

# Semaine 1 du 15 septembre 2025 (S38)

## I Rappels et compléments d'algèbre linéaire (1ère partie)

### 1 Produits et espaces vectoriels d'applications

#### 1.1 Espaces vectoriels produits

#### 1.2 Applications à valeurs dans un ev

### 2 Sommes d'espaces vectoriels

#### 2.1 Rappels de première année : sommes, sommes directes, supplémentaires

#### 2.2 Généralisation à plus de deux sev

### 3 Matrices par blocs

#### 3.1 Définition

#### 3.2 Opérations par blocs

### 4 Matrices semblables

### 5 Sous-espaces vectoriels stables

#### 5.1 Définitions et premières propriétés

#### 5.2 Stabilité et matrices triangulaires par blocs

### 6 Exercices à connaître

L'exercice 6.2 est très long. Vous pourrez ne donner qu'une partie des questions, par exemple (1 et 2), (1 et 3) ou (5).

#### 6.1 Image d'une base par un endomorphisme

Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie.

- 1) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un endomorphisme  $u$  tel que  $\text{Ker}(u) = F$  et  $\text{Im}(u) = G$ .
- 2) Construire un tel endomorphisme  $u$  avec  $E = \mathbb{R}^3$ ,  $F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \}$  dans  $\mathbb{R}^3$  et  $G = \{ \lambda(2, -1, -1) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$ .

#### 6.2 Une caractérisation des homothéties

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ , où  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- 1) Déterminer l'ensemble des endomorphismes de  $E$  laissant stables tous les sev de dimension 1.

Cette question est archi-classique, et n'est pas toujours présentée sous cette forme.

On pourra se demander le lien entre

$$\forall x \in E, \exists \lambda \in \mathbb{K}, f(x) = \lambda x$$

et

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, f(x) = \lambda x.$$

- 2) Déterminer l'ensemble des endomorphismes de  $E$  laissant stables tous les sev de dimension 2.
- 3) Si  $E$  est de dimension finie, en déduire le « centre » de  $\mathcal{L}(E)$ , c'est-à-dire l'ensemble endomorphismes qui commutent avec tous les endomorphismes (on pourra remarquer qu'un tel endomorphisme commute nécessairement avec les projections sur toutes les droites vectorielles).

### 6.3 Noyaux itérés

Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace de dimension finie  $n$  non nulle. On définit, pour tout entier naturel  $p$  :

$$F_p = \text{Ker}(f^p) \quad \text{et} \quad G_p = \text{Im}(f^p)$$

(  $f^p$  désigne l'itérée d'ordre  $p$  de  $f$  :  $f^0 = \text{Id}$  et,  $f^{p+1} = f \circ f^p$  ).

- 1) Démontrer que, des deux suites de s.e.v.  $(F_p)$  et  $(G_p)$ , l'une est croissante et l'autre décroissante (pour l'inclusion).
- 2) Démontrer qu'il existe un plus petit entier naturel  $r$  tel que  $F_r = F_{r+1}$ , et démontrer qu'alors, pour tout entier naturel  $p$  supérieur ou égal à  $r$ ,  $F_p = F_{p+1}$ .
- 3) Démontrer qu'il existe un plus petit entier naturel  $s$  tel que  $G_s = G_{s+1}$ , et démontrer qu'alors, pour tout entier naturel  $p$  supérieur ou égal à  $s$ ,  $G_p = G_{p+1}$ . Y-a-t-il un lien entre  $r$  et  $s$  ?
- 4) Démontrer que  $G_s$  et  $F_r$  sont supplémentaires dans  $E$ .

### 6.4 « Inégalité triangulaire » et une autre inégalité autour du rang

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies et  $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$ .

- 1) a) Montrer que  $\text{rg}(u + v) \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$ .  
b) En déduire que  $|\text{rg}(u) - \text{rg}(v)| \leq \text{rg}(u + v)$ .
- 2) On suppose que  $E = F$ , et  $\dim E = n$ . Montrer l'encadrement :

$$\text{rg}(u) + \text{rg}(v) - n \leq \text{rg}(u \circ v) \leq \inf(\text{rg}(u), \text{rg}(v)).$$

### 6.5 Endomorphismes nilpotents

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$ . On dit que  $f \in \mathcal{L}(E)$  est nilpotent lorsqu'il existe  $k \geq 1$  tel que  $f^k = 0$ .

- 1) Montrer qu'il existe un unique entier  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $f^{p-1} \neq 0$  et  $f^p = 0$ . Cet entier est appelé *indice de nilpotence* de  $f$ .

Dans cet énoncé, on considère  $f \in \mathcal{L}(E)$  nilpotent d'indice  $p$ .

- 2) Montrer qu'il existe  $x \in E$  tel que  $\mathcal{F} = (x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$  est une famille libre.
- 3) En déduire que  $p \leq n$ .
- 4) On suppose dans cette question que  $p = n$ . Déterminer  $\text{Mat}_{\mathcal{F}}(f)$  et  $\text{rg}(f)$ .
- 5) Donner un exemple d'espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$  et d'endomorphisme  $f \in \mathcal{L}(E)$  nilpotent d'indice  $n$ .