**武汉大学计算机学院**

**本科生实验报告**

**数据结构实验报告**

**实验四：大整数计算器**

专 业 名 称 ：计算机科学与技术

课 程 名 称 ：数据结构

指 导 教 师 ：安 扬

学 生 学 号 ：2017301500061

学 生 姓 名 ：彭 思 翔

学 生 班 级 ：计科二班

上 机 环 境 ：Visual Studio Code

二○一八 年 11 月

**一、实验题目**

实验三：大整数计算器

【问题描述】

实现大整数（200位以内的整数）的加、减、乘、除运算。

【基本要求】

设计程序实现两个大整数的四则运算，输出这两个大整数的和、差、积、商及余数。

【实现提示】

由于整型数据存储位数有限，因此引入串的概念，将整型数据用字符串进行存储，利用字符串的一个字符存储大整数的一位数值，然后根据四则运算规则，对相应位依次进行相应运算，同时保存进位，从而实现大整数精确的运算。

**二、实验目的**

深入掌握串的使用，掌握高精度问题的求解。

1. **实验项目程序结构**

priority

表达式计算过程

transform

evaluation\_expression

main

caculate

operator +=

operator +

operator >

Bium

operator <

operator -

operator -=

bigger

operator \*=

operator \*

operator >=

swap

operator /

operator <=

Bium类的方法

operator /=

operator ==

addtion

operator %=

operator %

substraction

factorial

operator !=

read

operator =

multiply

print

power

printL

clear

operator ++

fft

zerocheck

operator --

division

1. **实验项目中各文件函数功能描述**

【过程函数】

int **priority**(char);                    *//Compare the priority of operator*

void **transform**(char\*);                 *//Get the value of the expression*

void **evaluation\_expression**();          *//Read a expression and Get the value of the expression*

Bium **calculate**(Bium&, Bium&, char);    *//Do calculate*

【Bium方法函数】

class **Bium** {

    public:

**Bium**();                                             *// Structure for nothing*

**Bium** (Bium &);                                      *// Structure for Bium*

**Bium** (const int);                                   *// Structure for int*

**Bium** (const char \*);                                *// Structure for string*

        int **bigger**(const Bium&, const Bium&);

*//Compare if former is bigger than later,if they are the same return 2*

        void **swap**(Bium&, Bium&);                    *//Swap two Biums*

        void **addtion**(Bium&, Bium&, Bium&);           *//Store the second plus the third in the first*

        void **multiply**(Bium&, Bium&, Bium&);          *//Store the second times the third in the first*

        void **division**(Bium&, Bium&, Bium&);

*//Store the second divides the third in the first, and left the remainder in the second*

        void **subtraction**(Bium&, Bium&, Bium&);

*//Store the second minus the third in the first, after two have the same sg*

        void **fft**(complex<double>\*, int\*, int, int); *//Fast Fourier transform*

        bool operator > (const Bium&);              *//Compare if former is bigger than later*

        bool operator < (const Bium&);              *//Compare if former is smaller than later*

        bool operator >= (const Bium&);      *//Compare if former is not smaller than later*

        bool operator <= (const Bium&);             *//Compare if former is not bigger than later*

        bool operator == (const Bium&);             *//Compare if former and later are the same*

        bool operator != (const Bium&);          *//Compare if former and later are not the same*

        Bium operator + (Bium&);                 *//Reload +*

        Bium operator - (Bium&);                 *//Reload -*

        Bium operator \* (Bium&);                 *//Reload \**

        Bium operator / (Bium&);                 *//Reload /*

        Bium operator % (Bium&);                 *//Reload %*

        Bium **factorial**();                *//Caculate factorial*

        Bium **power**(Bium&);               *//Calculate the nth power, n is the parameter*

        Bium& operator = (const int&);                      *//Reload = for int*

        Bium& operator = (const Bium&);                     *//Reload = for Bium*

        Bium& operator = (const char\*&);                    *//Reload = for string*

        Bium& operator += (Bium&);                          *//Reload +=*

        Bium& operator -= (Bium&);                          *//Reload -=*

        Bium& operator \*= (Bium&);                          *//Reload \*=*

        Bium& operator /= (Bium&);                          *//Reload /=*

        Bium& operator %= (Bium&);                          *//Reload %=*

        Bium& operator ++ ();                               *//Reload pre ++*

        Bium& operator -- ();                               *//Reload pre --*

        Bium operator ++ (int);                             *//Reload post ++*

        Bium operator -- (int);                             *//Reload post --*

**read** ();                                   *//Read the Bium*

**clear** ();                                  *//Clear the Bium*

**print** ();                                  *//Print the Bium*

**printL** ();                                 *//Print the Bium*

**zerocheck**();                               *//Remove the zero in the front of the Bium*

};

**五、算法描述**

【数据结构】

Bium类：表示大整数，len为长度，sg为该数符号，char\*为每一位的数字。为了计算方便，char\*内的每个数字字符向前平移了48个ascall码。

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **数字字符** | **原ASCALL码** | **平移后ASCALL码** |
| 0 | 48 | 0 |
| 1 | 49 | 1 |
| 2 | 50 | 2 |
| 3 | 51 | 3 |
| 4 | 52 | 4 |
| 5 | 53 | 5 |
| 6 | 54 | 6 |
| 7 | 55 | 7 |
| 8 | 56 | 8 |
| 9 | 57 | 9 |

类里面为了方便计算，重载了运算符+、-、\*、/、%的运算，并加入了阶乘!和幂运算^的方法，重载了各类赋值运算、比较运算和前置后置的自加自减。详细可以见函数功能描述。

class **Bium** {

    private:

        char num[MAXLEN]; *//num[] for the number,*

        int len, sg;             *//len is the lenth of number, sg is the sign*

}

栈：用于中缀表达式转后缀表达式，有两个，一个是运算字符栈，一个是数字栈。因为相对简单所以没有单独用结构体或类定义。

char stack1[MAXSTACK];

Bium stack2[MAXSTACK];

int top1 = 0, top2 = 0;

【设计思路】

1. 表达式求值：由于输入是表达式，所以我们要处理表达式的计算。我们都知道，平常我们所见的表达式是中缀表达式，即操作符以中缀形式位于操作数之间。

格式:"操作数1 操作符 操作数2"

12 \* (3 + 4) - 6 + 8 / 2; *// 中缀表达式*

如果表达式是以后缀表达式表示的，那么只需要依次读取表达式，遇见数字压入数字栈中，遇见字符则从栈中取出两个数计算并将结果压回栈中。

格式："操作数 操作符"

12 3 4 + \* 6 - 8 2 / +; *//后缀表达式*

那么如何将中缀转为后缀呢？从中缀表达式中从左往右依次取出数据，并维护一个运算符栈:

|  |  |
| --- | --- |
| **符号** | **操作** |
| 数字 | 加入后缀队列 |
| ( | 直接入栈 |
| ) | 把栈里的操作符依次出栈并插入到后缀序列后面，直到遇到'('并弹出栈 |
| 其他 | 如果操作符的优先级比栈顶的符号优先级高，则入栈；当操作符优先级等于或小于栈顶符号优先级，则将栈顶出栈并插入到后缀序列的后面，直到此操作符比栈顶优先级高，将此操作符入栈。 |
| 如果中缀队列里的数据已经读取完毕，记录操作符的栈里，还有操作符的话，依次出栈插入到后缀序列的后面。在表达式最外层加上一对括号可以省略这一步骤。 | |

其中运算符的优先级为(阶乘不涉及两个数可在数字处直接处理)：

|  |  |
| --- | --- |
| **符号** | **操作** |
| ( | 0 |
| ) | 1 |
| + - | 2 |
| \* / % | 3 |
| ^ | 4 |

为了优化常数，可以在中缀转后缀的同时维护数字栈计算后缀表达式。整个过程大致如下：

数字栈：84 6

运算符栈：-

数字栈：12 7

运算符栈：\*

数字栈：12 3 4

运算符栈：\* ( +

数字栈：82

运算符栈：

数字栈：78 8 2

运算符栈：+ /

数字栈：78 8

运算符栈：+

时间复杂度O(ExpressionLenth)

    int n = **strlen**(ch);

    top1 = top2 = 0;

    ch[n++] = ')';

    stack1[top1++] = '('; *//Add parentheses to the outer layer to fully evaluate the expression*

for (int i = 0; i < n; i++) {

        if (ch[i] >= '0' && ch[i] <= '9') 数进数字栈，注意多位数处理；

        else {

            if (ch[i] == '!') {计算阶乘;continue;}

            if (ch[i] == '-' && ch[i - 1] != ')' && (i == 0 || ch[i - 1] < '0' || ch[i - 1] > '9'))

            {下一个数是负数;continue;}

            if (ch[i] == '(') {ch[i]进运算符栈;continue;}

            while (stack1[top1 - 1] != '(' && **priority**(stack1[top1 - 1]) >= **priority**(ch[i]))

                根据运算符栈顶计算数字栈头两个数并将结果放回数字栈;

            if (ch[i] == ')') top1--; else ch[i]进运算符栈;

        }

    }

（2）比较运算符重载：设置一个bigger(a, b)函数判断a,b大小，a>b返回1，a<b返回0, a==b返回2。利用这个函数可以重载>、<、>=、<=、==、!=的运算。bigger中首先判断两数符号，符号相等则判断两数长度，长度相等则依次判断每一位的位数。

时间复杂度O(N)

    if (a.sg \* b.sg < 0) return a.sg > b.sg;

    else if (a.sg > 0)

        if (a.len != b.len) return (a.len > b.len);

        else判断每一位;

    else if (a.sg < 0)                      *//Absolute value a < b if they are negative*

        if (a.len != b.len) return (a.len < b.len);

        else 判断每一位;

（3）赋值运算符重载：对于Bium类赋值给Bium类，则直接把每个属性覆盖；对于int赋值给Bium类，则将int每一位拆分存入；对于char\*赋值给Bium类，则将char\*每一位char左平移48位ASCALL码存入。由于重载了赋值，所以在比较运算时可以直接将Bium类与int型或char\*型比较，因为c++编译器底层在做比较运算的时候是先将两侧用赋值换作同类型再进行比较。

时间复杂度O(N)

    this->sg = s.sg, this->len = s.len;

    for (int i = 0; i < len; i++) this->num[i] = s.num[i];

    符号处理; this->len = 0;

    if (a != 0) while (a) this->num[this->len] = a % 10, a /= 10, this->len++;

    else this->num[0] = 0, this->len = 1;

    符号处理; this->len = **strlen**(s);

    for (int i = 0; i < this->len; i++) this->num[i] = s[this->len - i - 1] - '0';

（4）加减运算：从0开始将每一位相加减，并将每一位产生的进位或借位传递给下一位。注意结果的符号以及减法只能绝对值大的减绝对值小的。

时间复杂度O(N)

   c.sg = a.sg, c.len = **max**(a.len, b.len), int up = 0;

   for (int i = 0; i < c.len; i++)

       c.num[i] = (i >= a.len? 0: a.num[i]) + (i >= b.len? 0: b.num[i])+ up,

   up = c.num[i] / 10, c.num[i] %= 10;

   继续进位;

    c.len = a.len, up = 0;

    for (int i = 0; i < c.len; i++) {

        c.num[i] = a.num[i] - ((i >= b.len ? 0: b.num[i]) + up);

        up = 0; while (c.num[i] < 0) c.num[i] += 10, up++;

    }

1. 乘法运算：朴素的乘法运算是采用公式枚举两个数的每一位暴力计算，这样的时间复杂度是O(N^2)的。对于题目要求而言是够用了。但是由于不满足这种简单实现，想进一步了解高精度乘法的快速傅里叶变换FFT解法。我们先来了解一些概念，理解为什么可以这么做，再来介绍方法。

我们在概率论的课堂上学到了连续型卷积的定义：



与此类似可以定义**离散型卷积**：



我们可以看到，乘法运算和上面的离散型卷积的定义是一致的，也就是说乘法运算就是一种离散型的卷积。

下面将引入时域和频域。

一个数如132的幂级数可以表示成多项式,x=10的时候。我们将x分别取0,1,2可以得到三个点(0，2),(1，6),(2，12)。x取三个不同值x1,x2,x3的时候，已知f(x)系数通过函数的带入可以唯一确定三个点；于此同时，已知三个点通过高斯消元可以解得函数f(x)的系数。也就是说，f(x)和三个点坐标都可以唯一确定一个多项式。

假设多项式最高次为n，我们把n+1个系数如2，3，1表示多项式称为多项式的**系数表示法**；把n+1个横坐标不同的点如(0，2),(1，6),(2，12)表示多项式成为**点值表示法**。在信号领域，系数表示法相当于**频域**表示，点值表示法相当于**时域**表示。

系数表示法：f(x)=a0+a1x1+..+anxn

点值表示法：(x0,f0),(x1,f1)..(xn,fn)

在乘法运算中，如果已经已经知道了两个数多项式f,g的关于x0,x1……xn点值表示法，那么相乘只需要把f(x0),f(x1)……f(xn)与g(x0),g(x1)……g(xn)对应相乘为f(x0)×g(x0),f(x1)×g(x1)……f(xn)×g(xn)即可得到积的点值表示法。这里的时间复杂度是O(n)。

但是我们已知的是系数表示法，暴力从系数表示法转换为点值表示法时间复杂度是O(n2)并没有什么改变。不用担心，**离散傅里叶变换DFT**(Discrete Fourier Transform)可以做到O(nlogn)从频域转换为时域，而**离散傅里叶逆变换IDFT**(inverse DFT)可以做到O(nlogn)从时域转换为频域，只需要x0,x1……xn取特定的值。计算DFT和IDFT的算法称为**快速傅里叶变换算法FFT**（Fast Fourier Transformation）。这样整个算法的思路就很清楚了：

目标

h(x)=c0+c1x1+..+cnxn

f(x)=a0+a1x1+..+anxn

g(x)=b0+b1x1+..bnxn

IDFT,O(nlogn)

DFT,O(nlogn)

普通乘法,O(n)

(x0,f0\*g0),(x1,f1\*g0)..(xn,fn\*g0)

(x0,f0),(x1,f1)..(xn,fn)

(x0,g0),(x1,g1)..(xn,gn)

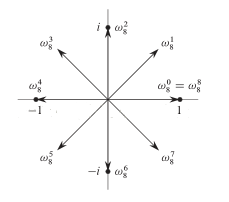
事实上，所有的离散型卷积都可以这么做，这就是**卷积定理**，即函数[卷积](https://baike.baidu.com/item/%E5%8D%B7%E7%A7%AF/9411006" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%8D%B7%E7%A7%AF%E5%AE%9A%E7%90%86/_blank)的[傅立叶变换](https://baike.baidu.com/item/%E5%82%85%E7%AB%8B%E5%8F%B6%E5%8F%98%E6%8D%A2/3472079" \t "https://baike.baidu.com/item/%E5%8D%B7%E7%A7%AF%E5%AE%9A%E7%90%86/_blank)是函数傅立叶变换的乘积。

在介绍FFT算法之前，先了解一下复数知识。

在复平面上任何一个复数z都能表示成为一个向量，即：

其中是z的模长，是向量与x轴的夹角，称之为幅角。根据欧拉公式则有,可以推出这是棣莫弗公式。

在系数表达法到点值表达法的转换过程中，n个不同x的取值是任意的。但是DFT的在频域到时域的时候用的是x是的所有复数解，这些解是，我们定义。即DFT中带入的不同的x的值分别为，他们是1的**单位根**，其中为**本原根**。这些解有特殊的性质。

根据欧拉公式，，再根据棣莫弗公式我们会发现单位根平分复平面。

由棣莫弗公式，我们很容易证得一下公式：









我们终于可以介绍FFT算法了！

既然DFT要选取单位根作为x的值，需要得到所有。怎么快速求得呢？对于一个多项式，我们根据项的指数分成两个部分：





令：





可得，



而根据公式1，对于求的值就转化为了求和

这样，我们把一个次数界为n的多项式求值问题转换成了两个个次数界为n/2的多项式求值问题。按照一下公式递归就可以得到解：



由于单位根的对称性,由公式3和4可以这样计算点值减少时间常数：



递归的层数为logN层，而每层都要计算对应的N个值，所以时间复杂度为O(NlogN)即可实现。注意到：

complex<double>\* **fft**(int\* f) {

n = **strlen**(f);

if (n == 1) return f[0];

complex<double>\* y[n];

int\* f1[n/2],f2[n/2];

for (int i = 0; i < n; i+=2) *//调整递归系数*

f1.**append**(f[i]),f2.**append**(f[i+1]);

y1 = **fft**(fx1), y2 = **fft**(fx2); *//递归*

w = 1;

wn = **complex**(**cos**(2\*PI/n),**sin**(2\*PI/n)); *//本原根*

for (int i = 0; i < n/2; i++) {

y[i] = (y1[i%(n/2)] + w \* y2[i%(n/2)]); *//递归的还原*

y[i + (n/2)] = (y1[i%(n/2)] - w \* y2[i%(n/2)]);

w = w\*wn; *//构造复数的单位根*

}

return y;

}

我们完成了O(NlongN)的频域到时域的变换，也可以O(N)相乘算出积的时域，那么怎么O(NlongN)从时域到频域变换呢？我们观察一下刚刚从系数表示到点值表示的变换，发现它本质上是一个矩阵相乘：



要使点值表示变为系数表示，只需使点值乘以M的逆矩阵，即。而我们会发现其中的 M矩阵就是一个**范德蒙矩阵，**范德蒙矩阵一定有逆，因此我们可以得到：



所以只需要把单位根用公式4换成，并把最终结果都除以n,IDFT还可以用刚刚FFT的算法求解。

complex<double>\* **fft**(int\* f, bool inverse) {

...

y1 = **fft**(fx1, inverse), y2 = **fft**(fx2, inverse); *//递归*

w = 1;

wn = 1 / **complex**(**cos**(2\*PI/n),**sin**(2\*PI/n)); *//本原根换成1/wn*

...

}

y=**fft**(f,1);

for (int i = 0; i < n; i++) y = y / n;

这样我们已经基本完成了多项式乘法求解的算法，为了优化时间复杂度和空间复杂度，我们将刚刚递归的FFT改为迭代的FFT。

观察递归的公式,发现它进行的是以下这样一个一个**蝴蝶操作**：



+



-

×

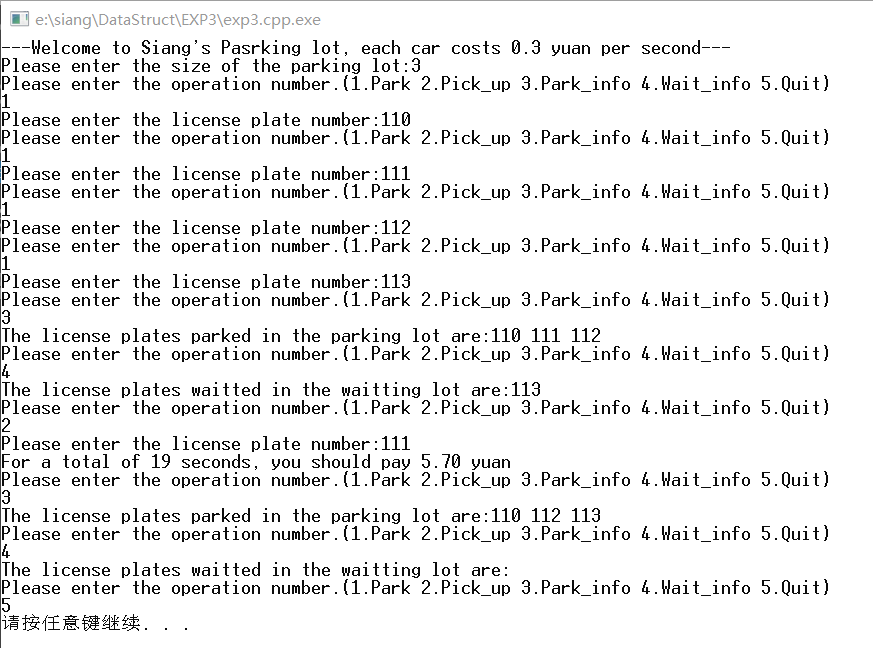


我们按照一定次序进行蝴蝶操作就可以迭代求解，什么顺序呢？我们之前按照指数的奇偶分别进行了递归

时间复杂度O(NlogN)

**六、实验数据和实验结果分析**

运行结果良好。



**七、实验体会**

停车场问题只不过是为了熟悉栈和队列的综合使用而强行凑的题目，对目的而言还是达到了，就是跟现实停车场相去甚远，问题的有趣性也不及前两个实验，总体而言中规中矩地完成了，不过每个操作为了省事没有单独设置一个函数。这个问题我为了方便计算价钱，定价是0.3元每秒，都是读取在操作时候的系统时间，可能有点黑心哦。

**八、参考文献**

https://blog.csdn.net/dream\_1996/article/details/78126839

https://blog.csdn.net/ice\_\_snow/article/details/52733968

https://blog.csdn.net/ljhandlwt/article/details/51999762

https://baike.baidu.com/item/%E5%8D%B7%E7%A7%AF%E5%AE%9A%E7%90%86/10440902?fr=aladdin

https://blog.csdn.net/ripped/article/details/70241716