I – Rappels et compléments d'algèbre linéaire, 1ère partie

I. Image d'une base par un endomorphisme

1) **Condition nécessaire :** Supposons qu'il existe $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\operatorname{Ker} u = F$ et $\operatorname{Im} u = G$. Avec $n = \dim E$, par le théorème du rang $\dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Im} u = \dim E$, donc $\dim E = \dim F + \dim G$ est une conditon nécessaire.

Condition sufisante : Réciproquement, en posant $p = \dim F$, $q = \dim G$, supposons que $p + q = n$. Nous allons construire u convenable en la définissant sur une base judicieusement choisie de E.
Soit $(f_1, \cdots, f_p)$ une base de F, que l'on complète par $(f_{p+1}, \cdots, f_{p+q})$ en une base de E : cette base servira de base « de départ » pour u.
Soit $(g_1, \cdots, g_q)$ une base de G, on considère la famille « à l'arrivée » $(0, \cdots, 0, g_1, \cdots, g_q)$, dont les p premiers vecteures sont nuls. Notons cette famille $(k_1, \cdots, k_n)$.
On sait alors qu'il existe un unique endomorpisme u tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u(f_i) = k_i$.
Alors : $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(u(f_1), \cdots, u(f_n)) = \operatorname{Vect}(0, \cdots, 0, g_1, \cdots, g_q) = \operatorname{Vect}(g_1, \cdots, g_q) = G$.
En particulier, $\operatorname{rg} u = \dim G = q$.
Or pour tout i de 1 à p, $f_i \in \operatorname{Ker} u$ donc $F = \operatorname{Vect}(f_1, \cdots, f_p) \subset \operatorname{Ker} u$. Or avec le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} u = \dim E - \operatorname{rg} u = n - q = p = \dim F$.
Donc $F = \operatorname{Ker} u$: la condition était bien suffisante.

2) Une base de F est $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, que l'on compléte en la base de $\mathbb{R}^3$ $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, notée (f_1, f_2, f_3). Posons $g_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Cherchons l'expression de l'endomorpisme u tel que $u(f_1) = u(f_2) = 0$ et $u(f_3) = g_1$.
Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Décomposons-le dans la base (f_1, f_2, f_3). Une résolution de système linéaire sans surprise donne $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z f_1 + (y+z) f_2 + (x+y+z) f_3$.
Ainsi $u \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z u(f_1) + (y+z) u(f_2) + (x+y+z) u(f_3) = (x+y+z) g_1$.
Une application u telle que $\operatorname{Ker} u = F$ et $\operatorname{Im} u = G$ est donc u : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & (x+y+z) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array}\right.$.

II. Une caractérisation des homothéties

1) Pour tout $x \neq 0_E$, il existe $\lambda(x) \in \mathbb{K}$ tel que

$$f(x) = \lambda(x).x$$

et le but est de montrer que $\lambda(x)$ ne dépend pas de x, i.e. que si $x \neq y$, $\lambda(x) = \lambda(y)$. Pour cela on considère deux vecteurs non nuls x et y, et on examine deux cas : Si (x, y) est liée, il existe μ tel que $y = \mu x$. On a alors

$$f(y) = \mu f(x) = \mu \lambda(x) x = \lambda(x) y$$

et donc $\lambda(x) = \lambda(y)$. Si (x, y) est libre, on passe par l'intermédiaire de $x + y$. En effet, $f(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda(x)x + \lambda(y)y$ d'une part, $f(x+y) = \lambda(x+y)(x+y)$ d'autre part. Comme (x, y) libre, on obtient $\lambda(x) = \lambda(y) = \lambda(x+y)$. Et c'est ce qu'on voulait...

2) Une droite est l'intersection de deux plans donc une telle application stabilise aussi les droites : c'est donc une homothétie.

3) Une homothétie commute avec tout endomorphisme. Réciproquement, soit f un endomorphisme qui commute avec tout endomorphisme. Si $x \neq 0_E$, soit F un supplémentaire de Vect (x) dans E (C'est pour l'existence de ce supplémentaire qu'on suppose E de dimension finie). Soit p la projection sur $\operatorname{Vect}(x)$ parallèlement à F. Alors $f \circ p = p \circ f$. On applique cela en x, on obtient $p(f(x)) = f(x)$, donc $f(x)$ est lié avec x. Et ce, pour tout x. Il ne reste plus qu'à appliquer la question précédente.

4) On en déduit que le centre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est constitué par les homothéties (en utilisant l'isomorphisme canonique entre $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$).

5) On retrouve ce résultat en considérant une matrice M du centre et en écrivant

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \quad M E_{i,j} = E_{i,j} M$$

III. Noyaux itérés

1) Si $f^p(x) = 0_E$, $f\left(f^p(x)\right) = 0_E$, i.e. $f^{p+1}(x) = 0_E$. On a donc

$$x \in F_p \Longrightarrow x \in F_{p+1}$$

Ou encore $F_p \subset F_{p+1}$. De plus, si $y \in G_{p+1}$, il existe x tel que $y = f^{p+1}(x)$. Mais alors $y = f^p(f(x))$, donc $y \in G_p$. Et finalement $G_{p+1} \subset G_p$.

2) On est en dimension finie : la suite des dimensions des F_p, croissante et majorée, converge vers ℓ. Mais c'est une suite d'entiers naturels. Elle est donc stationnaire et $\ell \in \mathbb{N}$. Il existe donc l tel que pour tout $k \geqslant l$, $F_k = F_{k+1} = F_l$ (si un sev est inclus dans un autre et s'ils ont même dimension, ils sont égaux). On peut alors poser $p = \min\left\{ l \in \mathbb{N}\ ,\ F_l = F_{l+1} \right\}$. Alors $\dim F_p = \ell$, et comme la suite est croissante, alors pour tout $k \geqslant p$, $\ell = \dim F_p = \dim F_k = \dim F_{k+1}$. Par inclusion, alors $F_p = F_k = F_{k+1}$.

3) On peut faire le même genre de raisonnement qu'à la question précédente, mais il est plus simple de se souvenir du théorème du rang. En effet, comme pour tout p on a $G_{p+1} \subset G_p$, on a

$$G_p = G_{p+1} \Longleftrightarrow \dim\left(G_p\right) = \dim\left(G_{p+1}\right)$$

Mais du théorème du rang on déduit facilement que

$$\left(\dim\left(G_p\right) = \dim\left(G_{p+1}\right)\right) \Longleftrightarrow \left(\dim\left(F_p\right) = \dim\left(F_{p+1}\right)\right)$$

et on est ramené à utiliser les résultats de la question précédente. On trouve $r = s$.

4) Comme $r = s$, le théorème du rang fait qu'il nous suffit de montrer que

$$F_r \cap G_r = \{0_E\}$$

Mais si $x \in F_r \cap G_r$, soit y tel que $x = f^r(y)$; de $f^r(x) = 0_E$ on déduit que $f^{2r}(y) = 0_E$. Donc $y \in F_{2r}$. Mais $F_{2r} = F_r$ d'après 2. Donc $y \in F_r$, donc $x = 0_E$, ce qui conclut.

IV. « Inégalité triangulaire » et une autre inégalité autour du rang

1) a) Il suffit de remarquer que $\mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Im}\,u + \mathrm{Im}\,v$. En effet, si $y \in \mathrm{Im}(u+v)$, il existe $x \in E$ tel que $y = (u+v)(x) = u(x) + v(x)$. Or $u(x) \in \mathrm{Im}\,u$ et $v(x) \in \mathrm{Im}\,v$.
Attention, l'inclusion réciproque est fausse : essayez de la démontrer, remarquez où la démonsration échoue et cherchez un contre-exemple.
On en tire : $\mathrm{rg}(u+v) \leqslant \dim(\mathrm{Im}\,u + \mathrm{Im}\,v) \leqslant \mathrm{rg}\,u + \mathrm{rg}\,v$, la dernière inégalité découlant de la formule de Grassman.

b) Commençons pas remarquer que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\mathrm{Im}(\lambda u) = \mathrm{Im}\,u$. En effet, si $y \in \mathrm{Im}(\lambda u)$, il existe $x \in E$ tel que $y = \lambda u(x) = u(\lambda x) \in \mathrm{Im}\,u$. L'inclusion réciproque se démontre de la même manière, en utilisant bien que $\lambda \neq 0$.
Ainsi

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(u) &= \mathrm{rg}((u+v)+(-v)) \\ &\leqslant \mathrm{rg}(u+v) + \mathrm{rg}(-v) && \text{grâce à la première question} \\ &\leqslant \mathrm{rg}(u+v) + \mathrm{rg}(v) && \text{avec la remarque précédente} \end{aligned}$$

d'où

$$\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v) \leqslant \mathrm{rg}(u+v) \tag{1}$$

En inversant les rôles de u et v et en écrivant $v = (u+v) - u$, on obtient de la même manière

$$\mathrm{rg}(v) - \mathrm{rg}(u) \leqslant \mathrm{rg}(u+v) \tag{2}$$

Les équations (1) et (2) assurent alors que

$$|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leqslant \mathrm{rg}(u+v).$$

2) Nous savons que $\mathrm{Im}(u \circ v) \subset \mathrm{Im}\,u$ donc $\mathrm{rg}(u \circ v) \leqslant \mathrm{rg}\,u$. De plus $\mathrm{Im}(u \circ v) = u(\mathrm{Im}\,v)$. Si $\tilde{u}$ est la restriction de u à $\mathrm{Im}\,v$, alors $\mathrm{rg}(u \circ v) = \mathrm{rg}(\tilde{u})$. Le théorème du rang assure que $\mathrm{rg}(\tilde{u}) = \dim \mathrm{Im}\,v - \dim \mathrm{Ker}\,\tilde{u} \leqslant \mathrm{rg}\,v$. Ainsi

$$\mathrm{rg}(u \circ v) \leqslant \inf(\mathrm{rg}\,u, \mathrm{rg}\,v).$$

D'autre part, en repartant de $\mathrm{rg}(\tilde{u}) = \dim \mathrm{Im}\,v - \dim \mathrm{Ker}\,\tilde{u}$, nous avons $\mathrm{Ker}\,\tilde{u} = \mathrm{Ker}\,u \cap \mathrm{Im}\,v \subset \mathrm{Ker}\,u$ donc $\dim \mathrm{Ker}\,\tilde{u} \leqslant \dim \mathrm{Ker}\,u$. Avec le théorème du rang il vient $\dim \mathrm{Ker}\,\tilde{u} \leqslant n - \mathrm{rg}\,u$, et donc finalement

$$\mathrm{rg}\,v + \mathrm{rg}\,u - n \leqslant \mathrm{rg}(u \circ v).$$

V. Endomorphismes nilpotents

1) Introduire $\mathscr{E} = \{ k \in \mathbb{N},\ f^k = 0 \}$ et montrer qu'il a un min, qui est donc unique.

2) Prendre $x \notin \operatorname{Ker} f^{p-1}$, regarder une combinaison nulle non triviale de la famille, poser k le plus petit indice tel que $\lambda_k \neq 0$ et composer par f^{p-k} : on aboutit à une contradiction.

3) Une famille libre a toujours moins de n éléments.

4) Ligne de 1 en-dessous de la diagonale.

5) $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $P \mapsto P'$.