

Suites de fonctions

I. Limite uniforme d'un produit

- 1) Puisque $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, à partir d'un certain rang n_0 nous avons $\|f_n - f\|_\infty \leq 1$.
 En particulier $\|f_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty + 1$, donc si f est bornée, les f_n le sont aussi, au moins à partir du rang n_0 .
 Et de même, s'il existe un rang n_1 à partir duquel les f_n sont bornées, alors si n_2 est un entier fixé tel que $n_2 \geq \max(n_0, n_1)$ nous avons $\|f\|_\infty \leq \|f_{n_2}\|_\infty + 1$, et f est bien bornée.
- 2) Grâce à la question précédente, les f_n sont bornées à partir d'un certain rang, donc

$$\begin{aligned} \|f_n g_n - f g\|_\infty &= \|f_n(g_n - g) + (f_n - f)g\|_\infty \\ &\leq \|f_n\|_\infty \|g_n - g\|_\infty + \|g\|_\infty \|f_n - f\|_\infty \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

par somme de produits d'une suite bornée par une suite tendant vers 0.

- 3) $\|f_n h - f h\|_\infty \leq \|h\|_\infty \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, en tant que produit d'une suite bornée par une suite tendant vers 0.
- 4) Considérons par exemple sur $[0, 1[$ les fonctions $f_n : x \mapsto x^n(1 - x)$ et $h : x \mapsto \frac{1}{1 - x}$. La suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle. Une étude de fonction assure que $|f_n|$ atteint son maximum en $\frac{n}{n+1}$, ce maximum vaut $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \times \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{en} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc (f_n) converge bien uniformément vers 0 sur $[0, 1[$.
 Mais $h f_n : x \mapsto x^n$, qui converge simplement vers 0, mais pas uniformément, car $\sup_{[0,1]} h f_n = 1$.

II. Étude du type de convergence (banque CCP MP)

- 1) Soit $g_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ et $g : X \rightarrow \mathbb{C}$.
 Dire que (g_n) converge uniformément vers g sur X signifie que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \forall x \in X, |g_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon.$$

Ou encore, (g_n) converge uniformément vers g sur $X \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{x \in X} |g_n(x) - g(x)| \right) = 0$.

- 2) a) On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \cos(\sqrt{n}x)$.
 Soit $x \in \mathbb{R}$.
 Si $x = 0$, alors $f_n(0) = \frac{n+2}{n+1}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = 1$.
 Si $x \neq 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.
 En effet, $|f_n(x)| \underset{+ \infty}{\sim} e^{-nx^2} |\cos(\sqrt{n}x)|$ et $0 \leq e^{-nx^2} |\cos(\sqrt{n}x)| \leq e^{-nx^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
 On en déduit que (f_n) converge simplement sur \mathbb{R} vers la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0, +\infty[$ et f non continue en 0 donc (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $[0, +\infty[$.
- c) Soit $a > 0$.
 On a : $\forall x \in [a, +\infty[$, $|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| \leq \frac{n+2}{n+1} e^{-na^2}$ (majoration indépendante de x).
 Donc $\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{n+2}{n+1} e^{-na^2}$.
 Par ailleurs, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+2}{n+1} e^{-na^2} = 0$ (car $\frac{n+2}{n+1} e^{-na^2} \underset{+ \infty}{\sim} e^{-na^2}$).
 Donc (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, +\infty[$.
- d) On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est bornée sur $]0, +\infty[$ car pour tout $x \in]0, +\infty[$, $|f_n(x)| \leq \frac{n+2}{n+1} \leq 2$.
 D'autre part, f est bornée sur $]0, +\infty[$, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup_{x \in]0, +\infty[} |f_n(x) - f(x)|$ existe.
 On a $|f_n(\frac{1}{\sqrt{n}}) - f(\frac{1}{\sqrt{n}})| = \frac{(n+2)e^{-1} \cos 1}{n+1}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n(\frac{1}{\sqrt{n}}) - f(\frac{1}{\sqrt{n}})| = e^{-1} \cos 1 \neq 0$.
 Or $\sup_{x \in]0, +\infty[} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(\frac{1}{\sqrt{n}}) - f(\frac{1}{\sqrt{n}})|$, donc $\sup_{x \in]0, +\infty[} |f_n(x) - f(x)| \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

$$f(x) \Big|_{n \rightarrow +\infty} \not\rightarrow 0.$$

Donc (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $]0, +\infty[$.

III. Limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales

a) Pour $\epsilon = 1/2$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $\|P_n - f\|_\infty \leq 1/2$ et donc $\|P_n - P_N\|_\infty \leq 1$.

Seules les fonctions polynomiales constantes sont bornées sur \mathbb{R} donc $P_n - P_N$ est une fonction polynomiale constante. Posons λ_n la valeur de celle-ci.

b) $\lambda_n = P_n(0) - P_N(0) \rightarrow f(0) - P_N(0) = \lambda_\infty$. $P_n = P_N + P_n - P_N \xrightarrow{CS} P_N + \lambda_\infty$ donc par unicité de limite $f = P_N + \lambda_\infty$ est une fonction polynomiale.

IV. Intersion limite - intégrale sur un segment (banque CCP MP)

1) Pour $x \in [0, 1]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = (x^2 + 1)e^x$.

La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $f : x \mapsto (x^2 + 1)e^x$ sur $[0, 1]$.

$$\text{On a } \forall x \in [0, 1], f_n(x) - f(x) = (x^2 + 1) \frac{x(e^{-x} - e^x)}{n + x},$$

et donc : $\forall x \in [0, 1], |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{2e}{n}$ (majoration indépendante de x).

$$\text{Donc } \|f_n - f\|_\infty \leq \frac{2e}{n}.$$

De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2e}{n} = 0$ donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

2) Par convergence uniforme sur le segment $[0, 1]$ de cette suite de fonctions continues sur $[0, 1]$, on peut intervertir limite et intégrale.

$$\text{On a donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n + x} dx = \int_0^1 (x^2 + 1)e^x dx.$$

Puis, en effectuant deux intégrations par parties, on trouve $\int_0^1 (x^2 + 1)e^x dx = 2e - 3$.

V. Utilisation du théorème de convergence dominée

Essayons d'appliquer le théorème de convergence dominée.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n :]0; a] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{1}{x} \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - 1 \right)$$

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux (car continue) sur $]0; a]$.

— Soit $x \in]0; a]$. On sait : $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^x$, donc : $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x}$.

Ainsi, $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{C.S} f$ sur $]0; a]$, où :

$$f :]0; a] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{e^x - 1}{x}$$

— f est continue par morceaux (car continue) sur $]0; a]$.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Puisque : $\forall t \in]-1; +\infty[, \ln(1 + t) \leq t$,

on a : $\forall t \in [0; +\infty[, 1 + t \leq e^t$,

d'où, pour tout $x \in]0; a]$: $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \left(\frac{x}{e n}\right)^n = e^x$,

puis : $0 \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - 1 \leq e^x - 1$,

et enfin : $0 \leq f_n(x) \leq f(x)$.

L'application f est continue par morceaux sur $]0; a]$, ≥ 0 , et intégrable sur

$]0; a]$ car $f(x) = \frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$.

Ainsi, la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ vérifie l'hypothèse de domination.

D'après le théorème de convergence dominée, on déduit :

$$\int_0^a f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^a f$$

c'est-à-dire :

$$\int_0^a \frac{1}{x} \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - 1 \right) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{e^x - 1}{x} dx$$

VI. Recherche d'un équivalent d'une intégrale à paramètre entier naturel

D'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'intégrale

$I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$, existe comme intégrale d'une application continue sur un segment.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par le changement de variable $t = x^n, x = t^{\frac{1}{n}}, dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt$:

$$I_n = \int_0^1 \ln(1+t) \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt = \frac{1}{n} \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{t} \frac{\ln(1+t)}{t} dt}_{\text{notée } J_n},$$

où J_n est d'ailleurs une intégrale de fonction intégrable sur $]0; 1]$.

Pour obtenir la limite de J_n (si elle existe), nous allons utiliser le théorème de convergence dominée.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n :]0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto \frac{1}{n} \frac{\ln(1+t)}{t}$$

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux (car continue) sur $]0; 1]$.

— $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{C.S.} f$, où $f :]0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto \frac{\ln(1+t)}{t}$, car, pour $t \in]0; 1]$ fixé, on a $\frac{1}{tn} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$.

— f est continue par morceaux (car continue) sur $]0; 1]$.

— On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in]0; 1]$:

$$|f_n(t)| = \frac{1}{n} \frac{\ln(1+t)}{t} \leq \frac{\ln(1+t)}{t}$$

et l'application $t \longmapsto \frac{\ln(1+t)}{t}$ est continue par morceaux (car continue), ≥ 0 , intégrable sur $]0; 1]$, puisque $\frac{\ln(1+t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1$. Ceci montre que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ vérifie l'hypothèse de domination.

D'après le théorème de convergence dominée :

$$\int_0^{+\infty} f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_0^{+\infty} f$$

$$\text{Ainsi : } J_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t} dt = \frac{\pi^2}{12}.$$

$$\text{On conclut : } \int_0^{+\infty} \ln(1+x^n) dx \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{12} \frac{1}{n}.$$