1}^m$

отрезка $[a; b]$. А именно, если (x_i, y_i) — координаты точек P_i , то $x_i = x(a_i)$ и $y_i = y(a_i)$ для $i = 0, \dots, m$.

Длина хорды, стягивающей дугу $P_{i-1}P_i$ есть $|P_{i-1}P_i|$. Длина $\ell(P_0P_1 \dots P_m)$ всей ломаной равна $\sum_{i=1}^m |P_{i-1}P_i|$.

Определение 2. Если $\ell(\gamma) < +\infty$,

$$\ell(\gamma) := \sup_{P_0P_1 \dots P_m} \sum_{i=1}^m |P_{i-1}P_i| = \sup_T \sum_{i=1}^m |P_{i-1}P_i|,$$

то кривая γ называется *спрямляемой*, а $\ell(\gamma)$ — её *длиной*.

Теорема 2 (Критерий спрямляемости кривой). Плоская непрерывная кривая

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a; b]$$

без кратных точек спрямляема тогда и только тогда, когда $x(t)$ и $y(t)$ — функции ограниченной вариации.

Доказательство. \Rightarrow . Допустим, γ — спрямляемая кривая, т. е.

$$\sup_T \sum_{i=1}^m |P_{i-1}P_i| = \ell(\gamma) < +\infty.$$

Тогда имеем

$$\sum_{i=1}^m |x(a_i) - x(a_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^m |P_{i-1}P_i| \leq \sup_T \sum_{i=1}^m |P_{i-1}P_i| = \ell(\gamma).$$

Значит, $\bigvee_a^b x(t) \leq \ell(\gamma) < +\infty$, т. е. $x(t) \in BV[a; b]$. Аналогично, $y(t) \in BV[a; b]$.

\Leftarrow . Пусть $\bigvee_a^b x(t) < +\infty$ и $\bigvee_a^b y(t) < +\infty$. Тогда

$$\sum_{i=1}^m |P_{i-1}P_i| \leq \sum_{i=1}^m |x(a_i) - x(a_{i-1})| + \sum_{i=1}^m |y(a_i) - y(a_{i-1})| \leq \bigvee_a^b x + \bigvee_a^b y.$$

Значит, $\ell(\gamma) = \sup_T \sum_{i=1}^m |P_{i-1}P_i| \leq \bigvee_a^b x + \bigvee_a^b y < +\infty$. ■

Примечание. Все неравенства выше — это просто следствия из неравенства треугольника.

18. ТЕОРЕМА О ДЛИНЕ ГЛАДКОЙ КРИВОЙ. ДЛИНА ГЛАДКОЙ КРИВОЙ, ОПИСЫВАЮЩЕЙСЯ ЯВНО ЗАДАННОЙ ФУНКЦИЕЙ

Теорема 1 (О длине гладкой кривой). Пусть задана плоская простая кривая

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a; b],$$

причём $x(t), y(t) \in C^{(1)}[a; b]$. Тогда γ спрямляема и

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (*)$$

Доказательство. Т.к. $x(t), y(t) \in C^{(1)}[a; b]$, то $x(t)$ и $y(t)$ — функции ограниченной вариации. Тогда (критерий спрямляемости кривой) кривая γ спрямляема.

Докажем формулу (*). По условию, $x(t), y(t) \in C^{(1)}[a; b]$, поэтому $x'(t), y'(t) \in C[a; b]$. Значит, функция $f(t) := \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ непрерывна, и интеграл в (*) определён.

Возьмём какое-нибудь $\varepsilon > 0$. Т.к. $f \in R[a; b]$, найдётся $\delta_1 > 0$ такое, что для каждого отмеченного δ_1 -разбиения $T\xi$ отрезка $[a; b]$ верно

$$\left| \mathcal{S}(f, T\xi) - \int_a^b f(t) dt \right| < \varepsilon.$$

Т.к. $y'(t)$ непрерывна на $[a; b]$, то она равномерно непрерывна на $[a; b]$, т.е. существует $\delta_2 > 0$ такое, что

$$(\varphi - \psi) < \delta_2 \Rightarrow |y'(\varphi) - y'(\psi)| < \varepsilon.$$

Положим $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Далее, найдём разбиение $T = \{\Delta_i = [a_{i-1}, a_i]\}_{i=1}^m$, для которого длина вписанной ломаной ε -близка к длине кривой:

$$\ell(\gamma) - \varepsilon < \sum_{i=1}^m |P_{i-1}P_i| \leq \ell(\gamma).$$

При размельчении T сумма $\sum_{i=1}^m |P_{i-1}P_i|$ не уменьшается, а последнее неравенство сохраняется. Размельчим T так, чтобы $d(T) < \delta$. Оценим длину вписанной ломаной:

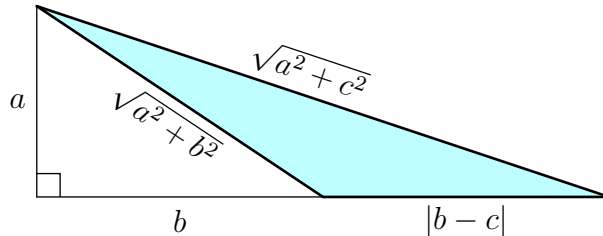
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m |P_{i-1}P_i| &= \sum_{i=1}^m \sqrt{(x(a_i) - x(a_{i-1}))^2 + (y(a_i) - y(a_{i-1}))^2} \text{ т. Лагранжа} \\ &= \sum_{i=1}^m \sqrt{(x'(\varphi_i))^2 + (y'(\psi_i))^2} |\Delta_i| = \sum_{i=1}^m \sqrt{(x'(\varphi_i))^2 + (y'(\varphi_i))^2} |\Delta_i| + E = \mathcal{S}(f, T\xi) + E, \end{aligned}$$

где $E := \sum_{i=1}^m \left(\sqrt{(x'(\varphi_i))^2 + (y'(\psi_i))^2} - \sqrt{(x'(\varphi_i))^2 + (y'(\varphi_i))^2} \right) |\Delta_i|$, а отмеченное разбиение $T\xi$ получилось добавлением меток ξ_i к имеющемуся разбиению T .

Для оценки величины E нам потребуется неравенство

$$\left| \sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2} \right| \leq |b - c|, \quad a, b, c \geq 0.$$

Это опять же просто неравенство для вот такого треугольника:



$$\begin{aligned} |E| &= \left| \sum_{i=1}^m \left(\sqrt{(x'(\varphi_i))^2 + (y'(\psi_i))^2} - \sqrt{(x'(\varphi_i))^2 + (y'(\varphi_i))^2} \right) |\Delta_i| \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^m |y'(\psi_i) - y'(\varphi_i)| |\Delta_i| < \varepsilon(b - a). \end{aligned}$$

Наконец, оценим разность между длиной кривой и интегралом:

$$\begin{aligned} \left| \ell(\gamma) - \int_a^b f(t) dt \right| &\leq \left| \ell(\gamma) - \sum_{i=1}^m |P_{i-1}P_i| \right| + \left| \sum_{i=1}^m |P_{i-1}P_i| - \mathcal{S}(f, T\xi) \right| + \left| \mathcal{S}(f, T\xi) - \int_a^b f(t) dt \right| \leq \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon(b-a) + \varepsilon = \varepsilon(2+b-a). \end{aligned}$$

Т. к. $\varepsilon > 0$ выбиралось произвольным, верна формула (*). ■

О длине гладкой кривой, описываемой явно заданной функцией. Пусть кривая γ задаётся уравнением $y = f(x)$, $x \in [a; b]$. Считаем $f' \in C[a; b]$. Тогда

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

В самом деле, положим

$$x(t) = t, \quad y(t) = (y \circ x)(t), \quad a \leq t \leq b.$$

Тогда

$$x'(t) = 1, \quad y'(t) = y'(x)x'(t) = y'(x), \quad dx = dt.$$

Остаётся применить теорему о длине гладкой кривой.

19. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЛИН КРИВЫХ И ПЛОЩАДЕЙ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Теорема 1 (О длине кривой в полярных координатах). Пусть кривая γ задана в полярных координатах функцией $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$. Считаем $r(\varphi) \in C^{(1)}[\alpha; \beta]$. Тогда

$$\ell(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r'(\varphi))^2 + r^2(\varphi)} d\varphi.$$

Доказательство. Равенства $x = r \cos \varphi$ и $y = r \sin \varphi$ связывают декартовы координаты с полярными, поэтому можно считать, что γ параметризована параметром φ так:

$$\varphi : \begin{cases} x = x(\varphi) := r(\varphi) \cos \varphi, \\ y = y(\varphi) := r(\varphi) \sin \varphi \end{cases} \quad \varphi \in [\alpha; \beta].$$

Т. к. $r(\varphi) \in C^{(1)}[\alpha; \beta]$, то $x(\varphi), y(\varphi) \in C^{(1)}[\alpha; \beta]$. По теореме о длине гладкой кривой γ спрямляема и

$$\ell(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2} d\varphi.$$

Вычислим $x'(\varphi)$ и $y'(\varphi)$:

$$\begin{aligned} x'(\varphi) &= (r(\varphi) \cos \varphi)' = r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi; \\ y'(\varphi) &= (r(\varphi) \sin \varphi)' = r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi; \\ (x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2 &= (r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi)^2 + (r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi)^2 = (r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2. \end{aligned}$$

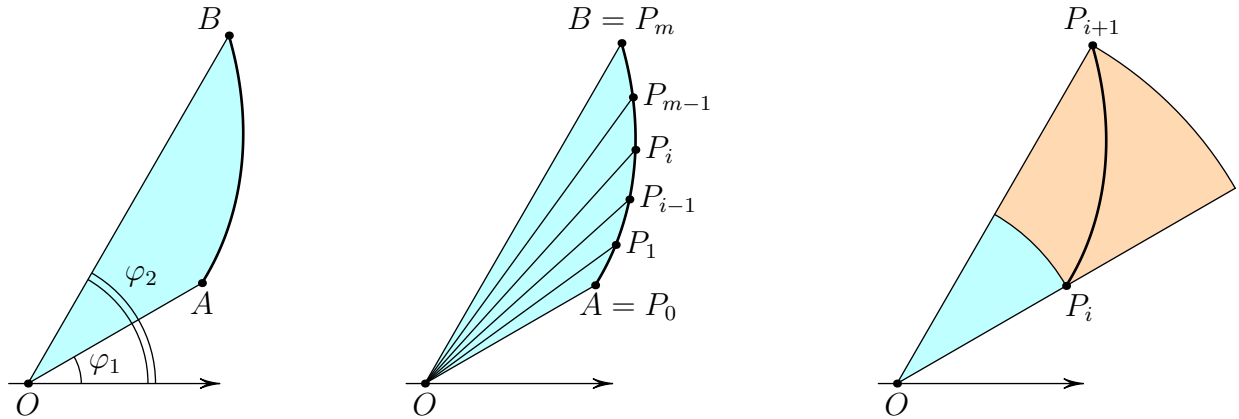
Подставив в формулу длины гладкой кривой, получаем требуемое. ■

Теорема 2 (О площади плоских фигур в полярных координатах). Пусть на отрезке $[\varphi_1; \varphi_2] \subset [0; 2\pi]$ задана непрерывная функция $r(\varphi) \in R[\varphi_1; \varphi_2]$. Рассмотрим в полярной системе координат

криволинейный сектор OAB , ограниченный графиком функции $r(\varphi)$ и лучами $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$. Тогда площадь этого сектора равна

$$S(OAB) = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi) d\varphi.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное разбиение $T = \{[a_{i-1}; a_i]\}_{i=1}^m$ отрезка $[\varphi_1; \varphi_2]$. Ему соответствуют точки $P_i(a_i, r(a_i))$ на кривой AB .



Тогда (аддитивность функции площади) $S(OAB) = \sum_{i=1}^m S(OP_{i-1}P_i)$. Каждый криволинейный сектор $OP_{i-1}P_i$ содержит сектор круга с вершиной O и двумя радиусами длины $\inf_{\varphi \in [a_{i-1}; a_i]} r(\varphi)$, лежащими на лучах OP_{i-1} и OP_i . В то же время, $OP_{i-1}P_i$ лежит в секторе круга с вершиной O и двумя радиусами длины $\sup_{\varphi \in [a_{i-1}; a_i]} r(\varphi)$, лежащими на лучах OP_{i-1} и OP_i . Значит (монотонность функции площади) верна оценка

$$m_i(a_i - a_{i-1}) \leq S(OP_{i-1}P_i) \leq M_i(a_i - a_{i-1}),$$

$$m_i := \inf_{\varphi \in [a_{i-1}; a_i]} \frac{1}{2} r^2(\varphi), \quad M_i := \sup_{\varphi \in [a_{i-1}; a_i]} \frac{1}{2} r^2(\varphi).$$

Складываем по i :

$$\sum_{i=1}^m m_i(a_i - a_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^m S(OP_{i-1}P_i) \leq \sum_{i=1}^m M_i(a_i - a_{i-1});$$

$$s\left(\frac{r^2}{2}, T\right) \leq S(OAB) \leq S\left(\frac{r^2}{2}, T\right);$$

$$\sup_T s\left(\frac{r^2}{2}, T\right) \leq S(OAB) \leq \inf_T S\left(\frac{r^2}{2}, T\right);$$

$$(D) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{r^2(\varphi)}{2} d\varphi \leq S(OAB) \leq (D) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{r^2(\varphi)}{2} d\varphi.$$

Заметим, что (критерий Дарбу) $(D) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{r^2(\varphi)}{2} d\varphi = (D) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{r^2(\varphi)}{2} d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{r^2(\varphi)}{2} d\varphi$, откуда получаем требуемое. ■

20. ПЛОЩАДИ ПЛОСКИХ ФИГУР В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ. ОБЪЁМЫ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

Пусть заданы функции $y(t) \in C[\alpha; \beta]$ и $x(t) \in C^{(1)}[\alpha; \beta]$, причём $y(t) \geq 0 \forall t \in [\alpha; \beta]$, а $x(t)$ возрастает на $[\alpha; \beta]$. Рассмотрим плоскую кривую

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha; \beta].$$

Т. к. функция $x(t)$ возрастает, то $a < b$, где $a := x(\alpha)$, $b := x(\beta)$, а также

$$\forall (x, y) \in \gamma \exists! t \in [\alpha; \beta] : (x = x(t) \wedge y = y(t)).$$

Отсюда вытекает, в частности, что γ — кривая без самопересечений.

Снова воспользуемся тем, что функция $x(t) : [\alpha; \beta] \rightarrow [a; b]$ возрастает. Т. к. она ещё и непрерывна, то (теорема об обратной функции) найдётся непрерывная обратная функция $t = t(x) : [a; b] \rightarrow [\alpha; \beta]$. Покажем, что γ — график функции $y = f(x) : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, где $f(x) := (y \circ t)(x)$.

В самом деле,

$$(x, y) \in \gamma \Leftrightarrow \exists! t \in [\alpha; \beta] : (x = x(t) \wedge y = y(t)) \Leftrightarrow f(x) = (y \circ t)(x).$$

Теорема 1 (О площади плоских фигур в прямоугольных координатах). Площадь криволинейной трапеции с параметрически заданной верхней границей равна

$$S(A(f, [a; b])) = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt.$$

Доказательство. Площадь этой криволинейной трапеции равна $S(A(f, [a; b])) = \int_a^b f(x)dx$. Применим теорему о замене переменной в интеграле Римана

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ x)(t)x'(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} (y \circ t \circ x)(t)x'(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt.$$

■

Теорема 2 (Об объёме тела вращения). Пусть $f \in C[a; b]$ и $f(x) \geq 0 \forall x \in [a; b]$. Рассмотрим криволинейную трапецию $A(f, [a; b])$; будем вращать её вокруг отрезка $[a; b]$. Тогда объём получающегося при этом тела равен

$$V_f(a, b) = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

Доказательство. Обозначим за $V_f(c, d)$ объём тела, полученного вращением криволинейной трапеции $A(f, [c; d])$ вокруг отрезка $[c; d] \subseteq [a; b]$. Возьмём произвольное разбиение $T = \{[a_{i-1}; a_i]\}_{i=1}^m$ отрезка $[a; b]$. Ему соответствуют точки $P_i(a_i, f(a_i))$ на кривой стороне AB . По свойству аддитивности объёма:

$$V_f(a, b) = \sum_{i=1}^m V_f(a_{i-1}, a_i).$$

Согласно свойству монотонности объёма, величины $V_f(a_{i-1}, a_i)$ оцениваются через объёмы вписанного и описанного цилиндров:

$$\sum_{i=1}^m \pi m_i^2 (a_i - a_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^m V_f(a_{i-1}, a_i) = V_f(a, b) \leq \sum_{i=1}^m \pi M_i^2 (a_i - a_{i-1}),$$

$$m_i := \inf_{x \in [a_{i-1}, a_i]} f(x), \quad M_i := \sup_{x \in [a_{i-1}, a_i]} f(x).$$

Объём цилиндра есть произведение площади круга на высоту цилиндра. Перепишем неравенство выше, перейдя к суммам и интегралам Дарбу:

$$\pi \cdot s(f^2(x), T) \leq V(a, b) \leq \pi \cdot S(f^2(x), T),$$

откуда

$$\pi \cdot (D) \int_a^b f^2(x) dx \leq V(a, b) \leq \pi \cdot (D) \int_a^b f^2(x) dx.$$

Имеем (критерий Дарбу):

$$\pi \cdot (D) \int_a^b f^2(x) dx = \pi \cdot (D) \int_a^b f^2(x) dx = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) dx.$$

В итоге,

$$V(a, b) = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

■

21. ИНТЕГРАЛ РИМАНА — СТИЛТЬЕСА: ОПРЕДЕЛЕНИЕ, ЛИНЕЙНОСТЬ, ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ, ОЦЕНКА АБСОЛЮТНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Чтобы определить интеграл Римана — Стильтеса, сначала задаётся *интегрирующая функция* ограниченной вариации $G(x) : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Определение 1. *Интегральной суммой Римана — Стильтеса* функции $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ по функции $G \in BV[a; b]$, соответствующей отмеченному разбиению $T\xi = \{([a_{i-1}, a_i], \xi_i)\}_{i=1}^m$ отрезка $[a; b]$, называют сумму

$$S(fdG, T\xi) := \sum_{i=1}^m f(\xi_i)(G(a_i) - G(a_{i-1})).$$

Определение 2 (Интеграл Римана — Стильтеса). Функция $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ *интегрируема в смысле Римана — Стильтеса* по функции $G \in BV[a; b]$ к значению $I \in \mathbb{R}$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что всех отмеченных δ -разбиений $T\xi = \{([a_{i-1}, a_i], \xi_i)\}_{i=1}^m$ отрезка $[a; b]$ выполнено неравенство

$$|S(fdG, T\xi) - I| = \left| \sum_{i=1}^m f(\xi_i)(G(a_i) - G(a_{i-1})) - I \right| < \varepsilon.$$

Запись: $(RS) \int_a^b f(x) dG(x) = I$. Число I есть *интеграл Римана — Стильтеса* от функции f по функции G на отрезке $[a; b]$.

Примечание. При $G(x) = x$ интегральная сумма Римана — Стильеса превращается в обычную интегральную сумму Римана $\sum_{i=1}^m f(\xi_i)(a_i - a_{i-1})$, а интеграл Римана — Стильеса становится интегралом Римана.

Теорема 1 (Единственность интеграла). Если $(RS) \int_a^b f(x)dG(x)$ существует, то он единственен.

Доказательство. Допустим, $(RS) \int_a^b f(x)dG(x) = I_1$ и $= I_2$, $I_1 \neq I_2$. Возьмём $\varepsilon := |I_1 - I_2|/2$ и найдём $\delta_1, \delta_2 > 0$ такие, что для всех отмеченных δ_1 - и δ_2 -разбиений $T\xi$ отрезка $[a; b]$ выполнено соответственно

$$|S(fdG, T\xi) - I_1| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |S(fdG, T\xi) - I_2| < \varepsilon.$$

Тогда для любого отмеченного δ -разбиения $T\xi$, $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$, выполнены оба последних неравенства, что приводит к противоречивому неравенству $|I_1 - I_2| < |I_1 - I_2|$. ■

Теорема 2 (Линейность интеграла). Интеграл Римана — Стильеса является линейным как по интегрируемой функции, так и по интегрирующей.

Примечание. Теорема доказывается по той же схеме, что и для интеграла Римана. Сначала нужно установить линейность интегральных сумм по f и по G :

$$\begin{aligned} S((\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)dG, T\xi) &= \alpha_1 S(f_1 dG, T\xi) + \alpha_2 S(f_2 dG, T\xi), \\ S(fd(\alpha_1 G_1 + \alpha_2 G_2), T\xi) &= \alpha_1 S(fdG_1, T\xi) + \alpha_2 S(fdG_2, T\xi). \end{aligned}$$

Теорема 3 (Достаточное условие существования интеграла Римана — Стильеса). Если $f \in C[a; b]$, то f интегрируема по Риману — Стильесу на отрезке $[a; b]$ по любой функции $G \in BV[a; b]$.

Доказательство. Любая функция ограниченной вариации есть разность двух неубывающих функций, поэтому в силу линейности достаточно провести доказательство для неубывающих G .

Итак, пусть G не убывает. Для каждого разбиения $T = \{[a_{i-1}; a_i]\}$ отрезка $[a; b]$ составим *нижнюю* и *верхнюю суммы Дарбу* для интеграла Римана — Стильеса $\int_a^b fdG$:

$$\begin{aligned} s(fdG, T) &= \sum_i m_i (G(a_i) - G(a_{i-1})), \quad m_i := \min_{[a_{i-1}; a_i]} f; \\ S(fdG, T) &= \sum_i M_i (G(a_i) - G(a_{i-1})), \quad M_i := \max_{[a_{i-1}; a_i]} f. \end{aligned}$$

Почти дословно повторяя рассуждения, изложенные выше, несложно доказать, что

$$s(fdG, T) \leq S(fdG, \tilde{T}) \quad \text{для любых разбиений } T \text{ и } \tilde{T} \text{ отрезка } [a; b]$$

(здесь существенно, что G не убывает). Положим $I := \sup_T s(fdG, T)$ и покажем, что $\int_a^b fdG = I$.

Берём любое $\varepsilon > 0$. Пользуясь равномерной непрерывностью на $[a; b]$ функции f , отыщем $\delta > 0$ такое, что

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \quad \text{как только} \quad |x_1 - x_2| < \delta.$$

Возьмём любое δ -разбиение $T = \{[a_{i-1}; a_i]\}$ отрезка $[a; b]$ и любой набор ξ меток к нему. Имеем:

$$s(fdG, T) \leq S(fdG, T\xi) \leq S(fdG, T), \quad s(fdG, T) \leq I \leq S(fdG, T). \quad (*)$$

Кроме того,

$$S(fdG, T) - s(fdG, T) = \sum_i (M_i - m_i)(G(a_i) - G(a_{i-1})) < \varepsilon \sum_i (G(a_i) - G(a_{i-1})) = \varepsilon(G(b) - G(a)).$$

Отсюда и из (*) получаем $|\mathcal{S}(fdG, T\xi) - I| < \varepsilon(G(b) - G(a))$. Следовательно, f интегрируема по G на отрезке $[a; b]$ и $(RS) \int_a^b fdG = I$. ■

Теорема 4 (Оценка абсолютной величины интеграла Римана — Стильеса). Если $f \in B[a; b]$, $G \in BV[a; b]$ и существует $(RS) \int_a^b fdG$, то

$$(RS) \int_a^b fdG \leq \sup_{[a; b]} |f| \cdot \overset{b}{\underset{a}{V}} G.$$

Доказательство. Вытекает из цепочки

$$|\mathcal{S}(fdG, T\xi)| \leq \left| \sum_{T\xi} f(\xi_i)(G(a_i) - G(a_{i-1})) \right| \leq \sup_{[a; b]} |f| \cdot \sum_T |G(a_i) - G(a_{i-1})| \leq \sup_{[a; b]} |f| \cdot \overset{b}{\underset{a}{V}} G.$$
■

22. АДДИТИВНОСТЬ ИНТЕГРАЛА РИМАНА — СТИЛЬЕСА ОТ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ. СВЯЗЬ ИНТЕГРАЛОВ РИМАНА — СТИЛЬЕСА И РИМАНА

Теорема 1 (Об аддитивности интеграла Римана — Стильеса). Если $f \in C[a; b]$, $G \in BV[a; b]$ и $c \in (a; b)$, то

$$(RS) \int_a^b fdG = (RS) \int_a^c fdG + (RS) \int_c^b fdG.$$

Примечание. Т. к. $G \in BV[a; b]$ и $a < c < b$, то $G \in BV[a; c] \cap BV[c; b]$, все интегралы в последнем выражении существуют согласно достаточному условию интегрируемости по Риману — Стильесу.

Доказательство. Все интегралы в этом доказательстве понимаем как интегралы в смысле Римана — Стильеса от f по G . Возьмём любое $\varepsilon > 0$ и найдём $\delta > 0$ такое, что

$$\left| \mathcal{S}(fdG, T^1\xi^1) - \int_a^c fdG \right| < \varepsilon, \quad \left| \mathcal{S}(fdG, T^2\xi^2) - \int_c^b fdG \right| < \varepsilon, \quad \left| \mathcal{S}(fdG, T\xi) - \int_a^b fdG \right| < \varepsilon$$

для любых отмеченных δ -разбиений $T^1\xi^1$, $T^2\xi^2$ и $T\xi$ отрезков $[a; c]$, $[c; b]$ и $[a; b]$, соответственно. Возьмём какие-нибудь $T^1\xi^1$ и $T^2\xi^2$ указанного типа. Тогда $T\xi := T^1\xi^1 \sqcup T^2\xi^2$ — отмеченное δ -разбиение отрезка $[a; b]$ и, очевидно,

$$\mathcal{S}(fdG, T\xi) = \mathcal{S}(fdG, T^1\xi^1) + \mathcal{S}(fdG, T^2\xi^2).$$

С учётом последнего равенства получаем следующее:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_a^b f dG - \int_a^c f dG - \int_c^b f dG \right| = \\
& = \left| \left(\int_a^b f dG - \int_a^c f dG - \int_c^b f dG \right) - (\mathcal{S}(fdG, T\xi) - \mathcal{S}(fdG, T^1\xi^1) - \mathcal{S}(fdG, T^2\xi^2)) \right| \leq \\
& \leq \left| \int_a^b f dG - \mathcal{S}(fdG, T\xi) \right| + \left| \int_a^c f dG - \mathcal{S}(fdG, T^1\xi^1) \right| + \left| \int_c^b f dG - \mathcal{S}(fdG, T^2\xi^2) \right| < 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

В силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$, последняя цепочка влечёт требуемое. \blacksquare

Теорема 2 (О сведении интеграла Римана — Стильеса к интегралу Римана). Допустим, $f \in R[a; b]$ и $G \in C^{(1)}[a; b]$. Тогда f интегрируема по G на отрезке $[a; b]$ в смысле Римана — Стильеса и

$$(RS) \int_a^b f(x) dG(x) = (R) \int_a^b f(x) G'(x) dx.$$

Доказательство. Т.к. $G' \in C[a; b]$, то $G' \in R[a; b]$, и fG' интегрируема по Риману на $[a; b]$ как произведение двух интегрируемых функций. Таким образом, интеграл справа в условии теоремы существует. Берём любое $\varepsilon > 0$. Пользуясь равномерной непрерывностью на отрезке $[a; b]$ функции G' , находим $\delta_1 > 0$, для которого $|G'(\varphi_i) - G'(\psi_i)| < \varepsilon$, как только $|\varphi_i - \psi_i| < \delta_1$. Обозначим за I интеграл справа в условии. Подберём $\delta_2 > 0$ так, чтобы $|\mathcal{S}(fG', T\xi) - I| < \varepsilon$, если $d(T) < \delta_2$.

Положим $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ и возьмём произвольное отмеченное δ -разбиение $T\xi = \{([a_{i-1}; a_i], \xi_i)\}$ отрезка $[a; b]$. Для него

$$|\mathcal{S}(fdG, T\xi) - I| \leq |\mathcal{S}(fdG, T\xi) - \mathcal{S}(fG', T\xi)| + |\mathcal{S}(fG', T\xi) - I|, \quad (*)$$

причём второе слагаемое справа меньше ε , а первое есть

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_i f(\xi_i) (G(a_i) - G(a_{i-1})) - \sum_i f(\xi_i) G'(\xi_i) (a_i - a_{i-1}) \right| \stackrel{\text{т. Лагранжа}}{=} \\
& = \left| \sum_i f(\xi_i) G'(\eta_i) (a_i - a_{i-1}) - \sum_i f(\xi_i) G'(\xi_i) (a_i - a_{i-1}) \right| = \\
& = \left| \sum_i f(\xi_i) (G'(\eta_i) - G'(\xi_i)) (a_i - a_{i-1}) \right| \leq \sup_{[a; b]} |f| \cdot \varepsilon(b - a), \quad \eta_i \in (a_{i-1}; a_i).
\end{aligned}$$

В итоге левая часть $(*)$ меньше $\varepsilon \left(1 + \sup_{[a; b]} |f| (b - a) \right)$, откуда вытекает требуемое. \blacksquare

23. МЕТРИЧЕСКИЕ И НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ПРИМЕРЫ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ. ПРОСТРАНСТВО \mathbb{R}^n , МЕТРИКИ И НОРМЫ В НЁМ

Определение 1. *Метрическое пространство* — пара (X, ρ) , где X — некоторое непустое множество, а $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ (*метрика на X*), удовлетворяющая следующим аксиомам расстояния:

1. $\rho(x, y) \geq 0$, $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall x, y \in X$;

2. $\rho(x, y) = \rho(y, x) \forall x, y \in X$;
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \forall x, y, z \in X$.

Пример 1. Здесь приведены некоторые примеры метрик:

1. Пусть X — произвольное множество, а ρ — *дискретная метрика*,

$$\rho(x, y) := \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y \end{cases}.$$

2. Пусть X — произвольное множество, $c \in X$. Возьмём любую функцию $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ такую, что $f(c) = 0$ и $f(x) > 0$ при $x \neq c$. Эта функция задаёт *парижскую метрику*

$$\rho(x, y) := \begin{cases} f(x) + f(y), & \text{если } x \neq y, \\ 0, & \text{если } x = y. \end{cases}$$

3. Пусть $X = \{0, 1\}^n$. Рассмотрим *метрику Хэмминга*

$$\rho(x, y) := \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|, \quad x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in X.$$

4. Пара $(C[a, b], \rho)$, где $\rho(f, g) := \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$, является метрическим пространством.

5. Если $\rho(a, b)$ — метрика на X , то и $\frac{\rho(a, b)}{1 + \rho(a, b)}$ — тоже метрика на X .

Примечание. Если (X, ρ) — метрическое пространство и $X \supset Y \neq \emptyset$, то и (Y, ρ') — метрическое пространство ($\rho' \equiv \rho$ на Y). При этом говорят, что метрика ρ на X индуцирует метрику ρ' на Y .

Определение 2. *Нормированное пространство* — пара $(V, \|\cdot\|)$, где V — линейное (векторное) пространство над полем \mathbb{F} , а $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ (*норма* в V), для которой выполнены следующие аксиомы:

1. $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0} \forall x \in V$;
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \forall \lambda \in \mathbb{F}, \forall x \in V$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \forall x, y \in V$.

Любая норма индуцирует метрику. Положим $\rho(x, y) := \|x - y\|$. Проверим выполнение для функции ρ аксиом метрики. Аксиома 1 для ρ сразу вытекает из аксиомы 1 для $\|\cdot\|$. Далее,

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \|-(y - x)\| = |-1| \|y - x\| = \rho(y, x),$$

и выполнена аксиома 2. Неравенство треугольника для метрики вытекает из неравенства треугольника для нормы:

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

Итак, каждое нормированное пространство можно рассматривать как метрическое.

Пространство \mathbb{R}^n , метрики и нормы на нём. Рассмотрим множество

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n)^t : x_j \in \mathbb{R} \text{ для всех } j = 1, \dots, n\}.$$

\mathbb{R}^n является линейным пространством относительно операций умножения вектора на число и сложения двух векторов, которые выполняются покомпонентно. Покажем, что \mathbb{R}^n является нормированным пространством, причём существуют разнообразные способы определить норму в \mathbb{R}^n (не только те, что приведены ниже).

Для $x = (x_1, \dots, x_n)^t$ положим

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$$

— *манхэттенская норма* и

$$\|x\|_\infty := \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$$

— *max-норма*.

Пожалуй, наиболее распространённой нормой в \mathbb{R}^n является *евклидова норма*

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Она является частным случае целой серии норм. А именно, для любого $p > 1$ положим

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

Проверим выполнение аксиом нормы для $\|\cdot\|_p$:

- (1) $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \begin{cases} > 0, & x \neq 0, \\ = 0, & x = 0; \end{cases}$
- (2) $\left(\sum_{i=1}^n |\lambda x_i|^p \right)^{1/p} = \left(|\lambda|^p \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} = |\lambda| \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} = |\lambda| \|x\|_p;$
- (3) $\|x + y\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \stackrel{\text{нер-во Минковского}}{\leq} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p} = \|x\|_p + \|y\|_p.$

Нормы $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_p$ и $\|\cdot\|_\infty$ порождают метрики

$$\begin{aligned} \rho_1(x, y) &= \|x - y\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|, & \rho_p(x, y) &= \|x - y\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}, \\ \rho_\infty(x, y) &= \|x - y\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i|. \end{aligned}$$

24. МЕТРИЧЕСКИЕ И НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ВНУТРЕННОСТЬ, ВНЕШНОСТЬ, ГРАНИЦА МНОЖЕСТВА, ПРОИЗВОДНОЕ МНОЖЕСТВО

Определение 1. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. *Открытым шаром* радиуса r с центром в точке $a \in X$ называется множество

$$B_r(a) := \{x \in X : \rho(x, a) < r\},$$

а *замкнутым шаром* с теми же радиусом и центром — множество

$$\overline{B}_r(a) := \{x \in X : \rho(x, a) \leq r\}.$$

Определение 2. Любой открытый шар, содержащий точку x , называется её *окрестностью*. Иногда будем писать $U(x)$ для окрестности точки x , а $\mathring{U}(x)$ — для *проколотой окрестности* точки x , $\mathring{U}(x) := U(x) \setminus \{x\}$. Шар $B_r(x)$ с центром в самой точке x называют ещё и *r -окрестностью* (центрированной окрестностью) точки x .

Предложение 1. Всякая окрестность точки x содержит некоторую r -окрестность точки x .

Доказательство. В самом деле, пусть $B_{r_1}(a)$ — окрестность точки x . Тогда $\rho(x, a) = r_2 < r_1$. Положим $r := (r_1 - r_2)/2$ и рассмотрим открытый шар $B_r(x)$. Для всех $y \in B_r(a)$ имеем:

$$\rho(y, a) \leq \rho(y, x) + \rho(x, a) < r + r_2 = \frac{r_1 - r_2}{2} + r_2 = \frac{r_1 + r_2}{2} < r_1.$$

Значит, $y \in B_{r_1}(a)$, поэтому $B_r(x) \subset B_{r_1}(a)$. ■

Предложение 2. Пересечение конечного числа центрированных окрестностей одной и той же точки есть центрированная окрестность этой точки:

Доказательство. $\bigcap_{i=1}^m B_{r_i}(x) = B_r(x)$, $r = \min_{i=1, \dots, m} r_i$. ■

Определение 3. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $E \subset X$. Точка $a \in X$ является:

1. *внутренней* точкой множества E , если найдётся окрестность $U(a) \subseteq E$;
2. *внешней* для E , если существует $U(a) \subseteq (X \setminus E)$;
3. *граничной точкой* E , если каждая окрестность $U(a)$ имеет непустое пересечение как с E , так и с $X \setminus E$;
4. *предельной точкой* множества E , если в любой её окрестности находится бесконечное число точек из E ;
5. *изолированной точкой* E , если $U(a) \cap E = \{a\}$ для некоторой окрестности $U(a)$.

Далее:

1. *внутренность* множества E — множество $\text{int } E$ всех внутренних точек E ;
2. *внешность* множества E — множество $\text{ext } E$ всех внешних точек E ;
3. *граница* множества E — множество ∂E граничных точек E ;
4. *производное множество* для E — множество E' всех предельных точек E .

Ясно, что $X = \text{int } E \sqcup \text{ext } E \sqcup \partial E$.

Пример 1. Положим $X = \mathbb{R}$, тогда:

1. $\text{int } \mathbb{N} = \emptyset$, $\text{ext } \mathbb{N} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, $\partial \mathbb{N} = \mathbb{N}$, $\mathbb{N}' = \emptyset$.
2. $\text{int } \mathbb{Q} = \emptyset$, $\text{ext } \mathbb{Q} = \emptyset$, $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$.
3. $\text{int}(0; 1) = (0; 1)$, $\text{ext}(0; 1) = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$, $\partial(0; 1) = \{0, 1\}$, $(0; 1)' = [0; 1]$.

25. ОТКРЫТЫЕ И ЗАМКНУТЫЕ МНОЖЕСТВА В МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ, КРИТЕРИЙ ЗАМКНУТОСТИ. ОТКРЫТОСТЬ И ЗАМКНУТОСТЬ ШАРОВ. ПЕРЕСЕЧЕНИЯ И ОБЪЕДИНЕНИЯ ОТКРЫТЫХ И ЗАМКНУТЫХ МНОЖЕСТВ. ЗАМКНУТОСТЬ ГРАНИЦЫ МНОЖЕСТВА

Определение 1. E — *открытое* множество в метрическом пространстве (X, ρ) , если $E = \text{int } E$. E — *замкнутое* множество в (X, ρ) , если $E' \subseteq E$.

Из определений открытого и замкнутого множеств вытекает, что каждое из множеств \emptyset и X является и открытым, и замкнутым.

Предложение 1. Внутренность и внешность любого множества открыты.

Доказательство. Если a — внутренняя точка E , найдётся окрестность $U(a) \subseteq E$. Но $U(a)$ является окрестностью всех лежащих в ней точек. Значит, все точки $x \in U(a)$ есть внутренние точки множества E , т.е. $U(a) \subseteq \text{int } E$. Следовательно, $\text{int } E$ — открытое множество. Доказательство открытости $\text{ext } E$ проходит аналогично. ■

Теорема 1 (Критерий замкнутости). Следующие условия равносильны:

1. E замкнуто;
2. $X \setminus E$ открыто;
3. $\partial E \subseteq E$.

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Допустим, E замкнуто. Возьмём какую-нибудь точку $x \in X \setminus E$. Если x была бы предельной точкой множества E , то $x \in E$, т. к. E замкнуто, но $x \notin E$. Следовательно, x не является предельной точкой для E . Значит, найдётся проколота окрестность $\dot{U}(x)$, где нет точек из E . Сама точка x также не находится в E , поэтому в окрестности $U(x)$ нет точек из E , т. е. $U(x) \subseteq X \setminus E$. Итак, $\forall x \in X \setminus E$ мы нашли окрестность $U(x) \subseteq X \setminus E$. Это означает, что множество $X \setminus E$ открыто.

$2 \Rightarrow 3$. Предположим, что $X \setminus E$ открыто. Возьмём произвольную граничную точку x множества E и допустим, что $x \notin E$. Тогда $(X \setminus E)$ открыто найдётся окрестность $U(x) \subseteq X \setminus E$. Но в этом случае x не может быть граничной точкой множества E — противоречие. Значит, каждая граничная точка x лежит в E .

$3 \Rightarrow 1$. Пусть x — любая предельная для X точка; необходимо показать, что $x \in E$. Точка x может быть внутренней, граничной или внешней точкой множества E . Если x внутренняя, то $x \in E$ согласно определению внутренней точки. Если x граничная, то $x \in E$ по условию. Если же x внешняя точка для E , то найдётся окрестность $U(x)$, в которой нет точек из E . Однако это невозможно, т. к. x — предельная точка множества X . ■

Предложение 2. Открытый шар — открытое множество, замкнутый шар — замкнутое множество.

Доказательство. Пусть $B_r(a)$ — открытый шар и $x \in B_r(a)$. Тогда этот шар является окрестностью точки x , т. е. он открыт.

Пусть $\bar{B}_r(a)$ — замкнутый шар, $x \in \bar{B}_r(a)'$. Случай $\rho(x, a) := r_1 > r$ невозможен, т. к. в этом случае $B_\delta(x) \cap \bar{B}_r(a) = \emptyset$ при $\delta = (r_1 - r)/2$, поэтому $x \notin \bar{B}_r(a)'$. Значит, $\rho(x, a) \leq r$, т. е. $x \in \bar{B}_r(a)$. Итак, $\bar{B}_r(a)' \subset \bar{B}_r(a)$, т. е. шар $\bar{B}_r(a)$ замкнут. ■

Теорема 2.

1. Объединение открытых множеств открыто, пересечение замкнутых — замкнуто.
2. Пересечение конечного числа открытых множеств открыто, объединение конечного числа замкнутых — замкнуто.

Доказательство.

1. Пусть все множества $\{U_i : i \in I\}$ (где I — некоторое множество индексов) открыты. Возьмём любую точку $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$. Тогда $x \in U_\alpha$ для некоторого $\alpha \in I$, а т. к. U_α открыто, то найдётся окрестность $V(x) \subset U_\alpha$. Но тогда $V(x) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, откуда множество $\bigcup_{i \in I} U_i$ открыто.

Теперь пусть все множества $\{F_i : i \in I\}$ замкнуты, т. е. $F_i = X \setminus U_i$, где U_i открыто $\forall i \in I$. Имеем

$$\bigcap_{i \in I} F_i = \bigcap_{i \in I} (X \setminus U_i) = X \setminus \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right).$$

При этом $\bigcup_{i \in I} U_i$ открыто, поэтому его дополнение $\bigcap_{i \in I} F_i$ замкнуто.

2. Пусть $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i$, тогда $x \in U_i \forall i = 1, \dots, n$. Если все множества U_i открыты, то для каждого k можно найти шар $B_{r_i}(x) \subset U_i$. Множество $V(x) := \bigcap_{i=1}^n B_{r_i}(x)$ есть окрестность точки x , которая лежит в $\bigcap_{i=1}^n U_i$. Следовательно, множество $\bigcap_{i=1}^n U_i$ открыто.

Допустим, для каждого $i = 1, \dots, n$ множество F_i замкнуто: $F_i = X \setminus U_i$, где U_i открыто. Тогда

$$\bigcup_{i=1}^n F_i = \bigcup_{i=1}^n (X \setminus U_i) = X \setminus \left(\bigcap_{i=1}^n U_i \right).$$

При этом $\bigcap_{i=1}^n U_i$ открыто, поэтому его дополнение $\bigcup_{i=1}^n F_i$ замкнуто. ■

26. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ В МЕТРИЧЕСКИХ И НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. КРИТЕРИЙ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В \mathbb{R}^n . ПОНЯТИЕ О ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. КРИТЕРИЙ КОШИ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В \mathbb{R}^n

Определение 1. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство и $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность элементов X . Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, A) = 0$, то последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ называется *сходящейся*, а элемент $A \in X$ — её *пределом*. Запись: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$.

Предложение 1. A — предел последовательности $\{x_n\}$ тогда и только тогда, когда в любой окрестности $U(A)$ содержатся все члены последовательности за исключением конечного их числа.

Доказательство. \Rightarrow . Если $x_n \rightarrow A$ при $n \rightarrow \infty$, то возьмём произвольную окрестность $B_r(A)$ и, согласно определению предела, найдём $N \in \mathbb{N}$ такое, что $\rho(x_n, A) < r$ для всех $n \geq N$. Тогда все члены последовательности за исключением x_1, \dots, x_{N-1} содержатся в $B_r(A)$.

\Leftarrow . Допустим, в каждой окрестности $U(A)$ содержатся все члены последовательности $\{x_n\}$ за исключением конечного их числа. Возьмём произвольный шар $B_r(A)$, и пусть N — максимальный из номеров n таких, что $x_n \notin B_r(A)$. Тогда $x_n \in B_r(A)$ для всех $n \geq N + 1$. Т. к. $B_r(A)$ выбирался произвольно, то $x_n \rightarrow A$ при $n \rightarrow \infty$. ■

Теорема 1.

1. Предел сходящейся последовательности единственен.
2. Любая сходящаяся последовательность ограничена.
3. Если найдётся $N \in \mathbb{N}$ такое, что $x_n = A$ для каждого $n \geq N$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$.
4. Пусть $(V, \|\cdot\|)$ — нормированное пространство. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$, а $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B$.

Доказательство.

1. Допустим, последовательность $\{x_n\}$ имеет два предела $A \neq B$. Найдём окрестности $U(A)$ и $V(B)$, для которых $U(A) \cap V(B) = \emptyset$. Т. к. A и B — пределы $\{x_n\}$, в каждую из этих окрестностей попадают все члены последовательности, кроме конечного их числа. А это невозможно, т. к. $U(A) \cap V(B) = \emptyset$.
2. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$. Тогда все точки, кроме a_{i_1}, \dots, a_{i_m} лежат в некоторой окрестности $B_{r_1}(A)$ точки A . Положим $r_2 := \rho(A, A_1) + r_1$. Тогда $B_{r_2}(A) \supseteq B_{r_1}(A_1)$. Действительно, пусть $x \in B_{r_1}(A_1)$, т. е. $\rho(A_1, x) < r_1$. Тогда

$$\rho(A, x) \leq \rho(A, A_1) + \rho(A_1, x) < \rho(A, A_1) + r_1,$$

значит, $x \in B_{r_2}(A)$. Теперь положим $r = \max\{r_2, \rho(A, x_{i_1}), \dots, \rho(A, x_{i_m})\}$. Тогда шар $B_r(A)$ содержит все точки последовательности $\{x_n\}$.

3. В окрестности $B_r(A)$ для любого r содержатся все точки $\{x_n\}$, кроме конечного их числа.

4. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Т. к. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$, то $\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ такие, что

$$\left(n \geq N_1 \Rightarrow x_n \in B_{\varepsilon/2}(A) \Rightarrow \|x_n - A\| < \frac{\varepsilon}{2}\right) \wedge \left(n \geq N_2 \Rightarrow x_n \in B_{\varepsilon/2}(B) \Rightarrow \|x_n - B\| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

(шары рассматриваются в метрике ρ , индуцированной с нормы $\|\cdot\|$). Пусть $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$, тогда выполнены оба неравенства выше, отсюда

$$\|(\alpha a_n + \beta b_n) - (\alpha A + \beta B)\| \leq |\alpha| \|a_n - A\| + |\beta| \|b_n - B\| < \frac{|\alpha| + |\beta|}{2} \cdot \varepsilon.$$

Т. к. $\varepsilon > 0$ выбиралось произвольно, отсюда следует требуемое. ■

Теорема 2 (Критерий сходимости последовательности в \mathbb{R}^n). Допустим, $\{x^m = (x_1^m, \dots, x_n^m)^t\}_{m=1}^\infty$ — последовательность в пространстве (\mathbb{R}^n, ρ_2) с евклидовой метрикой, $a = (a_1, \dots, a_n)^t \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x^m = a \Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} x_i^m = a_i \quad \text{для всех } i = 1, \dots, n.$$

Доказательство. Из неравенства

$$\max_{i=1, \dots, n} |b_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \leq \sum_{i=1}^n |b_i|$$

вытекает, что

$$|x_i^m - a_i| \leq \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^m - a_i)^2}}_{\rho_2(x^m, a)} \leq \sum_{i=1}^n |x_i^m - a_i| \quad \text{для всех } i = 1, \dots, n. \quad (*)$$

Воспользуемся теоремой о предельном переходе в неравенствах для числовых последовательностей.

\Rightarrow . Допустим, $\lim_{m \rightarrow \infty} x^m = a$, т. е. выражение в середине (*) стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$; следовательно, выражение слева тоже, т. е. $\lim_{m \rightarrow \infty} x_i^m = a_i$ для каждого i .

\Leftarrow . Допустим, $\lim_{m \rightarrow \infty} x_i^m = a_i$ для каждого i , т. е. каждое слагаемое справа в (*) стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$; значит, и вся сумма тоже. Но тогда выражение в середине (*) тоже стремится к нулю, т. е. $\lim_{m \rightarrow \infty} x^m = a$. ■

Определение 2. Последовательность $\{x^m\}_{m=1}^\infty$ в метрическом пространстве (X, ρ) *фундаментальна* (иначе, *последовательность Коши*), если для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся натуральное M такое, что $\rho(x^m, x^\ell) < \varepsilon$ для всех $m, \ell \geq M$.

Определение 3. Метрическое пространство *полно*, если всякая фундаментальная последовательность в этом пространстве сходится.

Пример 1.

1. Пространство (\mathbb{R}, ρ) (где ρ индуцирована с нормы $|\cdot|$) полно (вытекает из критерия Коши сходимости числовой последовательности).
2. Пространство $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \rho)$ (с той же метрикой ρ) не является полным: последовательность $\{x^m = 1/m\}$ фундаментальна, но не имеет предела в $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Теорема 3 (Критерий Коши сходимости последовательности в \mathbb{R}^n). Последовательность в (\mathbb{R}^n, ρ) фундаментальна тогда и только тогда, когда она сходится.

Доказательство. Заметим, что

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} x^m = a = (a_1, \dots, a_n) &\stackrel{\text{кр. сходимости в } \mathbb{R}^n}{\iff} \lim_{m \rightarrow \infty} x_i^m = a_i \quad \forall i \stackrel{\text{кр. Коши}}{\iff} \\ &\iff \{x_i^m\}_{m=1}^\infty \text{ фундаментальна для всех } i. \end{aligned}$$

Докажем, что последнее равносильно фундаментальности последовательности $\{x^m\}_{m=1}^\infty$. Из уже выписываемого нами неравенства (см. начало доказательства т. 2 в этом вопросе) следует

$$\max_{i=1, \dots, n} |x_i^m - x_i^\ell| \leq \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i^m - x_i^\ell|^2}}_{\rho(x^m, x^\ell)} \leq \sum_{i=1}^n |x_i^m - x_i^\ell|. \quad (\star)$$

Возьмём любое $\varepsilon > 0$. Если для каждого i последовательность $\{x_i^m\}$ фундаментальна, то при достаточно больших m и ℓ каждое слагаемое справа в (\star) меньше ε/n , а вся сумма меньше ε . Тогда $\rho(x^m, x^\ell) < \varepsilon$ для тех же m и ℓ , т. е. последовательность $\{x^m\}$ фундаментальна.

Обратно, если $\{x^m\}$ фундаментальна, то $\rho(x^m, x^\ell) < \varepsilon$ для всех достаточно больших m и ℓ . Но тогда, из (\star) , $|x_i^m - x_i^\ell| < \varepsilon$ для тех же m и ℓ и всех i , т. е. каждая последовательность $\{x_i^m\}_{m=1}^\infty$ фундаментальна. ■

27. ЗАДАЧИ

В этом разделе размещены мои решения некоторых задач из списка Михаила Геннадьевича. Символом «о» помечены задачи, которые Михаил Геннадьевич считает обязательными (не уверен, что здесь появятся какие-то другие). То есть, это те же задачи, что помечены кружочком и у него. Нумерация задач также совпадает с Михаилом Геннадьевичем.

Задача 1°. (А) Пусть $f \in R[a; b]$, $\{T^n \xi^n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность отмеченных разбиений отрезка $[a; b]$, причём $d(T^n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Докажите, что

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}(f, T^n \xi^n).$$

(Б) Разобьём отрезок $[a; b]$ на n равных отрезков $\Delta_j^{(n)}$, $1 \leq j \leq n$ длины $(b-a)/n$, а затем в каждом из них произвольным образом выберем метку $\xi_j^{(n)}$. Покажите, что

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n f(\xi_j^{(n)}).$$

▷ (А) По определению предела последовательности $d(T^n)$,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \mathcal{N}_\varepsilon : (n > \mathcal{N}_\varepsilon) \Rightarrow (|d(T^n)| < \varepsilon) \quad (*)$$

По определению интеграла Римана

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (d(T) < \delta) \Rightarrow (|\mathcal{S}(f, T\xi) - I| < \varepsilon).$$

Перепишем последнее высказывание с учётом (*):

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon := \mathcal{N}_\varepsilon : (n > N_\varepsilon) \Rightarrow (|\mathcal{S}(f, T\xi) - I| < \varepsilon).$$

Значит, утверждение теоремы верно по определению предела последовательности.

(Б) По предыдущему пункту

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}(f, T^n \xi^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^n f(\xi_j^{(n)}) |\Delta_j^{(n)}| \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n f(\xi_j^{(n)}).$$

Задача 2°. Вычислите с помощью формулы из задачи 1.Б интегралы $\int_0^b x^2 dx$ и $\int_0^b x^3 dx$. В качестве ξ_j^n возьмите правые концы соответствующих отрезков разбиения.

▷ В разбиении на равные отрезки длины n отрезка $[a; b]$ правый конец j -го отрезка будет иметь координату

$$\frac{b-a}{n} \cdot j + a = \frac{b \cdot j + (n-j) \cdot a}{n}.$$

Однако с учётом $a = 0$ (в нашей задаче), получаем $\xi_j^{(n)} = j \cdot b/n$. Пользуясь задачей 1, находим первый интеграл:

$$\begin{aligned} \int_0^b x^2 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b}{n} \sum_{j=1}^n \left(\frac{b \cdot j}{n} \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b}{n} \right)^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \\ &= \frac{b^3}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3} = \frac{b^3}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) = \boxed{\frac{b^3}{3}} \end{aligned}$$

Теперь найдём второй интеграл:

$$\int_0^b x^3 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b}{n} \sum_{j=1}^n \left(\frac{b \cdot j}{n} \right)^3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b}{n} \right)^4 \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{b^4}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = \boxed{\frac{b^4}{4}}$$

Задача 3. Докажите (без использования критерия Лебега), что функция Римана

$$\text{Riem}(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } x = \frac{m}{n}, \text{ НОД}(n, m) = 1, \\ 0, & \text{если } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

интегрируема по Риману на каждом отрезке $[a; b]$ и вычислите $(R) \int_a^b \text{Riem}(x) dx$.

▷ Достаточно доказать, что функция Римана интегрируема на отрезке $[0; 1]$. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и положим $\delta := \varepsilon$. Рассмотрим произвольное δ -разбиение $T = \{[a_{i-1}; a_i]\}_{i=1}^m$ отрезка $[0; 1]$. Обозначим через ℓ_1 суммарную длину отрезков, содержащих точки со знаменателем 1 в несократимой дроби (т.е. здесь это одна точка 1 и один отрезок). Через ℓ_2 обозначим суммарную длину оставшихся отрезков, содержащих точки со знаменателем 2 в несократимой дроби (т.е. здесь это опять одна точка и не более одного отрезка). Тогда распишем верхнюю сумму Дарбу:

$$S(f, T) = 1 \cdot \ell_1 + \frac{1}{2} \cdot \ell_2 + \frac{1}{3} \cdot \ell_3 + \dots + \frac{1}{i} \cdot \ell_i + \dots$$

Найдём наименьшее i_0 такое, что $\frac{1}{i_0} < \varepsilon$. Тогда

$$S(f, T) = 1 \cdot \ell_1 + \dots + \frac{1}{i_0 - 1} \cdot \ell_{i_0-1} + \underbrace{\varepsilon(\ell_{i_0} + \ell_{i_0+1} + \dots)}_{\leq 1} \leq 1 \cdot \ell_1 + \dots + \frac{1}{i_0 - 1} \cdot \ell_{i_0-1} + \varepsilon.$$

Теперь заметим, что $\ell_i \leq \delta \cdot i$, потому что чисел со знаменателем i в несократимой дроби не более i . Величина ℓ_i максимальна, если эти числа все содержатся в различных отрезках длины δ , тогда их суммарная длина будет $\delta \cdot i$. Отсюда получаем финальную оценку:

$$\begin{aligned} S(f, T) &\leq 1 \cdot \ell_1 + \dots + \frac{1}{i_0 - 1} \cdot \ell_{i_0-1} + \varepsilon \leq 1 \cdot \delta \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \delta \cdot 2 + \dots + \frac{1}{i_0 - 1} \cdot \delta \cdot (i_0 - 1) + \varepsilon = \\ &= (i_0 - 1)\delta + \varepsilon < \frac{1}{\varepsilon} \cdot \delta + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Нижняя сумма Дарбу $s(f, T) = 0$ (т. к. на любом отрезке найдётся иррациональное число), так что получаем $s(f, T) = S(f, T) = 0$, отсюда следует требуемое. ◀

Задача 4°. Докажите, что не более чем счётное объединение множеств меры нуль по Лебегу имеет меру нуль по Лебегу. Покажите, что не более чем счётное множество имеет меру нуль по Лебегу.

▷ Докажем первое утверждение. Пусть $\{E_i : i \in I\}$ — система множеств меры нуль по Лебегу. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и найдём для каждого множества E_i ($i \in I$) такое покрытие отрезками $\{\Delta_j^{(i)} : j \in J\}$, что $\sum_{j \in J} |\Delta_j^{(i)}| < \varepsilon/2^{i+1}$. Полученная система отрезков $\{\Delta_j^{(i)} : i \in I, j \in J\}$ образует покрытие множества $\bigcup_{i \in I} E_i$. Просуммировав по всем i и j , получим

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} |\Delta_j^{(i)}| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \dots \right) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Согласно определению, множество $\bigcup_{i \in I} E_i$ имеет меру нуль по Лебегу.

Второе утверждение сведём к первому. Если множество E не более чем счётно, то его элементы можно занумеровать натуральными числами: $E = \{e_i : i \in I\}$ (I — не более чем счётное множество индексов). Записав по-другому, получим $E = \bigcup_{i \in I} \{e_i\}$. Множества $\{e_i\}$, очевидно, имеют меру нуль по Лебегу, поэтому (согласно первому утверждению) и E имеет меру нуль по Лебегу. ◀

Задача 5. Допустим, система интервалов $\{\Delta_j\}_{j=1}^n$ покрывает отрезок $[a; b]$. Установите неравенство $b - a \leq \sum_{j=1}^n |\Delta_j|$. Докажите, что если $a < b$, то отрезок $[a; b]$ не есть множество меры нуль по Лебегу.

▷ Пусть $\{a_i\}_{i=1}^n$ есть множество левых концов интервалов Δ_i , занумерованных в порядке возрастания, а $\{b_i\}_{i=1}^n$ есть множество правых концов интервалов Δ_i , занумерованных в порядке возрастания (т. е. $a_1 = a$, $b_n = b$). Заметим, что обязательно выполняется условие $a_{i+1} < b_i$ (иначе образуется отрезок $[b_i; a_{i+1}]$, который не покрыт никаким интервалом из нашей системы). Ясно, что

$$\sum_{i=1}^n |\Delta_i| = \sum_{i=1}^n b_i - \sum_{i=1}^n a_i = b - a + \sum_{i=1}^{n-1} b_i - \sum_{i=2}^n a_i = b - a + \sum_{i=1}^{n-1} \underbrace{(b_i - a_{i+1})}_{>0} > b - a.$$

Кажется, аналогично доказывается, что суммарная длина покрытия отрезка $[a; b]$ не меньше $b - a$, так что отрезок $[a; b]$ не является множеством меры нуль по Лебегу. ◀

Задача 6°. Построим канторовское троичное множество $F_{1/3}$. Из отрезка $[0; 1]$ вырежем среднюю треть — интервал $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$. Затем из двух оставшихся отрезков $[0; \frac{1}{3}]$ и $[\frac{2}{3}; 1]$ снова вырезаем

интервал-среднюю треть. Повторим процедуру счётное число раз и получим после всех вырезаний множество $F_{1/3}$. Покажите, что это множество замкнуто и меры нуль по Лебегу.

▷ Дополнение к нему есть объединение лучей $(-\infty; 1)$ и $(1; +\infty)$ и вырезанных интервалов. Объединение любого числа открытых множеств открыто, поэтому $\mathbb{R} \setminus F_{1/3}$ открыто, а значит, $F_{1/3}$ замкнуто.

Заметим, что после i -го шага у нас получается 2^i отрезков длины $1/3^i$. Значит, суммарная длина отрезков после i -го шага равна $\ell_i := (2/3)^i$. Отметим, что $\ell_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что $\ell_N < \varepsilon$. Значит, в качестве искомого множества отрезков можно взять отрезки, получающиеся на N -ом шаге алгоритма. Итак, нашли не более чем счётную систему отрезков, образующих покрытие $F_{1/3}$ и имеющих суммарную длину $< \varepsilon$. Значит, $F_{1/3}$ имеет меру нуль по Лебегу. ◀

Задача 7. Докажите, что множество $F_{1/3}$ несчётно.

▷ Следствие задачи 8. ◀

Задача 8. Докажите, что канторовское троичное множество состоит из всех $x \in [0; 1]$ вида

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{3^{k+1}}, \quad x_k = 0 \vee 2.$$

▷ По сути, в формулировке утверждается, что в канторовское троичное множество входят те и только те x , которые в троичной системе имеют вид $0, \overline{x_1 x_2 \dots}$, где $x_i = 0 \vee 2$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Докажем по индукции, что на i -ом шаге алгоритма удаляются те и только те числа, у которых на i -ой позиции в троичной записи стоит 1.

База. На первом шаге удаляются все числа из интервала $(0, 1; 0, 2)$ (в троичной записи). У них действительно на i -ом месте стоит 1. Остаётся число $0, 1$, которое имеет 1 на первой позиции в троичной записи. Однако есть эквивалентная запись $0, 0(2)$, которая не содержит 1.

Шаг. Из предположения индукции, после $(i-1)$ -го шага у нас остались числа вида $x = 0, \overline{x_1 \dots x_{i-1} \dots}$, где $x_j = 0 \vee 2$ для всех $j \in [1; i-1]$, а после $\overline{x_1 \dots x_{i-1}}$ стоит всё что угодно. Рассмотрим первый оставшийся отрезок (для всех остальных аналогично), он имеет вид $[0; 0, \underbrace{0 \dots 0}_{i-2} 1]$

(или, что то же самое, $[0; 0, \underbrace{0 \dots 0}_{i-1} (2)]$, тут опять же есть запись без единиц, но для удобства мы ей пользоваться не будем, нам просто важно знать, что она есть). Мы вырезаем интервал $(0, \underbrace{0 \dots 0}_{i-1} 1; 0, \underbrace{0 \dots 0}_{i-1} 2)$. Это опять же все числа, у которых на i -ой позиции в троичной записи стоит 1, кроме $0, \underbrace{0 \dots 0}_{i-1} 1$, но для него есть эквивалентная запись $0, \underbrace{0 \dots 0}_i (2)$, не содержащая единиц. ◀

Задача 9. Пусть множество $E \subset [a; b]$ замкнуто и имеет меру нуль по Лебегу, а функция $f : [a; b] \rightarrow$

\mathbb{R} ограничена и равна нулю на множестве $[a; b] \setminus E$. Докажите, что $f \in R[a; b]$ и $\int_a^b f(x) dx = 0$. Можно ли отказаться от условия замкнутости множества E ?

▷ Возьмём произвольные $\varepsilon > 0$ и набор точек $\{\xi_i\}_{i=1}^m$. Пусть $T^E = \{\Delta_i^E\}_{i \in I}$ (I — не более чем счётное множество индексов) — покрытие множества E отрезками суммарной длины меньше ε . Пусть также $|f(x)| \leq C$ при $x \in [a; b]$. Рассмотрим подмножество точек $\{\xi_i : i \in I, \xi_i \in E\}$. Каждую из этих точек содержит какой-то отрезок покрытия $\{\Delta_i^E\}_{i \in I}$, пусть $\xi_j \in \Delta_{i_j}^E$. Тогда положим $\delta := \min_j \{|\Delta_{i_j}|\}$. Наконец, рассмотрим произвольное δ -разбиение $T = \{[a_{i-1}; a_i]\}_{i=1}^m$ с метками $\{\xi_i\}_{i=1}^m$. Распишем сумму Римана:

$$S(f, T\xi) = \sum_{\xi_i \in E} f(\xi_i) |\Delta_i| \leq C \sum_{\xi_i \in E} |\Delta_i| \leq C \sum_{i=1}^n |\Delta_i^E| < C\varepsilon.$$

Отсюда сразу следует требуемое. Про замкнутость: в решении она действительно ни к чему, но дело в том, что незамкнутых множеств меры нуль по Лебегу не бывает. Пусть E открыто, тогда для каждой точки существует окрестность, лежащая в E . В любой окрестности можно будет выбрать отрезок, лежащий в ней, он не будет иметь меру нуль по Лебегу. Пусть E не открыто и не замкнуто. Рассмотрим внутренность E , она открыта, если она не пуста, то повторяем проделанное. Если внутренность пуста, то то множество $E = \partial E$, но граница ∂E всегда замкнута, следовательно E замкнуто — противоречие. ◀

Задача 10. Верно ли, что если $f \in R[a; b]$, $f(x) \geq 0$ на $[a; b]$ и $f(x) > 0$ в бесконечном числе точек $x \in [a; b]$, то $\int_a^b f(x)dx > 0$?

▷ Нет, неверно. Положим $a = 0$, $b = 1$ и в качестве множества точек, где $f(x) = 0$ возьмём множество Кантора $F_{1/3}$. Согласно задаче 7 оно несчётно (а значит, и бесконечно), а согласно задаче 6 оно замкнуто и имеет меру нуль по Лебегу. Так что согласно задаче 9 $\int_a^b f(x)dx = 0$. ◀

Задача 11°. Если $f \in R[a; b]$, то функцию $F : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ называют *интегралом Римана с переменным нижним пределом*. Докажите, что $F \in C[a; b]$. Покажите, что если $f \in C(x)$, то $F \in D(x)$ и $F'(x) = f(x)$.

▷ Решение почти дословно повторяет доказательства теорем 1 и 2 в вопросе 11. ◀

Задача 12°. Приведите пример функции, которая интегрируема по Риману на некотором отрезке, но не имеет на нём первообразной.

▷ Рассмотрим функцию $\operatorname{sgn} x$. Интегрируемость sgn по Риману на отрезке $[-1; 1]$ сразу следует из критерия Лебега. Пусть sgn имеет первообразную F на $[-1; 1]$. Тогда она имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} -x + C_1, & \text{при } x < 0, \\ x + C_2, & \text{при } x \geq 0, \end{cases}$$

где $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. $F'(x) = \operatorname{sgn} x$ для всех $x \neq 0$. Чтобы функция была дифференцируема в точке $x = 0$, она должна быть непрерывна в этой точке, а для этого должно выполняться $C_1 = C_2$, однако в таком случае $F(x) = |x| + C$ ($C \in \mathbb{R}$), а она, как известно, не дифференцируема в точке $x = 0$. ◀

Задача 13°. Приведите пример функции, которая на некотором отрезке имеет первообразную, но не интегрируема по Риману.

▷ Рассмотрим функцию

$$F(x) := \begin{cases} x\sqrt{x} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Эта функция дифференцируема на $(0; 1]$:

$$\left(x^{3/2} \sin \frac{1}{x}\right)' = \frac{3x \sin \frac{1}{x} - 2 \cos \frac{1}{x}}{2\sqrt{x}}.$$

Проверим дифференцируемость в точке $x = 0$:

$$F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Последнее равенство верно в силу того, что \sqrt{x} — БМФ при $x \rightarrow 0$, а $\sin \frac{1}{x}$ — ограниченная функция. Итак, обозначим $f(x) := F'(x)$. Эта функция неограничена на отрезке $[0; 1]$, а потому не интегрируема по Риману. В то же время, у неё есть первообразная F на этом отрезке. ◀

Задача 14. Допустим, функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является T -периодичной и $f \in R[0; T]$. Докажите, что $f \in R[a; a + T]$ для всех $a \in \mathbb{R}$ и

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

▷ Из периодичности, достаточно доказать для $a \in [0; T)$, а ещё из той же периодичности мы всегда можем очень легко сместиться на T . Так что $f \in [0; a]$ и $f \in [a; T]$ из теоремы об интегрируемости на подотрезках. Из теоремы об аддитивности интеграла Римана

$$\int_0^T f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_a^T f(x) dx = \int_a^T f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x) dx = \int_a^{a+T} f(x) dx.$$

Задача 15. Допустим, $f \in C(\mathbb{R})$. Докажите, что если для некоторого $T > 0$ и всех $a \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx,$$

то функция f является T -периодичной. Покажите, что утверждение остаётся в силе, если вместо функций $f \in C(\mathbb{R})$ рассматривать функции, которые на любом отрезке ограничены и имеют конечное число точек разрыва.

▷ Обозначим через F первообразную функции f на \mathbb{R} . По формуле Ньютона — Лейбница, для любого $a \in \mathbb{R}$:

$$F(a + T) - F(a) = F(T) - F(0),$$

$F \in D(\mathbb{R})$, т. к. $f \in C(\mathbb{R})$. Возьмём производную с обеих сторон последнего равенства, получим

$$f(a + T) - f(a) = 0.$$

Конечное число точек разрыва здесь ни на что по сути не влияют. ◀

Задача 16. Докажите для каждого натурального $N \geq 2$ неравенство

$$\sqrt{e} \frac{N^{N+\frac{1}{2}}}{e^N} < N! < e \frac{N^{N+\frac{1}{2}}}{e^N}.$$

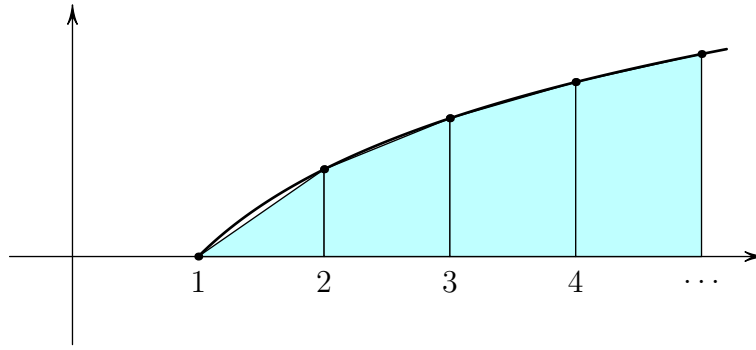
▷ Рассмотрим функцию $f(x) = \ln x$ и посчитаем площадь под её графиком на отрезке $[1; N]$ ($b > 0$). Для этого найдём первообразную f :

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x d \ln x = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + C,$$

а затем саму площадь по формуле Ньютона — Лейбница:

$$\int_1^N \ln x = (x \ln x - x) \Big|_1^N = N \ln N - N + 1.$$

Впишем в график функции $y = \ln x$ трапеции высотой 1 с основаниями $\ln k$ и $\ln(k + 1)$:



Оцениваем площадь:

$$\begin{aligned} \frac{\ln 1 + \ln 2}{2} + \frac{\ln 2 + \ln 3}{2} + \dots + \frac{\ln(N-1) + \ln N}{2} &< N \ln N - N + 1 \\ \ln(N-1)! + \frac{\ln N}{2} &< N \ln N - \ln N + 1 \quad \left| + \frac{\ln N}{2} \right. \\ \ln N! &< \left(N + \frac{1}{2}\right) \ln N - N + 1 \\ N! &< e^{(N+\frac{1}{2}) \ln N - N + 1} = e^{\frac{N^{N+\frac{1}{2}}}{e^N}}. \end{aligned}$$

Получили правое неравенство. Как получить левое я не знаю. ◀

Задача 17°. Используя первую теорему о среднем для интеграла Римана, получите из остаточного члена формулы Тейлора в интегральной форме

$$\frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

остаточный член в форме Лагранжа

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}, \quad \xi \text{ лежит между } x_0 \text{ и } x.$$

▷ Функция $f^{(n+1)}(t)$ непрерывна (т. к. $f \in C^{(n+1)}[a; b]$); применив первую теорему о среднем для интеграла Римана (см. вопрос 14), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt &= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \int_{x_0}^x (x-t)^n dt = \\ &= -\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \Big|_{x_0}^x = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}, \end{aligned}$$

где ξ лежит между x_0 и x . ◀

Задача 18. Для заданной функции $f \in R[a; b]$ рассмотрим величины

$$\int_a^b (f(x) - c)^2 dx, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Значение c , при котором интеграл выше минимален, назовём *числом, наименее уклоняющимся в среднем от функции f* . Покажите, что такое число существует и единственно, и найдите его.

▷ Обозначим $g(c) := \int_a^b (f(x) - c)^2 dx$. Раскрыв скобки, получим, что

$$g(c) = \int_a^b (f^2(x) - 2c \cdot f(x) + c^2) dx = c^2 \cdot (b - a) - 2c \cdot \int_a^b f(x) dx + \int_a^b f^2(x) dx$$

— квадратичная функция с положительным старшим коэффициентом. Так что у неё есть минимум, притом единственный, и достигается он в точке $c = \int_a^b f(x) dx / (b - a)$. ◀

Задача 19°. Вычислите $\bigvee_0^1 f$, где

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ \sin x, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

▷ Здесь единственное отличие от теоремы о вариации монотонной функции в том, что первый модуль раскроется в другую сторону. Рассмотрим любое разбиение $T = \{[a_{i-1}; a_i]\}_{i=1}^m$

$$V(f, T) = \sum_{i=1}^m |f(a_i) - f(a_{i-1})| = f(a_0) - f(a_1) + \sum_{i=2}^m (f(a_i) - f(a_{i-1})) = 1 + \sin 1 - 2 \cdot \sin a_1.$$

Отсюда

$$\bigvee_0^1 f = \sup_T (1 + \sin 1 - 2 \cdot \sin a_1) = \lim_{a_1 \rightarrow 0+} (1 + \sin 1 - 2 \cdot \sin a_1) = 1 + \sin 1.$$

Задача 20°. Вычислите $\bigvee_0^1 f$, где

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

▷ Это важный пример непрерывной на отрезке функции, вариация которой на этом отрезке неограничена. Возьмём в качестве границ отрезков разбиения точки касания графика функции f с прямыми $y = x$ и $y = -x$. Точки находятся так:

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \pm 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2}{k+2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Итак, рассматриваем разбиения вида $T = \{a_{i-1}; a_i\}_{i=1}^m$, где

$$a_0 = 1, \quad a_i = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2}{i+2}, \quad a_m = 0,$$

$i = 1, \dots, m-1$. Причём, $f(a_{2k}) = a_{2k}$ и $f(a_{2k+1}) = -a_{2k+1}$. Теперь

$$V(f, T) = \sum_{i=0}^m |f(a_i) - f(a_{i-1})| \geq \sum_{i=1}^{m-1} |f(a_i) - f(a_{i-1})| = \sum_{i=1}^{m-1} \left(\frac{1}{\pi} \cdot \frac{2}{i+2} + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2}{i+1} \right) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{i}.$$

Справа стоит частичная сумма гармонического ряда, который, как известно, расходится. Поэтому вариация функции f на отрезке $[0; 1]$ неограничена. ◀

Задача 21°. Докажите, что функция Дирихле не является функцией ограниченной вариации ни на каком невырожденном в точку отрезке $[a; b]$.

▷ На любом отрезке бесконечно много рациональных и иррациональных чисел. Поэтому в сумме из определения вариации мы сможем сделать сколько угодно слагаемых, равных 1. Таким образом, вариация функции Дирихле неограничена. ◀

Задача 22. Расположим все рациональные точки $x \in [0; 1]$ в виде последовательности $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. На отрезке $[0; 1]$ рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & x = x_n, \\ 0, & x \in [0; 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Докажите, что $f \in BV[0; 1]$ и найдите $\bigvee_0^1 f$.

▷ Рассмотрим разбиение $T = \{[a_{i-1}; a_i]\}_{i=1}^{2m}$ такое, что $a_{2k} \in x_{k+1}$ и $a_{2k+1} \notin \mathbb{Q}$. Тогда

$$\begin{aligned} V(f, T) &= \sum_{i=1}^{2m} |f(a_i) - f(a_{i-1})| = |f(a_1) - f(a_0)| + |f(a_2) - f(a_1)| + \dots + \\ &\quad + |f(a_{2m}) - f(a_{2m-1})| = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{m+1}) = \sum_{i=1}^{m+1} \frac{1}{2^i}. \end{aligned}$$

Если $m \rightarrow \infty$, то $V(f, T) \rightarrow 1$. Однако же ясно, что взяв другое разбиение (не удовлетворяющее наложенным выше условиям на точки), мы уменьшим $V(f, T)$. Так что $\bigvee_0^1 f = \sup_T V(f, T) = 1$. ◀

Задача 23. Является ли функция Римана функцией ограниченной вариации на отрезке $[0; 1]$?

▷ Рассмотрим разбиения $T = \{[a_{i-1}; a_i]\}_{i=1}^m$, где $a_i = \frac{1}{m-i+1}$ при $i = 1, \dots, m$. Положим $a_0 = a$. Теперь между каждой парой a_i и a_{i-1} поставим иррациональную точку. Вариация на получившемся разбиении будет

$$V(\text{Riem}, T) = \sum_{i=1}^n |f(a_i)| = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + 1 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$$

Получили сумму гармонического ряда, который, как известно, расходится, так что для любого ε можно найти разбиение T_ε , для которого $|V(\text{Riem}, T_\varepsilon)| > \varepsilon$. ◀

Задача 24°. Докажите, что интеграл Римана с переменным верхним пределом от любой функции $f \in R[a; b]$ является функцией ограниченной вариации на $[a; b]$.

▷ Рассмотрим произвольное разбиение $T = \{[a_{i-1}; a_i]\}_{i=1}^m$. Тогда

$$V(f, T) = \sum_{i=1}^m \left| \int_a^{a_i} f(t) dt - \int_a^{a_{i-1}} f(t) dt \right| = \sum_{i=1}^m \left| \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(t) dt \right|.$$

Число в правой части является конечным (по теореме об интегрируемости на подотрезках). Отсюда, $\bigvee_a^b \int_a^x f(t) dt < +\infty$, т. к. $f \in R[a; b]$. ◀

Задача 25°. Докажите, что если $f \in BV[a; b]$, то $\alpha f \in BV[a; b]$ при любом $\alpha \in \mathbb{R}$ и

$$\bigvee_a^b (\alpha f) = \alpha \bigvee_a^b f.$$

▷ Рассмотрим произвольное разбиение $T = \{[a_{i-1}; a_i]\}_{i=1}^m$. Тогда

$$V(\alpha f, T) = \sum_{i=1}^m |\alpha f(a_i) - \alpha f(a_{i-1})| = \alpha \sum_{i=1}^m |f(a_i) - f(a_{i-1})| = \alpha V(f, T).$$

Отсюда $\overset{b}{V}_a(\alpha f) = \alpha \overset{b}{V}_a f < +\infty$, т. к. $f \in BV[a; b]$. ◀

Задача 26°. Докажите, что если $f, g \in BV[a; b]$, то $f + g, fg \in BV[a; b]$, причём

$$\overset{b}{V}_a(f + g) \leq \overset{b}{V}_a f + \overset{b}{V}_a g, \quad \overset{b}{V}_a(fg) \leq M \left(\overset{b}{V}_a f + \overset{b}{V}_a g \right), \quad M := \{f(x), g(x) : x \in [a; b]\}.$$

▷ Рассмотрим произвольное разбиение $T = \{[a_{i-1}; a_i]\}$. Тогда

$$\begin{aligned} V(f + g, T) &= \sum_{i=1}^m |f(a_i) + g(a_i) - f(a_{i-1}) - g(a_{i-1})| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^m |f(a_i) - f(a_{i-1})| + \sum_{i=1}^m |g(a_i) - g(a_{i-1})| = V(f, T) + V(g, T) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} V(fg, T) &= \sum_{i=1}^m |f(a_i)g(a_i) - f(a_{i-1})g(a_{i-1})| = \\ &= \sum_{i=1}^m |f(a_i)g(a_i) - f(a_i)g(a_{i-1}) + f(a_i)g(a_{i-1}) - f(a_{i-1})g(a_{i-1})| = \\ &= \sum_{i=1}^m |f(a_i)(g(a_i) - g(a_{i-1})) + g(a_{i-1})(f(a_i) - f(a_{i-1}))| \leq M \left(\overset{b}{V}_a f + \overset{b}{V}_a g \right). \end{aligned}$$

Отсюда сразу следует требуемое. ◀

Задача 27. Придумайте непрерывную на отрезке $[0; 1]$ функцию такую, что $f \in BV[0; 1]$. Добейтесь при этом, чтобы $f \in BV[\varepsilon; 1]$ для каждого $\varepsilon \in (0; 1)$.

▷ Возьмём

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Согласно задаче 20 её вариация на отрезке $[0; 1]$ неограниченна. Осталось доказать, что её вариация на любом отрезке $[\varepsilon; 1]$ ($\varepsilon \in (0; 1)$) ограничена. Можно (и вроде несложно) показать, что количество нулей производной функции f на отрезке $[\varepsilon; 1]$ конечно, а значит, и множество точек экстремума функции f на этом отрезке конечно. А значит, можно разбить этот отрезок на промежутки монотонности, для каждого из них применить теорему о вариации монотонной функции, а потом, применив теорему об аддитивности вариации, просуммировать эти числа. Получится конечное число (его даже считать не нужно), поэтому вариация функции f на отрезках вида $[\varepsilon; 1]$ для любых $\varepsilon \in (0; 1)$ ограничена. ◀

Задача 28. Может ли функция иметь на отрезке ограниченную вариацию и при этом быть всюду разрывной на нём?

▷ Нет, такой функции не бывает. Рассмотрим разбиение $T = \{[a_{i-1}; a_i]\}_{i=1}^m$, где $a_i = a + \frac{b-a}{m} \cdot i$ (по сути, разбиение на равные отрезки). Из разрывности f в точках a_i вытекает существование $\varepsilon_i > 0$

такого, что для всех $\delta > 0$ из $|x - a_i| < \delta$ вытекает $|f(x) - f(a_i)| \geq \varepsilon_i$. Возьмём $\delta = 2 \cdot \frac{b-a}{m}$. Взятое нами разбиение T является δ -разбиением (т. е. $|a_i - a_{i-1}| < \delta$), при этом

$$V(f, T) = \sum_{i=1}^m |f(a_i) - f(a_{i-1})| \geq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_m.$$

Дальше пока не знаю как делать. ◀

Задача 29. Рассмотрим функцию ван дер Вардена

$$W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d(2^k x)}{2^k}, \quad d(x) \text{ — расстояние от } x \text{ до ближайшего целого числа.}$$

1. Покажите, что W непрерывна всюду на \mathbb{R} .
2. Докажите, что W не дифференцируема ни в одной точке $x \in \mathbb{R}$.
3. Докажите, что $W \notin BV[0; 1]$.

▷ Решение подрезано ОТСЮДА. Ниже представлена по сути более подробная версия доказательства из видео с изменёнными обозначениями. Однако, в силу чуть иного определения функции ван дер Вардена у автора видео, большая часть работы проделана мною, читайте внимательно.

Первое, что стоит упомянуть — это то, что ряд из условия сходится, потому что

$$W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d(2^k x)}{2^k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^k} = 1, \quad W(x) \geq 0.$$

Второе — что функция $W(x)$ периодична с периодом 1, поэтому все утверждения достаточно доказывать для отрезка $[0; 1]$. Дальше начинается магия.

Определение 1. Последовательность функций $S_n(x)$ сходится равномерно к $f(x)$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall x \in [0; 1] \ n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |S_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Теорема 1 (Стокс, Зейдель). Если $S_n(x)$ непрерывны на $[0; 1]$ и равномерно сходятся к f , то f непрерывна на $[0; 1]$.

Доказательство. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |S_n(x) - S_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Пользуясь равномерной сходимостью, выберем такое $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что $n > N_\varepsilon \Rightarrow |S_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \forall x \in [0; 1]$. Тогда

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f(x_0) + S_n(x) - S_n(x_0) + S_n(x_0) - S_n(x)| \leq \\ &\leq |S_n(x) - f(x)| + |S_n(x_0) - f(x_0)| + |S_n(x) - S_n(x_0)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Так что f непрерывна в каждой точке $x_0 \in [0; 1]$ по определению. ■

Теперь обозначим $S_n := \sum_{k=0}^n \frac{d(2^k x)}{2^k}$. Докажем, что последовательность функций S_n равномерно сходится к $W(x)$.

$$|W(x) - S_n(x)| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{d(2^k x)}{2^k} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^n} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right) = \frac{1}{2^n}.$$

Так что для любого $\varepsilon > 0$ существует $N_\varepsilon \lceil \log_2 \varepsilon^{-1} \rceil + 1$ такое, что

$$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |W(x) - S_n(x)| \leq \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^{N_\varepsilon}} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Так что S_n действительно сходится к W равномерно, отсюда по теореме Стокса — Зейделя следует непрерывность W .

Теперь докажем, что W ни в какой точке не дифференцируема. Возьмём точку $x_0 \in [0; 1]$ и рассмотрим её двоичную запись $0, \overline{x_1 x_2 \dots}$ (если возможны несколько двоичных записей, мы вправе выбрать любую из них) Нам нужно доказать несуществование предела

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{W(x_0 + h) - W(x_0)}{h}$$

Рассмотрим такую последовательность:

$$h_m = \begin{cases} -2^{-m} & \text{при } x_m = 1, \\ 2^{-m} & \text{при } x_m = 0 \end{cases}$$

и предел:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{W(x_0 + h_m) - W(x_0)}{h_m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d(2^k(x_0 + h_m))}{2^k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d(2^k x_0)}{2^k}}{h_m} = *$$

Посмотрим на слагаемые первой суммы: $d(2^k(x_0 + h_m)) = d(2^k x_0 + 2^k h_m)$. При $k \geq m$ добавка $2^k h_m$ целая, а потому не влияет на значение d , так что в суммах в числителе последнего выражения слагаемые, начиная с m -го равны.

$$* = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{m-1} \frac{d(2^k(x_0 + h_m))}{2^k} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{d(2^k x_0)}{2^k}}{h_m} = \star.$$

Осталось выяснить различия на первых m слагаемых. Пусть (без ограничения общности) $x_m = 0$. Тогда $h_m = 2^{-m}$, что в двоичной системе счисления записывается как $0, \underbrace{0 \dots 0}_{m-1} 1$, т. е. m -ый разряд числа $x_0 + h_m$ стал равен 1, а остальные разряды совпадают с x_0 . Домножение на 2^k в двоичной системе счисления есть сдвиг на $k < m$ разрядов влево, т. е. запись числа $2^k(x_0 + h_m)$ имеет вид $\overline{x_1 x_2 \dots x_k \dots x_{m-1} 1 x_{m+1} \dots}$. Заметим, что если $2^k x_0$ было ближе к числу $\overline{x_1 x_2 \dots x_k}$, то

$$d(2^k(x_0 + h_m)) - d(2^k x_0) = 0, \overline{\dots x_{m-1} 1 x_{m+1} \dots} - 0, \overline{\dots x_{m-1} 0 x_{m+1} \dots} = 2^{-m} = 2^k h_m.$$

А если же $2^k x_0$ было ближе к числу $\overline{x_1 x_2 \dots x_k} + 1$, то

$$d(2^k(x_0 + h_m)) - d(2^k x_0) = -0, \overline{\dots x_{m-1} 1 x_{m+1} \dots} + 0, \overline{\dots x_{m-1} 0 x_{m+1} \dots} = -2^{-m} = -2^k h_m.$$

Аналогично рассматривая случай $x_m = 1$ (тогда $h_m = -2^{-m}$), заключаем, что

$$\left| d(2^k(x_0 + h_m)) - d(2^k x_0) \right| = \left| 2^k h_m \right|.$$

Итак, возвращаемся к нашему пределу:

$$\star = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\pm h_m}{h_m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m-1} (\pm 1).$$

Рассмотрим последовательность $y_m := \sum_{k=0}^{m-1} (\pm 1)$. Она не сходится по критерию Коши просто потому что $|y_{m+1} - y_m| = 1$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Так что мы доказали, что наш предел не существует, функция $W(x)$ в любой точке $x_0 \in [0; 1]$ не дифференцируема.

Про ограниченную вариацию потом сделаю, я очень устал от этой задачи. ◀

Задача 30°. Вычислите интеграл Римана — Стильеса $(RS) \int_{-1}^1 dG(x)$,

$$G(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0, \\ 1, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

▷ Рассмотрим произвольное разбиение $T = \{[a_{i-1}; a_i]\}_{i=1}^m$ с любыми метками. Найдём наименьшее $i_0 \in [1; m]$, что $a_{i_0-1} < 0$, а $a_{i_0} \geq 0$. Распишем интегральную сумму Римана — Стильеса по определению:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(dG, T\xi) &= \sum_{i=1}^m (G(a_i) - G(a_{i-1})) = \sum_{i < i_0} \underbrace{(G(a_i) - G(a_{i-1}))}_{=0} + \\ &\quad + \underbrace{G(a_{i_0}) - G(a_{i_0-1})}_{=2} + \sum_{i > i_0} \underbrace{(G(a_i) - G(a_{i-1}))}_{=0} = 2. \end{aligned}$$

Получили, что для всех разбиений эта сумма равна 2. А значит, и интеграл равен 2. ◀

Задача 31°. Для любой функции $f \in C[-1; 1]$ и функции G из предыдущей задачи вычислите $(RS) \int_{-1}^1 f(x) dG(x)$.

▷ Рассмотрим произвольное разбиение $T = \{[a_{i-1}; a_i]\}_{i=1}^m$ с любыми метками. Найдём наименьшее $i_0 \in [1; m]$, что $a_{i_0-1} < 0$, а $a_{i_0} \geq 0$. Распишем интегральную сумму Римана — Стильеса по определению:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(fdG, T\xi) &= \sum_{i=1}^m f(\xi_i) (G(a_i) - G(a_{i-1})) = \sum_{i < i_0} f(\xi_i) \underbrace{(G(a_i) - G(a_{i-1}))}_{=0} + \\ &\quad + f(\xi_{i_0}) \underbrace{G(a_{i_0}) - G(a_{i_0-1})}_{=2} + \sum_{i > i_0} f(\xi_i) \underbrace{(G(a_i) - G(a_{i-1}))}_{=0} = 2f(\xi_{i_0}). \end{aligned}$$

Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и положим $I := 2f(0)$. При любом разбиении мы можем взять $\xi_{i_0} = 0$ (т. к. всегда найдётся отрезок разбиения, содержащий точку 0) и для такого разбиения разность между интегральной суммой и I будет $0 < \varepsilon$. Так что искомый интеграл равен $2f(0)$. ◀

Задача 32°. Рассмотрим функции $f, G : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x = \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad G(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{при } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Покажите, что f не интегрируема по G по отрезку $[0; 1]$ в смысле Римана — Стильеса.

▷ Для любого разбиения можно взять метки $\{\xi_i\}_{i=1}^m$, среди которых не найдётся $\xi_{i_0} = \frac{1}{2}$. При этом, для этого же разбиения можно взять другой набор меток $\{\xi'_i\}_{i=1}^m$, что среди них найдётся $\xi'_{j_0} = \frac{1}{2}$. Для первого набора меток интегральная сумма Римана — Стильеса будет равна 0 (все $f(\xi_i)$ равны нулю), для второго — 1. Таким образом, ни для какого $\varepsilon < 1$ не найдётся $\delta > 0$ такого, что любое δ -разбиение удовлетворяет свойству из определения интеграла Римана — Стильеса для какого-то I . Так что функция f не интегрируема по Риману — Стильесу по функции G на отрезке $[0; 1]$. ◀

Задача 33°. Рассмотрим функции $f, G : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{при } x \geq \frac{1}{2}, \end{cases} \quad G(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{при } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Покажите, что f интегрируема по G в смысле Римана — Стильеса по отрезкам $[0; \frac{1}{2}]$ и $[\frac{1}{2}; 1]$, но не интегрируема по отрезку $[0; 1]$.

▷ Докажем интегрируемость на отрезке $[0; \frac{1}{2}]$. Возьмём произвольное разбиение $T = \{[a_{i-1}; a_i]\}_{i=1}^m$ с любыми метками. Заметим, что для любого $i = 1, \dots, m$ выполнено $G(a_i) = 0$. А значит, для любого $i = 1, \dots, m$ выполнено $G(a_i) - G(a_{i-1}) = 0$, так что каждое слагаемое в интегральной сумме занулится. Тогда по определению, интеграл Римана — Стильеса от функции f по функции G на отрезке $[0; \frac{1}{2}]$ равен 0. Интегрируемость по другому отрезку доказывается аналогично. Единственное отличие в том, что останется только первое слагаемое, равное 1.

Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и любое $\delta > 0$. Рассмотрим произвольное δ -разбиение отрезка $[0; 1]$ с любыми метками. Если среди этих меток нашлась точка $\frac{1}{2}$, то интегральная сумма по этому разбиению будет равна 1 (см. предыдущий абзац), а если не нашлась, то 0. Так что ни для каких I и $\varepsilon < 1$ не найдётся такого δ , что для любого δ -разбиения выполнено $|\mathcal{S}(f dG, T\xi) - I| < \varepsilon$. ◀

Задача 34. Пусть задана последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, состоящая из различных чисел, а также последовательность $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ положительных чисел такая, что ряд $\sum_{p=1}^\infty p_n$ сходится. Рассмотрим функцию

$$G: \mathbb{R} \rightarrow [0; +\infty), \quad G(x) := \sum_{n: x_n \leq x} p_n.$$

1. Покажите, что G имеет ограниченную вариацию на любом отрезке $[a; b]$.
2. Докажите, что G непрерывна справа в любой точке.
3. Найдите $\lim_{x \rightarrow -\infty} G(x)$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$.
4. Докажите, что если $f \in C(\mathbb{R})$, то f интегрируема по G в смысле Римана — Стильеса по любому отрезку $[a; b]$ и

$$(RS) \int_a^b f(x) dG(x) = \sum_{n: a < x_n \leq b} f(x_n) p_n.$$

5. Докажите, что если $f \in C(\mathbb{R}) \cap B(\mathbb{R})$, то

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \lim_{b \rightarrow +\infty} (RS) \int_a^b f(x) dG(x) = \sum_{n=1}^\infty f(x_n) p_n.$$

Предел понимается как повторный.

▷ Здесь приведены решения пунктов 1 — 3.

1. Вариация ограничена суммой ряда.
2. Нужно доказать, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h}$$

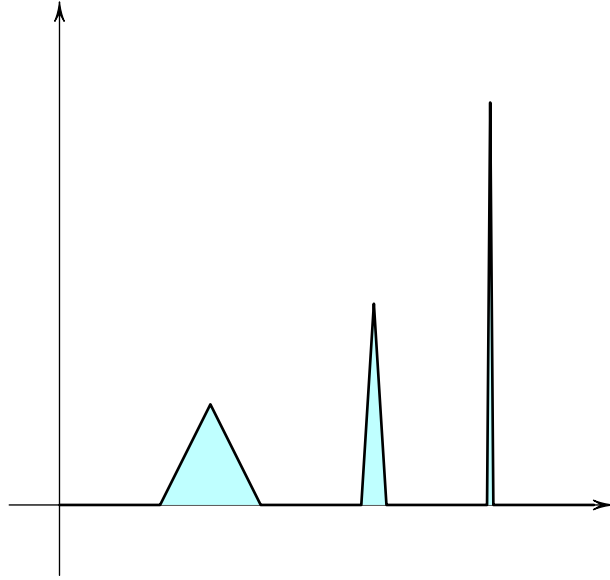
существует. Это правда в силу того, что при достаточно малых h выполнено $G(x+h) = G(x)$. Действительно, возьмём $y_1(x) := \max_{x_i \leq x} x_i$ и $y_2(x) := \min_{x_i \geq x} x_i$. Тогда $y_2(x) > y_1(x) \quad \forall x$, и при $h < y_2(x) - y_1(x)$ выполнено желаемое равенство.

3. Первый, очевидно, равен 0; второй, очевидно, сумме ряда.

Дальше лениво. ◀

Задача 35. Постройте непрерывную неотрицательную функцию $f: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ такую, что несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ сходится, но при этом $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$.

▷ Рассмотрим функцию, графиком которой имеет вид



На каждом шаге высота треугольника увеличивается в 2 раза, а ширина уменьшается в 4 раза, пробел между каждым из них длины 1. Таким образом, верхний предел функции при $x \rightarrow +\infty$ равен ∞ , а площадь под её графиком конечна, и равна

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1.$$

◀

Задача 36°. При каких действительных α сходится $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^\alpha x}$?

▷ По определению несобственного интеграла:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^\alpha x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{dx}{x \ln^\alpha x}.$$

Найдём интеграл Римана под знаком предела:

$$\int_2^b \frac{dx}{x \ln^\alpha x} = \left\{ \begin{array}{l} \ln x = t, \\ x = e^t, \\ dx = e^t dt \end{array} \right\} = \int_2^b \frac{e^t dt}{e^t \cdot t^\alpha} = \int_2^b t^{-\alpha} dt = \left\{ \begin{array}{l} \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_2^b = \frac{1}{1-\alpha} (b^{1-\alpha} - 2^{1-\alpha}), \quad \alpha \neq 1 \\ \ln t \Big|_2^b = \ln b - \ln 2, \quad \alpha = 1. \end{array} \right.$$

Отсюда видно, что при $\alpha \leq 1$ значение предела есть $+\infty$, а при $\alpha > 1$ интеграл сходится. ◀

Задача 37°. Докажите сходимость несобственного интеграла

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

▷ Здесь размещено overkill-доказательство, в котором даже посчитано значение этого несобственного интеграла. Оно аккуратно перенесено мною из файла Лёвы Ерченкова и Вани Коренева.

Для начала преобразуем исходный интеграл. Положим $t = \frac{x}{\sqrt{2}}$, $dt = \frac{dx}{\sqrt{2}}$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \sqrt{2} dt = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

Положим $I := \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Покажем сходимость I . Как известно, $(1+x)e^{-x} < 1$. Подставим $x = \pm t^2$:

$$(1-t^2)e^{t^2} < 1, \quad (1+t^2)e^{-t^2} < 1.$$

Отсюда

$$1-t^2 < e^{-t^2} < \frac{1}{1+t^2} \quad t > 0.$$

В левой части считаем $t \in (0; 1)$, в правой — $t > 0$:

$$(1-t^2)^n < e^{-nt^2} \quad \text{и} \quad e^{-nt^2} < \frac{1}{(1+t^2)^n}.$$

Теперь интегрируем:

$$\int_0^1 (1-t^2)^n dt < \int_0^1 e^{-nt^2} dt < \int_0^\infty e^{-nt^2} dt < \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^n}.$$

Заметим, что

$$\int_0^\infty e^{-nt^2} dt = \frac{1}{\sqrt{n}} I \quad (\text{подстановка } u = \sqrt{nt}).$$

Теперь (см. вопрос 13 про формулу Валлиса)

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-t^2)^n dt &= \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} v dv = \frac{4^n}{2n+1} \cdot \frac{1}{C_{2n}^n} \quad (\text{подстановка } x = \cos v), \\ \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^n} &= \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2} v dv = \frac{C_{2n-2}^{n-1}}{4^{n-1}} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (\text{подстановка } x = \operatorname{ctg} v). \end{aligned}$$

Из этих оценок

$$\sqrt{n} \frac{4^n}{2n+1} \cdot \frac{1}{C_{2n}^n} < I < \sqrt{n} \frac{C_{2n-2}^{n-1}}{4^{n-1}} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому I ограничена, а значит интеграл сходится. Если прям хочется узнать, куда он сходится, то по модулю проделанной работы это уже совсем несложно:

$$n \cdot \frac{4^{2n}}{(2n+1)^2} \cdot \frac{1}{(C_{2n}^n)^2} < I^2 < n^2 \cdot \frac{(C_{2n-2}^{n-1})^2}{(4^{n-1})^2} \cdot \frac{\pi^2}{4}.$$

Внимательно посмотрев на последние неравенства, можно заменить, что взяв предел при $n \rightarrow \infty$, по формуле Валлиса получим, что обе части стремятся к $\frac{\pi}{4}$, откуда $G^2 = \frac{\pi}{4}$. Получаем, что $G = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Возвращаясь к исходному интегралу, получаем ответ

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = 1.$$

Задачи 38, 39 — решить.

Задача 40°. Докажите, что для дискретной метрики выполнены все аксиомы метрики.

▷ Первые две аксиомы, очевидно, выполнены. Проверим неравенство треугольника. Если точки x, y и z совпадают, то оно выполнено. Иначе:

$$\rho(x, y) \leq 1 \leq \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

◀

Задача 41°. Докажите, что для парижской метрики выполнены все аксиомы метрики.

▷ Первые две аксиомы, очевидно, выполнены. Проверим неравенство треугольника. В случае совпадения некоторых точек среди x, y и z неравенство выполнено. Осталось рассмотреть случай, когда они попарно различны:

$$\rho(x, z) + \rho(z, y) = f(x) + \underbrace{2f(z)}_{\geq 0} + f(y) \geq f(x) + f(y) = \rho(x, y).$$

◀

Задача 42°. Докажите, что метрика Хэмминга удовлетворяет всем аксиомам метрики.

▷ Первые два свойства, очевидно, выполнены. Проверим неравенство треугольника.

$$\rho(x, z) + \rho(z, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^n |z_i - y_i| \geq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = \rho(x, y).$$

◀

Задача 43. Пусть ℓ_0 — множество ограниченных числовых последовательностей. Покажите, что функция

$$\rho(x, y) := \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i - y_i|, \quad x = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}, y = \{y_i\}_{i \in \mathbb{N}},$$

является метрикой в ℓ_0 .

▷ Первые две аксиомы очевидны, нужно проверить лишь неравенство треугольника. Оно выполнено просто потому что сумма супремумов не меньше супремума суммы и сумма модулей не меньше модуля суммы.

◀

Задача 44°. Докажите, что пара $(C[a; b], \|\cdot\|_1)$, где $\|f\|_1 := \max_{x \in [a; b]} |f(x)|$ является нормированным пространством. В качестве следствия докажите, что $(C[a; b], \rho)$, $\rho(f, g) := \max_{x \in [a; b]} |f(x) - g(x)|$ — метрическое пространство.

▷ Проверим все аксиомы метрики. Первые две, очевидно, выполнены. Осталось проверить неравенство треугольника. Рассмотрим функции $f, g \in C[a; b]$, и пусть $\max_{x \in [a; b]} |f(x)|$ достигается при $x = x_f$, $\max_{x \in [a; b]} |g(x)|$ достигается при $x = x_g$, а $\max_{x \in [a; b]} |f(x) + g(x)|$ достигается при $x = x_{fg}$. Теперь:

$$\|f\|_1 + \|g\|_1 = |f(x_f)| + |g(x_g)| \geq |f(x_{fg})| + |g(x_{fg})| \geq |f(x_{fg}) + g(x_{fg})| = \|f + g\|_1.$$

Таким образом, выполнено неравенство треугольника для нормы. Теперь заменим, что $\rho(f, g) = \|f - g\|_1$. Так что ρ является метрикой, индуцированной нормой $\|\cdot\|_1$.

◀

Делать задачи 45 — 47, честно говоря, уже лениво. Они очень похожи на уже решённые.

Задача 48. Пусть $\|\cdot\|_*$ и $\|\cdot\|_\star$ — произвольные нормы в пространстве \mathbb{R}^n . Докажите, что эти нормы эквивалентны, т. е. существуют $C_1, C_2 > 0$ такие, что

$$C_1 \|x\|_* \leq \|x\|_\star \leq C_2 \|x\|_* \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Используя последнюю формулу, покажите, что если $\{x^m\}$ — последовательность в \mathbb{R}^n и $a \in \mathbb{R}^n$, то $\lim_{m \rightarrow \infty} x^m = a$ в норме $\|\cdot\|_*$ тогда и только тогда, когда $\lim_{m \rightarrow \infty} x^m = a$ в норме $\|\cdot\|_*$.

▷ Доказательство подрезано у С. В. Шапошникова. Используются запретные знания вроде теоремы Больцано — Коши в \mathbb{R}^n , но это вроде не очень сложно. Достаточно доказать, что любая норма эквивалентна евклидовой норме $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. Возьмём стандартный базис $\{e_i\}_{i=1}^n$ в \mathbb{R}^n , тогда

$$\|x\|_* = \|x_1 e_1 + \dots + x_n e_n\|_* \leq |x_1| \|e_1\|_* + \dots + |x_n| \|e_n\|_* \leq \|x\|_2 (\underbrace{\|e_1\|_* + \dots + \|e_n\|_*}_C) = C \cdot \|x\|_2.$$

Итак, $\|x\|_* \leq C \|x\|_2$. Пусть $x^m \rightarrow a$ при $m \rightarrow \infty$. Запишем $\|x^m - a\|_* \leq C \|x^m - a\|_2 \rightarrow 0$. Отсюда видно, что если последовательность куда-то сходится в евклидовой норме, то она сходится туда же и в любой другой норме $\|\cdot\|_*$.

Предположим, что $\forall C > 0$ найдётся $x \in \mathbb{R}^n$ такой, что $\|x\|_2 > C \cdot \|x\|_*$. Иными словами, $\forall N \in \mathbb{N}$ найдётся $x_N \in \mathbb{R}^n$ такой, что $\|x_N\|_2 > N \cdot \|x_N\|_*$. От домножения на константу неравенство не меняется, так что можем считать, что $\|x_N\|_2 = 1$ и

$$\|x_N\|_* < \frac{1}{N}.$$

Отсюда, $\|x_N\| \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, так что $\{x_N\}_{N=1}^\infty \rightarrow 0$. По теореме Больцано выделим из ограниченной (в евклидовой норме) последовательности $\{x_N\}_{N=1}^\infty$ сходящуюся подпоследовательность $\{x_{N_k}\}_{k=1}^\infty$. Норма каждого члена этой подпоследовательности равна 1, а значит, и норма предела равна 1, что значит, что предел лежит на единичной сфере, т. е. никак не может совпадать с нулём. Однако в номер $\|\cdot\|_*$ эта подпоследовательность всё ещё сходится к нулю. Противоречие. ◀

Задача 49. В пространстве \mathbb{R}^n рассмотрим p -нормы. Найдите точные константы $C_1, C_2 > 0$ такие, что

$$C_1 \|x\|_{p_1} \leq \|x\|_{p_2} \leq C_2 \|x\|_{p_1} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Здесь $1 \leq p_1 < p_2$.

▷ За помощь в решении этой задачи спасибо Косте Зюбину. Достаточно подобрать точные константы C_1 и C_2 так, чтобы неравенство было выполнено для всех векторов x , удовлетворяющих равенству $\|x\|_{p_1} = 1$. Имеем:

$$1 = \|x\|_{p_1} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{p_1} \right)^{1/p_1} \Rightarrow 1 = \sum_{i=1}^n |x_i|^{p_1}.$$

Положим $y_i = |x_i|^{p_1}$, тогда $0 \leq y_i \leq 1$ и $\sum_{i=1}^n y_i = 1$. Имеем:

$$\|x\|_{p_2} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{p_2} \right)^{1/p_2} = \left(\sum_{i=1}^n y_i^{p_2/p_1} \right)^{1/p_2}.$$

С одной стороны, т. к. $\frac{p_2}{p_1} > 1$ и $y_i \leq 1$, то $y_i^{p_2/p_1} \leq y_i \Rightarrow \|x\|_{p_2} \leq \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^{1/p_2} = 1 = \|x\|_{p_1}$, причём равенство достигается при $x = (1, 0, \dots, 0)$. Отсюда $C_2 = 1$.

С другой стороны, по неравенству Гёльдера имеем:

$$1 = \sum_{i=1}^n y_i \cdot 1 \leq \left(\sum_{i=1}^n y_i^{p_2/p_1} \right)^{p_1/p_2} \cdot \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n 1^{\frac{p_2}{p_2-p_1}} \right)^{\frac{p_2-p_1}{p_2}}}_{n^{(p_2-p_1)/p_2}} \Rightarrow n^{\frac{p_1-p_2}{p_2}} \leq \left(\sum_{i=1}^n y_i^{p_2/p_1} \right)^{p_1/p_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \cdot n^{\frac{p_1-p_2}{p_1 p_2}} \leq \left(\sum_{i=1}^n y_i^{p_2/p_1} \right)^{1/p_2} = \|x\|_{p_2},$$

причём равенство достигается при $x = (n^{-1/p_1}, \dots, n^{-1/p_1}), i = 1, \dots, n$. ◀

Задача 50°. Постройте пример открытых множеств в метрическом пространстве, пересечение которых не является открытым.

▷ Можно взять любую бесконечную вложенную последовательность открытых шаров в стандартной метрике \mathbb{R}^n . Их пересечением является единственная точка, т. е. замкнутое множество. ◀

Задача 51. Докажите, что любое открытое множество на плоскости есть объединение не более чем счётного числа неперекрывающихся замкнутых квадратов.

▷ Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ — открытое множество. Рассмотрим целочисленную сетку на \mathbb{R}^2 . Для каждого квадрата Γ есть три случая:

1. $\Gamma \subset \mathbb{R}^2 \setminus G$: красим этот квадрат в белый цвет.
2. $\Gamma \subset G$, красим этот квадрат в чёрный цвет.
3. $\Gamma \cap G \neq \emptyset$ и $\Gamma \cap (\mathbb{R}^2 \setminus G) \neq \emptyset$. Тогда делим квадрат на 4 части средними линиями и повторим процедуру для меньших квадратов. В какой-то момент найдём квадратики, целиком лежащие в G (т. к. множество G открытое, то для любой точки $x \in G$ найдётся квадрат со стороной 2^{-n} , $n \in \mathbb{N}$, целиком содержащий её и целиком содержащийся в G). Красим их в чёрный цвет.

По построению, квадратики чёрного цвета образуют не более чем счётно и дизъюнктное покрытие множества G и в объединении дают его, чего мы и добивались. ◀

Задача 52. Рассмотрим метрические пространства (X, ρ) и (Y, ρ) , где $X \supset Y \neq \emptyset$, а метрика ρ на X индуцирует метрику на Y . Покажите, что множество $E \subset Y$ открыто в (Y, ρ) тогда и только тогда, когда существует открытое в (X, ρ) множество $G \subset X$ такое, что $E = G \cap Y$.

▷ \Rightarrow . Пусть множество $E \subset Y$ открыто в (Y, ρ) , то оно же открыто и в (X, ρ) . Так что можно взять $G = E$ (обозначения как в условии задачи).

\Leftarrow . Понятно, что если $B_r(a)$ — шар в X , то $B_r(a) \cap Y$ — шар в Y . Так что если $G \subset X$ открыто в X , то $G \cap Y$ открыто в Y , ведь для каждой точки $a \in G \cap Y$ есть окрестность $B_r(a) \cap Y \subset G \cap Y$ (где $B_r(a)$ — окрестность точки a в множестве G). ◀

Задача 53. Докажите, что замыкание \bar{E} любого множества E в метрическом пространстве есть наименьшее замкнутое множество, содержащее E . И если множество $F \supset E$ замкнуто, то $\bar{E} \subset F$.

▷ Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, и в нём найдётся замкнутое множество F , содержащее E . Докажем, что $\partial E \subset F$. Действительно, пусть a — граничная точка множества E . Тогда любая окрестность $U(a)$ содержит непустое пересечение как E , так и с $X \setminus E$; из первого, точка a точно не является внешней для F (т. к. в этом случае должна найтись окрестность, не пересекающаяся с E). Значит, она либо граничная, либо внутренняя для F , а из замкнутости F следует, что $a \in F$. Итак, $\bar{E} = \text{int } E \cup \partial E \subset F$. ◀

Задача 54°. Задана функция

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{при } x, y \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Докажите, что $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$, а оба повторных предела в точке $(0,0)$ не существуют.

▷ Для любого $\varepsilon > 0$ найдём $\delta > 0$ такое, что при $x^2 + y^2 < \delta^2$ выполнено $|f(x,y)| < \varepsilon$, $(x,y) \neq (0,0)$. Если $x \notin \mathbb{Q}$ или $y \notin \mathbb{Q}$, то последнее неравенство верно для любого $\varepsilon > 0$. Иначе

$$|f(x,y)| = |x+y| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Положив $\delta := \varepsilon\sqrt{2}$, получим $|f(x,y)| < \varepsilon$. Теперь покажем, что в точке $(0,0)$ повторных пределов не существует. Пусть $x \neq 0$, $x \in \mathbb{Q}$. Рассмотрим предел $f(x,y)$ при $y \rightarrow 0$ (другой аналогично). Если $y \notin \mathbb{Q}$, то предел равен 0, в ином случае предел будет равен x . Значит, повторного предела не существует. ◀

Задача 55°. Рассмотрим функцию

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

Покажите, что $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$, один из повторных пределов в точке $(0,0)$ тоже равен 0, а второй не существует.

▷ Для любого $\varepsilon > 0$ найдём $\delta > 0$ такое, что при $x^2 + y^2 < \delta^2$ выполнено $|f(x,y)| < \varepsilon$, $(x,y) \neq (0,0)$. При $y = 0$ последнее неравенство верно для любого $\varepsilon > 0$, так что считаем $y \neq 0$:

$$|f(x,y)| = \left| x \sin \frac{1}{y} \right| < \delta.$$

Последнее неравенство верно, т. к. $|x| < \delta$, $\sin \frac{1}{y} \leq 1$. Полагая $\delta := \varepsilon$, получаем требуемое.

Предела $\lim_{y \rightarrow 0} f(x,y)$ не существует, поэтому не существует и повторного предела $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x,y)$. Другой повторный предел равен 0.

Чтобы показать, что предел $\lim_{y \rightarrow 0} \sin \frac{1}{y}$ не существует, рассмотрим две последовательности:

$$x_1 = \frac{1}{2\pi n}, \quad y_n = \frac{1}{2\pi n + \pi/2}.$$

Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x_n} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{y_n}$. ◀

Задача 56. Докажите, что для функции $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ повторные пределы существуют и конечны, но не совпадают между собой. Покажите, что двойной предел при $(x,y) \rightarrow (0,0)$ не существует.

▷ В проколотовой окрестности точки $(0,0)$ функция $f(x,y)$ определена всюду.

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(x,y) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) = -1,$$

так что повторные пределы существуют и конечны, но не совпадают между собой. Если бы двойной предел существовал, то повторные пределы должны были быть равны, что неверно. ◀

Задача 57. Покажите, что для функции $f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ повторные пределы существуют, конечны, совпадают друг с другом, но не совпадают с двойным пределом при $(x,y) \rightarrow (0,0)$.

▷ В проколотовой окрестности нуля функция определена всюду, отсюда повторные пределы очевидно равны 0. Докажем, что двойного предела не существует, для чего воспользуемся критерием Коши. Положим $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Для произвольного $r > 0$ рассмотрим точки $(0, r/2)$ и $(r/2, r/2)$.

$$f(0, r/2) = 0, \quad f(r/2, r/2) = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, можно найти сколь угодно «маленькие» (в смысле нормы) точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , что $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| > \varepsilon$. ◀

Задача 58. Докажите следующее обобщение принципа непрерывности Кантора. Если в метрическом пространстве множество K компактно, а $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ — вложенная последовательность непустых замкнутых множеств, лежащих в K , то $\bigcap_{n=1}^\infty F_n \neq \emptyset$.

▷ Выберем в множестве F_1 точку $x_1 \notin F_2$, в множестве F_2 точку $x_2 \notin F_3$ и т. д. Ясно, что $\{x_i\}_{i=1}^\infty \subset B_1 \subset K$, а т. к. K — компакт, то из нашей последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{x_{i_j}\}_{j=1}^\infty \rightarrow x_0$. Все её члены, начиная с некоторого номера, попадут в множество F_k (для любого $k \in \mathbb{N}$) по построению последовательности. А т. к. множество F_k замкнуто, то $x_0 \in F_k$. Но тогда $x_0 \in \bigcap_{i=1}^\infty F_i$. ◀

Задачи 59, 60 — из критерия компактности в \mathbb{R}^n .

Задачи 61 — 64 — сложные для чтения.

Задача 65°. Докажите, что функция

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \wedge y \neq 0, \\ 0, & x = 0 \vee y = 0 \end{cases}$$

не является непрерывной в точке $(0, 0)$, но имеет в этой точке обе частные производные.

▷ Вначале докажем, что функция разрывна в точке $(0, 0)$. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$, рассмотрим $B_\delta(0, 0)$. Заметим, что

$$\left| f(0, 0) - f\left(\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right) \right| = 1,$$

так что для любого $\varepsilon < 1$ не существует такого $\delta > 0$, что выражение выше $< \varepsilon$.

Найдём частные производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0. \end{aligned}$$

Итого, обе частные производные существуют. ◀

Задача 66°. Постройте пример функции $f(x, y)$, у которой в точке $(0, 0)$ существуют обе частные производные, которая непрерывна, но не дифференцируема в этой точке.

▷ Возьмём функцию $f(x, y) := \min\{|x|, |y|\}$. Докажем непрерывность в точке $(0, 0)$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдём $\delta > 0$ такое, что из $x^2 + y^2 < \delta^2$ вытекает $|f(x, y) - f(0, 0)| < \varepsilon$.

$$|\min\{|x|, |y|\}| \leq |x| < \delta.$$

Положив $\delta := \varepsilon$, получаем требуемое. Частные производные обе нулевые (аналогично предыдущей задаче). Предположим, что $f \in D(0, 0)$. Тогда дифференциал $df(0, h) = 0$ (по необходимому условию дифференцируемости). Но

$$f(h) - f(0) = h \neq o(\|h\|), \quad \|h\| \rightarrow 0.$$

Значит, функция $f(x, y)$ не дифференцируема в нуле. ◀

Задача 67°. Установите, что функция $f(x, y)$ из задачи 65 имеет в точке $(0, 0)$ обе частные производные, но не существует производной в точке $(0, 0)$ по любому направлению, не параллельному осям координат.

▷ Пусть $\ell = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, причём $\alpha_i \neq \frac{\pi k}{2}$ при $k \in \mathbb{Z}$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h \cos \alpha, h \sin \alpha) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} = \infty,$$

значит, не существует $\frac{\partial f}{\partial \ell}(0, 0)$. ◀

Задача 68. Приведите пример всюду непрерывной функции $f(x, y)$, у которой в точке $(0, 0)$ существуют обе частные производные, но не существует производной в точке $(0, 0)$ по любому направлению, не параллельному осям координат.

▷ Пока неясно. ◀

Задача 69. Покажите, что функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|y|}{x} \sqrt{x^2 + y^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

имеет в точке $(0, 0)$ производные по всем направлениям, но она не является в этой точке непрерывной (и даже дифференцируемой).

▷ Докажем существование частных производных в точке $(0, 0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h^2} \sqrt{h^2 + 0^2} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0. \end{aligned}$$

Пусть $\ell = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, причём $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$ при $k \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{\partial f}{\partial \ell}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h \cos \alpha, h \sin \alpha) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h \sin \alpha|}{h^2 \cos \alpha} \sqrt{h^2} = \frac{|\sin \alpha|}{\cos \alpha}.$$

Докажем, что функция не является непрерывной в точке $(0, 0)$. Нам достаточно будет показать, что не существует предел $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$. Сделаем это через определение предела по Гейне.

Возьмём $\{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n})\}$ — две последовательности Гейне.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Таким образом, предела не существует, и функция f является разрывной в точке $(0, 0)$. ◀