

# I – Rappels et compléments d’algèbre linéaire, 1ère partie

## I. Image d’une base par un endomorphisme

- 1) **Condition nécessaire** : Supposons qu’il existe  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $\text{Ker } u = F$  et  $\text{Im } u = G$ . Avec  $n = \dim E$ , par le théorème du rang  $\dim \text{Ker } u + \dim \text{Im } u = \dim E$ , donc  $\dim E = \dim F + \dim G$  est une condition nécessaire.

**Condition suffisante** : Réciproquement, en posant  $p = \dim F$ ,  $q = \dim G$ , supposons que  $p + q = n$ . Nous allons construire  $u$  convenable en la définissant sur une base judicieusement choisie de  $E$ .

Soit  $(f_1, \dots, f_p)$  une base de  $F$ , que l’on complète par  $(f_{p+1}, \dots, f_{p+q})$  en une base de  $E$  : cette base servira de base « de départ » pour  $u$ .

Soit  $(g_1, \dots, g_q)$  une base de  $G$ , on considère la famille « à l’arrivée »  $(0, \dots, 0, g_1, \dots, g_q)$ , dont les  $p$  premiers vecteurs sont nuls. Notons cette famille  $(k_1, \dots, k_n)$ .

On sait alors qu’il existe un unique endomorphisme  $u$  tel que pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $u(f_i) = k_i$ .

Alors :  $\text{Im } u = \text{Vect}(u(f_1), \dots, u(f_n)) = \text{Vect}(0, \dots, 0, g_1, \dots, g_q) = \text{Vect}(g_1, \dots, g_q) = G$ .

En particulier,  $\text{rg } u = \dim G = q$ .

Or pour tout  $i$  de 1 à  $p$ ,  $f_i \in \text{Ker } u$  donc  $F = \text{Vect}(f_1, \dots, f_p) \subset \text{Ker } u$ . Or avec le théorème du rang,  $\dim \text{Ker } u = \dim E - \text{rg } u = n - q = p = \dim F$ .

Donc  $F = \text{Ker } u$  : la condition était bien suffisante.

- 2) Une base de  $F$  est  $\left( \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ , que l’on complète en la base de

$\mathbb{R}^3$   $\left( \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ , notée  $(f_1, f_2, f_3)$ . Posons  $g_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Cherchons l’expression de l’endomorphisme  $u$  tel que  $u(f_1) = u(f_2) = 0$  et  $u(f_3) = g_1$ .

Soit  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ . Décomposons-le dans la base  $(f_1, f_2, f_3)$ . Une résolution de système linéaire sans surprise donne

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z f_1 + (y + z) f_2 + (x + y + z) f_3.$$

$$\text{Ainsi } u \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z u(f_1) + (y + z) u(f_2) + (x + y + z) u(f_3) = (x + y + z) g_1.$$

Une application  $u$  telle que  $\text{Ker } u = F$  et  $\text{Im } u = G$  est donc  $u$  :

$$\begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto (x + y + z) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

## II. Une caractérisation des homothéties

- 1) Pour tout  $x \neq 0_E$ , il existe  $\lambda(x) \in \mathbb{K}$  tel que

$$f(x) = \lambda(x) \cdot x$$

et le but est de montrer que  $\lambda(x)$  ne dépend pas de  $x$ , i.e. que si  $x \neq y$ ,  $\lambda(x) = \lambda(y)$ . Pour cela on considère deux vecteurs non nuls  $x$  et  $y$ , et on examine deux cas : Si  $(x, y)$  est liée, il existe  $\mu$  tel que  $y = \mu x$ . On a alors

$$f(y) = \mu f(x) = \mu \lambda(x) x = \lambda(x) y$$

et donc  $\lambda(x) = \lambda(y)$ . Si  $(x, y)$  est libre, on passe par l’intermédiaire de  $x + y$ . En effet,  $f(x + y) = f(x) + f(y) = \lambda(x)x + \lambda(y)y$  d’une part,  $f(x + y) = \lambda(x + y)(x + y)$  d’autre part. Comme  $(x, y)$  libre, on obtient  $\lambda(x) = \lambda(y) = \lambda(x + y)$ . Et c’est ce qu’on voulait...

- 2) Une droite est l’intersection de deux plans donc une telle application stabilise aussi les droites : c’est donc une homothétie.
- 3) Une homothétie commute avec tout endomorphisme. Réciproquement, soit  $f$  un endomorphisme qui commute avec tout endomorphisme. Si  $x \neq 0_E$ , soit  $F$  un supplémentaire de  $\text{Vect}(x)$  dans  $E$  (C’est pour l’existence de ce supplémentaire qu’on suppose  $E$  de dimension finie). Soit  $p$  la projection sur  $\text{Vect}(x)$  parallèlement à  $F$ . Alors  $f \circ p = p \circ f$ . On applique cela en  $x$ , on obtient  $p(f(x)) = f(x)$ , donc  $f(x)$  est lié avec  $x$ . Et ce, pour tout  $x$ . Il ne reste plus qu’à appliquer la question précédente.
- 4) On en déduit que le centre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est constitué par les homothéties (en utilisant l’isomorphisme canonique entre  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ ).
- 5) On retrouve ce résultat en considérant une matrice  $M$  du centre et en écrivant

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad M E_{i,j} = E_{i,j} M$$

### III. Noyaux itérés

- 1) Si  $f^p(x) = 0_E$ ,  $f(f^p(x)) = 0_E$ , i.e.  $f^{p+1}(x) = 0_E$ . On a donc

$$x \in F_p \implies x \in F_{p+1}$$

Ou encore  $F_p \subset F_{p+1}$ . De plus, si  $y \in G_{p+1}$ , il existe  $x$  tel que  $y = f^{p+1}(x)$ . Mais alors  $y = f^p(f(x))$ , donc  $y \in G_p$ . Et finalement  $G_{p+1} \subset G_p$ .

- 2) On est en dimension finie : la suite des dimensions des  $F_p$ , croissante et majorée, converge vers  $\ell$ . Mais c'est une suite d'entiers naturels. Elle est donc stationnaire et  $\ell \in \mathbb{N}$ . Il existe donc  $l$  tel que pour tout  $k \geq l$ ,  $F_k = F_{k+1} = F_l$  (si un sev est inclus dans un autre et s'ils ont même dimension, ils sont égaux). On peut alors poser  $r = \min \{ l \in \mathbb{N}, F_l = F_{l+1} \}$ . C'est un ensemble d'entiers naturels, non vide d'après le point précédent, donc  $r$  existe bien. On montre ensuite par récurrence sur  $p$  que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, H_p : \ll \text{Ker}(f^r) = \text{Ker}(f^{r+p}) \gg.$$

**Initialisation** :  $H_0$  est évidente.

**Hérédité** : Soit  $p \in \mathbb{N}$ , montrons  $H_p \implies H_{p+1}$  et supposons pour cela  $H_p$ .

On a d'abord, par croissance de la suite de sous-espaces vectoriels de  $E$  ( $\text{Ker } f^n$ ), que  $\text{Ker}(f^r) \subset \text{Ker}(f^{r+p+1})$ . Ensuite, soit  $x \in \text{Ker}(f^{r+p+1})$ . On a alors  $f^{p+r+1}(x) = f^{p+r}(f(x)) = 0_E$  et donc  $f(x) \in \text{Ker}(f^{r+p})$ . Par hypothèse de récurrence, on a donc  $f(x) \in \text{Ker } f^r$ , et donc  $f^r(f(x)) = f^{r+1}(x) = 0_E$ , soit  $x \in \text{Ker } f^{r+1}$ . D'après la question précédente, on a finalement que  $x \in \text{Ker } f^r$  et donc  $\text{Ker}(f^{r+p+1}) \subset \text{Ker } f^r$ , soit  $\text{Ker}(f^{r+p+1}) = \text{Ker } f^r$ .

**Conclusion** : Par récurrence, pour tout entier naturel  $p$ ,  $H_p$  est vraie.

- 3) On peut faire le même genre de raisonnement qu'à la question précédente, mais il est plus simple de se souvenir du théorème du rang. En effet, comme pour tout  $p$  on a  $G_{p+1} \subset G_p$ , on a

$$G_p = G_{p+1} \iff \dim(G_p) = \dim(G_{p+1})$$

Mais du théorème du rang on déduit facilement que

$$(\dim(G_p) = \dim(G_{p+1})) \iff (\dim(F_p) = \dim(F_{p+1}))$$

et on est ramené à utiliser les résultats de la question précédente. On trouve  $r = s$ .

- 4) Comme  $r = s$ , le théorème du rang fait qu'il nous suffit de montrer que

$$F_r \cap G_r = \{0_E\}$$

Mais si  $x \in F_r \cap G_r$ , soit  $y$  tel que  $x = f^r(y)$ ; de  $f^r(x) = 0_E$  on déduit que  $f^{2r}(y) = 0_E$ . Donc  $y \in F_{2r}$ . Mais  $F_{2r} = F_r$  d'après 2. Donc  $y \in F_r$ , donc  $x = 0_E$ , ce qui conclut.

### IV. « Inégalité triangulaire » et une autre inégalité autour du rang

- 1) a) Il suffit de remarquer que  $\text{Im}(u + v) \subset \text{Im } u + \text{Im } v$ . En effet, si  $y \in \text{Im}(u + v)$ , il existe  $x \in E$  tel que  $y = (u + v)(x) = u(x) + v(x)$ . Or  $u(x) \in \text{Im } u$  et  $v(x) \in \text{Im } v$ .

Attention, l'inclusion réciproque est fautive : essayez de la démontrer, remarquez où la démonstration échoue et cherchez un contre-exemple. On en tire :  $\text{rg}(u + v) \leq \dim(\text{Im } u + \text{Im } v) \leq \text{rg } u + \text{rg } v$ , la dernière inégalité découlant de la formule de Grassman.

- b) Commençons pas remarquer que pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ ,  $\text{Im}(\lambda u) = \text{Im } u$ . En effet, si  $y \in \text{Im}(\lambda u)$ , il existe  $x \in E$  tel que  $y = \lambda u(x) = u(\lambda x) \in \text{Im } u$ . L'inclusion réciproque se démontre de la même manière, en utilisant bien que  $\lambda \neq 0$ .

Ainsi

$$\begin{aligned} \text{rg}(u) &= \text{rg}((u + v) + (-v)) \\ &\leq \text{rg}(u + v) + \text{rg}(-v) && \text{grâce à la première question} \\ &\leq \text{rg}(u + v) + \text{rg}(v) && \text{avec la remarque précédente} \end{aligned}$$

d'où

$$\text{rg}(u) - \text{rg}(v) \leq \text{rg}(u + v) \quad (1)$$

En inversant les rôles de  $u$  et  $v$  et en écrivant  $v = (u + v) - u$ , on obtient de la même manière

$$\text{rg}(v) - \text{rg}(u) \leq \text{rg}(u + v) \quad (2)$$

Les équations (1) et (2) assurent alors que

$$|\text{rg}(u) - \text{rg}(v)| \leq \text{rg}(u + v).$$

- 2) Nous savons que  $\text{Im}(u \circ v) \subset \text{Im } u$  donc  $\text{rg}(u \circ v) \leq \text{rg } u$ . De plus  $\text{Im}(u \circ v) = u(\text{Im } v)$ . Si  $\tilde{u}$  est la restriction de  $u$  à  $\text{Im } v$ , alors  $\text{rg}(u \circ v) = \text{rg}(\tilde{u})$ . Le théorème du rang assure que  $\text{rg}(\tilde{u}) = \dim \text{Im } v - \dim \text{Ker } \tilde{u} \leq \text{rg } v$ . Ainsi

$$\text{rg}(u \circ v) \leq \inf(\text{rg } u, \text{rg } v).$$

D'autre part, en repartant de  $\text{rg}(\tilde{u}) = \dim \text{Im } v - \dim \text{Ker } \tilde{u}$ , nous avons  $\text{Ker } \tilde{u} = \text{Ker } u \cap \text{Im } v \subset \text{Ker } u$  donc  $\dim \text{Ker } \tilde{u} \leq \dim \text{Ker } u$ . Avec le théorème du rang il vient  $\dim \text{Ker } \tilde{u} \leq n - \text{rg } u$ , et donc finalement

$$\text{rg } v + \text{rg } u - n \leq \text{rg}(u \circ v).$$

## V. Endomorphismes nilpotents

- 1) Introduire  $\mathcal{E} = \{ k \in \mathbb{N}, f^k = 0 \}$  et montrer qu'il a un min, qui est donc unique.
- 2) Prendre  $x \notin \text{Ker } f^{p-1}$ , regarder une combinaison nulle non triviale de la famille, poser  $k$  le plus petit indice tel que  $\lambda_k \neq 0$  et composer par  $f^{p-k}$  : on aboutit à une contradiction.
- 3) Une famille libre a toujours moins de  $n$  éléments.
- 4) Ligne de 1 en-dessous de la diagonale.
- 5)  $E = \mathbb{R}_{n-1}[X], P \mapsto P'$ .