Semaine 16 du 26 janvier 2026 (S5)

XV – Espérance, variance, covariance etc

1 Espérance

1.1 Définition

1.2 Propriétés

1.3 Formule de transfert

1.4 Variables indépendantes

1.5 Lois usuelles

2 Variance

2.1 Définition

2.2 Propriétés

2.3 Lois usuelles

3 Covariance

4 Inégalités probabilistes

4.1 Inégalité de Markov

4.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

4.3 Loi faible des grands nombres

5 Fonctions génératrices

5.1 Fonctions génératrices des lois usuelles

5.2 Fonction génératrice, espérance et variance

5.3 Fonction génératrice d'une somme de variables aléatoires

6 Exercices à connaître

6.1 Calculs d'espérance et de variance (banque CCINP MP)

Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.
On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0,1[$).
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1) Donner la loi de X. Justifier.

2) La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.

- **a)** Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P_{(X=i)}(Y = k)$.
- **b)** Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.
  Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.
- **c)** Déterminer l'espérance et la variance de Z.

6.2 Un couple de variables aléatoires (banque CCP MP)

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par :
$\forall\, (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P((X=i)\cap(Y=j)) = \dfrac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1} j!}$

1) Déterminer les lois de X et de Y.

2) **a)** Prouver que $1+X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.

b) Déterminer l'espérance et la variance de Y.

3) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

4) Calculer $P(X=Y)$.

6.3 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (banque CCINP MP)

1) Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

2) Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi et telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, Y_n admet une variance.
On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.

Prouver que : $\forall\, a \in \,]0,+\infty[,\ P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \dfrac{V(Y_1)}{na^2}$.

3) **Application** : On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0,35$ et $0,45$?
Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i^{\text{ème}}$ tirage.

6.4 Calculs d'espérance et de variance grâce à la fonction génératrice

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la fonction génératrice est

$$G_X(t) = \frac{t}{2-t^2} \qquad \text{pour tout } t \in \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$$

1) Calculer la loi de X.

2) Reconnaître la loi de $Y = \dfrac{1}{2}(X+1)$. En déduire l'espérance et la variance de X.

6.5 Détermination d'une fonction génératrice (banque CCINP MP)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi de probabilité donnée par : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(X=n) = p_n$.
La fonction génératrice de X est notée G_X et elle est définie par $G_X(t) = E[t^X] = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$.

1) Prouver que l'intervalle $]-1,1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de G_X.

2) Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On pose $S = X_1 + X_2$.
Démontrer que $\forall t \in \,]-1,1[,\ G_S(t) = G_{X_1}(t) G_{X_2}(t)$:

a) en utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières.

b) en utilisant uniquement la définition de la fonction génératrice par $G_X(t) = E[t^X]$.

Remarque : on admettra, pour la question suivante, que ce résultat est généralisable à n variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

3) Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans ce sac.
On note S_n la somme des numéros tirés.
Soit $t \in]-1, 1[$.
Déterminer $G_{S_n}(t)$ puis en déduire la loi de S_n.

S'y ajoute, en révision, l'intégralité des chapitres suivants :

I. et III. Rappels et compléments d'algèbre linéaire

V. Espaces vectoriels normés

VI. Valeurs propres et vecteurs propres

VIII. Réduction des endomorphismes

Les exercices à connaître sont les suivants :

L'exercice 7.8 est très long. Vous pourrez ne donner qu'une partie des questions, par exemple (1 et 2), (1 et 3) ou (5).

6.6 Image d'une base par un endomorphisme

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.

1) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un endomorphisme u tel que $\mathrm{Ker}(u) = F$ et $\mathrm{Im}(u) = G$.

2) Construire un tel endomorphisme u avec $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \}$ dans $\mathbb{R}^3$ et $G = \{ \lambda(2, -1, -1) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$.

6.7 Une caractérisation des homothéties

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, où E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

1) Déterminer l'ensemble des endomorphismes de E laissant stables tous les sev de dimension 1.

Cette question est archi-classique, et n'est pas toujours présentée sous cette forme.
On pourra se demander le lien entre

$$\forall x \in E, \exists \lambda \in \mathbb{K}, f(x) = \lambda x$$

et

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, f(x) = \lambda x.$$

2) Déterminer l'ensemble des endomorphismes de E laissant stables tous les sev de dimension 2.

3) Si E est de dimension finie, en déduire le « centre » de $\mathscr{L}(E)$, c'est-à-dire l'ensemble endomorphismes qui commutent avec tous les endomorphismes (on pourra remarquer qu'un tel endomorphisme commute nécessairement avec les projections sur toutes les droites vectorielles).

4) Quel est le centre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$?

5) Retrouver le résultat précédent en utilisant la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

6.8 Noyaux itérés

Soit f un endomorphisme d'un espace de dimension finie n non nulle. On définit, pour tout entier naturel p :

$$F_p = \mathrm{Ker}\,(f^p) \qquad \text{et} \qquad G_p = \mathrm{Im}\,(f^p)$$

(f^p désigne l'itérée d'ordre p de f : $f^0 = \mathrm{Id}$ et, $f^{p+1} = f \circ f^p$).

1) Démontrer que, des deux suites de s.e.v. (F_p) et (G_p), l'une est croissante et l'autre décroissante (pour l'inclusion).

2) Démontrer qu'il existe un plus petit entier naturel r tel que $F_r = F_{r+1}$, et démontrer qu'alors, pour tout entier naturel p supérieur ou égal à r, $F_p = F_{p+1}$.

3) Démontrer qu'il existe un plus petit entier naturel s tel que $G_s = G_{s+1}$, et démontrer qu'alors, pour tout entier naturel p supérieur ou égal à s, $G_p = G_{p+1}$. Y-a-t-il un lien entre r et s ?

4) Démontrer que G_s et F_r sont supplémentaires dans E.

6.9 « Inégalité triangulaire » et une autre inégalité autour du rang

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et $u, v \in \mathscr{L}(E,F)$.

1) **a)** Montrer que $\mathrm{rg}(u+v) \leqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$.

b) En déduire que $|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leqslant \mathrm{rg}(u+v)$.

2) On suppose que $E = F$, et $\dim E = n$. Montrer l'encadrement :

$$\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) - n \leqslant \mathrm{rg}(u \circ v) \leqslant \inf(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v)).$$

6.10 Endomorphismes nilpotents

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$. On dit que $f \in \mathscr{L}(E)$ est nilpotent lorsqu'il existe $k \geqslant 1$ tel que $f^k = 0$.

1) Montrer qu'il existe un unique entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{p-1} \neq 0$ et $f^p = 0$. Cet entier est appelé *indice de nilpotence* de f.

Dans cet énoncé, on considère $f \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice p.

2) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\mathscr{F} = (x, f(x), \cdots, f^{p-1}(x))$ est une famille libre.

3) En déduire que $p \leqslant n$.

4) On suppose dans cette question que $p = n$. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(f)$ et $\mathrm{rg}(f)$.

5) Donner un exemple d'espace vectoriel E de dimension n et d'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice n.

6.11 Expression et éléments caractéristiques d'un projecteur ou d'une symétrie

1) Donner les éléments caractéristiques de l'application f définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3x & - & y & + & 2z \\ -x & + & 3y & + & 2z \\ x & + & y & + & 2z \end{pmatrix} \end{array} \right. .$$

2) Donner l'expression de la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}(1,0,-1)$ et parallèlement à $\mathrm{Vect}\,((1,2,0),(1,1,-1))$.

6.12 Endomorphismes de rang 1

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1.

1) Montrer qu'il existe $C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $L \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ vérifiant $A = CL$.

2) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que pour tout entier naturel non nul n, $A^n = \alpha^{n-1}A$.

3) Montrer que $A^2 = \mathrm{tr}\,(A)A$.

4) Après avoir calculé $(1+\mathrm{tr}\,A)(A+\mathrm{I}_n)-(1+\mathrm{tr}\,A)\mathrm{I}_n$, déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $A+\mathrm{I}_n$ soit inversible. Le cas échéant, déterminer $(A+\mathrm{I}_n)^{-1}$.

6.13 Matrice à diagonale dominante

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ à coefficients diagonaux dominants, c'est-à-dire telle que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|.$$

Montrer que A est inversible.

6.14 Une caractérisation de la trace

Trouver toutes les formes linéaires f sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant :

$$\forall\, A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ f(AB) = f(BA).$$

Indication : pour deux matrices élémentaires $E_{i,j}$ et $E_{k,\ell}$, calculer le produit $E_{i,j}E_{k,\ell}$.

6.15 Produit d'espaces vectoriels normés

Soit $E_1, \dots, E_p$ des $\mathbb{K}$-ev, munis respectivement des normes $N_1, \dots, N_p$. On considère l'espace vectoriel produit $E = E_1 \times \dots \times E_p$. Sur E, on pose l'application

$$N : \begin{array}{ccl} E & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_p) & \mapsto & \max\limits_{1\leqslant k\leqslant p} N_k(x_k) \end{array}.$$

Montrer que N est une norme sur E.
(E, N) est appelé *espace vectoriel normé produit* des $(E_k, N_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$.

6.16 Comparaison de deux normes

Sur $\mathbb{R}[X]$, on définit N_1 et N_2 par :

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left|P^{(k)}(0)\right| \quad \text{et} \quad N_2(P) = \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)|$$

1) Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.

2) On considère la suite de terme général $P_n = \dfrac{1}{n}X^n$. Est-elle bornée pour la norme N_1 ? pour la norme N_2 ?

3) Les deux normes sont-elles équivalentes ?

6.17 Opérations sur les convexes

Une réunion finie de convexes est-elle convexe ? Et une intersection ? Et pour des réunions et intersections quelconques ?

6.18 Limite d'une suite de matrices

1) Soit (A_n) et (B_n) deux suites de matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ convergeant respectivement vers A et B. Montrer que $A_nB_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} AB$.

2) Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ telle que (A^k) converge vers une matrice P. Montrer que P est une matrice de projection.

6.19 Norme d'algèbre sur les matrices et convergence d'une suite

Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

1) Montrer que $(A, B) \mapsto \operatorname{tr}(A^\top B)$ est un produit scalaire sur E.

2) Montrer que la norme associée à ce produit scalaire est en fait la norme $\|.\|_2$ de E muni de la base canonique. On l'appelle aussi *norme de Frobenius*.

3) Montrer que pour tout $A, B \in E$, $\|AB\|_2 \leqslant \|A\|_2 \|B\|_2$.

4) Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|A\|_2 < 1$. Montrer que $A^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

6.20 Le spectre « commute » et polynôme caractéristique d'une matrice diagonale par blocs

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que AB et BA ont le même spectre.

2) Soit $A_1, \dots, A_p$ des matrices carrées. Exprimer le polynôme caractéristique de $A = \operatorname{diag}(A_1, \dots, A_p)$ en fonction de ceux des A_i.

6.21 Détermination du spectre d'un endomorphisme de polynômes

Soit $E = \mathbb{K}[X]$ et $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ défini par $\varphi : P \mapsto XP'(X)$. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de φ.

6.22 Éléments propres d'une matrice

Donner les éléments propres de

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).$$

6.23 Matrice compagne

Pour $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$ polynôme unitaire, on définit la matrice compagne de P :

$$\mathscr{C}(P) = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Pour $n = 1$, P s'écrit $X + a_0$ et $\mathscr{C}(P) = \mathscr{C}(X + a_0) = (-a_0)$.

1) Montrer que P est le polynôme caractéristique de $\mathscr{C}(P)$.

2) On suppose dans cette question que P est scindé à racines simples, notées $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Montrer que :

$$\mathscr{C}(P)^\top = V \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) V^{-1}$$

où V désigne la matrice de Vandermonde de $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

6.24 Deux diagonalisations – bête et méchante et plus théorique

1) Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Diagonaliser la matrice J dont tous les coefficients sont égaux à 1 . Puis diagonaliser la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $a_{i,j} = \alpha$ si $i = j, a_{i,j} = \beta$ sinon.

6.25 Deux applications de la trigonalisation

1) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente.

- **a)** Montrer que A est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte.
- **b)** Le résultat est-il encore vrai pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

2) Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie n et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $\operatorname{Sp}(P(u)) = P(\operatorname{Sp}(u))$.

6.26 Diagonalisation simultanée

Dans un espace vectoriel E de dimension finie, on considère deux endomorphismes u et v diagonalisables tels que $u \circ v = v \circ u$.

1) Montrer que les sous-espaces propres de v sont stables par u.

2) Montrer que l'endomorphisme induit de u à un sous-espace propre de v est diagonalisable.

3) Montrer qu'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u et v.

6.27 Racine carrée d'une matrice

1) Soit M une matrice diagonale d'ordre n dont les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts. Montrer que les matrices commutant avec M sont exactement les matrices diagonales.

2) Déterminer les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3) Combien y a-t-il de matrice M telle que $M^2 = A$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$? dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?