



## Feuille d'exercice n° 08 : Réduction des endomorphismes

### I. Diagonalisation

**Exercice 1** () Diagonaliser  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ .


**Exercice 2** () Diagonaliser  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ .

### II. Diagonalisabilité

**Exercice 3** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ayant  $n$  valeurs propres distinctes.

On pose  $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$ .

- 1) Quelles sont les valeurs propres de  $B$  ?
- 2) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $B$  soit diagonalisable.

**Exercice 4** () Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $\text{rg } A = 1$ . Établir :  $A$  diagonalisable ssi  $\text{tr } A \neq 0$ .

**Exercice 5** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}$  et  $p \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $p^2$  soit un projecteur. Quelles sont les valeurs propres possibles pour  $p$  ? Montrer que  $p$  est diagonalisable ssi  $p^3 = p$ .

**Exercice 6** Soient  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ a^{-1} & 0 & a \\ a^{-2} & a^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ . Montrer que

$A$  est diagonalisable et déterminer  $\text{Sp } A$  sans calculer  $\chi_A$ .

*Indication* : on pourra calculer  $A^2$  et en déduire un polynôme annulateur de  $A$ .

**Exercice 7** On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & 0 & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \dots & 0 & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$ .

- 1) La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ? En donner le rang.
- 2) Déterminer le spectre de  $A$ .


### Exercice 8

Soit  $u$  l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dans lui-même qui, à une matrice  $X$ , associe  $-X + \text{tr}(X) \cdot I_n$  où  $\text{tr}(X)$  est la trace de la matrice  $X$ .

Montrer  $u$  est diagonalisable.

On pourra :

- 1) Montrer que  $I_n$  est vecteur propre, et donner la valeur propre associée.
- 2) Trouver d'autres vecteurs propres en utilisant les matrices  $E_{ij}$ , où  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , et  $E_{ij}$  est la matrice élémentaire dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en position  $(i, j)$  qui vaut 1.
- 3) Aboutir ainsi à une base de vecteurs propres.

**Exercice 9** () Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $A^2 - 2A$  est diagonalisable et 1 n'est pas valeur propre de  $A$ . Montrer que  $A$  est diagonalisable.

### III. Équation matricielle

**Exercice 10** () Soit  $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

- 1) Diagonaliser la matrice  $A$  en précisant la matrice de passage  $P$ .
- 2) Soit  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  une matrice telle que  $M^2 + M = A$ . Justifier que la matrice  $P^{-1}MP$  est diagonale.
- 3) Déterminer les solutions de l'équation  $M^2 + M = A$ .

**Exercice 11**

- 1) La matrice  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$  est-elle diagonalisable ?
- 2) Combien existe-t-il de  $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  vérifiant  $B^2 = A$  ?

**Exercice 12** Résoudre dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  l'équation  $X + X^2 + X^3 = 0$ .  
Si  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  est solution de cette équation, montrer qu'elle est de rang pair.

**Exercice 13** Soit  $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

On propose de résoudre dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  l'équation :  $(E) : X^2 + X = A$ .

- 1) Déterminer une matrice diagonale  $D$  et une matrice inversible  $P$  telles que  $A = PDP^{-1}$ .
- 2) Déterminer les matrices  $Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telles que  $Y^2 + Y = D$ . On commencera pour cela par montrer qu'une telle matrice  $Y$  commute avec  $D$ , et par en déduire que c'est une matrice diagonale.
- 3) Résoudre alors l'équation  $(E)$ .

### IV. Applications

**Exercice 14** Soit  $m$  un nombre réel et  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}.$$

- 1) Quelles sont les valeurs propres de  $f$  ?
- 2) Pour quelles valeurs de  $m$  l'endomorphisme est-il diagonalisable ?
- 3) On suppose  $m = 2$ . Calculer  $A^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 15** Résoudre, le système différentiel  $\begin{cases} x' = 2x + y + 3z \\ y' = 2y \\ z' = x \end{cases}$

**Exercice 16** Résoudre le système différentiel  $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + 3y \end{cases}$

## V. Trigonalisation


**Exercice 17** Trigonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 18** Soit  $P = X^5 + X + 1$ .

- 1) Montrer que  $P$  admet une unique racine réelle et que celle-ci est strictement négative.
- 2) Soit  $A \in \mathcal{M}_{15}(\mathbb{R})$  telle que  $A^5 + A + I_{15} = 0$ . Montrer que  $\det(A) < 0$ .

**Exercice 19** Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) (n \geq 3)$  vérifiant  $\text{rg } A = 2$ ,  $\text{tr } A = 0$  et  $A^n \neq 0_n$ . Montrer que  $A$  est diagonalisable.

**Exercice 20** () Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer l'équivalence des assertions suivantes :

- 1)  $A$  est nilpotente.
- 2)  $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^2) = \dots = \text{tr}(A^n) = 0$ .

