Коллоквиум по теории дискретных функций

Лектор: Подколзин А. С. • Автор: Пшеничный Никита*, группа 109

1 курс • Весенний семестр 2024 г.

Аннотация

Обо всех ошибках и опечатках пишите мне, исправлю. Этот файл был целиком сделан за 1 день, так что их может быть много.

Программа коллоквиума

* Telegram: @pshenikita. Последняя компиляция: 22 апреля 2024 г.

1. Функции и множества. Равенство функций. n-местные функции. Функции алгебры логики, из задание таблицами. Число n-местных функций алгебры логики. Существенные и несущественные переменные. Операция добавления либо удаления несущественной переменной. Симметрические функции алгебры логики. Элементарные функции алгебры логики

Определение 1. Чтобы задать функцию f, нужно забать, во-первых, множество $\mathrm{Dom}(f)$ — *область определения* функции, а во-вторых, для каждого элемента x области определения указать *значение* $f(x)$ этой функции.

Определение 2. $f = g \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g)) \wedge (\forall x \in \mathrm{Dom}(f)\ f(x) = g(x))$.

Определение 3. *Упорядоченный набор* $(a_1, \ldots, a_n)$ длины $n \in \mathbb{N}$ — отображение из $\{1, \ldots, n\}$, принимающее в точке i значение a_i. Иногда рассматривают набор длины 0. Он определён на пустом множестве и обозначается через Λ.

Определение 4 (Прямое произведение). $A_1 \times \ldots \times A_n := \{(a_1, \ldots, a_n) : a_i \in A_i, i = 1, \ldots, n\}$.

Определение 5. Если $\mathrm{Dom}(f) = A_1 \times \ldots \times A_n$ (для некоторого набора множеств $\{A_i\}_{i=1}^n$), то функцию f называют *n-местной* (*функцией от n переменных*). Обозначается через $f(x_1, \ldots, x_n)$ или $f(\widetilde{x}^n)$.

Определение 6. $E_2 := \{0, 1\}$, $B_n := E_2^n$ — *n-мерный булев куб.*

Предложение 1. $|B_n| = 2^n$.

Доказательство. Любой элемент B_n имеет вид $(a_1, \ldots, a_n)$, где $a_i = 0$ или $a_i = 1\ \forall i = 1, \ldots, n$. Тогда для каждой из n координат имеет ровно 2 значения, значит, всего значений 2^n. ■

Примечание. B_n представляет собой множество вершин n-мерного гиперкуба со стороной 1. Допускается случай $n = 0$, и тогда булев куб состоит из единтвенного пустого набора Λ.

Определение 7. *Функцией алгебры логики* называется функция $f : B_n \to E_2$.

Примечание. Эта функция задаёт раскраску вершин n-мерного гиперкуба в два цвета.

Множество всех функций алгебры логики обозначается через P_2. Множество всех n-местных функций алгебры логики обозначается через P_2^n.

Функцию алгебры логики $f(\widetilde{x}^n)$ можно задать таблицей, имеющей $n + 1$ столбец. В первых n столбцах, соответствующих переменным $x_1, \ldots, x_n$, перечисляются все 2^n возможных наборов их значений. В последнем столбце указываются соответствующие значения функции f.

Предложение 2. $|P_2^n| = 2^{2^n}$.

Доказательство. Высота каждого столбца таблицы равна 2^n $(= |B_n|)$, а в правом столбце мы ставим значения функции на каждом из наборов в первых n столбцах таблицы, т. е. элемент B_{2^n}, которых ровно 2^{2^n}. ■

Определение 8. Функцию алгебры логики $f(\widetilde{x}^n)$ назовём *существенно зависящей от переменной* x_i $(i = 1, \ldots, n)$, если существуют значения $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n$ из E_2 такие, что

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \neq f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n).$$

В этом случае x_i называется *существенной переменной функции* f. Переменная, не являющаяся существенной. называется *фиктивной.*

Определение 9. Пусть x_i — фиктивная переменная функции $f(\widetilde{x}^n)$. Тогда функция

$$g(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) := f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

называется *полученной из f удалением фиктивной переменной x_i*. Обратно, говорят, что f *получена из g добавлением i-ой фиктивной переменной.*

Определение 10. Если функции f и g получены друг из друга цепочкой добавлений и удалений фиктивных переменных, то назовём их *эквивалентными.*

Определение 11. Функция алгебры логики $f(\widetilde{x}^n)$ называется *симметрической относительно переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$*, если любая перестановка значений этих переменных не изменяет значения функции. В частности, когда функция является симметрической относительно всех своих переменных, она называется просто *симметрической.*

Такую функцию можно задавать таблицей, существенно более короткой, чем в общем случае. Она имеет всего два столбца: в первом указывается количество переменных равных 1, во втором — соответствующие значения функции. Таблица имеет всего $n+1$ строку.

Определение 12. *Элементарными* мы будем называть следующие функции:

1. *Константы* 0 и 1 (нуль-местные функции).
2. *Тождественная функция* x и *отрицание* $\overline{x} := 1 - x$ (одноместные функции).
3. *Конъюнкция* $x_1 \& x_2 := \min\{x_1, x_2\}$ (иногда обозначается как $x_1 \cdot x_2$).
4. *Дизъюнкция* $x_1 \vee x_2 := \max\{x_1, x_2\}$.
5. *Имплкация* $x_1 \to x_2$, $x_1 \to x_2 = 0 \overset{\text{def}}{\iff} x_1 = 1, x_2 = 0$.
6. *Сумма по* mod 2 $x_1 \oplus x_2$, $x_1 \oplus x_2 = 0 \overset{\text{def}}{\iff} x_1 = x_2$.
7. *Эквивалентность* $x_1 \sim x_2$, $x_1 \sim x_2 = 1 \overset{\text{def}}{\iff} x_1 = x_2$.
8. *Штрих Шеффера* $x_1 \mid x_2 := \overline{x_1 \cdot x_2}$.
9. *Стрелка Пирса* $x_1 \downarrow x_2 := \overline{x_1 \vee x_2}$.

2. Формулы алгебры логики. Слова в конечных алфавитах. Сигнатура. Определение формулы в сигнатуре Σ. Значение формулы Φ на наборе $\widetilde{\alpha}$ значений переменных $\widetilde{x}$. Существенные и несущественные переменные формулы. Функция, определяемая формулой $\widetilde{\Phi}$ относительно переменных $\widetilde{x}$. Функция, получаемая суперпозициями над множеством функций F. Определение суперпозиций, не использующее понятия формулы (без доказательства эквивалентности). Операции суперпозиции: подстановка переменных, подстановка функции, добавление либо удаление несущественных переменных

Определение 1. *Алфавитом* может служить любое множество, а *словом* в этом алфавите называется упорядоченный набор α элементов из A. Обычно будем пользоваться записью $\alpha(1) \ldots \alpha(n)$. Пустое слово обозначается через Λ.

Пусть S — множество символов (на самом деле, объектов произвольной природы), которые будут использоваться для обозначения функций из F — множества функций алгебры логики, которые мы хотим считать «элементарными».

Определение 2. Отображение $\Sigma : S \to F$ назовём *сигнатурой* для F.

Примечание. Различным символам из S может сопоставляться одна и та же функция.

Для построения формул нам понадобятся также переменные. Выберем фиксированное счётное множество $X := \{x_1, x_2, \ldots\}$, которые будем называть *символами переменных.*

Определение 3. *Формулы в сигнатуре* Σ определяются индуктивно.

1. Если x_i — символ переменной, то однобуквенное слово, образованное символом x_i — формула в Σ.

2. Если функция $f = \Sigma(s)$ (где $s \in S$) зависит от n переменных, причём $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ — формулы в сигнатуре Σ, то слово $s(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ — формула в сигнатуре Σ.

Таким образом, каждая формула в сигнатуре Σ представляет собой слово в алфавите $X \cup S \cup \{$«,», «(», «)»$\}$. Отметим, что пока мы никак не определили связь между формулами и функциями. Мы лишь дали индуктивное определение некоторому классу слов.

Пусть Φ — формула в сигнатуре Σ; $\widetilde{x} = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ — какой-либо упорядоченный набор переменных, включающий все переменные формулы Φ; $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — двоичный набор ($\alpha_i \in E_2$, $i = 1, \ldots, n$).

Определение 4. Определим *значение формулы* Φ *на наборе* $\widetilde{\alpha}$ переменных $\widetilde{x}$ индукцией по построению формулы Φ:

1. Если Φ есть однобуквенное слово x_{i_j}, то $\Phi[\widetilde{x}, \widetilde{\alpha}] := \alpha_j$.
2. Пусть Φ имеет вид $s(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$, $f = \Sigma(s)$, причём $\Phi_1[\widetilde{x}, \widetilde{\alpha}] = \beta_1, \ldots, \Phi_m[\widetilde{x}, \widetilde{\alpha}] = \beta_m$. Тогда $\Phi[\widetilde{x}, \widetilde{\alpha}] := f(\beta_1, \ldots, \beta_m)$.

Заметим, что функции по формулам мы всё ещё не определили.

Определение 5. Переменную x_{i_j} формулы Φ назовём *существенной*, если существуют такие значения $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n$, что

$$\Phi[\widetilde{x}, \alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n] \neq \Phi[\widetilde{x}, \alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n].$$

Иначе переменная x_{i_j} *фиктивная*.

Определение 6. Пусть Φ — формула в сигнатуре Σ; $P = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\}$ — некоторое множество переменных, включающее все существенные переменные формулы Φ. Будем считать, что $i_1 < \ldots < i_n$. Обозначим $\widetilde{x} := (x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$. Рассмотрим $f \in P_2^n$ такую, что $\forall \widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in B_n$ выполнено $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \Phi[\widetilde{x}, \widetilde{\alpha}]$. Тогда *формула* Φ *определяет функцию* f *относительно переменных* P.

Определение 7. Будем называть формулы в сигнатуре Σ, представляющие собой переменные, *вырожденными*, а прочие формулы — *невырожденными*. Если функция f определена в сигнатуре $\Sigma : S \to F$ невырожденной формулой, то говорим, что она *получена суперпозициями над* F.

Суперпозиции можно определить и без понятия формулы.

Определение 8. Функция тогда и только тогда *получена суперпозициями над* F, когда она может быть получена из функций системы F конечной последовательностью применений следующий операций:

1. **Операция подстановки переменных**. Пусть $f(\widetilde{x}^n) \in P_2$. Рассмотрим упорядоченный набор $(i_1, \ldots, i_n)$, элементов множества $\{1, \ldots, n\}$ (не обязательно перестановку). Пусть $g(\widetilde{x}^n)$ — функция, определённая на B_n, причём $g(x_1, \ldots, x_n) := f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$. Тогда скажем, что g получена из f *операцией подстановки переменных*.
2. **Операций подстановки одной функции в другую**. Пусть имеются функции $f \in P_2^n$ и $g \in P_2^m$. Рассмотрим функцию $h \in P_2^{n+m-1}$ такую, что

   $$h(x_1, \ldots, x_{m+n-1}) := f(x_1, \ldots, x_{n-1}, g(x_n, \ldots, x_{n+m-1})).$$

   Скажем, что h получена из функций f и g *операций подстановки одной функции в другую*.
3. **Операция добавления или удаления фиктивной переменной**.

Эквивалентность определений доказывается в курсе математической логики.

3. Эквивалентные формулы. Основные тождества для элементарных функций алгебры логики. Двойственность и самодвойственность. Принцип двойственности

Запись $a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_n$, где операция $\circ$ ассоциативна и коммутативна, будет пониматься как условное обозначение для формулы $\circ(a_1, \circ(a_2, \ldots, \circ(a_{n-1}, a_n) \ldots))$

Приоритет операций: $\overline{*}, \cdot, \vee, \to, \oplus, \sim$.

Определение 1. Формулы Φ_1 и Φ_2 в сигнатуре Σ назовём *эквивалентными*, если они определяют равные функции относительно объединения своих переменных.

Определение 2. Слово $\Phi_1 = \Phi_2$, где Φ_1 и Φ_2 — формулы, назовём *тождеством.*

Примечание. Используя тождества, можно выполнять эквивалентные преобразования формул алгебры логики. Обоснованием такой возможности служит лемма о замене из курса математической логики.

Список основных тождеств:

1. Ассоциативность и коммутативность операций $\cdot, \vee, \oplus, \sim$.
2. Дистрибутивности: $(a \vee b) \cdot c = a \cdot c \vee b \cdot c$, $(a \cdot b) \vee c = (a \vee c) \cdot (b \vee c)$, $(a \oplus b) \cdot c = a \cdot c \oplus b \cdot c$.
3. Тождества для отрицания: $\overline{a \vee b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$, $\overline{a \cdot b} = \overline{a} \vee \overline{b}$ (формулы де Моргана), $\overline{\overline{a}} = a$, $a \cdot \overline{a} = 0$, $a \vee \overline{a} = 1$, $\overline{a \to b} = a\overline{b}$.
4. Тождества для идентичных операндов: $a \cdot a = a$, $a \vee a = a$, $a \to a = 1$, $a \sim a = 1$, $a \oplus a = 0$.
5. Тождества с константным операндом: $a \vee 0 = a$, $a \cdot 0 = 0$, $a \to 0 = \overline{a}$, $a \oplus 1 = \overline{a}$, $0 \to a = 1$.

Определение 3. $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i := a_1 \oplus a_2 \oplus \ldots \oplus a_n$, $\prod\limits_{i=1}^{n} a_i := a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$, $\bigvee\limits_{i=1}^{n} a_i := a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n$.

Определение 4. Функция $g(x_1, \ldots, x_n) := \overline{f}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ называется *двойственной* к функции $f(\widetilde{x}^n)$. Обозначение $g = f^*$.

Примечание. Согласно формулам де Моргана, $\&^* = \vee$.

Примечание. Очевидно, что $(f^*)^* = f$. Таблица для функции f^* получается инвертированием всех битов таблицы для функции f.

Определение 5. Если $f = f^*$, то функция f называется *самодвойственной.*

Теорема 1 (Принцип двойственности)**.** Пусть $\Sigma : S \to F$ — сигнатура. Определим двойственную сигнатуру $\Sigma^* : S \to F^*$, равенством $\Sigma^*(s) := (\Sigma(s))^*$. Если формула Φ определяет над Σ функцию g, то она же определяет над Σ^* двойственную функцию g^*. Списки переменных совпадают.

Доказательство. Таблицы «элементарных» функций, обозначаемых символами из S, отличаются в двойственной сигнатуре от их таблиц в исходной сигнатуре лишь тем, что нули и единицы меняются местами. Однако последовательность вычислений для построения таблицы функции g по исходным таблицами «элементарных» функций в обоих случаях одна и та же. Поэтому и результат вычислений для двойственной сигнатуры будет отличаться от результата для исходной сигнатуры лишь переобозначением нулей и единиц. ■

4. Представление функций алгебры логики посредством совершенных дизъюнктивных нормальных форм. Выразимость функций алгебры логики суперпозициями через дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание. Совершенная конъюнктивная нормальная форма

Определение 1. Пусть x — переменная, $\sigma \in E_2$. Тогда $x^\sigma := \begin{cases} x, & \text{если } \sigma = 1, \\ \overline{x}, & \text{если } \sigma = 0. \end{cases}$

Примечание. $x^\sigma = 1 \Leftrightarrow x = \sigma$.

Теорема 1. $\forall f \in P_2^n$, $\forall m = 1, \ldots, n$

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\in B_m} \prod_{i=1}^{m} x_i^{\sigma_i} \cdot f(\sigma_1, \ldots, \sigma_m, x_{m+1}, \ldots, x_n).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный двоичный набор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$. Если $(\sigma_1, \ldots, \sigma_m) \neq (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, то найдётся $i \in \{1, \ldots, m\}$, для которого $\sigma_i \neq \alpha_i$. Тогда $\alpha_i^{\sigma_i} = 0$. Единственным членом дизъюнкции, влияющим на её значение является $(\sigma_1, \ldots, \sigma_m) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$. Он равен $\alpha_1^{\sigma_1} \ldots \alpha_m^{\sigma_m} f(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \alpha_n) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$. ■

Два важных частных случая теоремы:

Определение 2. При $m = 1$ получаем, так называемое, *разложение функции f по переменной x_n*:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_n \cdot f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1) \vee \overline{x}_n \cdot f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0).$$

Определение 3. При $m = n$ получаем *совершенную дизъюнктивную нормальную форму*:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n):f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n}.$$

Теорема 2. Каждая функция алгебры логики может быть получена суперпозициями из отрицания, конъюнкции и дизъюнкции.

Доказательство. Если функция не тождественно нулевая, то она реализуется с помощью СДНФ. Её можно рассматривать как формулу алгебры логики, построенную при помощи отрицаний, конъюнкция и дизъюнкций. Если функция тождественно нулевая, то её можно задать формулой $x_1 \cdot \overline{x}_1$, рассматриваемой относительно списка фиктивных переменных требуемой длины. ■

Для произвольной функции $f \in P_2$ рассмотрим функцию f^* и зададим её посредством СДНФ:

$$f^*(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n):f^*(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma}.$$

Здесь предполагается, что $f^* \neq 0$ (т. е. $f \neq 1$). Согласно принципу двойственности, указанное равенство сохранится при переходе к двойственной сигнатуре в обеих частях:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{(\delta_1,\ldots,\delta_n):f(\delta_1,\ldots,\delta_n)=0} (x_1^{\delta_1} \vee \ldots \vee x_n^{\delta_n}).$$

Определение 4. Выражение в правой части называется *совершенной конъюнктивной нормальной формой.*

5. Полные системы функций алгебры логики. Примеры. Теорема Жегалкина.

Определение 1. Назовём множество M функций алгебры логики *полным*, если любая функция алгебры логики может быть получена из него суперпозициями.

Примечание. Очевидно, что множество P_2 полно. Кроме того, согласно доказанной выше теореме, множество $\{\overline{x}_1, x_1x_2, x_1 \vee x_2\}$ тоже полно.

Предложение 1. Если множество M_1 полно, а каждая функция этого множества выражается суперпозициями через функции множества M_2, то множество M_2 тоже полно.

С помощью данного предложения можем привести ещё ряд примеров полных систем:

1. $\{\overline{x}_1, x_1x_2\}$ полно, т. к. $\{\overline{x_1}, x_1x_2, x_1 \vee x_2\}$ полно и $x_1 \vee x_2 = \overline{\overline{x}_1\overline{x}_2}$;
2. $\{\overline{x}_1, x_1 \vee y_1\}$ полно — аналогично;
3. $\{x_1 \mid x_2\}$ полно, т. к. $x_1 \mid x_1 = \overline{x}_1$, а $(x_1 \mid x_2) \mid (x_1 \mid x_2) = \overline{x_1 \mid x_2} = x_1x_2$.
4. $\{x_1 \downarrow x_2\}$ полно — аналогично;
5. $\{0, 1, x_1x_2, x_1 \oplus x_2\}$ полно, т. к. $\overline{x} = x \oplus 1$.

Теорема 1 (Жегалкин)**.** Каждая функция алгебры логики представим многочленом по mod 2, причём единственным образом.

Доказательство. Существование есть следствие полноты системы $\{0, 1, x_1x_2, x_1 \oplus x_2\}$. Единственность вытекает из того, что полиномов по mod 2 от n переменных столько же, сколько n-местных булевых функций. Действительно, каждый полином имеет вид

$$\sum_{\{i_1,\ldots,i_s\}\subseteq\{1,\ldots,n\}} a_{i_1\ldots i_s} x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_s}.$$

Количество членов в указанной сумме есть 2^n. Для каждого члена имеется две возможности выбора его коэффициентов, отсюда количество полиномов $2^{2^n} = |P_2^n|$. ■

6. Замыкание множества функций алгебры логики. Примеры. Простейшие свойства замыкания. Замкнутые классы. Примеры

Определение 1. *Замыканием* $[M]$ множества M функций алгебры логики называется множество всех функций, которые можно получить суперпозициями над M.

Определение 2. Множество M называется *замкнутым*, если $[M] = M$.

Предложение 1 (Простеише свойства замыкания)**.**
1. $[M] \supseteq M$;
2. $[[M]] = [M]$ («замыкание замкнуто»);
3. $M_1 \subseteq M_2 \Rightarrow [M_1] \subseteq [M_2]$;
4. $[M_1 \cup M_2] \supseteq [M_1] \cup [M_2]$.

Переформулировка полноты множества функций в терминах замыкания: система $M \subseteq P_2$ полна тогда и только тогда, когда $[M] = P_2$. Примеры замкнутых классов функций — заголовки следующих 4 вопросов. Любая неполная система является подмножеством некоторого отличного от P_2 замкнутого класса.

7. Классы T_0 и T_1, их замкнутость

Определение 1. $T_0 := \{f \in P_2 : f(0, \ldots, 0) = 0\}$ («сохраняют 0»).

Предложение 1. Класс T_0 замкнут.

Доказательство. Проверим на всех операциях суперпозиции:

1. **Подстановка переменных**. Если $f \in T_0 \cap P_2^n$ и $g \in P_2^n$ получена из f подстановкой переменных $g(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, то $g(0, \ldots, 0) = f(0, \ldots, 0) = 0$.

2. **Подстановка функции**. Если $f \in T_0 \cap P_2^n$, $g \in T_0 \cap P_2^m$ и
$$h(x_1, \dots, x_{n+m-1}) := f(x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_n, \dots, x_{n+m-1})),$$
то $h(0, \dots, 0) = f(0, \dots, 0, \underbrace{g(0, \dots, 0)}_{0}) = 0$.

3. **Добавление и удаление фиктивных переменных**. Очевидно.

■

Определение 2. $T_1 := \{f \in P_2 : f(1, \dots, 1) = 1\}$ («сохраняют 1»).

Предложение 2. Класс T_1 замкнут.

Доказательство. Аналогично T_0. ■

Предложение 3. $|T_0 \cap P_2^n| = |T_1 \cap P_2^n| = 2^{2^n - 1}$.

Доказательство. Значение для одного набора уже задано, для остальных выбираются так же, как и раньше. ■

8. Класс S, его замкнутость. Лемма о несамодвойственой функции

Определение 1. $S := \{f \in P_2 : f = f^*\}$.

Предложение 1. S замкнут.

Доказательство. Проверим для каждой операции:

1. **Подстановка переменых**. Пусть $f \in S \cap P_2^n$, а $g(x_1, \dots, x_n) = f(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$. Тогда
$$\overline{g}(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n) = \overline{f}(\overline{x}_{i_1}, \dots, \overline{x}_{i_n}) = f(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) = g(x_1, \dots, x_n).$$

2. **Подстановка функции**. Пусть $f \in S \cap P_2^n$, $g \in S \cap P_2^m$, причём
$$h(x_1, \dots, x_{n+m-1}) := f(x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_n, \dots, x_{n+m-1})),$$
тогда
$$\begin{aligned}\overline{h}(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_{n+m-1}) = \overline{f}(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_{n-1}, g(\overline{x}_n, \dots, \overline{x}_{n+m-1})) = \\ = f(x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_n, \dots, x_{n+m-1})) = h(x_1, \dots, x_{n+m-1}).\end{aligned}$$

3. **Добавление и удаление фиктивных переменных**. Очевидно.

■

Лемма 1 (О несамодвойственной функции)**.** Если $f \in P_2^n \setminus S$, то из f и $\overline{x}$ суперпозициями можно получить константу.

Доказательство. Из $f \notin S$, найдётся $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in B_n$ такое, что $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = f(\overline{\alpha}_1, \dots, \overline{\alpha}_n)$. Рассмотрим функции $\varphi_i(x) := x^{\alpha_i}$ $(i = 1, \dots, n)$. Положим $\varphi(x) := f(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$. Очевидно, функция φ получена суперпозициями из f и $\overline{x}$. Имеем:
$$\begin{aligned}\varphi(0) = f(\varphi_1(0), \dots, \varphi_n(0)) = f(0^{\alpha_1}, \dots, 0^{\alpha_n}) = f(\overline{\alpha_1}, \dots, \overline{\alpha_n}) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \\ = f(1^{\alpha_1}, \dots, 1^{\alpha_n}) = f(\varphi_1(1), \dots, \varphi_n(1)) = \varphi(1).\end{aligned}$$

Значит, φ — константа. ■

Предложение 2. $|S \cap P_2^n| = 2^{2^{n-1}}$.

Доказательство. Т. к. на инвертированных наборах функция $f \in S \cap P_2^n$ принимает инвертированное значение, то её можно задать, заполнив половину таблицы, т. е. она однозначно определяется на $2^n/2 = 2^{n-1}$ наборах. ■

9. Класс M, его замкнутость. Лемма о немонотонной функции

Определение 1. Пусть $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in B_n$. Скажем, что набор $\widetilde{\alpha}$ *не больше* набора $\widetilde{\beta}$ ($\widetilde{\alpha} \leqslant \widetilde{\beta}$), если $\alpha_i \leqslant \beta_i$ $\forall i = 1, \ldots, n$.

Примечание. Даное отношение является отношенем частичного порядка на B_n. Легко привести пару несравнимых наборов — $(0, 1)$ и $(1, 0)$.

Определение 2. $M := \{f \in P_2 : \widetilde{\alpha} \leqslant \widetilde{\beta} \Rightarrow f(\widetilde{\alpha}) \leqslant f(\widetilde{\beta})\}$ — множество *монотонных функций*.

Предложение 1. M замкнут.

Доказательство. Проверим все операции:

1. **Подстановка переменных**. Пусть $f \in M \cap P_2^n$ и $g(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$. Пусть $\widetilde{\alpha} = (\alpha_i)_{i=1}^n, \widetilde{\beta} = (\beta_i)_{i=1}^n$ — элементы B_n, причём $\widetilde{\alpha} \leqslant \widetilde{\beta}$. Тогда $(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_n}) \leqslant (\beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_n})$, поэтому
$$g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = f(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_n}) \leqslant f(\beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_n}) = g(\beta_1, \ldots, \beta_n).$$

2. **Подстановка функции**. Пусть $f \in M \cap P_2^n$, $g \in M \cap P_2^m$ и
$$h(x_1, \ldots, x_{n+m-1}) := f(x_1, \ldots, x_{n-1}, g(x_n, \ldots, x_{n+m-1})).$$
Пусть также $\widetilde{\alpha} = (\alpha_i), \widetilde{\beta} = (\beta_i) \in B_{n+m-1}$. Тогда $g(\alpha_n, \ldots, \alpha_{n+m-1}) \leqslant g(\beta_n, \ldots, \beta_{n+m-1})$. Отсюда
$$h(\widetilde{\alpha}) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, g(\alpha_n, \ldots, \alpha_{n+m-1})) \leqslant f(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, g(\beta_n, \ldots, \beta_{n+m-1})) = h(\widetilde{\beta}).$$

3. **Добавление и удаление фиктивных переменных**. Очевидно.

■

Лемма 1 (О немонотонной функции). Если $f \in P_2^n \setminus M$, то из f, 0 и 1 суперпозициями можно получить $\overline{x}$.

Доказательство. Из $f \notin M$, найдутся наборы $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in B_n$ такие, что $\widetilde{\alpha} \leqslant \widetilde{\beta}$ и $f(\widetilde{\alpha}) = 1$, а $f(\widetilde{\beta}) = 0$. Неравенство $\widetilde{\alpha} \leqslant \widetilde{\beta}$ означает, что найдутся разряды $i_1, \ldots, i_k$ такие, что $\alpha_{i_1} = \ldots = \alpha_{i_k} = 0$, $\beta_{i_1} = \ldots = \beta_{i_k} = 1$ ($i_1 < \ldots < i_k$). При этом $\forall j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}$ выполняется $\alpha_j = \beta_j$. Рассмотрим последовательность наборов $\widetilde{\gamma}_0, \ldots \widetilde{\gamma}_k$. Каждый из этих наборов на позициях из $\{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}$ совпадает с набором $\widetilde{\alpha}$ (и набором $\widetilde{\beta}$). У набора $\widetilde{\gamma}_j$ разряды с номерами $i_1, \ldots, i_j$ равны 0, а остальные — 1. Очевидно, что $\widetilde{\gamma}_0 = \widetilde{\alpha}$, а $\widetilde{\gamma}_k = \widetilde{\beta}$. Таким образом, $f(\widetilde{\gamma}_0) = 1$, $f(\widetilde{\gamma}_k) = 0$. Следовательно, существует минимальный индекс $j \in \{1, \ldots, k\}$, для которого $f(\widetilde{\gamma}_j) = 0$, а $f(\widetilde{\gamma}_{j-1}) = 1$. Наборы $\widetilde{\gamma}_j$ и $\widetilde{\gamma}_{j-1}$ отличаются единственным разрядом, имеющим номер i_j:
$$\widetilde{\gamma}_{j-1} = (\delta_1, \ldots, \delta_{i_j-1}, 0, \delta_{i_j+1}, \ldots, \delta_n) \quad \text{и} \quad \widetilde{\gamma}_j = (\delta_1, \ldots, \delta_{i_j-1}, 1, \delta_{i_j+1}, \ldots, \delta_n).$$

Рассмотрим функцию $\varphi(x) := f(\delta_1, \ldots, \delta_{i_j-1}, x, \delta_{i_j+1}, \ldots, \delta_n)$. Она получена суперпозициями из функций f, 0 и 1. При этом, как было отмечено ранее, $\varphi(0) = 1$ и $\varphi(1) = 0$. Значит, $\varphi(x) = \overline{x}$. ■

Предложение 2. $|M \cap P_2^n| \geqslant 2^{C_n^2}$.

Доказательство. Рассмотрим функции, принимающие на всех наборах, в которых меньше $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ единиц, значение 0, а на всех наборах в которых больше $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ единиц, значение 1. Очевидно, что все они монотонные, а их число равно $2^{C_n^2}$. ■

10. Класс L. Лемма о нелинейной функции

Определение 1. $L := [\{1, x \oplus y\}]$ — множество *линейных* функций.

Предложение 1. L замкнут.

Доказательство. Следствие замкнутости замыкания. ■

Лемма 1. Если $f \in P_2 \setminus L$, то из f, 0 и 1 и $\overline{x}$ суперпозициями можно получить функцию $x_1 \cdot x_2$.

Доказательство. Рассмотрим многочлен Жегалкина функции f:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\{i_1, \ldots, i_s\} \subseteq \{1, \ldots, n\}} a_{i_1 \ldots i_s} x_{i_1} \ldots x_{i_s}.$$

Т. к. $f \notin L$, то без ограничения общности можно считать, что в мономе степени больше 1 есть переменные x_1 и x_2. Перегруппируем члены полинома:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 x_2 f_1(x_3, \ldots, x_n) \oplus x_1 f_2(x_3, \ldots, x_n) \oplus x_2 f_3(x_3, \ldots, x_n) \oplus f_4(x_3, \ldots, x_n).$$

Т. к. полином Жегалкина единственный, то $f_1 \neq 0$. Значит, найдутся такие $\alpha_3, \ldots, \alpha_n \in E_2$, что $f_1(\alpha_3, \ldots, \alpha_n) = 1$. Рассмотрим функцию $\varphi(x_1, x_2) := f(x_1, x_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$. Имеем $\varphi(x_1, x_2) = x_1 x_2 \oplus \alpha x_1 \oplus \beta x_2 \oplus \gamma$ для каких-то $\alpha, \beta, \gamma \in E_2$. Избавимся от линейных членов:

$$\varphi(x_1 \oplus \beta, x_2 \oplus \alpha) = (x_1 \oplus \beta)(x_2 \oplus \alpha) \oplus \alpha(x_1 \oplus \beta) \oplus \beta(x_2 \oplus \alpha) + \gamma = x_1 x_2 + (\alpha\beta \oplus \gamma).$$

Отсюда $x_1 x_2 = \varphi(x_1 \oplus \beta, x_2 \oplus \alpha) \oplus (\alpha\beta \oplus \gamma)$. Теперь вспомним, что $x \oplus 1 = \overline{x}$, поэтому если $\alpha\beta \oplus \gamma = 1$, то получаем $x_1 x_2 = \overline{\varphi(\ldots)}$. Итак, мы получили $x_1 \cdot x_2$ как суперпозицию f, 0, 1 и $\overline{x}$. ■

Предложение 2. $|L \cap P_2^n| = 2^{n+1}$.

Доказательство. Любая n-местная линейная функция имеет вид $a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \ldots \oplus a_n x_n$. Таким образом, у нас $n+1$ неизвестных коэффициентов из E_2, число способов их выбрать равно 2^{n+1}. ■

11. Различие классов T_0, T_1, L, S, M. Теорема о полноте систем функций алгебры логики

Теорема 1. Классы T_0, T_1, L, S, M различны, и ни один из них не содержится ни в одном другом.

Доказательство. Рассмотрим таблицу:

	T_0	T_1	S	M	L
0	+	−	−	+	+
1	−	+	−	+	+
$\overline{x}$	−	−	+	−	+
$x_1 \cdot x_2$	+	+	−	+	−
$x_1 \oplus x_2$	+	−	−	−	+
$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$	+	+	+	−	+
$\mathrm{Maj}(\widetilde{x}^3)$	+	+	+	+	−

Здесь $\mathrm{Maj}(x_1, x_2, x_3) := x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_3x_1$ — *функция голосования*. В приведённой таблице для каждой упорядоченной пары классов существует функция, содержащаяся в первом, но не содержащаяся во втором. ∎

Теорема 2 (Пост)**.** Система функций из P_2 полна тогда и только тогда, когда она не содержится ни в одном из классов T_0, T_1, L, S, M.

Доказательство. $\Rightarrow$. Пусть F полна и $F \subseteq K$, где $K \in \{T_0, T_1, L, S, M\}$. Тогда $[F] \subseteq [K] = K \neq P_2$.

$\Leftarrow$. Обратно, пусть $F \not\subseteq T_0$, $F \not\subseteq T_1$, $F \not\subseteq L$, $F \not\subseteq S$, $F \not\subseteq M$. Тогда в F найдутся $f_1 \notin T_0$, $f_2 \notin T_1$, $f_3 \notin L$, $f_4 \notin S$, $f_5 \notin M$. Возможны два случая:

1. $f_1 \in T_1$. Тогда $\varphi(x) := f_1(x, \ldots, x) = 1$. Так получаем константу 1. Чтобы получить константу 0, достаточно теперь воспользоваться функцией f_2.

2. $f_1 \notin T_1$. Тогда $\varphi(x) := f_1(x, \ldots, x) = \overline{x}$. По лемме о несамодвойственной функции, из f_4 и $\overline{x}$ можно получить константу. Имея отрицание, получаем также и другую константу.

Теперь по лемме о немонотонной функции, из f_5, 0, 1 можно получить $\overline{x}$. По лемме о нелинейной функции, из f_3, 0, 1 и $\overline{x}$ можно получить $x_1 \cdot x_2$. Следовательно, из F можно выразить полную систему $\{\overline{x}, x_1 \cdot x_2\}$, поэтому F также полна. ∎

Следствие 1. Каждый замкнутый класс функций из P_2, отличный от P_2, содержится хотя бы в одном из классов T_0, T_1, L, S, M.

Доказательство. Действительно, если бы он не содержался ни в одном из этих классов, то был бы полон, а т. к. замкнут, то совпал бы с P_2. ∎

12. Предполные классы. Предполнота классов T_0, T_1, L, S, M. Отсутствие в P_2 других предполных классов

Определение 1. Класс K функций алгебры логики называется *предполным*, если $[K] \neq P_2$, но $\forall f \in P_2 \setminus K$ выполнено $[K \cup \{f\}] = P_2$.

Предложение 1. Любой предполный класс замкнут.

Доказательство. Предположим противное. Рассмотрим $f \in [K] \setminus K$. $[K \cup \{f\}] = P_2$. С другой стороны, $K \cup \{f\} \subseteq [K]$, а значит, $[K \cup \{f\}] \subseteq [[K]] = [K] \neq P_2$. Противоречие. ∎

Следствие 1. В алгебре логики имеются ровно 5 предполных классов: T_0, T_1, L, S, M.

Доказательство. Действительно, если класс K предполон, то он, согласно следствию 1 из предыдущего вопроса, должен содержаться в одном из классов T_0, T_1, L, S, M. Обозначим его за Q. Если бы он не совпал с классом Q, то можно было бы взять функцию $f \in Q \setminus K$. Т. к. $[K \cup \{f\}] \subseteq [Q] = Q \neq P_2$, то получили бы противоречие с предполнотой класса K.

Обратно, рассмотрим произвольный класс Q из указанных пяти классов. Возьмём произвольную функцию алгебры логики f, не принадлежащую Q. Рассмотрим класс $Q' = [Q \cup \{f\}]$. Если бы он не совпал с P_2, то должен был бы содержаться в одном из классов T_0, T_1, S, M, L, причём (из-за добавленной функции f) отличном от класса Q. Однако ни один из данных классов не содержится в другом. Поэтому класс Q' совпадает с P_2, т. е. класс Q предполон. ∎

13. Теорема о выделении из полной системы функций алгебры логики полной подсистемы, имеющей не более 4 функций

Теорема 1. Из каждой полной системы функций алгебры логики можно выделить полную подсистему, имеющую не более 4 функций.

Доказательство. Пусть система F полна. Рассмотрим функции $\{f_1, \ldots, f_5\}$, введённые при доказательстве теоремы Поста. Они образуют полную подсистему. Если $f_1 \in T_1$, то f_1 несамодвойственная и можно было взять $f_5 = f_1$. Если же $f_1 \notin T_1$, то f_1 немонотонна ($f_1 \neq 0$, т. к. $f_1 \notin T_0$) и можно взять $f_4 = f_1$. ■

Примечание. Данная оценка точна — примером полной подиситемы из четырёх функций, теряющей свойство полноты при удалении любой из них, служит $F = \{0, 1, x_1x_2, x_1 \oplus x_2 \oplus x_3\}$.

14. Полнота относительно замкнутого класса. Базис в замкнутом классе. Примеры. Теоремы Поста (без доказательства) о мощности множества замкнутых классов в P_2 и о базисах этих классов

Определение 1. Пусть K — замкнутый класс функций алгебры логики. Система F функций этого класса называется *полной в* K, если $[F] = K$.

Определение 2. Система $F \subseteq K$ называется *базисом* в K, если она полна в K, но каждая её собственная подсистема неполна в K.

Пример 1.

1. $\{x_1 \cdot x_2, 0, 1, x_1 \oplus x_2 \oplus x_3\}$ — базис в P_2.
2. $\{0, 1, x_1 \cdot x_2, x_1 \vee x_2\}$ — базис в M.

   Если монотонная функция f — не тождественный 0, то для неё существует непустое множество N «нижних единиц» — наименьших в смысле рассматриваемого нами частичного порядка наборов, на которых эта функция обращается в 1. Если она не тождественно равна 1, то среди её нижних единиц нет нулевого набора. Для произвольной нижней единицы α, не являющейся нулевым набором, можно рассмотреть номера $i_1, \ldots, i_k$ всех её разрядов, равных 1, и построить конъюнкцию $K_\alpha(\widetilde{x}^n) := x_{i_1} \ldots x_{i_k}$, $k \geqslant 1$. Эта конъюнкция обращается в 1 на наборе α и на всех больших (в смысле рассматриваемого нами частичного порядка) наборах. Очевидно, что f равна дизъюнкции всех таких конъюнкций:

   $$f = \bigvee_{\alpha \in N} K_\alpha(\widetilde{x}^n).$$

   Таким образом, если монотонная функция не тождественная константа, то её можно выразить через дизъюнкцию и конъюнкцию. Это и устанавливает полноту рассматриваемой системы функций в M. Если удалить из этой системы любую константу, то оставшиеся функции будут сохранять противоположную константу. Если удалить конъюнкцию, то останутся только дизъюнкции. Если удалить последнюю функцию, то через остальные функции можно будет выразить только константы и многоместные конъюнкции. Таким образом, данная система — базис в M.

Теорема 1 (Пост)**.** Каждый замкнутый класс функций алгебры логики имеет конечный базис.

Теорема 2 (Пост)**.** Множество замкнутых классов функций алгебры логики счётно.

15. Функции k-значной логики. Задание их таблицами, элементарные функции. Формулы k-значной логики. Суперпозиция.

Определение 1. $E_k := \{0, 1, \ldots, k-1\}$.

Определение 2. Функцию $f : E_k \times \ldots \times E_k \to E_k$ будем называть *функцией k-значной логики.* Множество всех таких функций обозначается как P_k.

Функцию k-значной логики можно задавать таблицей, аналогичной таблице для функции алгебры логики. Т. к. каждый аргумент функции имеет ровно одно из k значений, число строк равно k^n. Столбец значений имеет ровно столько же позиций, на каждой позиции может быт расположено одно из k значений, т. е. число возможных столбцов — k^{k^n}. Т. е. $|P_k| = k^{k^n}$.

Как и в случае алгебры логики, выделяется некоторый **список элементарных функций**:

1. *Константы* $0, 1, \ldots, k-1$ и *тождественная функция* x.
2. $\overline{x} := x + 1 \pmod k$ — *отрицание Поста.*
3. $\sim x := k - 1 - x$ — *отрицание Лукашевича*
4. $J_i(x) := \begin{cases} k-1, & \text{если } x = i, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ — *индикаторная функция*, принимающая в i «большое значение».
5. $j_i(x) := \begin{cases} 1, & \text{если } x = i, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ — *индикаторная функция*, принимающая в i «маленькое значение».
6. $\min(x_1, x_2)$ — возможное обобщение конъюнкции (часто будем обозначать через $x_1 \& x_2$).
7. $x_1 \cdot x_2 \pmod k$ — другое возможное обобщение конъюнкции.
8. $\max(x_1, x_2)$ — возможное обобщение конъюнкции (часто будем обозначать через $x_1 \vee x_2$).
9. $x_1 + x_2 \pmod k$ — другое возможное обобщение конъюнкции.

В k-значном случае вводятся такие же определения сигнатуры $\Sigma : S \to F$, $F \subseteq P_k$, формулы в сигнатуре Σ и функции, реализуемой формулой относительно заданного списка переменных, как и в случае алгебры логики. Дословно так же вводятся понятие суперпозиции, три операции суперпозиции и определение эквивалентности формул.

16. Простейшие тождества для функций в P_k. Аналог совершенной дизъюнктивной нормальной формы для P_k

1. Операции $\min(x_1, x_2)$, $\max(x_1, x_2)$, $x_1 \cdot x_2 \pmod k$, $x_1 + x_2 \pmod k$ ассоциативны и коммутативны.
2. Дистрибутивности: $(x_1 \vee x_2) \& x_3 = (x_1 \& x_3) \vee (x_2 \& x_3)$, $(x_1 \& x_2) \vee x_3 = (x_1 \vee x_3) \& (x_1 \vee x_3)$, $(x_1 + x_2) \cdot x_3 = x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3$.
3. При $k > 2$: $\sim(\sim x) = x$, $\overline{\overline{x}} = x + 2$.
4. $\sim(\min(x_1, x_2)) = \max(\sim x_1, \sim x_2)$ — аналог закона де Моргана. Заметим, что для отрицания Поста аналогичное равенство при $k > 3$ тождеством не является.

Используя операции J_i, $\vee$, $\&$ и константы, можно построить аналог СДНФ в k-значной логике. Именно, для произвольной функции $f \in P_k^n$ имеет место следующее тождество:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in E_k^n} J_{\sigma_1}(x_1) \& \ldots \& J_{\sigma_n}(x_n) \& f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

Доказывается так же, как и в случае СДНФ.

17. Полные системы в P_k. Примеры. Система $\{\max(x_1, x_2), \overline{x}\}$. Функция Вебба

Определение 1. Система $F \subseteq P_k$ назовём *полной*, если каждая функция из P_k получается из F суперпозициями.

Пример 1. Полными в P_k являются следующие системы:

1. P_k — очевидно;
2. $\{0, 1, \ldots, k-1, J_0(x), \ldots, J_{k-1}(x), \min(x_1, x_2), \max(x_1, x_2)\}$ — эта система образована функциями, использованными в приведённом выше аналоге СДНФ.

Теорема 1. Система $\{\overline{x}, \max(x_1, x_2)\}$ полна в P_k.

Доказательство. Прежде всего покажем, что через функции данной системы можно выразить все константы. Из $\overline{x} = x + 1$ получаем $x + 2, x + 3, \ldots, x + k - 1$, навешивая каждый раз нужное количество отрицаний Поста. Т. к. значения $x, x+1, \ldots, x+k-1$ различны по модулю k, а их число равно k, то они покрывают все значения $0, 1, \ldots, k-1$. Следовательно, $\max(x, x+1, \ldots, x+k-1) = k-1$. Так мы получили константу $k-1$. Навешивая на неё отрицания Поста, получим остальные константы. Теперь покажем, как строить все функции от одной переменой. Будем искать отрицание Лукашевича (с помощью которого из max получим min) и все функции J_i.

Снова рассмотрим максимум выражений $x, x+1, \ldots, x+k-1$, но на этот раз отбросим одно из них — например, $x+j$. Теперь максимум от оставшихся есть либо $k-1$, либо $k-2$. Принимая во внимание $x+j = k-1 \Leftrightarrow x = k-j-1$, получаем, что функция $\varphi_j(x) := \max(x+\alpha : \alpha = 0, 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, k-1)$ равна $k-1$ при $x \neq k-1-j$ и $k-2$ при $x = k-1-j$. Прибавив к этой функции 1, получим $J_{k-j-1}(x)$. Т. к. j можно варьировать на множестве $\{0, 1, \ldots, k-1\}$. то в результате имеем все функции $J_0(x), \ldots, J_{k-1}(x)$. Мы будем получать произвольные функции одной переменой, «складывая» их из отдельных «столбиков». У нас уже имеются столбики высоты $k-1$ — графики функций J_i. Если взять $\max(J_i, p)$ $(p = 0, 1, \ldots, k-1)$, то получится функция, принимающая в точке i значение $k-1$, а в остальных — значение p. Прибавив $k-p$, получаем один «столбик» высоты $k-p-1$. Обозначим $h_{p,i} := \max(J_i, p) + (k-p)$. Варьируя p, получаем все функции $f_{s,i}(x) := h_{k-1-s,i}(x)$. Теперь $\forall g \in P_k^1$ имеем

$$g(x) = \max(f_{g(0),0}(x), \ldots, f_{g(k-1),k-1}).$$

Таким образом получаем отрицание Лукашевича, а из него и max — min. Теперь имеем всю полную систему $\{0, 1, \ldots, k-1, J_0(x), \ldots, J_{k-1}(x), \min(x_1, x_2), \max(x_1, x_2)\}$. ■

Определение 2. $V_k(x_1, x_2) := \max(x_1, x_2) + 1$ — *функция Вебба.*

Теорема 2. Система $\{V_k(x_1, x_2)\}$ полна в P_k.

Доказательство. Из функции Вебба получается отрицание Поста $V_k(x, x) = x + 1 = \overline{x}$. Следовательно, получаем функции $x+i$ $(i = 0, \ldots, k-1)$. Теперь получаем $\max(x_1, x_2) = V_k(x_1, x_2) + (k-1)$. Имеем всю полную систему $\{\overline{x}, \max(x_1, x_2)\}$. ■

18. Замыкание и замкнутые классы в P_k. Примеры

В k-значной логике вводятся такие же, как и в алгебре логики, определения замыкания и замкнутого класса.

Пример 1 (Замкнутые классы в P_k)**.**

1. P_k — очевидно.

2. Этот пример обобщает классы T_0 и T_1. Пусть $Q \subseteq E_k$. Обозначим через T_Q множество всех функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ из P_k таких, что $\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in Q$ выполнено $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in Q$. Иными словами, T_Q — класс функций, сохраняющих множество Q. Точно так же, как и для T_0 и T_1 в P_2, доказывается, что T_Q замкнут.

Рассмотрим $F = \{\sim x, \max(x_1, x_2)\}$. Пусть $k \geqslant 3$. Тогда $[F] \subseteq T_{\{0,k-1\}} \neq P_k$, следовательно, F не полна. Таким образом, замена отрицания Поста на отрицание Лукашевича приводит к потере полноты.

19. Алгоритм распознавания полноты в P_k. Последовательность Кузнецова для множества F функций k-значной логики. Стабилизация этой последовательности на множестве $[F]_{x_1 x_2}$

Определение 1. Индукцией по определению формулы в сигнатуре $\Sigma : S \to F$ ($F \subseteq P_k$) определим *глубину формулы*:

1. Если x_i — символ переменной, то глубина формулы x_i равна 0.

2. Если $s \in S$, функция $f = \Sigma(s)$ зависит от n переменных, $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ — формулы в сигнатуре Σ, причём m — наибольшая из глубин этих формул, то глубина формулы $s(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ равна $m + 1$.

Глубину формулы Φ будем обозначать через $d(\Phi)$.

Примечание. Очевидно, что глубина формулы — это максимальная из длин цепочек «вложенных» друг в друга «операций» для неё.

Теорема 1. Существует алгоритм, распознающий полноту конечных систем функций в P_k.

Определение 2. Определим последовательность $G_1, G_2, \ldots$ множеств функций в P_k, зависящих от двух переменных. В качестве G_i берётся множество всех функций, определяемых в сигнатуре Σ невырожденными формулами, содержащими только переменные x_1, x_2 и имеющими глубину, меньшую i. При определении функции каждая такая формула будет рассматриваться относительно переменных x_1, x_2. Эту последовательность назовём *последовательностью Кузнецова.*

Очевидно, $\varnothing = G_1 \subseteq G_2 \subseteq \ldots$ Т. к. число всех функций в P_k, зависящих от двух переменных, равно k^{k^2}, то $|G_i| \leqslant k^{k^2}$ для всех i, и указанная последовательность стабилизируется, начиная с некоторого номера m: $G_m = G_{m+1} = \ldots = G$.

Определение 3. Будем называть G *пределом последовательности Кузнецова.*

При построении последовательности Кузнецова будем связывать с каждой функцией G_i некоторую формулу, содержащую только переменные x_1, x_2 и имеющую глубину, меньшую i, реализующую эту функцию. Рассмотрим произвольную функцию f из G_{i+1}, не вошедшую в G_i. Она должна определяться некоторой формулой Φ вида $s(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$, содержащей только переменные x_1, x_2 и имеющей глубину меньше $i + 1$. Тогда глубина каждой формулы Φ_j меньше i, т. е. она является либо переменной, либо определяет функцию $g_j \in G_i$. Но с этими функциями при построении G_i мы уже связали какие-то определяющие их формулы Φ'_j, возможно, отличающиеся от формул Φ_j. Очевидно, что при замене в формуле Φ отличных от переменных формул Φ_j на реализующие те же самые функции формулы Φ'_j мы получим формулу Φ', определяющую ту же самую функцию, что и формула Φ.

Это означает, что для получения G_{i+1} из G_i нам достаточно рассмотреть только всевозможные формулы Φ' вида $s(\Phi'_1, \ldots, \Phi'_n)$, где $s \in S$, а $\Phi'_1, \ldots, \Phi'_n$ — переменные либо формулы, сопоставленные функциям из G_i. Те из формул Φ', которые дадут новые функции, не встречавшиеся в G_i, сопоставляются этим функциям, а сами функции добавляются к G_i. Повторения отбрасываются.

Таким образом, получаем алгоритм построения множеств G_i ($i = 1, 2, \ldots$). Т. к. G_{i+1} однозначно определяется по G_i, эту последовательность достаточно прослеживать до первого совпадения её членов, далее она стабилизируется. Очевидно, первое совпадение произойдёт за конечное число шагов, т. е. получаем алгоритм нахождения предела G последовательности Кузнецова.

Доказательство. Предположим, что функция Вебба $V_k(x_1, x_2)$ принадлежит к пределу G. Тогда, по определению последовательности Кузнецова, она задаётся формулой в сигнатуре Σ, т. е. получается суперпозициями из F, и F полно.

Обратно, пусть F полно. Тогда функция Вебба задаётся некоторой формулой в сигнатуре Σ, имеющей ровно две существенные переменные. Переобозначим эти переменные на x_1, x_2, а все несущественые переменные заменим на x_1. Если эту формулу рассматривать относительно x_1, x_2, то она снова будет определять функцию Вебба. Однако, по нашему определению, такая формула определяет функцию из множества G_{i+1}, где i — глубина формулы. Следовательно, функция Вебба попадает в множество G.

Итак, алгоритм распознавания полноты конечной системы функций в P_k состоит в построении по ней последовательности Кузнецова и проверке вхождения функции Вебба в предел этой последовательности. Если входит, то система полна, иначе — неполна. ■

20. Существование конечной полной подсистемы в полной системе функций k-значной логики

Теорема 1. Из каждой полной в P_k системы функций можно выделить конечную полную подсистему

Доказательство. Если система F полна, то функцию Вебба можно выразить формулой в сигнатуре для F. Рассматриваем конечное подмножество функций, использованных в данной формуле. Оно и будет полным. ■

21. Селекторные функции. Сохранение множества K, включающего селекторные функции. Описание класса S как класса сохранения некоторого множества K. Замкнутость класса $U(K)$ всех функций, сохраняющих K

Определение 1. Функции $g_i^p(x_1, \ldots, x_p) = x_i$, $i = 1, \ldots, p$, называются *селекторными функциями.* Они выбирают заданный разряд из набора значений аргументов.

Определение 2. Пусть K — некоторое множество функций $h(x_1, \ldots, x_p)$ из P_k, зависящих от заданного числа переменных p и содержащее все селекторные функции от p переменных. Скажем, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ *сохраняет множество* K, если для любых функций $h_1, \ldots, h_n$ из K выполнено

$$f(h_1(x_1, \ldots, x_p), \ldots, h_n(x_1, \ldots, x_p)) \in K.$$

Пример 1. Пусть $k = 2$, $p = 1$, $K = \{x, \overline{x}\}$. Иными словами, в K входят функци x^σ, $\sigma \in \{0, 1\}$. Свойство сохранения множества K функцией f означает, что для любых $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ из E_2 имеет место $f(x^{\sigma_1}, \ldots, x^{\sigma_n}) = x^\sigma$ при некотором σ. Подставим в это тождество поочерёдно значения 1:

$$f(1^{\sigma_1}, \ldots, 1^{\sigma_n}) = 1^\sigma \Leftrightarrow f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \sigma$$

и 0:

$$f(0^{\sigma_1}, \ldots, 0^{\sigma_n}) = 0^\sigma \Leftrightarrow f(\overline{\sigma_1}, \ldots, \overline{\sigma_n}) = \overline{\sigma}.$$

Объединяя полученные равенства, имеем $f(\overline{\sigma_1}, \ldots, \overline{\sigma_n}) = \overline{f}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. Таким образом, свойство сохранения класса K равносильно свойству самодвойственности функции.

Пусть K — некоторое множество функций $h(x_1, \ldots, x_p)$ из P_k, зависящих от заданного числа переменных p и содержащее все селекторные функции от p переменных. Через $U(K)$ обозначим множество всех функций в P_k, сохраняющих K.

Лемма 1. Класс $U(K)$ замкнут.

Доказательство. Лемма доказывается точно так же, как доказывалось утверждение о замкнутости класса T_0. Рассматриваются операции суперпозиции: операция подстановки переменных, операция подстановки одной функции в другую, а также операция добавления и удаления фиктивных переменных. В каждом случае свойство новой функции сохранять P_k очевидным образом вытекает из этого свойства для исходных функций. ■

22. Неполнота системы F, содержащейся в $U(K)$, если $V_k \notin K$

Лемма 1. Пусть K — некоторое множество функций от двух переменных, содержащее все селекторные функции от двух переменных и не содержащее функции Вебба. Если $F \subseteq U(K)$, то F неполна.

Доказательство. Введём для F какую-либо сигнатуру Σ и рассмотрим последовательность Кузнецова $G_1, G_2, \ldots$ Покажем с помощью математической индукции, что для всех i выполнено $G_i \subseteq K$. База: $G_1 = \varnothing \subseteq K$. Пусть уже доказано $G_i \subseteq K$.

Рассмотрим функцию h из G_{i+1}, не входящую в G_i. Она задаётся формулой глубины i в сигнатуре Σ, имеющей вид $s(A_1, \ldots, A_n)$ ($f := \Sigma(s) \in F$), где каждое A_j — либо формула, глубина которой меньше i, либо переменная x_1, либо переменная x_2. В первом случае A_j реализует некоторую функцию $h_j(x_1, x_2)$ из G_i. Во втором случае положим $h_j(x_1, x_2) := g_1^2(x_1, x_2)$, в третьем — $h_j(x_1, x_2) := g_2^2(x_1, x_2)$. Т. к. $G_i \subseteq K$, то при всех $j = 1, \ldots, n$ получаем $h_j \in K$. Но формула $s(A_1, \ldots, A_n)$ реализует функцию $h(x_1, x_2) = f(h_1(x_2, x_2), \ldots, h_n(x_1, x_2))$. Т. к. f сохраняет множество K, то и функция $h(x_1, x_2)$ принадлежит K. Таким образом, $G_{i+1} \subseteq K$.

Из доказанного вытекает, что предел последовательности Кузнецова — подмножество множества K, т. е. не содержит функции Вебба. Следовательно, система F неполна. ■

23. Существование для неполной системы F такого множества K, что $V_k \notin K$ и $F \subseteq U(K)$

Лемма 1. Если система F функций k-значной логики неполна, то в P_k существует множество K функций от двух переменных, содержащее обе селекторные функции и не содержащее функции Вебба такое, что $F \subseteq U(K)$.

Доказательство. Введём для F какую-либо сигнатуру Σ и рассмотрим последовательность Кузнецова $G_1, G_2, \ldots$ Пусть $G_m = G_{m+1} = \ldots$ Т. к. F неполна, то $V_k \notin G_m$. Положим $K := G_m \cup \{g_1^2, g_2^2\}$. Очевидно, K всё ещё не содержит функции Вебба V_k.

Покажем, что F сохраняет K. Пусть $F(\widetilde{x}^n) \in F$; $h_1, \ldots, h_n \in K$. Рассмотрим функцию

$$h(x_1, x_2) := f(h_1(x_1, x_2), \ldots, h_n(x_1, x_2)).$$

Пусть s — символ, обозначающий функцию f в сигнатуре Σ. Если $h_j(x_1, x_2) \in G_m$, то она определяется некоторой формулой A_j в сигнатуре Σ, глубина которой меньше m. Если $h_j(x_1, x_2)$ — селекторная функция $g_1^2(x_1, x_2)$, то возьмём в качестве A_j переменную x_1; если $h_j(x_1, x_2)$ — селекторная функция $g_2^2(x_1, x_2)$, то возьмём в качестве A_j переменную x_2. Тогда функция h будет определяться формулой $s(A_1, \ldots, A_n)$, глубина которой меньше $m + 1$, так что реализуемая ею функция $h(x_1, x_2)$ принадлежит G_{m+1}. Однако, $G_{m+1} = G_m \subseteq K$, и $h \in K$. Таким образом, F сохраняет K, и $F \subseteq U(K)$. ■

24. Теорема Кузнецова о полноте в P_k

Теорема 1 (Кузнецов)**.** Можно построить систему $M_1, \ldots, M_s$ замкнутых классов k-значной логики такую, что ни один из них не содержится в других, причём произвольная система $F \subseteq P_k$ полна тогда и только тогда, когда она не содержится ни в одном из классов $M_1, \ldots, M_s$.

В доказательстве под «леммой j» подразумевается лемма из вопроса номер $20 + j$ ($j = 1, 2, 3$).

Доказательство. Рассмотрим все классы $N_1, \ldots, N_q$ вида $U(K)$, где K — множество функций от двух переменных, содержащее обе селекторные функции и не содержащее функции Вебба. По лемме 1 они замкнуты. Если система $F \subseteq P_k$ неполна, то по лемме 3 существует такой класс N_i, что $F \subseteq N_i$. Если для некоторого класса N_i имеет место $F \subseteq N_i$, то по лемме 2 система F неполна. Таким образом, полнота системы F эквивалентна невключению её ни в один из классов $N_1, \ldots, N_q$. Удалив из системы $N_1, \ldots, N_q$ те классы, которые содержатся в других, получим искомую систему $M_1, \ldots, M_s$. ■

Примечание. Заметим, что $M_1, \ldots, M_s$ — все предполные классы в P_k. Это доказывается так же, как и в случае P_2.

25. Существенная функция в P_k. Лемма Яблонского о трёх наборах

Определение 1. Функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$ называется *существенной*, если она имеет более одной существенной переменной.

Лемма 1 (О трёх наборах)**.** Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — существенная функция из P_k, принимающая ℓ значений, где $\ell \geqslant 3$. Пусть x_1 — её существенная переменная. Тогда существуют наборы $(\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $(\beta, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $(\alpha, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$, на которых f принимает три различных значения.

Доказательство. Т. к. x_1 — существенная переменная, то существуют такие значения $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$, что в следующем списке S:

$$f(0, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \quad f(1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \quad \ldots, \quad f(k-1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

имеется более одного значения. Рассмотрим два случая:

1. В списке S встречается меньше, чем ℓ значений. Тогда можно рассмотреть набор, на котором функция f принимает значение, не встречающееся в списке S. Обозначим этот набор (к примеру) через $(\alpha, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$. Очевидно, что $f(\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \neq f(\gamma, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Выберем в качестве β любое такое, чо $f(\beta, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \neq f(\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Т. к. в списке S более одного значения, такое β обязательно найдётся. Но $f(\alpha, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ не входит в список S, а потому $f(\alpha, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) \neq f(\beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.
2. В списке S встречаются все ℓ значений. Т. к. функция f существенная, то существует такое α, что $f(\alpha, x_2, \ldots, x_n)$ не является константой, иначе значение функции f определялось бы значением переменной x_1. Следовательно, существуют такие значения $\gamma_2, \ldots, \gamma_n$, что $f(\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \neq f(\alpha, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$. Т. к. $\ell \geqslant 3$, то в списке S имеется не менее трёх значений. Поэтому найдётся такое β, что $f(\beta, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ отлично и от $f(\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, и от $f(\alpha, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$.

■

26. Лемма о подмножестве $G_1 \times \ldots \times G_n$, на котором функция принимает ℓ значений

Лемма 1. Если $f(x_1, \ldots, x_n)$ — существенная функция в P_k, принимающая хотя бы ℓ значений, где $\ell \geqslant 3$, то существуют подмножества $G_1, \ldots, G_n$ множества E_k такие, что $1 \leqslant |G_i| \leqslant \ell - 1$ $\forall i = 1, \ldots, n$, причём на множестве $G_1 \times \ldots \times G_n$ функция f принимает хотя бы ℓ значений.

Доказательство. Без ограничения общности можно предположить, что x_1 — существенная переменная функции f. По лемме о трёх наборах, существуют наборы $(\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $(\beta, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $(\alpha, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$, на которых f принимает попарно различные значения. Рассмотрим наборы, $\delta_i := (\delta_{i1}, \ldots, \delta_{in})$, на которых функция f принимает остальные $\ell - 3$ значения. В качестве G_j выберем множество j-х разрядов наборов $(\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $(\beta, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $(\alpha, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$, $\delta_1, \ldots, \delta_{\ell-3}$. Как легко видеть, получим

$$G_1 = \{\alpha, \beta, \delta_{11}, \ldots, \delta_{\ell-3,1}\}, \quad G_2 = \{\alpha_2, \gamma_2, \delta_{12}, \ldots, \delta_{\ell-3,2}\}, \quad \ldots, \quad G_n = \{\alpha_n, \gamma_n, \delta_{1n}, \ldots, \delta_{\ell-3,n}\}.$$

Таким образом, каждое из множеств G_j непусто и имеет не более $\ell - 1$ элемента. По выбору множеств G_j, те указанные выше ℓ наборов, на которых функция f принимает ℓ различных значений, принадлежат прямому произведению $G_1 \times \ldots \times G_n$. ■

27. Квадрат в $(E_k)^n$. Лемма о квадрате

Определение 1. Будем называть *квадратом* любую четвёрку наборов вида

$$\{(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, x, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{j-1}, y, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n) : x \in \{p_1, p_2\}, y \in \{q_1, q_2\}\}.$$

Лемма 1 (О квадрате). Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — существенная функция в P_k, принимающая ℓ значений, причём $\ell \geqslant 3$. Тогда существует квадрат, на котором f принимает некоторое своё значение ровно в одной точке.

Доказательство. Снова без ограничения общности предполагаем, что x_1 — существенная переменная функции f. По лемме о трёх наборах, существуют наборы $(\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $(\beta, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $(\alpha, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$, на которых f принимает три различных значения. Рассмотрим последовательность:

$$\begin{aligned}
P_1 &:= \{(\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), (\beta, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\}, \\
P_2 &:= \{(\alpha, \gamma_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n), (\beta, \gamma_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)\}, \\
&\vdots \\
P_i &:= \{(\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n), (\beta, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)\}, \\
&\vdots \\
P_n &:= \{(\alpha, \gamma_2, \ldots, \gamma_n), (\beta, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)\}.
\end{aligned}$$

Принцип построения пар следующий: в паре P_i значения $\alpha_2, \ldots, \alpha_i$ заменяются на $\gamma_2, \ldots, \gamma_i$. На наборах пары P_1 функция f принимает два различных значения — a и b. На первом наборе пары P_n она принимает значение, отличное от a и b. Значение, принимаемое ею на втором элементе пары P_n, может совпасть либо с a, либо с b, но не одновременно с обоими. Следовательно, на паре P_n функция f не принимает хотя бы одно из значений a, b. Двигаясь по приведённому выше списку пар сверху вниз, мы должны достигнуть такого i, что на паре P_i функция f принимает оба значения a и b, а на паре P_{i+1} уже не принимает хотя бы одного из них. Заметим теперь, что объединение пар P_i и P_{i+1} представляет собой квадрат в P_k. То из значений, которое не принимается функцией f на паре P_{i+1}, и будет приниматься ею на указанном квадрате ровно в одной точке. ■

28. Теорема Слупецкого. Замечание Яблонского о возможности сужения множества одноместных функций. Теорема Мартина

Теорема 1 (Слупецкий). Пусть система F функций k-значной логики, где $k \geqslant 3$, содержит все функции одной переменной. Тогда для полноты F необходимо и достаточно, чтобы она содержала существенную функцию, принимающую все k значений.

В доказательстве под «леммой j» подразумевается лемма из вопроса номер $24 + j$ $(j = 1, 2, 3)$.

Доказательство. $\Rightarrow$. Пусть F не содержит существенной функции, принимающей все k значений. Покажем, что операции суперпозиции не позволяют получить такую функцию из функций, которые либо не принимают все k значений, либо не являются существенными:

1. **Операция подстановки переменных**. Пусть $g(x_1, \ldots, x_n) := f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$. Если функция f не принимает все k значений, то g тоже не будет их принимать. Если f имела единственную существенную переменную x_m, то g будет иметь единственную существенную переменную x_{i_m}.

2. **Операция подстановки одной функции в другую**. Пусть функция $h(x_1, \ldots, x_{n+m-1})$ определена как $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, g(x_n, \ldots, x_{n+m-1}))$. Если f не принимает все k значений, то и h их не принимает. Если f принимает все k значений, то она должна иметь единственную существенную переменную. Если её существенная переменная — не x_n, то она же будет единственной существенной переменной у h. Если единственной существенной переменной функции f служит x_n, то рассматриваем функцию g. Если она принимает не все k значений, то и h не будет принимать все k значений. Если функция g принимает все k значений, то она имеет единственную существенную переменную. Но тогда она окажется единственной существенной переменной и для h.

3. **Операция добавления либо удаления фиктивной переменной**. Очевидно.

Т. к. суперпозициями из F нельзя получить существенной функции, принимающей все k значений, то она неполна. Ведь такие функции существуют, например, $\max(x_1, x_2)$.

$\Leftarrow$. Пусть F имеет существенную функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, принимающую все k значений. По лемме 3 существует квадрат

$$\{(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, x, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{j-1}, y, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n) : x \in \{p_1, p_2\}, y \in \{q_1, q_2\}\},$$

на котором функция f принимает некоторое своё значение ровно в одной точке. Обозначим это значение a. Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi_0(x)$, равную нулю при $x = a$ и равную 1 в остальных случаях. Т. к. она зависит от одной переменной, она принадлежит множеству F. Поэтому следующая функция

$$g(x_1, x_2) := \varphi_0(f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, x_1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{j-1}, x_2, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n))$$

получена суперпозициями над F.

Функция g на квадрате $\{(p_1, q_1), (p_1, q_2), (p_2, q_1), (p_2, q_2)\}$ принимает значения 0 и 1, причём значение 0 она принимает в единственной точке. Без ограничения общности можно считать, что $g(p_1, q_1) = 0$. В остальных точках квадрата функция g равна 1.

Введём вспомогательную функцию $\varphi_1(x)$, равную p_1 при $x = 0$ и равную p_2 в остальных случаях. Введём также функцию $\varphi_2(x)$, равную q_1 при $x = 0$ и равную q_2 в остальных случаях. Обе эти функции зависят от одной переменной и принадлежат F.

Поэтому функция $g'(x_1, x_2) : g(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2))$ получается суперпозициями над F. Она обращается в 0 при $x_1 = x_2 = 0$, а в остальных случаях она равна 1. Таким образом, данная функция совпадает с дизъюнкцией, если значения её аргументов ограничить множеством $\{0, 1\}$. Будем обозначать её $x_1 \vee_{01} x_2$.

Функция $j_i(x)$, равная 1 при $x = i$ и равна 0 в остальных случаях, зависит от одной переменной, а потому входит в F. В частности, функция $j_0(x)$, совпадающая с отрицанием на множестве $\{0, 1\}$, входит в F.

Используя законы де Моргана, нетрудно теперь получить функцию в P_k, ограничение которой на множество $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$ совпадает с конъюнкцией: $g''(x_1, x_2) = j_0(j_0(x_1) \vee_{01} j_0(x_2))$. Будем обозначать эту функцию через $x_1 \&_{01} x_2$.

Пусть теперь $h(x_1, \ldots, x_m)$ — произвольная функция в P_k, принимающая только значения 0 и 1. Покажем, что её можно получить суперпозициями над F. Используем обобщение совершенной дизъюнктивной нормальной формы для P_k:

$$h(x_1, \ldots, x_m) = \bigvee_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)} j_{\sigma_1}(x_1) \& \ldots \& j_{\sigma_m}(x_m) \& h(\sigma_1, \ldots, \sigma_m).$$

Здесь символом $\bigvee$ обозначен максимум, символом & — минимум. Максимум берётся по всем наборам $(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ элементов E_k. Заметим, что все значения $j_{\sigma_1}(x_i)$ и $h(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ равны 0 либо 1. Поэтому в выражении для h можно вместо максимума и минимума использовать $\vee_{01}$ и $\&_{01}$:

$$h(x_1, \ldots, x_m) = \bigvee_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)}{}_{01} \; j_{\sigma_1}(x_1) \&_{01} \ldots \&_{01} j_{\sigma_m}(x_m) \&_{01} h(\sigma_1, \ldots, \sigma_m).$$

С учётом того, что константы $h(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ принадлежат F, приведённая формула выражает h через функции, которые были получены суперпозициями над F. Таким образом, любая функция из P_k, принимающая только значения 0 и 1, получается суперпозициями над F. Если теперь $h(x_1, \ldots, x_m)$ — функция из P_k, принимающая только значения a и b, то можно рассмотреть функцию $h'(x_1, \ldots, x_m)$, принимающую значение 0, если $h(x_1, \ldots, x_m) = a$, и значение 1 в противном случае. Рассмотрим также принадлежащую F функцию $\psi(x)$, равную a, если $x = 0$, и равную b в противном случае. Очевидно, $h(x_1, \ldots, x_m) = \psi(h'(x_1, \ldots, x_m))$, причём как h', так и ψ получены суперпозициями над F. Это означает, что любая функция в P_k, принимающая не более двух значений, получается суперпозициями над F.

Доказанное утверждение можно рассматривать как базу индукции. Предположим теперь, что для некоторого ℓ, $3 \leqslant \ell \leqslant k$, установлено, что все функции из P_k, принимающие не более, чем $\ell - 1$ значение, получаются суперпозициями над F. Покажем, что это также верно и для всех функций, принимающих не более чем ℓ значений.

Снова рассмотрим в F существенную функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, принимающую k значений. По лемме 2, существуют подмножества $G_1, \ldots, G_n$ множества E_k такие, что $1 \leqslant |G_i| \leqslant \ell - 1$ $\forall i = 1, \ldots, n$, причём на множестве $G_1 \times \ldots \times G_n$ функция f принимает хотя бы ℓ значений. Обозначим эти ℓ значений через $a_1, \ldots, a_\ell$. Рассмотрим наборы из $G_1 \times \ldots \times G_n$, на которых функция f принимает данные значения:

$$\begin{aligned} &a_1 = f(a_{11}, \ldots, a_{1n}), \\ &\ldots \\ &a_\ell = f(a_{\ell 1}, \ldots, a_{\ell n}). \end{aligned}$$

Заметим, что $\{a_{11}, \ldots, a_{\ell 1}\} \subseteq G_1, \ldots, \{a_{1n}, \ldots, a_{\ell n}\} \subseteq G_n$.

Возьмём теперь произвольную функцию $h(x_1, \ldots, x_m)$ из P_k, принимающую только значения $a_1, \ldots, a_\ell$, и попробуем подобрать вспомогательные функции $\psi_1, \ldots, \psi_n$ так, чтобы имело место тождество $h(x_1, \ldots, x_m) = f(\psi_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, \psi_n(x_1, \ldots, x_m))$. Будем делать это, используя указанные выше ℓ равенств.

Рассмотрим произвольный набор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ значений переменных $x_1, \ldots, x_m$. На этом наборе функция h принимает какое-то значение a_i. Определим значения $\psi_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_m), \ldots, \psi_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ равными, соответственно, $a_{i1}, \ldots, a_{in}$. Тогда получим $f(\psi_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_m), \ldots, \psi_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)) = a_i$.

Таким образом, значения функций $\psi_1, \ldots, \psi_n$ определены для всех наборов значений их аргументов. При этом желаемое тождество выполнено по построению.

Заметим, что функция ψ_i принимает в качестве своих значений только элементы $\{a_{1i}, \ldots, a_{\ell i}\}$, которые принадлежат множеству G_i. Поэтому данная функция принимает не более чем $\ell - 1$ значение, и по предположению индукции получается суперпозициями над F. Ввиду указанного тождества, функция h тоже получается суперпозициями над F.

Итак, любая функция из P_k, принимающая только значения $a_1, \ldots, a_\ell$, получается суперпозициями над F. Если $\ell = k$, то это уже означает, что любая функция из P_k получается суперпозициями над F.

Пусть $\ell < k$. Рассмотрим произвольную функцию h из P_k, принимающую не более чем ℓ значений. Пусть её значения принадлежат списку $b_1, \dots, b_\ell$. Рассмотрим функцию h', значение которой на произвольном наборе получается из значения функции h на том же наборе заменой b_i на a_i. Функция h' получается суперпозициями над F. Определим функцию $\varphi(x)$, принмающую в точке a_i значение b_i, а в остальных точках равную 0. Легко видеть, что $h(x_1, \dots, x_m) = \psi(h'(x_1, \dots, x_m))$, т. е. h получается суперпозициями над F.

Это завершает доказательство шага индукции. При $\ell = k$ получаем, что система F полна. ∎

Заметим, что все одноместные функции, которые мы использовали, принимали не более $k-1$ значений. Заметим, что «переходники» ψ, переводящие a_i в b_i, нужны были лишь при $\ell < k$. Отсюда получается следующий результат:

Теорема 2 (Яблонский)**.** Пусть система F функций k-значной логики, где $k \geqslant 3$, содержит все функции одной переменной, принимающие не более $k-1$ значения. Тогда для полноты F необходимо и достаточно, чтобы она содержала существенную функцию, принимающую все k значений.

Теорема 3 (Мартин)**.** Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ из P_k, образует полную систему тогда и только тогда, когда она порождает все функции одной переменой, принимающие не более чем $k-1$ значение.

Доказательство. $\Rightarrow$. Очевидно.

$\Leftarrow$. Пусть f порождает все функции одной переменной, принимающие не более чем $k-1$ значение. В частности, она порождает все константы. Поэтому f должна принимать все k значений. Предположим, что она не является существенной. Тогда она должна иметь ровно одну существенную переменную (отсутствие существенные переменных делало бы функцию константой, и она не могла бы принимать k значений). Обозначим через $M(k)$ класс всех функций в P_k, принимающих k значений и имеющих одну существенную переменную. Фактически, это перестановки с добавлением несущественных переменных. Заметим, что ничего кроме таких же перестановок суперпозициями из f получить нельзя. Действительно, проверим для каждой операции суперпозиции:

1. **Операция подстановки переменных**. Пусть $g(x_1, \dots, x_n) := f(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$, $f \in M(k)$. Если f имела существенную переменную x_j, то g будет иметь единственную существенную переменную x_{i_j}. Варьируя значение этой переменной в правой части равенства, будем получать все k значений функции f, но тогда и g принимает все k значений. Селдвоательно, $g \in M(k)$.

2. **Операция подстановки одной функции в другую**. Пусть функция $h(x_1, \dots, x_{n+m-1})$ определена как $f(x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_n, \dots, x_{n+m-1}))$, причём $f, g \in M(k)$. Если f имеет существенную переменную x_i, где $i < n$, то и h будет иметь единственную существенную переменную x_i. Варьируя значение этой переменной, будем получать в правой части равенства все k значений. Следовательно, $h \in M(k)$.

   Если f имеет существенную переменную x_n, то рассматриваем единственную существенную переменную функции g. Тогда задание её значения однозначно определяет значение $g(x_n, \dots, x_{n+m-1})$, а вслед за этим и значение $f(x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_n, \dots, x_{n+m-1}))$. Таким образом, она является единственной существенной переменной функции h. Варьируя значение данной переменной, можно получить любые k значений функции g, а значит, любые k значений функции f, т. е. любые k значений функции h. Следовательно, $h \in M(k)$.

3. **Операция добавления либо удаления фиктивной переменной**. Очевидно.

Таким образом, из функции f можно получить суперпозициями только функции с единственной существенной переменной, принимающие все k значений. Но тогда нельзя получить ни одной константы. Полученное противоречие означает, что функция f должна быть существенной. И тогда, по теореме Яблонского, она образует полную систему. ∎

29. Теорема Янова

Теорема 1 (Янов). Для любого $k \geqslant 3$ в P_k существует замкнутый класс, не имеющий базиса.

Доказательство. Напомним, что базисом в замкнутом классе Q называется такая система функций, замыкание которой равно Q, а замыкание любой её собственной подсиситемы не равно Q. Иными словами, базис — такая полная в Q система, что любая её функция не выражается суперпозициями через другие функции.

Рассмотрим последовательность функций из P_k:

$$f_0 := 0, \quad \ldots, \quad f_i(x_1, \ldots, x_i) := \begin{cases} 1, & \text{если } x_1 = \ldots = x_i = 2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad \ldots;$$

$i = 1, 2, \ldots$ Пусть M — замыкание множества $\{f_0, f_1, \ldots\}$. Покажем, что оно состоит из функций, отличающихся от функций f_i лишь возможным добавлением фиктивных переменных. Для этого рассмотрим операции суперпозиции, применённые к функциям такого вида:

1. **Операция подстановки переменных**. Пусть $g(x_1, \ldots, x_n) := f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$. Если f получалась из некоторой f_j добавлением фиктивных переменных, то g, ввиду возможного отождествления переменных подстановкой $(i_1, \ldots, i_n)$, будет получаться добавлением несущественных переменных из некоторой функции f_m, $m \leqslant i$.

2. **Подстановка одной функции в другую**. Пусть функция $h(x_1, \ldots, x_{n+m-1})$ определена как $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, g(x_n, \ldots, x_{n+m-1}))$, где f, g получаются из некоторых функций f_i добавлением фиктивных переменных. Т. к. g не принимает значение 2, то h тождественно равна 0, т. е. получается добавлением фиктивных переменных к f_0.

3. **Добавление либо удаление фиктивной переменной**. Очевидно.

Таким образом, класс M полностью описан. Предположим, что он имеет базис B (конечный либо бесконечный) и рассмотрим два случая:

1. В базисе B имеются хотя бы две различных функции. Пусть одна из них получена добавлением фиктивных переменных к f_i, другая — к f_j. Если $i = j$, то одна из них может быть получена из другой добавлением либо удалением фиктивных переменных. Если $i < j$, то первая получается из второй отождествлением части переменных с последующим добавлением или удалением фиктивных переменных В обоих случаях одна из функций базиса получается из другой суперпозициями, что невозможно.

2. В базисе B имеется единственная функция. Пусть она получена добавлением несущественных переменных к f_i. Но тогда операциями суперпозиции можно получить только функции, получаемые добавлением фиктивных переменных к функциям f_j, $j \leqslant i$. Функцию f_{i+1} получить нельзя, т. е. B — не базис M.

Полученное противоречие и доказывает отсутствие базиса в M. ■

30. Теорема Мучника

Теорема 1 (Мучник). Для любого $k \geqslant 3$ в P_k существует замкнутый класс, имеющий счётный базис.

Доказательство. Рассмотрим последовательность функций $\{f_i(x_1, \ldots, x_i)\}_{i=1}^{\infty}$. По определению, функция $f_i(x_1, \ldots, x_i)$ принимает значение 1, если в наборе значений её аргументов имеется ровно одна единица, а остальные значения равны 2. В прочих случаях она принимает значение 0.

Обозначим через M замыкание множества $\{f_2, f_3, \ldots\}$. Покажем, что система $\{f_2, f_3, \ldots\}$ является базисом в M. Очевидно, она полна в M. Покажем, что никакая функция f_m, $m \geqslant 2$, не выражается суперпозициями через функции $f_2, \ldots, f_{m-1}, f_{m+1}, \ldots$

Предположим противное. Рассмотрим какую-либо сигнатуру Σ для $\{f_2, \ldots, f_{m-1}, f_{m+1}, \ldots\}$. Должна существовать невырожденная формула Φ в данной сигнатуре, определяющая относительно переменных $x_1, \ldots, x_m$ функцию $f_m(x_1, \ldots, x_m)$. Будем считать, что Φ не имеет других (фиктивных) переменных. Если таковые имелись, вместо них подставляем переменную x_1, что не изменит функции, реализуемой формулой. По определению формулы, Φ имеет вид $s(B_1, \ldots, B_r)$, где s — символ сигнатуры, обозначающий некоторую функцию f_r, $r \neq m$. Каждого B_i — либо переменная, либо невырожденная формула в Σ. Рассмотрим произвольный набор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ значений переменных $x_1, \ldots, x_m$. Обозначим через β_i значение формулы B_i на данном наборе; $i = 1, \ldots, r$. Тогда $f_m(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = f_r(\beta_1, \ldots, \beta_r)$. Рассмотрим три случая:

1. Среди формул B_i имеется не менее двух невырожденных. Тогда не менее двух значений β_i равны 0 либо 1. На таком наборе $(\beta_1, \ldots, \beta_r)$ функция f_r обращается в 0, т. е. f_m оказывается тождественно равной нулю, что неверно.

2. Среди формул B_i имеется ровно одна невырожденная формула; пусть это формула B_j. Т. к. $r \geqslant 2$, то существует j', отличное от j такое, что $B_{j'}$ — переменная. Пусть это будет переменная x_q. Если положить $\alpha_q = 1$, $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{q-1} = \alpha_{q+1} = \ldots = \alpha_m = 2$, то $f_m(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = 1$, но $\beta_{j'} = 1$, $\beta_j \in \{0, 1\}$, так что $f_r(\beta_1, \ldots, \beta_r) = 0$ — противоречие.

3. Все формулы B_i суть переменные. Тогда $r > m$ (т. к. все переменные функции f_m существенные). Следовательно, существуют такие i и j $(i \neq j)$ такие, что B_i и B_j — одна и та же переменная. Пусть это будет переменная x_q. Снова берём $\alpha_q = 1$, $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{q-1} = \alpha_{q+1} = \ldots = \alpha_m = 2$. Тогда $f_m(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = 1$, но $\beta_i = \beta_j = 1$, и $f_r(\beta_1, \ldots, \beta_r) = 0$ — противоречие.

В каждом из случаев получено противоречие, что доказывает теорему. ∎

Следствие 1. Для любого $k \geqslant 3$ в P_k имеется континуум замкнутых классов.

Доказательство. Рассмотрим биекцию φ множества рациональных точек отрезка $[0; 1]$ на множество функций $f_2, f_3, \ldots$ из теоремы Мучника. Для любого вещественного числа a из отрезка $[0; 1]$ рассмотрим множество Q_a всех рациональных чисел данного отрезка, меньших или равных числа a. Множества Q_a непусты и различны. Их континуум. Отображение φ переводит данные множества в различные множества F_a функций последовательности $f_2, f_3, \ldots$ Пусть M_a — замыкание множества F_a. Если $a < b$, то в F_b есть функция, не принадлежащая F_a. Согласно доказательству предыдущей теоремы, она не будет принадлежать и замыканию F_a. т. е. M_a. Таким образом, $M_a \neq M_b$, и все замкнутые классы M_a различны. Мощность их множества есть континуум. ∎

31. Представление функций в P_k полиномами

Теорема 1. Система полиномов по модулю k полна в P_k тогда и только тогда, когда k — простое число.

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ из P_k. Для неё имеет место следующее сотношение:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)} j_{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot j_{\sigma_n} \cdot f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \pmod{k}.$$

Это аналог СДНФ из алгебры логики. Вместо максимума используется сумма по модулю k, а вместо минимума — умножение по модулю k.

Тождество $j_\sigma(x) = j_0(x - \sigma)$ позволяет выразить все функции j_σ через функцию j_0. Если функцию j_0 можно выразить полиномом по модулю k, то, подставляя это выражение в указанную выше формулу, раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим представление полиномом произвольной функции f. Обратно, если j_0 не выразима полиномом, то не каждая функция из P_k выразима (т. к. $j_0 \in P_k$). Здесь рассмотрим два случая:

1. k простое. Вспомним малую теорему Ферма, согласно которой $x^{k-1} \equiv 1 \pmod{k}$ при всех $x = 1, \ldots, k-1$. Из неё вытекает соотношение $j_0(x) = 1 - x^{k-1} \pmod{k}$, т. е. j_0 представима полиномом по модулю k, и система полиномов в этом случае полна.

2. k составное. Пусть $k = k_1 \cdot k_2$, где $k_1 \geqslant k_2 > 1$ — натуральные. Предположим, что $j_0 = b_0 + b_1 x + \ldots + b_s x^s \pmod{k}$. Подставляя $x = 0$, получаем $b_0 = 1$. Затем подставляя $x = k_1$, получаем:
$$0 = 1 + b_1 k_1 + \ldots + b_s k_1^s \pmod{k}.$$
Это означает, что для некоторого целого n выполнено:
$$1 + b_1 k_1 + \ldots + b_s k_1^s = kn.$$
После перегруппировки членов и замены k на $k_1 k_2$ имеем:
$$1 = k_1 k_2 n - b_1 k_1 - \ldots - b_s k_1^s.$$
Правая часть делится на k_1, а левая не делится — противоречие.

■