

### III – Rappels et compléments d’algèbre linéaire, 2ème partie

#### I. Expression et éléments caractéristiques d’un projecteur ou d’une symétrie

- 1) On calcule  $p^2$  : on trouve  $p^2 = p$ , donc  $p$  est un projecteur.

On trouve  $\text{Im } f = \text{Vect}((1, 1, 1), (-1, 3, 1))$  et  $\text{Ker } f = \text{Vect}(1, 1, -1)$ .

- 2) On pose  $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ , et  $e_1, e_2$  et  $e_3$  les vecteurs de la base canonique.

Alors  $e_1 = 2f_1 + f_2 - 2f_3$ ,  $e_2 = -f_1 + f_3$  et  $e_3 = f_1 + f_2 - 2f_3$ . Donc si

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (2x - y + z)f_1 + (x + z)f_2 + (-2x + y - 2z)f_3, \text{ donc}$$

$$s \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (2x - y + z)f_1 - (x + z)f_2 - (-2x + y - 2z)f_3 = \begin{pmatrix} 3x - 2y + 2z \\ -y \\ -4x + 2y - 3z \end{pmatrix}.$$

#### II. Endomorphismes de rang 1

- 1) Puisque  $A$  est de rang 1, elle comporte au moins une colonne non nulle. Appelons-la  $C$ . Toutes les autres colonnes de  $A$  de lui sont alors proportionnelles, i.e. si les colonnes de  $A$  sont  $C_1, \dots, C_n$ , alors pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , il existe  $\lambda_j$  tel que  $C_j = \lambda_j C$ . Posons alors la matrice ligne  $L = (\lambda_1 \dots \lambda_n)$ . Alors  $A = CL$ .

- 2) On remarque que  $A^2 = CLCL$ . Posons  $\alpha = LC$ , qui est une matrice  $1 \times 1$ , que l’on assimile donc à un scalaire. D’où  $A^2 = \alpha CL = \alpha A$ . On peut alors conjecturer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A^n = \alpha^{n-1} A$ , ce qui se démontre facilement par récurrence.

- 3) En revenant aux notations de la première question, si l’on note  $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ , alors le coefficient  $(i, i)$  de  $A$  est  $\lambda_i c_i$ , donc  $\text{tr } A = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i$ . Or la formule du produit de deux matrices assure que  $\alpha = LC = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i$ , d’où le résultat.

- 4)  $(1 + \text{tr } A)(A + I_n) - (1 + \text{tr } A)I_n = (1 + \text{tr } A)A = A + A^2 = A(A + I_n)$ . Donc  $(A + I_n)^2 = (A + I_n) + A(A + I_n) = (2 + \text{tr } A)(A + I_n) - (1 + \text{tr } A)I_n$ . Un polynôme annulateur de  $A + I_n$  est donc  $X^2 - (2 + \text{tr } A)X + (1 + \text{tr } A)$ .

Si  $\text{tr } A \neq 1$ , alors  $I_n = \frac{1}{1 + \text{tr } A}(A + I_n)(A + I_n(\text{tr } A - 1))$ .  $A + I_n$  est donc inversible et  $(A + I_n)^{-1} = A + I_n(\text{tr } A - 1)$ .

Si  $\text{tr } A = -1$ , il existe une matrice  $B = A + I_n(\text{tr } A - 1)$  telle que  $AB = 0$ . Mais  $\text{tr } B = -1 - 2n \neq 0$  donc  $B \neq 0$ , donc  $A$  n’est pas inversible.

### III. Matrice à diagonale dominante

$A$  est inversible si et seulement si  $\text{Ker}(A) = \{0\}$ . Soit  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \text{Ker } A$ ,

supposons que  $X \neq 0$ . Il existe donc  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $|x_j| \neq 0$ . On peut donc prendre  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $|x_i|$  est maximal. Notamment,  $|x_i| > 0$ . Considérons la  $i^{\text{e}}$  ligne de  $AX$  :

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j = 0,$$

donc

$$a_{i,i}x_i = -\sum_{j \neq i} a_{i,j}x_j.$$

Par l'inégalité triangulaire,

$$|a_{i,i}| \cdot |x_i| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \cdot |x_j|.$$

Par maximalité de  $|x_i|$ , on a alors

$$|a_{i,i}| \cdot |x_i| \leq |x_i| \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

Comme  $|x_i| > 0$ , on a

$$|a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|,$$

ce qui est absurde.

Ainsi,  $A$  est inversible.

### IV. Une caractérisation de la trace

**Analyse** : soit  $f$  une telle fonction. Soit  $i, j, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

Notons  $\lambda = f(E_{1,1})$ . Puisque  $E_{i,1}E_{1,i} = E_{i,i}$  et  $E_{1,i}E_{i,1} = E_{1,1}$ , il vient  $f(E_{i,i}) = \lambda = \lambda \text{tr } E_{i,i}$ . Si  $i \neq j$ , alors  $E_{i,k}E_{k,j} = E_{i,j}$  et  $E_{k,j}E_{i,k} = 0$ , donc  $f(E_{i,j}) = 0 = \lambda \text{tr } E_{i,j}$ .

Finalement, pour tout  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $f(E_{i,j}) = \lambda \text{tr } E_{i,j}$ . Puisque les  $E_{i,j}$  forment une base de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , il vient  $f = \lambda \text{tr}$ .

**Synthèse** : on sait que pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\lambda \text{tr}$  vérifie la propriété étudiée.

**Conclusion** : l'ensemble des formes linéaires  $f$  sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  vérifiant  $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $f(AB) = f(BA)$  est

$$\{\lambda \text{tr}, \lambda \in \mathbb{K}\}.$$