XII. Topologie des espaces vectoriels normés

2 février 2026

Table des matières

Programme officiel

d) Topologie d'un espace vectoriel normé	
Point intérieur à une partie.	
Ouvert d'un espace normé.	Une boule ouverte est un ouvert.
Stabilité par réunion quelconque, par intersection finie.	
Fermé d'un espace normé.	Caractérisation séquentielle. Une boule fermée, une sphère, sont des fermés.
Stabilité par réunion finie, par intersection quelconque.	
Point adhérent à une partie, adhérence.	L'adhérence est l'ensemble des points adhérents. Caractérisation séquentielle. Toute autre propriété de l'adhérence est hors programme.
Partie dense.	
Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.	
e) Limite et continuité en un point	
Limite d'une fonction en un point adhérent à son domaine de définition.	Caractérisation séquentielle.
Opérations algébriques sur les limites, composition.	
Continuité en un point.	Caractérisation séquentielle.
f) Continuité sur une partie	
Opérations algébriques, composition.	
Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.	Si f est une application continue de E dans $\mathbb{R}$ alors l'ensemble défini par $f(x) > 0$ est un ouvert et les ensembles définis par $f(x) = 0$ ou $f(x) \geqslant 0$ sont des fermés.
Fonction lipschitzienne. Toute fonction lipschitzienne est continue.	
g) Espaces vectoriels normés de dimension finie	
Équivalence des normes en dimension finie.	La démonstration est hors programme. La convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.
Théorème des bornes atteintes : toute fonction réelle continue sur une partie non vide fermée bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie est bornée et atteint ses bornes.	La démonstration est hors programme.
Continuité des applications linéaires, multilinéaires et polynomiales.	La notion de norme subordonnée est hors programme. Exemples du déterminant, du produit matriciel.

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $(E, \|.\|)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

1 Intérieur et adhérence

1.1 Rappels sur l'intersection et la réunion

Définition 1.1.1 (Intersection et réunion quelconques)**.**
Soit E et I deux ensembles quelqconques et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E.
On note $\bigcup_{i\in I} A_i$ la réunion de tous les A_i pour $i \in I$ et $\bigcap_{i\in I} A_i$ l'intersection de tous les A_i, qui sont des ensembles définis de la manière suivante :

$$\forall x \in E,\ x \in \bigcup_{i\in I} A_i \iff \exists i \in I,\ x \in A_i\ ;$$
$$\forall x \in E,\ x \in \bigcap_{i\in I} A_i \iff \forall i \in I,\ x \in A_i.$$

Exercice 1.1.2. 1. Que valent $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [n, n+1]$ et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} [n, n+1]$?

2. Quel est l'ensemble de définition de tan ?
3. Que vaut chacun des ensembles ci-dessous ?

a) $\bigcup_{\varepsilon\in]0,1]} [\varepsilon, 1]$ c) $\bigcap_{\varepsilon\in]0,1]} [0, \varepsilon]$ e) $\bigcap_{\varepsilon\in]0,1]}]0, \varepsilon]$

b) $\bigcup_{\varepsilon\in]0,1]}]\varepsilon, 1]$ d) $\bigcap_{\varepsilon\in]0,1]} [0, \varepsilon[$ f) $\bigcap_{\varepsilon\in]0,1]}]0, \varepsilon[$

Proposition 1.1.3.
Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles et B un ensemble.
1. Si, pour tout $i \in I$, $A_i \subset B$, alors $\bigcup_{i\in I} A_i \subset B$.
2. Si, pour tout $i \in I$, $B \subset A_i$, alors $B \subset \bigcap_{i\in I} A_i$.
3. Si $j \in I$, alors $\bigcap_{i\in I} A_i \subset A_j \subset \bigcup_{i\in I} A_i$.

Théorème 1.1.4 (Distributivité)**.**
La réunion et l'intersection sont distributives l'une sur l'autre. Plus précisément, soit E un ensemble, $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E et B une partie de E, alors

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i\in I} (A_i \cup B); \tag{1}$$
$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i\in I} (A_i \cap B). \tag{2}$$

Démonstration.
On donne la démonstration de l'égalité (2). Pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B &\Leftrightarrow x \in B \text{ et } x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \\ &\Leftrightarrow x \in B \text{ et } \exists i_0 \in I,\ x \in A_{i_0} \\ &\Leftrightarrow \exists i_0 \in I,\ x \in A_{i_0} \cap B \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} (A_i \cap B). \end{aligned}$$

□

1.2 Parties ouvertes

Définition 1.2.1 (Point intérieur)**.**
Soit A une partie de E, et $a \in A$. On dit que a est un ***point intérieur*** à A s'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\mathscr{B}(a,r) \subset A$.

Remarque 1.2.2.
L'ensemble des points intérieurs à A s'appelle l'***intérieur*** de A et est noté $\mathring{A}$, ou A°. On a toujours $\mathring{A} \subset A$.
On peut montrer que A est ouverte si et seulement si $\mathring{A} = A$.

Exemple 1.2.3.

1. $(]0,1])^\circ =]0,1[$
2. $([1,2[\cup[3,4])^\circ =]1,2[\cup]3,4[$
3. $([1,2[\times[3,4])^\circ =]1,2[\times]3,4[$
4. $(\mathscr{B}_f(a,r))^\circ = \mathscr{B}(a,r)$

Définition 1.2.4 (Parties ouvertes)**.**
Soit U une partie de E. On dit que U est un ***ouvert*** ou une ***partie ouverte*** de E si tout point de U est intérieur à U, *i.e.*

$$\forall x \in U,\ \exists r \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathscr{B}(x,r) \subset U.$$

Remarque 1.2.5.
L'intérêt d'un ouvert est qu'autour de chaque point, « il y a un peu de place ». Par exemple, la notion de dérivée en un point d'un intervalle I n'a de sens que si ce point est intérieur, car pour définir les taux d'accroissements autour de a, il faut pouvoir aller un peu à gauche et un peu à droite de a tout en restant dans I.

Exemple 1.2.6.

(i) $\varnothing$ et E sont des ouverts.

(ii) Les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ sont des ouverts.

Proposition 1.2.7 (Boules ouvertes)**.**
Les boules ouvertes de E de rayon strictement positif sont des ouverts.

Démonstration.
Soit $a \in E$, $R \in \mathbb{R}_+^*$ et $B = \mathscr{B}(a,R)$. Soit $x \in B$. Posons $r = R - \|x-a\|$ et montrons que $\mathscr{B}(x,r) \subset B$.
Soit $y \in \mathscr{B}(x,r)$. Alors $\|y-a\| \leqslant \|y-x\| + \|x-a\| < (R - \|x-a\|) + \|x-a\|$, d'où le résultat voulu. $\square$

Exercice 1.2.8.
Les sous-espaces vectoriels de E sont-il ouverts ?

Proposition 1.2.9 (Intersection et réunion d'ouverts)**.**

(i) Toute réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.

(ii) Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Démonstration.
Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties ouvertes de E.

(i) Soit $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$. Il existe donc $i_0 \in I$ tel que $x \in A_{i_0}$. Puisque A_{i_0} est ouvert, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\mathscr{B}(x,r) \subset A_{i_0}$. Ainsi $\mathscr{B}(x,r) \subset \bigcup_{i\in I} A_i$, donc $\bigcup_{i\in I} A_i$ est ouvert.

(ii) Dans le cas où I est fini, on peut toujours supposer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $I = [\![1,n]\!]$.
Soit $x \in \bigcap_{i=1}^n A_i$. Alors pour tout $i \in I$, $x \in A_i$, et il existe $r_i \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\mathscr{B}(x,r_i) \subset A_i$. L'ensemble $\{r_1,\dots,r_n\}$ étant fini, il admet un minimum, que l'on notera r'. Puisque r' est égal à l'un des r_i, il est strictement positif. Il est aussi inférieur à tous les r_i, donc pour tout $i \in I$, $\mathscr{B}(x,r') \subset \mathscr{B}(x,r_i) \subset A_i$. Finalement $\mathscr{B}(x,r') \subset \bigcap_{i=1}^n A_i$, et $\bigcap_{i=1}^n A_i$ est ouvert.

$\square$

1.3 Parties fermées

Définition 1.3.1 (Partie fermée)**.**
Une partie de E est un ***fermé*** ou ***une partie fermée*** de E si son complémentaire dans E est ouvert.

Remarque 1.3.2.
« Ouvert » n'est pas le contraire de « fermé » : en général une partie n'est ni l'un ni l'autre.

Proposition 1.3.3 (Boules fermées et sphères)**.**
Les boules fermées et les sphères de E sont des fermés.

Démonstration.
Soit $a \in E$ et $R \in \mathbb{R}_+$. Le complémentaire de la boule fermée de centre a et de rayon R est l'ensemble $C = \{x \in E,\ \|x-a\| > R\}$. Montrons qu'il s'agit d'un ouvert. Soit $y \in C$. Posons $r = \|y - A\| - R > 0$. Soit $t \in \mathscr{B}(y,r)$. Alors $\|t-a\| \geqslant \|y-a\| - \|t-y\| > \|y-a\| - r = R$. Ceci assure que $\mathscr{B}(y,r) \subset C$. Le complémentaire de $\mathscr{B}_f(a,R)$ est ouvert, donc $\mathscr{B}_f(a,R)$ est fermée.
Soit S la sphère centre a et de rayon R. Le complémentaire de S est égal à $C \cup \mathscr{B}(a,R)$. En tant que réunion de deux ouverts, c'est un ouvert et donc S est un fermé. ☐

Proposition 1.3.4 (Intersection et réunion de fermés)**.**
(i) Toute réunion finie de fermés est un fermé.
(ii) Toute intersection quelconque de fermés est un fermé.

Démonstration.
Le complémentaire d'une intersection quelconque est une réuion quelconque, et le complémentaire d'une réunion finie est une intersection finie. On utilise alors **1.2.9**. ☐

1.4 Point adhérent et adhérence

Définition 1.4.1 (Point adhérent)**.**
Soit A une partie de E et $x \in E$. On dit que x est un ***point adhérent*** ou ***point d'adhérence*** de A si pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, $A \cap \mathscr{B}(x,r) \neq \varnothing$.

Définition 1.4.2 (Adhérence)**.**
On appelle ***adhérence*** de A l'ensemble de ses points adhérents. On le note $\bar{A}$.

Remarque 1.4.3.
On a toujours $A \subset \bar{A}$.

Exemple 1.4.4.
1. $\overline{]0,1]} = [0,1]$
2. $\overline{[1,2[\cup]3,4]} = [1,2] \cup [3,4]$
3. $\overline{[1,2[\times]3,4]} = [1,2] \times [3,4]$
4. $\overline{\mathscr{B}(a,r)} = \mathscr{B}_f(a,r)$

$\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ ne peut pas vraiment être considéré comme l'adhérence de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, puisque justement $\bar{\mathbb{R}} \not\subset \mathbb{R}$. Et $\bar{\mathbb{R}}$ n'est pas un espace-vectoriel.

Proposition 1.4.5.
Soit $A \subset E$. Alors A est fermée si et seulement si $A = \bar{A}$.

Démonstration.
$$\begin{aligned}
A \text{ est fermé } &\Leftrightarrow A^C \text{ est ouvert}\\
&\Leftrightarrow \forall x \notin A,\ \exists r \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathscr{B}(x,r) \subset A^C\\
&\Leftrightarrow \forall x \notin A,\ \neg(\forall r \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathscr{B}(x,r) \cap A \neq \varnothing)\\
&\Leftrightarrow \forall x \notin A,\ x \notin \bar{A}\\
&\Leftrightarrow A^C \subset \bar{A}^C\\
&\Leftrightarrow A \supset \bar{A}\\
&\Leftrightarrow A = \bar{A} \quad \text{car on a toujours } A \subset \bar{A}.
\end{aligned}$$
☐

1.5 Caractérisation séquentielle des fermés et de l'adhérence

Les notions de fermés et de points adhérents peuvent se caractériser en utilisant des suites. C'est une méthode efficace pour démontrer des résultats sur les fermés.

Lemme 1.5.1.
Soit $A \subset E$ et $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite ℓ. Alors $\ell \in \bar{A}$.

Démonstration.
Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. D'après la définition de limite, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \in \mathscr{B}(\ell, r)$. Mais $u_{n_0} \in A$, donc $\mathscr{B}(\ell, r) \cap A \neq \varnothing$, et ce pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$. Cela signifie bien que $\ell \in \bar{A}$. □

Proposition 1.5.2 (Point adhérent et suites)**.**
Soit $A \subset E$ et $x \in E$. Alors $x \in \bar{A}$ si et seulement si x est la limite d'une suite de $A^{\mathbb{N}}$.

Démonstration.
Le sens indirect est le résultat du lemme précédent.
Pour le sens direct, soit $x \in \bar{A}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors la boule $\mathscr{B}\left(x, \frac{1}{n+1}\right)$ rencontre A, donc il existe un point $x_n \in \mathscr{B}\left(x, \frac{1}{n+1}\right) \cap A$. Nous avons ainsi construit une suite $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$, qui vérifie : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x_n - x\| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. Par conséquent $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$. □

Remarque 1.5.3.
On se souvient du cours de sup que la borne supérieure d'une partie réelle non vide et majorée A est la limite d'une suite d'éléments de A : la borne supérieure de A (et inférieure aussi si elle existe) est donc un point adhérent de A.

Exercice 1.5.4.
Quelle est l'adhérence de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$? Et celle de $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$?

Théorème 1.5.5 (Caractérisation séquentielle des fermés)**.**
Soit $A \subset E$. Alors A est fermée si et seulement si la limite de toute suite convergente d'éléments de A est dans A.

Démonstration.
Direct avec **1.4.5** et **1.5.2**. □

Exemple 1.5.6.
1. $A =]0, 1]$ n'est pas fermé car la suite $(1/n)$ est une suite convergente d'éléments de A, mais sa limite n'est pas dans A.
2. $B = [0, 1]$ est fermé car si (u_n) est une suite convergente d'éléments de B, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, donc par passage à la limite, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \in [0, 1]$.

Exercice 1.5.7.
Dans les deux questions suivantes, l'utilisation de la caractérisation séquentielle est la méthode la plus efficace. On pourra essayer d'y répondre en revenant à la définition pour comparer.
1. Montrer qu'un singleton est un fermé.
2. Montrer que l'ensemble des matrices triangulaires supérieures est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1.6 Normes équivalentes

Proposition 1.6.1.
Si N_1 et N_2 sont deux norme équivalentes sur E, et si $A \subset B$, alors A est ouverte (resp. fermée) pour N_1 si et seulement si elle l'est pour N_2.

2 Densité

Définition 2.0.1 (Partie dense)**.**
Une partie A de E est dite ***dense*** dans E lorsque $\bar{A} = E$.

Remarque 2.0.2.
Avec **1.6.1**, si deux normes sont équivalentes, les parties denses pour l'une sont également denses pour l'autre.

Proposition 2.0.3 (Caractérisations de la densité)**.**

(i) A est dense dans E si seulement si toute boule ouverte dans E contient un élément de A.

(ii) **Caractérisation séquentielle** : A est dense dans E si et seulement si tout élément de E est limite d'une suite d'éléments de A.

Démonstration.

(i) A est dense dans E si et seulement si $(\bar{A})^C = \varnothing$ si et seulement si pour tout $x \in E$, $x \notin \bar{A}$.

(ii) c'est l'écriture séquentielle de $\bar{A} = E$.

□

On rappelle ce résultat important de sup, ainsi qu'une esquisse de sa démonstration :

Théorème 2.0.4 (Densité de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$)**.**
$\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $a_n = \dfrac{\lfloor x.10^n \rfloor}{10^n}$. On montre alors que $(a_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ et $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$. Cette suite est celle des approximations décimales par défaut de x. Tout réel est donc limite d'une suite de rationnels.
De la même manière, on peut poser $b_n = \dfrac{\lfloor x.10^n\sqrt{2} \rfloor}{10^n\sqrt{2}}$. Alors $(b_n) \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})^{\mathbb{N}}$ et $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$. Tout réel est donc limite d'une suite d'irrationnels. □

3 Limite et continuité d'une fonction entre deux espaces vectoriels normés

Dans toute cette section, $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ sont deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, A est une partie non vide de E et f une fonction de A dans F.

3.1 Limite et continuité en un point

Définition 3.1.1 (Limite d'une fonction)**.**
Soit $a \in \bar{A}$. On dit que f admet une ***limite*** en a si et seulement si il existe $\ell \in F$ tel que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in A,\ \|x - a\|_E < \alpha \Longrightarrow \|f(x) - \ell\|_F < \varepsilon.$$

Remarque 3.1.2.
On peut réécrire cette définition avec des boules :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in A,\ x \in \mathscr{B}(a, \alpha) \Longrightarrow f(x) \in \mathscr{B}(\ell, \varepsilon).$$

Remarque 3.1.3.
L'existence et la valeur d'une limite pour f en a dépend des normes choisies sur E et F. Cependant, dans le cas de normes équivalentes, les résultats ne changent pas. Se reporter à l'exemple **3.1.9**.

Proposition 3.1.4 (Unicité de la limite)**.**
Si f a une limite en A, cette dernière est unique.

Démonstration.
Soit ℓ_1, ℓ_2 deux limites de f en a. Supposons-les différentes et notons $r = \|\ell_1 - \ell_2\|_F$. Posons $\varepsilon = \dfrac{r}{3}$, $B_1 = \mathscr{B}(\ell_1, \varepsilon)$ et $B_2\mathscr{B}(\ell_2, \varepsilon)$. Alors $B_1 \cap B_2 = \varnothing$, et pourtant il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que si $x \in A \cap \mathscr{B}(a, \alpha)$, $f(x)$ appartient à B_1 et à B_2 : c'est absurde. □

On utilisera les notations habituelles : $f \underset{a}{\to} \ell$, $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$, $\lim\limits_a f$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Remarque 3.1.5.
Si $a \in A$ et si f a une limite en a, cette limite ne peut être que $f(a)$. Les cas « intéressants » sont ceux où $a \in \bar{A}\backslash A$.

Proposition 3.1.6.

(i) $f \underset{a}{\rightarrow} \ell$ si et seulement si $\|f(x)-\ell\|_F \xrightarrow[x\to a]{} 0$.

(ii) Si $f \underset{a}{\rightarrow} \ell$, alors il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que f est bornée sur $A \cap \mathscr{B}(a,r)$.

Remarque 3.1.7.
Si $E=\mathbb{R}$, on peut enrichir les définitions précédentes au cas $a=\pm\infty$.
De même, si $F=\mathbb{R}$, on peut enrichir les définitions précédentes au cas $\ell=\pm\infty$.

Définition 3.1.8 (Continuité en un point)**.**
On dit que f est ***continue*** en $a \in A$ si $f \underset{a}{\rightarrow} f(a)$.

Exemple 3.1.9.
La continuité ou non dépend de la norme choisie.

Par exemple, soit $E=\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. On peut munir E de la norme $\|\|_\infty$ et de la norme N définie par $N(f)=\|f\|_\infty+\|f'\|_\infty$ (il est facile de vérifier que N est bien une norme sur E).
Considérons alors l'application D : $\left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f'(1). \end{array}\right.$
Alors, au sens de la norme N, $\lim\limits_{f\to 0} D(f)=0=D(0)$ puisque $N(f)<\varepsilon \Rightarrow \|f'\|_\infty<\varepsilon \Rightarrow |D(f)|<\varepsilon$, donc D est continue en 0 au sens de la norme N.
Mais au sens de la norme $\|\|_\infty, D$ n'est pas continue en 0 : en effet, si pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère f_n : $t \mapsto \dfrac{t^n}{n}$, on a $\|f_n\|_\infty=\dfrac{1}{n}$ donc (f_n) tend vers 0 au sens de la norme $\|\|_\infty$. Cependant, $D(f_n)=1$ ne tend pas vers $D(0)=0$.

3.2 Caractérisations séquentielles

Théorème 3.2.1 (Caractérisation séquentielle de la limite)**.**
Soit $a \in \bar{A}$ et $\ell \in F$. On a équivalence entre

(i) $f \underset{a}{\rightarrow} \ell$

(ii) pour toute suite (u_n) d'éléments de A tendant vers a, $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Démonstration.
(i) $\Rightarrow$ (ii) : soit (u_n) une suite (u_n) d'éléments de A tendant vers a. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que si $x \in A \cap \mathscr{B}(a,\alpha)$, $f(x) \in \mathscr{B}(\ell,\varepsilon)$. Mais $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant n_0$, $u_n \in \mathscr{B}(a,\alpha)$. En compsant tout cela, si $n \geqslant n_0$, $u_n \in \mathscr{B}(a,\alpha)$ d'où $f(u_n) \in \mathscr{B}(\ell,\varepsilon)$. On peut en conclure que $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
(ii) $\Rightarrow$ (i) : montrons-le par contraposition. Supposons que f ne tend pas vers ℓ en a, et construisons une suite (u_n) d'éléments de A, qui tend vers a mais telle que $f(u_n)$ ne tend pas vers ℓ.
Si f ne tend pas vers ℓ en a, cela signifie qu'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $x \in A$ tel que $\|x-a\|_E<\alpha$ et $\|f(x)-\ell\|_F>\varepsilon$. Appliquons cela à $\alpha=\dfrac{1}{n}$, et notons u_n un élément de A tel que $\|u_n-a\|_E<\alpha$ et $\|f(u_n)-\ell\|_F>\varepsilon$. Nous avons alors construit une suite (u_n) d'éléments de A. Avec la première propriété de cette suite, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, et avec la seconde, $f(u_n)$ ne tend pas vers ℓ. $\square$

On en déduit directement la version « continuité en un point » :

Théorème 3.2.2 (Caractérisation séquentielle de la continuité)**.**
Soit $a \in A$ et $\ell \in F$. On a équivalence entre

(i) f est continue en a

(ii) pour toute suite (u_n) d'éléments de A tendant vers a, $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$.

Ces résultats sont souvent utilisés sous la forme suivante :

Corollaire 3.2.3.
S'il existe deux suites (u_n) et (v_n) tendant vers a et telles que $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ ont des limites différentes (ou si l'une des deux n'a pas de limite), alors f n'a pas de limite en a.

Remarque 3.2.4.
On se souviendra de l'exemple de sup fondamental : $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0.
Une autre application classique est de montrer qu'une fonction réelle périodique non constante n'a pas de limite en $+\infty$.

3.3 Opérations sur les limites

Théorème 3.3.1 (Combinaison linéaires)**.**
Soit f et g deux fonctions de A dans F, $a \in \bar{A}$ et $\ell, \ell' \in F$ telles que $f \underset{a}{\to} \ell$ et $g \underset{a}{\to} \ell'$.
Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
Alors $\lambda f + \mu g \underset{a}{\to} \lambda \ell + \mu \ell'$.

Théorème 3.3.2 (Multiplication par une fonction scalaire)**.**
Soit f une fonction de A dans F et φ une fonction de A dans $\mathbb{K}$.
Soit $a \in \bar{A}$, $\ell \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $f \underset{a}{\to} \ell$ et $\varphi \underset{a}{\to} \lambda$.
Alors $\varphi f \underset{a}{\to} \lambda \ell$.

Théorème 3.3.3 (Composition)**.**
Soit B une partie de F et G un troisième $\mathbb{K}$-evn.
Soit f une fonction de A dans B, g une fonction de B dans G.
Soit $b \in F$ et $\ell \in G$ tels que $f \underset{a}{\to} b$ et $g \underset{b}{\to} \ell$ (on a même assurer $b \in \bar{B}$).
Alors $g \circ f \underset{a}{\to} \ell$.

Tous ces résultats se démontrent comme leurs analogues de sup concernant les fonctions réelles.

3.4 Continuité sur une partie

Définition 3.4.1 (Fonctions continues sur A)**.**
On dit que f est ***continue sur*** A si elle est continue en tout point de A.
On notera $\mathscr{C}(A, F)$ ou $\mathscr{C}^0(A, F)$ l'ensemble des fonctions continues de A dans F.

Les résultats **3.3.1**, **3.3.2** et **3.3.3** s'adaptent, en remplaçant « continue en a » par « continue sur A ». En particulier on en déduit

Corollaire 3.4.2.
$\mathscr{C}(A, F)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{F}(A, F), +, .)$.

3.5 Fonctions lipschitziennes

Définition 3.5.1 (Fonction lipschitzienne)**.**
On dit que f est ***lipschitzienne*** s'il existe $K \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tous $x, y \in A$, $\|f(x) - f(y)\|_F \leqslant K \|x - y\|_E$.
Une fois K fixé, on dira alors que f est K***-lipschitzienne***.

Remarque 3.5.2.

1. Le coefficient K n'est pas unique. Si K convient, tous les réels supérieurs aussi.

2. Le fait d'être lipschitzienne dépend de la norme. Dans le cas de deux normes équivalentes, une fonction lipschitzienne pour l'une est lipschitzienne pour l'autre, mais le coefficient K n'est pas forcément le même.

Proposition 3.5.3.
Si f est lipschitzienne sur A, elle est continue sur A.

Démonstration.
Supposons f K-lipschitzienne. Soit $a \in A$. Alors pour tout $x \in A$, $\|f(x) - f(a)\|_F \leqslant \|x - a\|_E$. Or $\|x - a\|_E \xrightarrow[x \to a]{} 0$, donc par encadrement $\|f(x) - f(a)\|_F \xrightarrow[x \to a]{} 0$. Donc $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$. □

Remarque 3.5.4.
La réciproque est fausse, par exemple la fonction $\sqrt{.}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exemple 3.5.5.
Grâce à la « partie de gauche » de l'inégalité triangulaire, l'application norme $\|.\|_E : E \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \|x\|_E$ est 1-lipschitzienne. Elle est donc continue.

Exercice 3.5.6.
Montrer que la composée de deux fonctions lipschitziennes est lipschitzienne.

4 Limite et continuité en dimension finie

4.1 Utilisation des fonctions coordonnées

Nous nous plaçons dans cette section seulement dans le cas où F est de dimension finie.
On notera alors $\mathscr{B} = (v_1, \dots, v_d)$ une base de F, où $d = \dim F$.

Définition 4.1.1 (Fonctions coordonnées)**.**
Si $f : A \to F$, pour tout $x \in A$ on note $(f_1(x), \dots, f_d(x))$ les coordonnées de $f(x)$ dans $\mathscr{B}$: $f(x) = \sum_{k=1}^{d} f_k(x) v_k$.
Pour tout $k \in [\![1, d]\!]$ on peut donc définir la fonction $f_k : A \to \mathbb{K}$, $x \mapsto f_k(x)$.
Les fonctions $f_1, \dots, f_d$ sont appelées ***fonctions coordonnées*** de f.

Exemple 4.1.2.
Si $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x - y \\ x + 2y \\ -x \end{pmatrix} \end{array}$, alors $f_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x - y$, $f_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x + 2y$, $f_3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto -x$.

Dans la suite on notera $f_1, \dots, f_d$ les coordonnées de f, et on donnera les coordonnées des vecteurs de F dans la base $\mathscr{B}$.

Théorème 4.1.3 (Limites et coordonnées)**.**
Soit $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_d) \in F$ et $a \in \bar{A}$. Alors

$$f \underset{a}{\to} \ell \iff \forall k \in [\![1, d]\!],\ f_k \underset{a}{\to} \ell_k.$$

Démonstration.
En dimension finie toutes les normes sont équivalentes, donc nous pouvons utiliser n'importe quelle norme sur F. Utilisons par exemple la norme 1 – mais les normes 2

ou $+\infty$ conviendraient aussi tout à fait.

$$\begin{aligned} f \underset{a}{\to} \ell \Leftrightarrow & \ \|f(x)-\ell\|_1 \xrightarrow[x\to a]{} 0 \\ \Leftrightarrow & \ \sum_{k=1}^{d} |f_k(x)-\ell_k| \xrightarrow[x\to a]{} 0 \\ \Leftrightarrow & \ \forall\, k \in [\![1,d]\!],\ |f_k(x)-\ell_k| \xrightarrow[x\to a]{} 0 \\ \Leftrightarrow & \ \forall\, k \in [\![1,d]\!],\ f_k \underset{a}{\to} \ell_k. \end{aligned}$$

□

Corollaire 4.1.4 (Continuité et coordonnées)**.**
f est continue en $a \in A$ (resp. sur A) si et seulement si toutes ses fonctions coordonnées le sont.

4.2 Continuité des applications linéaires, multilinéaires et polynomiales

Théorème 4.2.1 (Continuité des applications linéaires)**.**
Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ – sans supposer ici que E ou F est de dimension finie.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) u est continue ;

(ii) u est continue en 0 ;

(iii) Il existe un réel $k \geqslant 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|_F \leqslant k\|x\|_E$;

(iv) u est lipschitzienne.

Démonstration.
(i) $\Rightarrow$ (ii) : immédiat.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Supposons u linéaire et continue en 0. Cela s'écrit :

$$\exists\, \alpha > 0 \text{ tq } \|x\|_E \leqslant \alpha \Longrightarrow \|u(x)\|_F \leqslant 1.$$

Pour tout x non nul de E, on a alors $\left\|\dfrac{\alpha}{\|x\|_E}x\right\|_E = \alpha$, donc $\left\|u\left(\dfrac{\alpha}{\|x\|_E}x\right)\right\|_F = \left\|\dfrac{\alpha}{\|x\|_E}u(x)\right\|_F \leqslant 1$ puis $\|u(x)\|_F \leqslant \dfrac{1}{\alpha}\|x\|_E$, et cette égalité reste vraie pour $x = 0$.
(iii) $\Rightarrow$ (iv) : Si $\|u(x)\|_F \leqslant k\|x\|_E$ pour tout x, on a alors, pour tout $(x,y) \in E^2$,

$$\|u(x)-u(y)\|_F = \|u(x-y)\|_F \leqslant k\|x-y\|_E,$$

donc u est k-lipschitzienne.
(iv) $\Rightarrow$ (i) : immédiat. □

Exercice 4.2.2.
Soit $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{K})$ et $u : E \to \mathbb{K}$ définie par $u(f) = f(1) - f(0)$.
Étudier la continuité de cette forme linéaire pour les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sur E.

En dimension finie les choses sont plus simples :

Théorème 4.2.3 (Continuité des applications linéaires en dimension finie)**.**
Soit E **de dimension finie**, alors toute application linéaire de $\mathscr{L}(E,F)$ est lipschitzienne, et en particulier elle est continue.

Démonstration.
Toutes les normes sur E étant équivalentes, choisissons la norme 1.
Soit $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base de E, où $n = \dim E$. Soit $x \in E$, que l'on écrit $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$, et soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$.
Notons $M = \max_{1\leqslant k\leqslant n} \|u(e_k)\|_F$. Alors

$$\begin{aligned} \|u(x)\|_F = \left\|\sum_{k=1}^{n} x_k u(e_k)\right\|_F & \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k|\,\|u(e_k)\|_F \\ & \leqslant M \sum_{k=1}^{n} |x_k| \\ & \leqslant M\,\|x\|_1 \end{aligned}$$

donc u est continue grâce au théorème **4.2.1**. □

Remarque 4.2.4.
L'hypothèse de dimension finie est indispensable comme nous l'avons vu en **4.2.2**.

Exemple 4.2.5.
Les applications suivantes sont continues :

1. tr : $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $M \mapsto \mathrm{tr}\,(M)$.
2. $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $M \mapsto AM$ et $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $M \mapsto MA$, où $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice fixée.
3. $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $M \mapsto M^\top$.

Définition 4.2.6 (Fonction polynomiale)**.**
Soit $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$. On dit que f est une ***fonction polynomiale*** si elle est une combinaison linéaire de produits de puissances des coordonnées des variables.

Exemple 4.2.7.
$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto 3x^2y - 5xyz + z^3$ est une fonction polynomiale.

Théorème 4.2.8 (Continuité des fonctions polynomiales)**.**
Toute fonction polynomiale est continue.

Corollaire 4.2.9.
Toute fonction de $\mathbb{K}^n$ dans un evn F de dimension finie dont les fonctions coordonnées sont polynomiales, est continue.

Rappel 4.2.10 (Applications multilinéaires)**.**
Soit $E_1, \dots, E_n$ et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et u une application de $E_1 \times \ldots \times E_n$ dans F. On dit que u est ***multilinéaire*** si elle est linéaire en chacune de ses variables.

Plus précisément, pour $k \in [\![1, n]\!]$, fixons $x_i \in E_i$ pour tous les i de $[\![1, n]\!]$ sauf k, et posons u_k l'application $E_k \to F$, $x \mapsto u(x_1, \dots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \dots, x_n)$. Alors u est multilinéaire si toutes les u_k sont linéaires.

Théorème 4.2.11 (Continuité des applications multilinéaires)**.**
Si $E_1, \dots, E_n$ et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, tels que tous les E_i sont de dimension finie, alors toute application multilinéaire de $E_1 \times \ldots \times E_n$ dans F est continue.

Exemple 4.2.12.
Les applications suivantes sont continues :

1. $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto u.v$.
2. $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $(A, B) \mapsto AB$.
3. det : $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $M \mapsto \det M$.

4.3 Théorème des bornes atteintes

Rappel 4.3.1.
Toute fonction réelle continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.
Ou encore : l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Généralisons ce résultat :

Théorème 4.3.2 (des bornes atteintes)**.**
Soit E de dimension finie et f une fonction de E dans $\mathbb{R}$.
Si A est une partie non vide, fermée et bornée de E et si f est continue sur A, alors f est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration.
Elle est hors-programme. □

Remarque 4.3.3.
En dimension finie, une partie fermée et bornée s'appelle un ***compact***.

5 Continuité, ouverts et fermés

Définition 5.0.1 (Ouverts et fermés relatifs)**.**

(i) On appelle ***ouvert relatif*** de A toute partie de A égale à l'intersection de A et d'un ouvert de E.
Plus précisément, U est un ouvert relatif de A si pour tout $x \in U$ il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\mathscr{B}(x,r) \cap A \subset U$.

(ii) On appelle ***fermé relatif*** de A toute partie de A dont le complémentaire dans A est un ouvert relatif de A.

Théorème 5.0.2 (Image réciproque d'un ouvert)**.**
L'image réciproque d'un ouvert par une fonction continue est un ouvert.
Plus précisément, si $f\ : A \to F$ et continue et si U est un ouvert de F, alors $f^{-1}(U)$ est un ouvert relatif de A.

Démonstration.
Supposons f continue et considérons U un ouvert de F. Pour tout $a \in f^{-1}(U)$, $f(a) \in U$. Or U est ouvert et donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathscr{B}(f(a), \varepsilon) \subset U$. Par continuité de f en a, il existe $\alpha > 0$ vérifiant

$$\forall\, x \in A,\ \|x-a\|_E < \alpha \Rightarrow \|f(x)-f(a)\|_F < \varepsilon$$

et donc

$$\forall\, x \in \mathscr{B}(a,\alpha) \cap A,\ f(x) \in \mathscr{B}(f(a),\varepsilon) \subset U$$

et ainsi

$$\mathscr{B}(a,\alpha) \cap A \subset f^{-1}(U)$$

Par suite $f^{-1}(U)$ est un ouvert relatif à A. □

Lemme 5.0.3.
Soit X et Y deux ensembles et φ une application de X dans Y. Soit B une partie de Y. Alors $\varphi^{-1}\left(B^C\right) = \left(\varphi^{-1}(B)\right)^C$.

Démonstration.
Soit $x \in X$.

$$\begin{aligned} x \in \varphi^{-1}\left(B^C\right) &\Leftrightarrow \varphi(x) \in B^C \\ &\Leftrightarrow \varphi(x) \notin B \\ &\Leftrightarrow x \notin \varphi^{-1}(B) \\ &\Leftrightarrow x \in \left(\varphi^{-1}(B)\right). \end{aligned}$$

□

Corollaire 5.0.4 (Image réciproque d'un fermé)**.**
L'image réciproque d'un fermé par une fonction continue est un fermé relatif.

Corollaire 5.0.5.
Soit $f\ : E \to \mathbb{R}$ continue.

1. Les ensembles
   (i) $\{x \in E,\ f(x) < 0\}$,
   (ii) $\{x \in E,\ f(x) > 0\}$

   sont des ouverts de E.
2. Les ensembles
   (i) $\{x \in E,\ f(x) = 0\}$,
   (ii) $\{x \in E,\ f(x) \leqslant 0\}$,
   (iii) $\{x \in E,\ f(x) \geqslant 0\}$

   sont des fermés de E.

Démonstration.

1. $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$, $\{x \in E,\ f(x) < 0\} = f^{-1}(\mathbb{R}_-^*)$, $\{x \in E,\ f(x) > 0\} = f^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$, et f est continue.
2. $\{0\}$, $\mathbb{R}_-$ et $\mathbb{R}_+$ sont des fermés de $\mathbb{R}$, $\{x \in E,\ f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$, $\{x \in E,\ f(x) \leqslant 0\} = f^{-1}(R_-)$, $\{x \in E,\ f(x) \geqslant 0\} = f^{-1}(\mathbb{R}_+)$, et f est continue.

□

Exercice 5.0.6.
Montrer que $\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

6 Exercices classiques

6.1 Un peu de topologie dans $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$

1. Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|.\|_\infty$ et $F = \left\{f \in E,\ \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x > 0\right\}$. Proposer deux méthodes pour montrer que F est un ouvert de E.
2. On note $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ que l'on munit des deux normes en posant :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} (|f(x)|) \text{ et } \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$$

On considère $A = \{f \in E, f(0) = 0\}$ et $g : x \mapsto 1$.

   a) Est-ce que g est adhérent à A pour la norme $\|\cdot\|_\infty$?
   b) Est-ce que g est adhérent à A pour la norme $\|\cdot\|_1$?

6.2 Deux exercices : densité des matrices inversibles et distance à un fermé borné

1. Montrer que $\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Soit E un evn de dimension finie et A est une partie non vide, fermée et bornée de E. Soit $x \in E$. Montrer que $\inf_{y\in A} \|x-y\|$ existe et qu'il existe $a \in A$ tel que $\|x-a\| = \inf_{y\in A} \|x-y\|$.
Ce réel est appelé ***distance de** x **à** A* et noté $\mathrm{d}(x,A)$.

6.3 Densité et continuité

1. Trouver toutes les fonctions g continues sur $\mathbb{R}$, vérifiant $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x+y) = g(x) + g(y)$.
2. Même question pour $g(x+y) = g(x)g(y)$.

6.4 Norme subordonnée

Soit u une application linéaire continue de E dans F, deux espaces vectoriels normés non nuls. On définit :

$$\begin{aligned} M_1 &= \sup\left\{\frac{\|u(x)\|}{\|x\|},\ x \in E\backslash\{0\}\right\} \\ M_2 &= \sup\{\|u(x)\|,\ x \in E \text{ t.q. } \|x\| = 1\} \\ M_3 &= \inf\{k \geqslant 0 \text{ t.q. } \forall\, x \in E,\ \|u(x)\| \leqslant k\|x\|\} \end{aligned}$$

1. Justifier l'existence de ces nombres.
2. Montrer que $M_1 = M_2 = M_3$.

Remarque : On note en général $|||u|||$ ce nombre, et on peut montrer que $|||.|||$ définit sur $\mathscr{L}(E,F)$ une norme. Cette norme s'appelle la ***norme subordonnée*** à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$, et elle satisfait :

$$\forall\, x \in E,\ \|u(x)\|_F \leqslant |||u|||\,\|x\|_E.$$