PSI* – récolte oraux 2025

25 juin 2025

Table des matières

Planche 1 (ENS)

Énoncé :

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.
On définit la variation totale de f sur $[0,1]$ par :

$$V(f) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{0\leqslant t_0\leqslant t_1\leqslant \ldots\leqslant t_n\leqslant 1} \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

On appelle $BV([0,1])$ l'ensemble des fonctions à variation bornée, c'est-à-dire les fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telles que $V(f) < +\infty$.

1) Montrer que les fonctions monotones et lipschitziennes sont à variation bornée.

2) Les fonctions à variation bornée sont-elles bornées ?

3) Trouver une fonction continue qui n'est pas à variation bornée.

4) Montrer que $(BV, \|\cdot\|)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé avec

$$\|f\| = |f(0)| + V(f)$$

5) Montrer que le produit de deux fonctions à variation bornée est à variation bornée.

6) Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g : [0,1] \to [0,1]$ deux fonctions à variation bornée.

- **a)** Si g est monotone, montrer que $f \circ g \in BV$.
- **b)** Si f est monotone, $f \circ g \in BV$?

Indications

— Poser $f(x) = x\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$

— Poser $t_0 = 0$, $t_1 = x$

— Utiliser que $f \in BV \Rightarrow f$ est bornée

— $g(t_k)$ est une subdivision, $h \in [0,1]$

Corrigé :

1) **a)** Supposons f croissante (le cas décroissant est analogue). Soit

$$0 \leq t_0 \leq \cdots \leq t_n \leq 1$$

une subdivision. Alors :

$$\sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| = f(t_n) - f(t_0) \leq f(1) - f(0)$$

donc $f \in BV$.

b) Si f est K-lipschitzienne, alors :

$$\sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| \leq K \sum_{k=1}^{n} |t_k - t_{k-1}| \leq K$$

donc $f \in BV$.

2) Oui. Soit f non bornée. Soit $t_0 = 0$.
Soit $M \in \mathbb{R}$ et $t_1 \in [0,1]$ tel que $|f(t_1)| > M + |f(0)|$.
Alors :

$$\sum_{k=1}^{1} |f(t_k) - f(t_{k-1})| = |f(t_1) - f(t_0)| > M$$

donc $f \notin BV$.

3) Soit $f : x \mapsto x \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t_k = \frac{1}{k+1}$. Alors :

$$\sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k} \to +\infty$$

et pourtant f est continue sur $[0,1]$. Donc $f \notin BV$.

4)
- $0 \in BV$, évident.
- $\lambda f \in BV$ si $f \in BV$, facile.
- Si $f, g \in BV$, alors $f + g \in BV$ avec :

$$V(f+g) \leq V(f) + V(g)$$

Ainsi, BV est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}([0,1], \mathbb{R})$.

- $\|f\| \geq 0$, évident.
- $\|\lambda f\| = |\lambda|.\|f\|$, facile.
- Si $f, g \in BV$, nous avons vu que $V(f+g) \leq V(f) + V(g)$, ce qui implique facilement que $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$.
- Si $\|f\| = 0$, alors $f(0) = V(f) = 0$. Soit $x \in [0,1]$, posons $t_0 = 0, t_1 = x$. Alors :

$$0 \leq \sum_{k=1}^{1} |f(t_k) - f(t_{k-1})| \leq V(f) = 0$$

donc $|f(x) - f(0)| = 0$ et $f(x) = f(0)$. Ainsi f est nulle.

Donc $\|\cdot\|$ est une norme.

5) Soient $f, g \in BV$, M un majorant de $|f|$, et N un majorant de $|g|$.
Alors pour toute subdivision $0 \leq t_0 \leq \cdots \leq t_n \leq 1$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |(fg)(t_k) - (fg)(t_{k-1})| &= \sum_{k=1}^{n} |f(t_k)(g(t_k) - g(t_{k-1})) + g(t_{k-1})(f(t_k) - f(t_{k-1}))| \\ &\leq M \sum_{k=1}^{n} |g(t_k) - g(t_{k-1})| + N \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| \\ &= MV(g) + NV(f)\end{aligned}$$

donc $fg \in BV$.

6) **a)** Dans le cas où g est croissante, si $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq 1$ alors $0 \leq g(t_0) \leq g(t_1) \leq \cdots \leq g(t_n) \leq 1$ donc :

$$\sum_{k=1}^{n} |f(g(t_k)) - f(g(t_{k-1}))| \leq V(f)$$

ainsi $f \circ g \in BV$.
Si g est décroissante, $1 \geq g(t_0) \leq g(t_1) \geq \cdots \geq g(t_n) \geq 0$ mais le raisonnement est le même.

b) Non.
Posons :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } x > \frac{1}{2} \end{cases}, \quad g(x) = \frac{1}{2}\left(1 + x^3 \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $t_k = \frac{1}{k+1}$.
On remarque alors que :

$$f(g(t_k)) = \begin{cases} 0 & \text{si } g(t_k) < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } g(t_k) > \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{donc } |f(g(t_k)) - f(g(t_{k-1}))| = 1.$$

Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n} |f(g(t_k)) - f(g(t_{k-1}))| = \sum_{k=1}^{n} 1 = n \to +\infty \quad \text{quand } n \to \infty$$

Donc $f \circ g \notin BV$.

Planche 2 (CCINP)

Énoncé :
Exercice 1 à préparer en 20 minutes : Soit A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - 5A + 6\mathrm{I}_n = 0$.

1) Donner 2 conditions nécessaire et suffisantes de diagonalisabilité pour une matrice carré.

2) Montrer que A est diagonalisable et que ses valeurs propres sont dans $\{2, 3\}$. On note D la matrice diagonale associée.

3) Pour M dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $f(M) = MD + DM$.

a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que f est diagonalisable [*indication :* découper M et D en matrices par blocs].

Exercice 2 passage en 10 min sans préparation :

1) Chercher a, b, c tels que pour tout $t \in \mathbb{R}\backslash\{0, -1, 1\}$, $\dfrac{1}{t(t^2-1)} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{t-1} + \dfrac{c}{t+1}$.

2) Résoudre l'équation différentielle $t(t^2 - 1)y' + 2y = t^2$ sur $]1, +\infty[$ et sur $]0, 1[$.

Corrigé :
Exercice 1 :

1) Question de cours :

- — admet une base de vecteurs propres ;
- — les sous-espaces propres sont supplémentaires ;
- — le polynôme caractéristique est scindé et la multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre associé.

2) Un polynôme annulateur de A est $P = X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3)$.
Il est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable.
Les valeurs propres de A sont parmi les racines de tout polynôme annulateur, donc elles sont dans $\{2,3\}$.

3) **a)** Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $MD + DM \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Et si $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f(M+N) = MD + \lambda ND + DM + \lambda DN = f(M) + \lambda f(N)$$

donc $f \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$.

b) Si $D = 2\mathrm{I}_n$ ou $3\mathrm{I}_n$, $f = 4\mathrm{id}$ ou $6\mathrm{id}$, donc elle est évidemment diagonalisable.
Sinon il existe $p \in [\![1, n-1]\!]$ et $q = n - p$ tel que $\dim E_2(A) = p$ et $\dim E_3(A) = q$.

Traitons le cas où

$$D = \begin{pmatrix} 2\mathrm{I}_p & 0 \\ 0 & 3\mathrm{I}_q \end{pmatrix}$$

Alors en notant $M = \begin{pmatrix} K & L \\ N & Q \end{pmatrix}$ avec $K \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ et $Q \in \mathscr{M}_q(\mathbb{R})$, nous avons

$$f(M) = \begin{pmatrix} 2K & 3L \\ 2N & 3Q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2K & 2L \\ 3N & 3Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4K & 5L \\ 5N & 6Q \end{pmatrix}$$

Soit $\mathscr{B} = (E_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

- — Si $i, j \leqslant p$, $f(E_{ij}) = 4E_{ij}$;
- — Si $i \leqslant p < j$ ou $j \leqslant p < i$, $f(E_{ij}) = 5E_{ij}$;
- — Si $p < i, j$ alors $f(E_{ij}) = 6E_{ij}$.

C'est une base de vecteurs propres, donc f est diagonalisable.
Dans le cas général, notons $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$,
$I_1 = \{i \in [\![1,n]\!], \lambda_i = 2\}$, $I_2 = \{i \in [\![1,n]\!], \lambda_i = 3\}$
Alors $I_1 \sqcup I_2 = [\![1,n]\!]$.

- — Si $i, j \in I_1$, $f(E_{ij}) = 4E_{ij}$ (car $E_{ij}D = 2E_{ij}$ et $DE_{ij} = 2E_{ij}$)
- — Si $i, j \in I_2$, $f(E_{ij}) = 6E_{ij}$ (car $E_{ij}D = 3E_{ij}$ et $DE_{ij} = 3E_{ij}$)
- — Sinon $f(E_{ij}) = 5E_{ij}$ (car $D = 2$, $E_{ij}D = 2E_{ij}$ et $DE_{ij} = 3E_{ij}$ ou l'inverse)

et la conclusion est la même.

Exercice 2 :

1) Après développement et identification on trouve

$$\frac{1}{t(t^2-1)} = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1}\right).$$

2) Si $I =]1, +\infty[$ et $J =]0, 1[$
Sur I et J :

$$t(t^2-1)y' + 2ty = t \quad \text{équivaut à} \quad y' + \frac{2}{t(t^2-1)}y = \frac{1}{t^2-1}$$

Une primitive de $t \mapsto \dfrac{2}{t(t^2-1)}$ est : $t \mapsto -2\ln|t| + \ln|t-1| + \ln|t+1|$.
Donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène sur I est :

$$\left\{ \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto K\dfrac{t^2}{t^2-1} \end{array} \quad , \quad K \in \mathbb{R} \right\}$$

De même, sur J on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} J \to \mathbb{R} \\ t \mapsto K\dfrac{t^2}{t^2-1} \end{array} \quad , \quad K \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sur I et J, on trouve une solution particulière avec la même méthode et les mêmes calculs.
Soit $y \in \mathscr{C}^1(I \text{ ou } J)$, il existe $K \in \mathscr{C}^1(I \text{ ou } J)$ tel que :

$$y : t \mapsto K(t) \cdot \frac{t^2}{t^2-1}$$

Alors y est solution de (E) sur I ou J ssi :

$$\forall t \in I \text{ ou } J, \quad K'(t) \cdot \frac{t^2}{t^2-1} = \frac{t}{t^2-1}$$

ssi :

$$\forall t \in I \text{ ou } J, \quad K'(t) = \frac{1}{t}$$

Donc :

$$t \mapsto \ln(t) \cdot \frac{t^2}{t^2-1}$$

est une solution particulière.
Finalement, l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\left\{ \begin{array}{l} I \text{ ou } J \to \mathbb{R} \\ t \mapsto (K + \ln(t)) \cdot \dfrac{t^2}{t^2-1} \end{array} \quad , \quad K \in \mathbb{R} \right\}$$