XVII. Équations différentielles

10 octobre 2025

Table des matières

Programme officiel

Calcul différentiel

A - Équations différentielles linéaires scalaires

Contenus	Capacités & commentaires
Équation différentielle scalaire d'ordre 2 à coefficients continus $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$.	
Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.	La résolution explicite de l'équation différentielle doit comporter des indications.
Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	
Espace vectoriel des solutions de l'équation homogène, dimension.	Exemples d'utilisation de développements en série entière pour la recherche de solutions.

1 Généralités sur les équations différentielles linéaires.

1.1 Cadre

- On s'intéressera à des équations différentielles dont les solutions sont à valeurs dans $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- On considérera I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.
- On s'intéressera uniquement à des équations différentielles ***linéaires***.

Définition 1.1.1 (Équation différentielle linéaire)**.**
Soit n un entier naturel non nul, et $a_0,\dots,a_{n-1}$ et b des applications continues de I dans $\mathbb{K}$, alors

1. On appelle ***équation différentielle linéaire d'ordre*** n l'équation de variable y

$$y^{(n)} \ + \ a_{n-1}(t)y^{(n-1)} \ + \ \dots \ + \ a_1(t)y' \ + \ a_0(t)y \quad = \quad b(t). \quad (\mathscr{E})$$

2. Une ***solution*** de cette équation est une application $f : I \to \mathbb{K}$ n fois dérivable sur I vérifiant : pour tout $t \in I$,

$$f^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)f^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)f'(t) + a_0(t)f(t) \ = \ b(t).$$

3. L'équation $(\mathscr{E})$ est dite ***homogène*** si b est la fonction nulle ($b = 0_{\mathbb{K}^I}$).
4. ***L'équation homogène associée à*** $(\mathscr{E})$ est

$$y^{(n)} \ + \ a_{n-1}(t)y^{(n-1)} \ + \ \dots \ + \ a_1(t)y' \ + \ a_0(t)y \quad = \quad 0. \quad (\mathscr{H})$$

Remarque 1.1.2.
Nous ne nous intéresserons pas dans le reste de ce chapitre au cas plus général d'une équation

$$a_n(t)y^{(n)} \ + \ a_{n-1}(t)y^{(n-1)} \ + \ \dots \ + \ a_1(t)y' \ + \ a_0(t)y \quad = \quad b(t) \quad (\mathscr{E})$$

où on a également affecté $y^{(n)}$ d'un coefficient $a_n(t)$.
En effet :

- Si a_n ne s'annule pas, il suffit de diviser cette équation par $a_n(t)$ pour se ramener au cas étudié ici.
- Si a_n s'annule, il est difficile de donner des résultats généraux. En pratique, si on rencontre une telle équation où a_n s'annule, on cherchera en général les solutions sur les intervalles où a_n ne s'annule pas et on regardera au cas par cas comment recoller les solutions aux points où a_n s'annule.

Définition 1.1.3 (Problème de Cauchy)**.**
Soit $t_0 \in I$ et $y_0,\dots,y_{n-1}$ des éléments de $\mathbb{K}$.
La recherche des solutions f de $(\mathscr{E})$ vérifiant les ***conditions initiales*** suivantes :

$$f(t_0) = y_0 \quad \text{et } f'(t_0) = y_1 \quad \dots \quad \text{et } f^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$$

est appelé ***problème de Cauchy linéaire d'ordre*** n

1.2 Structure de l'ensemble des solutions

Théorème 1.2.1 (Structure des solutions)**.**
Soit

- $n \in \mathbb{N}$
- $(\mathscr{E})$ une équation différentielle linéaire d'ordre n, d'ensemble de solutions $S_{\mathscr{E}}$
- $(\mathscr{H})$ l'équation homogène associée, d'ensemble de solutions $S_{\mathscr{H}}$

Alors

1. $S_{\mathscr{E}} \subset \mathscr{C}^n(I, \mathbb{K})$;
2. $S_{\mathscr{H}}$ est un sev de $\mathscr{C}^n(I, \mathbb{K})$;

3. Pour tout $y_0 \in S_{\mathscr{E}}$ fixé, on a
$$S_{\mathscr{E}} = \{ y_0 + y \mid y \in S_{\mathscr{H}} \} = y_0 + S_{\mathscr{H}}.$$
4. En particulier, $S_{\mathscr{E}}$ est l'ensemble vide ou un singleton ou un ensemble infini.

Démonstration.
Sous les hypothèses de l'énoncé :

1. Toute solution f est nécessairement n fois dérivable et pour tout $t \in I$,
$$f^{(n)}(t) = b(t) - a_{n-1}(t)f^{(n-1)}(t) - \ldots - a_1(t)f'(t) - a_0(t)f(t).$$
Or b, a_{n-1}, $f^{(n-1)}$, ..., a_0, f sont des applications continues. Donc $f^{(n)}$ est continue, donc $f \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{K})$.
2. L'application nulle est une solution triviale de $S_{\mathscr{H}}$, donc $S_{\mathscr{H}}$ est non vide.
Pour toute application f n fois dérivable et tout $t \in I$, notons $\psi_f(t)$ le scalaire
$$f^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)f^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)f'(t) + a_0(t)f(t).$$
On a alors $f \in S_{\mathscr{H}} \iff \forall t \in I \quad \psi_f(t) = 0$ (ou, de façon plus concise : $f \in S_{\mathscr{H}} \iff \psi_f = 0_{\mathbb{K}^I}$).
Soit alors f et g deux applications n fois dérivables de I dans $\mathbb{K}$ et λ et μ deux éléments de $\mathbb{K}$. Alors $\lambda f + \mu g$ est évidemment n fois dérivable. Et pour tout $t \in I$, on a $\psi_{\lambda f + \mu g}(t) = \lambda \psi_f(t) + \mu \psi_g(t)$ (autrement dit $\psi_{\lambda f + \mu g} = \lambda \psi_f + \mu \psi_g$).
En particulier, si f et g sont solutions de l'équation homogène, on a $\psi_f = 0$ et $\psi_g = 0$, donc $\psi_{\lambda f + \mu g} = 0$ donc $\lambda f + \mu g \in S_{\mathscr{H}}$.
3. Soit $y_0 \in S_{\mathscr{E}}$ fixé. On a donc, pour tout $t \in I$, $\psi_{y_0}(t) = b(t)$
Soit alors $f : I \to \mathbb{K}$ une application n fois dérivable. On a
$$\begin{aligned} f \in S_{\mathscr{E}} &\iff \psi_f = b \\ &\iff \psi_f = \psi_{y_0} \\ &\iff \psi_{f - y_0} = 0 \\ &\iff f - y_0 \in S_{\mathscr{H}} \end{aligned}$$
Donc pour tout $f \in S_{\mathscr{E}}$, f s'écrit sous la forme $y_0 + y$ où $y \in S_{\mathscr{H}}$. Donc $S_{\mathscr{E}} \subset \{ y_0 + y \mid y \in S_{\mathscr{H}} \}$.
Réciproquement, pour tout $y \in S_{cH}$, l'application f définie par $f = y_0 + y$ est n fois dérivable et $f - y_0 \in S_{\mathscr{H}}$, donc $f \in S_{\mathscr{E}}$. Donc $\{ y_0 + y \mid y \in S_{\mathscr{H}} \} \subset S_{\mathscr{E}}$.
On a donc bien $S_{\mathscr{E}} = \{ y_0 + y \mid y \in S_{\mathscr{H}} \}$.
4. On sait que $S_{\mathscr{H}}$ n'est pas vide puisqu'il contient au moins l'application nulle. Supposons qu'il contienne au moins une autre application f. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, λf appartient également à $S_{\mathscr{H}}$. Donc ou bien $S_{\mathscr{H}}$ est réduit à un élément, ou bien il est infini.
D'après le point précédent, si $S_{\mathscr{E}}$ possède au moins un élément y_0, on a $S_{\mathscr{E}} = \{ y_0 + y \mid y \in S_{\mathscr{H}} \}$. Donc $y \mapsto y_0 + y$ est une bijection de $S_{\mathscr{H}}$ sur $S_{\mathscr{E}}$, donc $S_{\mathscr{E}}$ est ou bien réduit à un élément (y_0) ou bien est infini.
Donc ou bien $S_{\mathscr{E}}$ est vide, ou il est réduit à un élément, ou il est infini.

□

Théorème 1.2.2 (Principe de superposition)**.**
Soit n un entier, a_0,...,a_{n-1}, b_1, b_2 des applications continues de I dans $\mathbb{K}$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. Notons a_n la fonction constante égale à 1. On considère les équations
$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = b_1, \qquad (\mathscr{E}_1)$$
$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = b_2, \qquad (\mathscr{E}_2)$$
$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2. \qquad (\mathscr{E})$$
Alors pour toute solution y_1 de $\mathscr{E}_1$ et toute solution y_2 de $\mathscr{E}_2$, $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est une solution de $\mathscr{E}$.

Démonstration.
On reprend les notations de la démonstration de la proposition 1.2.1. Soit y_1 et y_2 des solutions respectives de $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$. On a $\psi_{y_1} = b_1$ et $\psi_{y_2} = b_2$. Or $\psi_{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2} = \lambda_1 \psi_{y_1} + \lambda_2 \psi_{y_2}$. Donc $\psi_{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2} = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$. □

Théorème 1.2.3 (Solutions du problème de Cauchy linéaire)**.**
Soit n un entier naturel et $\mathscr{E}$ une équation différentielle linéaire d'ordre n. Alors, pour tout choix des conditions initiales, le problème de Cauchy linéaire d'ordre n admet une unique solution.

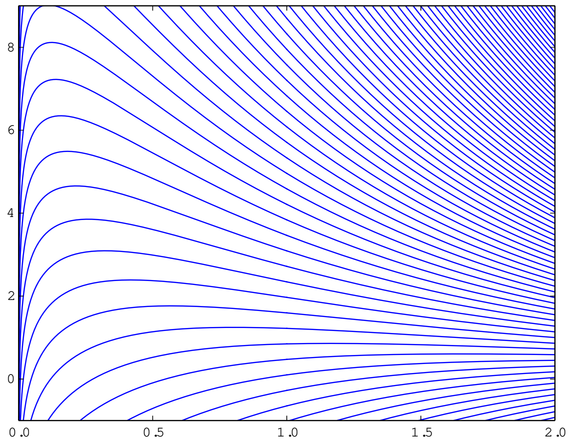

FIGURE 1.1 – Courbes solutions de l'équation $y' + y = \dfrac{1}{x}$, représentées sur $]0, 2] \times [-1, 9]$.

Remarque 1.2.4.
Ce théorème est hors-programme dans le cas général. Sa démonstration dans le cas général requiert en effet des outils d'analyse que nous n'avons pas encore à notre disposition.

En revanche, dans les cas $n = 1$ et $n = 2$, le résultat est au programme et sera démontré.

Remarque 1.2.5.
Le théorème précédent implique que par chaque point de $I \times \mathbb{R}$, il passe une et une seule courbe solution. Les courbes solutions partitionnent donc $I \times \mathbb{R}$. Un exemple est donné dans la figure 1.1.

2 Rappels sur les équations différentielles linéaires du premier ordre

2.1 Résolution de l'équation homogène

Théorème 2.1.1.
Soit A une primitive de a sur I. Soit $a \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K})$. Alors, l'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' + ay = 0$ est

$$S_{\mathscr{H}} = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & K\mathrm{e}^{-A(t)} \end{array} \middle| \, K \in \mathbb{K} \right\}.$$

ou encore

$$S_{\mathscr{H}} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(f) \quad \text{où} \quad f \; : \; I \to \mathbb{K}, \; t \mapsto \mathrm{e}^{-A(t)}.$$

Si de plus une condition initiale est fixée, alors la solution est unique. En particulier si y s'annule en un point, elle est identiquement nulle.

2.2 Résolution d'une équation avec second membre.

Théorème 2.2.1.
Soit a et b deux applications continues de I dans $\mathbb{C}$, et A une primitive de a.

Alors le problème de Cauchy $y' + ay = b$ et $y(t_0) = y_0$ admet une unique solution :

$$\left\{ \begin{array}{ccl} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \mathrm{e}^{A(t_0) - A(t)} y_0 + \mathrm{e}^{-A(t)} \displaystyle\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{A(u)} b(u) \, \mathrm{d}u \end{array} \right.$$

La méthode sur laquelle repose la démonstration est à connaître et s'appelle la ***méthode de la variation de la constante***.

Lemme 2.2.2.
Soit $h : I \to \mathbb{C}$ ne s'annulant pas. Alors, pour tout $y : I \to \mathbb{C}$, il existe une unique fonction $C : I \to \mathbb{C}$ telle que $y = Ch$.

De plus, si h est dérivable, alors y est dérivable si et seulement si C l'est.

Démonstration.
C'est élémentaire : $y = Ch$ si et seulement si $C = \dfrac{y}{h}$.

On obtient la dérivabilité de C ou de y par opérations usuelles sur les fonctions dérivables. □

Démonstration (Théorème 2.2.1)**.**
Notons $\mathscr{E}$ l'équation $y' + ay = b$, $(\mathscr{H})$ l'équation homogène associée, $S_{\mathscr{E}}$ et $S_{\mathscr{H}}$ les ensembles de solutions respectifs de ces deux équations et S l'ensemble des solutions du problème de Cauchy $y' + ay = b$ et $y(t_0) = y_0$.

On sait que $y_{\mathscr{H}} : t \mapsto \mathrm{e}^{-A(t)}$ est une solution de $\mathscr{H}$ qui ne s'annule jamais.

D'après le lemme 2.2.2, toute fonction $y : I \to \mathbb{K}$ dérivable est de la forme $Cy_{\mathscr{H}}$, avec $C : I \to \mathbb{K}$ dérivable..

Soit donc une fonction $C : I \to \mathbb{K}$ est une application dérivable, posons $y = Cy_{\mathscr{H}}$. La fonction y est dérivable comme produit de fonctions dérivables.

Soit alors $t \in I$. On a

$$\begin{aligned} y' + ay &= C'y_{\mathscr{H}} + Cy'_{\mathscr{H}} + aCy_{\mathscr{H}} \\ &= C'y_{\mathscr{H}} + C\big(y'_{\mathscr{H}} + ay_{\mathscr{H}}\big). \end{aligned}$$

Or $y_{\mathscr{H}}$ est solution de $(\mathscr{H})$, donc $y'_{\mathscr{H}} + ay_{\mathscr{H}} = 0$. Donc y est solution de $\mathscr{E}$ si et seulement si $C'y_{\mathscr{H}} = b$, c'est-à-dire si et seulement si C' est l'application $t \mapsto \mathrm{e}^{A(t)}b(t)$, c'est-à-dire si et seulement si C est une primitive de $t \mapsto \mathrm{e}^{A(t)}b(t)$, *i.e.* si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$C : t \mapsto \lambda + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{A(u)} b(u)\,\mathrm{d}u.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et

$$y : t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-A(t)} + \mathrm{e}^{-A(t)} \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{A(u)} b(u)\,\mathrm{d}u.$$

Remarque : On vient donc de prendre une solution quelconque de $(\mathscr{H})$.

Alors, y est solution du problème de Cauchy ($y' + ay = b$ et $y(t_0) = y_0$) si et seulement si $y(t_0) = y_0$, donc si et seulement si $\lambda = y_0 \mathrm{e}^{A(t_0)}$, c'est-à-dire si et seulement si y est l'application

$$t \mapsto \mathrm{e}^{A(t_0) - A(t)} y_0 + \mathrm{e}^{-A(t)} \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{A(u)} b(u)\,\mathrm{d}u.$$

□

3 Rappels sur les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

3.1 Cadre du programme de première année

En première année, le seul cas au programme est celui où α et β sont des constantes. Plus généralement, ce sont les équations de la forme $ay'' + by' + cy = d$, où a, b, c sont des constantes de $\mathbb{K}$ avec $a \neq 0$ et $d \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$, d'inconnue $y : I \to \mathbb{K}$ deux fois dérivable sur I.

3.2 Résolution d'une équation homogène

On considère ici l'équation homogène définie sur $\mathbb{R}$

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{$\mathscr{H}$}$$

Lemme 3.2.1.
Soit $r \in \mathbb{K}$, la fonction $y_r : t \mapsto \mathrm{e}^{rt}$ est solution de $(\mathscr{H})$ si et seulement si $ar^2 + br + c = 0$.

Définition 3.2.2 (Équation et polynôme caractéristique)**.**
L'équation caractéristique de $(\mathscr{H})$ est l'équation

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{EC}$$

Le polynôme caractéristique de $(\mathscr{H})$ est

$$aX^2 + bX + c.$$

Théorème 3.2.3 (Solutions complexes de $(\mathscr{H})$).
Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$, avec $a \neq 0$.

1. Si (EC) a deux solutions complexes distinctes r_1, r_2, alors l'ensemble des solutions complexes de $(\mathscr{H})$ est
$$S_{\mathscr{H}} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \end{array} , \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$
ou encore
$$S_{\mathscr{H}} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(f_1, f_2) \ \text{ où } \ f_i \ : \ I \to \mathbb{C}, \ t \mapsto e^{r_i t} \ \text{ pour } \ i = 1, 2.$$
2. Si (EC) a une unique solution complexe r, alors l'ensemble des solutions complexes de $(\mathscr{H})$ est
$$S_{\mathscr{H}} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & (\lambda t + \mu) e^{rt} \end{array} , \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$
ou encore
$$S_{\mathscr{H}} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(f_1, f_2) \ \text{ où } \ f_1 \ : \ I \to \mathbb{C}, \ t \mapsto e^{rt} \ \text{ et } \ f_2 \ : \ I \to \mathbb{C}, \ t \mapsto t e^{rt}.$$

Théorème 3.2.4 (Solutions réelles de $(\mathscr{H})$).
Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$, avec $a \neq 0$.

1. Si (EC) a deux solutions réelles distinctes r_1, r_2, alors l'ensemble des solutions complexes de $(\mathscr{H})$ est
$$S_{\mathscr{H}} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \end{array} , \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$
ou encore
$$S_{\mathscr{H}} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(f_1, f_2) \ \text{ où } \ f_i \ : \ I \to \mathbb{C}, \ t \mapsto e^{r_i t} \ \text{ pour } \ i = 1, 2.$$
2. Si (EC) a une unique solution réelle r, alors l'ensemble des solutions complexes de $(\mathscr{H})$ est
$$S_{\mathscr{H}} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (\lambda t + \mu) e^{rt} \end{array} , \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$
ou encore
$$S_{\mathscr{H}} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(f_1, f_2) \ \text{ où } \ f_1 \ : \ I \to \mathbb{C}, \ t \mapsto e^{rt} \ \text{ et } \ f_2 \ : \ I \to \mathbb{C}, \ t \mapsto t e^{rt}.$$
3. Si (EC) a deux solutions complexes conjuguées distinctes, que l'on note $\alpha \pm i\omega$ avec $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$, alors l'ensemble des solutions complexes de $(\mathscr{H})$ est
$$\begin{aligned} S_{\mathscr{H}} &= \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda \cos(\omega t) e^{\alpha t} + \mu \sin(\omega t) e^{\alpha t} \end{array} , \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & A \cos(\omega t + \varphi) e^{\alpha t} \end{array} , \ A \in \mathbb{R}_+, \ \varphi \in]-\pi, \pi] \right\} \end{aligned}$$
ou encore
$$S_{\mathscr{H}} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(f_1, f_2) \ \text{ où } \ f_1 \ : \ I \to \mathbb{C}, \ t \mapsto \cos(\omega t) e^{\alpha t} \ \text{ et } \ f_2 \ : \ I \to \mathbb{C}, \ t \mapsto \sin(\omega t) e^{\alpha t}.$$

Remarque 3.2.5.
Dans tous les cas, l'ensemble des solutions a une structure de plan vectoriel.

Théorème 3.2.6.
Le problème de Cauchy $ay'' + by' + cy = 0$ et $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y'_0$, admet une unique solution.

3.3 Résolution d'une équation avec second membre

Théorème 3.3.1.
Si l'on connaît une solution $\tilde{y}$ de l'équation avec second membre alors on en connaît toutes les solutions : l'ensemble S des solutions de l'équation avec second membre est $S = \{ y_H + \tilde{y} \mid y_H \in S_H \}$.

3.4 Seconds membres particuliers

Nous avons déjà vu comment trouver une solution particulière à une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
Cependant, quand le second membre est d'une certaine forme et que l'équation est ***à coefficients constants***, il existe une autre méthode. Notons que cette seconde méthode n'est pas plus rapide ni plus efficace que la méthode de variation de la constante. Elle a par contre le mérite de pouvoir être utilisée pour des équations d'ordre 2 présentant les mêmes caractéristiques : coefficients constants et second membre de ces mêmes formes particulières.

On considère une équation $(\mathscr{E})$ de la forme $y' + ay = c$ ou $y'' + ay' + by = c$, où $a, b \in \mathbb{K}$. Nous supposons que l'une des conditions suivantes est remplie :

1. il existe un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{K}$ tel que $c = P$;
2. il existe $A, \alpha \in \mathbb{K}$ tels que $c(x) = A\mathrm{e}^{\alpha x}$;
3. il existe $A, \omega \in \mathbb{R}$ tels que $c(x) = A\cos(\omega x)$;
4. il existe $A, \omega \in \mathbb{R}$ tels que $c(x) = A\sin(\omega x)$.

Ces quatre cas sont ceux au programme, mais la méthode que nous allons développer peut également s'adapter lorsque dans les conditions précédentes la constante A est remplacée par un polynôme, et lorsque les sin et cos circulaires sont remplacés par des ch et sh hyperboliques.

Dans les quatre conditions au programme, il est possible de montrer qu'il existe à chaque fois une solution particulière d'une forme assez simple :

1. il existe un polynôme Q à coefficients dans $\mathbb{K}$ solution de $(\mathscr{E})$;
2. il existe un polynôme Q à coefficients dans $\mathbb{K}$ tel que $x \mapsto Q(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$ est solution de $(\mathscr{E})$;
3. il existe un polynôme Q à coefficients dans $\mathbb{C}$ tel que $x \mapsto Q(x)\mathrm{e}^{i\omega x}$ est solution de $y' + ay = A\mathrm{e}^{i\omega x}$ ou $y'' + ay' + by = A\mathrm{e}^{i\omega x}$. On peut alors montrer, grâce au principe de superposition notamment, que $x \mapsto \operatorname{Re}\left(Q(x)\mathrm{e}^{i\omega x}\right)$ est solution de $(\mathscr{E})$. Ainsi en développant, on remarque qu'il existe deux polynômes réels R et S tels que $c(x) = R(x)\cos(\omega x) + S(x)\sin(\omega x)$;
4. suivant le même principe que dans le cas précédent, il existe un polynôme Q à coefficients dans $\mathbb{C}$ tel que $x \mapsto \operatorname{Im}\left(Q(x)\mathrm{e}^{i\omega x}\right)$ est solution de $(\mathscr{E})$, et donc en développant, on remarque qu'il existe deux polynômes réels R et S tels que $c(x) = R(x)\cos(\omega x) + S(x)\sin(\omega x)$.

Le degré du poynôme Q se devine en injectant dans $(\mathscr{E})$ une fonction de la forme voulue. On détermine ensuite les coefficients du polynôme. Voyons cela sur les exemples suivants :

Exemple 3.4.1.
Soit $(\mathscr{E})$: $y' + y = 1 + 2x$, définie sur $\mathbb{R}$. Soit Q un polynôme. Alors Q est solution de $(\mathscr{E})$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q'(x) + Q(x) = 1 + 2x$. En particulier, pour que Q soit solution, il faut que $Q' + Q$ soit de degré 1 : cela n'est possible que si Q est de degré 1, car si Q n'est pas nul, $\deg Q' < \deg Q$. Posons alors $Q = d + eX$. Alors :

$$\begin{array}{rr} & Q \text{ est solution de } (\mathscr{E}) \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ e + (d + ex) = 1 + 2x \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ (e + d) + ex = 1 + 2x \\ \Leftrightarrow & [e + d = 1] \text{ et } [e = 2] \\ \Leftrightarrow & e = 2 \text{ et } d = -1 \end{array}$$

Ainsi $x \mapsto -1 + 2x$ est une solution particulière de $(\mathscr{E})$.

Exemple 3.4.2.
Soit $(\mathscr{E})$: $y'' - 2y' + y = 2\mathrm{e}^{x}$, définie sur $\mathbb{R}$. Soit Q un polynôme

et soit $y : x \mapsto Q(x)e^x$. Ainsi $y' : x \mapsto (Q'(x) + Q(x))e^x$ et $y'' : x \mapsto (Q''(x) + 2Q'(x) + Q(x))e^x$. Alors :

$$\begin{aligned} & y \text{ est solution de } (\mathscr{E}) \\ \Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R},\ (Q''(x) + 2Q'(x) + Q(x))e^x \\ & -2(Q'(x) + Q(x))e^x + Q(x)e^x = 2e^x \\ \Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R},\ Q''(x)e^x = 2e^x \\ \Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R},\ Q''(x) = 2 \end{aligned}$$

Un polynôme Q vérifiant cette relation est par exemple $Q = X^2$. Ainsi, $x \mapsto x^2 e^x$ est une solution particulière de $(\mathscr{E})$.

Finissons par un ultime exemple :

Exemple 3.4.3.
Soit $(\mathscr{E}) : y'' + y = 2\cos(x)$.
Résolvons tout d'abord l'équation $(\mathscr{E}') : y'' + y = 2e^{ix}$.
Soit Q un polynôme et $y_0 : x \mapsto Q(x)e^{ix}$.
Alors $y_0' : (Q'(x) + iQ(x))e^{ix}$ et $y_0'' : x \mapsto (Q''(x) + 2iQ'(x) - Q(x))e^{ix}$.
Donc y_0 est solution de $(\mathscr{E}')$ ssi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q''(x) + 2iQ'(x) = 2$.
On cherche donc Q de degré 1, donc de la forme $Q(x) = d + ex$.
Alors $Q''(x) + 2iQ'(x) = 2ie$, donc Q vérifie $Q''(x) + 2iQ'(x) = 2$ ssi $e = -i$.
Ainsi une solution particulière de $(\mathscr{E}')$ est $y_0 : x \mapsto -ixe^{ix}$.
Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Re}(y_0)(x) = \mathrm{Re}\left(-ix(\cos(x) + i\sin(x))\right) = x\sin(x)$.
Finalement, une solution particulière de $(\mathscr{E})$ est $x \mapsto x\sin(x)$.

4 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients continus

Tous les résultats au programme ont été énoncés dans le cadre général des équations différentielles linéaires d'ordre quelconque. On rappelle le théorème de Cauchy linéaire dans ce cadre :

4.1 Théorème de Cauchy linéaire et structure de l'ensemble des solutions

Théorème 4.1.1 (Théorème de Cauchy linéaire)**.**
Si a, b et c sont des applications continues de I dans $\mathbb{K}$, pour tout $(t_0, x_0, x_0') \in I \times \mathbb{K}^2$ il existe une et une seule solution f de l'équation différentielle

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$$

définie sur I et qui vérifie les conditions initiales : $f(t_0) = x_0, f'(t_0) = x_0'$.

Corollaire 4.1.2 (Structure de l'ensemble des solutions)**.**
Soient a et b des applications continues de I dans $\mathbb{K}$. L'ensemble $S_{\mathscr{H}}$ des solutions de l'équation homogène linéaire du second ordre :

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$$

est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2.

Démonstration.
On a déjà vu que $S_{\mathscr{H}}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit alors $t_0 \in I$ et φ l'application :

$$\varphi : \begin{cases} S_{\mathscr{H}} & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ f & \longmapsto & (f(t_0), f'(t_0)) \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que φ est linéaire. D'après le théorème de Cauchy linéaire, pour tout $(x_0, x_0') \in \mathbb{K}^2$ il existe une et une seule $f \in S_{\mathscr{H}}$ telle que $\varphi(f) = (x_0, x_0')$, c'est-à-dire que φ est bijective. C'est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels. Il en résulte que $S_{\mathscr{H}}$ est de dimension finie, et que $\dim S_{\mathscr{H}} = \dim \mathbb{K}^2 = 2$. □

Corollaire 4.1.3.
Avec les mêmes notations, si f_1 et f_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de $(\mathscr{H})$, l'ensemble des solutions de $(\mathscr{H})$ est :

$$S_{\mathscr{H}} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(f_1, f_2).$$

Il n'y aucune méthode au programme pour trouver une solution particulière, l'énoncé doit vous guider.
Nous allons tout de même passer en revue quelques techniques à connaître, illustrées par des exemples.

4.2 Si l'on connaît une solution de l'équation homogène

Considérons l'éqution $(\mathscr{E})\ : y'' + ay' + by = c$.
Suppposons que l'on connaisse une solution y_0 de l'équation homogène.
Dans ce cas il est possible d'utiliser la ***méthode de la variation de la constante***.
Nous allons nous placer sur un intervalle J sur lequel y_0 ne s'annule pas. Soit y une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur J. Nous pouvons alors poser $K(t) = \dfrac{y(t)}{y_0(t)}$, et K est donc de classe $\mathscr{C}^2$ sur J. Cela signifie que nous allons chercher une solution y sous la forme $y = Ky_0$.
Nous raisonnons ensuite de manière connue :

$$\begin{aligned}\forall\ t \in J,\quad y(t) &= K(t)y_0(t)\\ y'(t) &= K'(t)y_0(t) + K(t)y_0'(t)\\ y''(t) &= K''(t)y_0(t) + 2K'(t)y_0'(t) + K(t)y_0''(t)\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) =& y_0(t)K''(t) + \left(2y_0'(t) + a(t)y_0(t)\right)K'(t)\\ &+ \left(y_0''(t) + a(t)y_0'(t) + b(t)y_0(t)\right)K(t)\\ =& y_0(t)K''(t) + \left(2y_0'(t) + a(t)y_0(t)\right)K'(t).\end{aligned}$$

Ainsi y est solution de $(\mathscr{E})$ si et seulement si K' vérifie l'équation différentielle linéaire d'ordre 1

$$y_0(t)(K')'(t) + \left(2y_0'(t) + a(t)y_0(t)\right)(K')(t) = c(t).$$

Une fois résolue cette équation, nous trouvons toutes les solutions de $(\mathscr{E})$.

Exemple 4.2.1.
Résolvons l'équation $x(x+1)y'' + (x+2)y' - y = 0$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$, en remarquant que $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est une solution.
On vérifie aisément que $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est solution.
Soit alors $K \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$ et $y\ : x \mapsto \dfrac{K}{x}$.
Après avoir calculé $y'(x)$ et $y''(x)$, nous trouvons que y est solution si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $(x+1)K''(x) - K'(x) = 0$. Ainsi il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $K'(x) = \lambda(x+1)$, et donc il existe μ tel que $y(x) = \dfrac{\frac{1}{2}\lambda(x+1)^2 + \mu}{x}$.
L'ensemble des solutions est donc $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\frac{1}{2}\lambda(x+1)^2 + \mu}{x} \end{array},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$
ou encore $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\lambda}{2}(x+2) + \dfrac{\mu}{x} \end{array},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$.

Il était aussi possible dans ce dernier exercice de chercher une solution polynomiale. C'est d'ailleurs une idée à garder en tête, car le cas où il y a une solution polynomiale se rencontre fréquemment.

Exercice 4.2.2.
Résoudre sur $\mathbb{R}^*$ l'équation $t^3y'' + ty' - y = 0$.

4.3 Trouver une solution grâce à un développement en série entière

La méthode a déjà été vue dans le chapitre sur les séries entières.

Exemple 4.3.1.
Déterminons toutes les solutions de $(\mathscr{E})\ : xy'' - 2y' + xy = 0$ qui sont développables en série entière, et exprimons-les à l'aide des fonctions usuelles.

Soit $y = \sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Alors pour tout $x \in]-R, R[$, $xy''(x) - 2y'(x) + xy(x) = a_1 +$

$\sum_{n=1}^{+\infty} (n(n+1)a_{n+1} - 2(n+1)a_{n+1} + a_{n-1})\, x^n$.
Ainsi y est solution si et seulement si $a_1 = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n-2)(n+1)a_{n+1} = -a_{n-1}$.

On trouve alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{2k} = (-1)^{k-1}\dfrac{(2k-1)}{(2k)!}a_0$, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a_{2k+1} = 3(-1)^{k-1}\dfrac{2k}{(2k+1)!}a_3$.

Or $f_1(x) = \sum_{k\geqslant 0}(-1)^{k-1}\dfrac{(2k-1)}{(2k)!}x^{2k} = x\sin x + \cos x$, et $f_1(x) = \sum_{k\geqslant 1} 3(-1)^{k-1}\dfrac{2k}{(2k+1)!}x^{2k+1} = 3(-x\cos x + \sin x)$.
Ces deux séries entières sont de rayon infini, et donc définies sur $\mathbb{R}$.
Finalement l'ensemble des solutions développables en série entière est $\text{Vect}(f_1, f_2)$. Puisque c'est un plan vectoriel, on en déduit c'est l'ensemble des solutions de $(\mathscr{E})$. Les solutions de $(\mathscr{E})$ sont donc toutes développables en série entière.

5 Systèmes différentiels

5.1 Définition

On appelle ***système différentiel linéaire*** tout système de la forme :

$$(\mathscr{S}) \ : \ \begin{cases} y_1' & = a_{11}y_1 & + & \dots & + & a_{1n}y_n + b_1 \\ . & & . & . & & \\ . & & . & . & & \\ y_n' & = a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{nn}y_n + b_n \end{cases}$$

où les a_{ij} et les b_i sont des éléments de $\mathscr{C}^0(I, \mathbb{K})$, et les y_i sont les inconnues, dans $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$.

Le ***système homogène associé*** est le système :

$$(\mathscr{S}_H) \ : \ \begin{cases} y_1' & = a_{11}y_1 & + & \dots & + & a_{1n}y_p \\ . & & . & . & & \\ . & & . & . & & \\ y_n' & = a_{n1}y_1 & + & \dots & + & a_{nn}y_p \end{cases}$$

Ces systèmes peuventt se réécrire sous forme matricielle en posant $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ et $A = (a_{ij})_{i,j \in [\![1,]\!]}$:

$$(\mathscr{S}) \ : Y' = AY + B \ , \ \ (\mathscr{S}_H) \ : Y' = Ay.$$

Il n'y a rien au programme concernant l'étude générale des systèmes différentiels linéaires.
Mentionnons toutefois que les théorèmes de structure et de Cauchy linéaire s'y adaptent : l'ensemble des solutions d'un système différentiel linéaire d'ordre n homogène est un sous-espace vectoriel de dimension n. Pour obtenir l'ensemble des solutions du système avec second membre associé, il suffit de rajouter une solution particulière aux solutions du système homogène. Et enfin, étant données les valeurs des y_i en un point fixé t_0, ce qui constitue donc un jeu de conditions initiales, il existe une et une seule solution du système vérifiant ces conditions initiales.

Nous nous cantonnerons à donner des exemples dans le cas où les a_{ij} sont des constantes et où A est diagonalisable ou trigonalisable.

5.2 Exemples

Quelques exemples ont été vus dans le chapitre de réduction des endomorphismes, traitons-en de nouveaux.

Exemple 5.2.1.
Considérons le système $\begin{cases} x' & = x + y \\ y' & = -x + 3y \end{cases}$, où $x, y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Le système s'écrit $(\mathscr{S})\ : X' = AX$.
Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A.
Le polynôme caractéristique de A est $(X-1)(X-3)+1 = (X-2)^2$.
Ainsi A est trigonalisable mais pas diagonalisable.
On observe que $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre. Posons $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors $\mathscr{B} = (u, v)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ est dans cette base $T = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Si l'on pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, alors $A = PTP^{-1}$.
Posons $Y = P^{-1}X$. Alors $X' = AX$ si et seulement si $X' = PTP^{-1}X$ si et seulement si $P^{-1}X' = TP^{-1}X$ si et seulement si $Y' = TY$.
Si $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ où $a, b \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$, alors le système $(\mathscr{S})'\ : Y' = TY$ s'écrit
$$\begin{cases} a' &= 2a + b \\ b' &= 2b \end{cases}.$$
Y est donc solution si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $b\ : t \mapsto \alpha \mathrm{e}^{2t}$ et $a' = 2a + b$, si et seulement s'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $b\ : t \mapsto \alpha \mathrm{e}^{2t}$ et $a\ : t \mapsto (\beta + \alpha t)\mathrm{e}^{2t}$.
Puisque $X = PY$, X est solution de $(\mathscr{S})$ si et seulement s'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $X(t) = \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta + \alpha t \\ \alpha \end{pmatrix}$.
Finalement l'ensemble des solutions est
$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} \beta + \alpha t \\ \alpha + \beta + \alpha t \end{pmatrix} \end{array},\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exemple 5.2.2.

Considérons le système $\begin{cases} x' &= x \\ y' &= 3y - z \\ z' &= -x + 2z \end{cases}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Le système s'écrit $(\mathscr{S})$: $X' = AX$.
Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A.
Le polynôme caractéristique de A est $(X-1)(X-2)(X-3)$. Ainsi A est diagonalisable.
On observe que si $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors $\mathscr{B} = (u, v, w)$ est une base de vecteurs propres.
De plus $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et si $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors $A = PDP^{-1}$.
Posons $Y = P^{-1}X$. Alors $X' = AX$ si et seulement si $X' = PDP^{-1}X$ si et seulement si $P^{-1}X' = DP^{-1}X$ si et seulement si $Y' = DY$.
Si $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ où $a, b, c \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$, alors le système $(\mathscr{S})'\ : Y' = DY$ s'écrit
$$\begin{cases} a' &= a \\ b' &= 2b \\ c' &= 3c \end{cases}.$$
Y est donc solution si et seulement s'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tel que $a\ : t \mapsto \alpha \mathrm{e}^{t}$, $b\ : t \mapsto \beta \mathrm{e}^{2t}$ et $c\ : t \mapsto \gamma \mathrm{e}^{3t}$.
Puisque $X = PY$, X est solution de $(\mathscr{S})$ si et seulement s'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tel que $X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \mathrm{e}^{t} \\ \beta \mathrm{e}^{2t} \\ \gamma \mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}$.
Finalement l'ensemble des solutions est
$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & \alpha \mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array},\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}.$$

6 Autres méthodes à connaître

Nous présenterons ces techniques au travers d'exemples.

6.1 Raccordements de solutions

Exemple 6.1.1.
On cherche à déterminer les solutions $y \in \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de l'équation $x^3 y' = 2y$.
Sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation est équivalente à :
$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad y(x)' - \dfrac{2}{x^3} y(x) = 0.$
Une primitive de $x \mapsto \dfrac{2}{x^3}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ étant $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$, l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ est :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & K_1 \mathrm{e}^{-1/x^2} \end{array}, K_1 \in \mathbb{R} \right\}}.$$

De la même manière que précédemment, l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_-^*$ est :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_-^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & K_2 \mathrm{e}^{-1/x^2} \end{array}, K_2 \in \mathbb{R} \right\}}.$$

• Analyse : Soit y une solution de l'équation sur $\mathbb{R}$. En particulier, la restriction de y à $\mathbb{R}_+^*$ doit être solution de l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$ et celle à $\mathbb{R}_-^*$ doit être solution sur $\mathbb{R}_-^*$.
Il existe donc $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y(x) = K_1 \mathrm{e}^{-1/x^2}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$, $y(x) = K_2 \mathrm{e}^{-1/x^2}$. Mais y doit aussi être continue en 0. Or $\lim\limits_{x \to 0^+} K_1 \mathrm{e}^{-1/x^2} = \lim\limits_{x \to 0^-} K_2 \mathrm{e}^{-1/x^2} = 0$, et ce quelles que soient les constantes K_1 et K_2. Ainsi, $y(0) = 0$.

• Synthèse : Réciproquement, soient $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ et y la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $y(0) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y(x) = K_1 \mathrm{e}^{-1/x^2}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$, $y(x) = K_2 \mathrm{e}^{-1/x^2}$.
Ce qui a été fait précédemment nous permet d'affirmer que y est continue sur $\mathbb{R}$ et est solution de l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$. Pour qu'elle soit solution sur $\mathbb{R}$, il suffit de vérifier qu'elle est dérivable en 0 et qu'elle vérifie l'équation en 0.
Nous avons y dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
Soit $x > 0$. Le taux d'accroissement de y entre 0 et x vaut $\frac{K_1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x - 0}$. Il tend vers 0 lorsque x tend vers 0 en étant strictement positif. De même pour $x < 0$, ce taux d'accroissement tend vers 0 lorsque x tend vers 0 par valeurs négatives. Donc ce taux d'accroissement tend vers 0 en 0. Donc y est dérivable en 0, de dérivée nulle.
Dès lors nous avons bien $0^3.y'(0) = 2.y(0)$ et y est solution de l'équation sur $\mathbb{R}$.
Finalement, l'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} K_1 \mathrm{e}^{-1/x^2} & \text{si } x > 0 \\ K_2 \mathrm{e}^{-1/x^2} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{array} \right. \end{array}, K_1, K_2 \in \mathbb{R} \right\}}.$$

6.2 Changements de fonction ou de variable

Exemple 6.2.1.
Résolvons l'équation différentielle $xy' + y = \dfrac{1}{x^2 y^2}$.
Soit y une solution de cette équation, définie sur un intervalle I ne contenant pas 0. Remarquons que y ne s'annule pas et posons $u : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto xy(x)$. Alors, u est dérivable et, si $x \in I$,

$$u'(x) = xy'(x) + y(x) = \frac{1}{u^2(x)}.$$

Réciproquement, soit u définie sur un intervalle I ne contenant pas 0, ne s'annulant pas et vérifiant $u' = \dfrac{1}{u^2}$. Alors, en posant $y : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{u(x)}{x}$, y est dérivable et, si $x \in I$,

$$y'(x) = \frac{u'(x)}{x} - \frac{u(x)}{x^2} = \frac{1}{xu^2(x)} - \frac{u(x)}{x^2} = \frac{1}{x^3 y(x)} - \frac{y(x)}{x}.$$

Ainsi, y est bien solution de l'équation de départ sur I.

Soit donc u une fonction solution de $u' = \dfrac{1}{u^2}$ sur un intervalle I ne contenant pas 0. Alors, sur I, $u'u^2 = 1$, donc il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in I$, $u^3(x) = 3(x+\lambda)$.

Réciproquement, soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et I un intervalle ne contenant ni 0 ni $-\lambda$, soit $u : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt[3]{3(x+\lambda)}$. Alors u est dérivable et si $x \in I$,

$$u'(x) = \frac{3}{3\sqrt[3]{3(x+\lambda)}^2} = \frac{1}{u^2(x)}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de cette équation est l'ensemble des fonctions de la forme

$$\left\{\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\sqrt[3]{3(x+\lambda)}}{x} \end{array}\right. ,$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant ni 0 ni $-\lambda$.

Exemple 6.2.2.
Résolvons l'équation différentielle $x^2y'' + 3xy' + y = (x+1)^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour cela nous allons effectuer le changement de variable $t = \ln x$, ce qui revient à poser $z(t) = y(\mathrm{e}^t)$.
Notons (E) l'équation de l'énoncé.
Nous avons $z'(t) = \mathrm{e}^t y'(\mathrm{e}^t)$ et $z''(t) = \mathrm{e}^{2t}y''(\mathrm{e}^t) + \mathrm{e}^t y'(\mathrm{e}^t)$, donc :

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (E) &\Leftrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ xy''(x) + 3xy'(x) + y(x) = (x+1)^2 \\ &\Leftrightarrow \forall\, t \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^t y''(\mathrm{e}^t) + 3\mathrm{e}^t y'(\mathrm{e}^t) + y(\mathrm{e}^t) = (\mathrm{e}^t+1)^2 \\ &\Leftrightarrow \forall\, t \in \mathbb{R},\ z''(t) + 2z'(t) + z(t) = (\mathrm{e}^t+1)^2. \end{aligned}$$

Notons (E') cette dernière équation. Ses solutions sont toutes les fonctions de la forme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{2\mathrm{e}^{2t} + 9\mathrm{e}^t + 18}{18} + (at+b)\mathrm{e}^{-t} \end{array}$$

, quand a et b parcourent $\mathbb{R}$, et donc les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{2x^2 + 9x + 18}{18} + \dfrac{a\ln x + b}{x} \end{array}$$

, quand a et b parcourent $\mathbb{R}$.

7 Exercices classiques

7.1 Méthode de variation de la constante

1. Calculer la dérivée de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{2}\arctan t + \dfrac{1}{2}\dfrac{t}{1+t^2}$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(t^2+1)y'' - 2y = 0$ en commençant par rechercher une solution polynomiale de degré 2.
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(t^2+1)y'' - 2y = t$.

7.2 Un raccordement de solutions (banque CCINP MP)

On considère les deux équations différentielles suivantes :
$2xy' - 3y = 0 \quad (H)$
$2xy' - 3y = \sqrt{x} \quad (E)$

1. Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
2. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
3. L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0, +\infty[$?

7.3 Un système différentiel linéaire

Résoudre le système $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & y+z \\ y' & = & x \\ z' & = & x+y+z \end{array}\right.$.

7.4 Un changement de fonction

Résoudre $(x^2+1)\,y'' - (3x^2 - 4x + 3)\,y' + (2x^2 - 6x + 4)\,y = 0$ en utilisant le changement de fonction inconnue $z = (x^2+1)\,y$.