# Valeurs propres et vecteurs propres

**Exercice 1** Il suffit de montrer que si $\lambda$ est valeur propre de $AB$, alors c'est aussi une valeur propre de $BA$.
Soit $X$ non nul vérifiant $ABX = \lambda X$. Alors $BABX = \lambda BX$.
• Si $BX \neq 0$, $\lambda$ est bien valeur propre de $BA$.
• Si $BX = 0$, alors $X$ est dans le noyau de $B$, donc de $AB$, donc $\lambda = 0$.
Alors, $AB$ n'est pas inversible, donc (déterminant) $BA$ non plus. Donc $0 = \lambda$ est valeur propre de $BA$.

**Exercice 2** Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

$$\varphi(P) = \lambda P \Leftrightarrow XP'(X) = \lambda P(X).$$

• Analyse : Si cette équation possède une solution $P \neq 0$ alors en posant $n = \deg P$, on peut écrire $P = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ avec $a_n \neq 0$. L'équation $XP'(X) = \lambda P(X)$ donne

$$\forall\, k \in [\![0, n]\!],\ \lambda a_k = n a_k.$$

Sachant $a_n \neq 0$, on obtient $\lambda = n$ et $a_{n-1} = \ldots = a_1 = a_0 = 0$. Ainsi

$$\lambda \in \mathbb{N} \text{ et } P = a_\lambda X^\lambda$$

• Synthèse : Soit $\lambda \in \mathbb{N}$. On remarque tout de suite que $\varphi(X^n) = nX^n$, donc $\lambda$ est bien une valeur propre de $\varphi$.

• Conclusion : l'ensemble des valeurs propres de $\varphi$ est $\mathbb{N}$.

**Exercice 3** $\operatorname{rg} J = 1$ donc $\dim \operatorname{Ker} J = n - 1$. On remarque que $v_1 = (1, -1, 0, \cdots, 0)$, $v_2 = (0, 1, -1, 0, \cdots, 0)$, $v_{n-1} = (0, \cdots, 0, 1, -1)$ sont dans le noyau de $J$, et ils forment une famille libre car échelonnée. Ainsi, par raison de cardinal, ils forment une base de $\operatorname{Ker} J$.
Enfin, si $v_n = (1, \cdots, 1)$, alors $Jv_n = nv_n$, donc c'est un vecteur propre de $J$ pour la valeur propre 1. Ainsi $\dim E_n(J) \geqslant 1$. Mais les sous-espaces propres sont en somme directe et $\dim E_0(J) + \dim E_n(J) \geqslant n$. Donc nécessairement $\dim E_n(J) = 1$, et il ne peut y avoir d'autre valeur propre.
Finalement, $J$ a deux valeurs propres : 0 et $n$. Et $E_0(J) = \operatorname{Vect}(v_1, \ldots, v_{n-1})$, et $E_n(J) = \operatorname{Vect} v_n$.

**Exercice 4** En notant $m_1, \ldots, m_p$ les ordres de $A_1, \ldots, A_p$, nous avons

$$\chi_A = \begin{vmatrix} XI_{m_1} - A_1 & & & 0 \\ & XI_{m_2} - A_2 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & XI_{m_p} - A_p \end{vmatrix} = \prod_{j=1}^{p} \chi_{a_j}.$$

**Exercice 5**

**1)** Pour montrer cela, on développe $\chi_{\mathscr{C}(P)} = \begin{vmatrix} X & & & a_0 \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & X & a_{n-2} \\ & & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix}$ selon sa dernière colonne.
Si l'on note $M_i$ obtenue à partir de $\mathscr{C}(P)$ en supprimant la dernière colonne et la ligne $i+1$, il vient $\chi_{\mathscr{C}(P)} = \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^{n+i+1} a_i \det(M_i) + (X + a_{n-1}) \det M_{n-1}$.

On remarque alors que $M_i = \begin{pmatrix} X & & & & & & \\ -1 & \ddots & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & \\ & & -1 & X & & & \\ & & & & -1 & X & \\ & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & \ddots & X \\ & & & & & & & -1 \end{pmatrix}$

où la premier bloc contient $i$ lignes, et le second $n-1-i$ lignes. Ainsi $\det M_i = (-1)^{n-1-i} X^i$.
Alors $\chi_{\mathscr{C}(P)} = \sum_{i=0}^{n-2} a_i X^i + (X + a_{n-1}) X^{n-1} = P$

On pourrait également profiter de la présence des zéros et développer selon la première ligne ; le résultat s'obtiendrait aisément par récurrence.

**2)** Si $\lambda$ est racine de P, on note $\mu_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \end{pmatrix}$. On calcule :

$$\mathscr{C}(P)^\top \mu_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & \dots & \dots & a_{n+} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \\ -a_0 - a_1\lambda \quad \dots \quad -a_{n-1}\lambda^{n-1} \end{pmatrix} = \lambda\mu_\lambda$$

donc $\mu_\lambda$ est vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda$.
S'il y a $n$ valeurs propres deux à deux distinctes, il y a $n$ vecteurs propres $\mu_{\lambda_1}, \dots, \mu_{\lambda_n}$ formant une famille libre, donc une base de $\mathbb{R}^n$. Appelons $\mathscr{B}$ cette base, $\mathscr{C}$ la base canonique.

Alors $Q = \mathrm{Mat}\mathscr{C}(\mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} = \mathrm{Vdm}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, et

$\mathscr{C}(P) = QDQ^{-1}$.