Ex 65

1) Soit $n \geq 2$, Posons $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{x+n}$, $]-1;+\infty[\to \mathbb{R}$, C^∞ sur $]-1;+\infty[$

et $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1;+\infty[$, $f_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{n+k}}{(x+n)^{k+1}} k!$

donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $|f_n^{(k)}(x)| = \frac{k!}{(x+n)^{k+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{k!}{n^{k+1}} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

donc $\sum_{n\geq 2} f_n^{(k)}$ CN donc CU

et $\forall x$ $(|f_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc CSSA : $\sum_{n\geq 2} f_n$ CV

donc th de ~~transfère~~ transfert de classe C^∞ :

→ f est C^∞ sur $]-1;+\infty[$

→ $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1;+\infty[$, $f^{(k)}(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+k} k!}{(x+n)^{k+1}}$

2) inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \frac{|x|^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!}$$

qui est x ? $x \in$?

$$\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \left\| \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{j+n+1}(n+1)!}{(x+j)^{n+2}} \right\|_\infty$$

$$\leq |x|^{n+1} \sum_{j=2}^{+\infty} \left| \cancel{\frac{1}{j^{n+2}}} \right|$$

pas si $x<0$.

? $\leq |x|^{n+1} \frac{1}{|j|^2 - |j|}$

si $|x| < 1$: $\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc f est DSE sur $]-1;1[$

$$\leq \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{1}{(j-1)^{n+2}} = C^{te}$$