Semaine 13 du 5 janvier 2026 (S2)

XII - Topologie des espace vectoriels normés

Le chapitre XII reste au programme :

1 Intérieur et adhérence

1.1 Rappels sur l'intersection et la réunion

1.2 Parties ouvertes

1.3 Parties fermées

1.4 Point adhérent et adhérence

1.5 Caractérisation séquentielle des fermés et de l'adhérence

1.6 Normes équivalentes

2 Densité

3 Limite et continuité d'une fonction entre deux espaces vectoriels normés

3.1 Limite et continuité en un point

3.2 Caractérisations séquentielles

3.3 Opérations sur les limites

3.4 Continuité sur une partie

3.5 Fonctions lipschitziennes

4 Limite et continuité en dimension finie

4.1 Utilisation des fonctions coordonnées

4.2 Continuité des applications linéaires, multilinéaires et polynomiales

4.3 Théorème des bornes atteintes

5 Continuité, ouverts et fermés

6 Exercices à connaître

6.1 Un peu de topologie dans $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$

1) Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|.\|_\infty$ et $F = \left\{f \in E,\ \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x > 0\right\}$. Proposer deux méthodes pour montrer que F est un ouvert de E.

2) On note $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ que l'on munit des deux normes en posant :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} (|f(x)|) \text{ et } \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$$

On considère $A = \{f \in E, f(0) = 0\}$ et $g : x \mapsto 1$.

a) Est-ce que g est adhérent à A pour la norme $\|\cdot\|_\infty$?

b) Est-ce que g est adhérent à A pour la norme $\|\cdot\|_1$?

6.2 Deux exercices : densité des matrices inversibles et distance à un fermé borné

1) Montrer que $\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Soit E un evn de dimension finie et A est une partie non vide, fermée et bornée de E. Soit $x \in E$. Montrer que $\inf\limits_{y \in A} \|x-y\|$ existe et qu'il existe $a \in A$ tel que $\|x-a\| = \inf\limits_{y \in A} \|x-y\|$.

Ce réel est appelé ***distance de** x **à** A* et noté $\mathrm{d}(x, A)$.

6.3 Densité et continuité

1) Trouver toutes les fonctions g continues sur $\mathbb{R}$, vérifiant $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x+y) = g(x) + g(y)$.

2) Même question pour $g(x+y) = g(x)g(y)$.

6.4 Norme subordonnée

Soit u une application linéaire continue de E dans F, deux espaces vectoriels normés non nuls. On définit :

$$M_1 = \sup\left\{ \frac{\|u(x)\|}{\|x\|},\ x \in E\backslash\{0\} \right\}$$
$$M_2 = \sup\left\{ \|u(x)\|,\ x \in E \text{ t.q. } \|x\| = 1 \right\}$$
$$M_3 = \inf\left\{ k \geqslant 0 \text{ t.q. } \forall\, x \in E,\ \|u(x)\| \leqslant k\|x\| \right\}$$

1) Justifier l'existence de ces nombres.

2) Montrer que $M_1 = M_2 = M_3$.

Remarque : On note en général $|||u|||$ ce nombre, et on peut montrer que $|||.|||$ définit sur $\mathscr{L}(E,F)$ une norme. Cette norme s'appelle la ***norme subordonnée*** à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$, et elle satisfait :

$$\forall\, x \in E,\ \|u(x)\|_F \leqslant |||u|||\, \|x\|_E.$$

S'y ajoute :

XII - Variables aléatoires discrètes

1 Variables aléatoires discrètes

1.1 Définition

1.2 Évènements associés à une variable aléatoire

1.3 Fonction d'une variable aléatoire

2 Loi d'une variable aléatoire discrète

2.1 Définition

2.2 Loi conditionnelle

3 Lois usuelles

3.1 Rappels : lois usuelles finies

3.2 Loi géométrique

3.3 Loi de Poisson

4 Couples de variables aléatoires

4.1 Définition, loi conjointe, lois marginales

4.2 Extension aux n-uplets de variables aléatoires

5 Variables aléatoires indépendantes

5.1 Définition

5.2 Évènements indépendants et variables aléatoires indépendantes

5.3 Extension au cas de n variables aléatoires

5.4 Fonctions de variables aléatoires indépendantes

5.5 Familles infinies de variables aléatoires indépendantes

6 Exercices à connaître

6.1 Premier tirage d'une boule (Banque CCP MP)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.
On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1) Déterminer la loi de X.

2) Déterminer la loi de Y.

6.2 Loi d'un couple et lois marginales

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie

$$\forall\,(j,k) \in \mathbb{N}^2,\ P(X=j, Y=k) = a\frac{j+k}{2^{j+k}} \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$

1) Déterminer la valeur de a.

2) Déterminer les lois marginales X et Y.

3) Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

4) Calculer $P(X=Y)$.

6.3 Max et min de deux lois géométriques (Banque CCP MP)

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Elles suivent la même loi définie par : $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $P(X=k) = P(Y=k) = pq^k$ où $p \in \,]0,1[$ et $q = 1-p$.
On considère alors les variables U et V définies par $U = \max(X,Y)$ et $V = \min(X,Y)$.

1) Déterminer la loi du couple (U,V).

2) Déterminer la loi marginale de U.
On admet que $V(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $P(V=n) = pq^{2n}(1+q)$.

3) Prouver que $W = V+1$ suit une loi géométrique.

4) U et V sont-elles indépendantes ?

6.4 Couples de variables aléatoires de Poisson (Banque CCP MP)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.

1) Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in (]0,+\infty[)^2$.
Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent des lois de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.

2) Soit $p \in \,]0,1]$. Soit $\lambda \in \,]0,+\infty[$.
Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ.
On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y=m)$ est une loi binomiale de paramètre (m,p).
Déterminer la loi de X.