XIV. Séries entières

17 décembre 2025

Table des matières

C - Séries entières

Les objectifs de cette section sont les suivants :

- *étudier la convergence d'une série entière et mettre en évidence la notion de rayon de convergence ;*
- *étudier les propriétés de sa somme en se limitant à la continuité dans le cas d'une variable complexe ;*
- *établir les développements en série entière des fonctions usuelles.*

Les séries entières trouveront un cadre d'application dans la notion de fonction génératrice en probabilités et au détour d'exemples de résolution d'équations différentielles linéaires.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Rayon de convergence	
Série entière de la variable réelle, de la variable complexe.	
Lemme d'Abel : si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $\|z\| < \|z_0\|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.	
Rayon de convergence R défini comme borne supérieure dans $[0, +\infty]$ de l'ensemble des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée.	La série $\sum a_n z^n$ converge absolument si $\|z\| < R$, et elle diverge grossièrement si $\|z\| > R$.
Intervalle ouvert de convergence.	
Disque ouvert de convergence.	
Avec R_a (resp. R_b) le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, (resp. $\sum b_n z^n$) :	Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $R\left(\sum n^\alpha x^n\right) = 1$.
– si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$;	Le résultat s'applique en particulier lorsque $a_n = o(b_n)$.
– si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.	
Application de la règle de d'Alembert pour les séries numériques au calcul du rayon.	La limite du rapport $\dfrac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|}$ peut être directement utilisée.
Rayon de convergence de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières.	
b) Régularité de la somme d'une série entière de la variable réelle	
Convergence normale d'une série entière d'une variable réelle sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.	
Continuité de la somme sur l'intervalle ouvert de convergence.	L'étude des propriétés de la somme au bord de l'intervalle ouvert de convergence n'est pas un objectif du programme.
Primitivation d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence.	Relation $R\left(\sum a_n x^n\right) = R\left(\sum n a_n x^n\right)$.
Caractère $\mathscr{C}^\infty$ de la somme d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence et obtention des dérivées par dérivation terme à terme.	
Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif au moyen des dérivées successives en 0 de sa somme.	

c) Développement en série entière au voisinage de 0 d'une fonction d'une variable réelle

Fonction développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$.	
Série de Taylor d'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$.	Formule de Taylor avec reste intégral.
Unicité du développement en série entière.	
Développements des fonctions usuelles.	Les étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions : exponentielle, cosinus, sinus, cosinus et sinus hyperboliques, Arctan, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto (1+x)^\alpha$. Les étudiants doivent savoir développer une fonction en série entière à l'aide d'une équation différentielle linéaire.

d) Séries géométrique et exponentielle d'une variable complexe

Continuité de la somme d'une série entière de la variable complexe sur le disque ouvert de convergence.	La démonstration est hors programme.
Développement de $\dfrac{1}{1-z}$ sur le disque unité ouvert.	
Développement de $\exp(z)$ sur $\mathbb{C}$.	

1 Rayon de convergence

1.1 Définition de série entière

Définition 1.1.1 (Série entière)**.**

- On appelle ***série entière complexe*** toute série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ pour laquelle il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto a_n z^n$. Par abus, on écrira cette série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$.
- On appelle ***série entière réelle*** toute série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ pour laquelle il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a_n x^n$. Par abus, on écrira cette série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$.

Remarque 1.1.2.

- Lorsque la suite (a_n) n'est définie qu'à partir du rang n_0, la série entière sera notée $\sum\limits_{n\geqslant n_0} a_n z^n$.
- Les sommes partielles d'une série entière sont des fonctions polynomiales.

La plupart des résultats et définitions qui vont suivre sont valables aussi bien pour les séries entières réelles que complexes. Pour faire plus simple nous ne les donnerons que dans le cas des séries complexes, mais ils s'adaptent directement au cas des séries réelles.
Dans toute la suite, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ sera une suite complexe, et $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ sera la série entière complexe associée.

Définition 1.1.3.
Le ***domaine de convergence*** de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est l'ensemble des complexes z pour lesquels la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge. C'est donc le domaine de définition de la fonction $f : z \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, qui est appelée la ***somme de la série entière***.

Remarque 1.1.4.
0 est toujours dans le domaine de convergence et $f(0) = a_0$.

Exemple 1.1.5.

(i) $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{z^n}{n!}$ admet $\mathbb{C}$ pour domaine de convergence. Sa somme est alors la fonction $z \mapsto \mathrm{e}^z$.

(ii) $\sum\limits_{n\geqslant 0} z^n$ admet $\mathscr{B}(0,1) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$ pour domaine de convergence. Sa somme est alors la fonction $z \mapsto \dfrac{1}{1-z}$.

(iii) $\sum\limits_{n\geqslant 0} n! z^n$ admet $\{0\}$ pour domaine de convergence.

1.2 Rayon et disque de convergence, cercle d'incertitude

Le domaine de convergence d'une série de fonctions quelconque peut être compliqué dans sa forme. Nous allons voir que celui d'une série entière est très simple : c'est un disque, la seule « liberté » étant qu'individuellement les points du bord de ce disque peuvent être ou pas dans le domaine de convergence.
Le lemme suivant est le point de départ de la définition de rayon de convergence :

Lemme 1.2.1 (Lemme d'Abel)**.**
Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Si la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est absolument convergente.

Démonstration.
Soit M un majorant de $(|a_n z_0^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n z^n| = \left|a_n z_0^n \times \left(\frac{z}{z_0}\right)^n\right| \leqslant M\left|\frac{z}{z_0}\right|^n$. On conclut par majoration de séries à termes réels positifs. □

Remarque 1.2.2.

- S'il existe un $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z_0^n$ converge, alors $a_n z_0^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc avec le lemme d'Abel, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est absolument convergente.
- Si la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \geqslant |z_0|$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

Définition 1.2.3 (Rayon de convergence)**.**
Soit $I = \{r \in \mathbb{R}_+,\ (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$. C'est un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$ contenant 0. Il admet donc une borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$, appelée ***rayon de convergence*** de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

Remarque 1.2.4.
Notons R le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

- Si $R = 0$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ ne converge qu'en 0.
- Si $R = +\infty$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge sur $\mathbb{C}$.

Commençons par une propriété immédiate :

Proposition 1.2.5 (Module et produit externe)**.**

(i) $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} |a_n| z^n$ ont le même rayon de convergence.

(ii) Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Alors la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \lambda a_n z^n$ a le même rayon de convergence que $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

Théorème 1.2.6 (Disque de convergence)**.**
Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R, et $z \in \mathbb{C}$. Alors

(i) si $|z| < R$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;

(ii) si $|z| > R$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge grossièrement (la suite $(a_n z^n)$ n'est même pas bornée) ;

(iii) si $|z| = R$, on ne peut rien dire *a priori* de la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

Démonstration.
Elle repose entièrement sur le lemme d'Abel. □

Exemple 1.2.7.
Concernant le 3ème point, considérer les exemples suivants :

1. $z = 1$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} z^n$
2. $z = -1$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} z^n$
3. $z = 1$ et $z = -1$, et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} z^n$

Définition 1.2.8 (Disque de convergence et cercle d'incertitude)**.**
Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.
La boule ouverte de centre 0 et de rayon R est appelée ***disque ouvert de convergence***. Nous le noterons $\mathscr{D}(0, R)$.

La sphère de centre 0 et de rayon R est appelée ***cercle d'incertitude***. Nous le noterons $\mathscr{C}(0,R)$.

Remarque 1.2.9.
Dans le cas d'une série entière réelle, le disque de convergence est $]-R,R[$ et le cercle d'incertitude est la paire $\{R,-R\}$.

Définition 1.2.10 (Somme d'une série entière)**.**
On appelle ***somme*** de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ la fonction

$$S : \begin{array}{ccc} \mathscr{D}(0,R) & \to & \mathbb{K} \\ z & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{array}.$$

Exercice 1.2.11.
Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Montrer que l'on a (les bornes supérieures étant prises dans $\overline{\mathbb{R}}$) :

1. $R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+,\ (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente}\}$.
2. $R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+,\ (|a_n r^n|)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente}\}$.
3. $R = \sup\left\{r \in \mathbb{R}_+,\ a_n r^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right\}$.

Théorème 1.2.12 (Convergence normale)**.**
Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$. Soit $r \in]0,R[$.
Alors $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge normalement sur le disque $\mathscr{D}(0,r)$.

Démonstration.
Par croissance de la fonction réelle $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$, $\sup_{z\in\mathscr{D}(0,r)} |a_n z^n| = |a_n| r^n$. Or par définition du rayon de convergence, $\sum_{n\geqslant 0} |a_n| r^n$ converge. Il y a donc bien convergence normale sur $\mathscr{D}(0,r)$. □

2 Méthodes de détermination du rayon de convergence

La première difficulté lors de l'étude d'une série entière est la déterminantion de son rayon de convergence. Dans les sections suivantes, nous allons explorer quelques méthodes pour répondre à cette problématique.

2.1 Résultats de comparaison

Théorème 2.1.1.
Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

(i) Si à partir d'un certain rang $|a_n| \leqslant |b_n|$, alors $R_a \geqslant R_b$;
(ii) Si $a_n = o(b_n)$ ou $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$;
(iii) Si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.

Démonstration.
(i) Soit $r \in \mathbb{R}_+$ tel que $r < R_b$. Alors $(b_n r^n)$ est bornée, donc $(a_n r^n)$ aussi. Ainsi $r \leqslant R_a$. Si $R_a < R_b$, il existe r tel que $R_a < r < R_b$, ce qui est absurde. Ainsi $R_a \geqslant R_b$.
(ii) Dans les deux cas $a_n = O(b_n)$, donc il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel qu'à partir d'un certain rang $|a_n| \leqslant M|b_n|$ et on conclut avec le premier point.
(iii) Si $a_n \sim b_n$, alors $a_n = O(b_n)$ et $b_n = O(a_n)$ et on conclut avec le point précédent. □

Exemple 2.1.2.
On pose $a_n = \sin(n)$. On sait que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ admet 1 pour rayon

de convergence, et pour tout n, $|a_n| \leqslant 1$, donc le rayon de convergence R de $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est supérieur ou égal à 1.
Mais on sait également que (a_n) ne tend pas vers 0, donc $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge pour $z=1$, donc $R \leqslant 1$.
Finalement $R=1$.
Question bonus : calculer la somme de cette série entière.

Exercice 2.1.3.
Plus généralement, soit (a_n) une suite complexe bornée ne tendant pas vers 0. Montrer que le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ vaut 1.

Exercice 2.1.4.
Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum \dfrac{z^n}{n^2+n+1}$
2. $\ln(1+n)z^n$

2.2 Règle de d'Alembert

La règle de d'Alembert pour les séries s'adapte au cas des séries entières :

Théorème 2.2.1 (Règle de d'Alembert)**.**
Soit (a_n) une suite ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. S'il existe $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ telle que $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ vaut $\dfrac{1}{\ell}$, avec les conventions habituelles « $\dfrac{1}{+\infty}=0$ » et « $\dfrac{1}{0^+}=+\infty$ » (car ici $\ell \geqslant 0$).

Remarque 2.2.2.
Cette méthode est efficace dans les cas où a_n est définie uniquement avec des exponentielles et des produits au sens large : puissances, factorielles, fractions... Elle est peu utile dans les autres cas.

Exercice 2.2.3.
Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum \dfrac{n!}{n^n} z^n$
2. $\sum \dfrac{z^{2n}}{n^2+1}$
3. $\sum \dfrac{n}{2^n} z^{3n}$
4. $\sum \dfrac{2^n}{3^n+1} z^{3n}$

2.3 Utilisation de suites bornées

Les exercices les plus délicats de détermination de rayons de convergence se font en utilisant plutôt les suites bornées et les considérations suivantes :

Proposition 2.3.1.
(i) Si la suite $(a_n z^n)$ est bornée, alors $|z| \leqslant R$;
(ii) Si la suite $(a_n z^n)$ est non bornée, alors $|z| \geqslant R$;
(iii) Si la suite $(a_n z^n)$ converge vers 0, alors $|z| \leqslant R$;
(iv) Si la suite $(a_n z^n)$ ne converge pas vers 0 , alors $|z| \geqslant R$.

Exemple 2.3.2.
Déterminons le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ où a_n désigne la n-ième décimale après la virgule dans l'écriture décimale illimitée de $\sqrt{3}$.
On a $a_n \leqslant 9$ pour tout n donc le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est supérieur à celui de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} 9z^n$, qui est égal à 1 (série géométrique de raison z). Donc $R \geqslant 1$.
De plus la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ diverge puisque son terme général ne tend pas vers 0 : en effet, si la suite (a_n) tendait vers 0, comme il s'agit d'une suite d'entiers, elle serait constante égale à 0 à partir d'un certain rang, et le nombre $\sqrt{3}$ serait un nombre décimal. Puisque la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge pour $z=1$, on a $R \leqslant 1$.
Finalement, $R=1$.

Exercice 2.3.3.
Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$. Déterminer en fonction de R le rayon de convergence de $\sum a_n^2 z^n$.

2.4 Utilisation du cercle d'incertitude

Dans le même esprit que la section précédente, nous avons le résultat suivant :

Proposition 2.4.1.
S'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que

(i) $\sum_{n\geqslant 0} a_n z_0^n$ converge non absolument

ou

(ii) $(a_n z_0^n)$ est bornée mais $\sum_{n\geqslant 0} a_n z_0^n$ diverge,

alors le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ vaut $|z_0|$.

Démonstration.
Il suffit d'utiliser **1.2.6** □

Exercice 2.4.2.
Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} \sin(n) z^n$ à l'aide du résultat précédent.
Aurait-on pu utiliser la règle de d'Alembert ?

2.5 Quelques exemples fréquents, séries entières dérivée et primitive

Voici deux situations hors-programme mais qu'il est bon de connaître :

Proposition 2.5.1.

(i) $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{n+1}$ ont le même rayon de convergence.

(ii) $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

Démonstration.

(i) Notons R le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et R' celui de $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{n+1}$.
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$. Alors $(a_n z^n)$ est bornée et bien sûr $(a_n z^{n+1})$ est aussi bornée, donc $R' \geqslant R$.
Réciproquement, soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$. Alors $(a_n z^n)$ n'est pas bornée, donc $z \neq 0$ et $(a_n z^{n+1})$ ne peut pas être bornée non plus. Donc $R' \leqslant R$.

(ii) Notons R le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et R' celui de $\sum_{n\geqslant 0} n a_n z^n$.
Comme $a_n = o(n a_n)$, R est supérieur au rayon de $\sum_{n\geqslant 0} n a_n z^n$, donc $R \geqslant R'$.
Inversement, soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$. Introduisons ρ tel que $|z| < \rho < R$, on a $n a_n z^n = n(z/\rho)^n a_n \rho^n = o(a_n \rho^n)$.
Or il y a convergence absolue de $\sum a_n \rho^n$, donc $\sum n a_n z^n$ converge absolument.
Ainsi $R' \geqslant R$.

□

Définition 2.5.2.
Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière.

(i) On appelle ***série dérivée*** de cette série la série entière $\sum_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1}$, ou encore $\sum_{n\geqslant 0} (n+1) a_{n+1} z^n$.

(ii) On appelle ***série primitive*** de cette série la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ ou encore $\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_{n-1}}{n} z^n$.

Théorème 2.5.3.
La série dérivée et la série primitive ont le même rayon de convergence que $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

Démonstration.
Puisque $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est la série dérivée de sa série primitive, il suffit de montrer que $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et sa série dérivée ont le même rayon de convergence.
Et ce dernier résultat découle directement du second point de **2.5.1**, car $n \sim n+1$. □

3 Opérations sur les séries entières

Dans toute cette section nous considérons deux séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

3.1 Somme

Nous avons déjà donné un résultat concernant la multiplication d'une série entière par un scalaire non nul en **1.2.5**.

Définition 3.1.1 (Somme de deux séries entières)**.**
On appelle ***somme*** des deux séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$, la série entière $\sum_{n\geqslant 0} (a_n + b_n) z^n$.

Proposition 3.1.2 (Rayon de convergence de la somme de deux séries entières)**.**
Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ de rayons de convergence R_a et R_b.

(i) Si $R_a \neq R_b$, la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n$ a pour rayon de convergence $R = \min(R_a, R_b)$.
(ii) Si $R_a = R_b$, la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n$ a un rayon de convergence $R \geqslant R_a$.
(iii) Dans les deux cas, on a, pour tout z tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

Démonstration.
Soit R' le rayon de convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n$ et $R = \min(R_a, R_b)$.

(i) Soit $r < R$. Les suites $(a_n r^n)$ et $(b_n r^n)$ sont bornées, donc $((a_n + b_n) r^n)$ également, et ainsi $R \leqslant R'$.
Soit $r > R$. Plus précisèment, si par exemple $R_a < R_b$, prenons $r \in]R_a, R_b[$. Alors $(b_n r^n)$ est bornée mais pas $(a_n r^n)$, donc $((a_n + b_n) r^n)$ n'est pas bornée. Par conséquent $R \geqslant R'$.
Finalement $R = R'$.

(ii) En reprenant la première partie du point précédent, nous avons encore $R \leqslant R'$. Mais nous ne pouvons pas en dire plus, la seconde partie du point précédent n'étant plus valable.

(iii) Si $|z| < R$, les deux séries $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ convergent absolument, donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n$ aussi, et nous avons $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$.

□

Exercice 3.1.3.
Donner un exemple de deux séries entières de même rayon de convergence R, dont la somme a un rayon de convergence strictement supérieur.

3.2 Produit de Cauchy

Définition 3.2.1 (Produit de Cauchy)**.**
La série entière ***produit de Cauchy*** de $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ est la série entière $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ où, pour tout entier naturel n, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Proposition 3.2.2 (Convergence du produit de Cauchy)**.**
Notons R_c le rayon de convergence du produit de Cauchy défini en **3.2.1**.
Alors $R_c \geqslant \min(R_a, R_b)$, et $\forall\, z \in D(0, \min(R_a, R_b))$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right).$$

Il s'agit d'une conséquence du résultat sur le produit de Cauchy de deux séries numériques.
Nous pouvons d'ailleurs reprendre les mêmes exemples que dans le chapitre sur les séries :

Exemple 3.2.3.
Établir que si $(z, z') \in \mathbb{C}^3$, $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z \times \mathrm{e}^{z'}$.

Exemple 3.2.4.
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Grâce à un produit de Cauchy, montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n = \dfrac{1}{(1-z)^2} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right)^2$.

4 Régularité des séries entières réelles

On ne s'intéressera dans cette section qu'à des séries entières réelles.
Dans la suite, $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière réelle de rayon de convergence R.

4.1 Convergence pour les séries entières réelles

On rappelle que dans le cas d'une série entière réelle, le disque de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est l'intervalle $]-R, R[$. Il est appelé l'***intervalle ouvert de convergence***. L'***intervalle de convergence*** est l'intervalle sur lequel la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge. Si on le note I, il vérifie donc $]-R, R[\subset I \subset [-R, R]$.

Rappelons le théorème **1.2.12**, dans la version « série entière réelle » :

Théorème 4.1.1 (Convergence normale)**.**
Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$. Alors $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge normalement sur tout segment de l'intervalle ouvert de convergence.

Exercice 4.1.2.
Déterminer les domaines de convergence simple, uniforme, normale pour :

1. $\sum x^n$
2. $\sum \dfrac{x^n}{n}$
3. $\sum \dfrac{x^n}{n^2}$

4.2 Continuité

La conséquence directe du théorème **4.1.1** est le résultat suivant :

Théorème 4.2.1 (Continuité d'une série entière)**.**
La somme $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur l'intervalle ouvert de convergence.

Exemple 4.2.2.
Étudions $S\ :x\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$.
S est une série entière de rayon de convergence $R=1$. S est donc assurément définie et continue sur $]-1,1[$.
Étude en $x=-1$: $\sum\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-1)^n=\sum\frac{-1}{n}$ diverge, et S n'est pas définie en -1.
Étude en $x=1$: $\sum\frac{(-1)^{n-1}}{n}1^n=\sum\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est une série alternée convergente en vertu du critère spécial. S est donc définie en 1.
De plus, considérons $u_n\ :[0,1]\to\mathbb{R}$ définie par $u_n(x)=\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ avec $n\geqslant 1$.
Les fonctions u_n sont continues, et $\sum u_n(x)$ converge par le critère spécial. De plus

$$|R_n(x)|\leqslant|u_{n+1}(x)|\leqslant\frac{1}{n+1}x^{n+1}\leqslant\frac{1}{n+1}\to 0.$$

Il y a convergence uniforme sur $[0,1]$ donc S est continue sur $[0,1]$.

Remarque 4.2.3.
Les résultats de régularité sont énoncés sur $]-R,R[$, où R est le rayon de convergence de la série entière. Si $R=+\infty$, c'est parfait. Sinon, en $-R$ et en R, tout peut arriver, on ne peut rien dire de général.
Cependant, si le rayon de convergence de $\sum a_nx^n$ est R, si $R\in]0,+\infty[$, et si $\sum|a_n|R^n$ converge, alors $S\ :x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ converge normalement sur $[-R,R]$ et y est donc continue.

4.3 Dérivation

Théorème 4.3.1 (Classe $\mathscr{C}^1$)**.**
Notons S la somme de la série $\sum_{n\geqslant 0}a_nx^n$, *i.e.* $S\ :]-R,R[\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$.
Alors S est de classe $\mathscr{C}^1$ et pour tout $x\in]-R,R[$,

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n=\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}.$$

Démonstration.
Appliquons le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions. Si l'on pose $u_n(x)=a_nx^n$, on vérifie que
(i) les u_n sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-R,R[$;
(ii) la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0}u_n(x)$ converge simplement vers S sur $]-R,R[$;
(iii) d'après **2.5.3**, $\sum_{n\geqslant 0}u_n'(x)$ converge uniformément sur tout segment inclus dans $]-R,R[$,

ce qui permet de conclure. □

Exemple 4.3.2.
Continuons l'exemple **4.2.2** et calculons la somme $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$.
Considérons à nouveau la fonction $S\ :x\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$. Elle est de rayon de convergence égal à 1, donc elle est dérivable sur $]-1,1[$, et $S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nx^n=\frac{1}{1+x}$ par sommation géométrique.
Il existe donc une constante $C\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $x\in]-1,1[$, $S(x)=\ln(1+x)+C$. Mais $S(0)=0$, donc $C=0$.
Enfin, nous avons vu que S est continue en 1, donc $S(1)=\ln 2$, *i.e.* $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2$.

Par récurrence on tire du théorème précédent :

Corollaire 4.3.3 (Classe $\mathscr{C}^\infty$)**.**
Avec les mêmes notations, S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$, et pour tout $k\in\mathbb{N}$ et $x\in]-R,R[$,

$$S^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{n!}{(n-k)!}a_nx^{n-k}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+k)!}{n!}a_{n+k}x^n.$$

Corollaire 4.3.4.
Avec les mêmes notations, pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$a_k=\frac{S^{(k)}(0)}{k!}.$$

Corollaire 4.3.5 (Unicité du développement en série entière)**.**
Soient deux séries entières $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ et $g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n$.
Si f et g sont définies et coïncident sur un intervalle ouvert contenant 0, on a $a_n=b_n$ pour tout entier n.

Exercice 4.3.6.
Soit $\sum a_nx^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$ et de somme $S\ :\ ]-R,R[\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$.
Montrer que S est paire si et seulement si pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_{2n+1}=0$.
Remarque : il existe bien sûr un résultat analogue concernant les fonctions impaires.

4.4 Intégration

Théorème 4.4.1 (Intégration d'une série entière)**.**
Notons S la somme de la série $\sum_{n\geqslant 0}a_nx^n$, *i.e.* $S\ :\ ]-R,R[\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$.

(i) Pour tout segment $[a,b]\subset]-R,R[$, on a $\int_a^b S(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b(a_nx^n)\,\mathrm{d}x$.

(ii) Une primitive de S sur $]-R,R[$ est $x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_nx^{n+1}}{n+1}$.

Démonstration. (i) Par convergence uniforme sur $[a,b]$, il suffit d'appliquer le théorème d'interversion série-intégrale.

(ii) En appliquant le premier point, pour tout $x\in]-R,R[$, on a $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_nx^{n+1}}{n+1}$, d'où le résultat.

On peut aussi poser $F\ :\ x\mapsto\frac{a_nx^{n+1}}{n+1}$, constater grâce à **2.5.3** qu'elle est de rayon de convergence égal à R, et que sa dérivée vaut S avec **4.3.1**.

□

Exemple 4.4.2.
$\sum_{n\geqslant 0}x^n$ est de rayon de convergence égal à 1, et pour tout $x\in]-1,1[$, $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$.
Alors la primitive de S s'annulant en 0 est égale d'une part à $x\mapsto-\ln(1-x)$, d'autre part à $x\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$ par primitivation terme à terme.

Donc pour tout $x \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

5 Fonctions développables en série entière

5.1 Développement en série entière au voisinage de 0

Définition 5.1.1.
Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ contenant 0 .
On dit que f est ***développable en série entière*** sur $]-r,r[$ (ou ***admet un développement en série entière***) si $]-r,r[\subset I$ et s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geqslant r$ telle que

$$\forall\, x \in]-r,r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Remarque 5.1.2.

1. Souvent on ne précise pas la valeur de $r > 0$, on dit simplement que f est développable en série entière au voisinage de 0 ou en 0 .
2. La fonction f peut être définie sur un intervalle plus grand que $]-R,R[$ ou $[-R,R]$.
   En revanche, si f n'est pas continue en $x_0 \neq 0$, alors $R \leqslant |x_0|$.
3. Grâce à **4.3.5**, si f admet un développement en série entière au voisinage de 0 , alors il est unique.

Exemple 5.1.3.
Pour tout $x \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, donc la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$.

5.2 Série de Taylor

Définition 5.2.1 (Série de Taylor)**.**
Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})$, où I est un intervalle contenant 0 en son intérieur. On apelle ***série de Taylor*** de f la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Théorème 5.2.2.
Si f est développable en série entière sur $]-r,r[$, alors f y est de classe $\mathscr{C}^\infty$, et y est égale à sa série de Taylor.

Remarque 5.2.3.
C'est une conséquence de **4.3.3** et **4.3.4**.

Une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ peut ne pas être développable en série entière.
Et la série de Taylor d'une fonction f de classe $\mathscr{C}^\infty$ peut converger sans être égale à f.

Exemple 5.2.4.
Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$.
On vérifie par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_k tel que pour $x \neq 0$, $f^{(k)}(x) = P\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Donc par la généralisation du théorème de la limite de la dérivée, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(0) = 0$.
La série de Taylor de f est donc nulle et de rayon de convergence infini.
Pourtant, si f était développable en série entière sur un intervalle $]-r,r[$, elle y serait égale à sa série de Taylor et y serait donc nulle : c'est absurde.

5.3 Développement et formule de Taylor avec reste intégral

Pour montrer qu'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ est développable en série entière, une méthode est de monter qu'elle est égale à sa série de Taylor. Plus précisément, si l'on arrive à écrire f comme la somme partielle d'ordre de n de sa série de Taylor plus un reste tendant vers 0 quand $n \to \infty$, on aura le résultat voulu.
Deux formules, peu aisées à manipuler, permettent cela :

Théorème 5.3.1 (Formule de Taylor avec reste intégral)**.**
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ et $(a, b) \in I^2$. Alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n \,\mathrm{d}t. \quad (\star)$$

Remarque 5.3.2.
Si f est un polynôme de degré n, alors pour tout $k > n$, $f^{(k)} = 0$, et ainsi, en appliquant Taylor à un ordre supérieur à n, on retrouve la formule de Taylor pour les polynômes.

Démonstration.
Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$ et $(a, b) \in I^2$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ l'assertion «si $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$, alors on a $(\star)$».
Alors :

- Montrons $P(0)$, c'est-à-dire si $f \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$, alors $f(b) = f(a) + \displaystyle\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$. C'est tout simplement le théorème fondamental de l'analyse.
- Montrons $\forall n \in \mathbb{N}\ (P(n) \Rightarrow P(n+1))$.
  Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$. Montrons $P(n+1)$. Pour cela, supposons $f \in \mathscr{C}^{n+2}(I, \mathbb{R})$. Alors $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ donc, puisqu'on a $P(n)$, on a

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n \,\mathrm{d}t.$$

  Calculons alors $\displaystyle\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n \,\mathrm{d}t$ grâce à une intégration par parties. On dérive $f^{(n+1)}$ (qui est bien $\mathscr{C}^1$) et on intègre $t \mapsto \dfrac{(b-t)^n}{n!}$, qui est bien continue.

  On obtient :

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n \,\mathrm{d}t \\
&= \left[f^{(n+1)}(t) \left(-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right) \right]_a^b \\
&\quad - \int_a^b f^{(n+2)}(t) \left(-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right) \mathrm{d}t \\
&= 0 + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \\
&\quad + \int_a^b f^{(n+2)}(t) \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} \,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

  On a donc bien $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

On a donc $P(0)$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$, donc on a $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$. On a donc le résultat cherché. □

Corollaire 5.3.3 (Inégalité de Taylor-Lagrange)**.**
Avec les mêmes notations et hypothèses,

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[a,b]\cup[b,a]} \left| f^{(n+1)} \right|.$$

Démonstration.
Faisons la démonstration dans le cas $a < b$ (le cas $a > b$ se traite de la même manière, en faisant attention au signe). On a alors $[a, b] \cup [b, a] = [a, b]$.
La formule de Taylor donne :

$$\begin{aligned}
\underbrace{\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right|}_{A} &= \left| \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n \,\mathrm{d}t \right| \\
&\leqslant \int_a^b \left| f^{(n+1)}(t) \right| \frac{|b-t|^n}{n!} \,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

$f^{(n+1)}$ est continue sur le segment $[a,b]$, donc bornée, donc on a :

$$\begin{aligned} A &\leqslant \int_a^b \sup_{[a,b]} \left|f^{(n+1)}\right| \frac{|b-t|^n}{n!}\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \sup_{[a,b]} \left|f^{(n+1)}\right| \int_a^b \frac{|b-t|^n}{n!}\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \sup_{[a,b]} \left|f^{(n+1)}\right| \left[\frac{-(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_a^b \\ &\leqslant \sup_{[a,b]} \left|f^{(n+1)}\right| \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

□

Proposition 5.3.4.
Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r,r[$. On note, pour tout $x \in]-r,r[$,

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Alors f est développable en série entière sur $]-r,r[$ si et seulement si, pour tout x dans $]-r,r[$, la suite $(R_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Démonstration.
f est développable en série entière si et seulement si pour tout $x \in]-r,r[$, $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ si et seulement si $R_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. □

Remarque 5.3.5.
On rappelle que

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

et surtout que

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[0,x]} \left|f^{(n+1)}\right|$$

Ces formules ne sont exploitables que si les dérivées successives de f sont facilement calculables. C'est le cas pour les fonctions exp, cos, sin, ch et sh.

Exercice 5.3.6.
Montrer que ces cinq fonctions sont développables en séries entières de rayon de convergence infini.

Cette méthode est également utilisable pour montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est développable en une série entière de rayon de convergence égal à 1. Les calculs sont plus délicats.
On montre alors que

$$\forall x \in]-1,1[,\ (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Dans le cas $\alpha \in \mathbb{N}$, on retrouve le développement du binôme de Newton, c'est-à-dire un DSE polynomial. Dans le cas contraire, on évitera de noter $\binom{\alpha}{n}$ un coefficient qui n'a pas de signification en termes de dénombrement.
Les cas $\alpha = -1$ et $\alpha = \pm\frac{1}{2}$ sont les plus fréquemment utilisés, et à bien connaître.

Les développements en série entière de ces fonctions usuelles sont à connaître et figurent dans le formulaire à la fin de ce chapitre.

5.4 Développement par dérivation et primitivation

Si f est développable en une série entière de rayon de convergence r, alors f' et toute primitive de f le sont aussi, et on obtient leur développement en dérivant ou en intégrant celui de f.

Par cette méthode on peut trouver le développement en série entière de cos à partir de celui de sin (et inversement), de ch à partir de celui de sh (et inversement), de $x \mapsto \ln(1+x)$, Arctan, Arcsin, Arccos.

Les développements en série entière de ces fonctions usuelles sont à connaître et figurent dans le formulaire à la fin de ce chapitre.

5.5 Développement par opérations

Si f et g sont développables en des séries entières de rayon de convergence r, alors leur produit de Cauchy et toute combinaison linéaire en f et g le sont aussi.

Exercice 5.5.1.
Donner le développement en série entière des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \ln(1 + x - 2x^2)$
2. $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$

5.6 Développement et équation différentielle

Il existe plusieurs manière de relier DSE et équations différentielles. Un cas de figure est de partir du DSE explicite d'une fonction f, de démontrer que la fonction en question vérifie une équation différentielle, de la résoudre et d'en déduire une expression de f.

Exemple 5.6.1.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculons le DSE de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ de la manière suivante : Posons

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$$

et étudions la série entière $\sum a_n x^n$. On a

$$a_0 = 1, a_1 = \alpha, a_2 = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}, \ldots, a_{n+1} = \frac{\alpha-n}{n+1} a_n$$

Déterminons le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.

(i) Cas $\alpha \in \mathbb{N}$:
Pour $n > \alpha$, $a_n = 0$ et donc $R = +\infty$. C'est normal, la fonction est un polynôme.

(ii) Cas $\alpha \notin \mathbb{N}$:
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$.
Pour $x \in \mathbb{R}^\star$, considérons $u_n = a_n x^n$.
Alors $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \dfrac{|\alpha - n|}{n+1}|x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|$ donc $R = 1$.

Dans les deux cas, la fonction $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha - n) a_n x^n$$

puis

$$S'(x) = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \alpha S(x) - x S'(x).$$

La fonction S est donc solution sur $]1,1[$ de l'équation différentielle $(1+x)y' + \alpha y = 0$, de solution générale $y(x) = \lambda(1+x)^\alpha$.
Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in]-1,1[$, $S(x) = \lambda(1+x)^\alpha$.
Or $\lambda = S(0) = a_0 = 1$, donc $S(x) = (1+x)^\alpha$.

Un autre cas de figure est le cas réciproque : on suppose que f est développable en série entière et vérifie une certaine équation différentielle. On peut alors exprimer les développements en série entière des dérivées de f en fonction de celui de f, et les injecter dans l'équation différentielle. En utilisant l'unicité du développement en série entière, on obtient alors une relation de récurrence reliant les coefficients du développement en série entière de f, ce qui permet de calculer ces coefficients.

Cette méthode est généralement très calculatoire, et nécessite de savoir *a priori* que f est développable en série entière.

Exercice 5.6.2.
Montrer que $x \mapsto \mathrm{e}^{\operatorname{Arctan} x}$ est DSE sur $]-1,1[$ et donner une relation de récurrence vérifiée par les coefficients de son DSE.

5.7 Une application : régularité d'un prolongement continu

Montrons que la fonction $f\ : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ donc $\dfrac{\sin x}{x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$ pour $x \neq 0$.
Or $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$ est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, ce qui permet de conclure.

6 Exemples de séries entières d'une variable complexe

6.1 Série géométrique complexe

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} z^n$ a un rayon de convergence égal à 1.

De plus, pour tout $z \in \mathscr{D}(0,1)$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} z^n = \frac{z^p}{1-z}$.

6.2 Exponentielle complexe

Définition 6.2.1.
La série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ s'appelle ***série exponentielle complexe***. Elle a un rayon de convergence infini.
Sa somme s'appelle ***fonction exponentielle complexe***, et elle est notée exp, de sorte que

$$\forall\, z \in \mathbb{C},\ \exp(z) = \mathrm{e}^{\,z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Proposition 6.2.2.
1. Pour tout $a, b \in \mathbb{C}$, $\mathrm{e}^{\,a+b} = \mathrm{e}^{\,a}.\mathrm{e}^{\,b}$.
2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ écrit sous forme algébrique $z = a + ib$, on a $\mathrm{e}^{\,z} = \mathrm{e}^{\,a}(\cos(b) + i\sin(b))$.

Démonstration.
1. Se démontre par produit de Cauchy, comme cela a déjà été vu dans le chapitre sur les séries pour l'exponentielle réelle.
2. Avec le premier point, $\mathrm{e}^{\,z} = \mathrm{e}^{\,a}.\mathrm{e}^{\,ib}$. Or

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\,ib} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ib)^n}{n!} = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{(ib)^n}{n!} + \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{(ib)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ib)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ib)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n b^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n b^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \cos(b) + i\sin(b).
\end{aligned}$$

□

6.3 Continuité sur le disque ouvert de convergence

La démonstration du théorème suivant est hors-programme :

Théorème 6.3.1.
Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière complexe de rayon de convergence r, dont on note $S\ :\mathscr{D}(0,r)\to\mathbb{C},\ z\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme.
Alors S est une fonction continue.

Il s'agit d'une fonction continue en la variable complexe. Il faut donc voir $\mathbb{C}$ comme un espace-vectoriel normé et se rapporter au chapitre de topologie sur la continuité des applications d'un evn dans un autre.

7 Exercices classiques

7.1 Comparaisons de rayons de convergence

Soit (a_n) une suite complexe.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} n^\alpha a_n z^n$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{P(n)}{Q(n)} a_n z^n$ où $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ sont deux polynômes non nuls.

7.2 Calculs de rayons de convergence (Banque CCP MP)

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :

a) $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$ b) $\sum n^{(-1)^n} z^n$ c) $\sum \cos n z^n$

7.3 Une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ (Banque CCP MP)

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$.

   On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.
2. Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ et préciser le rayon de convergence.
3. a) Déterminer $S(x)$.
   b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$f(0) = 1,\quad f(x) = \mathrm{ch}\sqrt{x} \text{ si } x > 0,\quad f(x) = \cos\sqrt{-x} \text{ si } x < 0\ .$$
   Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

7.4 Une équation différentielle (Banque CCP MP)

Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ de $\mathbb{R}$, avec $r > 0$.
   Déterminer la somme des séries entières obtenues.
2. Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ sur $]0;1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$?

7.5 Calculs de sommes de séries entières (Banque CCP MP)

Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivantes, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence :

1. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$.
2. $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ avec $\begin{cases} a_{2n} = 4^n \\ a_{2n+1} = 5^{n+1} \end{cases}$

7.6 Développements en série entière (Banque CCP MP)

1. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$ converge.

   On se propose de calculer la somme de cette série.

2. Donner le développement en série entière en 0 de $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.
   Remarque : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.
3. En déduire le développement en série entière en 0 de $x \longmapsto \operatorname{Arcsin} x$ ainsi que son rayon de convergence.
4. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$.

8 Formulaire

Fonction	DSE en 0	Rayon de convergence
exp	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$+\infty$
sin	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$
cos	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$
sh	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$
ch	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$
$x \mapsto (1+x)^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$	$\displaystyle 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\prod_{i=0}^{n-1} (\alpha - i) \right) \frac{x^n}{n!}$ $\displaystyle = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$	1
$x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	1
$x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$	1
$x \mapsto \ln(1+x)$	$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$	1
Arctan	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$	1