Feuille d'exercice n° 08 : **Réduction des endomorphismes – corrigé**

Exercice 8 On exhibe une base de n^2 vecteurs propres :

- I_n (valeur propre $n-1$) ;
- toutes les $E_{i,j}$ avec $i \neq j$ (valeur propre -1 car matrices de trace nulle) – il y en a n^2-n, qui forment une famille nommée $\mathscr{F}_1$;
- toutes les $E_{1,1}-E_{i,i}$ avec $i \in [\![2,n]\!]$ (valeur propre -1 car matrices de trace nulle) – il y en a $n-1$, qui forment une famille nommée $\mathscr{F}_2$.

Cela nous fait donc n^2 vecteurs propres. Montrons qu'ils forment une famille libre.
Les familles $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ sont clairement libres.
Notons $\mathscr{F}_3$ la famille constituée de $\mathscr{F}_2$ à laquelle on rajoute I_n. Cette famille est libre car $\mathscr{F}_2 \subset E_{-1}$ et $\mathrm{I}_n \in E_{n-1}$, et les sous-espaces propres sont en somme directe.
Notons $\mathscr{F}_4 = (E_{ii})_{i\in[\![1,n]\!]}$. Alors $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}(\mathscr{F}_1) \oplus \mathrm{Vect}(\mathscr{F}_4)$. Or $\mathscr{F}_3$ est un famille de $\mathrm{Vect}(\mathscr{F}_4)$, donc la concaténation de $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_3$ est une famille libre, et finalement c'est donc une base de vecteurs propres de u, qui est diagonalisable.

Exercice 9 (▲) Soit $P = \prod_i (X-\lambda_i)$ un polynôme annulateur de A^2-2A, scindé à racines simples.
Alors $R = \prod_i (X^2-2X-\lambda_i)$ est un polynôme annulateur de A.
Or $X^2-2X-\lambda_i$ a pour discriminant $4+4\lambda_i$ et pour racines $1\pm \mathrm{d}_i$, avec $\delta_i \in \mathbb{C}$ tel que $\delta_i^2 = 1+\lambda_i$, et elles sont distinctes à condition qu'aucun λ_i ne vaille -1.
Par l'absurde, supposons qu'il existe $x \neq 0$ tel que $A^2x-2Ax=-x$, i.e. $(A-\mathrm{I})^2x=0$. Alors $\mathrm{Ker}(A-\mathrm{I}) \neq \{0\}$, ce qui est contraire à l'hypothèse de départ.
On remarque enfin que puisque les λ_i sont 2 à 2 distinctes, alors les $1\pm\delta_i$ aussi.
Ainsi A admet un polynôme scindé à racines simples : elle est diagonalisable.

Exercice 12 A solution si et seulement si $X(X-j)\left(X-j^2\right)$ annule A si et seulement si A est diagonalisable et $\mathrm{Sp}\,(A) \subset \{0,j,j^2\}$. L'ensemble des solutions est $\left\{P\mathrm{diag}(a,b,c)P^{-1}\ ,\ P \in \mathscr{GL}_3(\mathbb{C})\ ,\ a,b,c \in \{0,j,j^2\}\right\}$.

$X(X-j)\left(X-j^2\right)$ annule A donc A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et puisque $A \in M_n(\mathbb{R})$, j et j^2 ont même multiplicité en tant que valeur propre de A. Puisque le rang de A est la somme de ces deux multiplicités, il est pair.

Exercice 14

1) On calcule le polynôme caractéristique de A. On a

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ 1 & X-2 & -1 \\ m-2 & 2-m & X-m \end{vmatrix} \underset{C_1+C_2\to C_1}{=} \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ X-1 & X-2 & -1 \\ 0 & 2-m & X-m \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_2-L_1\to L_2}{=} \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ 0 & X-2 & 0 \\ 0 & 2-m & X-m \end{vmatrix} = (X-1)\begin{vmatrix} X-2 & 0 \\ 2-m & X-m \end{vmatrix}$$

$$= (X-1)(X-2)(X-m).$$

Les valeurs propres de f sont donc 1,2 et m. En particulier, si $m=1$ ou 2, f n'admet que deux valeurs propres.

2) • Si $m \neq 1$ et $m \neq 2$, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui admet trois valeurs propres distinctes : f est donc diagonalisable.
• Si $m=1$, le polynôme caractéristique de f est $(X-1)^2(X-2)$. Dans ce cas, 2 est valeur propre de multiplicité 1 de f et 1 est valeur

propre de multiplicite 2. L'endomorphisme f est donc diagonalisable si et seulement si la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est égale à 2 . Cherchons ce sous-espace (rappelons qu'on a $m=1$). Pour $u=(x,y,z)$, on a

$$f(u)=u \Longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} z &= 0 \\ -x+y+z &= 0 \\ x-y &= 0 \end{aligned}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} x &= x \\ y &= x \\ z &= 0 \end{aligned}\right.$$

Une base de $\ker(f-I)$ est donc donnée par le vecteur $(1,1,0)$. L'espace est de dimension $1\neq 2$: la matrice n'est pas diagonalisable.

• Supposons maintenant $m=2$. Cette fois, c'est 1 qui est valeur propre de f de multiplicité 1 et 2 qui est valeur propre de multiplicité 2. On doit donc calculer la dimension de $\mathrm{Ker}(f-2I)$. On a, pour $u=(x,y,z)$:

$$f(u)=2u \Longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} -x+z &= 0 \\ -x+z &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} x &= x \\ y &= y \\ z &= x \end{aligned}\right.$$

Une base de $\mathrm{Ker}(f-2I)$ est donnée par la famille des deux vecteurs $(1,0,1)$ et $(0,1,0)$. En particulier, $\mathrm{Ker}(f-2I)$ est de dimension 2 et f est diagonalisable.

3) On va commencer par diagonaliser f. On a déjà cherché une base du sous-espace propre correspondant à la valeur propre 2. Pour la valeur propre 1 (attention, on travaille cette fois avec $m=2$), on a, pour $u=(x,y,z)$:

$$f(u)=u \Longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} z &= 0 \\ -x+y+z &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x &=& x \\ y &=& x \\ z &=& 0 \end{array}\right.$$

Une base de $\ker(f-I)$ est donc donnée par le vecteur $(1,1,0)$. Notons $u=(1,1,0)$, $v=(0,1,0)$ et $w=(1,0,1)$. Alors (u,v,w) est une base de vecteurs propres de f et dans cette base, la matrice de f est

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Notons P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base (u,v,w). La matrice P est donnée par

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on a $A=PDP^{-1}$. On doit calculer P^{-1}. On trouve

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De $A=PDP^{-1}$, on déduit facilement par récurrence $A^k=PD^kP^{-1}$. Mais puisque D est diagonale, on a

$$D^k=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$

Le calcul précédent donne finalement

$$A^k=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^k-1 \\ 1-2^k & 2^k & 2^k-1 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$

Exercice 17 $\chi_A(X)=-(X+1)(X-1)^2$.
$E_{-1}=\mathrm{Vect}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, E_1=\mathrm{Vect}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice A n'est pas diagonalisable mais on peut la rendre semblable à la matrice

$$T=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On prend $C_1 = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, C_2 = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On détermine C_3 tel que $AC_3 = C_3 + C_2.C_3 =^t \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ convient. Pour $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $P^{-1}AP = T$.