



## Feuille d'exercice n° 07 : Suites de fonctions

### I. Convergences simple et uniforme


**Exercice 1** () On pose  $f_n(x) = x^n \ln x$  avec  $x \in ]0, 1]$  et  $f_n(0) = 0$ . Étudier la convergence uniforme de  $(f_n)$  sur  $[0, 1]$ .

**Exercice 2** () Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n$ .

- 1) Étudier la limite simple de  $(f_n)$ .
- 2) Pour quels  $\alpha \in \mathbb{R}$  y a-t-il convergence uniforme ?

**Exercice 3** () Étudier la convergence (simple, uniforme, uniforme sur tout segment) de la suite de fonctions


$$b_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{2nx^2}{1+n^2x^4}.$$

**Exercice 4** () Étudier (convergence simple, convergence uniforme, convergence uniforme sur des parties de l'ensemble de départ) les suites d'applications suivantes :

- 1)  $f_n : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto n(1-x) \left( \sin \frac{\pi x}{2} \right)^n, n \in \mathbb{N} ;$
- 2)  $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \sin \left( \frac{n+1}{n} x \right), n \in \mathbb{N}^* ;$
- 3)  $f_n : [0; +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \ln \left( 1 + \frac{nx^2}{1+nx} \right), n \in \mathbb{N} ;$

4)  $f_n : ]0; +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto (nx)^{\frac{x}{n}}, n \in \mathbb{N}^*.$

**Exercice 5** On pose  $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x+\dots+x^n}$  pour  $x \geq 0$ . Donner l'allure du graphe de  $f_n$ . Étudier la convergence simple puis convergence uniforme de la suite  $(f_n)$ .

**Exercice 6** () Pour tout entier naturel non nul  $n$  et tout réel positif  $x$ , on définit  $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$  si  $x \leq n$  et  $f_n(x) = 0$  si  $x > n$ . Étudier la convergence de cette suite de fonctions.

**Exercice 7** Soit  $f : x \mapsto 2x(1-x)$  de  $[0, 1]$  dans lui-même. On définit par récurrence :  $f_0 = \text{Id}$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_{n+1} = f \circ f_n$ . La suite  $(f_n)$  converge-t-elle simplement ? uniformément ?

**Exercice 8** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , on pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$g_n : x \mapsto n \left( f \left( x + \frac{1}{n} \right) - f(x) \right).$$

- 1) Si  $f$  est dérivable, montrer que  $(g_n)$  converge simplement vers une fonction  $g$ , à définir.
- 2) Si  $f$  est  $\mathcal{C}^2$  et à dérivée seconde bornée, montrer que cette convergence est uniforme.
- 3) Si  $f$  est  $\mathcal{C}^1$ , montrer que cette convergence est uniforme sur tout segment.

### Exercice 9

Soient  $X$  un ensemble non vide,  $(f_n : X \rightarrow \mathbb{R}_+)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'applications,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  une application. On suppose :  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{C.U.} f$ .

Montrer :  $\ln(1 + f_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{C.U.} \ln(1 + f)$ .

**Exercice 10**

Soit  $f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , bornée,  $\geq 0$ . Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite d'applications  $(f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :


$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{n+1}(x) = \ln(1 + f_n(x))$$

**II. Régularité de la limite d'une suite de fonctions**

**Exercice 11** Sur  $[0, 1]$ , on définit  $f_n : x \mapsto \frac{x}{1 + n^2 x^2}$ .


- 1) Montrer que  $(f_n)$  converge vers une limite  $f$ . Comment ?
- 2) Montrer que  $(f'_n)$  converge vers une limite  $g$ . Comment ?

**III. Intersion limite - intégrale**

**Exercice 12** () Trouver un équivalent simple, lorsque l'entier  $n$  tend vers l'infini, de :

- 1)  $\int_0^1 x^n \ln(1 + x^n) dx$
- 2)  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{x(1 + x^2)} dx$ .

**Exercice 13** Former un développement asymptotique à la précision  $o\left(\frac{1}{n}\right)$  de  $I_n = \int_0^1 \frac{nx^n}{1 + x^{2n}} dx$ , lorsque l'entier  $n$  tend vers l'infini. On laissera un des coefficients sous forme d'une intégrale.

**Exercice 14** () On définit  $(u_n)_n$  suite de fonctions définies sur  $[0, 1]$  par :

$$u_0(x) = 1 \text{ et } u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t - t^2) dt.$$

- 1) Montrer que, pour tout  $x \in [0, 1]$  :

$$0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

- 2) En déduire, pour tout  $x \in [0, 1]$ , la convergence de la suite  $(u_n(x))_n$ .
- 3) Établir que la suite  $(u_n)_n$  converge uniformément vers une fonction  $u$  non nulle, vérifiant :

$$u'(x) = u(x - x^2).$$

