Devoir surveillé n° 4 – v1

Durée : 4 heures, calculatrices et documents interdits

CCINP PSI 2012 - 2nde épreuve

Notations.

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et par $\mathbb{C}$ celui des nombres complexes. Etant donné un entier naturel $n \geqslant 2$, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées à n lignes (resp. des matrices colonnes à n lignes), à coefficients dans $\mathbb{K}$. La notation $A = (a_{i,j})$ signifie que $a_{i,j}$ est le coefficient de la ligne i et de la colonne j de A. On note $A^\top$ la transposée d'une matrice A.
Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\det(A)$ le déterminant de A, $\mathrm{tr}\,(A)$ la trace de A ; on note $\mathrm{Sp}_{\,\mathbb{C}}(A)$ le spectre complexe de A et si $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\,\mathbb{C}}(A)$, on note $E_\lambda(A)$ le sous-espace propre des vecteurs $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ qui vérifient $AX = \lambda X$. Soit I_n la matrice diagonale de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1.
On note $[\![1, n]\!]$ l'ensemble des entiers naturels k tels que $1 \leqslant k \leqslant n$.
Pour tout nombre complexe z, on note $|z|$ le module de z.

On dit qu'une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie la propriété $(\mathcal{ST} > 0)$ lorsque

(i) $\forall\,(i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ a_{i,j} > 0\,;$

(ii) $\forall\, i \in [\![1, n]\!],\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1.$

Objectifs.

Dans ce problème, on considère les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient la propriété $(\mathcal{ST} > 0)$.
Dans la première partie, on démontre une caractérisation géométrique d'une classe de matrices vérifiant la propriété $(\mathcal{ST} > 0)$.
Dans la deuxième partie, on fait établir des propriétés sur les éléments propres des matrices vérifiant la propriété $(\mathcal{ST} > 0)$.

Partie 1.

Dans cette partie, on suppose $n = 3$. etant donné un nombre complexe z, on note $M(z)$ le point du plan complexe d'affixe $z = x + iy$, c'est à dire le point de coordonnées (x, y). On considère le triangle du plan complexe dont les sommets sont les points $P(1)$, $Q(j)$,

$R(j^2)$, où $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$. On note T l'intérieur de ce triangle, bords non compris. Soit D le disque ouvert du plan complexe de centre O (origine du repère) et de rayon 1, c'est à dire l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z| < 1$.

1) Dessiner les ensembles T et D sur un même dessin. En notant x et y l'abscisse et l'ordonnée d'un point du plan complexe, donner les équations cartésiennes des côtés du triangle PQR. Déterminer les équations cartésiennes des droites (PQ), (QR) et (RP). Montrer qu'un point $M(x+iy)$ appartient à T si et seulement si x et y vérifient les trois inégalités :

$$2x+1>0,\ x-\sqrt{3}y-1<0,\ x+\sqrt{3}y-1<0$$

2) Dans cette question, on considère une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui vérifie la propriété $(\mathcal{ST} > 0)$.

a) Montrer que 1 est valeur propre de A.

Dans la suite de la question **2)**, on suppose que les autres valeurs propres de A sont des nombres complexes conjugués distincts λ et $\overline{\lambda}$, avec $0 < |\lambda| < 1$. On note $\lambda = a + ib$.

b) Exprimer $\operatorname{tr}(A)$ et $\operatorname{tr}(A^2)$ en fonction de λ et $\overline{\lambda}$, puis en fonction de a et b.

c) Montrer les inégalités $\operatorname{tr}(A) > 0$ et $\operatorname{tr}(A^2) > a_{1,1}^2 + a_{2,2}^2 + a_{3,3}^3$. En déduire l'inégalité $(\operatorname{tr}(A))^2 < 3\operatorname{tr}(A^2)$ (on pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux vecteurs $u = (a_{1,1}, a_{2,2}, a_{3,3})$ et $v = (1,1,1)$ de $\mathbb{R}^3$).

d) Déduire de **2)b)** et **2)c)** les inégalités

$$2a+1>0 \quad \text{et} \quad (a-\sqrt{3}b-1)(a+\sqrt{3}b-1)>0$$

e) Déduire des questions précédentes que le point $M(\lambda)$ appartient à T (on pourra considérer les régions de D délimitées par les côtés du triangle PQR).

3) Dans cette question, on note $\lambda = r\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $0 < r < 1$ et $0 < \theta < \pi$ et on suppose que le point $M(\lambda)$ appartient à T. On note

$$\alpha = \frac{1+2r\cos(\theta)}{3},\ \beta = \frac{1+2r\cos(\theta+\frac{2\pi}{3})}{3},\ \gamma = \frac{1-2r\cos(\theta+\frac{\pi}{3})}{3}$$

a) Montrer les égalités $\alpha = \dfrac{1+\lambda+\overline{\lambda}}{3}$, $\beta = \dfrac{1+j\lambda+j^2\overline{\lambda}}{3}$, $\gamma = \dfrac{1+j^2\lambda+j\overline{\lambda}}{3}$.

Dans la suite de la question **3)**, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix}$.

b) Montrer que la matrice A vérifie la propriété $(\mathcal{ST} > 0)$.

c) Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer J^2 et J^3. Déterminer les valeurs propres, réelles ou complexes, de la matrice J.

d) Exprimer la matrice A en fonction de I_3, J et J^2. Déterminer un polynôme P de degré $\leqslant 2$ tel que $A = P(J)$. En déduire que $1, \lambda$ et $\overline{\lambda}$ sont les valeurs propres de A.

Partie 2.

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie la propriété $(\mathcal{ST} > 0)$.

4) Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le vecteur colonne dont tous les coefficients valent 1.
Calculer AU et en déduire que 1 est valeur propre de A.

5) Précision sur $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

a) Soit une matrice $B = (b_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\det(B) = 0$ et un vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $X \neq 0$, tel que $BX = 0$. Soit $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_k| = \max\{|x_i|,\ i \in [\![1, n]\!]\}$. Justifier l'inégalité

$$|b_{k,k}| \leqslant \sum_{j \neq k} |b_{k,j}|$$

b) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. En appliquant **5)a)** à la matrice $B = A - \lambda I_n$, montrer que $|a_{k,k} - \lambda| \leqslant 1 - a_{k,k}$, où k est l'entier défini en **5)a)**. En déduire $|\lambda| \leqslant 1$.

c) On suppose que $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ vérifie $|\lambda| = 1$ et on note $\lambda = \mathrm{e}^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Déduire de l'inégalité $|a_{k,k} - \mathrm{e}^{i\theta}| \leqslant 1 - a_{k,k}$ de **5)b)** que $\cos(\theta) = 1$, puis en déduire λ.

6) Dimension de $E_1(A)$.

a) Montrer que $1 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A^\top)$. En comparant le rang de $A - I_n$ et celui de $A^\top - I_n$, montrer que les sous-espaces $E_1(A)$ et $E_1(A^\top)$ ont même dimension.

b) Soit $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $V \neq 0$, tel que $A^\top V = V$. Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $|v_i| \leqslant \sum_{j \in [\![1,n]\!]} a_{j,i} |v_j|$. En calculant $\sum_{i \in [\![1,n]\!]} |v_i|$, montrer que toutes ces inégalités sont en fait des égalités.

On note $|V| = \begin{pmatrix} |v_1| \\ \vdots \\ |v_n| \end{pmatrix}$. Montrer que $A^\top |V| = |V|$, puis que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $|v_i| > 0$.

c) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ des matrices non nulles de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ qui appartiennent à $E_1(A^\top)$. En considérant la matrice $X - \frac{x_1}{y_1} Y$, déterminer la dimension de $E_1(A^\top)$. Justifier qu'il existe un vecteur unique $\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$ qui engendre $E_1(A^\top)$, tel que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on ait $\omega_i > 0$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$.

Montrer que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}\omega_j = \omega_i$.

d) Bilan des propriétés spectrales de A et de $A^\top$.
Citer les propriétés des vecteurs propres et des sous-espaces propres de A et de $A^\top$ qui ont été démontrées dans les questions précédentes de la deuxième partie.

7) A l'aide la matrice $\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$ définie en **6)c)**, on considère l'application N définie de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall\, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ N(X) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i |x_i|$$

Montrer que N est une norme sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Montrer que pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ on a $N(AX) \leqslant N(X)$. Retrouver le résultat de **5)b)** : pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, $|\lambda| \leqslant 1$.

8) Ordre de multiplicité de la valeur propre 1 de A.

À l'aide la matrice colonne $\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$, on considère la forme linéaire Φ : $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ définie par

$$\forall\, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \Phi(X) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i$$

On note $\mathrm{Ker}(\Phi)$ le noyau de Φ.

a) Montrer que pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ on a $\Phi(AX) = \Phi(X)$.

b) Justifier que $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) = E_1(A) \oplus \mathrm{Ker}(\Phi)$.

c) Soit $X \in E_\lambda(A)$ avec $\lambda \neq 1$. Montrer que $X \in \mathrm{Ker}(\Phi)$.

d) En utilisant les résultats précédents, déterminer l'ordre de multiplicité de la la valeur propre 1 de la matrice A.

— FIN —