Semaine 10 du 1er décembre 2025 (S49)

IX Séries de fonctions

Le chapitre IX reste au programme :

1 Différents types de convergence

1.1 Convergence simple

1.2 Convergence uniforme

1.3 Convergence normale

1.4 Liens entre les différentes convergences

2 Régularité et limites de la somme d'une série de fonctions

2.1 Continuité

2.2 Interversion de limites

2.3 Dérivation des séries de fonctions

3 Séries de fonctions et intégration

3.1 Intégration terme à terme sur un segment

3.2 Intégration terme à terme sur un intervalle quelconque

3.3 Utilisation du théorème de convergence dominée

4 Exercices à connaître

4.1 Convergence uniforme de $\sum f_n$ et limite de $\|f_n\|_\infty$ (banque CCP MP)

Soit $A \subset \mathbb{C}$ et (f_n) une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$.

1) Démontrer l'implication :

$$\Big(\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } A\Big)$$
$$\Downarrow$$
$$\big(\text{la suite de fonctions } (f_n) \text{ converge uniformément vers 0 sur } A\big)$$

2) On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [0;+\infty[,\ f_n(x) = nx^2 \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.
Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0;+\infty[$.
$\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0;+\infty[$? Justifier.

4.2 La fonction ζ de Riemann

On définit, là où cela est possible, la fonction $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$.

1) Donner l'ensemble de définition de ζ.

2) Montrer qu'elle ne converge pas uniformément sur $]1,+\infty[$.

3) Montrer que $\zeta \in \mathscr{C}^\infty(]1,+\infty[,\mathbb{R})$.

4) Étudier la monotonie et la convexité de ζ.

5) Montrer qu'elle a une limite en $+\infty$ et la calculer.

6) Donner un équivalent de ζ en 1^+.

4.3 Tableau de variation d'une série de fonctions

Pour $x > 0$ on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

1) Justifier que S est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Préciser le sens de variation de S.

3) Établir $S(x+1) + S(x) = 1/x$.

4) Donner un équivalent de S en 0.

5) Donner un équivalent de S en $+\infty$.

4.4 Interversion somme/intégrale

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{e}^t - 1}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

4.5 Utilisation du théorème de convergence dominée

Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$, en justifiant soigneusement que les théorèmes d'intégration terme à terme sur un segment ou un intervalle quelconque ne peuvent être utilisés.

S'y ajoute :

IX Espaces probabilisés

1 Probabilité sur un univers fini ou dénombrable

1.1 Définition de probabilité

1.2 Quelques propriétés

1.3 Univers fini

1.4 Univers dénombrable

2 Espaces probabilisables

2.1 Tribus

2.2 Évènements et vocabulaire

2.3 Probabilité sur un espace probabilisable

2.4 Continuité monotone

2.5 Évènements presque sûrs et négligeables

3 Probabilités conditionnelles

3.1 Définition

3.2 Probabilités composées

3.3 Probabilités totales

3.4 Formule de Bayes

4 Évènements indépendants

5 Exercices à connaître

5.1 Loi de Zipf

Soit $a > 1$. On rappelle la définition de la fonction ζ de Riemann : $\zeta(a) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^a}$. On définit la loi de Zipf de paramètre a par

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ P(\{k\}) = \frac{1}{\zeta(a)k^a}.$$

1) Montrer que $(\mathbb{N}^*, \mathscr{P}(\mathbb{N}^*), P)$ est un espace probabilisé.

2) Pour $m \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(m\mathbb{N}^*)$.

3) Pour $i, j \in \mathbb{N}^*$, déterminer une CNS sur i, j pour que $i\mathbb{N}^*$ et $j\mathbb{N}^*$ soient indépendants.

4) *Application*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note p_n le n^{e} nombre premier, et C_n l'ensemble des entiers qui ne sont divisibles par aucun des p_i, pour $i \in [\![1, n]\!]$.

a) Calculer $P(C_n)$.

b) Déterminer $\bigcap_{n \geqslant 1} C_n$.

c) En déduire que

$$\zeta(a) = \prod_{i=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_i^a}\right)^{-1}.$$

5.2 Théorème de Borel-Cantelli

Cet exercice est long, on peut n'en donner qu'une partie

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit (A_n) une suite d'événements. On définit la limite supérieure de ces événements comme étant $B = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$.

1) Montrer que B est un événement.

2) Si $\omega \in \Omega$, donner une interprétation de $\omega \in B$ en fonction des $\omega \in A_i$.

3) Montrer le lemme de Borel-Cantelli (version faible) : si $\sum_{n \geqslant 0} P(A_n)$ converge, alors $P(B) = 0$.

4) On souhaite montrer que si $\sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n) = +\infty$, et si les A_n sont mutuellement indépendants, alors $P(B) = 1$.

a) Montrer que s'il existe une infinité de A_n tels que $P(A_n) = 1$, alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, $P\left(\bigcup_{n=p}^{+\infty} A_n\right) = 1$, et conclure.

On suppose alors qu'à partir d'un certain rang, $P(A_n) < 1$. Soit $p \in \mathbb{N}$ supérieur à ce rang.

b) Montrer que $P(\overline{B}) = \lim_{p \to +\infty} P\left(\bigcap_{n=p}^{+\infty} \overline{A_n}\right)$.

c) Montrer que si $q \geqslant p$, alors $P\left(\bigcap_{n=p}^{+\infty} \overline{A_n}\right) \leqslant \prod_{n=p}^{q} (1 - P(A_n))$.

d) Montrer que $\ln\left(\prod_{n=p}^{q} (1 - P(A_n))\right) \leqslant -\sum_{n=p}^{q} P(A_n)$.

e) Conclure.

5.3 Une suite arithmético-géométrique

On considère deux urnes U et V. L'urne U contient deux boules blanches et quatre boules noires. L'urne V contient trois boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs avec remise selon la procédure suivante. Pour le premier tirage, on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie. On note sa couleur et on la remet dans l'urne.

— Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant s'effectue dans l'urne U.

— Sinon, le tirage suivant s'effectue dans l'urne V.

On itère le procédé pour les tirages suivants. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'evénement «la boule tirée au n^{e} tirage est blanche» et $p_n = P\left(B_n\right)$.

1) Calculer p_1.

2) Déterminer p_{n+1} en fonction de p_n.

3) Déterminer la limite de la suite (p_n).

5.4 Une chaîne de Markov

Une particule se déplace sur une surface comportant quatre positions successives, A_0 qui est un puits, A_1 et A_2 deux positions intermédiaires, A_3 un second puits.
A l'instant $t = n$,

— si la particule est dans un puits, elle y reste

— si elle est en A_1, elle va en A_0 avec la probabilité p et en A_2 avec la probabilité $1 - p$

— si elle est en A_2, elle va en A_1 avec la probabilité p et en A_3 avec la probabilité $1 - p$.

On note x_n la position de la particule à l'instant $t = n$, $x_n(\Omega) = [\![0, 3]\!]$.
On pose

$$X_n = \begin{pmatrix} P\left(x_n = 0\right) \\ P\left(x_n = 1\right) \\ P\left(x_n = 2\right) \\ P\left(x_n = 3\right) \end{pmatrix}$$

1) Déterminer une matrice M indépendante de n telle que pour tout n, $X_{n+1} = MX_n$.

2) Montrer que M est diagonalisable si et seulement si $0 < p < 1$.

3) On suppose $p = 1/2$. Donner $\lim\limits_{n\to\infty} X_n$.

4) Si $X_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, calculer $\lim\limits_{n\to\infty} X_n$.

5.5 Apparition d'un double Pile

On considère une pièce dont la probabilité d'apparition du côté face (F) est 1/3 et celle du côté pile (P) est 2/3. On effectue des lancers de façon indépendante jusqu'à ce que le motif PP apparaisse. On note T le (premier) rang d'apparition de ce motif. (Par exemple, si on a la suite de lancers FPFFPP alors $T=6$.)

1) Pour k dans $\mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $(T=k)$ en fonction des événements $(T>k)$. Montrer que la suite de terme général $p_k = P(T>k)$ vérifie la relation de récurrence

$$\forall k \geqslant 2, p_k = \frac{2}{9}p_{k-2} + \frac{1}{3}p_{k-1}$$

2) Exprimer p_k en fonction de k.

3) Calculer la probabilité que le motif PP n'apparaisse jamais.