Коллоквиум по математическому анализу

Лектор: Плотников М. Г. • Автор: Пшеничный Никита*, группа 109

1 курс • Весенний семестр 2024 г.

Аннотация

Обо всех ошибках и опечатках пишите мне, исправлю.

Программа коллоквиума

*`Telegram: @pshenikita. Последняя компиляция: 14 апреля 2024 г.`

1. Первообразная, обобщённая первообразная, неопределённый интеграл. Теоремы о множестве вех первообразных и обобщённых первообразных. Дифференцирование и интегрирование — обратные операции. Интегрирование — линейная операция

Определение 1. Пусть функция f определена на промежутке X. (Непрерывная) функция F на X называется *первообразной* (*обобщённой первообразной*) функции f, если $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in X$ (для всех $x \in X$, кроме конечного числа).

Примечание. Если функция f непрерывна на промежутке X, то на этом промежутке для неё существует первообразная. Если f кусочно-непрерывна на промежутке X, то на X для неё существует обобщённая первообразная. Доказано это будет позднее.

Утверждение 1. $F' \equiv 0$ на $X \iff F = const$.

Доказательство. $\Leftarrow$ Очевидно. $\Rightarrow$ По теореме Лагранжа

$$\forall x_1, x_2 \in X \ F(x_1) - F(x_2) = \underbrace{F'(c)}_{=0}(x_1 - x_2) = 0$$

для некоторого $c \in X$, значит, $F = const$. ■

Аналогичное утверждение верно и для обобщённой первообразной, достаточно провести вышеописанное доказательство для отрезков между выкинутыми точками. Оно всё ещё корректно, т. к. в теореме Лагранжа требуется дифференцируемость только во внутренних точках отрезка.

Теорема 1 (О множестве (обобщённых) первообразных)**.** Если F_1 и F_2 — (обобщённые) первообразные f на X, то $F_1 - F_2 = const$.

Доказательство. $(F_1 - F_2)' = f - f = 0$. ■

Произвольная первообразная функции f на промежутке X обозначается через $\int f(x)dx$. Если F — первообразная f, то пишут $\int f(x)dx = F(x) + C$. Первообразную $\int f(x)dx$ называют *неопределённым интегралом*.

Нетрудно заметить, что выполняется следующее:

$$\int dF = \int F'(x)dx = F(x) + C, \qquad d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

Поэтому говорят, что дифференцирвание и интегрирование — обратные операции. Известно, что дифференцирование — линейная операция, т. е.

$$d(\alpha F + \beta G) = \alpha \cdot dF + \beta \cdot dG.$$

Возьмём первообразную обеих частей, получим

$$\int (\alpha dF + \beta dG) = \int (\alpha f + \beta g)\, dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx.$$

Поэтому говорят, что интегрирование — линейная операция.

2. Вычисление первообразных непосредственным интегрированием, интегрированием по частям и заменой переменной. Примеры

Указанные ниже равенства верны на соответствующих областях определения (промежутках):

1. $\int 0dx = const.$
2. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\int e^x dx = e^x + C$
5. $\int \cos x dx = \sin x + C$
   $\int \sin x dx = -\cos x + C$
6. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
   $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
7. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
   $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$
8. Длинный логарифм:

$$\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm 1}\right|\right)' = \frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2\pm 1}}}{x+\sqrt{x^2\pm 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2\pm 1}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm 1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + C$$

Высокий логарифм:

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)} = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

По правилу Лейбница,

$$d(uv) = du \cdot v + u \cdot dv.$$

Найдём первообразную от обеих частей:

$$\int vdu + \int udv = uv + C \quad \text{или же} \quad \int u'vdx = uv - \int uv'dx.$$

Эта формула называется *формулой интегрирования по частям.*

По правилу дифференцированию сложной функции

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Найдём первообразную от обеих частей:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)}.$$

Читать последнее равенство также можно как $\int f(\varphi(t))\underbrace{\varphi'(t)dt}_{d\varphi} = \int f(\varphi)d\varphi.$

3. Интегральные суммы Римана. Интеграл Римана. Интегрируемость по Риману и ограниченность

Определение 1. Возьмём отрезок $[a;b]$ и построим конечный набор точек

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{m-1} < a_m = b,$$

тем самым разбив $[a;b]$ на попарно неперекрывающиеся отрезки $\Delta_i := [a_{i-1}; a_i]$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Набор $T = \{\Delta_i\}_{i=1}^m$ этих отрезков — *разбиение* отрезка $[a;b]$.

Определение 2. Добавим к T произвольный набор $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^m$ точек $\xi_i \in \Delta_i$ (*меток разбиения* T). *Отмеченное разбиение* $T\xi$ отрезка $[a;b]$ — это множество пар $\{(\Delta_i, \xi_i)\}_{i=1}^m$.

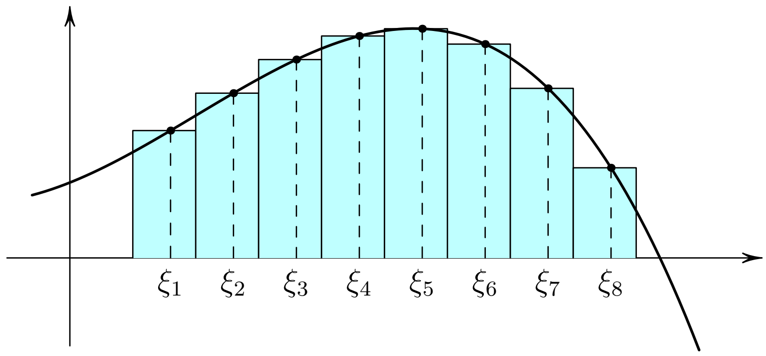
Определение 3. *Интегральная сумма* (*сумма Римана*) функции $f : [a;b] \to \mathbb{R}$, соответствующая отмеченному разбиению $T\xi = \{(\Delta_i, \xi_i)\}_{i=1}^m$ отрезка $[a;b]$, есть сумма

$$\mathcal{S}(f, T\xi) := \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)|\Delta_i|.$$

Геометрический смысл сумм Римана. Рассмотрим определённую на $[a;b]$ неотрицательную функцию f и криволинейную трапецию

$$A = A_{f,[a;b]} := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \in [a;b] \wedge y \in [0; f(x)]\right\} \subset \mathbb{R}^2,$$

связанную с графиком функции f. Тогда интегральная сумма $\mathcal{S}(f, T\xi)$ совпадает с площадью объединения прямоугольников, построенных на отрезка разбиения T как на основаниях и имеющих высоту $f(\xi_i)$:



Определение 4. *Диаметр* разбиения $T = \{\Delta_i\}_{i=1}^m$ — число

$$d(T) := \max_{i=1,\dots,m} |\Delta_i|.$$

Определение 5. Если $d(T) < \delta$, то разбиение T назовём *δ-разбиением.*

Определение 6 (Интеграл Римана)**.** Функция $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ называется *интегрируемой по Риману* на отрезке $[a;b]$ (пишем $f \in R[a;b]$), если существует число $I \in \mathbb{R}$ такое, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что для любого δ-разбиения $T\xi = \{(\Delta_i, \xi_i)\}_{i=1}^m$ отрезка $[a;b]$ выполнено неравенство

$$|\mathcal{S}(f, T\xi) - I| = \left|\sum_{i=1}^{m} f(\xi)|\Delta_i| - I\right| < \varepsilon.$$

Число I называют *интегралом Римана* функции f по отрезку $[a;b]$, обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Следующая задача даёт способ вычисления интеграла Римана:

Задача 1. (A) Пусть $f \in R[a;b]$, $\{T^n\xi^n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность отмеченных разбиений отрезка $[a;b]$, причём $d(T^n) \to 0$ при $n \to \infty$. Докажите, что

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \mathcal{S}(f, T^n\xi^n).$$

(Б) Разобъём отрезок $[a;b]$ на n равных отрезков $\Delta_j^{(n)}$, $1 \leqslant j \leqslant n$ длины $(b-a)/n$, а затем в каждом из них произвольным образом выберем метку $\xi_j^{(n)}$. Покажите, что

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j^{(n)}).$$

$\triangleright$ (А) По определению предела последовательности $d(T^n)$,

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\mathcal{N}_\varepsilon : (n > \mathcal{N}_\varepsilon) \Rightarrow (|d(T^n)| < \varepsilon) \qquad (*)$$

По определению интеграла Римана

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : (d(T) < \delta) \Rightarrow (|\mathcal{S}(f, T\xi) - I| < \varepsilon)\,.$$

Перепишем последнее высказывание с учётом $(*)$:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon := \mathcal{N}_\varepsilon : (n > N_\varepsilon) \Rightarrow (|\mathcal{S}(f, T\xi) - I| < \varepsilon).$$

Значит, утверждение теоремы верно по опредлению предела последовательности.

(Б) По предыдущему пункту

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \mathcal{S}(f, T^n\xi^n) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j^{(n)})|\Delta_j^{(n)}|\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j^{(n)}).$$

$\blacktriangleleft$

Предложение 1. Если f интегрируема по Риману на отрезке $[a;b]$, то она ограничена на $[a;b]$.

Доказательство. Допустим, $f \in R[a;b]$, но $f \notin B[a;b]$. Возьмём любые $C > 0$ и разбиение $T = \{\Delta_i\}$. Тогда f не ограничена на Δ_i по крайней мере для одного i $(=: i_0)$. При всех $i \neq i_0$ расставим метки $\xi_i \in \Delta_i$ произвольным образом, а метку $\xi_{i_0} \in \Delta_{i_0}$ выберем так, что

$$|\mathcal{S}(f, T\xi)| = \left|\sum_i f(\xi_i)\,|\Delta_i|\right| \geqslant |f(\xi_{i_0})\,|\Delta_{i_0}|| - \left|\sum_{i\neq i_0} f(\xi_i)\,|\Delta_i|\right| > C.$$

Это возможно благодаря неограниченности f на отрезке Δ_{i_0}. Итак, для всех разбиений T имеем $\sup\limits_\xi |\mathcal{S}(f, T\xi)| = \infty$, поэтому ни для какого $\varepsilon > 0$ мы не сможем найти $\delta > 0$ такое, что неравенство

$$\left|\mathcal{S}(f, T\xi) - \int\limits_a^b f(x)dx\right| < \varepsilon$$

выполнялось бы для всех отмеченных δ-разбиений $T\xi$, что противоречит тому, что $f \in R[a;b]$. $\blacksquare$

4. Суммы Дарбу. Интеграл Дарбу

До конца пункта считаем, что задана функция $f : [a;b] \to \mathbb{R}$.

Определение 1. Пусть $T = \{\Delta_i\}_{i=1}^m$ — разбиение отрезка $[a;b]$,

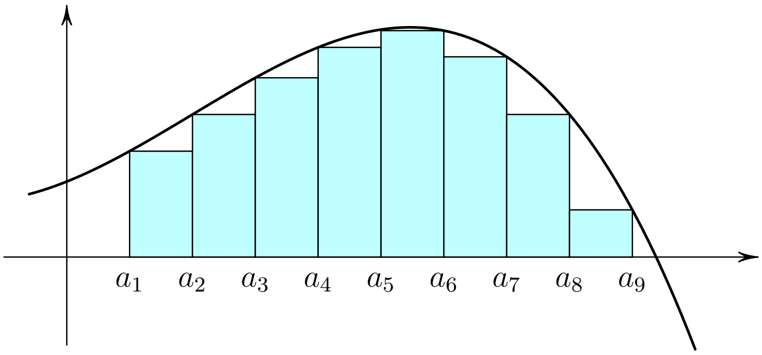
$$m_i := \inf_{x\in\Delta_i} f(x), \quad M_i := \sup_{x\in\Delta_i} f(x).$$

Величины

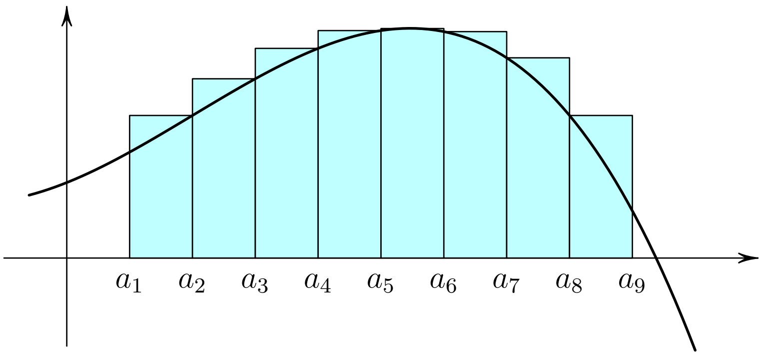
$$s(f,T) := \sum_{i=1}^{m} m_i\,|\Delta_i| \quad \text{и} \quad S(f,T) := \sum_{i=1}^{m} M_i\,|\Delta_i|$$

— *нижняя* и *верхняя сумма Дарбу* функции f для разбиения T (соответственно).

Геометрический смысл сумм Дарбу. Пусть функция $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ положительна (не обязательно непрерывна), $A = A_{f,[a;b]}$ — криволинейная трапеция под её графиком. Тогда нижняя сумма Дарбу $s(f,T)$ совпадает с точной верхней гранью площадей T-фигур, вписанных в A.



В свою очередь, верхняя сумма Дарбу $S(f,T)$ совпадает с точной нижней гранью площадей T-фигур, описанных над A.



Часто приходится рассматривать *разность Дарбу* $\omega(f,T) := S(f,T) - s(f,T)$. Геометрически величина $\omega(f,T)$ для непрерывной функции есть площадь «зазора» между наименьшей описанной над A и наибольшей вписанной в A фигурами.

Выразим разность Дарбу $\omega(f,T)$ через колебания функции f на отрезках разбиения $T = \{\Delta_i\}$:

$$\omega(f,T) = S(f,T) - s(f,T) = \sum_i \left(\sup_{\Delta_i} f - \inf_{\Delta_i} f\right)|\Delta_i| = \sum_i \omega(f,T)\,|\Delta_i|\,.$$

Установим связь между суммами Дарбу и Римана.

Лемма 1. Для любого разбиения T имеем

$$s(f,T) = \inf_{\xi} \mathcal{S}(f,T\xi), \quad S(f,T) = \sup_{\xi} \mathcal{S}(f,T\xi)$$

(точные грани берутся по всем наборам ξ меток разбиения T).

Доказательство. Пусть $T = \{\Delta_i\}_{i=1}^m$. Поскольку $m_i \leqslant f(\xi_i)$ для любых $\xi_i \in \Delta_i$, то

$$s(f,T) = \sum_i m_i\,|\Delta_i| \leqslant \mathcal{S}(f,T\xi)$$

для каждого набора $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^m$ меток разбиения T. С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\xi_i \in \Delta_i$, что $f(\xi_i)\,|\Delta_i| < m_i\,|\Delta_i| + \frac{\varepsilon}{m}$. Тогда соответствующая интегральная сумма

$$\mathcal{S}(f, T\xi) = \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\,|\Delta_i| < \sum_{i=1}^{m} \Big(m_i\,|\Delta_i| + \frac{\varepsilon}{m}\Big) = s(f,T) + \varepsilon.$$

Отсюда следует, что $s(f,T) = \sup\limits_{\xi} \mathcal{S}(f, T\xi)$. Вторая формула доказывается аналогично. ■

Определение 2. Пусть даны разбиения T_1 и T_2. Тогда говорят, что T_1 *мельче* T_2 (и пишут $T_1 \leqslant T_2$), если для любого $\Delta \in T_1$ найдётся $\Theta \in T_2$ такой, что $\Delta \subseteq \Theta$. Иными словами, T_1 получено из T_2 добавлением ещё нескольких точек разбиения.

Введённое выше отношение транзитивно. В самом делем, пусть $T_1 \leqslant T_2$ и $T_2 \leqslant T_3$, пусть также T_1, T_2 и T_3 определяются наборами точек соответственно A_1, A_2 и A_3. Тогда $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3$, откуда $A_1 \supseteq A_3$, т. е. $T_1 \leqslant T_3$.

Лемма 2. Если $T_1 \leqslant T_2$, то

$$s(f,T_1) \geqslant s(f,T_2), \quad S(f,T_1) \leqslant S(f,T_2), \quad \omega(f,T_1) \leqslant \omega(f,T_2).$$

Иными словами, при измельчении разбиения нижние суммы Дарбу не убывают, а верхние суммы Дарбу и разности Дарбу не возрастают.

Доказательство. Достаточно показать утверждение в случае, когда T_1 получается из $T_2 = \{\Delta_i\}_{i=1}^m$ путём разбиения одного из отрезков Δ_i ($=: \Delta_{i_0}$) на два неперекрывающихся отрезка ($=: \Delta'$ и $=: \Delta''$). Имеем:

$$\begin{aligned} S(f,T_2) = \sum_{i=1}^{m} \sup_{\Delta_i} f \cdot |\Delta_i| &= \sum_{i \neq i_0} \sup_{\Delta_i} f \cdot |\Delta_i| + \sup_{\Delta_{i_0}} f \cdot |\Delta_{i_0}| = \\ &= \sum_{i \neq i_0} \sup_{\Delta_i} f \cdot |\Delta_i| + \sup_{\Delta_{i_0}} f \cdot \left|\Delta'\right| + \sup_{\Delta_{i_0}} f \cdot \left|\Delta''\right| \geqslant \\ &\geqslant \sum_{i \neq i_0} \sup_{\Delta_i} f \cdot |\Delta_i| + \sup_{\Delta'} f \cdot \left|\Delta'\right| + \sup_{\Delta''} f \cdot \left|\Delta''\right| = S(f,T_1). \end{aligned}$$

Второе равенство доказывается аналогично, а третье есть прямое следствие первых двух. ■

Определение 3. Пусть даны разбиения $T_1 = \{\Delta_i\}$ и $T_2 = \{\Theta_j\}$. Разбиение

$$T_1 \cap T_2 := \{\Delta_i \cap \Theta_j \text{ с непустой внутренностью}\}$$

называется *пересечением* разбиений T_1 и T_2.

Очевидно, $T_1 \cap T_2 \leqslant T_1$ и $T_1 \cap T_2 \leqslant T_2$.

Лемма 3. Для любых разбиений T_1 и T_2 выполнено $s(f,T_1) \leqslant S(f,T_2)$.

Доказательство. Лемма 2 даёт $s(f,T_1) \leqslant s(f,T_1 \cap T_2) \leqslant S(f,T_1 \cap T_2) \leqslant S(f,T_2)$. ■

Определение 4 (Интеграл Дарбу)**.** Величины

$$(D)\underline{\int_a^b} f(x)dx := \sup_T s(f,T) \quad \text{и} \quad (D)\overline{\int_a^b} f(x)dx := \inf_T S(f,T)$$

называются соответственно *нижним* и *верхним интегралами Дарбу* функции f (по отрезку $[a;b]$). Если нижний и верхний интегралы Дарбу совпадают, то их общее значение назовём *интегралом Дарбу* функции f по отрезку $[a;b]$ и обозначим $(D)\int\limits_a^b f(x)dx$.

Из леммы 3 видно, что $(D)\underline{\int\limits_a^b} f(x)dx \leqslant (D)\overline{\int\limits_a^b} f(x)dx$.

5. Колебания функции на множестве

Определение 1. *Колебание* функции $f : X \to \mathbb{R}$ *на множестве* $A \subset X$ — величина

$$\omega(f, A) := \sup_{x_1, x_2 \in A} |f(x_1) - f(x_2)|.$$

Если f ограничена на A, то величина $\omega(f, A)$ конечна. В самом деле, ограниченность означает существование $C > 0$ такого, что $|f(x)| \leqslant C$ для любого $x \in A$. В этом случае

$$\forall x_1, x_2 \in A \ \ |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |f(x_1)| + |f(x_2)| \leqslant 2C \Rightarrow \omega(f, A) \leqslant 2C.$$

Напротив, если f не ограничена на A, то $\omega(f, A) = +\infty$, т. к. можно, фиксировав x_2, за счёт выбора x_1 сделать величину $|f(x_1) - f(x_2)|$ больше любого наперёд заданного C.

Предложение 1. Если f ограничена на множестве A, то

$$\omega(f, A) = \sup_{x \in A} f(x) - \inf_{x \in A} f(x). \qquad (*)$$

Доказательство. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Согласно определению sup и inf найдутся такие $x_1, x_2 \in A$, что

$$\sup_{x \in A} f(x) - \varepsilon < f(x_1), \quad f(x_2) < \inf_{x \in A} f(x) + \varepsilon.$$

Из определения колебания функции на множестве вытекает существование $x_3, x_4 \in A$, для которых $\omega(f, A) - \varepsilon < |f(x_3) - f(x_4)|$. Не ограничивая общности, считаем $f(x_3) \geqslant f(x_4)$, так что

$$\omega(f, A) - \varepsilon < f(x_3) - f(x_4).$$

Получаем:

$$\omega(f, A) - \varepsilon < f(x_3) - f(x_4) \leqslant \sup_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x) < f(x_1) - f(x_2) + 2\varepsilon \leqslant \omega(f, A) + 2\varepsilon,$$

откуда $\omega(f, A) - \varepsilon < \sup\limits_{x \in X} f(x) - \inf\limits_{x \in X} f(x) < \omega(f, A) + 2\varepsilon$. Т. к. $\varepsilon > 0$ выбиралось произвольно, то имеет место $(*)$. ■

Предложение 2 (Свойства колебания)**.** Пусть $|f(x)| \leqslant M$ и $|g(x)| \leqslant M$ для некоторого $M > 0$ и всех $x \in [a; b]$, а $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда

1. $\omega(|f|, A) \leqslant \omega(f, A)$;
2. $\omega(fg, A) \leqslant M\,(\omega(f, A) + \omega(g, A))$;
3. $\omega(\alpha f, A) = |\alpha|\,\omega(f, A)$;
4. $\omega(f + g, A) \leqslant \omega(f, A) + \omega(g, A)$;
5. $\omega(\alpha f + \beta g) \leqslant |\alpha|\,\omega(f, A) + |\beta|\,\omega(g, A)$.

Доказательство.

1. Проверяем:

$$||f(x_1)| - |f(x_2)|| \leqslant |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \omega(f, A), \qquad x_1, x_2 \in A;$$
$$\omega(|f|, A) = \sup_{x_1, x_2 \in A} ||f(x_1)| - |f(x_2)|| \leqslant \omega(f, A).$$

2. Проверяем:

$$|f(x_1)g(x_1) - f(x_2)g(x_2)| = |f(x_1)(g(x_1) - g(x_2)) + g(x_2)(f(x_1) - f(x_2))| \leqslant$$
$$M\,|g(x_1) - g(x_2)| + M\,|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant M(\omega(f, A) + \omega(g, A)), \quad x_1, x_2 \in A;$$
$$\omega(fg, A) = \sup_{x_1, x_2 \in A} |f(x_1)g(x_1) - f(x_2)g(x_2)| \leqslant M(\omega(f, A) + \omega(g, A)).$$

3. Если $\alpha = 0$, обе части неравенства равны нулю, и всё доказано. Если $\alpha \neq 0$,

$$|\alpha f(x_1) - \alpha f(x_2)| = |\alpha|\,|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |\alpha|\,\omega(f, A), \quad x_1, x_2 \in A$$
$$\omega(\alpha f, A) = \sup_{x_1, x_2 \in A} |\alpha f(x_1) - \alpha f(x_2)| \leqslant |\alpha|\,\omega(f, A)$$

Теперь возьмём любое $\varepsilon > 0$ и отыщем $x_1, x_2 \in A$ такие, что

$$\omega(f, A) < |f(x_1) - f(x_2)| + \frac{\varepsilon}{|\alpha|}.$$

Тогда

$$|\alpha|\,\omega(f, A) < |\alpha f(x_1) - \alpha f(x_2)| + \varepsilon \leqslant \omega(\alpha f, A) + \varepsilon. \tag{$\star$}$$

Из $(*)$ и $(\star)$ вытекает, с учётом произвольности $\varepsilon > 0$, требуемое равенство.

4. Проверяем:

$$|(f + g)(x_1) - (f + g)(x_2)| \leqslant |f(x_1) - f(x_2)| + |g(x_1) - g(x_2)| \leqslant$$
$$\leqslant \omega(f, A) + \omega(g, A), \quad x_1, x_2 \in A$$
$$\omega(f + g, A) = \sup_{x_1, x_2 \in A} |(f + g)(x_1) - (f + g)(x_2)| \leqslant \omega(f, A) + \omega(g, A).$$

5. Следствие п. 3 и 4

■

6. Теорема Дарбу. Критерий Дарбу интегрируемости по Риману

Теорема 1 (Дарбу). Пусть функция $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ ограничена. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. Существует $(R)\int\limits_a^b f(x)dx = I$.
2. Существует $(D)\int\limits_a^b f(x)dx = I$.
3. Для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся разбиение $\widetilde{T}$ отрезка $[a; b]$ такое, что $\omega(f, \widetilde{T}) < \varepsilon$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Допустим, существует $(R)\int\limits_a^b f(x)dx = I$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что соотношение

$$I - \varepsilon < \mathcal{S}(f, T\xi) < I + \varepsilon$$

выполнено для каждого δ-разбиения и набора ξ меток к нему. Тогда

$$I - \varepsilon \leqslant \inf_{\xi} \mathcal{S}(f, T\xi) = s(f, T) \leqslant S(f, T) = \sup_{\xi} \mathcal{S}(f, T\xi) \leqslant I + \varepsilon,$$

$$I - \varepsilon \leqslant s(f, T) \leqslant S(f, T) \leqslant I + \varepsilon; \quad I - \varepsilon \leqslant (D)\underline{\int\limits_a^b} f(x)dx \leqslant (D)\overline{\int\limits_a^b} f(x)dx \leqslant I + \varepsilon.$$

Т. к. $\varepsilon > 0$ выбиралось произвольно, то $I = (D)\underline{\int_a^b} f(x)dx = (D)\overline{\int_a^b} f(x)dx = (D)\int_a^b f(x)dx$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Допустим, то существует $(D)\int_a^b f(x)dx = I$, т. е. $(D)\underline{\int_a^b} f(x)dx = (D)\overline{\int_a^b} f(x)dx$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся разбиения T_1 и T_2 такие, что

$$S(f,T_2) - \frac{\varepsilon}{2} < I < s(f,T_1) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если $\widetilde{T} := T_1 \cap T_2$, то $\widetilde{T} \leqslant T_1, T_2$ и (по лемме 2)

$$\omega(f,\widetilde{T}) = S(f,\widetilde{T}) - s(f,\widetilde{T}) \leqslant S(f,T_2) - s(f,T_1) < \varepsilon.$$

(3) $\Rightarrow$ (1). Т. к. функция $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ ограничена, найдётся $M > 0$ такое, что $|f(x)| \leqslant M$ для всех $x \in [a;b]$. Выберем любое $\varepsilon > 0$ и найдём разбиение $\widetilde{T} = \{[a_{i-1},a_i]\}_{i=1}^m$ отрезка $[a;b]$ такое, что $\omega(f,\widetilde{T}) < \varepsilon$. Положим $\delta := \varepsilon/m$ и рассмотрим все концы, исключая крайние, отрезков из $\widetilde{T}$, т. е. точки $a_1,\ldots,a_{m-1}$. Окружим каждую из них δ-окрестностью и 2δ-окрестностью и возьмём объединения

$$A := \bigcup_{i=1}^{m-1}(a_i-\delta, a_i+\delta), \quad B := \bigcup_{i=1}^{m-1}(a_i-2\delta, a_i+2\delta),$$

Пусть $T\xi = \{(\Delta_j,\xi_j)\}$ — произвольное отмеченное δ-разбиение отрезка $[a;b]$. Если $\xi_j \in A$, то $\Delta_j \subset B$. Если же $\xi_j \in [a;b]\setminus A$, то $\Delta_j \subset [a_{i-1},a_i]$ для некоторого i. Имеем:

$$\omega(f,T) = \sum_j \omega(f,\Delta_j)\,|\Delta_j| = \sum_{\xi_j\in A}\omega(f,\Delta_j)\,|\Delta_j| + \sum_{\xi_j\notin A}\omega(f,\Delta_j)\,|\Delta_j| \leqslant$$
$$\leqslant 2M\cdot 4\delta m + \sum_{i=1}^m \sum_{\Delta_j\subset[a_{i-1},a_i]}\omega(f,\Delta_j)\,|\Delta_j| \leqslant 8M\varepsilon + \sum_{i=1}^m \omega(f,[a_{i-1},a_i]) \sum_{\Delta_j\subset[a_{i-1},a_i]}|\Delta_j| \leqslant$$
$$\leqslant 8M\varepsilon + \sum_{i=1}^m \omega(f,[a_{i-1},a_i])(a_i-a_{i-1}) \leqslant 8M\varepsilon + \omega(f,\widetilde{T}) < \varepsilon C, \quad C := 8M+1.$$

Таким образом, $\omega(f,T) < \varepsilon C$. Положим $I := (D)\underline{\int_a^b} f(x)dx$ (можно взять и верхний). Имеем:

$$s(f,T) \leqslant \mathcal{S}(f,T\xi) \leqslant S(f,T), \quad s(f,T) \leqslant I \leqslant (D)\overline{\int_a^b} f(x)dx \leqslant S(f,T).$$

Отсюда $|\mathcal{S}(f,T\xi) - I| < S(f,T) - s(f,T) = \omega(f,T) < \varepsilon C$. Т. к. $\varepsilon > 0$ и отмеченное δ-разбиение $T\xi$ произвольные, а $C > 0$ от них не зависит, то $f \in R[a;b]$ и $(R)\int_a^b f(x)dx = I$. ■

Следствие 1 (Критерий Дарбу интегрируемости по Риману)**.** Если функция $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ ограничена, то $\exists (R)\int_a^b f(x)dx = I \Leftrightarrow \exists (D)\int_a^b f(x)dx = I$.

Утверждение 1. Функция Дирихле

$$\mathrm{Dir}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{если } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

не интегрируема по Риману ни на каком отрезке $[a;b]$.

Доказательство. В самом деле, возьмём произвольное разбиение $T = \{\Delta_i\}$ отрезка $[a;b]$. В каждом отрезке Δ_i есть точки как из $\mathbb{Q}$, так и не из $\mathbb{Q}$. Следовательно,

$$s(\mathrm{Dir},T) = \sum_i \inf_{\Delta_i} \mathrm{Dir} \cdot |\Delta_i| = 0, \quad S(\mathrm{Dir},T) = \sum_i \sup_{\Delta_i} \mathrm{Dir} \cdot |\Delta_i| = \sum_i 1 \cdot |\Delta_i| = b - a.$$

Значит, $(D)\underline{\int_a^b} \mathrm{Dir} = 0$ и $(D)\overline{\int_a^b} \mathrm{Dir} = b - a$. Несовпадение интегралов даёт $f \notin R[a;b]$. ■

Задача 2. Докажите, что функция Римана

$$\mathrm{Riem}(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } x = \frac{m}{n},\ \frac{m}{n} \text{ — несократимая дробь}, \\ 0, & \text{если } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

интегрируема по Риману на каждом отрезке $[a;b]$ и вычислите $(R)\int_a^b \mathrm{Riem}(x)dx$.

▷ Пока не решил, но знаю правильный ответ — интеграл функции Римана равен 0 на любом отрезке. ◀

7. Интегрируемость по Риману непрерывных и монотонных функций. Геометрический смысл интегралов Дарбу и Римана

Утверждение 1. Если функция $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ имеет конечное число точек разрыва и ограничена, она интегрируема по Риману на этом отрезке.

Доказательство. Возьмём $\varepsilon > 0$ и такое $C > 0$, что $|f(x)| \leqslant C$ для всех $x \in [a;b]$ (существует из ограниченности f). Пользуясь тем, что функция f имеет конечное число точек разрыва, построим разбиение $T = T^1 \sqcup T^2$ отрезка $[a;b]$ так, что сумма длин отрезков $\Delta_i \in T^1$ меньше $\frac{\varepsilon}{4C}$, а на всех отрезках $\Delta_i \in T^2$ функция f непрерывна. Последнее означает, что f равномерно непрерывна на Δ_i, поэтому найдётся $\delta > 0$ такое, что $(|x - z| < \delta) \wedge (x, z \in \Delta_i) \Rightarrow |f(x) - f(z)| < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Т. к. набор T^2 конечен, $\delta > 0$ можно выбрать общим для всех $\Delta_i \in T^2$ (взяв $\delta := \min\limits_i \Delta_i$). Имеем:

$$S(f,T) - s(f,T) = S(f,T^1) - s(f,T^1) + S(f,T^2) - s(f,T^2) = \sum_{\Delta_i \in T^1} \left(\sup_{\Delta_i} f - \inf_{\Delta_i} f \right) |\Delta_i| +$$
$$+ \sum_{\Delta_i \in T^2} \left(\sup_{\Delta_i} f - \inf_{\Delta_i} f \right) |\Delta_i| < 2C \sum_{\Delta_i \in T^1} |\Delta_i| + \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{\Delta_i \in T^2} |\Delta_i| < \varepsilon.$$

■

Следствие 1. Если функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$ функция f интегрируема по Риману на этом отрезке.

Утверждение 2. Любая монотонная функция на отрезке $[a;b]$ функция f интегрируема по Риману на этом $[a;b]$.

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что f не постоянна и не убывает на $[a;b]$. Очевидно, что f ограничена на $[a;b]$. Далее, возьмём любое $\varepsilon > 0$, положим $\delta := \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$ и рассмотрим произвольное δ-разбиение $T = \{\Delta_i = [a_{i-1}; a_i]\}_{i=1}^m$ отрезка $[a;b]$. Пользуясь неубыванием

f, оценим величину $\omega(f,T)$:

$$\omega(f,T)=\sum_{i=1}^{m}\left(\sup_{\Delta_i} f-\inf_{\Delta_i} f\right)|\Delta_i| \overset{f \text{ не убывает}}{=\!=} \sum_{i=1}^{m}\left(f(a_i)-f(a_{i-1})\right)|\Delta_i|<$$

$$<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\sum_{i=1}^{m}\left(f(a_i)-f(a_{i-1})\right)=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\left(f(b)-f(a)\right)=\varepsilon.$$

■

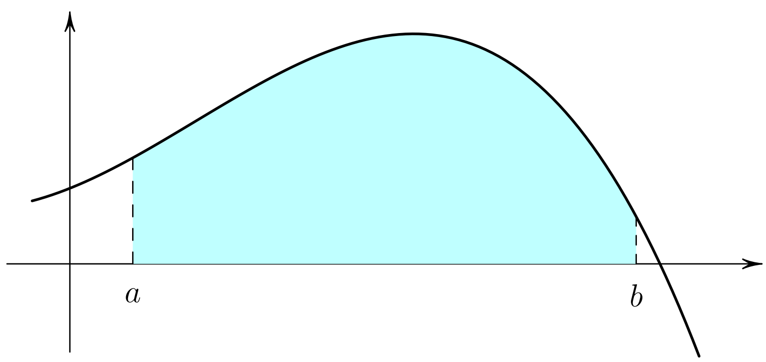
Геометрический смысл интегралов Дарбу и Римана. Пусть функция $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ положительна, A — криволинейная трапеция под её графиком. Тогда нижний интеграл Дарбу совпадает с точной верхней гранью T-фигур, вписанных в A, а верхний интеграл Дарбу — с точной нижней гранью T-фигур, описанных над A. Пусть функция $f\in R[a;b]$ положительна, $A=A(f,[a;b])$ — криволинейная трапеция под её графиком, $S(A)$ — площадь этой трапеции. Тогда

$$s(f,T)\leqslant S(A)\leqslant S(f,T)$$

для любого разбиения T, следовательно,

$$(D)\underline{\int_a^b} f\leqslant S(A)\leqslant (D)\overline{\int_a^b} f.$$

Т. к. (критерий Дарбу) верхний и нижний интегралы равны, то $S(A)=\int\limits_a^b f(x)dx$.



8. Свойства интеграла Римана (единственность, линейность, интеграл от постоянной функции, интегрирование неравенств, интегрируемость модуля функции и произведения функций)

Теорема 1 (Единственность интеграла)**.** Если $(R)\int\limits_a^b f(x)dx$ существует, то он единственен.

Доказательство. Если $(R)\int\limits_a^b f(x)dx$ существует, он совпадает с интегралом Дарбу $(D)\int\limits_a^b f(x)dx$, а последний определяется однозначно. ■

Теорема 2 (О линейности интеграла)**.** Если $f,g\in R[a;b]$ и $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, то $\alpha f+\beta g\in R[a;b]$ и

$$\int_a^b\left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right)dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Для каждого разбиения $T\xi = \{(\Delta_i, \xi_i)\}$ отрезка $[a;b]$ имеем:

$$\mathcal{S}(\alpha f + \beta g, T\xi) = \sum_i (\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i)) |\Delta_i| = \alpha \sum_i f(\xi_i) |\Delta_i| + \beta \sum_i g(\xi_i) |\Delta_i| =$$
$$= \alpha \mathcal{S}(f, T\xi) + \beta \mathcal{S}(g, T\xi).$$

Пусть $\varepsilon > 0$, $I_f := \int\limits_a^b f$, $I_g := \int\limits_a^b g$. По определению, существует $\delta > 0$ такое, что

$$|\mathcal{S}(f, T\xi) - I_f| < \varepsilon \text{ и } |\mathcal{S}(g, T\xi) - I_g| < \varepsilon$$

для всех отмеченных δ-разбиений $T\xi$ отрезка $[a;b]$. Для тех же $T\xi$

$$|\mathcal{S}(\alpha f + \beta g, T\xi) - (\alpha I_f + \beta I_g)| = |\alpha \mathcal{S}(f, T\xi) + \beta \mathcal{S}(g, T\xi) - (\alpha I_f + \beta I_g)| \leqslant$$
$$\leqslant |\alpha| \, |\mathcal{S}(f, T\xi) - I_f| + |\beta| \, |\mathcal{S}(g, T\xi) - I_g| < (|\alpha| + |\beta|) \, \varepsilon.$$

Это и значит, что утверждение теоремы верно. ∎

Утверждение 1 (Интеграл константы)**.** $\int\limits_a^b C dx = C(b-a)$.

Доказательство. Если $F(x) \equiv C$ на $[a;b]$, то $\mathcal{S}(f, T\xi) = \sum\limits_{T\xi} C \, |\Delta_i| = C(b-a)$ для каждого отмеченного разбиения $T\xi = \{(\Delta_i, \xi_i)\}$. ∎

Теорема 3 (Об интегрировании неравенств)**.** Если $f, g \in R[a;b]$ и $f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in [a;b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)dx$.

Доказательство. Если $f \leqslant g$ на $[a;b]$, на каждом отмеченном разбиении $T\xi = \{(\Delta_i, \xi_i)\}$ выполнено

$$\mathcal{S}(f, T\xi) = \sum_{T\xi} f(\xi_i) \, |\Delta_i| \leqslant \sum_{T\xi} g(\xi_i) \, |\Delta_i| = \mathcal{S}(g, T\xi).$$

Отсюда $s(f, T) \leqslant s(g, T)$, что влечёт $(D) \underline{\int\limits_a^b} f \leqslant (D) \underline{\int\limits_a^b} g$. По теореме Дарбу нижние интегралы Дарбу можно заменить на интегралы Римана. Это даёт нужное равенство. ∎

Теорема 4 (Об интегрируемости модуля функции)**.** Если $f \in R[a;b]$, то $|f| \in R[a;b]$ и

$$\left| \int\limits_a^b f(x)dx \right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)| \, dx.$$

Доказательство. Если $f \in R[a;b]$, то f ограничена на $[a;b]$, $|f|$ тоже. По теореме Дарбу для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое разбиение $T = \{\Delta_i\}$ такое, что $\omega(f, T) < \varepsilon$. Тогда

$$\omega(|f|, T) = \sum_i \omega(|f|, \Delta_i) \, |\Delta_i| \leqslant \sum_i \omega(f, \Delta_i) \, |\Delta_i| = \omega(f, T) < \varepsilon.$$

Неравенство выполнено в силу свойств колебаний функции. Применяя в обратную сторону теорему Дарбу, получаем $|f| \in R[a;b]$. Линейность даёт $-|f| \in R[a;b]$. Интегрируя неравенство $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$, получим

$$-\int\limits_a^b |f| \leqslant \int\limits_a^b f \leqslant \int\limits_a^b |f|,$$

что и есть утверждение теоремы. ■

Теорема 5 (Об интегрируемости произведения)**.** Пусть $f, g \in R[a;b]$, тогда $fg \in R[a;b]$.

Доказательство. Интегрируемость влечёт ограниченность: $|f(x)| \leqslant M$ и $|g(x)| \leqslant M$ для некоторого $M > 0$ и всех $x \in [a;b]$. Из интегрируемости также вытекает (теорема Дарбу), что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся разбиения T_1 и T_2 отрезка $[a;b]$ такие, что $\omega(f, T_1) < \varepsilon$ и $\omega(g, T_2) < \varepsilon$. Разбиение $T = \{\Delta_i\} := T_1 \cap T_2$ мельче T_1 и T_2, отсюда

$$\omega(f,T) \leqslant \omega(f,T_1) < \varepsilon, \quad \omega(g,T) \leqslant \omega(g,T_1) < \varepsilon;$$
$$\omega(fg,T) = \sum_i \omega(fg,\Delta_i)\,|\Delta_i| \leqslant M \sum_i \left(\omega(f,\Delta_i) + \omega(g,\Delta_i)\right)|\Delta_i| = M\left(\omega(f,T) + \omega(g,T)\right) < 2M\varepsilon.$$

Применяя в обратную сторону теорему Дарбу, получаем $fg \in R[a;b]$. ■

9. Свойства интеграла Римана (достаточное условие интегрируемости композиции функций, интегрируемость на подотрезках и аддитивность интеграла Римана)

Теорема 1 (Достаточное условие интегрируемости композиции)**.** Пусть $f \in R[a;b]$, а функция φ ограничена и непрерывна на $f([a;b])$. Тогда $\varphi \circ f \in R[a;b]$.

Доказательство. Здесь применим (пока не доказанный) критерий Лебега. Согласно нему, f ограничена, а множество её точек разрыва имеет меру нуль по Лебегу.

Из ограниченности f и φ следует ограниченность $\varphi \circ f$. Из непрерывности φ на $f([a;b])$ следует, что в тех точках, где f непрерывна, $\varphi \circ f$ тоже (теорема о непрерывности композиции функций). Следовательно, множество точек разрыва $\varphi \circ f$ тоже имеет меру нуль по Лебегу. Снова применяя критерий Лебега, получаем $\varphi \circ f \in R[a;b]$. ■

Пример 1. Возьмём функции

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \qquad f(x) = \mathrm{Riem}(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } x = \frac{m}{n},\ \frac{m}{n} \text{ — несократимая дробь}, \\ 0, & \text{если } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Функия f интегрируема по Риману на любом отрезке $[a;b]$, а $\varphi(x)$ ограничена на $\mathbb{R}$ и разрывна только при $x = 0$. Композиция $\varphi \circ f$ есть функция Дирихле, которая не интегрируема по Риману ни на каком отрезке $[a;b]$. Таким образом, последняя теорема может не выполняться, если функция φ разрывна хотя бы в одной точке.

Теорема 2 (Об интегрируемости на подотрезках)**.** Если $f \in R[a;b]$ и $[c;d] \subset [a;b]$, то $f \in R[c;d]$.

Доказательство. Из интегрируемости f вытекает (теорема Дарбу) существование разбиения T такого, что $\omega(f,T) < \varepsilon$. Добавим к набору точек, порождающих T, точки c и d. Получим более мелкое разбиение $\widetilde{T}$ отрезка $[a;b]$ (для него $\omega(f,\widetilde{T}) \leqslant \omega(f,T) < \varepsilon$), содержащее в себе разбиение $\widetilde{T}^0$ отрезка $[c;d]$. Получаем

$$\varepsilon > \omega(f,\widetilde{T}) = \sum_{\Delta \in \widetilde{T}^0} \left(\sup_\Delta f - \inf_\Delta\right)|\Delta| + \sum_{\Delta \notin \widetilde{T}^0} \left(\sup_\Delta f - \inf_\Delta f\right)|\Delta| \geqslant \sum_{\Delta \in \widetilde{T}^0} \left(\sup_\Delta f - \inf_\Delta\right)|\Delta| = \omega(f,\widetilde{T}^0).$$

Согласно теореме Дарбу, $f \in R[c;d]$. ■

Теорема 3 (Об аддитивности интеграла Римана)**.** Допустим, $a < c < b$ и $f \in R[a;c] \cap R[c;b]$. Тогда $f \in R[a;b]$ и

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

Для доказательства этой теоремы нам понадобится лемма:

Лемма 1. Если f ограничена на отрезке $[a;b]$ и $a < c < b$, то

$$(D)\underline{\int\limits_a^b} f = (D)\underline{\int\limits_a^c} f + (D)\underline{\int\limits_c^b} f, \tag{$*$}$$

и аналогичное равенство справедливо для верхних интегралов Дарбу.

Доказательство. Возьмём любое $\varepsilon > 0$. Определение нижнего интеграла Дарбу даёт существование разбиений T^1 отрезка $[a;c]$ и T^2 отрезка $[c;b]$ таких, что

$$s(f,T^2) > (D)\underline{\int\limits_a^c} f - \varepsilon, \quad s(f,T^2) > (D)\underline{\int\limits_c^b} f - \varepsilon.$$

Для разбиений $T = T^1 \sqcup T^2$ отрезка $[a;b]$ имеем:

$$(D)\underline{\int\limits_a^b} f \geqslant s(f,T) = \sum_{\Delta_i \in T} \inf_{\Delta_i} f \cdot |\Delta_i| = \sum_{\Delta_i \in T^1} \inf_{\Delta_i} f \cdot |\Delta_i| + \sum_{\Delta_i \in T^2} \inf_{\Delta_i} f \cdot |\Delta_i| =$$

$$= s(f,T^1) + s(f,T^2) > (D)\underline{\int\limits_a^c} f + (D)\underline{\int\limits_c^b} f - 2\varepsilon.$$

Т. к. $\varepsilon > 0$ произвольно, левая часть $(*)$ не меньше правой.

Снова возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и найдём разбиение T отрезка $[a;b]$ такое, что

$$s(f,T) > (D)\underline{\int\limits_a^b} f - \varepsilon.$$

Если в набор точек, порождающих T, не входила точка c, добавим её и получим новое, более мелкое разбиение (оставим ему старое название T), для которого тем более верно последнее неравенство (при измельчении разбиения нижние суммы Дарбу могут только возрасти). Разбиение T есть $T^1 \sqcup T^2$, где T^1 — разбиение отрезка $[a;c]$, а T^2 — разбиение отрезка $[c;b]$. Имеем:

$$(D)\underline{\int\limits_a^b} f < s(f,T) + \varepsilon = s(f,T^1) + s(f,T^2) + \varepsilon \leqslant (D)\underline{\int\limits_a^c} f + (D)\underline{\int\limits_c^b} f + \varepsilon.$$

Т. к. $\varepsilon > 0$ произвольно, левая часть $(*)$ не больше правой.

Таким образом, имеет место равенство $(*)$, а его аналог для верхних интегралов Дарбу доказывается аналогично. ■

А теперь докажем теорему об аддитивности интеграла:

Доказательство. Из интегрируемости вытекает ограниченность f и на $[a;c]$, и на $[c;b]$, значит, и на $[a;b]$ тоже. Далее,

$$(D)\underline{\int_a^b} = (D)\underline{\int_a^c} f + (D)\underline{\int_c^b} f \overset{\text{критерий Дарбу}}{=\!=} (D)\overline{\int_a^c} f + (D)\overline{\int_c^b} f = (D)\overline{\int_a^b} f.$$

Согласно, критерию Дарбу, $f \in R[a;b]$ и каждый верхний или нижний интеграл Дарбу в последнем выражении можно заменить на интеграл Римана. ■

Примечание. До сих пор предполагалось, что верхний предел интегрирования больше нижнего. Ситуацию можно расширить, положив по определению

$$\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx.$$

Можно показать, что последняя теорема верна для всех a, b и c с учётом дополненного нами определения.

10. Свойства интеграла Римана (интегрируемость изменённой функции, достаточное условие положительности интеграла, интеграл по симметричному отрезку от чётных и нечётных функций, интегрируемость кусочно-непрерывных функций)

Теорема 1 (Об интегрируемости изменённой функции)**.** Если функцию $f \in R[a;b]$ изменить на конечном множестве, то изменённая функция $\widetilde{f} \in R[a;b]$ и $\int_a^b f = \int_a^b \widetilde{f}$.

Нам понадобится лемма:

Лемма 1. Допустим, $E \subset [a;b]$ — конечное множество, и функция g равна нулю вне E. Тогда $g \in R[a;b]$ и $\int_a^b g(x)dx = 0$.

Доказательство. Пусть $E = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $C := \max\{f(a_1), \ldots, f(a_n)\}$. Выберем любое $\varepsilon > 0$, положим $\delta := \varepsilon/(Cn)$ и возьмём произвольное δ-разбиение $T\xi = \{(\Delta_i, \xi_i)\}$ отрезка $[a;b]$. Тогда

$$|\mathcal{S}(f, T\xi)| < \left|\sum_{\xi_i \in E} g(\xi_i)\,|\Delta_i|\right| + \left|\sum_{\xi_i \neq E} g(\xi_i)\,|\Delta_i|\right| \leqslant Cn\delta + 0 = \varepsilon.$$

Согласно определению интеграла Римана, $g \in R[a;b]$ и $\int_a^b g = 0$. ■

Доказательство. Разность $\widetilde{f} - f =: g$ равна нулю вне конечного множества $E \subset [a;b]$. Тогда $g \in R[a;b]$ и $\int_a^b g = 0$. Значит, $\widetilde{f} = f + g \in R[a;b]$ и $\int_a^b \widetilde{f} = \int_a^b f + \int_a^b g = \int_a^b f$. ■

Теорема 2 (Достаточное условие положительности интеграла)**.** Допустим, функция f интегрируема по Риману и неотрицательна на отрезке $[a;b]$, а также непрерывна в точке $x_0 \in [a;b]$, в которой $f(x_0) > 0$. Тогда $\int_a^b f(x)dx > 0$.

Доказательство. Т. к. $f \in C(x_0)$ и $f(x_0) > 0$, найдётся отрезок $I \subset [a;b]$ такой, что $f(x) \geqslant \dfrac{f(x_0)}{2} > 0$ на I. Положим

$$g(x) := \begin{cases} \frac{f(x_0)}{2}, & x \in I, \\ 0, & x \in [a;b] \setminus I. \end{cases}$$

Тогда $f \geqslant g$ на $[a;b]$, отрезок $[a;b]$ есть объединение двух или трёх неперекрывающихся отрезков, один из которых есть I,

$$\int\limits_a^b f \geqslant \int\limits_a^b g = \int\limits_I g = \frac{f(x_0)}{2}\,|I| > 0.$$

■

Теорема 3 (Об интеграле по симметричному отрезку от чётных и нечётных функций)**.** Пусть $f \in R[-a;a]$. Если функция f чётна, то

$$\int\limits_{-a}^{a} f = \int\limits_{0}^{a} f, \quad \int\limits_{-a}^{a} f = 2\int\limits_{0}^{a} f,$$

а если нечётна, то

$$\int\limits_{-a}^{0} f = -\int\limits_{0}^{a} f, \quad \int\limits_{-a}^{a} f = 0.$$

Доказательство. Каждому отмеченному разбиению $T\xi = \{(\Delta_i, \xi_i)\}_i$ отрезка $[0;a]$ однозначно соответствует «симметричное» отмеченное разбиение $\widetilde{T}$ (того же диаметра), отрезки и метки в котором симметричны Δ_i и ξ_i относительно нуля. Для чётной функции f

$$\mathcal{S}(f, T\xi) = \sum_{i=1}^{m} f(\xi)\,|\Delta_i| = \sum_{i=1}^{m} f(-\xi)\,|\Delta_i| = \mathcal{S}(f, \widetilde{T}\widetilde{\xi}),$$

и определение интеграла Римана даёт $\displaystyle\int\limits_{0}^{a} f = \int\limits_{-a}^{0} f$. Далее,

$$\int\limits_{-a}^{a} f = \int\limits_{-a}^{0} f + \int\limits_{0}^{a} f = 2\int\limits_{0}^{a} f.$$

Если f нечётна, то

$$\mathcal{S}(f, T\xi) = \sum_{i=1}^{m} f(\xi)\,|\Delta_i| = \sum_{i=1}^{m} -f(-\xi)\,|\Delta_i| = -\mathcal{S}(f, \widetilde{T}\widetilde{\xi}),$$

$$\int\limits_{-a}^{0} f = -\int\limits_{0}^{a} f, \quad \int\limits_{-a}^{a} f = \int\limits_{-a}^{0} f + \int\limits_{0}^{a} f = -\int\limits_{0}^{a} f + \int\limits_{0}^{a} f = 0.$$

■

Теорема 4 (Об интегрируемости кусочно-непрерывных функций)**.** Если функция f кусочно-непрерывна на отрезке $[a;b]$, то $f \in R[a;b]$.

Доказательство. См. утверждение 1 в вопросе 7. ■

11. Интеграл Римана с переменным верхним пределом, его непрерывность и достаточное условие дифференцируемости. Теоремы о существование первообразной/обобщённой первообразной на отрезке. Формула Ньютона — Лейбница

Определение 1. Если задана функция $f \in R[a;b]$, то функцию $F : [a;b] \to \mathbb{R}$,

$$F(x) := \int\limits_a^x f(t)dt, \quad F(a) := 0,$$

называют *интегралом (Римана) с переменным верхним пределом.*

Теорема 1. $F \in C[a;b]$.

Доказательство. Т. к. $f \in R[a;b]$, $f \in B[a;b]$, то $|f(x)| \leqslant C$ для некоторого $C > 0$ и всех $x \in [a;b]$. Имеем:

$$F(x+h) - F(x) = \int\limits_a^{x+h} f(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt = \int\limits_a^x f(t)dt + \int\limits_x^{x+h} f(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt = \int\limits_x^{x+h} f(t)dt;$$

$$|F(x+h) - F(x)| = \left| \int\limits_x^{x+h} f(t)dt \right| \leqslant \left| \int\limits_x^{x+h} |f(t)|\, dt \right| \leqslant C\,|h|\,.$$

При $h \to 0$ имеем $C\,|h| \to 0$, поэтому и $|F(x+h) - F(x)| \to 0$, т. е. $F \in C(x)$. Точка $x \in [a;b]$ могла быть любой, следовательно, $F \in C[a;b]$. ■

Теорема 2. Если $f \in C(x)$, то $F \in D(x)$ и $F'(x) = f(x)$.

Доказательство. Воспользуемся тем, что $f \in C(x)$ и для каждого $\varepsilon > 0$ найдём $\delta > 0$ такое, что

$$|t - x| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon.$$

При $0 < h < \delta$ имеем:

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| = \frac{1}{h}\,|F(x+h) - F(x) - f(x)h| = \frac{1}{h} \left| \int\limits_x^{x+h} f(t)dt - f(x)h \right| =$$

$$= \frac{1}{h} \left| \int\limits_x^{x+h} (f(t) - f(x))\, dt \right| \leqslant \frac{1}{h} \int\limits_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\, dt \leqslant \frac{1}{h} \cdot \varepsilon h = \varepsilon.$$

При $-\delta < h < 0$ оценка тоже верна. Т. к. $\varepsilon > 0$ выбиралось произвольным,

$$\exists F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

■

Теорема 3 (О существовании первообразной/обобщёной первообразной на отрезке)**.** Если $f \in C[a;b]$ (или f ограничена и имеет конечное число точек разрыва либо кусочно-непрерывна на $[a;b]$), то всякая функция вида $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt + C$ является (обобщённой) первообразной для функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и верна *формула Ньютона — Лейбница*:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Доказательство. Если $f \in C[a;b]$, то $f \in R[a;b]$ и $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in [a;b]$ (по предыдущей теореме), т. е. F — первообразная для f на $[a;b]$. Из определения функции F следует

$$F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(t)dt + C - C = \int\limits_a^b f(t)dt.$$

Если f ограничена и имеет конечное число точек разрыва, то $f \in R[a;b]$ (см. утверждение 1 в вопросе 7). Далее, пусть $a_1, \dots, a_n$ — точки разрыва функции f. Из предыдущих теорем в этом вопросе вытекает, что $F \in C[a;b]$ и $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in [a;b] \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$, т. е. F — обобщённая первообразная для f на $[a;b]$. Доказательство формулы Ньютона — Лейбница такое же. ∎

Примечание. Случай кусочно-непрерывной функции включается в уже доказанный во втором абзаце.

Теорема 4. Если $f \in C[a;b]$ (или ограничена и имеет конечное число точек разрыва), а F — (обобщённая) первообразная для f на $[a;b]$, то верна формула Ньютона — Лейбница.

Доказательство. Докажем первое утверждение, а второе доказывается по той же схеме. По предыдущей теореме все функции вида $\int\limits_a^x f(t)dt + C$ есть первообразные для $f(x)$ на $[a;b]$ и других первообразных нет (по теореме о множестве всех первообразных). Поэтому $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt + C$ при некотором C. Остаётся применить предыдущую теорему. ∎

12. Замена переменной и интегрирование по частям в интеграле Римана. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

Теорема 1 (О замене переменной в интеграле Римана)**.** Пусть заданы функции $f \in C[a;b]$ и $\varphi : [\alpha;\beta] \to [a;b]$, причём $\varphi \in C^1[\alpha;\beta]$, $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)dt.$$

Доказательство. По условию теоремы все функции f, φ и φ' непрерывны, поэтому подынтегральная функция в интеграле справа непрерывна.

Пусть F — первообразная для непрерывной функции f на отрезке $[a;b]$. Имеем

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Далее, $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in [a;b]$. Поэтому (теорема о производной композиции функций)

$$(F \circ \varphi)'(t) = (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t) \quad \forall t \in [\alpha;\beta],$$

т. е. $F \circ \varphi$ — первообразная для непрерывной функции $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ на отрезке $[\alpha;\beta]$. Отсюда

$$\int\limits_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)dt = (F \circ \varphi)(\beta) - (F \circ \varphi)(\alpha) = F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

■

Теорема 2 (Об интегрировании по частям в интеграле Римана)**.** Если $u, v \in C^1[a;b]$, то

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b u'(x)v(x)dx, \int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu.$$

Доказательство. Второе из равенств в условии — лишь другая форма записи первого равенства, поэтому будем доказывать лишь первое равенство. Т. к. $u, v, \in C^1[a;b]$, то $uv \in C^1[a;b]$. Значит, $(uv)'$ непрерывна, и uv служит для неё первообразной на отрезке $[a;b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b (u(x)v(x))'\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b.$$

Отсюда, применяя правило Лейбница, и получаем требуемое. ■

Теорема 3. Пусть $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f \in C^{n+1}(a;b)$ и $x_0 \in (a;b)$. Тогда для всех $x \in (a;b)$ имеет место *формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt.$$

Доказательство. Докажем индукцией по n. Если $n = 0$, то $f \in C^1(a;b)$, а $f' \in C(a;b)$. Значит, f — первообразная для функции f' на интервале $(a;b) \supset [x_0;x]$, и верна формула Ньютона — Лейбница:

$$f(x) - f(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} f'(t)dt.$$

После переноса $f(x_0)$ в правую часть получается формула из условия при $n = 0$.

Допустим, что утверждение верно для $n-1$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt. \qquad (*)$$

Покажем, что утверждение верно и для n. Вычислим интеграл в $(*)$ по частям:

$$\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt = \left\{ \begin{array}{cc} u = f^{(n)}(t), & du = f^{(n+1)}(t)dt, \\ dv = (x-t)^{n-1}dt, & v = -\frac{1}{n}(x-t)^n \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\left(-f^{(n)}(t)\frac{1}{n}(x-t)^n\Big|_{x_0}^{x} + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{1}{n}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt \right) =$$

$$= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt.$$

Функции $u(t) = f^{(n)}(t)$ и $v(t) = -\frac{1}{n}(x-t)^n$ непрерывно дифференцируемы на $(a;b) \supset [x_0;x]$, поэтому можно применять интегрирование по частям. Подставив найденный интеграл в $(*)$, получим формулу из формулировки теоремы. ■

13. Формула Валлиса

Положим $I_n := \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x dx$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Если $n \geqslant 2$, то

$$I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \sin x dx = -\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x d\cos x =$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x\Big|_0^{\pi/2} + \int\limits_0^{\pi/2} \cos x d \sin^{n-1} x = 0 + (n-1)\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^{n-2} x dx =$$

$$= (n-1)\int\limits_0^{\pi/2} \left(\sin^{n-2} x - \sin^n x\right) dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n).$$

Отсюда $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ — рекуррентная формула для последовательности I_n. Рассмотрим её отдельно для чётных и нечётных n.

$$\begin{aligned}
&I_0 = \frac{\pi}{2}, && I_1 = 1,\\
&I_2 = \frac{1}{2}\cdot I_0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, && I_3 = \frac{2}{3}\cdot I_1 = \frac{2}{3},\\
&I_4 = \frac{3}{4}\cdot I_2 = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, && I_5 = \frac{4}{5}\cdot I_3 = \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3},\\
&\ \vdots && \ \vdots\\
&I_{2k} = \ldots = \frac{(2k-1)\cdot(2k-3)\cdot\ldots\cdot 1}{2k\cdot(2k-2)\cdot\ldots\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}, && I_{2k+1} = \ldots = \frac{2k\cdot(2k-2)\cdot\ldots\cdot 2}{(2k+1)\cdot(2k-1)\cdot\ldots\cdot 1},\\
&\ \vdots && \ \vdots
\end{aligned}$$

Отсюда

$$I_{2k} = \frac{2k\cdot(2k-1)\cdot(2k-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{(2k\cdot(2k-2)\cdot\ldots\cdot 2)^2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{(2k)!}{4^k\cdot(k!)^2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{C_{2k}^k}{4^k}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$I_{2k+1} = \frac{(2k\cdot(2k-2)\cdot\ldots\cdot 2)^2}{(2k+1)\cdot 2k\cdot(2k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1} = \frac{4^k (k!)^2}{(2k+1)!} = \frac{4^k}{2k+1}\cdot\frac{1}{C_{2k}^k}.$$

Рассмотрим последовательность $\{I_k\}_{k=0}^{\infty}$. Т. к. $\sin^n x \geqslant \sin^{n+1} x$ для всех $x \in [0;\pi/2]$, причём неравенство строгое при $x \in (0;\pi/2)$, то (достаточное условие положительности интеграла) $I_k > I_{k+1}$, т. е. последовательность $\{I_k\}$ убывает. Итак,

$$I_{2k+1} < I_{2k} < I_{2k-1},$$

$$\frac{4^k}{2k+1}\cdot\frac{1}{C_{2k}^k} < \frac{C_{2k}^k}{4^k}\cdot\frac{\pi}{2} < \frac{4^{k-1}}{2k-1}\cdot\frac{1}{C_{2k-2}^{k-1}},$$

$$\frac{4^{2k}}{2k+1}\cdot\frac{1}{\left(C_{2k}^k\right)^2} < \frac{\pi}{2} < \frac{4^{2k-1}}{2k-1}\cdot\frac{1}{C_{2k-2}^{k-1}\cdot C_{2k}^k},$$

$$\underbrace{\frac{4^{2k}}{2k+1}\cdot\frac{1}{\left(C_{2k}^k\right)^2}}_{A_k} < \frac{\pi}{2} < \underbrace{\frac{4^{2k}}{2k}\cdot\frac{1}{\left(C_{2k}^k\right)^2}}_{B_k = \frac{2k+1}{2k}A_k}.$$

Последовательность $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ возрастает:

$$A_{k+1} = \frac{4^{2k+2}}{2k+3}\cdot\frac{1}{\left(C_{2k+2}^{k+1}\right)^2} = \underbrace{\frac{4^{2k}}{2k+1}\cdot\frac{1}{\left(C_{2k}^{k}\right)^2}}_{A_k}\cdot\frac{2k+1}{2k+3}\cdot 16\cdot\frac{(k+1)^4}{(2k+1)^2(2k+2)^2} = A_k\cdot\frac{(2k+2)^2}{(2k+1)(2k+3)} > A_k.$$

Т. к. $\{A_k\}$ возрастает и ограничена сверху (числом $\pi/2$), $\exists \lim\limits_{k\to\infty} A_k = A$. Далее,

$$B_k = A_k\cdot\frac{2k+1}{2k}, \quad \lim_{k\to\infty} B_k = \lim_{k\to\infty} A_k\cdot\lim_{k\to\infty}\frac{2k+1}{2k} = A.$$

По теореме о трёх последовательностях, $A \leqslant \dfrac{\pi}{2} \leqslant A$, откуда $A = \dfrac{\pi}{2}$. В итоге

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{k\to\infty}\frac{4^{2k}}{2k+1}\cdot\frac{1}{\left(C_{2k}^{k}\right)^2}.$$

— *формула Валлиса.*

14. Первая теорема о среднем для интеграла Римана. Преобразование Абеля

Теорема 1 (Первая теорема о среднем для интеграла Римана)**.** Пусть:

1. $f \in B[a;b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$ для всех $x \in [a;b]$;
2. $g \in R[a;b]$ и $g(x) \geqslant 0$ для каждого $x \in [a;b]$;
3. $fg \in R[a;b]$.

Тогда

$$m\int\limits_a^b g(x)dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M\int\limits_a^b g(x)dx. \qquad (*)$$

Если, дополнительно, $f \in C[a;b]$, то существует $c \in [a;b]$ такое, что

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int\limits_a^b g(x)dx. \qquad (\star)$$

Доказательство. Если $g(x) \geqslant 0$, то $mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)$. Интегрируя, получаем $(*)$.

Докажем второе утверждение теоремы. Если интеграл $\int\limits_a^b g$ равен нулю, то из $(*)$ видно, что $\int\limits_a^b fg = 0$, и равенство $(\star)$ верно при любом $c \in [a;b]$; если не равен, поделим на него $(*)$:

$$m \leqslant \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \Big/ \int\limits_a^b g(x)dx \leqslant M.$$

По теореме о промежуточном значении для непрерывной функции, заключаем, что найдётся $c \in [a;b]$ такое, что

$$f(c) = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \Big/ \int\limits_a^b g(x)dx.$$

■

Взяв $g \equiv 1$, получаем

Следствие 1. Если $f \in C[a;b]$, то для некоторого $c \in [a;b]$ справедливо равенство

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Примечание. Формула ($\star$) даёт следующую оценку для интеграла в её левой части:

$$\left|\int\limits_a^b f(x)g(x)dx\right| \leqslant \max_{x\in[a;b]} |f(x)| \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Теорема 2 (Преобразование Абеля)**.** Пусть $A_k := \sum\limits_{i=1}^{k} a_i$, $k = 0, 1, \ldots, n$ (при $k = 0$ пустая сумма). Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = A_n b_n + \sum_{i=1}^{n-1} A_i(b_i - b_{i+1}).$$

Доказательство. В самом деле,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} (A_i - A_{i-1}) b_i = \sum_{i=1}^{n} A_i b_i - \sum_{i=1}^{n} A_{i-1} b_i = \sum_{i=1}^{n} A_i b_i - \sum_{i=0}^{n-1} A_i b_{i+1} =$$
$$= A_n b_n - A_0 b_1 + \sum_{i=1}^{n-1} A_i(b_i - b_{i+1}) = A_n b_n + \sum_{i=1}^{n-1} A_i(b_i - b_{i+1}).$$

■

15. Преобразование Абеля. Вторая теорема о среднем для интеграла Римана

Лемма 1. Пусть числа $A_k := \sum_{i=1}^{k} a_i$, $k = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяют неравенствам $m \leqslant A_k \leqslant M$, а $b_i \geqslant b_{i+1} \geqslant 0$ при $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Тогда

$$m b_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant M b_1.$$

Доказательство. Докажем правое из неравенств (левое аналогично):

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = A_n b_n + \sum_{i=1}^{n-1} A_i(b_i - b_{i+1}) \leqslant M b_n + \sum_{i=1}^{n-1} M(b_i b_{i+1}) = M b_n + M b_1 - M b_n = M b_1.$$

■

Теорема 1 (Вторая теорема о среднем для интеграла Римана)**.** Допустим, $f, g \in R[a;b]$ и функция f монотонна на $[a;b]$. Тогда $\exists \xi \in [a;b]$ такое, что

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int\limits_a^\xi g(x)dx + f(b)\int\limits_\xi^b g(x)dx.$$

Нам понадобится лемма:

Лемма 2. Допустим, $f, g \in R[a;b]$, причём функция f неотрицательна и не возрастает на отрезке $[a;b]$. Тогда $\exists \xi \in [a;b]$ такое, что

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int\limits_a^\xi g(x)dx.$$

Доказательство. Функия $G(x) := \int\limits_a^x g(t)dt$ непрерывна на $[a;b]$. Поэтому она ограничена на $[a;b]$, обозначим $m := \min\limits_{x\in[a;b]} G(x)$, $M := \max\limits_{x\in[a;b]} G(x)$. Сначала установим формулу

$$mf(a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \leqslant Mf(a). \qquad (*)$$

Возьмём любое $\varepsilon > 0$. Т. к. $g \in R[a;b]$, то $|g(x)| \leqslant C < +\infty$ на $[a;b]$, а т. к. $f \in R[a;b]$, согласно теореме Дарбу найдётся разбиение $T = \{\Delta_i = [x_{i-1}; x_i]\}_{i=1}^n$ отрезка $[a;b]$, для которого $\omega(f,T) < \varepsilon/C$. Имеем

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \sum_{i=1}^n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)dx = \sum_{i=1}^n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \left(f(x_{i-1}) + f(x) - f(x_{i-1})\right) g(x)dx =$$

$$= \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \int\limits_{x_{i=1}}^{x_i} g(x)dx + E, \qquad E := \sum_{i=1}^n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \left(f(x) - f(x_{i-1})\right) g(x)dx,$$

причём E мало по абсолютной величине:

$$|E| \leqslant \sum_{i=1}^n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - f(x_{i-1})|\, |g(x)|\, dx \leqslant C\sum_{i=1}^n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \omega(g,\Delta_i)dx = C\sum_{i=1}^n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \omega(f,\Delta_i)dx =$$

$$= C\sum_{i=1}^n \omega(f,\Delta_i)\,|\Delta_i| = C\omega(f,T) < \varepsilon.$$

Учтём неотрицательность и невозрастание функции f на $[a;b]$ и применим лемму 1 с

$$a_i := G(x_i) - G(x_{i-1}), \quad b_i := f(x_{i-1}),$$

$$A_k = \sum_{i=1}^k a_i = \sum_{i=1}^k \left(G(x_i) - G(x_{i-1})\right) = G(x_k) - G(x_0) = G(x_k);$$

$$m \leqslant A_k = G(x_k) \leqslant M.$$

Получим

$$mf(a) \leqslant \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\left(G(x_i - G(x_{i-1}))\right) \leqslant Mf(a);$$

$$mf(a) \leqslant \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)dx \leqslant Mf(a);$$

$$mf(a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)g(x)dx - E \leqslant Mf(a), \quad |E| < \varepsilon.$$

Т. к. $\varepsilon > 0$ произвольно, то из последнего неравенства вытекает $(*)$.

Теперь выведем из $(*)$ утверждение теоремы. Отметим, что если $f(a) = 0$, то из $(*)$ следует, что $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = 0$, а значит, обе части равенства из формулировки леммы равны нулю, значит, утверждение выполнено. Пусть теперь $f(a) > 0$. Функция $G(x)$, как было отмечено ранее, непрерывна, причём найдутся такие точки $c, d \in [a; b]$, что

$$G(c) \leqslant \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \Big/ f(a) \leqslant G(d).$$

Таким образом, по теореме о промежуточных значения непрерывной функции, найдётся точка $\xi \in [a; b]$ такая, что $G(\xi) = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx$, а это и есть утверждение леммы. ■

Теперь докажем теорему, ради которой тут собрались:

Доказательство. Если f не убывает на $[a; b]$, то функция $h(x) := f(b) - f(x)$ неотрицательна, невозрастает и интегрируема на $[a; b]$. Применим лемму и проведём преобразования:

$$\int\limits_a^b h(x)g(x)dx = h(a)\int\limits_a^\xi g(x)dx; \quad \int\limits_a^b \left(f(b) - f(x)\right)g(x)dx = \left(f(b) - f(a)\right)\int\limits_a^\xi g(x)dx;$$

$$f(b)\left(\int\limits_a^b f(x)dx - \int\limits_a^\xi f(x)dx\right) + f(a)\int\limits_a^\xi g(x)dx = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx.$$

Если f не возрастает на $[a; b]$, функция $h(x) := f(x) - f(b)$ неотрицательна, не возрастает и интегрируема на $[a; b]$. Повторяя выкладки выше, снова получим требуемое. ■

16. Вариация функции и функции ограниченной вариации (VB-функции). О связи ограниченности вариации с монотонностью и ограниченностью функции. Аддитивность вариации и структура VB-функции

Определение 1. *Вариация* функции $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ (на отрезке $[a; b]$) — величина

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f := \sup_T \sum_{i=1}^m |f(a_i) - f(a_{i-1})|,$$

где sup берётся по всем разбиениям $T = \{[a_{i-1}, a_i]\}_{i=1}^m$ отрезка $[a; b]$.

Если $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f < +\infty$, то f — *функция ограниченной вариации* на $[a; b]$. Запись: $f \in BV[a; b]$.

Для разбиения $T = \{[a_{i-1}, a_i]\}_{i=1}^m$ отрезка $[a; b]$ введём обозначение

$$V(f, T) := \sum_{i=1}^m |f(a_i) - f(a_{i-1})|.$$

Предложение 1. Любая монотонная на отрезке функция имеет ограниченную вариацию. При этом $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f$ равна $f(b) - f(a)$, если f не убывает и $f(a) - f(b)$, если f не возрастает.

Доказательство. Пусть $T = \{[a_{i-1}, a_i]\}_{i=1}^m$ — произвольное разбиение отрезка $[a;b]$. Если f не убывает, то

$$V(f,T) = \sum_{i=1}^{m} |f(a_i) - f(a_{i-1})| = \sum_{i=1}^{m} (f(a_i) - f(a_{i-1})) = f(b) - f(a),$$

$$\mathop{\mathrm{V}}_a^b f = \sup_T V(f,T) = f(b) - f(a).$$

Другой случай рассматривается аналогично. ■

Предложение 2. Любая функция ограниченной вариации ограничена.

Доказательство. Для каждого $x \in [a;b]$ имеем

$$2\,|f(x)| \leqslant |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| + |f(a)| + |f(b)|\,.$$

Набор из двух отрезков $[a;x]$ и $[x;b]$ есть разбиение $[a;b]$, поэтому

$$|f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leqslant \mathop{\mathrm{V}}_a^b f.$$

В итоге,

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{2}\left(\mathop{\mathrm{V}}_a^b f + |f(a)| + |f(b)|\right) \text{ для всех } x \in [a;b].$$

Отсюда следует требуемое. ■

Теорема 1 (Об аддитивности вариации)**.** Если $f \in BV[a;b]$ и $a < c < b$, то $\mathop{\mathrm{V}}_a^b f = \mathop{\mathrm{V}}_a^c f + \mathop{\mathrm{V}}_c^b f$.

Доказательство. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Найдём разбиения T_1 и T_2 отрезков $[a;c]$ и $[c;b]$, соотвественное, такие, что

$$V(f,T_1) > \mathop{\mathrm{V}}_a^c f - \varepsilon \quad \text{и} \quad V(f,T_2) > \mathop{\mathrm{V}}_c^b f - \varepsilon.$$

Тогда $T_1 \sqcup T_2$ — разбиение отрезка $[a;b]$ и

$$\mathop{\mathrm{V}}_a^b f \geqslant V(f, T_1 \cup T_2) = V(f,T_1) + V(f,T_2) > \mathop{\mathrm{V}}_a^c f + \mathop{\mathrm{V}}_c^b f - 2\varepsilon.$$

Т. к. $\varepsilon > 0$ выбиралось произвольно,

$$\mathop{\mathrm{V}}_a^b f \geqslant \mathop{\mathrm{V}}_a^c f + \mathop{\mathrm{V}}_c^b f.$$

Докажем обратное неравенство. Для каждого $\varepsilon > 0$ отыщем разбиение T отрезка $[a;b]$, для которого

$$V(f,T) > \mathop{\mathrm{V}}_a^b f - \varepsilon.$$

Если порождающий разбиение T набор точек не содержит c, добавим её в этот набор и получим новое разбиение (оставим ему старое обозначение T), для которого тем более выполнено последнее. При этом $T = T_1 \sqcup T_2$ — разбиения отрезков $[a;c]$ и $[c;b]$. Получаем

$$\mathop{\mathrm{V}}_a^c f + \mathop{\mathrm{V}}_c^b f \geqslant V(f,T_1) + V(f,T_2) = V(f,T) > \mathop{\mathrm{V}}_a^b f - \varepsilon,$$

откуда

$$\mathop{\mathrm{V}}_a^b f \leqslant \mathop{\mathrm{V}}_a^c f + \mathop{\mathrm{V}}_c^b f.$$

■

17. Вариация непрерывно дифференцируемых функций. Спрямляемые кривые, критерий спрямляемости

Теорема 1. Допустим, $f \in C^{(1)}[a;b]$. Тогда $f \in BV[a;b]$ и $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f = \int\limits_a^b \left|f'(x)\right| dx$.

Доказательство. По условию, $f' \in C[a;b]$, значит, $|f'| \in R[a;b]$ и $\int\limits_a^b \left|f'(x)\right| dx =: I$ определён. Докажем, что $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f = I$.

Сначала установим неравенство $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f < +\infty$. Возьмём любое разбиение $T = \{[a_{i-1}; a_i]\}_{i=1}^m$ отрезка $[a;b]$ и оценим $V(f,T)$:

$$V(f,T) = \sum_{i=1}^{m} |f(a_i) - f(a_{i-1})| \overset{\text{т. Лагранжа}}{=\!=} \sum_{i=1}^{m} \left|f'(\xi_i)\right| (a_i - a_{i-1}) \leqslant$$

$$\leqslant \max_{x\in[a;b]} \left|f'(x)\right| \sum_{i=1}^{m} (a_i - a_{i-1}) = \max_{x\in[a;b]} \left|f'(x)\right| (b-a).$$

Мы воспользовались тем, что функция $|f'|$ непрерывна, а потому ограничена на $[a;b]$. Из последнего неравенства мы видим, что $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} \leqslant \max\limits_{x\in[a;b]} |f'(x)|\,(b-a) < +\infty$.

Далее, возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Найдётся $\delta > 0$ такое, что для всякого отмеченного δ-разбиения $T\xi$ отрезка $[a;b]$ верно $|\mathcal{S}(|f'|, T\xi) - I| < \varepsilon$. Найдём разбиение $T = \{[a_{i-1}; a_i]\}_{i=1}^m$, для которого

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f - \varepsilon < V(f,T) \leqslant \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f.$$

Размельчая T так, чтобы диаметр стал меньше δ, мы не уменьшим $V(f,T)$ и сохраним последнее неравенство. Поэтому сразу считаем $d(T) < \delta$. Получаем: $V(f,T) = \mathcal{S}(|f'|, T\xi)$.

$$\left|\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f - I\right| \leqslant \left|\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f - V(f,T)\right| + \left|V(f,T) - \mathcal{S}(\left|f'\right|, T\xi)\right| + \left|\mathcal{S}(\left|f'\right|, T\xi) - I\right| \leqslant 2\varepsilon.$$

Т. к. $\varepsilon > 0$ выбиралось произвольным, $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f = I$. ■

Определение 1. *Плоская кривая* $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ задаётся параметрически заданной функцией (*путём*)

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in [a;b].$$

Формально, γ есть образ отрезка $[a;b]$ при отображении

$$t \in [a;b] \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2.$$

Примечание. Считаем $x(t), y(t) \in C[a;b]$; в этом случае как сама кривая, так и задающий её путь называется *непрерывными*. Также предполагаем, что γ — простая кривая без кратных точек, что означает следующее. Если $P_1 = (x(t_1), y(t_1))$ и $P_2 = (x(t_2), y(t_2))$ и $t_1 \neq t_2$, то $P_1 \neq P_2$.

Разобъём кривую точками P_i $(i = 0, \ldots, m)$ на m дуг. Т. к. кривая не имеет самопересечений, такому разбиению на дуги однозначно соответствует некоторое разбиение $T = \{\Delta_i = [a_{i-1}; a_i]\}_{i=1}^m$

отрезка $[a;b]$. А именно, если (x_i, y_i) — координаты точек P_i, то $x_i = x(a_i)$ и $y_i - y(a_i)$ для $i = 0, \ldots, m$.

Длина хорды, стягивающей дугу $P_{i-1}P_i$ есть $|P_{i-1}P_i|$. Длина $\ell(P_0P_1\ldots P_m)$ всей ломаной равна $\sum\limits_{i=1}^{m} |P_{i-1}P_i|$.

Определение 2. Если $\ell(\gamma) < +\infty$,

$$\ell(\gamma) := \sup_{P_0P_1\ldots P_m} \sum_{i=1}^{m} |P_{i-1}P_i| = \sup_{T} \sum_{i=1}^{m} |P_{i-1}P_i|\,,$$

то кривая γ называется *спрямляемой*, а $\ell(\gamma)$ — её *длиной*.

Теорема 2 (Критерий спрямляемости кривой)**.** Плоская непрерывная кривая

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in [a;b]$$

без кратных точек спрямляема тогда и только тогда, когда $x(t)$ и $y(t)$ — функции ограниченной вариации.

Доказательство. $\Rightarrow$. Допустим, γ — спрямляемая кривая, т. е.

$$\sup_{T} \sum_{i=1}^{m} |P_{i-1}P_i| = \ell(\gamma) < +\infty.$$

Тогда имеем

$$\sum_{i=1}^{m} |x(a_i) - x(a_{i-1})| \leqslant \sum_{i=1}^{m} |P_{i-1}P_i| \leqslant \sup_{T} \sum_{i=1}^{m} |P_{i-1}P_i| = \ell(\gamma).$$

Значит, $\mathop{\mathrm{V}}\limits_a^b x(t) \leqslant \ell(\gamma) < +\infty$, т. е. $x(t) \in BV[a;b]$. Аналогично, $y(t) \in BV[a;b]$.

$\Leftarrow$. Пусть $\mathop{\mathrm{V}}\limits_a^b x(t) < +\infty$ и $\mathop{\mathrm{V}}\limits_a^b y(t) < +\infty$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{m} |P_{i-1}P_i| \leqslant \sum_{i=1}^{m} |x(a_i) - x(a_{i-1})| + \sum_{i=1}^{m} |y(a_i) - y(a_{i-1})| \leqslant \mathop{\mathrm{V}}_a^b x + \mathop{\mathrm{V}}_a^b y.$$

Значит, $\ell(\gamma) = \sup\limits_{T} \sum\limits_{i=1}^{m} |P_{i-1}P_i| \leqslant \mathop{\mathrm{V}}\limits_a^b + \mathop{\mathrm{V}}\limits_a^b y < +\infty.$ ■

Примечание. Все неравенства выше — это просто следствия из неравенства треугольника.

18. Теорема о длине гладкой кривой. Длина гладкой кривой, описывающейся явно заданной функцией

Теорема 1 (О длине гладкой кривой)**.** Пусть задана плоская простая кривая

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in [a;b],$$

причём $x(t), y(t) \in C^{(1)}[a;b]$. Тогда γ спрямляема и

$$\ell(\gamma) = \int\limits_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \qquad (*)$$

Доказательство. Т. к. $x(t), y(t) \in C^{(1)}[a;b]$, то $x(t)$ и $y(t)$ — функции ограниченной вариации. Тогда (критерий спрямляемости кривой) кривая γ спрямляема.

Докажем формулу $(*)$. По условию, $x(t), y(t) \in C^{(1)}[a;b]$, поэтому $x'(t), y'(t) \in C[a;b]$. Значит, функция $f(t) := \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ непрерывна, и интеграл в $(*)$ определён.

Возьмём какое-нибудь $\varepsilon > 0$. Т. к. $f \in R[a;b]$, найдётся $\delta_1 > 0$ такое, что для каждого отмеченного δ_i-разбиения $T\xi$ отрезка $[a;b]$ верно

$$\left|\mathcal{S}(f, T\xi) - \int\limits_a^b f(t)dt\right| < \varepsilon.$$

Т. к. $y'(t)$ непрерывна на $[a;b]$, то она равномерно непрерывна на $[a;b]$, т. е. существует $\delta_2 > 0$ такое, что

$$(\varphi - \psi) < \delta_2 \Rightarrow \left|y'(\varphi) - y'(\psi)\right| < \varepsilon.$$

Положим $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Далее, найдём разбиение $T = \{\Delta_i = [a_{i-1}, a_i]\}_{i=1}^m$, для которого длина вписанной ломаной ε-ближка к длине кривой:

$$\ell(\gamma) - \varepsilon < \sum_{i=1}^m |P_{i-1}P_i| \leqslant \ell(\gamma).$$

При размельчении T сумма $\sum\limits_{i=1}^m |P_{i-1}P_i|$ не уменьшается, а последнее неравенство сохраняется. Размельчим T так, чтобы $d(T) < \delta$. Оценим длину вписанной ломаной:

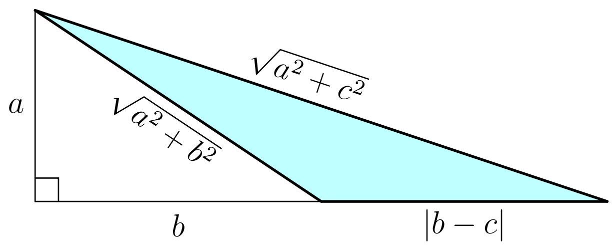
$$\sum_{i=1}^m |P_{i-1}P_i| = \sum_{i=1}^m \sqrt{(x(a_i) - x(a_{i-1}))^2 + (y(a_i) - y(a_{i-1}))^2} \overset{\text{т. Лагранжа}}{=\!=}$$
$$= \sum_{i=1}^m \sqrt{(x'(\varphi_i))^2 + (y'(\psi_i))^2}\,|\Delta_i| = \sum_{i=1}^m \sqrt{(x'(\varphi_i))^2 + (y'(\varphi_i))^2}\,|\Delta_i| + E = \mathcal{S}(f, T\xi) + E,$$

где $E := \sum\limits_{i=1}^m \left(\sqrt{(x'(\varphi_i))^2 + (y'(\psi_i))^2}\right) - \sqrt{(x'(\varphi_i))^2 + (y'(\varphi_i))^2}\,|\Delta_i|$, а отмеченное разбиение $T\xi$ получилось добавлением меток ξ_i к имеющемуся разбиению T.

Для оценки величины E нам потребуется неравенство

$$\left|\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2}\right| \leqslant |b - c|, \quad a, b, c \geqslant 0.$$

Это опять же просто неравенство для вот такого треугольника:



$$|E| = \left|\sum_{i=1}^m \left(\sqrt{(x'(\varphi_i))^2 + (y'(\psi_i))^2}\right) - \sqrt{(x'(\varphi_i))^2 + (y'(\varphi_i))^2}\,|\Delta_i|\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^m \left|y'(\psi_i) - y'(\varphi_i)\right| |\Delta_i| < \varepsilon(b - a).$$

Наконец, оценим разность между длиной кривой и интегралом:

$$\left|\ell(\gamma)-\int\limits_a^b f(t)dt\right| \leqslant \left|\ell(\gamma)-\sum_{i=1}^m |P_{i-1}P_i|\right| + \left|\sum_{i=1}^m |P_{i-1}P_i| - \mathcal{S}(f,T\xi)\right| + \left|\mathcal{S}(f,T\xi)-\int\limits_a^b f(t)dt\right| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon+\varepsilon(b-a)+\varepsilon=\varepsilon(2+b-a).$$

Т. к. $\varepsilon>0$ выбиралось произвольным, верна формула $(*)$. ■

О длине гладкой кривой, описывающейся явно заданной функцией. Пусть кривая γ задаётся уравнением $y=f(x)$, $x\in[a;b]$. Считаем $f'\in C[a;b]$. Тогда

$$\ell(\gamma)=\int\limits_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2}dx.$$

В самом деле, положим

$$x(t)=t,\quad y(t)=(y\circ x)(t),\quad a\leqslant t\leqslant b.$$

Тогда

$$x'(t)=1,\quad y'(t)=y'(x)x'(t)=y'(x),\quad dx=dt.$$

Остаётся применить теорему о длине гладкой кривой.

19. Вычисление длин кривых и площадей в полярных координатах

Теорема 1 (О длине кривой в полярных координатах)**.** Пусть кривая γ задана в полярных координатах функцией $r=r(\varphi)$, $\varphi\in[\alpha;\beta]$. Считаем $r(\varphi)\in C^{(1)}[\alpha;\beta]$. Тогда

$$\ell(\gamma)=\int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\left(r'(\varphi)\right)^2+r^2(\varphi)}d\varphi.$$

Доказательство. Равенства $x=r\cos\varphi$ и $y=r\sin\varphi$ связывают декартовы координаты с полярными, поэтому можно считать, что γ параметризована параметром φ так:

$$\varphi:\begin{cases}x=x(\varphi):=r(\varphi)\cos\varphi,\\ y=y(\varphi):=r(\varphi)\sin\varphi\end{cases}\qquad \varphi\in[\alpha;\beta].$$

Т. к. $r(\varphi)\in C^{(1)}[\alpha;\beta]$, то $x(\varphi),y(\varphi)\in C^{(1)}[\alpha;\beta]$. По теореме о длине гладкой кривой γ спрямляема и

$$\ell(\gamma)=\int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(x'(\varphi))^2+(y'(\varphi))^2}d\varphi.$$

Вычислим $x'(\varphi)$ и $y'(\varphi)$:

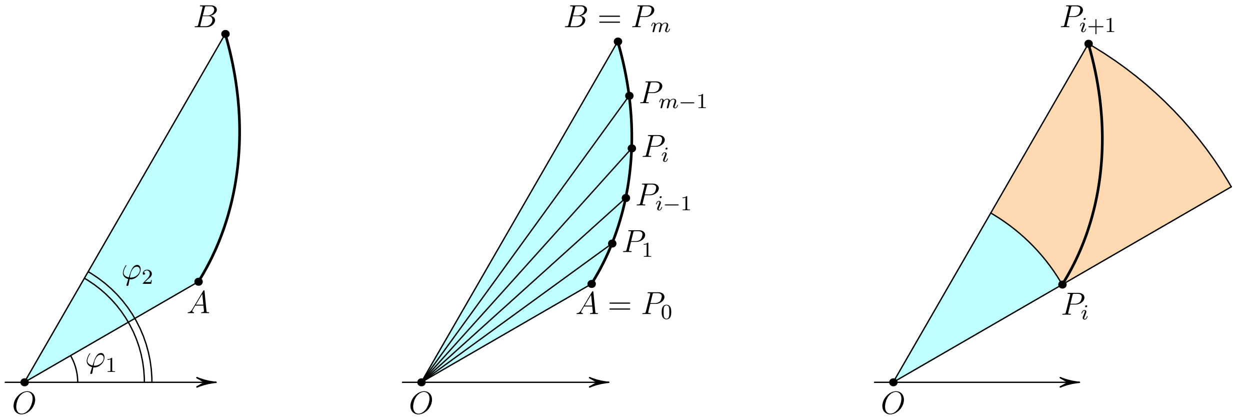
$$x'(\varphi)=(r(\varphi)\cos\varphi)'=r'(\varphi)-r(\varphi)\sin\varphi;$$
$$y'(\varphi)=(r(\varphi)\sin\varphi)'=r'(\varphi)\sin\varphi+r(\varphi)\cos\varphi;$$
$$(x'(\varphi))^2+(y'(\varphi))^2=\left(r'(\varphi)\cos\varphi-r(\varphi)\sin\varphi\right)^2+\left(r'(\varphi)\sin\varphi-r(\varphi)\cos\varphi\right)^2=(r'(\varphi))^2+(r(\varphi))^2.$$

Подставив в формулу длины гладкой кривой, получаем требуемое. ■

Теорема 2 (О площади плоских фигур в полярных координатах)**.** Пусть на отрезка $[\varphi_1;\varphi_2]\subset[0;2\pi]$ задана непрерывная функция $r(\varphi)\in R[\varphi_1;\varphi_2]$. Рассмотрим в полярной системе кординат криволинейный сектор OAB, ограниченный графиком функции $r(\varphi)$ и лучами $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$. Тогда площадь этого сектора равна

$$S(OAB) = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)d\varphi.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное разбиение $T = \{[a_{i-1}; a_i]\}_{i=1}^m$ отрезка $[\varphi_1; \varphi_2]$. Ему соответствуют точки $P_i(a_i, r(a_i))$ на кривой AB.



Тогда (аддитивность функции площади) $S(OAB) = \sum\limits_{i=1}^{m} S(OP_{i-1}P_i)$. Каждый криволинейный сектор $OP_{i-1}P_i$ содержит сектор круга с вершиной O и двумя радиусами длины $\inf\limits_{\varphi\in[a_{i-1};a_i]} r(\varphi)$, лежащими на лучах OP_{i-1} и OP_i. В то же время, $OP_{i-1}P_i$ лежит в секторе круга с вершиной O и двумя радиусами длины $\sup\limits_{\varphi\in[a_{i-1};a_i]} r(\varphi)$, лежащими на лучах OP_{i-1} и OP_i. Значит (монотонность функции площади) верна оценка

$$m_i(a_i - a_{i-1}) \leqslant S(OP_{i-1}P_i) \leqslant M_i(a_i - a_{i-1}),$$
$$m_i := \inf_{\varphi\in[a_{i-1};a_i]} \frac{1}{2}r^2(\varphi), \quad M_i := \sup_{\varphi\in[a_{i-1};a_i]} \frac{1}{2}r^2(\varphi).$$

Складываем по i:

$$\sum_{i=1}^{m} m_i(a_i - a_{i-1}) \leqslant \sum_{i=1}^{m} S(OP_{i-1}P_i) \leqslant \sum_{i=1}^{m} M_i(a_i - a_{i-1});$$
$$s\left(\frac{r^2}{2}, T\right) \leqslant S(OAB) \leqslant S\left(\frac{r^2}{2}, T\right);$$
$$\sup_T s\left(\frac{r^2}{2}, T\right) \leqslant S(OAB) \leqslant \inf_T S\left(\frac{r^2}{2}, T\right);$$
$$(D)\underline{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}} \frac{r^2(\varphi)}{2}d\varphi \leqslant S(OAB) \leqslant (D)\overline{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}} \frac{r^2(\varphi)}{2}d\varphi.$$

Заметим, что (критерий Дарбу) $(D)\underline{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}} \frac{r^2(\varphi)}{2}d\varphi = (D)\overline{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}} \frac{r^2(\varphi)}{2}d\varphi = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{r^2(\varphi)}{2}d\varphi$, отсюда получаем требуемое. ■

20. Площади плоских фигур в прямоугольных координатах. Объёмы тел вращения

Пусть заданы функции $y(t) \in C[\alpha;\beta]$ и $x(t) \in C^{(1)}[\alpha;\beta]$, причём $y(t) \geqslant 0$ $\forall t \in [\alpha;\beta]$, а $x(t)$ возрастает на $[\alpha;\beta]$. Рассмотрим плоскую кривую

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in [\alpha;\beta].$$

Т. к. функция $x(t)$ возрастает, то $a < b$, где $a := x(\alpha)$, $b := x(\beta)$, а также

$$\forall (x,y) \in \gamma \ \exists! t \in [\alpha;\beta] : (x = x(t) \wedge y = y(t)).$$

Отсюда вытекает, в частности, что γ — кривая без самопересечений.

Снова воспользуемся тем, что функция $x(t) : [\alpha;\beta] \to [a;b]$ возрастает. Т. к. она ещё и непрерывна, то (теорема об обратной функции) найдётся непрерывная обратная функция $t = t(x) : [a;b] \to [\alpha;\beta]$. Покажем, что γ — график функции $y = f(x) : [a;b] \to \mathbb{R}$, где $f(x) := (y \circ t)(x)$.

В самом деле,

$$(x,y) \in \gamma \Leftrightarrow \exists! t \in [\alpha;\beta] : (x = x(t) \wedge y = y(t)) \Leftrightarrow f(x) = (y \circ t)(x).$$

Теорема 1 (О площади плоских фигур в прямоугольных координатах)**.** Площадь криволинейной трапеции с параметричеси заданной верхней границей равна

$$S(A(f,[a;b])) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt.$$

Доказательство. Площадь этой криволинейной трапеции равна $S(A(f,[a;b])) = \int\limits_a^b f(x)dx$. Применим теорему о замене переменной в интеграле Римана

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (f \circ x)(t)x'(t)dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (y \circ t \circ x)(t)x'(t)dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt.$$

■

Теорема 2 (Об объёме тела вращения)**.** Пусть $f \in C[a;b]$ и $f(x) \geqslant 0$ $\forall x \in [a;b]$. Рассмотрим криволинейную трапецию $A(f,[a;b])$; будем вращать её вокруг отрезка $[a;b]$. Тогда объём получающегося при этом тела равен

$$V_f(a,b) = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx.$$

Доказательство. Обозначим за $V_f(c,d)$ объём тела, полученного вращением криволинейной трапеции $A(f,[c;d])$ вокруг отрезка $[c;d] \subseteq [a;b]$. Возьмём произвольное разбиение $T = \{[a_{i-1};a_i]\}_{i=1}^m$ отрезка $[a;b]$. Ему соответствуют точки $P_i(a_i, r(a_i))$ на кривой стороне AB. По свойству аддитивности объёма:

$$V_f(a,b) = \sum_{i=1}^m V_f(a_{i-1},a_i).$$

Согласно свойству монотонности объёма, величины $V_f(a_{i-1}, a_i)$ оцениваются через объёмы вписанного и описанного цилиндров:

$$\sum_{i=1}^{m} \pi m_i^2(a_i - a_{i-1}) \leqslant \sum_{i=1}^{m} V_f(a_{i-1}, a_i) = V_f(a, b) \leqslant \sum_{i=1}^{m} \pi M_i^2(a_i - a_{i-1}),$$
$$m_i := \inf_{x \in [a_{i-1}; a_i]} f(x), \quad M_i := \sup_{x \in [a_{i-1}; a_i]} f(x).$$

Объём цилиндра есть произведение площади круга на высоту цилиндра. Перепишем неравенство выше, перейдя к суммам и интегралам Дарбу:

$$\pi \cdot s(f^2(x), T) \leqslant V(a, b) \leqslant \pi \cdot S(f^2(x), T),$$

откуда

$$\pi \cdot (D) \underline{\int_a^b} f^2(x)dx \leqslant V(a, b) \leqslant \pi \cdot (D) \overline{\int_a^b} f^2(x)dx.$$

Имеем (критерий Дарбу):

$$\pi \cdot (D) \underline{\int_a^b} f^2(x)dx = \pi \cdot (D) \overline{\int_a^b} f^2(x)dx = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)dx.$$

В итоге,

$$V(a, b) = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

■

21. Интеграл Римана — Стилтьеса: определение, линейнойсть, достаточное условие существования, оценка абсолютной величины

Чтобы определить интеграл Римана — Стилтьеса, сначала задаётся *интегрирующая функция* ограниченной вариации $G(x) : [a; b] \to \mathbb{R}$.

Определение 1. *Интегральной суммой Римана — Стилтьеса* функции $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ по функции $G \in BV[a; b]$, соответствующей отмеченному разбиению $T\xi = \{([a_{i-1}; a_i], \xi_i)\}_{i=1}^m$ отрезка $[a; b]$, называют сумму

$$\mathcal{S}(fdG, T\xi) := \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)(G(a_i) - G(a_{i-1})).$$

Определение 2 (Интеграл Римана — Стилтьеса)**.** Функция $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ *интегрируема в смысле Римана — Стилтьеса* функции $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ по функции $G \in BV[a; b]$ к значению $I \in \mathbb{R}$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что всех отмеченных δ-разбиений $T\xi = \{([a_{i-1}; a_i], \xi_i)\}_{i=1}^m$ отрезка $[a; b]$ выполнено неравенство

$$|\mathcal{S}(fdG, T\xi) - I| = \left| \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)(G(a_i) - G(a_{i-1})) - I \right| < \varepsilon.$$

Запись: $(RS) \int_a^b f(x)dG(x) = I$. Число I есть *интеграл Римана — Стилтьеса* от функции f по функции G по отрезку $[a; b]$.

Примечание. При $G(x) = x$ интегральная сумма Римана — Стилтьеса превращается в обычную интегральную сумму Римана $\sum\limits_{i=1}^{m} f(\xi_i)(a_i - a_{i-1})$, а интеграл Римана — Стилтьеса становится интегралом Римана.

Теорема 1 (Единственность интеграла). Если $(RS) \int\limits_a^b f(x)dG(x)$ существует, то он единственен.

Доказательство. Допустим, $(RS) \int\limits_a^b f(x)dG(x) = I_1$ и $= I_2$, $I_1 \neq I_2$. Возьмём $\varepsilon := |I_1 - I_2|/2$ и найдём $\delta_1, \delta_2 > 0$ такие, что для всех отмеченных δ_1- и δ_2-разбиений $T\xi$ отрезка $[a;b]$ выполнено соответственно

$$|\mathcal{S}(fdG, T\xi) - I_1| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |\mathcal{S}(fdG, T\xi) - I_2| < \varepsilon.$$

Тогда для любого отмеченного δ-разбиения $T\xi$, $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$, выполнены оба последних неравенства, что приводит к противоречивому неравенству $|I_1 - I_2| < |I_1 - I_2|$. ■

Теорема 2 (Линейность интеграла). Интеграл Римана — Стилтьеса является линейным как по интегрируемой функции, так и по интегрирующей.

Примечание. Теорема доказывается по той же схеме, что и для интеграла Римана. Сначала нужно установить линейность интегральных сумм по f и по G:

$$\mathcal{S}((\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)dG, T\xi) = \alpha_1 \mathcal{S}(f_1 dG, T\xi) + \alpha_2 \mathcal{S}(f_2 dG, T\xi),$$
$$\mathcal{S}(fd(\alpha_1 G_1 + \alpha_2 G_2), T\xi) = \alpha_1 \mathcal{S}(fdG_1, T\xi) + \alpha_2 \mathcal{S}(fdG_2, T\xi).$$

Теорема 3 (Достаточное условие существования интеграла Римана — Стилтьеса). Если $f \in C[a;b]$, то f интегрируема по Риману — Стилтьесу на отрезке $[a;b]$ по любой функции $G \in BV[a;b]$.

Доказательство. Любая функция ограниченной вариации есть разность двух неубывающих функций, поэтому в силу линейности достаточно провести доказательство для неубывающих G.

Итак, пусть G не убывает. Для каждого разбиения $T = \{[a_{i-1}; a_i]\}$ отрезка $[a;b]$ составим *нижнюю* и *верхнюю суммы Дарбу* для интеграла Римана — Стилтьеса $\int\limits_a^b fdG$:

$$s(fdG, T) = \sum_i m_i \left(G(a_i) - G(a_{i-1})\right), \quad m_i := \min_{[a_{i-1};a_i]} f;$$
$$S(fdG, T) = \sum_i M_i \left(G(a_i) - G(a_{i-1})\right), \quad M_i := \max_{[} a_{i-1}; a_i] f.$$

Почти дословно повторяя рассуждения, изложенные выше, несложно доказать, что

$$s(fdG, T) \leqslant S(fdG, \widetilde{T}) \text{ для любых разбиений } T \text{ и } \widetilde{T} \text{ отрезка } [a;b]$$

(здесь существенно, что G не убывает). Положим $I := \sup\limits_T s(fdG, T)$ и покажем, что $\int\limits_a^b fdG = I$.

Берём любое $\varepsilon > 0$. Пользуясь равномерной непрерывностью на $[a;b]$ функции f, отыщем $\delta > 0$ такое, что

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \text{ как только } |x_1 - x_2| < \delta.$$

Возьмём любое δ-разбиение $T = \{[a_{i-1}; a_i]\}$ отрезка $[a;b]$ и любой набор ξ меток к нему. Имеем:

$$s(fdG, T) \leqslant \mathcal{S}(fdG, T\xi) \leqslant S(fdG, T), \quad s(fdG, T) \leqslant I \leqslant S(fdG, T). \qquad (*)$$

Кроме того,

$$S(fdG,T)-s(fdG,T)=\sum_i (M_i-m_i)(G(a_i)-G(a_{i-1}))<\varepsilon\sum_i (G(a_i)-G(a_{i-1}))=\varepsilon(G(b)-g(a)).$$

Отсюда и из $(*)$ получаем $|\mathcal{S}(fdG,T\xi)-I|<\varepsilon(G(b)-G(a))$. Следовательно, f интегрируема по G на отрезке $[a;b]$ и $(RS)\int\limits_a^b fdG=I$. ■

Теорема 4 (Оценка абсолютной величины интеграла Римана — Стилтьеса)**.** Если $f\in B[a;b]$, $G\in BV[a;b]$ и существует $(RS)\int\limits_a^b fdG$, то

$$(RS)\int\limits_a^b fdG\leqslant \sup_{[a;b]}|f|\cdot \mathop{\mathrm{V}}_a^b G.$$

Доказательство. Вытекает из цепочки

$$|\mathcal{S}(fdG,T\xi)|\leqslant\left|\sum_{T\xi} f(\xi_i)(G(a_i)-G(a_{i-1}))\right|\leqslant\sup_{[a;b]}|f|\cdot\sum_T|G(a_i)-G(a_{i-1})|\leqslant\sup_{[a;b]}|f|\cdot\mathop{\mathrm{V}}_a^b G.$$

■

22. Аддитивность интеграла Римана — Стилтьеса от непрерывных функций. Связь интегралов Римана — Стилтьеса и Римана

Теорема 1 (Об аддитивности интеграла Римана — Стилтьеса)**.** Если $f\in C[a;b]$, $G\in BV[a;b]$ и $c\in(a;b)$, то

$$(RS)\int\limits_a^b fdG=(RS)\int\limits_a^c fdG+(RS)\int\limits_c^b fdG.$$

Примечание. Т. к. $G\in Bv[a;b]$ и $a<c<b$, то $G\in BV[a;c]\cap BV[c;b]$, все интегралы в последнем выражении существуют согласно достаточному условию интегрируемости по Риману — Стилтьесу.

Доказательство. Все интегралы в этом доказательстве понимаем как интегралы в смысле Римана — Стилтьеса от f по G. Возьмём любое $\varepsilon>0$ и найдём $\delta>0$ такое, что

$$\left|\mathcal{S}(fdG,T^1\xi^1)-\int\limits_a^c fdG\right|<\varepsilon,\quad \left|\mathcal{S}(fdG,T^2\xi^2)-\int\limits_c^b fdG\right|<\varepsilon,\quad \left|\mathcal{S}(fdG,T\xi)-\int\limits_a^b fdG\right|<\varepsilon$$

для любых отмеченных δ-разбиений $T^1\xi^1$, $T^2\xi^2$ и $T\xi$ отрезков $[a;c]$, $[c;b]$ и $[a;b]$, соответственно. Возьмём какие-нибудь $T^1\xi^1$ и $T^2\xi^2$ указанного типа. Тогда $T\xi:=T^1\xi^1\sqcup T^2\xi^2$ — отмеченное δ-разбиение отрезка $[a;b]$ и, очевидно,

$$\mathcal{S}(fdG,T\xi)=\mathcal{S}(fdG,T^1\xi^1)+\mathcal{S}(fdG,T^2\xi^2).$$

С учётом последнего равенства получаем следующее:

$$\left|\int\limits_a^b fdG - \int\limits_a^c fdG - \int\limits_c^b fdG\right| =$$

$$= \left|\left(\int\limits_a^b fdG - \int\limits_a^c fdG - \int\limits_c^b fdG\right) - \big(\mathcal{S}(fdG, T\xi) - \mathcal{S}(fdG, T^1\xi^1) - \mathcal{S}(fdG, T^2\xi^2)\big)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int\limits_a^b fdG - \mathcal{S}(fdG, T\xi)\right| + \left|\int\limits_a^c fdG - \mathcal{S}(fdG, T^1\xi^1)\right| + \left|\int\limits_c^b fdG - \mathcal{S}(fdG, T^2\xi^2)\right| < 3\varepsilon.$$

В силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$, последняя цепочка влечёт требуемое. ■

Теорема 2 (О сведении интеграла Римана — Стилтьеса к интегралу Римана)**.** Допустим, $f \in R[a;b]$ и $G \in C^{(1)}[a;b]$. Тогда f интегрируема по G на отрезке $[a;b]$ в смысле Римана — Стилтьеса и

$$(RS)\int\limits_a^b f(x)dG(x) = (R)\int\limits_a^b f(x)G'(x)dx.$$

Доказательство. Берём любое $\varepsilon > 0$. Пользуясь равномерной непрерывностью на отрезке $[a;b]$ функции G', находим $\delta_1 > 0$, для которого $|G'(\varphi_i) - G'(\psi_i)| < \varepsilon$, как только $|\varphi_i - \psi_i| < \delta_1$. Обозначим за I интеграл справа в условии. Подберём $\delta_2 > 0$ так, чтобы $|\mathcal{S}(fG', T\xi) - I| < \varepsilon$, если $d(T) < \delta_2$.

Положим $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ и возьмём произвольное отмеченное δ-разбиение $T\xi = \{([a_{i-1}; a_i], \xi_i)\}$ отрезка $[a;b]$. Для него

$$|\mathcal{S}(fdG, T\xi) - I| \leqslant \left|\mathcal{S}(fdG, T\xi) - \mathcal{S}(fG', T\xi)\right| + \left|\mathcal{S}(fG', T\xi) - I\right|, \tag{$*$}$$

причём второе слагаемое справа меньше ε, а первое есть

$$\left|\sum_i f(\xi_i)\left(G(a_i) - G(a_{i-1})\right) - \sum_i f(\xi_i)G'(\xi_i)(a_i - a_{i-1})\right| \overset{\text{т. Лагранжа}}{=\!=}$$

$$= \left|\sum_i f(\xi_i)G'(\eta_i)(a_i - a_{i-1}) - \sum_i f(\xi_i)G'(\xi_i)(a_i - a_{i-1})\right| =$$

$$= \left|\sum_i f(\xi_i)\left(G'(\eta_i) - G'(\xi_i)\right)(a_i - a_{i-1})\right| \leqslant \sup_{[a;b]}|f| \cdot \varepsilon(b-a), \quad \eta_i \in (a_{i-1}; a_i).$$

В итоге левая часть $(*)$ меньше $\varepsilon\left(1 + \sup\limits_{[a;b]}|f|\,(b-a)\right)$, откуда вытекает требуемое. ■

23. Метрические и нормированные пространства. Примеры метрических пространств. Пространство $\mathbb{R}^n$, метрики и нормы в нём

Определение 1. *Метрическое пространство* — пара (X, ρ), где X — некоторое непустое множество, а $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ (*метрика* на X), удовлетворяющая следующим аксиомам расстояния:

1. $\rho(x,y) \geqslant 0$, $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ $\forall x, y \in X$;
2. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ $\forall x, y \in X$;

3. $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y)\ \forall x,y,z \in X$.

Пример 1. Здесь приведены некоторые примеры метрик:

1. Пусть X — произвольное множество, а ρ — *дискретная метрика*,
$$\rho(x,y) := \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y \end{cases}.$$

2. Пусть X — произвольное множество, $c \in X$. Возьмём любую функцию $f : X \to \mathbb{R}$ такую, что $f(c) = 0$ и $f(x) > 0$ при $x \neq c$. Эта функция задаёт *парижскую метрику*
$$\rho(x,y) := \begin{cases} f(x) + f(y), & \text{если } x \neq y, \\ 0, & \text{если } x = y. \end{cases}$$

3. Пусть $X = \{0,1\}^n$. Рассмотрим *метрику Хэмминга*
$$\rho(x,y) := \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \quad x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in X.$$

4. Пара $(C[a;b], \rho)$, где $\rho(f,g) := \max\limits_{x \in [a;b]} |f(x) - g(x)|$, является метрическим пространством.

5. Если $\rho(a,b)$ — метрика на X, то и $\dfrac{\rho(a,b)}{1 + \rho(a,b)}$ — тоже метрика на X.

Примечание. Если (X, ρ) — метрическое пространство и $X \supset Y \neq \varnothing$, то и (Y, ρ) — метрическое пространство. При этом говорят, что метрика ρ на X индуцирует метрику ρ' на Y.

Определение 2. *Нормированное пространство* — пара $(V, \|\cdot\|)$, где V — линейное (векторное) пространство над полем $\mathbb{F}$, а $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ (*норма* в V), для которой выполнены следующие аксиомы:
1. $\|x\| \geqslant 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}\ \forall x \in V$;
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|\ \forall \lambda \in \mathbb{F}, \forall x \in V$;
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|\ \forall x, y \in V$.

Любая норма индуцирует метрику. Положим $\rho(x,y) := \|x - y\|$. Проверим выполнение для функции ρ аксиом метрики. Аксиома 1 для ρ сразу вытекает из аксиомы 1 для $\|\cdot\|$. Далее,
$$\rho(x,y) = \|x - y\| = \|-(y - x)\| = |-1|\, \|y - x\| = \rho(y,x),$$
и выполнена аксиома 2. Неравенство треугольника для метрики вытекает из неравенства треугольника для нормы:
$$\rho(x,y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leqslant \|x - z\| + \|z - y\| = \rho(x,z) + \rho(z,y).$$

Итак, каждое нормированное пространство можно рассматривать как метрическое.

Пространство $\mathbb{R}^n$, метрики и нормы на нём. Рассмотрим множество
$$\mathbb{R}^n = \left\{ (x_1, \ldots, x_n)^t : x_j \in \mathbb{R} \text{ для всех } j = 1, \ldots, n \right\}.$$

$\mathbb{R}^n$ является линейным пространством относительно операций умножения вектора на число и сложения двух векторов, которые выполняются покоординатно. Покажем, что $\mathbb{R}^n$ является нормированным пространством, причём существуют разнообразные способы определить норму в $\mathbb{R}^n$ (не только те, что приведены ниже).

Для $x = (x_1, \dots, x_n)^t$ положим

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

— *манхэттенская норма* и

$$\|x\|_\infty := \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$$

— *max-норма.*

Пожалуй, наиболее распространённой нормой в $\mathbb{R}^n$ является *евклидова норма*

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Она является частным случае целой серии норм. А именно, для любого $p > 1$ положим

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

Проверим выполнение аксиом нормы для $\|\cdot\|_p$:

$$(1) \quad \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \begin{cases} > 0, & x \neq 0, \\ = 0, & x = 0; \end{cases}$$

$$(2) \quad \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i|^p \right)^{1/p} = \left(|\lambda|^p \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} = |\lambda| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} = |\lambda| \, \|x\|_p ;$$

$$(3) \quad \|x + y\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \overset{\text{нер-во Минковского}}{\leqslant} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p \right)^{1/p} = \|x\|_p + \|y\|_p .$$

Нормы $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_p$ и $\|\cdot\|_\infty$ порождают метрики

$$\rho_1(x, y) = \|x - y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| , \quad \rho_p(x, y) = \|x - y\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p},$$
$$\rho_\infty(x, y) = \|x - y\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i| .$$