Semaine 9 du 24 novembre 2025 (S48)

VIII Réduction des endomorphismes et des matrices

Le chapitre VIII reste au programme :

1 Diagonalisation en dimension finie

1.1 Endomorphismes diagonalisables

1.2 Matrices diagonalisables

1.3 Pratique de la diagonalisation

2 Diagonalisabilité et polynômes annulateurs

3 Applications de la diagonalisation

3.1 Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable

3.2 Suites récurrentes linéaires simultanées

3.3 Suites récurrentes linéaires à coefficients constants

3.4 Systèmes différentiels linéaires

4 Trigonalisation en dimension finie

4.1 Endomorphismes trigonalisables

4.2 Matrices trigonalisables

4.3 Trigonalisation et polynômes

5 Exercices à connaître

5.1 Deux diagonalisations – bête et méchante et plus théorique

1) Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Diagonaliser la matrice J dont tous les coefficients sont égaux à 1 . Puis diagonaliser la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $a_{i,j} = \alpha$ si $i = j, a_{i,j} = \beta$ sinon.

5.2 Deux applications de la trigonalisation

1) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente.

- **a)** Montrer que A est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte.
- **b)** Le résultat est-il encore vrai pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

2) Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie n et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $\mathrm{Sp}\,(P(u)) = P(\mathrm{Sp}\,(u))$.

5.3 Diagonalisation simultanée

Dans un espace vectoriel E de dimension finie, on considère deux endomorphismes u et v diagonalisables tels que $u \circ v = v \circ u$.

1) Montrer que les sous-espaces propres de v sont stables par u.

2) Montrer que l'endomorphisme induit de u à un sous-espace propre de v est diagonalisable.

3) Montrer qu'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u et v.

5.4 Racine carrée d'une matrice

1) Soit M une matrice diagonale d'ordre n dont les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts. Montrer que les matrices commutant avec M sont exactement les matrices diagonales.

2) Déterminer les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3) Combien y a-t-il de matrice M telle que $M^2 = A$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$? dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

S'y ajoute :

IX Séries de fonctions

1 Différents types de convergence

1.1 Convergence simple

1.2 Convergence uniforme

1.3 Convergence normale

1.4 Liens entre les différentes convergences

2 Régularité et limites de la somme d'une série de fonctions

2.1 Continuité

2.2 Interversion de limites

2.3 Dérivation des séries de fonctions

3 Séries de fonctions et intégration

3.1 Intégration terme à terme sur un segment

3.2 Intégration terme à terme sur un intervalle quelconque

3.3 Utilisation du théorème de convergence dominée

4 Exercices à connaître

4.1 Convergence uniforme de $\sum f_n$ et limite de $\|f_n\|_\infty$ (banque CCP MP)

Soit $A \subset \mathbb{C}$ et (f_n) une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$.

1) Démontrer l'implication :

$$\Big(\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } A\Big)$$
$$\Downarrow$$
$$\Big(\text{la suite de fonctions } (f_n) \text{ converge uniformément vers 0 sur } A\Big)$$

2) On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in [0; +\infty[$, $f_n(x) = nx^2 \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.
Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0; +\infty[$.
$\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0; +\infty[$? Justifier.

4.2 La fonction ζ de Riemann

On définit, là où cela est possible, la fonction $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

1) Donner l'ensemble de définition de ζ.

2) Montrer qu'elle ne converge pas uniformément sur $]1, +\infty[$.

3) Montrer que $\zeta \in \mathscr{C}^\infty(]1, +\infty[, \mathbb{R})$.

4) Étudier la monotonie et la convexité de ζ.

5) Montrer qu'elle a une limite en $+\infty$ et la calculer.

6) Donner un équivalent de ζ en 1^+.

4.3 Tableau de variation d'une série de fonctions

Pour $x > 0$ on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

1) Justifier que S est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Préciser le sens de variation de S.

3) Établir $S(x+1) + S(x) = 1/x$.

4) Donner un équivalent de S en 0.

5) Donner un équivalent de S en $+\infty$.

4.4 Interversion somme/intégrale

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

4.5 Utilisation du théorème de convergence dominée

Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$, en justifiant soigneusement que les théorèmes d'intégration terme à terme sur un segment ou un intervalle quelconque ne peuvent être utilisés.