Feuille d'exercice n° 02 : **Séries numériques – Corrigé**

II. Séries à termes réels positifs

Exercice 5 Par récurrence : $u_n > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$, donc (u_n) a une limite. Mais $x = x + 2/x$ n'a pas de solution, donc $u_n \to +\infty$.
On calcule : $v_{n+1} - v_n = 1 + 1/(2u_n^2) \to 1$.
Donc $v_n \sim n$ et $u_n \sim 2\sqrt{n}$.

Exercice 8

1) • Si $a = 0$: $\dfrac{\operatorname{ch}(n)}{\operatorname{ch}(na)} = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\,n} + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\,-n} \sim \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\,n}$: divergence grossière.

• Si $a > 0$: $\dfrac{\operatorname{ch}(n)}{\operatorname{ch}(na)} \sim \dfrac{\mathrm{e}^{\,n}}{\mathrm{e}^{\,na}} \sim \mathrm{e}^{\,n(1-a)}$
Si $a \leqslant 1$, divergence grossière
Si $a > 1$, convergence.

• Si $a < 0$: $\dfrac{\operatorname{ch}(n)}{\operatorname{ch}(na)} \sim \dfrac{\mathrm{e}^{\,n}}{\mathrm{e}^{\,-na}} \sim \mathrm{e}^{\,n(1+a)}$
Si $a \geqslant -1$, divergence grossière
S : $a < 1$, convergence.

2) d'Alembert :

$$\frac{((n+1)!)^k}{(k(n+1))!} \times \frac{(kn)!}{n!} = \frac{(n+1)^k}{(kn+k) \times \ldots \times (k+1)}$$
$$= \frac{n+1}{kn+k} \times \frac{n+1}{kn+k-1} \times \cdots \times \frac{n+1}{kn+1}$$
$$\leqslant \left(\frac{n+1}{kn+1}\right)^k \to \frac{1}{k^k}$$

Si $k \geqslant 2$, il y a convergence grâce au critère de d'Alembert.
Si $k = 1$, $\dfrac{(n!)^k}{(kn)!} = 1$, divergence grossière.

3) **a)** $\ln(u_n) = n \ln n \ln\left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right) \sim n \ln n \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

b)

$$\begin{aligned}
\ln\left(n^2 u_n\right) &= \ln\left(n^2\right) + \ln(u_n) \\
&= 2\ln n + n \ln n \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \theta\left(n \ln n \ln \frac{1}{2}\right) \\
&\sim n \ln n \ln\left(\frac{1}{2}\right) \text{ car } 2\ln n = o\left(n \ln n \ln \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

donc $\ln\left(n^2 u_n\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ donc $n^2 u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $u_n = \sigma\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum u_n$ conv.

Exercice 9 On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} (n+1)\ln\left(1 + \frac{x}{n+2}\right) \sim x$, et il résulte de la règle de d'Alembert que la série de terme général u_n converge si $0 < x < 1$ et diverge si $x > 1$. Il reste à étudier le cas $x = 1$. On écrit

$$u_n = \frac{1}{n+1}\prod_{k=1}^{n}\left((k+1)\ln\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)\right) = \frac{1}{n+1}\prod_{k=2}^{n+1}\left(k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right).$$

Alors $\displaystyle\ln u_n = -\ln(n+1) + \sum_{k=2}^{n+1} \ln\left(k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right)$. Mais $\ln\left(k \ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right)\right) = \ln\left(1 - \dfrac{1}{2k} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{k^2}\right)\right) = -\dfrac{1}{2k} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$. La série de terme général $1/n^2$ converge. Il en résulte que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right) = \mathcal{O}(1)$, alors, en sommant, on obtient $\displaystyle\ln u_n = -\ln(n+1) - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} + \mathcal{O}(1)$. Mais, puisque la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} - \ln(n+1)\right)$ converge (comparaison série-intégrale), on en déduit que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} = \ln(n+1) + \mathcal{O}(1)$ et donc $\ln u_n = -\dfrac{3}{2}\ln(n+1) + \mathcal{O}(1)$. Finalement $u_n = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathcal{O}(1)}}{(n+1)^{3/2}} = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$.

La série de terme général u_n converge donc par comparaison à une série de Riemann.

Exercice 16 Par comparaison série intégrale : Si $\alpha > 0, u_n \sim \frac{\alpha+1}{n^{\alpha+1}}$ est terme général d'une série absolument convergente. Si $-1 < \alpha < 0, u_n \sim \frac{\alpha+1}{n^{\alpha+1}}$ n'est pas le terme général d'une série convergente. Si $\alpha = -1, u_n \sim \frac{1}{\ln n}$ n'est pas le terme général d'une série convergente. Si $\alpha < -1, u_n \nrightarrow 0$ et donc $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

Exercice 20

1) On a $\dfrac{n-2}{2^n-1} \sim \dfrac{n}{2^n}$ et, pour tout entier naturel n non nul, $\dfrac{n}{2^n} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{n}{2^{n-1}}$. On reconnaît la dérivée première de la série géométrique de raison $\frac{1}{2}$: $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{2^{n-1}}$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n-2}{2^n-1}$ converge.

2) Cette série n'est pas à termes positifs : on étudie sa convergence absolue. Pour tout entier naturel n non nul, $\left|\dfrac{(-1)^n}{n^2+1}\right| = \dfrac{1}{n^2+1} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$. Or, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge (c'est la série de Riemann de paramètre 2). Ainsi, par comparaison de séries à termes positifs, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ converge absolument, donc converge.

3) On a, pour tout entier naturel n non nul, $\sqrt[n]{2} - 1 = 2^{\frac{1}{n}} - 1 = \mathrm{e}^{\frac{\ln(2)}{n}} - 1$. Ainsi, $\sqrt[n]{2} - 1 \sim \dfrac{\ln(2)}{n}$. De plus, $2n+3 \sim 2n$ et donc $\dfrac{\sqrt[n]{2}-1}{2n+3} \sim \dfrac{\ln(2)}{2} \times \dfrac{1}{n^2}$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge (c'est la série de Riemann de paramètre 2). Ainsi, par comparaison de séries à termes positifs, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sqrt[n]{2}-1}{2n+3}$ converge.

4) $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ converge vers 1 donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{n+1}$ diverge grossièrement.

5) Cette série n'est pas à termes positifs : on étudie sa convergence absolue. Pour tout entier naturel n supérieur à 2, $\left|\dfrac{\cos(n!)}{n^3+\cos(n!)}\right| = \dfrac{|\cos n!|}{n^3+\cos n!} \leqslant \dfrac{1}{n^3-1}$. Or, $\dfrac{1}{n^3-1} \sim \dfrac{1}{n^3}$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^3}$ converge (c'est la série de Riemann de paramètre 3). Ainsi, par comparaison de séries à termes positifs, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^3-1}$ converge et donc, toujours par comparaison de séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\cos(n!)}{n^3+\cos(n!)}$ converge absolument, donc converge.

6) Si $\alpha \geqslant 0$, $(\ln(1+n^\alpha))$ converge vers $\ln(2)$ ou diverge vers $+\infty$, donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln(1+n^\alpha)$ diverge grossièrement. Si $\alpha < 0$, $(\ln(1+n^\alpha))$ converge vers 0 et donc $\ln(1+n^\alpha) \sim n^\alpha$. Or, d'après les résultats sur les séries de Riemann, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n^\alpha$ converge si $\alpha < -1$ et diverge si $-1 \leqslant \alpha < 0$. Ainsi, par comparaison de séries à termes positifs, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln(1+n^\alpha)$ converge si $\alpha < -1$ et diverge si $-1 \leqslant \alpha < 0$.