

# PSI\* – récolte oraux 2025

1<sup>er</sup> juillet 2025

## Table des matières

Planche 1 (ENS)	1
Planche 2 (CCINP)	3
Planche 3 (Centrale 1)	7
Planche 4 (Centrale 1)	8
Planche 5 (CCINP)	9
Planche 6 (Centrale 1)	11
Planche 7 (CCINP)	13

## Planche 1 (ENS)

### Énoncé :

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ .

On définit la variation totale de  $f$  sur  $[0, 1]$  par :

$$V(f) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq 1} \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

On appelle  $BV([0, 1])$  l'ensemble des fonctions à variation bornée, c'est-à-dire les fonctions  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $V(f) < +\infty$ .

- 1) Montrer que les fonctions monotones et lipschitziennes sont à variation bornée.
- 2) Les fonctions à variation bornée sont-elles bornées ?
- 3) Trouver une fonction continue qui n'est pas à variation bornée.
- 4) Montrer que  $(BV, \|\cdot\|)$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé avec

$$\|f\| = |f(0)| + V(f)$$

- 5) Montrer que le produit de deux fonctions à variation bornée est à variation bornée.
- 6) Soient  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  deux fonctions à variation bornée.
  - a) Si  $g$  est monotone, montrer que  $f \circ g \in BV$ .
  - b) Si  $f$  est monotone,  $f \circ g \in BV$  ?

*Indications*

- Poser  $f(x) = x \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$
- Poser  $t_0 = 0, t_1 = x$
- Utiliser que  $f \in BV \Rightarrow f$  est bornée
- $g(t_k)$  est une subdivision,  $h \in [0, 1]$

**Corrigé :**

- 1) a) Supposons  $f$  croissante (le cas décroissant est analogue). Soit

$$0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_n \leq 1$$

une subdivision. Alors :

$$\sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(t_{k-1})| = f(t_n) - f(t_0) \leq f(1) - f(0)$$

donc  $f \in BV$ .

- b) Si  $f$  est  $K$ -lipschitzienne, alors :

$$\sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(t_{k-1})| \leq K \sum_{k=1}^n |t_k - t_{k-1}| \leq K$$

donc  $f \in BV$ .

- 2) Oui. Soit  $f$  non bornée. Soit  $t_0 = 0$ .

Soit  $M \in \mathbb{R}$  et  $t_1 \in [0, 1]$  tel que  $|f(t_1)| > M + |f(0)|$ .

Alors :

$$\sum_{k=1}^1 |f(t_k) - f(t_{k-1})| = |f(t_1) - f(t_0)| > M$$

donc  $f \notin BV$ .

- 3) Soit  $f : x \mapsto x \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$  si  $x \neq 0$ , et  $f(0) = 0$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t_k = \frac{1}{k+1}$ . Alors :

$$\sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k} \rightarrow +\infty$$

et pourtant  $f$  est continue sur  $[0, 1]$ . Donc  $f \notin BV$ .

- 4) —  $0 \in BV$ , évident.

—  $\lambda f \in BV$  si  $f \in BV$ , facile.

— Si  $f, g \in BV$ , alors  $f + g \in BV$  avec :

$$V(f + g) \leq V(f) + V(g)$$

Ainsi,  $BV$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$ .

—  $\|f\| \geq 0$ , évident.

—  $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$ , facile.

— Si  $f, g \in BV$ , nous avons vu que  $V(f + g) \leq V(f) + V(g)$ , ce qui implique facilement que  $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ .

— Si  $\|f\| = 0$ , alors  $f(0) = V(f) = 0$ . Soit  $x \in [0, 1]$ , posons  $t_0 = 0, t_1 = x$ . Alors :

$$0 \leq \sum_{k=1}^1 |f(t_k) - f(t_{k-1})| \leq V(f) = 0$$

donc  $|f(x) - f(0)| = 0$  et  $f(x) = f(0)$ . Ainsi  $f$  est nulle.

Donc  $\|\cdot\|$  est une norme.

5) Soient  $f, g \in BV$ ,  $M$  un majorant de  $|f|$ , et  $N$  un majorant de  $|g|$ .

Alors pour toute subdivision  $0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_n \leq 1$ , on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |(fg)(t_k) - (fg)(t_{k-1})| &= \sum_{k=1}^n |f(t_k)(g(t_k) - g(t_{k-1})) + g(t_{k-1})(f(t_k) - f(t_{k-1}))| \\ &\leq M \sum_{k=1}^n |g(t_k) - g(t_{k-1})| + N \sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(t_{k-1})| \\ &= MV(g) + NV(f) \end{aligned}$$

donc  $fg \in BV$ .

6) a) Dans le cas où  $g$  est croissante, si  $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq 1$  alors  $0 \leq g(t_0) \leq g(t_1) \leq \dots \leq g(t_n) \leq 1$  donc :

$$\sum_{k=1}^n |f(g(t_k)) - f(g(t_{k-1}))| \leq V(f)$$

ainsi  $f \circ g \in BV$ .

Si  $g$  est décroissante,  $1 \geq g(t_0) \geq g(t_1) \geq \dots \geq g(t_n) \geq 0$  mais le raisonnement est le même.

b) Non.

Posons :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } x > \frac{1}{2} \end{cases}, \quad g(x) = \frac{1}{2} \left( 1 + x^3 \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \right)$$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $t_k = \frac{1}{k+1}$ .

On remarque alors que :

$$f(g(t_k)) = \begin{cases} 0 & \text{si } g(t_k) < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } g(t_k) > \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{donc } |f(g(t_k)) - f(g(t_{k-1}))| = 1.$$

Ainsi :

$$\sum_{k=1}^n |f(g(t_k)) - f(g(t_{k-1}))| = \sum_{k=1}^n 1 = n \rightarrow +\infty \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

Donc  $f \circ g \notin BV$ .

## Planche 2 (CCINP)

**Énoncé :**

**Exercice 1** à préparer en 20 minutes : Soit  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^2 - 5A + 6I_n = 0$ .

- 1) Donner 2 conditions nécessaire et suffisantes de diagonalisabilité pour une matrice carrée.
- 2) Montrer que  $A$  est diagonalisable et que ses valeurs propres sont dans  $\{2, 3\}$ . On note  $D$  la matrice diagonale associée.
- 3) Pour  $M$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on pose  $f(M) = MD + DM$ .

- a) Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .  
 b) Montrer que  $f$  est diagonalisable [*indication* : découper  $M$  et  $D$  en matrices par blocs].

**Exercice 2** passage en 10 min sans préparation :

- 1) Chercher  $a, b, c$  tels que pour tout  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, 1\}$ ,  $\frac{1}{t(t^2 - 1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t - 1} + \frac{c}{t + 1}$ .  
 2) Résoudre l'équation différentielle  $t(t^2 - 1)y' + 2y = t^2$  sur  $]1, +\infty[$  et sur  $]0, 1[$ .

**Corrigé :**

**Exercice 1 :**

- 1) Question de cours :  
 — admet une base de vecteurs propres ;  
 — les sous-espaces propres sont supplémentaires ;  
 — le polynôme caractéristique est scindé et la multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre associé.
- 2) Un polynôme annulateur de  $A$  est  $P = X^2 - 5X + 6 = (X - 2)(X - 3)$ .  
 Il est scindé à racines simples, donc  $A$  est diagonalisable.  
 Les valeurs propres de  $A$  sont parmi les racines de tout polynôme annulateur, donc elles sont dans  $\{2, 3\}$ .
- 3) a) Si  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $MD + DM \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .  
 Et si  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$f(M + N) = MD + \lambda ND + DM + \lambda DN = f(M) + \lambda f(N)$$

donc  $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ .

- b) Si  $D = 2I_n$  ou  $3I_n$ ,  $f = 4\text{id}$  ou  $6\text{id}$ , donc elle est évidemment diagonalisable.  
 Sinon il existe  $p \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$  et  $q = n - p$  tel que  $\dim E_2(A) = p$  et  $\dim E_3(A) = q$ .

Traitons le cas où

$$D = \begin{pmatrix} 2I_p & 0 \\ 0 & 3I_q \end{pmatrix}$$

Alors en notant  $M = \begin{pmatrix} K & L \\ N & Q \end{pmatrix}$  avec  $K \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  et  $Q \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ , nous avons

$$f(M) = \begin{pmatrix} 2K & 3L \\ 2N & 3Q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2K & 2L \\ 3N & 3Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4K & 5L \\ 5N & 6Q \end{pmatrix}$$

Soit  $\mathcal{B} = (E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

- Si  $i, j \leq p$ ,  $f(E_{ij}) = 4E_{ij}$  ;
- Si  $i \leq p < j$  ou  $j \leq p < i$ ,  $f(E_{ij}) = 5E_{ij}$  ;
- Si  $p < i, j$  alors  $f(E_{ij}) = 6E_{ij}$ .

C'est une base de vecteurs propres, donc  $f$  est diagonalisable.

Dans le cas général, notons  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ,

$I_1 = \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i = 2\}$ ,  $I_2 = \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i = 3\}$

Alors  $I_1 \sqcup I_2 = \llbracket 1, n \rrbracket$ .

- Si  $i, j \in I_1$ ,  $f(E_{ij}) = 4E_{ij}$  (car  $E_{ij}D = 2E_{ij}$  et  $DE_{ij} = 2E_{ij}$ )
- Si  $i, j \in I_2$ ,  $f(E_{ij}) = 6E_{ij}$  (car  $E_{ij}D = 3E_{ij}$  et  $DE_{ij} = 3E_{ij}$ )
- Sinon  $f(E_{ij}) = 5E_{ij}$  (car  $D = 2$ ,  $E_{ij}D = 2E_{ij}$  et  $DE_{ij} = 3E_{ij}$  ou l'inverse)

et la conclusion est la même.

### 1) Conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisabilité :

- Une matrice  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si il existe une base de  $\mathbb{R}^n$  formée de vecteurs propres de  $A$ , c'est-à-dire si  $A$  est semblable à une matrice diagonale réelle.
- $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si le polynôme minimal de  $A$  est scindé sur  $\mathbb{R}$  et que toutes ses racines sont simples (i.e. de multiplicité 1).

### 2) Étude de la matrice $A$ :

L'équation :

$$A^2 - 5A + 6I_n = 0$$

correspond à une annulation par un polynôme. Posons :

$$P(X) = X^2 - 5X + 6 = (X - 2)(X - 3)$$

Comme  $P(A) = 0$ , cela signifie que le polynôme minimal de  $A$  divise  $P$ . Donc les seules valeurs propres possibles de  $A$  sont 2 et 3.

Puisque  $P$  est scindé à racines simples et que le polynôme minimal de  $A$  divise  $P$ , alors  $A$  est diagonalisable.

Donc  $A$  est diagonalisable et ses valeurs propres sont dans  $\{2, 3\}$ .

### 3) On considère l'application :

$$f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(M) = MD + DM$$

#### 3a) Endomorphisme :

Pour montrer que  $f$  est un endomorphisme, on vérifie que  $f$  est une application linéaire.

Soient  $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$f(M_1 + M_2) = (M_1 + M_2)D + D(M_1 + M_2) = M_1D + M_2D + DM_1 + DM_2 = f(M_1) + f(M_2)$$

$$f(\lambda M_1) = \lambda M_1D + D(\lambda M_1) = \lambda(M_1D + DM_1) = \lambda f(M_1)$$

Donc  $f$  est linéaire, et donc un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

#### 3b) Diagonalisabilité de $f$ :

Soit  $D$  une matrice diagonale réelle dont les valeurs propres sont dans  $\{2, 3\}$ . Comme  $D$  est diagonale, on peut écrire  $M$  sous la forme matricielle bloc :

Supposons que  $D$  est de la forme suivante, en regroupant les lignes et colonnes selon les valeurs propres :

$$D = \begin{pmatrix} 2I_p & 0 \\ 0 & 3I_q \end{pmatrix}, \quad \text{avec } p + q = n$$

On découpe alors toute matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  sous forme bloc compatible :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & E \end{pmatrix}, \quad \text{avec } A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}), \quad E \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$$

Alors :

$$\begin{aligned} f(M) = MD + DM &= \begin{pmatrix} A & B \\ C & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2I_p & 0 \\ 0 & 3I_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2I_p & 0 \\ 0 & 3I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & E \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2A & 3B \\ 2C & 3E \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2A & 2B \\ 3C & 3E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4A & 5B \\ 5C & 6E \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cette action de  $f$  montre que  $f$  agit diagonalement sur les sous-espaces formés par les blocs :

- $A$  est multiplié par 4
- $B$  est multiplié par 5
- $C$  est multiplié par 5
- $E$  est multiplié par 6

Ainsi,  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  se décompose en somme directe de sous-espaces stables par  $f$ , sur chacun desquels  $f$  agit comme une multiplication scalaire. Par conséquent,  $f$  est diagonalisable.

### Exercice 2 :

1) Après développement et identification on trouve

$$\frac{1}{t(t^2 - 1)} = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1} \right).$$

2) Si  $I = ]1, +\infty[$  et  $J = ]0, 1[$

Sur  $I$  et  $J$  :

$$t(t^2 - 1)y' + 2ty = t \quad \text{équivalent à} \quad y' + \frac{2}{t(t^2 - 1)}y = \frac{1}{t^2 - 1}$$

Une primitive de  $t \mapsto \frac{2}{t(t^2 - 1)}$  est :  $t \mapsto -2 \ln |t| + \ln |t - 1| + \ln |t + 1|$ .

Donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène sur  $I$  est :

$$\left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto K \frac{t^2}{t^2 - 1}, \quad K \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

De même, sur  $J$  on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} J \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto K \frac{t^2}{t^2 - 1}, \quad K \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

Sur  $I$  et  $J$ , on trouve une solution particulière avec la même méthode et les mêmes calculs.

Soit  $y \in \mathcal{E}^1(I \text{ ou } J)$ , il existe  $K \in \mathcal{E}^1(I \text{ ou } J)$  tel que :

$$y : t \mapsto K(t) \cdot \frac{t^2}{t^2 - 1}$$

Alors  $y$  est solution de  $(E)$  sur  $I$  ou  $J$  ssi :

$$\forall t \in I \text{ ou } J, \quad K'(t) \cdot \frac{t^2}{t^2 - 1} = \frac{t}{t^2 - 1}$$

ssi :

$$\forall t \in I \text{ ou } J, \quad K'(t) = \frac{1}{t}$$

Donc :

$$t \mapsto \ln(t) \cdot \frac{t^2}{t^2 - 1}$$

est une solution particulière.

Finalement, l'ensemble des solutions de  $(E)$  est :

$$\left\{ \begin{array}{l} I \text{ ou } J \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto (K + \ln(t)) \cdot \frac{t^2}{t^2 - 1}, \quad K \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

**Planche 3** (Centrale 1)**Énoncé :**

Soit

$$\forall (x, y) \in [-1, 1]^2, \varphi(x, y) = \int_{-1}^1 |t - x| \times |t - y| dt$$

- 1) Montrer que  $\varphi$  est continue sur  $[-1, 1]^2$ .
- 2) Montrer que  $\varphi$  admet un minimum.
- 3) On pose  $T = \{(x, y) \in [-1, 1]^2, -1 \leq x \leq y \leq 1\}$ . Montrer que sur  $T$ ,  $\varphi(x, y) = \frac{1}{3}(y - x)^3 + \frac{2}{3} + 2xy$ .
- 4) Montrer que  $\varphi$  admet un minimum sur  $T$ , et qu'il est atteint à l'intérieur de  $T$ .
- 5) Conclure sur le minimum de  $\varphi$ .

**Corrigé :**

- 1) —  $\forall x \in [-1, 1], t \mapsto |t - x|$  et  $t \mapsto |t - y|$  sont continues sur  $[-1, 1]$ .  
 —  $\forall x, y \in [-1, 1], t \mapsto |t - x||t - y|$  est continue sur  $[-1, 1]$ .  
 —  $\forall x, y \in [-1, 1], |t - x||t - y| \leq 4$ , qui est intégrable sur  $[-1, 1]$ .

Par théorème de convergence dominée,  $\varphi$  est continue selon les deux variables, donc elle est continue sur  $[-1, 1]^2$ .

De plus, comme produit de segments,  $[-1, 1]^2$  est fermé et borné dans  $\mathbb{R}^2$  qui est de dimension finie. Donc, grâce au théorème des bornes atteintes,  $\varphi$  admet un minimum sur  $[-1, 1]^2$ .

- 2) Soit  $(x_n, y_n) \in T^{\mathbb{N}}$  convergeant vers  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Donc  $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq x_n, y_n \leq 1$ , par passage à la limite,  $-1 \leq x, y \leq 1$ , donc  $(x, y) \in T$  et donc  $T$  est fermé. De plus, il est facilement borné, donc  $\varphi$  admet un minimum sur  $T$ .

- 3) Soit  $(x, y) \in T$ .

Alors :

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \int_{-1}^x |t - x||t - y| dt + \int_x^y |t - x||t - y| dt + \int_y^1 |t - x||t - y| dt \\ &= \int_{-1}^x (x - t)(y - t) dt + \int_x^y (t - x)(y - t) dt + \int_y^1 (t - x)(t - y) dt \end{aligned}$$

Soit  $f(t) = (x - t)(y - t)$  et  $F(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{x+y}{2}t^2 + xyt$ ,  
alors  $F' = f$ .

Et

$$\varphi(x, y) = F(x) - F(-1) - F(y) + F(x) + F(1) - F(y)$$

$$= 2F(x) - 2F(y) = F(x) - F(1)$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - xy^2 - \frac{1}{3}x^3 + x^2y + \frac{2}{3} + 2xy$$

$$= \frac{1}{3}(y - x)^3 + \frac{2}{3} + 2xy$$

En particulier  $\varphi \in \mathcal{C}^2(T)$ .

4)

$$\nabla\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} -(y-x)^2 + 2y \\ (y-x)^2 + 2x \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \nabla\varphi(x, y) = 0$$

ssi :

$$\begin{cases} (y-x)^2 + 2x = 0 \\ y+x = 0 \end{cases} \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} y = -x \\ 4x^2 + 2x = 0 \end{cases} \quad \text{ssi} \quad x = 0 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$$

Mais  $(0, 0) \notin T$  donc le seul point critique est en  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$$\varphi\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad H_\varphi\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \end{pmatrix}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = I_2$$

Donc  $\varphi$  admet un minimum local en  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = A$ .

Si  $\varphi$  admettait une valeur strictement inférieure en un point  $B$  du bord de  $T$ , alors  $\varphi|_{[AB]}$  admettrait un maximum sur  $[AB]$  et le gradient s'y annulerait, ce qui est absurde. Donc le minimum de  $\varphi$  sur  $T$  est atteint en  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  et vaut  $\frac{1}{2}$ .

Si  $T' = [-1, 1]^2 \setminus T$ , on a  $\forall (x, y) \in T, (y, x) \in T'$  et  $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ , donc sur tout  $[-1, 1]^2$ , le minimum de  $\varphi$  vaut  $\frac{1}{2}$  et est atteint en  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  et en  $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ .

### Planche 4 (Centrale 1)

#### Énoncé :

Soit  $(E) : y'' + f(x)y = 0$ , où  $f$  est réelle, continue et intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

- 1) Soit  $y$  une solutions bornée de  $(E)$ . Montrer que  $fy$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .
- 2) Toujours en supposant que  $y$  est bornée, montrer l'existence de la limite de  $y'$  en  $+\infty$ , et donner sa valeur.
- 3) Soit  $g : x \mapsto y_1'(x)y_2(x) - y_2'(x)y_1(x)$ , où  $y_1$  et  $y_2$  sont des solutions bornées de  $(E)$ . Montrer que  $g$  est constante et donner sa valeur.
- 4) Montrer que  $(E)$  admet des solutions non bornées.

#### Corrigé :

- 1) Immédiat car  $f$  est intégrable et continue, et  $y$  est bornée et continue.
- 2) Grâce à la question précédente, si  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $\int_0^x y'' + \int_0^x fy = 0$  donc  $y'(x) = y'(0) - \int_0^x fy$ , qui a une limite finie en  $+\infty$ . Noton la  $\ell$ . Si  $\ell > 0$ , alors pour  $x$  assez grand,  $y'(x) \geq \frac{\ell}{2}$  donc grâce à l'IAF,  $y \rightarrow +\infty$ , ce qui est absurde. Idem si  $\ell < 0$ . Donc  $y' \rightarrow 0$ .
- 3)  $g$  est dérivable et

$$\begin{aligned} g'(x) &= y_1''(x)y_2(x) + y_1'(x)y_2'(x) - y_2''(x)y_1(x) - y_2'(x)y_1'(x) \\ &= -f(x)y_1(x)y_2(x) + y_1(x)f(x)y_2(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc  $g$  est constante. Or grâce à la question précédente,  $g \rightarrow 0$  en  $+\infty$ , donc  $g = 0$ .



- 4) L'ensemble  $F$  des solutions de  $(E)$  est un sev de dimension 2. Notons  $(y_1, y_2)$  une base de  $F$ . Si  $y_1$  et  $y_2$  sont toutes les deux bornées, toutes les solutions de  $(E)$  le sont aussi. Supposons que c'est le cas. Alors avec la question précédente,  $g = 0$ , c'est-à-dire que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = 0$ . Hors-programme en PSI : ce déterminant s'appelle le *wronskien* et il ne peut pas être constant égal à zéro. Donc  $(E)$  admet des solutions non bornées.

### Planche 5 (CCINP)

#### Énoncé :

**Exercice 1** à préparer en 30 minutes : Soit  $u$  un endomorphisme non nul de  $\mathbb{R}^3$  tel que :

$$u^3 = -u.$$

- 1) Montrer que  $\text{Im}(u^2 + \text{Id}) \subset \text{Ker}(u)$ .
- 2) Montrer que  $\text{Ker}(u)$  et  $\text{Ker}(u^2 + \text{Id})$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3$ .
- 3) Montrer que 0 est la seule valeur propre réelle de  $u$ . En déduire que  $\text{Ker}(u)$  et  $\text{Ker}(u^2 + \text{Id})$  ne sont pas réduits au singleton  $\{0\}$ .
- 4) Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de  $u$  est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2** donné à l'oral sans préparation :

- 1) Montrer l'existence de l'intégrale

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx.$$

- 2) Montrer que :

$$J = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}.$$

#### Corrigé :

**Exercice 1 :**

- 1) Posons  $v = u^2 + \text{id}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}^3$ ,

$$u(v(x)) = u(u^2(x) + x) = u^3(x) + u(x) = -u(x) + u(x) = 0.$$

Donc  $u \circ v = 0$ , ce qui implique :

$$\text{Im}(u^2 + \text{id}) \subset \text{Ker}(u).$$

- 2) On a  $\text{Im}(u^2 + \text{id}) \subset \text{Ker}(u)$ . Soit  $E = \mathbb{R}^3$ .

Notons  $a = \dim(\text{Ker}(u))$ ,  $b = \dim(\text{Ker}(u^2 + \text{id}))$ . On a :

$$\dim(\text{Im}(u^2 + \text{id})) \leq \dim(\text{Ker}(u)) \text{ donc } 3 - b \leq a \text{ donc } a + b \geq 3.$$

Par ailleurs, si  $x \in \text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(u^2 + \text{id})$ , alors  $u(x) = 0$  et  $u^2(x) = -x$  donc  $0 = -x$ , donc  $x = 0$ . L'intersection est réduite à 0.

Donc  $\text{Ker}(u) \oplus \text{Ker}(u^2 + \text{id}) = \mathbb{R}^3$ , ce sont des sous-espaces supplémentaires.

- 3) Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  une valeur propre réelle de  $u$ , avec  $u(v) = \lambda v$ ,  $v \neq 0$ . Alors :

$$u^3(v) = \lambda^3 v = -\lambda v \text{ donc } \lambda^3 + \lambda = 0 \text{ donc } \lambda(\lambda^2 + 1) = 0.$$

Donc  $\lambda = 0$  est la seule valeur propre réelle. Ainsi  $\text{Ker}(u)$  n'est pas réduit à 0. De plus  $u \neq 0$  donc  $\text{Ker}(u) \neq \mathbb{R}^3$ , et comme  $\text{Ker}(u) \oplus \text{Ker}(u^2 + \text{id}) = \mathbb{R}^3$ ,  $\text{Ker}(u^2 + \text{id})$  ne peut être réduit à  $\{0\}$ .

- 4) Nous avons  $a \geq 1$ ,  $b \geq 1$  et  $a + b = 3$ , donc  $a = 1$  et  $b = 2$  ou l'inverse.

Soit  $v_2 \in \text{Ker}(u^2 + \text{id})$  non nul. Posons  $v_3 = u(v_2)$ . Alors  $u(v_3) = u^2(v_2) = -v_2$ . Ainsi  $v_3 \neq 0$ . Si  $(v_2, v_3)$  est liée, cela signifie que  $v_2$  est un vecteur propre de  $u$ . Mais alors la valeur propre associée est nulle et  $v_3 = 0$  : c'est absurde. Donc  $(v_2, v_3)$  est libre et  $b = 2$ . Alors  $a = 1$ , et si  $v_1$  est un vecteur directeur de  $\text{Ker}(u)$ ,  $(v_1, v_2, v_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

Alors, dans cette base, la matrice de  $u$  est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

### Exercice 2 :

- 1) Étudions le comportement de  $f$  près de 0 et à l'infini :

(i) **Près de 0** : on utilise l'équivalent  $e^x - 1 \sim x$ , donc  $\frac{x^2}{e^x - 1} \sim x$  quand  $x \rightarrow 0^+$ .  
Donc  $f$ , est intégrable au voisinage de 0.

(ii) **Quand  $x \rightarrow +\infty$**  : on a  $e^x - 1 \sim e^x$ , donc :

$$f(x) \sim \frac{x^2}{e^x} \text{ quand } x \rightarrow +\infty.$$

Et  $\frac{x^2}{e^x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ , donc est intégrable à l'infini.

De plus  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  donc elle y est intégrable, et  $J$  est bien définie.

- 2) On utilise l'identité classique de la somme sur les séries géométriques (valable pour  $x > 0$ ) :

$$\frac{1}{e^x - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx}.$$

On insère cette expression dans l'intégrale :

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx = \int_0^{+\infty} x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} dx.$$

Pour inverser somme et intégrale, il reste à vérifier que si  $v_n = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-nx} dx \geq 0$ , alors  $\sum v_n$  converge.

On effectue le changement de variable  $u = nx$  :

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-nx} dx = \frac{1}{n^3} \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u} du.$$

Mais :

$$\int_0^{+\infty} u^2 e^{-u} du = 2 \text{ après deux IPP,}$$

donc :

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-nx} dx = \frac{2}{n^3},$$

qui est le terme général d'une série convergente. Nous pouvons donc inverser somme et intégrale et finalement :

$$J = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}.$$

**Planche 6** (Centrale 1)**Énoncé :**

On définit, pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la suite  $\left(\binom{\alpha}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  par :

$$\binom{\alpha}{n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} & \text{si } n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

On pose :

$$b_n = \int_0^1 \binom{t}{n} dt.$$

1) Montrer que pour tout  $t \in [0, 1]$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\left| \binom{t}{n} \right| \leq 1.$$

2) Étudier la convergence de la série  $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{t}{n} x^n$ , pour  $t \in [0, 1]$ , et  $x \in ]-1, 1[$ .

3) Montrer que pour tout  $x \in ]-1, 1[$  :

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \frac{x}{\ln(1+x)}.$$

4) On peut définir :

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Montrer que :

$$f(x-1) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{-1}{\ln(x)}.$$

5) La fonction  $f$  est-elle définie en  $-1$  ? Est-elle dérivable en  $-1$  ?

6) En déduire une valeur du rayon de convergence de  $f$ .

**Corrigé :**

1) Le résultat est évident pour  $n = 0$ .

Sinon, pour  $t \in [0, 1]$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\left| \binom{t}{n} \right| = \left| \frac{t(t-1) \cdots (t-n+1)}{n!} \right|.$$

Pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $t-k \in [-k, 1]$ , donc  $|t-k| \leq k+1$ . Par produit,  $|t(t-1) \cdots (t-n+1)| \leq n!$  donc :

$$\left| \binom{t}{n} \right| \leq \frac{n!}{n!} \leq 1.$$

2) Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on sait que :

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad \text{pour } |x| < 1.$$

On peut aussi remarquer que  $\left| \frac{\binom{t}{n}}{\binom{t}{n+1}} \right| = \frac{|t-n|}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ , donc avec le critère de d'Alembert on retrouve la convergence pour  $x \in ]-1, 1[$ .

3) On considère :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^n \binom{t}{n} dt.$$

Or  $\int_0^1 \left| x^n \binom{t}{n} \right| dt \leq \int_0^1 |x^n| dt = |x^n|$  et  $\sum |x_n|$  converge. Il est donc possible d'inverser somme et intégrale :

$$f(x) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{t}{n} x^n dt = \int_0^1 (1+x)^t dt.$$

On effectue le calcul :

$$f(x) = \int_0^1 (1+x)^t dt = \left[ \frac{(1+x)^t}{\ln(1+x)} \right]_{t=0}^1 = \frac{(1+x)^1 - (1+x)^0}{\ln(1+x)} = \frac{(1+x) - 1}{\ln(1+x)} = \frac{x}{\ln(1+x)}.$$

Finalement :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \frac{x}{\ln(1+x)}.$$

4) On a :

$$f(x-1) = \frac{x-1}{\ln x} \sim \frac{-1}{\ln x} \quad \text{quand } x \rightarrow 0^+.$$

5) On étudie la limite de  $f(x)$  lorsque  $x \rightarrow -1^+$  :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{\ln(1+x)}.$$

Posons  $x = -1 + h$  avec  $h \rightarrow 0^+$ . Alors :

$$f(x) = \frac{-1+h}{\ln(h)} \sim \frac{-1}{\ln(h)} \rightarrow 0.$$

La fonction  $f$  admet donc une limite finie en  $x = -1$  :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0.$$

Ainsi,  $f$  est prolongeable par continuité en  $x = -1$  en posant  $f(-1) = 0$ . On continuera de nommer  $f$  ce prolongement.

On calcule la dérivée de  $f$  sur  $] -1, 1[$  :

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{x}{(1+x)\ln^2(1+x)}.$$

Alors

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = +\infty.$$

D'après le théorème de la limite de la dérivée ( $f$  étant continue en  $-1$ ),  $f$  n'est pas dérivable en  $-1$ .

6) Soit  $R$  le rayon de convergence de  $f$ . Grâce à la question 2),  $R \geq 1$ . Mais si  $R > 1$ , alors  $f$  serait dérivable en  $-1$ , ce qui est absurde. Donc  $R = 1$ .

**Planche 7** (CCINP)

**Énoncé (à préparer en 30 minutes, le 2nd exercice est le même que celui de la planche 2) :**

Soit  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telle que :

$$MM^\top = M^\top M \quad \text{et} \quad M^2 + 2I_2 = 0.$$

- 1) Montrer que  $M^\top M$  est diagonalisable.
- 2) Trouver les valeurs propres de  $M^\top M$ .
- 3) Montrer que  $\frac{1}{\sqrt{2}}M$  est orthogonale.
- 4) Trouver toutes les matrices  $M$  qui vérifient ces conditions.

**Corrigé :**

- 1) On remarque que  $M^\top M$  est symétrique car :

$$(M^\top M)^\top = M^\top (M^\top)^\top = M^\top M.$$

Une matrice réelle symétrique est toujours diagonalisable dans une base orthonormée. Donc :

$$\boxed{M^\top M \text{ est diagonalisable}}.$$

- 2) Utilisons la condition  $M^2 = -2I_2$ . Cela implique que  $M$  est inversible et que :

$$M^{-1} = -\frac{1}{2}M.$$

Posons  $A = M^\top M$ . Nous savons déjà qu'elle est symétrique, et il est facile et classique de montrer qu'elle est positive. De plus, puisque  $M$  est inversible,  $A$  est aussi inversible et donc elle est symétrique définie positive. Elle est donc diagonalisable à valeurs propres strictement positives.

Enfin  $A^2 = M^\top M M^\top M = M^\top M^2 M^\top = -2(M^2)^\top = 4I_2$ . Donc les valeurs propres de  $A$  sont parmi mes racines de  $X^2 - 4$ , donc  $\pm 2$ . Mais d'après la remarque précédente, seule 2 est racine de  $A$ , et donc

$$\boxed{A = 2I_2}.$$

- 3) Soit  $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}M$ . Alors :

$$Q^\top Q = \frac{1}{\sqrt{2}}M^\top \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}M = \frac{1}{2}M^\top M.$$

D'après la question précédente,  $M^\top M = 2I_2$ , donc :

$$Q^\top Q = \frac{1}{2} \cdot 2I_2 = I_2.$$

Donc :

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}M \text{ est orthogonale}}.$$

- 4) Effectuons la synthèse. Soit  $M$  une solution. Posons  $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}M$ . Alors  $Q$  est orthogonale. Si elle est indirecte, le cours assure que c'est une symétrie orthogonale, donc  $Q^2 = I_2$ , donc  $M^2 = 2I_2$  : c'est absurde, donc  $Q$  est directe. C'est donc la rotation d'un certain angle  $\theta$ . Alors  $Q^2$  est la rotation d'angle  $2\theta$ , donc  $22\theta \equiv \pi [2\pi]$  et  $\theta \equiv \pi/2 [\pi]$ , donc  $Q = \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , et donc finalement l'ensemble des solutions est constitué des deux matrices

$$\boxed{\pm \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .}$$