Feuille d'exercice n° 07 : **Réduction des endomorphismes**

I. Diagonalisation

Exercice 1 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que rg $A = 1$. Établir : A diagonalisable ssi $\operatorname{tr} A \neq 0$.

Exercice 2 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathscr{L}(E)$ tel que p^2 soit un projecteur. Quelles sont les valeurs propres possibles pour p ? Montrer que p est diagonalisable ssi $p^3 = p$.

Exercice 3 Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 Résoudre dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ l'équation $X + X^2 + X^3 = 0$.
Si $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est solution de cette équation, montrer qu'elle est de rang pair.

Exercice 5 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

1) Diagonaliser la matrice A en précisant la matrice de passage P.

2) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice telle que $M^2 + M = A$. Justifier que la matrice $P^{-1}MP$ est diagonale.

3) Déterminer les solutions de l'équation $M^2 + M = A$.

Exercice 6 Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 7

1) La matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

2) Combien existe-t-il de $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $B^2 = A$?

Exercice 8
Soit u l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même qui, à une matrice X, associe $-X + \operatorname{tr}(X) \cdot \mathrm{I}_n$ où $\operatorname{tr}(X)$ est la trace de la matrice X.
Montrer u est diagonalisable.
On pourra :

1) Montrer que I_n est vecteur propre, et donner la valeur propre associée.

2) Trouver d'autres vecteurs propres en utilisant les matrices E_{ij}, où $i, j \in [\![1, n]\!]$, et E_{ij} est la matrice élémentaire dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en position (i, j) qui vaut 1.

3) Aboutir ainsi à une base de vecteurs propres.

Exercice 9 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ayant n valeurs propres distinctes.
On pose $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$.

1) Quelles sont les valeurs propres de B ?

2) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que B soit diagonalisable.

Exercice 10 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^2 - 2A$ est diagonalisable et 1 n'est pas valeur propre de A. Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 11 Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ a^{-1} & 0 & a \\ a^{-2} & a^{-1} & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que A est diagonalisable et déterminer $\operatorname{Sp} A$ sans calculer χ_A.
Indication : on pourra calculer A^2 et en déduire un polynôme annulateur de A.

Exercice 12 Soit m un nombre réel et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}.$$

1) Quelles sont les valeurs propres de f ?

2) Pour quelles valeurs de m l'endomorphisme est-il diagonalisable ?

3) On suppose $m = 2$. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 13 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & 0 & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \dots & 0 & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

1) La matrice A est-elle diagonalisable ? En donner le rang.

2) Déterminer le spectre de A.

Exercice 14 Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On propose de résoudre dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation : $(E) : X^2 + X = A$.

1) Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.

2) Déterminer les matrices $Y \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $Y^2 + Y = D$. On commencera pour cela par montrer qu'une telle matrice Y commute avec D, et par en déduire que c'est une matrice diagonale.

3) Résoudre alors l'équation (E).

Exercice 15 Résoudre, le système différentiel $\begin{cases} x' = 2x + y + 3z \\ y' = 2y \\ z' = x \end{cases}$

Exercice 16 Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + 3y \end{cases}$

II. Trigonalisation

Exercice 17 Trigonaliser $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 18 Soit $P = X^5 + X + 1$.

1) Montrer que P admet une unique racine réelle et que celle-ci est strictement négative.

2) Soit $A \in \mathscr{M}_{15}(\mathbb{R})$ telle que $A^5 + A + I_{15} = 0$. Montrer que $\det(A) < 0$.

Exercice 19 Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) (n \geqslant 3)$ vérifiant $\operatorname{rg} A = 2, \operatorname{tr} A = 0$ et $A^n \neq O_n$. Montrer que A est diagonalisable.