Exercice 103 :

1) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad A_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{t^n}_{v'} \underbrace{e^{-t^2}}_{u} \, dt$

$$\underset{IPP}{=} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{t^{n+1} e^{-t^2}}{n+1} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{n+2}}{n+1} e^{-t^2} \, dt$$

$$= 0 + \frac{2}{n+1} A_{n+2}$$

donc $A_{n+2} = \frac{n+1}{2} A_n$ $(*)$

On a $A_0 = 1$ $\quad A_2 = \frac{1}{2} A_0$ $\quad A_4 = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} A_0$

On conjecture $\forall n \in \mathbb{N}$ " $A_{2n} = \frac{(2n)!}{n! \, 2^{2n}}$ "

Montrons cette propriété par récurrence :

Initialisation : $n = 0$ $\quad A_0 = 1 = \frac{1}{1 \times 1}$ OK.

Hérédité : Supposons la propriété vérifiée pour un rang $n \in \mathbb{N}$.

Avec $(*)$ $\quad A_{2(n+1)} = \frac{2n+1}{2} A_{2n}$

$$= \frac{(2n+1)!}{n! \, 2^{2n+1}} = \frac{(2n+2)!}{2 \times (n+1) \times n! \times 2^{2n+1}}$$

$$= \frac{(2n+2)!}{(n+1)! \, 2^{2n+2}}.$$

La propriété est héréditaire donc par principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad A_{2n} = \frac{(2n)!}{n! \, 2^{2n}}}$.

De plus : $A_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right]_{-\infty}^{+\infty}$

$= 0$.

Soit par récurrence évidente sur n avec (*)

on a $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad A_{2n+1} = 0}$

Il faut commencer par montrer que cette intégrale est bien définie !!!!

2) On pose $\forall P, Q \in \mathbb{R}[X]$ $f(P,Q) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$

- $\forall P, Q \in \mathbb{R}[X]$ $f(P,Q) = f(Q,P)$ symétrique
- $\forall P, P', Q \in \mathbb{R}[X]$ $f(\lambda P + P', Q) = \lambda f(P,Q) + f(P',Q)$
  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

f est linéaire / à sa $1^{ère}$ variable.

- $f(P,P) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)^2 e^{-t^2} dt$.

Or $\forall t \in \mathbb{R}$ $P(t)^2 e^{-t^2} \geq 0$ donc $f(P,P) \geq 0$.

- On a $\forall t \in \mathbb{R}$ $t \mapsto P(t)^2 e^{-t^2}$ positive et continue.

donc si $f(P,P) = 0 \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}$ $P(t)^2 e^{-t^2} = 0$

$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}$ $P(t) = 0$

donc $P = 0$

Avec ces 4 points f définit bien un produit scalaire.

3) On a $d(X^3, \mathbb{R}_2[X]) = \| X^3 - \underbrace{\pi}_{\text{projection} \perp \text{ sur } \mathbb{R}_2[X]}(X^3) \|$

déterminons π : On a $\mathbb{R}_2[X] = \mathrm{Vect}(1, X, X^2)$

Orthonormalisons avec Gram Schmidt cette base

Soit (e_1, e_2, e_3) une telle base

• $e_1 = \frac{1}{\|1\|}$ or $\|1\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = A_0 = 1$

$\boxed{e_1 = 1.}$

• $q_2 = x - \langle x | e_1 \rangle e_1$

or $\langle x | 1 \rangle = A_1 = 0$

donc $e_2 = \frac{x}{\|x\|}$ et $\|x\|^2 = A_2 = \frac{1}{2}$

donc $\boxed{e_2 = \sqrt{2}\, x.}$

• $q_3 = x^2 - \langle x^2 | \sqrt{2} x \rangle \sqrt{2} x - \langle x^2 | 1 \rangle$

or $\langle x^2 | \sqrt{2} x \rangle = \sqrt{2} A_3 = 0$
$\langle x^2 | 1 \rangle = A_2 = \frac{1}{2}$

donc $e_3 = \frac{x^2 - \frac{1}{2}}{\|x^2 - \frac{1}{2}\|}$

en dévellopant $\|x^2 - \frac{1}{2}\|^2 = A_4 - A_2 + \frac{1}{4} A_0$
$= \frac{1}{2}.$

donc $\boxed{e_3 = \sqrt{2}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)}$

(e_1, e_2, e_3) B.O.N. de $\mathbb{R}_2[x]$

On a $\pi(x^3) = \sum_{i=1}^{3} \langle x^3 | e_i \rangle e_i$

$= \langle x^3 | 1 \rangle + 2x \langle x^3 | x \rangle + 2\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) \langle x^3 | x^2 - \frac{1}{2} \rangle$

$$= \overset{0}{\overbrace{A_3}} + 2x A_4 + 2\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)\left(\overset{0}{\overbrace{A_5}} - \frac{1}{2}\overset{0}{\overbrace{A_3}}\right)$$

$$= \frac{3}{2} x$$

On a donc $d(x^3, \mathbb{R}_2[x]) = \| x^3 - \frac{3}{2} x \|$

Or $\| x^3 - \frac{3}{2} x \|^2 = A_6 - 3 A_4 + \frac{9}{4} A_2 = \frac{3}{4}$

d'où $\boxed{d(x^3, \mathbb{R}_2[x]) = \frac{\sqrt{3}}{2}}$