

Лабораторная работа №4

Вейвлет-преобразование

1. Цель работы

Изучение основ вейвлет-анализа, непрерывного вейвлет-преобразования (НВП), дискретизированного НВП, дискретного вейвлет-преобразования (ДВП), методики быстрого вейвлет-преобразования (БВП) с помощью алгоритма Маллата и лифтинговой схемы.

2. Теоретические сведения

Методы обработки стационарных сигналов

Большинство сигналов, встречающихся на практике, представлено во *временной области*, т.е. сигнал есть функция времени. Таким образом, при отображении сигнала на графике одной из координат (независимой) является ось времени, а другой координатой (зависимой) – ось амплитуд. Таким образом, получаем *амплитудно-временное представление* сигнала. Для большинства приложений обработки сигналов это представление не является наилучшим. Во многих случаях наиболее значимая информация скрыта в частотной области сигнала. Частотный спектр есть совокупность частотных (спектральных) компонент и он отображает наличие тех или иных частот в сигнале. Частота измеряется в Герцах (Гц), или в числе периодов в секунду. На рис. 4.1 представлены три косинусоиды: 3, 10 и 50 Гц соответственно.

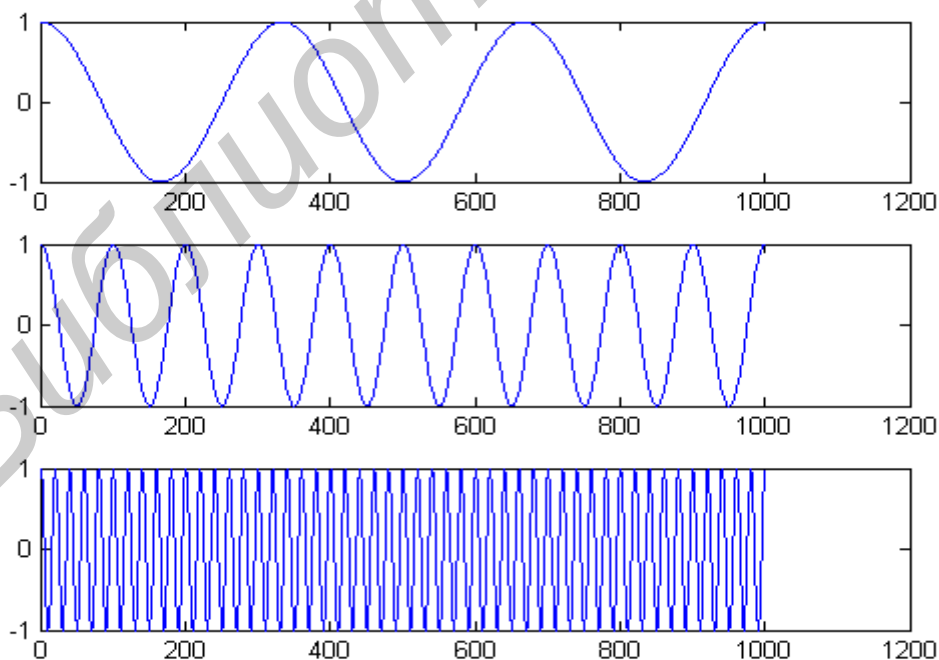


Рис. 4.1 Косинусоиды с частотой 3, 10 и 50 Гц соответственно

Классическим методом частотного анализа сигналов является преобразование Фурье, суть которого пояснялась в лабораторной работе №1.

Результат преобразования Фурье – амплитудно-частотный спектр, по которому можно определить присутствие некоторой частоты в исследуемом сигнале. Результаты преобразования Фурье трех косинусоид (3, 10 и 50 Гц соответственно) представлены ниже на рис. 4.2.

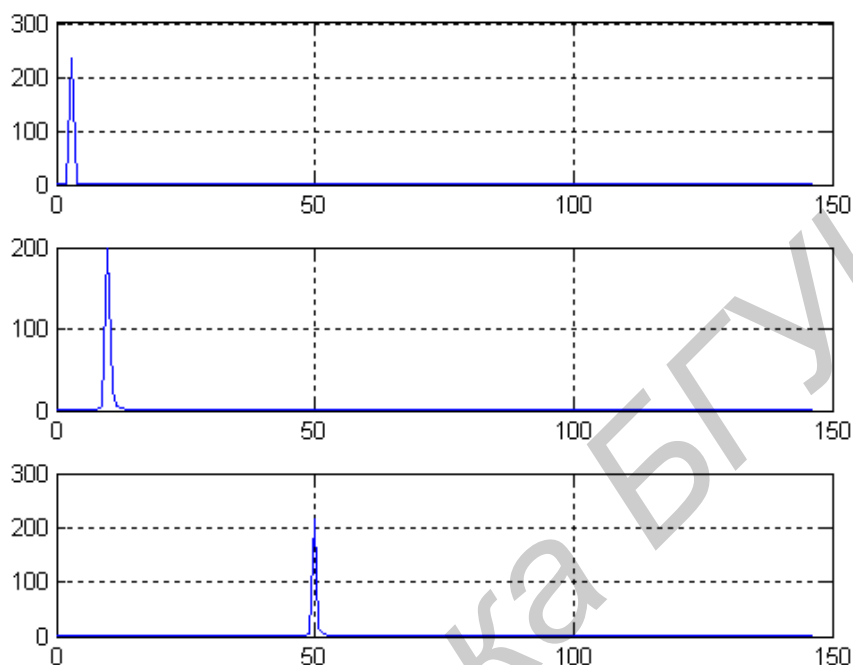


Рис. 4.2. Результаты преобразования Фурье косинусоид с частотой 3, 10 и 50 Гц соответственно

Приведем еще один пример стационарного сигнала

$x(t) = \cos(2\pi 10t) + \cos(2\pi 25t) + \cos(2\pi 50t) + \cos(2\pi 100t)$, его график и результаты преобразования Фурье (рис. 4.3).

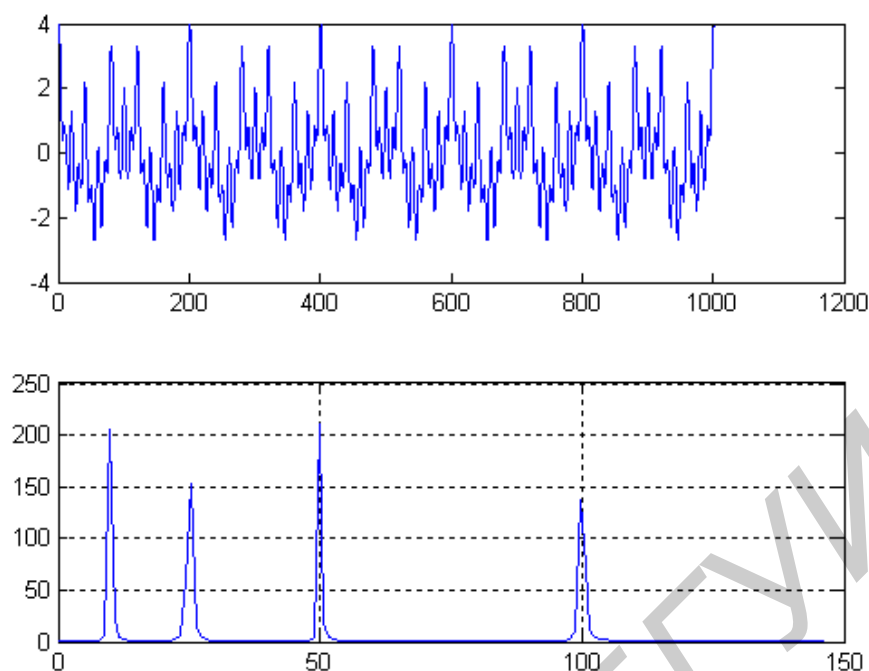


Рис. 4.3. Стационарный сигнал, результаты ПФ данного сигнала

Большинство реальных сигналов имеет сложные частотно-временные характеристики. Как правило, такие сигналы состоят из близких по времени, короткоживущих высокочастотных компонент и долговременных, близких по частоте низкочастотных компонент.

Сигнал на рис. 4.4 нестационарный. Его частота непрерывно изменяется во времени (четыре частотные компоненты соответствуют частотам 100, 50, 25, 10 Гц.)

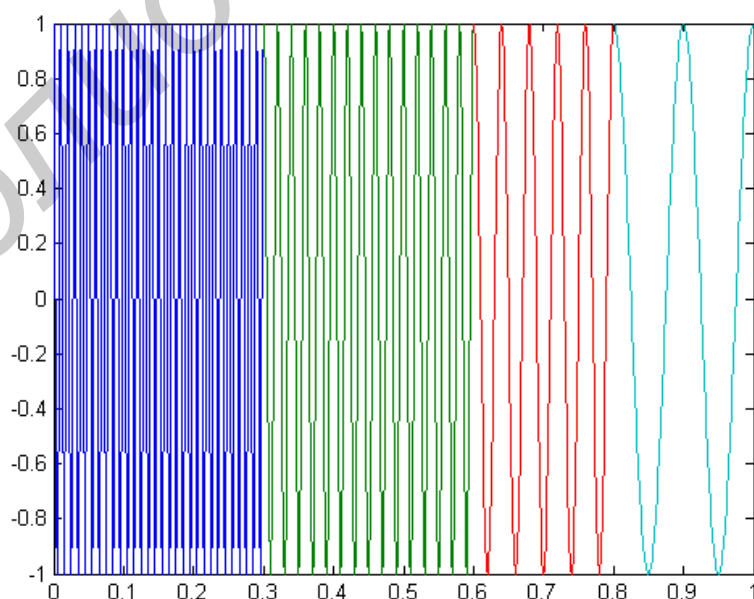


Рис. 4.4. Нестационарный сигнал

Спектр этого сигнала (ПФ) будет иметь вид (рис. 4.5):

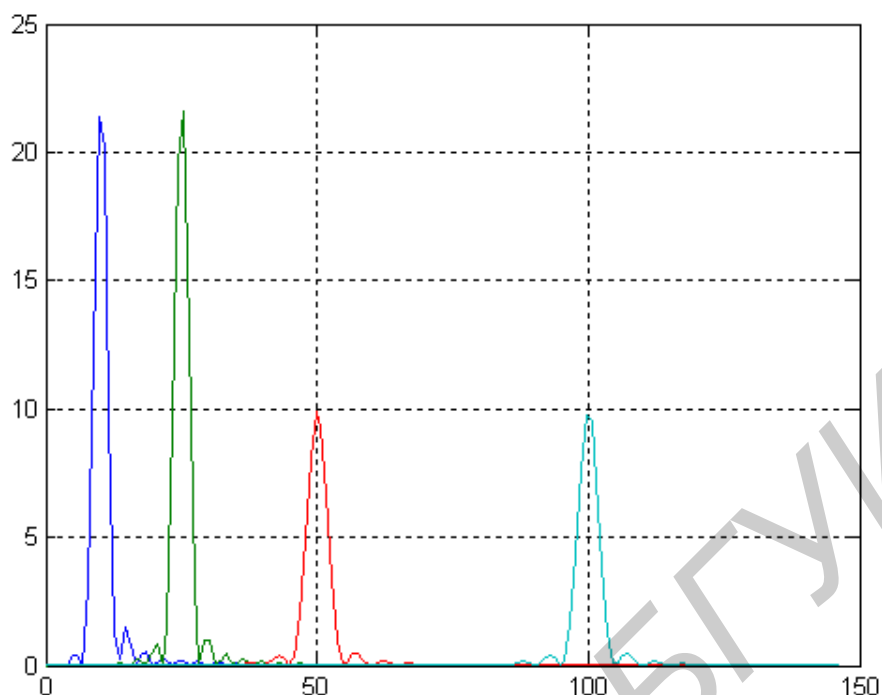


Рис. 4.5. Спектр нестационарного сигнала

В данном случае появляются небольшие «ложные» частоты и неодинаковости амплитудных пиков, поэтому ПФ не подходит для нестационарных сигналов.

Для анализа таких сигналов необходим метод, способный обеспечить хорошее разрешение и по частоте, и по времени. Первое требуется для локализации низкочастотных составляющих, второе – для разрешения компонент высокой частоты. Вейвлет - преобразование благодаря хорошей приспособленности к анализу нестационарных сигналов стало мощной альтернативой преобразованию Фурье.

Преобразование Фурье представляет сигнал, заданный во временной области, в виде разложения по ортогональным базисным функциям (синусам и косинусам), выделяя, таким образом, частотные компоненты. Недостаток преобразования Фурье заключается в том, что частотные компоненты не могут быть локализованы во времени, что накладывает ограничения на применимость данного метода к ряду задач (например, в случае изучения динамики изменения частотных параметров сигнала на временном интервале).

Существует два подхода к анализу нестационарных сигналов такого типа. Первый – оконное преобразование Фурье (short-time Fourier transform). Следуя по этому пути, мы работаем с нестационарным сигналом, как со стационарным, предварительно разбив его на сегменты (окна), статистика которых не меняется со временем. Второй подход – вейвлет преобразование. В этом случае нестационарный сигнал анализируется путем разложения по базисным

функциям, полученным из некоторого прототипа путем сжатий, растяжений и сдвигов. Функция прототип называется материнским или анализирующим вейвлетом.

Краткий обзор оконного преобразования Фурье

В случае, когда не возникает вопрос о локализации временного положения частот, метод Фурье дает хорошие результаты. Но при необходимости определить временной интервал присутствия частоты приходится применять другие методы.

Одним из таких методов является обобщенный метод Фурье (оконное преобразование Фурье, ОПФ). Этот метод состоит из следующих этапов:

1. в исследуемой функции создается «окно» – временной интервал, для которого функция $f(x) \neq 0$, и $f(x) = 0$ для остальных значений;
2. для этого «окна» вычисляется преобразование Фурье;
3. «окно» сдвигается, и для него также вычисляется преобразование Фурье.

При ОПФ сигнал делится на отрезки («окна»), в пределах которых его можно считать стационарным. «Пройдя» таким «окном» вдоль всего сигнала, получается некоторая трехмерная функция, зависящая от положения «окна» и частоты (рис. 4.6).

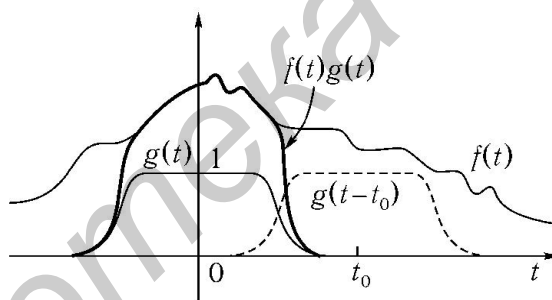


Рис. 4.6. Оконное преобразование Фурье:

функция $f(t)$ перемножается с оконной функцией $g(t)$, и вычисляются коэффициенты произведения $f(t)g(t)$. Затем процедура повторяется для сдвигов окна $g(t-t_0)$, $g(t-2t_0)$, ...

Данный подход позволяет определить факт присутствия в сигнале любой частоты и интервал ее присутствия. Это значительно расширяет возможности метода по сравнению с классическим преобразованием Фурье, но существуют и определенные недостатки. Согласно следствиям принципа неопределенности Гейзенберга в данном случае нельзя утверждать факт наличия частоты ω_0 в сигнале в момент времени t_0 - можно лишь определить, что спектр частот (ω_1, ω_2) присутствует в интервале (t_1, t_2) . Причем разрешение по частоте (по времени) остается постоянным вне зависимости от области частот (времен), в которых производится исследование. Узкое окно обеспечивает временное разрешение, а широкое – частотное. Проблема состоит в том, что приходится

выбирать окно «раз и навсегда», то есть для анализа сигнала, тогда как разные его участки могут потребовать применения разных окон.

Поэтому, если, например, в сигнале существенна только высокочастотная составляющая, то увеличить разрешение можно только, изменив параметры метода. В качестве метода, не обладающего подобного рода недостатками, был предложен аппарат вейвлет - анализа.

Основные положения вейвлет-анализа

Различают дискретный и непрерывный вейвлет-анализ, аппарат которых можно применять как для непрерывных, так и для дискретных сигналов.

Сигнал анализируется путем разложения по базисным функциям, полученным из некоторого прототипа путем сжатий, растяжений и сдвигов. Функция-прототип называется анализирующим (материнским) вейвлетом.

Вейвлет-функция должна удовлетворять двум условиям:

1. Среднее значение (интеграл по всей прямой) равно 0.
2. Функция быстро убывает при $t \rightarrow \infty$.

Обычно, функция-вейвлет обозначается буквой ψ . В общем случае **непрерывное вейвлет-преобразование (CWT)** функции $f(t)$ выглядит так:

$$\Psi_x^\omega(\tau, s) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \int x(t) \psi^* \left(\frac{t - \tau}{s} \right) dt, \quad (4.1)$$

где τ - параметр сдвига, s – параметр масштаба, функция $\psi^* \left(\frac{t - \tau}{s} \right)$ – это «материнский вейвлет», то есть функция преобразования.

Слово вейвлет означает маленькая волна. Под маленькой понимается то, что эта функция (окно) имеет конечную ширину. Термин «материнский» означает, что функции с различной шириной носителя, используемые в преобразовании, порождаются одной базовой функцией – материнским вейвлетом. То есть материнский вейвлет является прототипом для всех оконных функций.

Основные вейвлетообразующие функции, или материнские вейвлеты, приведены в табл. 4.1.

Наиболее распространенные вещественные базисы конструируются на основе производных функции Гаусса ($g_0(t) = \exp(-t^2/2)$). Это обусловлено тем обстоятельством, что функция Гаусса имеет наилучшие показатели локализации как во временной, так и в частотной областях.

На рис. 4.7 показаны вейвлеты первых четырех порядков и модули их спектральной плотности. При $n=1$ получаем вейвлет первого порядка, называемый WAVE-вейвлетом с равным нулю нулевым моментом. При $n=2$ получаем МНАТ-вейвлет, называемый «мексиканская шляпа» (mexican hat – похож на сомбреро). У него нулевой и первый моменты равны нулю. Он имеет лучшее разрешение, чем WAVE-вейвлет.

Совместное использование вейвлетов $g_1 - g_4$ для ВП существенно повышает точность вейвлет-анализа.

Таблица 4.1

Основные материнские вейвлеты

Вейвлеты	Аналитическая запись $\psi(t)$	Спектральная плотность $\psi(\omega)$
Вещественные непрерывные базисы		
Гауссовы: – первого порядка, или WAVE-вейвлет, – второго порядка, или МНАТ-вейвлет «мексиканская шляпа» – <u>mexican hat</u>), – n -го порядка,	$-t \exp(-t^2/2)$ $(1-t^2) \exp(-t^2/2)$ $(-1)^n \frac{d^n}{dt^n} [\exp(-t^2/2)]$	$(i\omega) \sqrt{2\pi} \exp(-\omega^2/2)$ $(i\omega)^2 \sqrt{2\pi} \exp(-\omega^2/2)$ $(-1)^n (i\omega)^n \sqrt{2\pi} \exp(-\omega^2/2)$
DOG – <u>d</u> ifference of <u>g</u> aussians	$e^{-t^2/2} - 0,5e^{-t^2/8}$	$\sqrt{2\pi}(e^{-\omega^2/2} - e^{-2\omega^2})$
LP-Littlewood & Paley	$(\pi t)^{-1} (\sin 2\pi t - \sin \pi t)$	$\begin{cases} (2\pi)^{-1/2}, \pi \leq t \leq 2\pi, \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$
Вещественные дискретные		
НААР-вейвлет	$\begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1/2, \\ \geq -1, & 1/2 \leq t \leq 1, \\ 0, & t < 0, t > 1. \end{cases}$	$ie^{i\omega/2} \frac{\sin^2 \omega/4}{\omega/4}$
ФНАТ-вейвлет, или «французская шляпа» (<u>F</u> rench <u>h</u> at – похож на цилиндр)	$\begin{cases} 1, & t \leq 1/3, \\ \geq -1/2, & 1/3 \leq t \leq 1, \\ 0, & t > 1. \end{cases}$	$\frac{4 \sin^3 \omega/3}{3 \omega/3}$
Комплексные		
Морле (Morlet)	$e^{i\omega_0 t} e^{-t^2/2}$	$\sigma(\omega) \sqrt{2\pi} e^{-(\omega-\omega_0)^2/2}$
Пауля (Paul) (чем больше n , тем больше нулевых моментов имеет вейвлет)	$\Gamma(n+1) \frac{i^n}{(1-n)^{n+1}}$	$\sigma(\omega) \sqrt{2\pi} (\omega)^n e^{-\omega}$

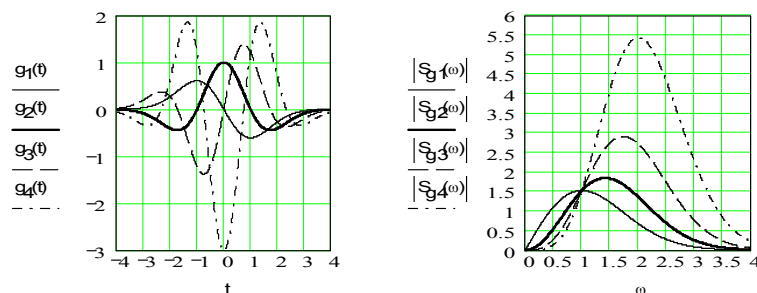


Рис. 4.7. Вейвлеты первых четырех порядков и модули их спектральной плотности

Наиболее простой пример *дискретного* вейвлета – это HAAR-вейвлет. Недостатком его являются несимметричность формы и негладкость – резкие границы в t -области, вследствие чего возникает бесконечное чередование «лепестков» в частотной области, хотя и убывающих как $1/\omega$.

LR -вейвлет, имеющий, наоборот, резкие границы в ω -области, можно считать другим предельным случаем.

Среди комплексных вейвлетов в наиболее часто используется базис, основанный на хорошо локализованном и во временной и в частотной областях вейвлете Морле. Характерный параметр ω_0 позволяет изменять избирательность базиса. Вещественная и мнимая части $\psi(t)$ – это амплитудно-модулированные колебания.

Выбор конкретного материнского вейвлета (будь то непрерывный или дискретный) целиком зависит от характера поставленной задачи и от конкретного анализируемого сигнала. Разные сигналы удается анализировать тем или иным способом, и критерием успеха обычно служит простота получаемого разложения. При этом решающим фактором оказываются интуиция и практический опыт исследователя.

При ВП мы не имеем частотного параметра, как это было при ОПФ. Вместо него здесь имеется параметр масштаба, который можно определить как величину, обратную частоте. Параметр масштаба в вейвлет-анализе имеет аналогию с масштабом географических карт. Большое значение масштаба соответствуют малому количеству деталей, глобальному представлению сигнала, а низкие значения масштаба позволяют различить детали. Аналогично, в терминах частоты, низкие частоты соответствуют глобальной информации о сигнале (которая содержится на всей его протяженности), а высокие частоты – детальной информации, скрытым особенностям, которые имеют обычно малую протяженность. Масштабирование, как математическая операция, расширяет или сжимает сигнал. Поэтому, при $s > 1$ расширяет сигнал, а при $s < 1$ сжимает его.

В настоящее время большинство вычислений выполняют компьютеры. Это означает, что ни ПФ, ни ОПФ, ни НВП не могут быть практически вычислены путем взятия интегралов. Так как интегралы при вычислении заменяются суммами, то достаточно логичным будет применить дискретизацию частотно-временной области, то есть перейти к **дискретизированному НВП**. Параметр масштаба s дискретизируется на логарифмической сетке, а параметр времени дискретизируется в соответствии с параметром масштаба, что означает, что на разных масштабах имеет место различная частота дискретизации. Чем больше s , тем меньше временных отсчетов мы берем – поэтому для низких частот получаем хорошую частотную и скудную временную информацию, а для высоких частот наоборот. Дискретизированное НВП будет определяться следующим выражением:

$$\Psi_x(j, k) = \int x(t) \psi_{j,k}(t) dt, \quad (4.2)$$

Из-за некоторых недостатков от дискретизированного НВП перешли к **дискретному вейвлет-преобразованию (ДВП)**.

Для начала определим понятие *субполосное кодирование (subband coding)*. Это результат свертки сигнала с несколькими полосовыми фильтрами и децимацией результата. Совокупность набора фильтров и дециматоров называется *банком фильтров*. Каждый получившийся в результате преобразования сигнал несет в себе информацию о спектральной составляющей исходного сигнала при некотором пространственном (временном) масштабе. Для обратного синтеза сигнала выполняется операция интерполяции субполосных сигналов, фильтрация и их сложение. Использование субполосного кодирования вкупе с *кратномасштабным анализом (multiresolution analysis)*, который представляет собой процесс декомпозиции сигнала на различных частотах и различном разрешении одновременно, позволяет получить масштабно-временное представление сигнала. Разрешение сигнала изменяется за счет фильтрации сигнала и является мерой количества детальной информации в нем, масштаб изменяется за счет интерполяции и децимации. Интерполяция соответствует увеличению частоты дискретизации сигнала, а децимация понижению. Эти процедуры осуществляются добавлением новых отсчетов между существующими отсчетами сигнала и удалением некоторых отсчетов из сигнала соответственно.

В ходе ДВП сигнал анализируется в различных частотных полосах с различным разрешением путем декомпозиции на грубую аппроксимацию (полусуммы соседних значений сигнала) и детали (полуразности соседних значений сигнала). Таким образом, определены два множества функций: масштабирующие функции и вейвлеты, соответствующие низкочастотным (НЧ) и высокочастотным (ВЧ) фильтрам.

$$\text{масштабирующие коэффициенты: } a_{j-1,k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{j,2k} + a_{j,2k+1}) \quad (4.3)$$

$$\text{вейвлет коэффициенты: } b_{j-1,k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{j,2k} - a_{j,2k+1}) \quad (4.4)$$

Эта особенность была замечена Маллатом и изложена им в одной из своих работ.

$$Y_{low}[k] = \sum_n x(n)h(2k - n) \quad (4.5)$$

$$Y_{high}[k] = \sum_n x(n)g(2k - n) \quad (4.6)$$

Эти два выражения определяют два фильтра: низкочастотный и высокочастотный. Добавляя к этой группе фильтров два дециматора, использование которых обусловлено избыточностью данных получаемых с выходов фильтров, получаем банк фильтров анализа (рис. 4.8). Следует отметить, что операция децимации в данном случае удаляет из сигнала нечетные компоненты и оставляет четные. Единичное применение такого банка фильтров к сигналу делит его на две части, в одной из которых содержатся

высокие частоты сигнала, а в другой низкие. В матричном виде это выглядит так:

$$\begin{bmatrix} A_n \\ D_n \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ d_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

где A_n, D_n фильтрующие матрицы размерностью $2^{n-1} \times 2^n$, построенные на основании коэффициентов фильтра в зависимости от разрядности x и претерпевшие децимацию – удаление нечетных строк; x – исходный сигнал; a_{n-1} и d_{n-1} – низкочастотная и высокочастотная составляющие сигнала x .

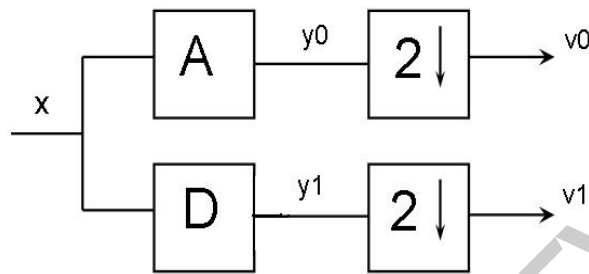


Рис. 4.8. ДВП. Процедура анализа:

A, D – фильтрующие матрицы (низкочастотная и высокочастотная),
 $2\downarrow$ – дециматор, $v0$ и $v1$ – a_{n-1} и d_{n-1} соответственно

Так как строки комбинированной матрицы (состоящей из A_n, D_n) взаимно ортогональны, так же, как и столбцы, то квадратная матрица инвертируема. Процедура инвертирования в этом случае соответствует процедуре транспонирования матрицы. Полученная матрица $[A^T \ D^T]$ представляет собой банк фильтров синтеза сигнала. Умножение этой матрицы на исходную справа дает нам единичный вектор I . Следовательно, мы имеем ортогональный банк фильтров синтеза – анализа (рис. 4.9).

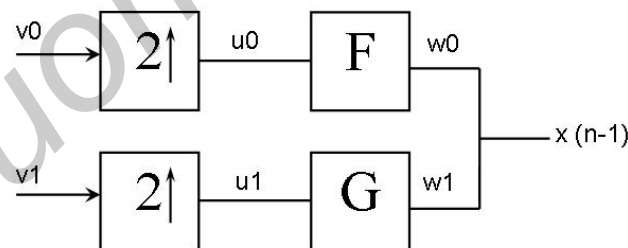


Рис. 4.9. ДВП. Процедура анализа:

$v0$ и $v1$ – a_{n-1} и d_{n-1} соответственно, $2\uparrow$ – интерполятор,
 F и G – добавляющий и вычитающий фильтры соответственно

Интерполятор представляет собой узел, который вставляет между двумя значениями сигнала третье – нуль. Работа фильтров F и G восстанавливает исходный сигнал x . Таким образом, две эти схемы вместе образуют банк фильтров ДВП.

Аналогично появлению в свое время быстрого ПФ (БПФ), появилось **быстрое вейвлет – преобразование (БВП, FWT)**. БВП вытекает из

классического ДВП рекурсивным применением последнего, что возможно благодаря принципу кратномасштабного анализа (рис. 4.10).

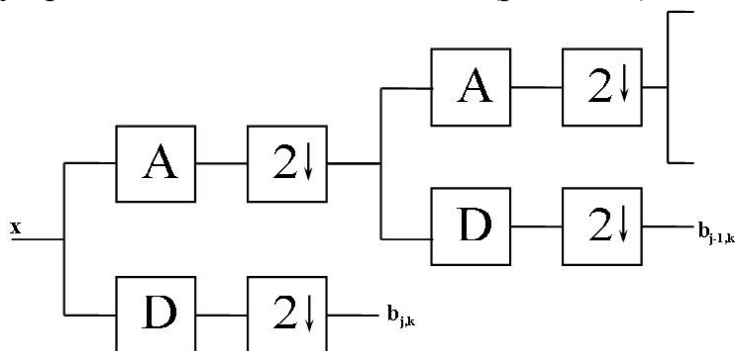


Рис. 4.10. БВП. Логарифмическое дерево банков фильтров

Сигнал x поступает на вход первого банка фильтров в дереве. После преобразования и децимации коэффициенты ВЧ фильтра $b_{j,k}$ сохраняются, так как они являются выходом на своем уровне «логарифмического дерева». Выходы же НЧ фильтра после децимации, когда в выходном сигнале остались только четные компоненты, поступают на вход следующего банка фильтров, где процедура повторяется. Выходом второго уровня являются коэффициенты $b_{j-1,k}$. Эта схема будет повторяться $L = \log_2 N$ раз, где N это число компонент в исходном сигнале. В итоге мы получим $L-1$ векторов с ВЧ фильтров и общее среднее – выход последнего НЧ фильтра, то есть полную декомпозицию сигнала. Применение такого рекурсивного алгоритма и есть БВП. Это преобразование подходит для любого сигнала, длина которого есть степень двойки, а также для любых вейвлетов, относящихся к классу ортогональных. Следует также добавить, что БВП обладает и обратным преобразованием, которое строится с использованием инверсного ДВП, когда в соответствие каждому блоку анализа на каждом уровне ставится блок синтеза. Таким образом, имеет место обратная рекурсия. Впервые такая связь между вейвлетами и фильтрами была открыта Стивеном Маллатом, поэтому в его честь этот алгоритм называют «алгоритмом Маллата» или «пирамидой Маллата».

Другим подходом к реализации БВП является *лифтинговая схема (lifting scheme)*. Подобная реализация БВП позволяет конструировать очень многие типы вейвлетов, включая ортогональные, биортогональные, вейвлет Хаара и другие, вне зависимости от преобразования Фурье.

Лифтинговая схема, как и алгоритм Маллата, включает в себя два блока: блок анализа и блок синтеза сигнала. Рассмотрим блок анализа (рис. 4.11).

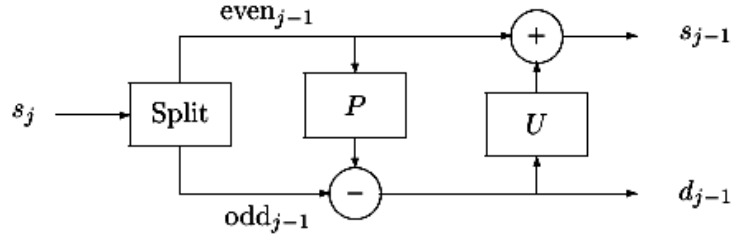


Рис. 4.11. Лифтинговая схема, блок анализа

На рисунке показано, что вектор входных значений s_j поступает на вход блока *разделения* (*Split*), который представляет собой устройство разбиения входного сигнала на две подпоследовательности по определенному закону с целью максимально «декоррелировать» сигнал. Одним из необходимых условий при проведении такой операции является возможность обратного восстановления сигнала из двух его подпоследовательностей, что используется на этапе анализа в блоке *объединения* (*Merge*) (рис. 4.12). Достаточно часто применяется разделение сигнала на две последовательности, состоящие из четных (*even*) и нечетных (*odd*) отсчетов исходного сигнала. Такая процедура получила название *Lazy wavelet Transform* – «ленивое» (не требующее больших усилий) вейвлет преобразование, которое задается выражением:

$$(even_{j-1}; odd_{j-1}) := Split(s_j) \quad (4.8)$$

Следующий блок в схеме анализа – это блок *предсказания* (*Predict*). На предыдущем шаге мы разделили исходный сигнал на две подпоследовательности четных и нечетных отсчетов. Если структура сигнала имеет локальную корреляцию, то четные и нечетные отсчеты будут сильно коррелированы. То есть, другими словами, имея одну подпоследовательность, должна быть возможность предсказать другую с заданной точностью. Всегда используется подпоследовательность четных отсчетов, чтобы предсказать подпоследовательность нечетных. В данном случае (вейвлет Хаара) нечетный отсчет $s_{j,2l+1}$ будет использовать своего левого соседа $s_{j,2l}$ как предсказание. Тогда уточняющая разность $d_{j-1,l}$ будет являться разностью нечетного отсчета и предсказания:

$$d_{j-1,l} = s_{j,2l+1} - s_{j,2l}; \quad (4.9)$$

Таким образом, операция предсказания определяется следующим выражением:

$$d_{j-1} = odd_{j-1} - P(even_{j-1}) \quad (4.10)$$

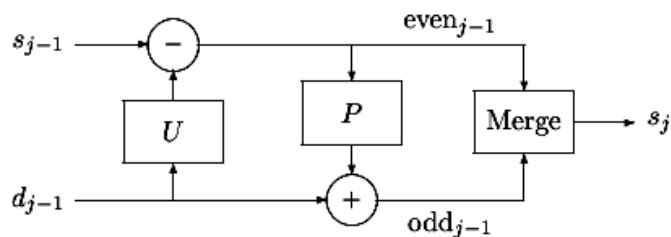


Рис. 4.12. Лифтинговая схема, блок синтеза

И, наконец, последний блок – блок обновления (*Update*). Коэффициенты, полученные на предыдущем этапе, необходимы чтобы «поднять» или «подтянуть» («обновить») оставшуюся часть отсчетов сигнала, так как вторая половина будет сохранена и анализироваться не будет. После процедуры четная подпоследовательность будет содержать информацию обо всем сигнале, так как, используя оператор предсказания, множество s будет дополняться информацией о множестве d , поскольку к этому моменту вместо множества d в памяти хранятся коэффициенты d^* преобразования (характеризующие множество d). Обновление четной подпоследовательности определяется следующим выражением:

$$s_{j-1} = even_{j-1} + U(d_{j-1}). \quad (4.11)$$

Получаемые коэффициенты s будут рекурсивно поступать на вход схемы или переходить на более низкий уровень точно такой же схемы, с целью произвести полную декомпозицию сигнала. Процедура будет повторяться до тех пор, пока множество s не будет содержать единственный последний коэффициент s_{00} , который теперь будет именоваться – *общее среднее*.

3. Задание

1. Ознакомьтесь с теоретической частью.
2. Для заданного сигнала в соответствии с вариантом реализуйте БВП с помощью алгоритма Маллата или используя лифтинговую схему (язык программирования C, C++).
3. Пояснить результаты работы программы.
4. Промоделируйте данную работу в MATLAB, сравните полученные результаты.

5. Напишите отчет.

Содержание отчета:

- исходные данные (заданный сигнал);
- краткое описание алгоритма работы программы;
- результаты работы программы;
- результаты моделирования в MATLAB;

- анализ и пояснение полученных результатов;
- выводы.

4. Контрольные вопросы

1. Назовите основные недостатки преобразования Фурье при анализе нестационарных сигналов.

2. Поясните суть оконного преобразования Фурье, его преимущества по сравнению с преобразованием Фурье и недостатки по сравнению с вейвлет-преобразованием.

3. Поясните основные положения вейвлет-анализа.

4. Назовите основные этапы реализации алгоритма Маллата.

5. Назовите основные этапы реализации лифтинговой схемы.