

Topologie des evns

I. Un peu de topologie dans $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$

- 1) a) Soit $f \in F$. Alors la boule ouverte de centre f , de rayon $\frac{1}{2} \int_0^1 f$ (qui est bien strictement positif) est incluse dans F . En effet, si $g \in B\left(f, \frac{1}{2} \int_0^1 f\right)$ alors $\|g - f\|_\infty < \frac{1}{2} \int_0^1 f$ donc $f - \frac{1}{2} \int_0^1 f \leq g \leq f + \frac{1}{2} \int_0^1 f$.

Donc par croissance de l'intégrale, $\int_0^1 g \geq \int_0^1 f - \frac{1}{2} \int_0^1 f = \frac{1}{2} \int_0^1 f > 0$ donc $g \in F$.

- b) La fonction $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_0^1 f$ vérifie : pour tout $f, g \in$

E , $|\varphi(f) - \varphi(g)| \leq \int_0^1 \|f - g\|_\infty = \|f - g\|_\infty$. Elle est donc 1-lipschitzienne, et ainsi elle est continue.

Or $F = \varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ et \mathbb{R}_+^* est un ouvert, donc F aussi.

- 2) a) Soit $f \in A$. Alors $|f(0) - g(0)| = 1$ donc $\|f - g\|_\infty \geq 1$. Donc $\mathcal{B}(g, \frac{1}{2}) \cap A = \emptyset$: g n'est pas adhérent à A pour $\|\cdot\|_\infty$.

- b) Soit f_n telle que $f_n(x) = 1$ si $x > \frac{1}{n}$ et $f_n(x) = nx$ si $x \in [0, \frac{1}{n}]$. Alors

$f_n \in A$ et $\|g - f_n\|_1 = \int_0^{1/n} (1 - nx) dx = \frac{1}{2n}$. Donc g est limite d'une suite d'éléments de A : c'est un point adhérent à A pour $\|\cdot\|_1$.

II. Deux exercices : densité des matrices inversibles et distance à un fermé borné

- 1) $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert car image réciproque de l'ouvert \mathbb{R}^* par l'application continue \det .

L'application $\lambda \mapsto \det(A - \lambda I_n)$ est polynomiale non nulle en λ donc possède un nombre fini de racines.

Fixons $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. Si l'on considère la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors pour tout $\alpha \in]-r, r[$, $\|\alpha I_n\|_\infty = |\alpha|$ donc $\alpha I_n \in \mathcal{B}(0, r)$, et ensuite $A - \alpha I_n \in \mathcal{B}(A, r)$. Or avec le point précédent, il existe une infinité de $\alpha \in]-r, r[$ tels que $\det(A - \alpha I_n) \neq 0$, donc il existe une infinité de matrices de $\mathcal{B}(A, r)$ qui sont inversibles.

Par suite : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall r > 0, \mathcal{B}(A, r) \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, d'où la densité de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

- 2) Soit l'application $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto \|x - y\|$.

Soit $y, z \in A$. Alors

$$\begin{aligned} |\varphi(y) - \varphi(z)| &= \left| \|y - x\| - \|x - z\| \right| \\ &\leq \|(y - x) + (x - z)\| \quad \text{par inégalité triangulaire} \\ &\leq \|y - z\|. \end{aligned}$$

La fonction φ est ainsi 1-lipschitzienne, et donc continue.

Puisque A est fermée et bornée et que E est de dimension finie, φ est bornée et atteint ses bornes. En particulier elle a un minimum, ce qui répond aux deux questions.

III. Densité et continuité

- 1) Analyse : Soit g solution.

• $g(0) = g(0 + 0) = g(0) + g(0)$, donc $g(0) = 0$.

• Soit $y \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $(H_n) : g(ny) = ng(y)$.

(H_0) a été démontrée.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que (H_n) est vraie. Alors $g((n+1)y) = g(ny) + g(y) = ng(y) + g(y) = (n+1)g(y)$, et ainsi par récurrence (H_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, nous avons montré, en posant $y = 1$, que

$$\forall x \in \mathbb{N}, g(x) = xg(1).$$

• Soit $n \in \mathbb{N}, 0 = g(0) = g(n - n) = g(n) + g(-n)$ et donc $g(-n) = -g(n) = -ng(1)$, ce qui prouve que

$$\forall x \in \mathbb{Z}, g(x) = xg(1).$$

• Soit $q \in \mathbb{Q}$. Il existe $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $q = \frac{a}{b}$. Alors $bg(q) = g(bq) = g(a) = ag(1)$ donc $g(q) = \frac{a}{b}g(1)$ donc

$$\forall x \in \mathbb{Q}, g(x) = xg(1).$$

• Soit $x \in \mathbb{R}$. Par densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} , il existe une suite de rationnels (q_n) qui converge vers x . D'une part $g(q_n) = q_n g(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} xg(1)$ et d'autre part, par continuité de g , $g(q_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g(x)$. Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = xg(1).$$

IV. Norme subordonnée

Par conséquent il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g = \lambda \text{id}_{\mathbb{R}}$.

Synthèse : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, il est immédiat que $\lambda \text{id}_{\mathbb{R}}$ est solution.

L'ensemble des solutions est donc $\{\lambda \text{id}_{\mathbb{R}}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

2) Analyse : Soit g solution.

S'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = 0$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = g(x + t - x) = g(x)g(t - x) = 0$ donc $g = 0$ – et la fonction nulle est bien solution.

Sinon, g ne s'annule pas, et comme elle est continue, elle est de signe constant. Si $g < 0$, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $g(x + y) < 0$ et $g(x)g(y) > 0$, ce qui est absurde.

Donc $g > 0$.

Alors pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $\ln \circ g(x + y) = \ln(g(x)g(y)) = \ln \circ g(x) + \ln \circ g(y)$. Grâce à la première question, il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\ln \circ g = \lambda \text{id}_{\mathbb{R}}$, donc $g = \exp \circ (\lambda \text{id}_{\mathbb{R}})$.

Synthèse : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, il est immédiat que $\exp \circ (\lambda \text{id}_{\mathbb{R}})$ est solution, ainsi que la fonction nulle.

L'ensemble des solutions est donc $\{\exp \circ (\lambda \text{id}_{\mathbb{R}}), \lambda \in \mathbb{R}\} \cup \{0\}$.

1) u étant continue, il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout x , $\|u(x)\| \leq k \|x\|$. Donc $\left\{ \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}, x \in E \setminus \{0\} \right\}$ est majoré. Comme il est non vide, M_1 existe.

De plus, $\left\{ \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}, x \in E \setminus \{0\} \right\} = \{\|u(x/\|x\|)\|, x \in E \setminus \{0\}\} = \{\|u(x)\|, x \in E \text{ t.q. } \|x\| = 1\}$, donc M_2 existe, et vaut d'ailleurs M_1 . Le dernier ensemble est inclus dans \mathbb{R}_+ , non vide car u est continue, et minoré par 0, donc M_3 existe.

2) Nous avons déjà remarqué que $M_1 = M_2$.

M_1 majore $\left\{ \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}, x \in E \setminus \{0\} \right\}$ donc pour tout x , $\|u(x)\| \leq M_1 \|x\|$.

Donc $M_1 \in \{k \geq 0 \text{ t.q. } \forall x \in E, \|u(x)\| \leq k \|x\|\}$, donc $M_3 \leq M_1$.

Réciproquement, soit $k \in \{k \geq 0 \text{ t.q. } \forall x \in E, \|u(x)\| \leq k \|x\|\}$. Donc si $x \neq 0$, $\frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \leq k$. Ainsi k est un majorant de $\left\{ \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}, x \in E \setminus \{0\} \right\}$, et donc $M_1 \leq M_3$.

Finalement $M_1 = M_2 = M_3$.