RapidFire & Robot Trooper

Rapid Fire

1 Contexte et problématique

1.1 Étude de la cinématique du RAPIDFire Naval

Question 1 *Déterminer le degré d'hyperstatisme du modèle proposé et, si nécessaire, indiquer les modifications à apporter pour le rendre isostatique sans modifier le nombre de liaisons.*

Correction
- Il y a 4 mobilités :
  - rotation de l'ensemble autour de $\overrightarrow{z_1}$,
  - rotation de l'ensemble autour de $\overrightarrow{y_2}$,
  - rotation de l'ensemble autour de $\overrightarrow{z_2}$,
  - rotation de l'ensemble autour de $\overrightarrow{y_4}$.
- 4 solides isolables donc 24 équations ;
- 3 pivots et 2 rotules donc 21 inconnues ;
- $h = m - E_S + I_S = 4 - 24 + 21 = 1$.

Il suffit de remplacer une rotule par une linéaire annulaire.

Question 2 *Donner (sans démontrer) la liaison équivalente entre les pièces 2 et 3.*

Correction Liaison pivot d'axe $\left(F, \overrightarrow{y_2}\right)$.

2 Étude de la motorisation du canon

2.1 Caractéristiques géométriques et inertielles du canon

Question 3 *Connaissant toutes les grandeurs géométriques, déterminer de manière littérale la position du centre de gravité G_{canon} dans le repère $\left(A;\overrightarrow{X_3},\overrightarrow{Y_3},\overrightarrow{Z_3}\right)$ en fonction de d, e et L_0. (Il est possible de définir et calculer des grandeurs intermédiaires dont les valeurs seront considérées comme connues pour la suite du calcul).*

Correction On appelle $r = \dfrac{d}{2}$ et $\ell = \dfrac{L_0}{3}$, $m_3 = \pi\rho\ell\left((r+3e)^2 - r^2\right)$, $m_2 = \pi\rho\ell\left((r+2e)^2 - r^2\right)$ et $m_1 = \pi\rho\ell\left((r+e)^2 - r^2\right)$ les masses des 3 tronçons.

Pour des raisons de symétrie, on ne cherchera que la projection de $\overrightarrow{AG_c}$ suivant $\overrightarrow{x_3}$.

On a alors $\overrightarrow{AG_c}\cdot\overrightarrow{x_3} = \dfrac{m_1\dfrac{L}{6} + m_2\dfrac{3L}{6} + \dfrac{5L}{6}m_3}{m_1+m_2+m_3}$.

La matrice d'inertie du canon au point A dans sa base peut s'écrire : $I_A(\text{canon})_{\mathscr{B}_3} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.

Question 4 *Donner et justifier la forme simplifiée de la matrice $I_A(canon)_{\mathscr{B}_3}$.*

Correction La pièce étant axisymétrique d'axe $\overrightarrow{x_3}$, on a $I_A(\text{canon})_{\mathscr{B}_3} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}$.

Question 5 *Les valeurs des composantes non-nulles de la matrice d'inertie $I_A(canon)_{\mathscr{B}_3}$ étant connues, calculer le moment d'inertie en rotation du canon $J_{A,\overrightarrow{z_1}}(canon)$ par rapport à l'axe $\left(A, \overrightarrow{z_1}\right)$ de rotation de la tourelle en fonction de l'angle β. Déterminer pour quelles valeurs de l'angle β cette inertie $J_{A,\overrightarrow{z_1}}(canon)$ est minimale (J_{min}) et maximale (J_{max}). Donner l'expression de J_{min} et J_{max}.*

Correction On a $\overrightarrow{z_3} = \cos\beta\,\overrightarrow{z_2} + \sin\beta\,\overrightarrow{x_2}$.

$$J_{A,\overrightarrow{z_1}}(\text{canon}) = \overrightarrow{z_3}^{\intercal} I_A(\text{canon})_{\mathscr{B}_3}\,\overrightarrow{z_3} = \begin{pmatrix} \sin\beta \\ 0 \\ \cos\beta \end{pmatrix}^{\intercal} \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3} \begin{pmatrix} \sin\beta \\ 0 \\ \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\beta \\ 0 \\ \cos\beta \end{pmatrix}^{\intercal} \begin{pmatrix} A\sin\beta \\ 0 \\ B\cos\beta \end{pmatrix}$$

$= A\sin^2\beta + B\cos^2\beta$

Quand $\beta = 0$, $J = B$ et $\beta = \pi/2$, $J = A$. On peut estimer que $A < B$; donc $J_{\max} = B$ et $J_{\min} = A$

2.2 Couple statique appliqué au canon pour le maintenir immobile

Question 6 *Dans cette situation, déterminer le couple moteur C_{moteur} en fonction de k_t, m_{canon}, β, β_0, g et a.*

Correction
- On isole le canon.
- BAME :
  - Couple moteur
  - Couple du ressort
  - Pesanteur
- On applique le théorème du moment statique en A en projection sur $\overrightarrow{y_2}$.

$C_{\text{moteur}} - k_t(\beta - \beta_0) + \left(\overrightarrow{AG} \wedge -m_{\text{canon}} g\,\overrightarrow{z_1}\right) \cdot \overrightarrow{y_2} = 0 \Rightarrow C_{\text{moteur}} - k_t(\beta - \beta_0) + \left(a\,\overrightarrow{x_3} \wedge -m_{\text{canon}} g\,\overrightarrow{z_2}\right) \cdot \overrightarrow{y_2} = 0$

$\Rightarrow C_{\text{moteur}} = k_t(\beta - \beta_0) + a\,m_{\text{canon}} g \cos\beta$

Question 7 *Donner l'intérêt et l'inconvénient de placer un ressort compensateur de pesanteur sur le canon ainsi que par rapport à l'ajout d'un contrepoids pour compenser l'effet de la pesanteur lorsque le canon tourne autour de l'axe $\left(A, \overrightarrow{Y_2}\right)$.*

Correction Le ressort n'augmente pas (peu) l'inertie de l'ensemble mais cette solution ne compense le couple que pour 2 valeurs de β.

Un contrepoids permet un équilibre quelque soit l'angle β mais cette solution augmentation du moment d'inertie.

Question 8 *Du point de vue de la motorisation de la rotation du canon autour de l'axe $\left(A, \overrightarrow{Y_2}\right)$, en modélisant (faire un schéma) le contrepoids par une masse ponctuelle, montrer s'il est plus pertinent d'utiliser la solution 1 ou la solution 2.*

Correction La solution 1 (un contrepoids de masse importante proche de l'axe de rotation) est à privilégier car elle limite l'augmentation de l'inertie de l'ensemble. L'inertie d'une masse ponctuelle sur un axe situé à une distance d est égale à $J = md^2$ L'inertie augmente avec le carré de la distance.

2.3 Motorisation du canon avec contrepoids

Question 9 *Tracer l'allure des courbe de vitesse et d'accélération en précisant $\dot{\beta}_{max}$ et $\ddot{\beta}_{max}$.*

Correction On a :
- Le temps à vitesse constante est au maximim de 0,1 s. L'aire du trapèze donne la distance angulaire à parcourir : $20 = 0,2\dot{\beta}_{\max}$. On a donc $\dot{\beta}_{\max} = 20/0,2 = 100\,°\,\mathrm{s}^{-1}$.
- L'accélération est donc de $\ddot{\beta} = 1000\,°\,\mathrm{s}^{-2}$.

Question 10 *En appliquant un TMD en A sur $\overrightarrow{Y_2}$ au canon, déterminer l'équation différentielle du mouvement.*

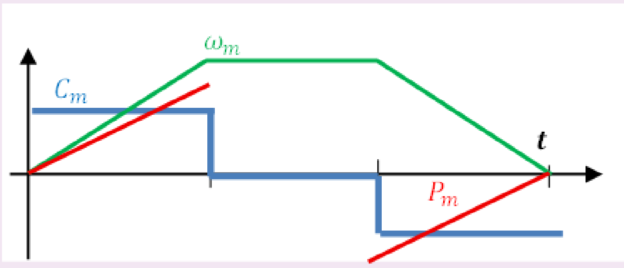
Correction On donne la matrice d'inertie du canon et il est précisé que le centre d'inertie est sur l'axe de rotation.
- BAME : pesanteur, liaison pivot, moteur
- TMD en A sur $\overrightarrow{Y_2}$ $B\ddot{\beta} = C_m$.

Question 11 *En déduire le couple C_m du moteur puis la puissance P_m minimales du motoréducteur. Faire les applications numériques.*

Correction On a alors $C_m = 40 \times 1000 \times 2 \times \pi/360 = 698\,\mathrm{Nm}$. $P_m = C_m\dot{\beta} = 698 \times 100 \times 2 \times \pi/360 = 1217\,\mathrm{W}$.

Question 12 *Tracer sur un même graphique les allures (sans application numérique) : en bleu la courbe de couple C_m, en vert la courbe de vitesse ω_m et en rouge la courbe de puissance P_m du moteur au cours du temps.*

Correction



3 Etude des perfomances du rapidfire

3.1 Étude des mouvements de la tourelle et du canon

3.1.1 Démarche d'étude des mouvements de la tourelle et du canon

Question 13 *Donner la démarche de calcul permettant d'obtenir les équations différentielles du mouvement de la tourelle et du canon en considérant que le BRF est associé à un référentiel galiléen.*

Correction On isole 3 et on ralise un TMD en A en projection sur $\overrightarrow{y_2}$.
On isole 2+3 et on ralise un TMD en A en projection sur $\overrightarrow{z_1}$.

Question 14 *Donner la démarche de calcul permettant d'obtenir les équations différentielles du mouvement de la tourelle et du canon en considérant cette fois que le BRF est associé à un référentiel non galiléen.*

Correction On isole 3 et on ralise un TMD en A en projection sur $\overrightarrow{y_2}$.
On isole 2+3 et on ralise un TMD en A en projection sur $\overrightarrow{z_1}$.
On isole la bateau +2 +3 et on réalise :
- 3 TMD dans les 3 directions de l'espace (roulis, lacet, tangage) ;
- TRD suivant l'axe vertical.

3.1.2 Démarche d'étude des mouvements de la tourelle et du canon

Question 15 *Isoler 3 et déterminer l'équation différentielle permettant d'exprimer le couple moteur C_{m_3}.*

Correction
- On isole 3.
- BAME :
  - action de la pivot ;
  - action de la pesanteur
  - action du moteur.
- TMD en A suivant $\overrightarrow{y_3}$.

$$\overrightarrow{\delta(A,3/0)} \cdot \overrightarrow{y_3} = C_{\text{m3}}$$

A est un point fixe. $\overrightarrow{\Omega(3/0)} = \dot{\beta}\overrightarrow{y_3} + \dot{\alpha}\overrightarrow{z_2} = \dot{\beta}\overrightarrow{y_3} + \dot{\alpha}\cos\beta\overrightarrow{z_3} - \dot{\alpha}\sin\beta\overrightarrow{x_3}$.
$\overrightarrow{\sigma(A,3/0)} = B_3\dot{\beta}\overrightarrow{y_3} + C_3\dot{\alpha}\cos\beta\overrightarrow{z_3} - A_3\dot{\alpha}\sin\beta\overrightarrow{x_3}$ et $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{y_3}\right]_{\mathscr{R}_0} = \overrightarrow{\Omega(3/0)} \wedge \overrightarrow{y_3} = \left(\dot{\beta}\overrightarrow{y_3} + \dot{\alpha}\overrightarrow{z_2}\right) \wedge \overrightarrow{y_3} = \dot{\alpha}\overrightarrow{z_2} \wedge \overrightarrow{y_2} = -\dot{\alpha}\overrightarrow{x_2}$.
$\overrightarrow{\delta(A,3/0)} \cdot \overrightarrow{y_3} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{\sigma(A,3/0)}\right]_{\mathscr{R}_0} \cdot \overrightarrow{y_3} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{\sigma(A,3/0)} \cdot \overrightarrow{y_3}\right]_{\mathscr{R}_0} - \overrightarrow{\sigma(A,3/0)} \cdot \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{y_3}\right]_{\mathscr{R}_0}$
$= B_3\ddot{\beta} + \dot{\alpha}\left(B_3\dot{\beta}\overrightarrow{y_3} \cdot \overrightarrow{x_2} + C_3\dot{\alpha}\cos\beta\overrightarrow{z_3} \cdot \overrightarrow{x_2} - A_3\dot{\alpha}\sin\beta\overrightarrow{x_3} \cdot \overrightarrow{x_2}\right)$
$= B_3\ddot{\beta} + \dot{\alpha}\left(C_3\dot{\alpha}\cos\beta\sin\beta - A_3\dot{\alpha}\sin\beta\cos\beta\right)$
$= B_3\ddot{\beta} + \dot{\alpha}^2\left(C_3 - A_3\right)\cos\beta\sin\beta$
Au final :

$$B_3\ddot{\beta} + \dot{\alpha}^2\left(C_3 - A_3\right)\cos\beta\sin\beta = C_{\text{m3}}$$

Question 16 *Isoler 2+3 et déterminer l'équation différentielle permettant d'exprimer le couple moteur C_{m_3}.*

Correction
- On isole 2+3
- BAME :
  - action de la pivot ;
  - action du moteur ;
  - action de pesanteur
- TMD en A en projection sur $\overrightarrow{z_1}$

$$\overrightarrow{\delta(A,3/0)} \cdot \overrightarrow{z_2} + \overrightarrow{\delta(A,2/0)} \cdot \overrightarrow{z_2} = C_{\text{m2}}$$

$\overrightarrow{z_2}$ est un vecteur constant et A est un point constant.
$\overrightarrow{\delta(A,3/0)} \cdot \overrightarrow{z_2} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{\sigma(A,3/0)} \cdot \overrightarrow{z_2}\right]_{\mathscr{R}_0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(B_3\dot{\beta}\overrightarrow{y_3} + C_3\dot{\alpha}\cos\beta\overrightarrow{z_3} - A_3\dot{\alpha}\sin\beta\overrightarrow{x_3}\right) \cdot \overrightarrow{z_2}\right]$
$= \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[C_3\dot{\alpha}\cos^2\beta + A_3\dot{\alpha}\sin^2\beta\right]$
$= C_3\ddot{\alpha}\cos^2\beta - 2C_3\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta\cos\beta + A_3\ddot{\alpha}\sin^2\beta + 2A_3\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\beta\sin\beta$
$= \ddot{\alpha}\left(C_3\cos^2\beta + A_3\sin^2\beta\right) - 2\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta\cos\beta\left(C_3 - A_3\right)$
$\overrightarrow{\delta(A,2/0)} \cdot \overrightarrow{z_2} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{\sigma(A,2/0)} \cdot \overrightarrow{z_2}\right]_{\mathscr{R}_0} = C_2\ddot{\alpha}$
Au final :

$$C_2\ddot{\alpha} + \ddot{\alpha}\left(C_3\cos^2\beta + A_3\sin^2\beta\right) - 2\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta\cos\beta\left(C_3 - A_3\right) = C_{\text{m2}}$$

On se place dans la situation où le canon est orienté correctement selon la vertical (β ne doit pas bouger) et où la tourelle tourne à vitesse constante ($\dot{\alpha} = \text{cte}$).

Question 17 *Dans ces conditions, déterminer le couple moteur C_{m_3}.*

Correction

$$\dot{\alpha}^2\left(C_3 - A_3\right)\cos\beta\sin\beta = C_{\text{m3}}$$

4 Basculement du robot Trooper

Question 18 *En précisant le système isolé et en choisissant une seule équation issue du principe fondamental de la statique, déterminer l'expression de l'effort normal sur la roue arrière N_C en fonction de g, a, b, c, M et m.*

Correction
- On isole l'ensemble robot et pot.

- BAME :
  - pesanteur;
  - action avec le sol.
- théorème du moment statique en D projection sur $\overrightarrow{x}$.

$-bN_c+(b-a)\dfrac{Mg}{2}-cm\dfrac{g}{2}=0$ et $N_c=\dfrac{(b-a)Mg-cmg}{2b}$.

Question 19 *Déterminer la masse maximale d'un pot qui entraîne le basculement du robot. Conclure vis-à-vis du diagramme des exigences.*

Correction Le basculement intervient lorsque $N_c=0$. On obtient alors $m=\dfrac{b-a}{c}M$.

AN : $m=22{,}5\,\text{kg}$. L'exigence 1.5.3 est donc validée.

Question 20 *Indiquer quel théorème a été utilisé pour obtenir chaque équation (nom du théorème, point, projection).*

Correction Les équations (1) et (2) correspondent à l'application du théorème de la résultante dynamique au robot en mouvement par rapport au référentiel galiléen $\mathcal{R}_0$, au point D, projeté sur $\overrightarrow{y}$ et $\overrightarrow{z}$.

L'équation (3) correspond à l'application du théorème du moment dynamique au robot en mouvement par rapport au référentiel galiléen $\mathcal{R}_0$, projeté sur $\overrightarrow{x}$, au point D.

Question 21 *Sachant que seule la roue avant est motrice (contact en D), en déduire l'expression littérale de T_D.*

Correction En isolant la roue avant et en appliquant le théorème du moment dynamique en son centre, il vient immédiatement $C_m r-rT_D=0$(moment d'inertie de la roue négligée) D'où $T_D=\dfrac{C_m r}{r}$.

On retient une accélération égale à : $\gamma=1{,}1\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$.

Question 22 *Justifier succinctement que $T_C=0$. Déterminer numériquement T_D puis N_D pour les valeurs retenues et indiquer si la roue avant glisse ou non dans cette situation.*

Correction Seule la roue avant étant motrice, et $T_C=0$ (ce qui peut se justifier par l'application du PFD à la roue arrière (inertie négligée), en son centre).

La relation (5) donne alors $T_D=\dfrac{M}{2}\gamma$. AN : $T_D=33\,\text{N}$. D'autre part, les équations (6) et (7) permettent d'écrire : $N_C=(b-a)\dfrac{M}{2b}g+h\dfrac{M}{2b}\gamma$ soit $N_D=\dfrac{M}{2}g-(b-a)\dfrac{M}{2b}g-h\dfrac{M}{2b}\gamma=\dfrac{M}{2b}(ag-h\gamma)$.

AN : $N_D=178\,\text{N}$.

On calcule alors $\dfrac{T_D}{N_D}=0,18<f$ il y a donc adhérence (roulement sans glissement)

Question 23 *En se plaçant à la limite du glissement en D, donner l'expression et la valeur de l'accélération maximale qu'il est possible d'avoir pour éviter le glissement. En déduire la durée de la phase d'accélération permettant d'atteindre la vitesse maximale dans ces conditions.*

Correction A la limite du glissement, $T_D=\dfrac{M}{2}\gamma_{\max}=fN_D$.

Soit $\gamma_{\max}=\dfrac{2fN_D}{M}$. AN : $\gamma_{\max}=2{,}97\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$.

Dans ces conditions, la durée de la phase d'accélération pour atteindre $V_{\max}=1{,}1\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ (exigence 1.5.2) vaut $t_{acc}=\dfrac{V_{\max}}{\gamma_{\max}}=0{,}37\,\text{s}$