

# КОЛЛОКВИУМ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Лектор: Чубаров И. А. • Автор: Пшеничный Никита,\* группа 109

1 курс • Весенний семестр 2024 г.

## Аннотация

При подготовке данного файла я использовал курсы лекций И. А. Чубарова и Т. Е. Панова и книги «Курс алгебры» Э. Б. Винберга и «Задачи по линейной алгебре» А. А. Гайфуллиной, А. В. Пенского и С. В. Смирнова.

Обо всех ошибках и опечатках пишите мне, исправлю.

## Программа коллоквиума

1	Векторные пространства. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис, размерность. Примеры	3
2	Матрица перехода от одного базиса к другому. Изменение координат вектора при замене базиса	6
3	Изоморфизм векторных пространств одинаковой размерности	7
4	Векторные подпространства, равносильность двух способов их задания. Сумма и пересечение подпространств. Формула Грассмана	7
5	Прямая сумма подпространств. Внешняя прямая сумма векторных пространств	11
6	Факторпространство, его размерность. Корамерность. Связь с решениями неоднородной системы линейных уравнений	12
7	Линейные функции на векторном пространстве, их ядра. Изменение коэффициентов линейной формы при замене базиса. Сопряжённое пространство $V^*$ , дуальный базис. Канонический изоморфизм $V \simeq V^{**}$	14
8	Линейные отображения и операторы. Ядро и образ, связь их размерностей. Критерий инъективности	16
9	Задание линейных отображений (операторов) матрицами. Изменение матрицы линейного отображения при переходе к другим базисам. Нахождение ядра и образа при помощи матрицы	17
10	Линейные операторы. Изменение матрицы линейного оператора при переходе к новому базису. Подобные матрицы	18
11	Векторное пространство линейных отображений. Алгебра линейных операторов. Изоморфизм алгебры матриц и алгебры линейных операторов	18

---

\*Telegram: @pshenikita. Последняя компиляция: 26 марта 2024 г.

12 Инвариантные подпространства линейного оператора. Ограничение линейного оператора на инвариантное подпространство. Вид матрицы линейного оператора при наличии инвариантных подпространств

18

# 1. ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ И НЕЗАВИСИМОСТЬ ВЕКТОРОВ. БАЗИС, РАЗМЕРНОСТЬ. ПРИМЕРЫ

**Определение 1.** *Линейным (или векторным) пространством над полем  $\mathbb{F}$  называется множество  $V$  с заданными на нём операциями сложения  $+$  :  $(u, v) \in V \times V \mapsto (u + v) \in V$  и умножения элементов  $V$  на элементы  $\mathbb{F}$  :  $(\lambda, v) \in \mathbb{F} \times V \mapsto (\lambda \cdot v) \in V$ , удовлетворяющие следующим аксиомам:*

- |  |   |                                       |
|--|---|---------------------------------------|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>v + u = u + v \ \forall u, v \in V</math>;</li> <li>2. <math>(u + v) + w = u + (v + w) \ \forall u, v, w \in V</math>;</li> <li>3. <math>\exists \mathbf{0} \in V : v + \mathbf{0} = v \ \forall v \in V</math>;</li> <li>4. <math>\forall v \in V \exists (-v) \in V : v + (-v) = \mathbf{0}</math>;</li> </ol>   | } | $(V, +)$ — абелева группа             |
| <ol style="list-style-type: none"> <li>5. <math>\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v \ \forall u, v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{F}</math>;</li> <li>6. <math>(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v \ \forall v \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{F}</math>;</li> <li>7. <math>\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v \ \forall v \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{F}</math>;</li> <li>8. <math>1 \cdot v = v \ \forall v \in V</math>.</li> </ol> | } | $\mathbb{F}$ линейно действует на $V$ |

**Определение 2.** Элементы множества  $V$  называются *векторами*, элемент  $\mathbf{0}$  называется *нулевым вектором*, а элемент  $(-v)$  называется *противоположным к  $v$* . Элементы  $\mathbb{F}$  называют *скалярами*.

**Предложение 1.**

1.  $\mathbf{0} \cdot v = \lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \ \forall v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{F}$ ;
2.  $(-1) \cdot v = -v \ \forall v \in V$ ;
3.  $\lambda v = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda = 0$  или  $v = \mathbf{0}$ .

**Доказательство.**

1.  $0 \cdot v + 0 \cdot v = (0 + 0) \cdot v = 0 \cdot v \Rightarrow 0 \cdot v = \mathbf{0}$ . Аналогично,  $\lambda \cdot \mathbf{0} + \lambda \cdot \mathbf{0} = \lambda(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \lambda \cdot \mathbf{0} \Rightarrow \lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ ;
2.  $v + (-1) \cdot v = 1 \cdot v + (-1) \cdot v = (1 - 1) \cdot v = 0 \cdot v = \mathbf{0} \Rightarrow -v = (-1) \cdot v$ .
3.  $\lambda \neq 0 \Rightarrow \mathbf{0} = \lambda^{-1} \lambda v = v$ .

■

**Пример 1.**

1. Множество  $\{\mathbf{0}\}$  из одного элемента является линейным пространством над любым полем.
2. Множества геометрических векторов на прямой, плоскости или пространстве являются линейными пространствами над полем  $\mathbb{R}$ .
3. Поле  $\mathbb{F}$  является векторным пространством над самим собой.
4. Поле  $\mathbb{C}$  является линейным пространством над полем  $\mathbb{R}$ , а поле  $\mathbb{R}$  является линейным пространством над полем  $\mathbb{Q}$ .

5. Пусть  $\mathbb{F}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{F} \right\}$  — множество столбцов фиксированной длины  $n$  из элементов поля  $\mathbb{F}$ . Операции покомпонентного сложения и умножения на скаляры

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

задают на  $\mathbb{F}^n$  структуру линейного пространства над  $\mathbb{F}$ . Его часто называют *координатным*.

Пусть  $V$  — линейное пространство над полем  $\mathbb{F}$ .

**Определение 3.** *Линейной комбинацией* системы векторов  $\{v_i : i \in I\}$  называется формальная сумма вида  $\sum_{i \in I} \lambda_i v_i$ , в которой лишь конечное число скаляров  $\lambda_i$  отличны от нуля.

**Примечание.** Линейную комбинацию системы  $\{v_i : i \in I\}$  можно также определить как функцию  $i \in I \mapsto \lambda_i \in \mathbb{F}$ , которая принимает ненулевое значение только на конечном числе индексов.

**Определение 4.** Линейная комбинация  $\sum_{i \in I} \lambda_i v_i$  называется *тривиальной*, если  $\lambda_i = 0 \forall i \in I$ .

**Определение 5.** Система векторов  $\{v_i : i \in I\}$  называется *линейно зависимой*, если существует нетривиальная линейная комбинация, представляющая нулевой вектор. В противном случае система называется *линейно независимой*.

**Лемма 1.** Если система векторов  $\{v_i : i \in I\}$  линейно зависима, то в ней найдётся вектор, представленный линейной комбинацией всех остальных.

**Доказательство.** Пусть  $\sum_{i \in I} \lambda_i v_i = \mathbf{0}$ , причём  $\exists \lambda_j \neq 0$ . Тогда  $v_j = \sum_{i \in I \setminus \{j\}} \frac{-\lambda_i}{\lambda_j} v_i$ . ■

**Определение 6.** *Базисом* пространства  $V$  называется линейно независимая система  $\{v_i : i \in I\}$ , порождающая всё пространство  $V$ , т.е. такая, что каждый вектор из  $V$  представляется какой-то линейной комбинацией системы  $\{v_i : i \in I\}$ .

**Определение 7.** Линейное пространство называется *конечномерным*, если в нём существует базис, состоящий из конечного числа векторов. В противном случае пространство называется *бесконечномерным*.

**Предложение 2.** Представление любого вектора линейного пространства в виде линейной комбинации базисных векторов единственно.

**Доказательство.** Действительно, если  $v = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i = \sum_{i \in I} \mu_i v_i$  (где  $\{v_i : i \in I\}$  — базис), то получаем  $\mathbf{0} = \sum_{i \in I} (\lambda_i - \mu_i) v_i$ . Из линейной независимости базиса, линейная комбинация в правой части тривиальна и  $\lambda_i = \mu_i \forall i \in I$  и два представления  $v$  совпадают. ■

**Определение 8.** *Линейная комбинация* системы векторов  $\langle v_i : i \in I \rangle$  есть множество всевозможных линейных комбинаций  $\sum_{i \in I} \lambda_i v_i$ .

**Теорема 1.** В конечномерном пространстве все базисы состоят из одного числа элементов.

Доказательство этой теоремы будет опираться на следующую лемму.

**Лемма 2** (О линейной зависимости). Пусть  $\{e_1, \dots, e_m\}$  и  $f_1, \dots, f_n$  — две (конечные) линейно независимые системы, причём  $\{f_1, \dots, f_n\} \subseteq \langle e_1, \dots, e_m \rangle \Rightarrow n \leq m$ .

**Доказательство.** Пусть  $f_j = a_{1j}e_1 + \dots + a_{mj}e_m$ ,  $a_{ij} \in \mathbb{F}$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Т.к.  $f_1, \dots, f_n$  — линейно независимая система векторов, то  $x_1 f_1 + \dots + x_n f_n = \mathbf{0} \Leftrightarrow x_1 = \dots = x_n = 0$ . Подставляя сюда выражения  $f_i$  через  $e_1, \dots, e_m$ , получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= x_1(a_{11}e_1 + \dots + a_{m1}e_m) + \dots + x_n(a_{1n}e_1 + \dots + a_{mn}e_m) = \\ &= (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n)e_1 + \dots + (a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n)e_m. \end{aligned}$$

Т. к.  $e_1, \dots, e_m$  — линейно независимая система, то последнее равенство равносильно

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Если  $n > m$ , то эта система имеет ненулевое решение, что противоречит линейной независимости системы  $f_1, \dots, f_n$ . ■

Теперь докажем теорему 1:

**Доказательство.** Пусть  $V$  — конечномерное пространство. По определению, в  $V$  существует базис  $e_1, \dots, e_m$ . Пусть  $\{f_i : i \in I\}$  — другой базис. Если этот базис бесконечен, то в нём содержится конечная линейно независимая система векторов  $f_1, \dots, f_n$ , где  $n > m$ . При этом, т. к.  $e_1, \dots, e_m$  — базис, мы имеем  $\{f_1, \dots, f_n\} \subseteq \langle e_1, \dots, e_m \rangle$ , что противоречит лемме о линейной зависимости. Следовательно, базис  $\{f_i : i \in I\}$  конечен, т. е. имеет вид  $f_1, \dots, f_n$ . Тогда  $\{f_1, \dots, f_n\} \subseteq \langle e_1, \dots, e_m \rangle$  и  $\{e_1, \dots, e_m\} \subseteq \langle f_1, \dots, f_n \rangle$ . Отсюда  $n = m$ . ■

**Лемма 3.** В конечномерном пространстве любую линейно независимую систему можно дополнить до базиса.

**Доказательство.** Пусть  $\{e_1, \dots, e_k\}$  — конечная подсистема в  $V$ . Тогда, если эта система максимальна по включению, то она базис. Иначе существует  $e_{k+1} \in V$  такой, что система  $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}\}$  линейно независима. Продолжая процесс далее, за конечное число шагов получим базис (в силу конечномерности пространства  $V$ ). ■

**Примечание.** Ниже изложен удобный алгоритм дополнения линейно независимой системы до базиса. Пусть

$$u_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ \vdots \\ u_{1n} \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} u_{21} \\ \vdots \\ u_{2n} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad u_m = \begin{pmatrix} u_{m1} \\ \vdots \\ u_{mn} \end{pmatrix}$$

линейно независимы. Обозначим

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} & \dots & u_{m1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1n} & u_{2n} & \dots & u_{mn} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что  $\text{rk } U = m$ , а  $\text{rk}(U \mid E) = n$ . Так что нужно привести матрицу  $(U \mid E)$  элементарными преобразованиями к ступенчатому виду и дополнить столбцы матрицы  $U$  единичными столбцами, вошедшими в базис матрицы  $(U \mid E)$ .

**Лемма 4.** Всякое конечномерное линейное пространство  $V$  обладает базисом. Более точно, из всякого конечного порождающего множества  $S \subset V$  можно выбрать базис пространства  $V$ .

**Доказательство.** Если множество  $S$  линейно независимо, то по лемме 1 в нём найдётся вектор, линейно выражающийся через остальные. Выкидывая этот вектор, мы получаем порождающее множество из меньшего числа векторов. Продолжая так дальше, мы в конце концов получим линейно независимое порождающее множество, т. е. базис. ■

**Примечание.** Чтобы сделать это на практике, выписываем векторы в матрицу по столбцам, приводим её к ступенчатому виду и те столбцы, в которых стоят лидеры, будут базисными.

**Определение 9.** *Размерностью* конечномерного линейного пространства  $V$  (обозначается  $\dim V$ ) называется число элементов в базисе  $V$ . Если  $V$  бесконечномерно, то пишут  $\dim V = \infty$ .

**Лемма 5** (Свойство монотонности размерности). Подпространство  $W$  конечномерного пространства  $V$  конечномерно, причём  $\dim W \leq \dim V$  и равенство достигается только при  $W = V$ .

**Доказательство.** Пусть  $\dim V = m$  и  $e_1, \dots, e_m$  — базис пространства  $V$ . Если  $\dim W > m$ , то в  $W$  найдётся линейно независимая система  $f_1, \dots, f_n$  с  $n > m$ . Причём  $\{f_1, \dots, f_n\} \subseteq \langle e_1, \dots, e_m \rangle = V$ , что противоречит лемме о линейной зависимости. Следовательно,  $\dim W \leq \dim V$ .

Пусть  $\dim W = \dim V = m$  и пусть  $f_1, \dots, f_m$  — базис в  $W$ . Тогда каждый вектор линейно выражается через  $f_1, \dots, f_m$ , так как иначе получили бы линейно независимую систему  $f_1, \dots, f_m, e_i$  из  $m + 1$  векторов в  $V$ , что противоречит теореме 1. Следовательно, любой вектор из  $V$  лежит в  $\langle f_1, \dots, f_m \rangle = W$ , т. е.  $V \subseteq W$ , а обратное включение верно из условия. Итак, получаем  $V = W$ . ■

**Примечание.** В нулевом пространстве  $\{0\}$  базисом естественно считать пустое множество  $\emptyset$ . Поэтому  $\dim\{0\} = 0$ .

## 2. МАТРИЦА ПЕРЕХОДА ОТ ОДНОГО БАЗИСА К ДРУГОМУ. ИЗМЕНЕНИЕ КООРДИНАТ ВЕКТОРА ПРИ ЗАМЕНЕ БАЗИСА

**Определение 1.** Пусть  $V$  — линейное пространство, и  $e_1, \dots, e_n$  — базис в  $V$ . Любой вектор  $x \in V$  единственным образом представляется в виде линейной комбинации базисных векторов:  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ . Числа  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{F}$  называются *координатами* вектора  $x$  в базисе  $e_1, \dots, e_n$ .

**Обозначения Эйнштейна.** Вместо  $\sum_{i=1}^n x_i e_i$  пишем  $x^i e_i$  (суммирование производится по повторяющемуся индексу). В связи с этим обозначением, нам будет также удобно обозначать координаты вектора верхними индексами вместо нижних. Для произведения матриц:  $c_k^i = a_j^i b_k^j$  (суммирование опять производится по повторяющемуся индексу). Матрица  $(d_k^j)$  является обратной к  $(c_j^i)$ , если  $c_j^i d_k^j = \delta_k^i$  — символ Кронекера.

Пусть в пространстве  $V$  заданы два базиса: «старый»  $e_1, \dots, e_n$  и «новый»  $e'_1, \dots, e'_n$ . Нам будет удобно обозначать векторы нового базиса через  $e'_1, \dots, e'_n$ . Элементы нового базиса выражаются через элементы старого:  $e_{i'} = c_{ij}^i e_i$ ,  $i' = 1, \dots, n$ . Эти формулы равносильны одному матричному равенству

$$(e'_1, \dots, e'_{n'}) = (e_1, \dots, e_n) \cdot \begin{pmatrix} c_{1'}^1 & \cdots & c_{n'}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1'}^n & \cdots & c_{n'}^n \end{pmatrix}.$$

**Определение 2.** Матрица  $C := (c_{i'}^i)$  называется *матрицей перехода* от базиса  $e_1, \dots, e_n$  к базису  $e'_1, \dots, e'_{n'}$ . Её столбцами являются координаты новых базисных векторов в старом базисе.

**Предложение 1.**

1. Матрица  $C_{e' \rightarrow e} = (c_{i'}^i)$  перехода от базиса  $e'_1, \dots, e'_{n'}$  к базису  $e_1, \dots, e_n$  является обратной к матрице  $C_{e \rightarrow e'}$  перехода от  $e_1, \dots, e_n$  к  $e'_1, \dots, e'_{n'}$ , т. е.  $C_{e \rightarrow e'} \cdot C_{e' \rightarrow e} = E$ . В частности, матрица перехода всегда невырождена.
2. Если  $e_1, \dots, e_n, e'_1, \dots, e'_{n'}, e''_1, \dots, e''_{n''}$  — три базиса, то для соответствующих матриц перехода выполнено  $C_{e \rightarrow e'} \cdot C_{e' \rightarrow e''} = C_{e \rightarrow e''}$ .

**Доказательство.** Первое утверждение следует из второго, если положить  $e'' = e$ , поэтому будем доказывать второе утверждение. Пусть  $C_{e \rightarrow e'} = (c_{i'}^i)$ ,  $C_{e' \rightarrow e''} = (c_{i''}^{i'})$ ,  $C_{e \rightarrow e''} = (c_{i''}^i)$ . Тогда

$$c_{i''}^i e_i = e_{i''} = c_{i''}^{i'} e_{i'} = c_{i''}^{i'} c_{i'}^i e_i = c_{i''}^i c_{i''}^{i'} e_i \Rightarrow c_{i''}^i = c_{i''}^{i'} \cdot c_{i'}^i.$$

■

**Примечание.** Важное практическое следствие. Заметим, что в  $\mathbb{R}^n$  писать матрицу перехода от стандартного базиса к любому другому очень легко — достаточно написать базисные векторы, в которые мы хотим перейти, по столбцам матрицы. Пусть мы хотим написать матрицу перехода от базиса  $a = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  к базису  $b = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ . Для этого можно написать матрицу  $A$  перехода от стандартного к  $a$ , потом матрицу  $B$  перехода от стандартного к  $b$ , а потом выдать ответ —  $A^{-1}B$ .

**Примечание.** Трюк от Александра Александровича (и в Винберге находил). Чтобы найти матрицу  $X = A^{-1}B$  при известных  $A$  и  $B$ , не надо искать  $A^{-1}$ , а потом умножать её на  $B$ . Домножим на  $A$  слева, получим  $AX = B$ . Это  $n$  систем линейных уравнений с одной и той же матрицей  $A$  (решив  $i$ -ую систему, найдём  $i$ -ый столбец  $X$ ). Эти системы можно решать одновременно, записав матрицу  $A$  в правой части и приписав к ней каждый столбец  $B$  по очереди. Выглядеть будет как  $(A \mid B)$ . Решить системы — значит привести эту матрицу  $n \times 2n$  к улучшенному ступенчатому виду:  $(E \mid X)$ . В правой части теперь будут стоять столбцы матрицы  $X$ .

**Теорема 1** (Закон изменения координат). Пусть  $x^1, \dots, x^n$  — координаты вектора  $x$  в базисе  $e_1, \dots, e_n$ , а  $x^{1'}, \dots, x^{n'}$  — в базисе  $e_{1'}, \dots, e_{n'}$ . Тогда два набора координат связаны формулой

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x^{1'} \\ \vdots \\ x^{n'} \end{pmatrix}.$$

**Доказательство.** В обозначениях Эйнштейна утверждение равносильно  $x^i = c_{i'}^i x^{i'}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Оно верно, потому что

$$x^i e_i = x = x^{i'} e_{i'} = x^{i'} c_{i'}^i e_i \Rightarrow x^i = x^{i'} c_{i'}^i = c_{i'}^i x^{i'}.$$

■

### 3. ИЗОМОРФИЗМ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ ОДИНАКОВОЙ РАЗМЕРНОСТИ

**Определение 1.** Пусть  $V$  и  $W$  — линейные пространства над полем  $\mathbb{F}$ . Отображение  $\mathcal{A} : V \rightarrow W$  называется *линейным*, если  $\forall u, v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{F}$  выполнено  $\mathcal{A}(u + v) = \mathcal{A}u + \mathcal{A}v$ ,  $\mathcal{A}(\lambda v) = \lambda \mathcal{A}v$ .

**Определение 2.** Биективное линейное отображение  $\mathcal{A} : V \rightarrow W$  называется *изоморфизмом*, а пространства  $V$  и  $W$ , между которыми есть изоморфизм, называются *изоморфными*.

**Теорема 1.** Два конечномерных пространства  $V$  и  $W$  над полем  $\mathbb{F}$  изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые размерности.

**Доказательство.** Из определения изоморфизма вытекает, что свойство системы векторов быть линейно независимой и порождать всё пространство сохраняются при изоморфизмах, т.е. при изоморфизме базис переходит в базис<sup>1</sup>. Следовательно, если  $\mathcal{A} : V \rightarrow W$  — изоморфизм, то  $\dim V = \dim W$ . Пусть теперь  $\dim V = \dim W = n$ . Выберем базисы  $e_1, \dots, e_n$  и  $f_1, \dots, f_n$  соответственно. Тогда формула  $\mathcal{A}(x^i e_i) = x^i f_i$  определяет линейное отображение  $\mathcal{A} : V \rightarrow W$ . Оно является биекцией, т.к. формула  $\mathcal{A}^{-1}(x^i f_i) = x^i e_i$  определяет обратное отображение. ■

### 4. ВЕКТОРНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА, РАВНОСИЛЬНОСТЬ ДВУХ СПОСОБОВ ИХ ЗАДАНИЯ. СУММА И ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОДПРОСТРАНСТВ. ФОРМУЛА ГРАССМАНА

**Определение 1.** Непустое подмножество  $W \subseteq V$  линейного пространства  $V$  называется *подпространством*, если  $\forall u, v \in W, \forall \lambda \in \mathbb{F}$  выполнено  $(u + v) \in W$  и  $\lambda u \in W$ .

<sup>1</sup>Это частный случай того, что «образ базиса является базисом образа» при  $\text{Im } \mathcal{A} = W$ .

**Предложение 1.** Множество всех решений системы однородных линейных уравнений с  $n$  неизвестными является подпространством координатного пространства  $\mathbb{F}^n$ .

**Доказательство.** Рассмотрим произвольную систему однородных линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что нулевой столбец является её решением и что произведение любого решения на число также является решением. Докажем, что сумма решений  $(u_1, \dots, u_n)^t$  и  $(v_1, \dots, v_n)^t$  является решением. Подставляя её компоненты в  $i$ -ое уравнение системы, получаем

$$a_{i1}(u_1 + v_1) + \dots + a_{in}(u_n + v_n) = \underbrace{a_{i1}u_1 + \dots + a_{in}u_n}_{=0} + \underbrace{a_{i1}v_1 + \dots + a_{in}v_n}_{=0} = 0.$$

■

**Определение 2.** *Фундаментальная система решений* — это базис подпространства решений однородной СЛУ.

**Предложение 2.** Линейная оболочка  $\langle v_i : i \in I \rangle$  является линейным подпространством в  $V$ . Более того, она является наименьшим по включению линейным подпространством, содержащим все векторы системы  $\{v_i : i \in I\}$ .

**Доказательство.** Сумма векторов системы и результат умножения вектора системы на скаляр представляются линейными комбинациями и потому принадлежат линейной оболочке. Следовательно,  $\langle v_i : i \in I \rangle$  — подпространство. Если  $W$  — подпространство, содержащее все векторы из системы  $\{v_i : i \in I\}$ , то  $W$  также содержит все векторы, представляющиеся их линейными комбинациями, а значит,  $W \supseteq \langle v_i : i \in I \rangle$ . ■

**Теорема 1.** Способы задания подпространства с помощью однородной системы линейных уравнений и линейной оболочки равносильны.

Нам понадобится следующая лемма.

**Лемма 1.** Пусть матрица  $B$  состоит из столбцов фундаментальной системы решений системы  $Ax = 0$  (где  $x$  — вектор). Тогда линейная система  $B^t y = 0$  задаёт линейную оболочку строк матрицы  $A$ .

**Доказательство.** Поскольку каждый столбец матрицы  $B$  является решением системы  $Ax = 0$ , имеет место матричное равенство  $AB = 0$ , которое эквивалентно  $B^t A^t = 0$ . Таким образом, если матрицу  $B^t$  интерпретировать как матрицу коэффициентов некоторой линейной системы, все столбцы матрицы  $A^t$  (строки  $A$ ) будут ей удовлетворять.

Допустим, что некоторый столбец, не принадлежащий линейной оболочке столбцов матрицы  $A^t$ , тоже удовлетворяет системе  $B^t y = 0$ . Тогда рассмотрим матрицу  $C^t$ , которая получается дописыванием к матрице  $A$  этого столбца справа; полученная матрица будет удовлетворять соотношению  $B^t C^t = 0$ , а следовательно, и соотношению  $CB = 0$ . Это означает, что столбцы матрицы  $B$  являются решениями не только линейной системы  $Ax = 0$ , но и системы  $Cx = 0$ , отличающейся от системы  $Ax = 0$  одним добавленным уравнением, которое по предположению линейно не выражается через исходные уравнения. Это означает, что ранг матрицы  $C$  на единицу больше ранга матрицы  $A$ , т. е. количество свободных неизвестных у системы  $Cx = 0$  на единицу меньше, чем у системы  $Ax = 0$ . Значит, все столбцы матрицы  $B$  не могут быть решениями системы  $Cx = 0$  — противоречие. Таким образом, системе  $B^t y = 0$  удовлетворяют все строки матрицы  $A$ , и притом только они. ■



**Доказательство.** Пусть подпространство задано однородной системой линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Тогда задать его линейной оболочкой можно, найдя ФСР. С помощью элементарных преобразований приведём её к ступенчатому виду. Число ненулевых уравнений в этом ступенчатом виде равно  $r = \text{rk } A$ . Поэтому общее решение будет содержать  $r$  главных неизвестных и с точностью до перенумерации неизвестных будет иметь вид

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}x_{r+1} + c_{12}x_{r+2} + \dots + c_{1,n-r}x_n, \\ x_2 = c_{21}x_{r+1} + c_{22}x_{r+2} + \dots + c_{2,n-r}x_n, \\ \dots \\ x_r = c_{r1}x_{r+1} + c_{r2}x_{r+2} + \dots + c_{r,n-r}x_n. \end{cases}$$

Придавая поочерёдно одному из свободных неизвестных  $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$  значение 1, а остальным — 0, получим следующие решения системы:

$$u_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ \vdots \\ c_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad u_{n-r} = \begin{pmatrix} c_{1,n-r} \\ \vdots \\ c_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ранг системы векторов  $\{u_1, u_2, \dots, u_{n-r}\}$  равен рангу матрицы

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{r1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{r2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1,n-r} & c_{2,n-r} & \dots & c_{r,n-r} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right)$$

Если поменять местами блоки, отделённые чертой, то получится улучшенный ступенчатый вид с количеством ступенек, равным  $n - r$ . Так что ранг системы векторов  $\{u_1, u_2, \dots, u_{n-r}\}$  равен количеству векторов в этой системе, поэтому она линейно независима. Эта система также порождает всё подпространство решений, т. к. любая линейная комбинация вида

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{n-r} u_{n-r}$$

является решением, в котором свободные неизвестные имеют значения  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-r}$ .

Теперь пусть подпространство задано линейной оболочкой

$$\left\langle u_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ \vdots \\ u_{1n} \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} u_{21} \\ \vdots \\ u_{2n} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad u_m = \begin{pmatrix} u_{m1} \\ \vdots \\ u_{mn} \end{pmatrix} \right\rangle$$

Составим матрицу

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m1} & u_{m2} & \dots & u_{mn} \end{pmatrix}$$

из строк  $u_1, u_2, \dots, u_n$ . Найдём ФСР системы  $Ux = 0$  (указанным выше способом), и запишем её векторы по строкам в матрицу  $U'$ . По лемме 1 пространство решений однородной системы линейных уравнений  $U'y = 0$  есть линейная оболочка строк матрицы  $U$ , а это и есть данные нам векторы. ■

**Предложение 3.** Пересечение  $V_1 \cap V_2$  подпространств в  $V$  является подпространством в  $V$ .

**Доказательство.** Во-первых,  $\mathbf{0} \in V_1$  и  $\mathbf{0} \in V_2$ , поэтому  $\mathbf{0} \in V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ . Во-вторых,  $\forall u, v \in V_1 \cap V_2$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{F}$  сумма  $u + v$  и произведение  $\lambda v$  также лежат в  $V_1$  и в  $V_2$ , а значит, и в  $V_1 \cap V_2$ . ■

**Примечание.** Аналогично доказывается, что для любого семейства подпространств  $\{U_i : i \in I\}$  их пересечение  $\bigcap_{i \in I} U_i$  тоже подпространство.

**Определение 3** (Сумма подпространств).  $V_1 + V_2 := \{v_1 + v_2 : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$ .

**Предложение 4.**  $V_1 + V_2 = \langle V_1 \cup V_2 \rangle$ .

**Доказательство.** Включение  $V_1 + V_2 \subseteq \langle V_1 \cup V_2 \rangle$  следует из того, что вектор  $v_1 + v_2$  является линейной комбинацией векторов  $v_1, v_2 \in V_1 \cup V_2$ . Докажем обратное включение. Для этого рассмотрим линейную комбинацию  $v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$  векторов  $u_1, \dots, u_n \in V_1 \cup V_2$ . Можно считать, что  $u_1, \dots, u_k \in V_1$  и  $u_{k+1}, \dots, u_n \in V_2$ . Тогда мы имеем  $v = v_1 + v_2$ , где  $v_1 = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k \in V_1$  и  $v_2 = \lambda_{k+1} u_{k+1} + \dots + \lambda_n u_n \in V_2$ . Следовательно,  $v \in V_1 + V_2$ . ■

**Примечание.** Само объединение  $V_1 \cup V_2$  подпространств в общем случае не является подпространством. Примером служит объединение двух прямых на плоскости.

**Теорема 2** (Формула Грассмана).  $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2)$ .

**Доказательство.** Выберем базис  $e_1, \dots, e_k$  пространства  $V_1 \cap V_2$ . Воспользовавшись леммой 3 из первого вопроса, можем дополнить его до базиса  $e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_\ell$  пространства  $V_1$  и до базиса  $e_1, \dots, e_k, g_1, \dots, g_m$  пространства  $V_2$ . Тогда мы имеем  $\dim(V_1 \cap V_2) = k$ ,  $\dim V_1 = k + \ell$ ,  $\dim V_2 = k + m$ . Докажем, что  $e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_\ell, g_1, \dots, g_m$  — базис пространства  $V_1 + V_2$ . Заметим, что т.к.  $V_1 + V_2 = \langle V_1 \cup V_2 \rangle$ , то любой вектор из  $V_1 + V_2$  выражается через эту систему векторов. Остаётся проверить, что эта система линейно независима. Пусть имеет место равенство

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k + \mu_1 f_1 + \dots + \mu_\ell f_\ell + \nu_1 g_1 + \dots + \nu_m g_m = \mathbf{0}.$$

Перепишем его в виде

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k + \mu_1 f_1 + \dots + \mu_\ell f_\ell = -\nu_1 g_1 - \dots - \nu_m g_m.$$

Вектор, стоящий в обеих частях этого равенства, лежит в  $V_1 \cap V_2$  и линейно выражается через  $e_1, \dots, e_k$ . Т.к. векторы  $e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_\ell$  линейно независимы по построению, получаем  $\mu_1 = \dots = \mu_\ell = 0$ . Аналогично,  $\nu_1 = \dots = \nu_m = 0$ . Тогда из линейной независимости  $e_1, \dots, e_k$  следует  $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ . Итак,  $\dim(V_1 + V_2) = k + \ell + m$ , откуда вытекает требуемое. ■

**Алгоритм вычисления базисов** в  $U_1 + U_2$  и  $U_1 \cap U_2$  ( $U_1$  и  $U_2$  — подпространства конечномерного пространства  $V$ ). При доказательстве формулы Грассмана мы попутно показали, что базис  $U_1 + U_2$  есть объединение базисов  $U_1$  и  $U_2$ . Отметим, что в случае, когда сумма  $U_1 + U_2$  прямая, пересечение этих базисов пустое.

Чтобы найти базис пересечения, зададим оба подпространства в виде системы линейных уравнений. Система, состоящая из всех уравнений обеих систем, будет задавать пересечение этих подпространств. Для нахождения базиса ищем ФСР.

## 5. ПРЯМАЯ СУММА ПОДПРОСТРАНСТВ. ВНЕШНЯЯ ПРЯМАЯ СУММА ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

**Определение 1.** Сумма  $V_1 + V_2$  подпространств пространства  $V$  называется *прямой* (обозначается  $V_1 \oplus V_2$ ), если  $\forall v \in V_1 + V_2$  представление  $v = v_1 + v_2$ , где  $v_1 \in V_1$ ,  $v_2 \in V_2$ , единственно.

**Теорема 1.** Следующие условия эквивалентны для подпространств  $V_1$  и  $V_2$ :

1. сумма  $V_1 + V_2$  прямая;
2.  $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ ;
3. если  $0 = v_1 + v_2$ , где  $v_1 \in V_1$  и  $v_2 \in V_2$ , то  $v_1 = v_2 = 0$ ;
4.  $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$ .

**Доказательство.**  $1 \Rightarrow 2$ . Пусть найдётся  $v \in V_1 + V_2$ ,  $v \neq 0$ . Тогда  $0 = 0 + 0 = v + (-v)$ . Получаем, что представление вектора  $0$  не единственно, и сумма  $V_1 + V_2$  не прямая.

$2 \Rightarrow 3$ . Если существует представление  $0 = v_1 + v_2$ , где  $v_1 \in V_1$  и  $v_2 = (-v_1) \in V_2$  и  $v_1 \neq 0$ , т. е.  $v_1 \in V_1 \cap V_2 \neq \{0\}$  — противоречие.

$3 \Rightarrow 1$ . Пусть у вектора  $v \in V$  есть два разложения  $v = u_1 + u_2 = v_1 + v_2$ , где  $u_1, v_1 \in V_1$  и  $u_2, v_2 \in V_2$ . Тогда  $0 = (u_1 - v_1) + (u_2 - v_2)$ , где  $u_1 - v_1 \in V_1$  и  $u_2 - v_2 \in V_2$ . Следовательно,  $u_1 - v_1 = u_2 - v_2 = 0$ , т. е. два разложения совпадают.

$2 \Leftrightarrow 4$ . Следствие формулы Грассмана. ■

**Определение 2.** Сумма  $V_1 + \dots + V_n$  подпространств пространства  $V$  называется *прямой* (обозначается  $V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ ), если  $\forall v \in V_1 + \dots + V_n$  представление  $v = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ , где  $v_i \in V_i$ , единственно.

**Теорема 2.** Для подпространств  $V_1, \dots, V_n$  пространства  $V$  следующие условия эквивалентны:

1. сумма  $V_1 + \dots + V_n$  прямая;
2.  $V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = \{0\}$ ;
3. если  $0 = v_1 + \dots + v_n$ , где  $v_i \in V_i$ , то  $v_1 = \dots = v_n = 0$ ;
4.  $\dim \left( \sum_i V_k \right) = \sum_i \dim V_i$ .

**Доказательство.** Индукция по  $n$  с помощью предыдущей теоремы. ■

**Примечание.** При  $n \geq 3$  условие 2 в предыдущей теореме сильнее, чем условие  $V_i \cup V_j = \{0\} \forall i \neq j$ . Это последнее условие не гарантирует, что сумма подпространств прямая. Действительно, рассмотрим следующие три подпространства в  $\mathbb{R}^2$  со стандартным базисом  $e_1, e_2$ :  $V_1 = \langle e_1 \rangle$ ,  $V_2 = \langle e_2 \rangle$  и  $V_3 = \langle e_1 + e_2 \rangle$ . Тогда  $V_i \cap V_j = \{0\} \forall i \neq j$ , но сумма данных подпространств не прямая, т. к.

$$e_1 + e_2 = e_1 + e_2 + 0 = 0 + 0 + (e_1 + e_2).$$

**Определение 3.** Пусть  $V_1, \dots, V_n$  — линейные пространства над одним полем  $\mathbb{F}$ . Их *внешней прямой суммой* (обозначается как  $V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ ) называется линейное пространство  $V_1 \times \dots \times V_n$  с операциями, определёнными покомпонентно:

$$(u_1, \dots, u_n) + (v_1, \dots, v_n) = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n), \quad \lambda \cdot (v_1, \dots, v_n) = (\lambda v_1, \dots, \lambda v_n).$$

**Предложение 1.** Для любого пространства  $U \subset V$  найдётся подпространство  $W \subset V$  такое, что  $V = U \oplus W$ .

**Определение 4.** Такое подпространство  $W$  называется *прямым дополнением* к  $U$ .

**Доказательство.** Пусть  $e_1, \dots, e_k$  — базис в  $U$ . Его можно дополнить до базиса  $V$  векторами  $e_{k+1}, \dots, e_n$  (где  $n = \dim V$ ), тогда искомое  $W := \langle e_{k+1}, \dots, e_n \rangle$ . ■

**Примечание.** Пространство  $V = V_1 + \dots + V_m$  можно превратить в прямую сумму пространств. Рассмотрим  $U_i = \{(\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, v_i, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}) : v_i \in V_i\} \subset V$ . Тогда

$$(v_1, \dots, v_m) = (v_1, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}) + (\mathbf{0}, v_2, \dots, \mathbf{0}) + \dots + (\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, v_m),$$

а отсюда  $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_m$ .

## 6. ФАКТОРПРОСТРАНСТВО, ЕГО РАЗМЕРНОСТЬ. КОРАЗМЕРНОСТЬ. СВЯЗЬ С РЕШЕНИЯМИ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть  $V$  — линейное пространство, а  $W \subseteq V$  — его подпространство.

**Определение 1.** Классом смежности вектора  $v \in V$  по подпространству  $W$  называется множество  $v + W := \{v + w : w \in W\}$ .

**Лемма 1.** Равенство  $v_1 + W = v_2 + W$  имеет место тогда и только тогда, когда  $v_1 - v_2 \in W$ .

**Доказательство.** Пусть  $v_1 + W = v_2 + W$ . Тогда  $v_1 \in v_1 + W = v_2 + W$ , значит  $\exists w \in W : v_1 = v_2 + w$ . Следовательно,  $v_1 - v_2 = w \in W$ . Обратно, пусть  $v := v_1 - v_2 \in W$ . Докажем, что  $v_1 + W \subseteq v_2 + W$ . Возьмём произвольный вектор  $u \in v_1 + W$ . Тогда  $u = v_1 + w$  для некоторого  $w \in W$ . Мы имеем  $u = v_1 + w = v_2 + (v + w)$ , где  $v + w \in W$ . Следовательно,  $u \in v_2 + W$  и  $v_1 + W \subseteq v_2 + W$ . Обратное включение доказывается аналогично. ■

**Предложение 1.** Отношение  $v_1 \sim v_2 \stackrel{\text{def}}{\iff} u_1 - u_2 \in U$  задаёт отношение эквивалентности на  $V$ .

**Доказательство.** Совсем несложно проверяются все аксиомы. ■

**Определение 2.** Факторпространством линейного пространства  $V$  по подпространству  $W$  называется множество  $V/W := \{v + W : v \in V\}$  с операциями сложения и умножения на скаляры:

$$(u + W) + (v + W) := (u + v) + W, \quad \lambda \cdot (v + W) := \lambda v + W.$$

**Предложение 2.** Приведённые выше операции определены на классах смежности корректно и задают на  $V/W$  структуру линейного пространства.

**Доказательство.** Проверим корректность определения операций, т.е. независимость результата операции от выбора вектора  $v$  в смежном классе  $v + W$ . Докажем для сложения. Если  $u_1 + W = u_2 + W$  и  $v_1 + W = v_2 + W$ , то  $u := u_1 - u_2 \in W$  и  $v := v_1 - v_2 \in W$  в силу предыдущей леммы. Следовательно,

$$\begin{aligned} (u_1 + W) + (v_1 + W) &= (u_1 + v_1) + W = (u_2 + v_2) + (u + v) + W = \\ &= (u_2 + v_2) + W = (u_2 + W) + (v_2 + W). \end{aligned}$$

Корректность определения умножения на скаляры проверяется аналогично. Теперь докажем, что  $V/W$  — линейное пространство. Свойства 1 и 2 сразу следуют из определения. Нулём является  $\mathbf{0} + W = W$ , а противоположным к  $v + W$  является  $(-v) + W$ . Проверим свойство 5:

$$\begin{aligned} \lambda \cdot ((u + W) + (v + W)) &= \lambda \cdot ((u + v) + W) = (\lambda u + \lambda v) + W = \\ &= (\lambda u + W) + (\lambda v + W) = \lambda(u + W) + \lambda(v + W). \end{aligned}$$

Оставшиеся свойства 6-8 проверяются аналогично. ■

**Определение 3.** Коразмерностью подпространства  $W$  линейного пространства  $V$  (обозначается через  $\text{codim } W$ ) называется  $\dim V/W$ .

**Теорема 1.**  $\text{codim } W = \dim V - \dim W$ .

**Доказательство.** Пусть  $\dim V = n$ ,  $\dim W = k$  и  $e_1, \dots, e_k$  — базис в  $W$ . Дополним его до базиса  $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$  в  $V$ . Докажем, что классы  $e_{k+1} + W, \dots, e_n + W$  образуют базис в  $V/W$ . Вначале покажем, что они линейно независимы. Пусть  $\lambda_{k+1}(e_{k+1} + W) + \dots + \lambda_n(e_n + W) = \mathbf{0} + W$ . Тогда  $(\lambda_{k+1}e_{k+1} + \dots + \lambda_n e_n) + W = \mathbf{0} + W$ , т.е.  $v := \lambda_{k+1}e_{k+1} + \dots + \lambda_n e_n \in W$ . Т.к.  $e_1, \dots, e_k$  — базис в  $W$ , то можем записать  $v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k$ . Тогда получаем

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k - \lambda_{k+1} e_{k+1} - \dots - \lambda_n e_n = \mathbf{0}.$$

Т.к.  $e_1, \dots, e_n$  — базис в  $V$ , то  $\lambda_1 = \dots = \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$ . Значит, классы  $e_{k+1} + W, \dots, e_n + W$  линейно независимы. Осталось доказать, что эти классы порождают всё пространство. Возьмём произвольный вектор  $v + W \in V/W$ . Разложим вектор  $v$  по базису в  $V$ :  $v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k + \lambda_{k+1} e_{k+1} + \dots + \lambda_n e_n$ . Тогда

$$\begin{aligned} v + W &= (\lambda_{k+1} e_{k+1} + \dots + \lambda_n e_n) + (\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k) + W = \\ &= (\lambda_{k+1} e_{k+1} + \dots + \lambda_n e_n) + W = \lambda_{k+1}(e_{k+1} + W) + \dots + \lambda_n(e_n + W). \end{aligned}$$

Итак, в базисе  $V/W$  ровно  $n - k$  векторов. ■

**Предложение 3.** Совокупность всех решений произвольной совместной системы линейных уравнений есть сумма какого-либо одного её решения и подпространства решений однородной системы линейных уравнений с той же матрицей коэффициентов.

**Доказательство.** Пусть  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^t \in \mathbb{F}^n$  — частное решение неоднородной СЛУ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Пусть также  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^t \in \mathbb{F}^n$  — произвольное решение ассоциированной однородной системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Тогда сумма  $u + v$  является решением первой системы. Действительно,

$$\begin{aligned} a_{i1}(u_1 + v_1) + a_{i2}(u_2 + v_2) + \dots + a_{in}(u_n + v_n) &= \\ &= \underbrace{a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \dots + a_{in}u_n}_{=b_i} + \underbrace{a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \dots + a_{in}v_n}_{=0} = b_i. \end{aligned}$$

Обратно, если  $u'$  — произвольное решение неоднородной СЛУ, то  $v = u' - u$  является решением ассоциированной однородной системы (проверяется так же). ■

Связь определения факторпространства со структурой решений неоднородной СЛУ заключается в том, что они «похожи». Я уточню это позже у Игоря Андреевича.

7. ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ НА ВЕКТОРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ, ИХ ЯДРА. ИЗМЕНЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЛИНЕЙНОЙ ФОРМЫ ПРИ ЗАМЕНЕ БАЗИСА. СОПРЯЖЁННОЕ ПРОСТРАНСТВО  $V^*$ , ДУАЛЬНЫЙ БАЗИС. КАНОНИЧЕСКИЙ ИЗОМОРФИЗМ  $V \simeq V^{**}$

Сначала см. вопрос 8.

**Определение 1.** Линейное отображение  $f : V \rightarrow \mathbb{F}$  из пространства  $V$  над полем  $\mathbb{F}$  в поле  $\mathbb{F}$  (одномерное векторное пространство) называется *линейной функцией* (функционалом).

**Определение 2.**  $V^* := \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, \mathbb{F})$  — двойственное (сопряжённое, дуальное) пространство к  $V$ .

Пусть  $e_1, \dots, e_n$  — базис в  $V$ . Значение линейной функции  $\xi \in V^*$  на любом векторе  $x = x^i e_i \in V$  определяется её значениями на базисных векторах, т. к.  $\xi(x) = \xi(x^i e_i) = x^i \xi(e_i)$ . Определим линейные функции  $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n \in V^*$  по правилу  $\varepsilon^i(e_j) = \delta_j^i$ . Тогда для любого вектора  $x = x^j e_j$  мы имеем

$$\varepsilon^i(x) = \varepsilon^i(x^j e_j) = x^j \varepsilon^i(e_j) = x^j \delta_j^i = x^i.$$

**Определение 3.** В связи с этим функции  $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$  часто называют *координатными функциями*.

**Предложение 1.** Линейные функции  $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$  образуют базис в  $V^*$ .

**Доказательство.** Линейная независимость: пусть  $x_1 \varepsilon^1 + \dots + x_n \varepsilon^n = \mathbf{0}$ . Это равенство означает, что линейная функция  $\xi : x_i \varepsilon^i$  равна нулю на любом векторе из  $V$ . Вычислим её на векторе  $e_j$ :

$$\mathbf{0} = \xi(e_j) = x_i \varepsilon^i(e_j) = x_i \delta_j^i = x_j.$$

Итак,  $x_1 = \dots = x_n = 0$ , а значит,  $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$  линейно независимы.

Теперь проверим, что  $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$  порождают всё пространство  $V^*$ . Мы утверждаем, что любая линейная функция  $\xi$  представляется в виде линейной комбинации  $\xi = \xi_i \varepsilon^i$ , где  $\xi_i = \xi(e_i)$ . Действительно, для любого вектора  $x = x^j e_j \in V$  мы имеем

$$\xi_i \varepsilon^i(x) = \xi_i x^i = \xi(e_i) x^i = \xi(x^i e_i) = \xi(x).$$

Таким образом,  $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$  — базис в  $V^*$ . ■

**Определение 4.** Базис  $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$  пространства  $V^*$  называется *двойственным* (сопряжённым, дуальным) базисом к  $e_1, \dots, e_n$ .

**Следствие 1.**  $\dim V = \dim V^* \Rightarrow V \simeq V^*$ .

Пусть теперь  $e_{1'}, \dots, e_{n'}$  — другой базис пространства  $V$  и  $C = (c_{i'}^i)$  — матрица перехода от  $e_{i'} = c_{i'}^i e_i$ . Рассмотрим двойственные базисы  $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$  и  $\varepsilon^{1'}, \dots, \varepsilon^{n'}$ .

**Предложение 2.** Матрица перехода от  $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$  к  $\varepsilon^{1'}, \dots, \varepsilon^{n'}$  есть  $(C^{-1})^t$

**Доказательство.** Для любого вектора  $x = x^i e_i = x^{i'} e_{i'}$  мы имеем  $\varepsilon^i(x) = x^i = c_{i'}^i x^{i'} = c_{i'}^i \varepsilon^{i'}(x)$ . Следовательно,  $\varepsilon^i = c_{i'}^i \varepsilon^{i'}$ , что эквивалентно матричному соотношению

$$\begin{pmatrix} \varepsilon^1 \\ \vdots \\ \varepsilon^n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon^{1'} \\ \vdots \\ \varepsilon^{n'} \end{pmatrix}$$

или  $(\varepsilon^{1'}, \dots, \varepsilon^{n'}) = (\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n) \cdot (C^{-1})^t$ . ■

Для построения изоморфизма между пространствами  $V$  и  $V^*$  нам необходимо выбрать базис в  $V$  (и двойственный ему базис в  $V^*$ ). Разные базисы дают разные изоморфизмы. Для бесконечномерных пространств ситуация иная: пространства  $V$  и  $V^*$  **никогда не изоморфны**, пространство

$V^*$  всегда «больше». Проиллюстрируем это на примере. Обозначим через  $\mathbb{F}^\infty$  пространство финитных последовательностей из элементов поля  $\mathbb{F}$ , а через  $\widehat{\mathbb{F}}^\infty$  — пространство всех бесконечных последовательностей элементов поля  $\mathbb{F}$ .

**Предложение 3.**  $(\mathbb{F}^\infty)^* \simeq \widehat{\mathbb{F}}^\infty$ .

**Доказательство.** Возьмём в пространстве  $\mathbb{F}^\infty$  базис  $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ ,  $e_i = (\overbrace{0, \dots, 0}^{i-1}, 1, 0, \dots)$ . Рассмотрим отображение  $\mathcal{A} : (\mathbb{F}^\infty)^* \rightarrow \widehat{\mathbb{F}}^*$ ,  $f \mapsto (f(e_1), f(e_2), \dots)$ , которое линейной функции  $f \in (\mathbb{F}^\infty)^*$  ставит в соответствие последовательность её значений на базисных векторах. Это отображение очевидно линейно. Кроме того, оно биективно: обратное отображение задаётся формулой  $\mathcal{A}^{-1}(x_1, x_2, \dots) = f \in (\mathbb{F}^\infty)^*$ , где  $f(e_i) = x_i$ . Т.к. любой элемент  $y \in \mathbb{F}^\infty$  есть (конечная) линейная комбинация элементов  $e_i$ , то линейная функция  $f$  однозначно восстанавливается по её значениям на базисных векторах ■

**Предложение 4.**  $\mathbb{Z}_2^\infty \not\simeq \widehat{\mathbb{Z}}_2^\infty$ .

**Доказательство.**  $\mathbb{Z}_2^\infty$  можно отождествить с множеством рациональных чисел на отрезке  $[0; 1]$  в двоичной записи, а  $\widehat{\mathbb{Z}}_2^\infty$  — с множеством вещественных чисел на  $[0; 1]$  в двоичной записи. Поэтому биекции между этими множествами быть не может. ■

**Следствие 2.**  $\mathbb{Z}_2^\infty \not\simeq (\mathbb{Z}_2^\infty)^*$ .

**Определение 5.**  $V^{**} = (V^*)^*$  — второе сопряжённое пространство.

**Теорема 1.** Пусть  $V$  — конечномерное линейное пространство. Отображение  $\varphi : x \in V \mapsto \varphi_x \in V^{**}$ , где  $\varphi_x(\xi) := \xi(x)$  для  $\xi \in V^*$ , является изоморфизмом.

**Доказательство.** Из определения линейных функций следует, что  $\varphi_{x+y} = \varphi_x + \varphi_y$  и  $\varphi_{\lambda x} = \lambda \varphi_x$ . Остаётся проверить, что отображение  $x \mapsto \varphi_x$  биективно. Пусть  $e_1, \dots, e_n$  — базис пространства  $V$  и  $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$  — сопряжённый базис пространства  $V^*$ . Тогда

$$\omega_i(\varepsilon^j) = \varepsilon^j(e_i) = \delta_j^i,$$

так что  $\omega_1, \dots, \omega_n$  — базис пространства  $V^{**}$ , сопряжённый  $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$ . Отображение  $x \mapsto \varphi_x$  переводит вектор с координатами  $x_1, \dots, x_n$  в базисе  $e_1, \dots, e_n$  пространства  $V$  в вектор с такими же координатами в базисе  $\omega_1, \dots, \omega_n$  пространства  $V^{**}$ . Следовательно, оно биективно. ■

**Следствие 1.** Всякий базис пространства  $V^*$  сопряжён некоторому базису пространства  $V$ .

**Задача 1** (Из Винберга). Доказать, что линейные функции  $f_1, \dots, f_n$  (где  $n = \dim V$ ) составляют базис пространства  $V^*$  тогда и только тогда, когда не существует ненулевого вектора  $x \in V$ , для которого  $f_1(x) = \dots = f_n(x) = 0$ .

**Решение.**  $\Rightarrow$ . Пусть  $f_1, \dots, f_n$  — базис и нашёлся такой вектор  $v \in V$ ,  $v \neq 0$ , для которого  $f_1(v) = \dots = f_n(v) = 0$ . Этот базис сопряжён некоторому базису  $e_1, \dots, e_n$  пространства  $V$ . А это значит, что вектор  $v$  ненулевой, но все координаты у него нулевые. Так не бывает.

$\Leftarrow$ . Выберем базис  $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$  в  $V^*$ . Тогда  $f_i = a_j^i \varepsilon^j$ . Рассмотрим систему уравнений (верхними индексами обозначены координаты, а не степени)

$$\begin{cases} f_1(x) = 0, \\ f_2(x) = 0, \\ \dots \\ f_n(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \dots + a_n^1 x^n = 0, \\ a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \dots + a_n^2 x^n = 0, \\ \dots \\ a_1^n x^1 + a_2^n x^2 + \dots + a_n^n x^n = 0, \end{cases}$$

По условию не существует ненулевого вектора  $x$  такого, что  $f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_n(x) = 0$ , поэтому выписанная система не имеет решений кроме нулевого. Поэтому она определена, а значит, по правилу Крамера матрица коэффициентов невырождена, откуда следует линейная независимость строк. А полноту можно не доказывать, потому что количество векторов уже правильное. ■

## 8. ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И ОПЕРАТОРЫ. ЯДРО И ОБРАЗ, СВЯЗЬ ИХ РАЗМЕРНОСТЕЙ. КРИТЕРИЙ ИНЪЕКТИВНОСТИ

**Определение 1.** Пусть  $V$  и  $W$  — линейные пространства над полем  $\mathbb{F}$ . Отображение  $\mathcal{A} : V \rightarrow W$  называется *линейным*, если  $\forall u, v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{F}$  выполнено  $\mathcal{A}(u + v) = \mathcal{A}u + \mathcal{A}v$  и  $\mathcal{A}(\lambda v) = \lambda \mathcal{A}v$ .

**Определение 2.** Линейное отображение  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  из пространства  $V$  в себя называется *линейным оператором*.

**Определение 3.** Пусть  $\mathcal{A} : V \rightarrow W$  — линейное отображение. *Ядром*  $\mathcal{A}$  называется множество  $\text{Ker } \mathcal{A} := \{v \in V : \mathcal{A}v = \mathbf{0}\}$ . *Образом*  $\mathcal{A}$  называется множество  $\text{Im } \mathcal{A} := \{\mathcal{A}v : v \in V\}$ .

**Предложение 1.** Пусть  $\mathcal{A} : V \rightarrow W$  — линейное отображение. Тогда  $\text{Ker } \mathcal{A}$  — подпространство в  $V$ , а  $\text{Im } \mathcal{A}$  — подпространство в  $W$ .

**Доказательство.** Пусть  $u, v \in \text{Ker } \mathcal{A}$ . Т.е.  $\mathcal{A}u = \mathcal{A}v = \mathbf{0}$ . Тогда  $\mathcal{A}(u + v) = \mathcal{A}u + \mathcal{A}v = \mathbf{0}$  и  $\mathcal{A}(\lambda u) = \lambda \mathcal{A}u = \mathbf{0}$ . Следовательно,  $u + v \in \text{Ker } \mathcal{A}$  и  $\lambda u \in \text{Ker } \mathcal{A} \forall \lambda \in \mathbb{F}$ , а значит,  $\text{Ker } \mathcal{A}$  — подпространство в  $V$ .

Пусть теперь  $x, y \in \text{Im } \mathcal{A}$ , т.е.  $\exists u, v \in V : \mathcal{A}u = x, \mathcal{A}v = y$ . Тогда  $\mathcal{A}(u + v) = x + y$  и  $\mathcal{A}(\lambda u) = \lambda x$ . Следовательно,  $x + y \in \text{Im } \mathcal{A}$  и  $\lambda x \in \text{Im } \mathcal{A} \forall \lambda \in \mathbb{F}$ , а значит,  $\text{Im } \mathcal{A}$  — подпространство в  $W$ . ■

**Лемма 1** (Критерий инъективности). Линейное отображение  $\mathcal{A} : V \rightarrow W$  инъективно тогда и только тогда, когда  $\text{Ker } \mathcal{A} = \{\mathbf{0}\}$ .

**Доказательство.**  $\Rightarrow$ . Мы знаем, что  $\mathcal{A}\mathbf{0} = \mathbf{0}$ , а т.к.  $\mathcal{A}$  инъективно, то  $\mathbf{0}$  — единственный вектор из  $V$ , переходящий в  $\mathbf{0}$ , откуда  $\text{Ker } \mathcal{A} = \{\mathbf{0}\}$ .

$\Leftarrow$ . Пусть  $\mathcal{A}u = \mathcal{A}v \Rightarrow \mathcal{A}(u - v) = \mathbf{0}$ , значит,  $u - v \in \text{Ker } \mathcal{A} = \{\mathbf{0}\}$ , откуда  $u = v$ . ■

**Теорема 1.** Пусть  $\mathcal{A} : V \rightarrow W$  — линейное отображение. Тогда соответствие  $v + \text{Ker } \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}v$  задаёт изоморфизм между факторпространством  $V / \text{Ker } \mathcal{A}$  и подпространством  $\text{Im } \mathcal{A}$ .

**Доказательство.** Сначала проверим, что  $v + \text{Ker } \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}v$  действительно корректно определяет отображение  $\tilde{\mathcal{A}} : V / \text{Ker } \mathcal{A} \rightarrow \text{Im } \mathcal{A}$ . Для этого нужно проверить, что если  $u + \text{Ker } \mathcal{A} = v + \text{Ker } \mathcal{A}$ , то  $\mathcal{A}u = \mathcal{A}v$ . Из равенства классов смежности следует  $u - v \in \text{Ker } \mathcal{A}$ , а откуда  $\mathcal{A}(u - v) = \mathbf{0}$ , т.е.  $\mathcal{A}u = \mathcal{A}v$ . Итак, отображение  $\tilde{\mathcal{A}}$  определено корректно.

Линейность и сюръективность  $\tilde{\mathcal{A}}$  очевидны. Инъективность проверяется по критерию:

$$\text{Ker } \tilde{\mathcal{A}} = \{(v + \text{Ker } \mathcal{A}) \in V / \text{Ker } \mathcal{A} : \tilde{\mathcal{A}}(v + \text{Ker } \mathcal{A}) = \mathcal{A}v = \mathbf{0}\} = \text{Ker } \mathcal{A} = \mathbf{0} + \text{Ker } \mathcal{A}.$$

Итак,  $\tilde{\mathcal{A}}$  задаёт изоморфизм  $V / \text{Ker } \mathcal{A} \simeq \text{Im } \mathcal{A}$ . ■

**Следствие 1.** Для всякого линейного отображения  $\mathcal{A} : V \rightarrow W$  мы имеем

$$\dim V = \dim \text{Ker } \mathcal{A} + \dim \text{Im } \mathcal{A}.$$

**Предложение 2.** Если в каких-то базисах пространств  $V$  и  $W$  линейное отображение  $\mathcal{A} : V \rightarrow W$  имеет матрицу  $A$ , то

$$\dim \text{Im } \mathcal{A} = \text{rk } A.$$

**Доказательство.** Очевидно, что  $\text{Im } \mathcal{A}$  есть линейная оболочка образов базисных векторов  $e_1, \dots, e_n$  пространства  $V$  и, значит,  $\dim \text{Im } \mathcal{A}$  есть ранг системы векторов  $\mathcal{A}(e_1), \dots, \mathcal{A}(e_n)$ . Но в столбцах матрицы  $A$  как раз и записаны координаты этих векторов в каком-то базисе пространства  $W$ . Следовательно, ранг этой системы векторов равен рангу матрицы  $A$ . ■



**Определение 4.** Множество всех линейных отображений  $\mathcal{A} : V \rightarrow W$  с операциями сложения и умножения на скаляры

$$(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)(v) := \mathcal{A}_1 v + \mathcal{A}_2 v, \quad (\lambda \mathcal{A})(v) := \lambda(\mathcal{A}v)$$

является линейным пространством. Оно называется *пространством линейных отображений* из  $V$  в  $W$  и обозначается  $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ .

## 9. ЗАДАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ (ОПЕРАТОРОВ) МАТРИЦАМИ. ИЗМЕНЕНИЕ МАТРИЦЫ ЛИНЕЙНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ПРИ ПЕРЕХОДЕ К ДРУГИМ БАЗИСАМ. НАХОЖДЕНИЕ ЯДРА И ОБРАЗА ПРИ ПОМОЩИ МАТРИЦЫ

Пусть  $\mathcal{A} : V \rightarrow W$  — линейное отображение,  $e_1, \dots, e_m$  — базис в  $V$ , а  $f_1, \dots, f_n$  — базис в  $W$ .

**Определение 1.** Матрицей линейного отображения  $\mathcal{A} : V \rightarrow W$  по отношению к базисам  $e_1, \dots, e_m$  и  $f_1, \dots, f_n$  называется матрица  $A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_m^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_m^n \end{pmatrix}$  размера  $n \times m$ , в которой  $i$ -ый столбец состоит из координат вектора  $\mathcal{A}(e_i)$  в базисе  $f_1, \dots, f_n$ :  $\mathcal{A}e_i = a_i^j f_j$ .

**Предложение 1.** Пусть  $x = x^j e_j$  — произвольный вектор из  $V$ , а  $y = y^i f_i$  — его образ в  $W$ , т. е.  $y = \mathcal{A}x$ . Тогда  $y^i = a_j^i x^j$ .

**Доказательство.** Действительно,  $y^i f_i = y = \mathcal{A}x = \mathcal{A}(x^j e_j) = x^j \mathcal{A}e_j = x^j a_j^i f_i$ . Т. к.  $\{f_i\}_{i=1}^n$  — базис, отсюда следует, что  $y^i = a_j^i x^j$ . ■

**Предложение 2.** Пусть  $\dim V = m$ ,  $\dim W = n$ . Тогда  $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W) \simeq \text{Mat}_{\mathbb{F}}(n, m)$ .

**Доказательство.** Выберем базисы  $e_1, \dots, e_m$  и  $f_1, \dots, f_n$  в  $V$  и  $W$  соответственно. Определим отображение  $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W) \rightarrow \text{Mat}_{\mathbb{F}}(n, m)$ , которое сопоставляет линейному отображению его матрицу в выбранных базисах. Непосредственно проверяется, что это отображение линейно. Кроме того, оно биективно: обратное отображение сопоставляет матрице  $A = (a_j^i)$  линейного отображения, определяется в координатах формулой из предыдущего предложения. Следовательно, такое отображение  $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W) \rightarrow \text{Mat}_{\mathbb{F}}(n, m)$  является изоморфизмом. ■

**Теорема 1** (Закон изменения матрицы линейного отображения). Имеет место соотношение  $A' = D^{-1}AC$ , где  $A$  — матрица линейного отображения  $\mathcal{A} : V \rightarrow W$  по отношению к базисам  $e_1, \dots, e_m$  и  $f_1, \dots, f_n$ ;  $A'$  — матрица линейного отображения  $\mathcal{A}$  по отношению к базисам  $e_{1'}, \dots, e_{m'}$  и  $f_{1'}, \dots, f_{n'}$ ;  $C = C_{e \rightarrow e'}$  — матрица перехода от  $e_1, \dots, e_m$  к  $e_{1'}, \dots, e_{m'}$ ;  $D = D_{f \rightarrow f'}$  — матрица перехода от  $f_1, \dots, f_n$  к  $f_{1'}, \dots, f_{n'}$ .

**Доказательство.** Пусть  $C = (c_{i'}^i)$ ,  $A = (a_j^i)$ , тогда  $\mathcal{A}e_{i'} = \mathcal{A}(c_{i'}^i e_i) = c_{i'}^i \mathcal{A}e_i = c_{i'}^i a_j^i f_j$ . С другой стороны, если  $A' = (a_{j'}^{i'})$  и  $D = (d_{j'}^j)$ , то  $a_{j'}^{i'} f_{j'} = a_{j'}^{i'} d_{j'}^j f_j$ . Сравнивая два последних соотношения с учётом того, что  $f_{j'}^n$  — базис, получаем  $a_{j'}^i c_{i'}^j = d_{j'}^j a_{j'}^{i'}$ . В матричном виде это эквивалентно  $AC = DA' \Rightarrow A' = D^{-1}AC$ . ■

**Поиск ядра и образа линейного оператора по его матрице.** Пусть имеем матрицу  $A$  оператора  $\mathcal{A}$  в каком-то базисе. Приведя её к ступенчатому виду, сможем найти базис системы столбцов матрицы  $A$  (его будут составлять столбцы, в которых есть лидеры). Вспомним, что по столбцам  $A$  написаны образы базисных векторов при отображении  $\mathcal{A}$ , а мы нашли базис этой системы. Это значит, что найденные нами столбцы есть базис  $\text{Im } \mathcal{A}$ .

$\text{Ker } \mathcal{A}$  — это просто пространство решений СЛУ  $Ax = 0$ . Чтобы найти базис ядра, нам нужно просто найти её ФСР.

## 10. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ. ИЗМЕНЕНИЕ МАТРИЦЫ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА ПРИ ПЕРЕХОДЕ К НОВОМУ БАЗИСУ. ПОДОБНЫЕ МАТРИЦЫ

**Определение 1.** Линейное отображение  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  пространства  $V$  в себя называется *линейным оператором*.

Базис в  $V$  выбирается только один, поэтому изменение матрицы линейного оператора при переходе к новому базису выглядит так, как и в теореме 1 из 9 вопроса при  $C = D$ .

**Определение 2.** Матрицы  $A$  и  $B$  называются *подобными* тогда и только тогда, когда существует  $C \in \text{GL}(n)$  такая, что

$$B = C^{-1}AC.$$

**Предложение 1.** Если  $A$  и  $B$  подобны, то  $\det A = \det B$  и  $\text{rk } A = \text{rk } B$ .

**Доказательство.** В обозначениях из определения подобия матриц  $\det B = \det(C^{-1}AC) = \det(C^{-1}C) \cdot \det A = \det A$ . Второе утверждение следует из того, что ранг не меняется при домножении на невырожденную матрицу. ■

## 11. ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО ЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ. АЛГЕБРА ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ. ИЗОМОРФИЗМ АЛГЕБРЫ МАТРИЦ И АЛГЕБРЫ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Утверждение, которое доказывалось в первом семестре:

**Предложение 1.** Пусть  $U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} W$ . Если  $\varphi, \psi$  — линейные, то  $\varphi \circ \psi$  линейное.

**Определение 1.** Множество  $A$  с операциями сложения, умножения на скаляры и умножения элементов  $A$ , удовлетворяющее аксиомам:

1.  $(A, +)$  — ассоциативное кольцо;
2.  $A$  — векторное пространство (относительно операций сложения и умножения на скаляры);
3.  $\lambda(ab) = (\lambda a)b \ \forall \lambda \in \mathbb{F}, \forall a, b \in A$

называется *линейной алгеброй*.

**Теорема 1.** Множество всех линейных операторов на  $V$  с операциями сложения и умножения на скаляры и композиции является линейной алгеброй. Причём, эта алгебра изоморфна алгебре матриц над тем же полем.

**Доказательство.** Первые две аксиомы уже проверены. Третья проверяется непосредственно:

$$(\lambda(ab))(v) = \lambda((ab)(v)) = \lambda a(b(v)) \Rightarrow \lambda(ab) = (\lambda a)b.$$

Вторая часть утверждения очевидна — мотивировкой именно такого определения произведения матриц было как раз то, что это будет матрица композиции линейных отображений. ■

## 12. ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА. ОГРАНИЧЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА НА ИНВАРИАНТНОЕ ПОДПРОСТРАНСТВО. ВИД МАТРИЦЫ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА ПРИ НАЛИЧИИ ИНВАРИАНТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ

**Определение 1.** Подпространство  $W \subset V$  называется *инвариантным* относительно оператора  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ , если  $\mathcal{A}(W) \subseteq W$ .

**Пример 1.**  $\text{Ker } \mathcal{A}$  и  $\text{Im } \mathcal{A}$  являются инвариантными подпространствами. Пусть  $W \subset V$  — инвариантное подпространство для оператора  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ . Выберем базис  $e_1, \dots, e_k$  в  $W$  и дополним

его до базиса  $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$  в  $V$ . Пусть  $A = (a_j^i)$  — матрица оператора  $\mathcal{A}$  в этом базисе. Тогда  $\mathcal{A}e_j = a_j^1 e_1 + \dots + a_j^k e_k$  при  $j = 1, \dots, k$ . Это означает, что матрица  $A$  имеет вид  $A = \left( \begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array} \right)$ , где в левом нижнем углу стоит матрица размера  $(n-k) \times k$  из нулей. Аналогично, если имеет место разложение  $V = W_1 \oplus W_2$  в прямую сумму инвариантных подпространств,  $\mathcal{A}(W_1) \subset W_1$ ,  $\mathcal{A}(W_2) \subset W_2$ , то в подходящем базисе матрица оператора  $\mathcal{A}$  будет иметь блочно-диагональный вид:  $A = \left( \begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & * \end{array} \right)$ .

**Определение 2.** Пусть  $W \subset V$  — инвариантное подпространство для оператора  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ . Тогда оператор  $\hat{\mathcal{A}} : W \rightarrow W$ , определённый равенством  $\hat{\mathcal{A}}w : \mathcal{A}w$  для  $w \in W$ , называется *ограничением* оператора  $\mathcal{A}$  на подпространство  $W$  и часть обозначается как  $\mathcal{A}|_W$ .

**Определение 3.** Линейный оператор  $\tilde{\mathcal{A}} : V/W \rightarrow V/W$ , определённый на классах смежности по правилу  $\tilde{\mathcal{A}}(v + W) = \mathcal{A}v + W$ , называется *фактор-оператором*.

Определение фактор-оператора корректно. Действительно, если  $v + W = u + W$ , то  $v - u \in W$ ,  $\mathcal{A}(v - u) \in W$ , и мы имеем  $\tilde{\mathcal{A}}(v + W) = \mathcal{A}(u + v - u) + W = \mathcal{A}u + \mathcal{A}(v - u) + W = \mathcal{A}u + W = \tilde{\mathcal{A}}(u + W)$ .

**Предложение 1.** Пусть  $W \subset V$  — инвариантное подпространство для оператора  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ . Пусть  $e_1, \dots, e_k$  — базис в  $W$  и  $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$  — базис в  $V$ . Тогда матрица оператора  $\mathcal{A}$  в этом базисе имеет вид  $A = \left( \begin{array}{c|c} \hat{A} & * \\ \hline 0 & \tilde{A} \end{array} \right)$ , где  $\hat{A}$  — матрица ограничения  $\mathcal{A}|_W$  в базисе  $e_1, \dots, e_k$ , а  $\tilde{A}$  — матрица фактор-оператора в базисе  $e_{k+1} + W, \dots, e_n + W$  факторпространства  $V/W$ .

**Доказательство.** Пусть  $A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$ . Тогда  $\hat{A} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_k^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^k & \dots & a_k^k \end{pmatrix}$  и  $\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{k+1}^{k+1} & \dots & a_n^{k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k+1}^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$ .

Разложим вектор по базису:  $v = v_1 e_1 + \dots + v_k e_k + \dots + v_{k+1} e_{k+1} + \dots + v_n e_n$ . Отметим, что в силу инвариантности подпространства  $W$  имеет место  $A \cdot (v_1, \dots, v_k, 0, \dots, 0)^t = \underbrace{(*, \dots, *)}_k, 0, \dots, 0)^t$ . Итак,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}v = A \cdot v &= \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \right) = \\ &= \left( \begin{array}{c|c} \hat{A} & 0 \\ \hline 0 & \tilde{A} \end{array} \right) \cdot v + \left( \begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline 0 & \tilde{A} \end{array} \right) \cdot v = \left( \begin{array}{c|c} \hat{A} & * \\ \hline 0 & \tilde{A} \end{array} \right) \cdot v. \end{aligned}$$

Отсюда и следует, что в выбранном базисе матрица  $A$  имеет указанный вид. ■

**Примечание.** В конспектах Т. Е. Панова написано, что это утверждение примерно очевидно и доказывать мы его не будем. Поэтому изложенное выше доказательство я проделал сам, оно может содержать ошибки.

**Следствие 1.** Если пространство  $V$  представлено в виде прямой суммы ненулевых инвариантных относительно преобразования  $\mathcal{A}$  подпространств  $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ , то существует базис, в котором

матрица преобразования имеет блочно-диагональный вид  $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_k) = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_k \end{pmatrix}$ ,

где  $A_i$  — матрица ограничения  $\mathcal{A}|_{W_i}$  преобразования  $\mathcal{A}$  на подпространство  $W_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ .