Devoir surveillé n° 4 – v1

Durée : 4 heures, calculatrices et documents interdits

I. Exercice 1 : Un système de suites récurrentes (CCINP MPI 2024)

1) Justifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -6 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et déterminer une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

2) Application : On considère trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= -4u_n + 2v_n - 2w_n \\ v_{n+1} &= -6u_n + 4v_n - 6w_n \\ w_{n+1} &= -u_n + v_n - 3w_n \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $Y_n = P^{-1}X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer Y_n en fonction de α_0, β_0, γ_0 et n.

À quelle condition sur (u_0, v_0, w_0) les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent-elles simultanément ? Expliciter alors ces suites.

II. Exercice 2 : Une série de fonctions (CCINP MPI 2024)

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$ de la variable réelle et on note f sa somme.

1) Déterminer l'ensemble de définition D de f.

2) Démontrer que f est continue sur D.

3) Calculer la limite de f en $+\infty$.

4) Démontrer que, pour tout $x \in D$, $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

5) En déduire un équivalent de f au voisinage de 0.

III. Problème : Phénomène de Gibbs (CCINP PSI 2017)

Présentation générale

L'objet de ce problème est l'étude du phénomène de Gibbs. Dans la première partie, on démontre des lemmes de Riemann-Lebesgue. Dans la deuxième, on calcule l'intégrale de Dirichlet. Enfin, dans la troisième partie, on met en évidence le phéomène de Gibbs.

Notations

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des réels, $\mathbb{R}^+$ désigne l'intervalle $[0, +\infty[$ et $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.

Partie 1 : résultats préliminaires

Dans ce qui suit, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ désigne une fonction continue 2π-périodique telle que

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

1) Si $f : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = 0$$

2) Montrer que la primitive de φ s'annulant en 0 est 2π-périodique et bornée sur $\mathbb{R}$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, déduire de ce qui précède que pour toute fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\varphi(nt)\,\mathrm{d}t = 0$$

3) Soient α, β deux réels tels que $\alpha < \beta$ et $h : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Soient $\varepsilon > 0$ et $g \in \mathscr{C}^1([\alpha, \beta])$ telle que $\sup_{[\alpha,\beta]} |h - g| \leqslant \varepsilon$. Montrer qu'il existe une constante M ne dépendant que de φ telle que

$$\left|\int_\alpha^\beta h(t)\varphi(nt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant m|\beta - \alpha|\varepsilon + \left|\int_\alpha^\beta g(t)\varphi(nt)\,\mathrm{d}t\right|$$

En déduire que pour tout intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ continue par morceaux,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\varphi(nt)\,\mathrm{d}t = 0$$

On pourra admettre et utiliser le théorème de Weierstrass qui affirme que pour tout segment $[\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers f sur $[\alpha, \beta]$.

4) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux. Déduire de ce qui précède que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin^2(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Partie 2 : l'intégrale de Dirichlet

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que la fonction $F \ : \ x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ soit bornée.

5) Montrer que pour tout $a > 0$, les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ puis $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ sont convergentes et que

$$\int_a^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_a^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t - \frac{F(a)}{a}$$

6) Montrer que les intégrales généralisées $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ sont convergentes et que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Dans ce qui suit, on considère une fonction continue $f \ : \ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ soit absolument convergente.

7) Montrer que la fonction

$$\mathscr{L}(f) \ : \ x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

8) On suppose de plus que la fonction f est bornée. Montrer que $\mathscr{L}(f)$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et que $\mathscr{L}(f)(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

9) Soit $f \ : \ t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$.

a) Montrer que la fonction $\mathscr{L}(f)$ est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$y'' + y = \frac{1}{x} \qquad \textbf{(E)}$$

b) On cherche une solution particulière de **(E)** de la forme $x \mapsto \alpha(x)\cos(x) + \beta(x)\sin(x)$ où les fonctions α et β sont de classe C^2 et vérfient

$$\forall x \in]0, +\infty[, \ \alpha'(x)\cos(x) + \beta'(x)\sin(x) = 0$$

Montrer que l'on peut prendre $\alpha(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f_1(t)\,\mathrm{d}t$ et $\beta(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f_2(t)\,\mathrm{d}t$ où f_1, f_2 sont des fonctions que l'on déterminera.

c) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t$ est une solution de **(E)** sur $]0, +\infty[$.

d) Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x > 0, \ \mathscr{L}(f)(x) = a\cos(x) + b\sin(x) + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t$$

10) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et en déduire que pour tout $x > 0$ on a

$$\mathscr{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t$$

11) Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{x+t} - \frac{\sin(t)}{t}\right)\mathrm{d}t$ tend vers 0 quand x tend vers 0^+. En déduire que

$$\lim_{x\to 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

12) Déduire des questions précédentes que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

Partie 3 : phénomène de Gibbs

Soit $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique et impaire définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ x \in]0,\pi[\\ 0 & \text{si } \ x \in \{0,\pi\} \end{cases} \tag{E.1}$$

On désigne par $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ S_n(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$$

13) En calculant la dérivée de S_n, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,\pi],\ S_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\sin(2(n+1)t)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t$$

14) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

15) En déduire que $S_n(\pi/2)$ tend vers 1 quand $n \to +\infty$.

16) Calculer $S_n(\pi - x)$ en fonction de $S_n(x)$. En utilisant le résultat de la question **3)**, montrer que pour tout $x \in]0,\pi/2]$,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = 1$$

17) Déduire de ce qui précède que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f définie par **(E.1)** sur $\mathbb{R}$.

18) Montrer que la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ définie sur $[0,\pi]$ par

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2n}\dfrac{\sin(x)}{\sin(\frac{x}{2n})} & \text{si } \ x \in]0,\pi] \\ 1 & \text{si } \ x = 0 \end{cases}$$

converge simplement sur $[0,\pi]$ vers la fonction φ définie sur $[0,\pi]$ par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } \ x \in]0,\pi] \\ 1 & \text{si } \ x = 0 \end{cases}$$

19) Montrer que φ est continue sur $[0,\pi/2]$ et en déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

puis que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(f\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) - S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)\right) = \frac{2}{\pi}\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

On admettra dans la suite que

$$\forall x \in]0,\pi], \ \frac{\sin(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

20) Montrer que

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$$

puis que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) - f\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!} - 1$$

21) Comparer

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{3}(-1)^n\frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!}$$

et montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) - f\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)\right) > 0.17$$

En déduire que la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur $]0,\pi/2[$.

— **FIN** —