XVII – Endomorphismes d'une espace vectoriel euclidien

I. Endomorphismes préservant l'othogonalité

1) $(u+v \mid u-v) = \|u\|^2 - \|v\|^2 = 0$ pour u et v unitaires.

2) Soient u et v des vecteurs unitaires de E. $u+v$ et $u-v$ sont orthogonaux donc $f(u+v)$ et $f(u-v)$ le sont aussi. Or par linéarité

$$f(u+v) = f(u) + f(v) \text{ et } f(u-v) = f(u) - f(v)$$

de sorte que l'orthogonalité de ces deux vecteurs entraîne

$$\|f(u)\| = \|f(v)\|$$

Ainsi les vecteurs unitaires de E sont envoyés par f sur des vecteurs ayant tous la même norme $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Montrons qu'alors

$$\forall\, x \in E,\ \|f(x)\| = \alpha\|x\|$$

Soit $x \in E$.
Si $x = 0$ alors on a $f(x) = 0$ puis $\|f(x)\| = \alpha\|x\|$.
Si $x \neq 0$ alors en introduisant le vecteur unitaire $u = x/\|x\|$, on a $\|f(u)\| = \alpha$ puis $\|f(x)\| = \alpha\|x\|$

3) Si $\alpha = 0$ alors $f = \tilde{0}$ et n'importe quel $g \in \mathrm{O}(E)$ convient.
Si $\alpha \neq 0$ alors introduisons l'endomorphisme

$$g = \frac{1}{\alpha} f$$

La relation obtenue en **2)** assure que g conserve la norme et donc $g \in \mathrm{O}(E)$ ce qui permet de conclure.

II. Matrices orthogonales et inégalités

1) Avec $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ et u l'endomorphisme canonique associé à A, si $e = e_1 + \cdots + e_n$ alors $\displaystyle\sum_{i,j} a_{i,j} = \langle u(e), e\rangle$, pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. Puis on conclut en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2) Pour tout j, $\displaystyle\sum_i a_{i,j}^2 = 1$ donc pour tout i $a_{i,j}^2 \leqslant 1$, donc $|a_{i,j}| \leqslant 1$ donc $\displaystyle\sum_{i,j} |a_{i,j}| \geqslant \sum_{i,j} a_{i,j}^2 = n$.

3) $\displaystyle\sum_{i,j} |a_{i,j}| = \sum_{i,j} |a_{i,j}| \times 1 = \langle\, |\, A\, |\, , J\rangle$ pour le produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, où J est la matrice dont tous les coefficients valent 1, et $|A| = (|a_{ij}|)$. Alors, toujours avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\displaystyle\sum_{i,j} |a_{i,j}| \leqslant \sqrt{\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2}\sqrt{\sum_{i,j} 1^2} \leqslant n\sqrt{n}$.

4) On peut avoir l'égalité si $n = 1$ mais aussi si $n = 4$ avec

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

En fait, un approfondissement du problème donne $\sqrt{n} \in 2\mathbb{Z}$ comme condition nécessaire à l'obtention de l'égalité.
Pour avoir égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz de la question **3)**, il faut que tous les coefficients de A soient de même valeur absolue λ. Et donc en faisant la somme des $|a_{ij}|$ on obtient $n^2\lambda = n\sqrt{n}$ donc $\lambda = 1/\sqrt{n}$.
Pour l'inégalité de Cauchy-Schwarz de la question **1)**, il faut que la somme de tous les coefficients d'une ligne vaille une constante. Cette constante doit valoir 1 pour que la somme de tous les coefficients vaille n. Si on appelle a le nombre de + sur une ligne, on doit donc avoir $(a - (n-a))\sqrt{n} = 1$, donc $2a = n + \sqrt{n}$. Donc n doit être un carré parfait.
Enfin les colonnes doivent être deux à deux orthogonales, donc le nombre de +, a, doit avoir la même parité que n (je ne sais pas trop le montrer rigoureusement :)) donc n doit être pair.

III. Matrices symétriques positives

On introduit, sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la norme euclidienne, notée $||.||$, associée au produit scalaire canonique, définie par : $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $||X|| = \sqrt{X^\top X}$.

1) Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Prouvons que $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \mathrm{Sp}(A) \subset [0, +\infty[$.
Raisonnons par double implication.
Supposons que $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Prouvons que $\mathrm{Sp}(A) \subset [0, +\infty[$.
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$.
$\exists X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \ / \ AX = \lambda X$.
Alors $X^\top AX = X^\top \lambda X = \lambda ||X||^2$.

Or, $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ donc $X^\top AX \geqslant 0$.
Donc $\lambda ||X||^2 \geqslant 0$.
Or, $X \neq 0$ donc $||X||^2 > 0$.
Donc $\lambda \geqslant 0$.
Supposons que $\mathrm{Sp}(A) \subset [0, +\infty[$.

Prouvons que $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.
$A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ donc, d'après le théorème spectral, $\exists P \in \mathrm{O}(n) \ / \ A = PDP^\top$ où $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$.

Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
$X^\top AX = X^\top PDP^\top X = (P^\top X)^\top D(P^\top X)$.
Notons $y_1, y_2, ..., y_n$ les composantes de la matrice colonne $Y = P^\top X$.

Ainsi $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$ et donc $X^\top AX = Y^\top DY = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$. (1)

Or, λ_1, λ_2,...,λ_n sont les valeurs propres de A donc, par hypothèse, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \geqslant 0$.
Donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i y_i^2 \geqslant 0$.
Donc, d'après (1), $X^\top AX \geqslant 0$.

2) Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
Prouvons que $A^2 \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.
$\left(A^2\right)^\top = A^\top A^\top$.

Or, $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ donc $A^\top = A$. Donc $\left(A^2\right)^\top = A^2$. Donc $A^2 \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$X^\top A^2 X = X^\top A^\top AX = (AX)^\top (AX) = ||AX||^2 \geqslant 0$.

Donc $A^2 \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

3) soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et soit $B \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.
On suppose que $AB = BA$.
$\left(A^2B\right)^\top = (ABA)^\top = A^\top B^\top A^\top = ABA = A^2B$.
Donc $A^2B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

A et B commutent donc $X^\top \left(A^2B\right) X = X^\top ABAX$.
Or, A est symétrique donc $X^\top ABAX = (AX)^\top B(AX)$.
On pose $Y = AX$.
$Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ donc $(AX)^\top B(AX) = Y^\top BY \geqslant 0$.
Donc $X^\top A^2BX \geqslant 0$.
Donc $A^2B \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

IV. Racine carrée d'une matrice symétrique positive

Existence : il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P^T D P$, où $D = \mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_n)$ et les $d_i \in \mathbb{R}_+$. Posons $B = P^T D' P$ avec $D' = \mathrm{diag}(\sqrt{d_1}, \cdots, \sqrt{d_n})$. Alors $B^2 = A$.

Unicité :

1ère méthode : Notons f l'endomorphisme canoniquement associé à A. A est diagonalisable, donc $E = \mathbb{R}^n$ est la somme directe des espaces propres de A. Soit F un espace propre associé à une valeur propre d, et soit B telle que $B^2 = A$, représentant l'endomorphisme g.
Alors A et B commutent, donc F est stable par B. Notons $h = f|_F$.alors h est aussi symétrique positive réelle et donc elle diagonalisable. Ses valeurs propres sont positives, mais puisque $h^2 = d\mathrm{Id}$, alors ces valeurs propres valent toutes $\sqrt{d}$. Donc $h = \sqrt{d}\mathrm{Id}$. f est donc définie de manière unique sur chaque sous-espace prope. Ces derniers étant supplémentaires, f est définie de manière unique.

2ème méthode :

Soient R et S deux racines, on note $V = \mathrm{Sp}(R) \cup \mathrm{Sp}(S)$, et on appelle $v_1, \cdots, v_p$ ses éléments, nommés injectivement. Comme elles sont positives, alors les $v_1^2, \cdots, v_p^2$ sont deux à deux distinctes. On note L le polynôme d'interpolation qui envoie les v_i^2 sur les v_i.
Si on note $R = Q^T \Delta Q$ avec Q inversible et Δ diagonale, les coefficients diagonaux de Δ sont dans V. Alors $L(A) = L(R^2) = Q^T L(\Delta^2) Q = Q^T L(\Delta) Q = R$. Et de même $L(A) = S$, donc $R = S$.

3ème méthode :

Si $B_1 = P_1^\top D_1 P_1$ et $B_2 = P_2^\top D_2 P_2$ sont deux racines carrées (convenablement diagonalisées), alors l'égalité $B_1^2 = B_2^2$ entraine $D_1^2 Q - Q D_2^2 = 0$ avec $Q = P_1 P_2^\top$. En termes de coefficients, cela donne

$$\begin{aligned} 0 &= \left[D_1^2 Q - Q D_2^2\right]_{i,j} = [D_1]_{i,i}^2 [Q]_{i,j} - [D_2]_{j,j}^2 [Q]_{i,j} \\ &= [Q]_{i,j} \left([D_1]_{i,i} - [D_2]_{j,j}\right) \left([D_1]_{i,i} + [D_2]_{j,j}\right) \end{aligned}$$

Or on a $[D_1]_{i,i} > 0$ et $[D_2]_{j,j} > 0$. Ce qui fournit $[Q]_{i,j} \left([D_1]_{i,i} - [D_2]_{j,j}\right) = 0$, c'est-à-dire $[D_1 Q - Q D_2]_{i,j} = 0$ ou encore $D_1 Q - Q D_2 = 0$ et enfin $B_1 - B_2 = 0$. Autrement dit, les endomorphismes matriciels $Q \mapsto D_1^2 Q - Q D_2^2$ et $Q \mapsto D_1 Q - Q D_2$ ont le même noyau dès lors que D_1 et D_2 sont deux matrices diagonales à valeurs propres strictement positives !

V. Décomposition polaire

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

1) $(A^\top A)^\top = A^\top A$ dont $A^\top A$ est symétrique.
Soit $X \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R})$ non nul. Alors $X^\top (A^\top A) X = (AX)^\top (AX) = \|AX\|^2$.
Mais $X \neq 0$ et A est inversible donc $\|AX\|^2 > 0$, donc $A^\top A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

2) On nous rappelle qu'il existe $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$telle que $A^\top A = S^2$.
Notons $\Omega = A S^{-1}$. On a alors $A = \Omega S$, et :

$$\Omega^\top \Omega = \left(A S^{-1}\right)^\top A S^{-1} = (S^{-1})^\top \left(A^\top A\right) S^{-1} = S^{-1} S^2 S^{-1} = \mathrm{I}_n$$

donc $\Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Ceci montre l'existence d'un couple (Ω, S) convenable.