

Feuille d'exercice n° 03 : Intégrales généralisées

I. Révision de 1ère année

Exercice 1 Soit $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

- 1) Montrer que si $\int_0^\pi f(t) \sin t \, dt = 0$ alors il existe $a \in]0, \pi[$ tel que f s'annule en a .
- 2) Montrer que si $\int_0^\pi f(t) \sin t \, dt = \int_0^\pi f(t) \cos t \, dt = 0$ alors f s'annule 2 fois sur $]0, \pi[$.
(indice : on pourra regarder $\int_0^\pi f(t) \sin(t-a) \, dt$).

Exercice 2 (▲) [Irrationalité du nombre π]

- 1) Pour $a, b \in \mathbb{N}^*$, montrer que la fonction polynomiale $P_n(x) = \frac{1}{n!} x^n (bx - a)^n$ et ses dérivées successives prennent en 0 et en $\frac{a}{b}$ des valeurs entières.
- 2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^\pi P_n(t) \sin t \, dt$. Montrer que $I_n \rightarrow 0$.
- 3) En supposant $\pi = \frac{a}{b}$, montrer que $I_n \in \mathbb{Z}$. Conclure.

Exercice 3 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$.

- 1) Trouver toutes les fonctions f , continues sur $[a, b]$ et à valeurs réelles telles que $\left| \int_a^b f(t) \, dt \right| = \int_a^b |f(t)| \, dt$.
- 2) Même question pour des fonctions à valeurs complexes.

Exercice 4 (✎) Déterminer les primitives suivantes :

- | | | |
|-----------------------------------|---------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $\int \frac{\ln t}{t} \, dt$ | 3) $\int \frac{t}{1+t^4} \, dt$ | 6) $\int \cos^3 t \, dt$ |
| 2) $\int \frac{t^2}{1+t^3} \, dt$ | 4) $\int \tan t \, dt$ | 7) $\int \cos^2 t \sin^3 t \, dt$ |
| | 5) $\int \frac{dt}{t \ln t}$ | |

Exercice 5 (✎) Déterminer les primitives suivantes :

- | | | |
|-----------------------|---|-------------------------------------|
| 1) $\int \ln t \, dt$ | 2) $\int t \operatorname{Arctan} t \, dt$ | 3) $\int (t^2 - t + 1)e^{-t} \, dt$ |
|-----------------------|---|-------------------------------------|

Exercice 6 (✎) Calculer les intégrales suivantes :

- | | | |
|---|--|---|
| 1) $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} \, dt$ | 3) $\int_0^1 \frac{dt}{e^t + 1}$ | 5) $\int_0^\pi \frac{\sin t}{3 + \cos^2 t} \, dt$ |
| 2) $\int_1^e \frac{dt}{t + t(\ln t)^2}$ | 4) $\int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} \, dt$ | |

Exercice 7 (✎) Calculer $I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos(mt) \cos(nt) \, dt$ pour $m, n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8 (🚲) Pour tout entier n on pose $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} \, dx$. Calculer I_0 et I_1 . Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (3+2n)I_n = 2nI_{n-1}.$$

Exercice 9 (▲) On définit la fonction F de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} par $\forall x \in \mathbb{R}_+$,

$$F(x) = \int_0^\pi \frac{|\sin(tx)|}{t} dt.$$

- 1) Justifier proprement la définition de F .
- 2) Montrer que F est dérivable sur \mathbb{R}_+ et calculer sa dérivée.
- 3) Nous étudions à présent le comportement asymptotique de F .

a) Montrer que $\forall x > 1$,
$$F(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor - 1} \left(\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \right) + \int_{\pi \lfloor x \rfloor}^{\pi x} \frac{|\sin t|}{t} dt.$$

b) On rappelle que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$. En déduire que $F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \ln x$.

Exercice 10 (✎)

Montrer que : $\forall x \in [0, \pi/2]$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

Exercice 11 Déterminer les limites des suites définies par le terme général suivant :

$$1) \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}} \quad 2) \left(\frac{(2n)!}{n^n n!} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

II. Convergence et intégrabilité

Exercice 12 (✎) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. On pose $I(\alpha, \beta) = \int_0^1 \frac{dx}{|1 - x^\alpha|^\beta}$. Représenter l'ensemble des points du plan $M(\alpha, \beta)$ où $I(\alpha, \beta)$ converge.

Exercice 13 (✎) Donner une CNS sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que $\int_0^{+\infty} \frac{t - \sin t}{t^\alpha} dt$ existe.

Exercice 14 (✎) Étudier l'intégrabilité des applications suivantes :

- 1) $x \mapsto \frac{1+x}{\sqrt{x}+x^2}$ sur $]0; 1]$
- 2) $x \mapsto \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{x^3+1}}$ sur $[0; +\infty[$
- 3) $x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x^3+1}}$ sur $[1; +\infty[$
- 4) $x \mapsto \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+x}}$ sur $]0; 1]$
- 5) $x \mapsto \frac{\ln x}{x^3+x^2}$ sur $]0; 1]$
- 6) $x \mapsto \frac{1}{x} \left(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1} \right)$ sur $[1; +\infty[$
- 7) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^6}}$ sur $] -1; 1[$
- 8) $x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^4}}$ sur $]0; +\infty[$
- 9) $x \mapsto \frac{1+x^2 e^{-x}}{x^2 + e^{-2x}}$ sur $] -\infty; +\infty[$.

Exercice 15 Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$. On suppose que f et f' sont intégrables sur $[0, +\infty[$. Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 16 Soient $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 . On suppose que y et y'' sont de carré intégrable sur \mathbb{R}_+ : montrer que y' l'est également.

Exercice 17

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

- 1) Prouver que $\int_0^{+\infty} f$ converge si et seulement si la suite $n \mapsto \int_0^n f$ converge et que dans ces conditions :

$$\int_0^{+\infty} f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f.$$

- 2) Que se passe-t-il si on enlève l'hypothèse $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$?

Exercice 18 (▲)

Soient $\alpha > 0$ et $f \in \mathcal{C}^0([1, +\infty[, \mathbb{R}_+^*)$.

- 1) On suppose que f est intégrable sur $[1, +\infty[$. On pose $R(x) = \int_x^{+\infty} f(t) dt$ pour $x \geq 1$. Étudier l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{f(x)}{R(x)^\alpha}$ sur $[1, +\infty[$.
- 2) On suppose que f n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$. On pose $S(x) = \int_1^x f(t) dt$ pour $x \geq 1$. Étudier l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{f(x)}{S(x)^\alpha}$ sur $[2, +\infty[$.

Exercice 19 Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue, décroissante et de limite nulle. On pose pour tout $n \geq 0$:

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t) \sin(t) dt.$$

- 1) Montrer que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
- 2) Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t) \sin(t) dt$ converge. Quel est son signe ?
- 3) On suppose que $f(x) \geq \frac{1}{x}$ au voisinage de $+\infty$. Montrer que $t \mapsto f(t) \sin(t)$ n'est pas intégrable sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 20

Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que si $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge, alors $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge.

III. Calculs, limites et équivalents d'intégrales généralisées

Exercice 21 (✎) Existence et calcul des intégrales suivantes :

- 1) $\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{x^{10} + 1} dx$
- 2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} 2x} dx$
- 3) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$
- 4) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx$
- 5) $\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1-3x+2x^2) dx$

Exercice 22 (✎) Existence et calcul des intégrales suivantes :

- 1) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}} dx$
- 2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+x+1)^2} dx$
- 3) $\int_0^{+\infty} \frac{x - \operatorname{Arctan} x}{x^3} dx$
- 4) $\int_0^1 \frac{1+x}{\sqrt{x(1-x)}} dx$

Exercice 23

Donner un équivalent, lorsque x tend vers $+\infty$, de

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

Exercice 24 On veut étudier la convergence de $I = \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \right) dx$, et calculer cette intégrale.

- 1) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Majorer $\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$ en fonction de x (on distinguera deux cas : $x < 1$ et $x \geq 1$).
- 2) En déduire que I converge.
- 3) Calculer I grâce à une intégration par parties.

Exercice 25 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}$.

- 1) Existence de I_n ?
- 2) Donner une relation entre I_n et I_{n+1} (on pourra utiliser une intégration par parties).
- 3) Calculer I_n en fonction de n .

Exercice 26 Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

- 1) Donner un équivalent simple de $f(x)$ en 0.
- 2) Donner un équivalent simple de $f(x)$ en $+\infty$ (on pourra utiliser une intégration par parties et écrire que $f(x) = \int_x^{+\infty} u'(t)v(t) dt = [uv]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} u(t)v'(t) dt$, et montrer que $\int_x^{+\infty} u(t)v'(t) dt \leq \frac{1}{x}f(x)$).

Exercice 27 On pose : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$ et $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x) dx$.

- 1) Justifier l'existence de I , J et K .
- 2) Démontrer que $I = J = K$.
- 3) Calculer I .

Exercice 28

- 1) Montrer que $\int_0^1 x \ln(x) dx$ converge.
- 2) Soit $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x \ln(x)}{(1+x^2)^\alpha} dx$
 - a) Déterminer la nature de $I(\alpha)$ en fonction de α .
 - b) Effectuer le changement de variable $y = \frac{1}{x}$ dans $I(2)$. En déduire la valeur de $I(2)$.

Exercice 29 Considérons $I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^a)}$ où $a \in \mathbb{R}_+$.

- 1) Montrer que I converge.
- 2) Via un changement de variable, calculer I .

Exercice 30 Convergence de la suite $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t^n} dt$? Limite ?

Exercice 31 Soit f une application continue de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} et F de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

- 1) Montrer que si f admet une limite ℓ non nulle en $+\infty$, alors F admet aussi ℓ pour limite en $+\infty$.
- 2) Montrer que si f admet 0 pour limite en $+\infty$, alors F également.
- 3) Donner un exemple où f n'a pas de limite en $+\infty$ mais où F tend vers 0.
- 4) Montrer que si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, alors $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Exercice 32 Le but de cet exercice est de montrer la convergence de l'intégrale généralisée suivante : $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4 \sin^2 x}$.
Pour cela, on considère la série de terme général

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{1+x^4 \sin^2 x}.$$

- 1) Par un changement de variable, transformer u_n en $u_n = \int_0^\pi \frac{dx}{1+(n\pi+x)^4 \sin^2 x}$.
- 2) Encadrer ensuite u_n par les termes de la suite v_n où $v_n = \int_0^\pi \frac{dx}{1+(n\pi)^4 \sin^2 x}$.
- 3) Calculer explicitement l'intégrale v_n (*indication* : considérer le changement de variable $t = \tan x$).
- 4) En déduire un équivalent de u_n .
- 5) Conclure.

Exercice 33 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $A_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x} dx$
 et $B_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{x} dx$.

- 1) Question préliminaire : soit g une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ telle que $g(0) = 0$. Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t) \sin((2n+1)t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- 2) Étudier $A_n - A_{n-1}$ puis calculer A_n .
- 3) Étudier $B_n - A_n$ puis montrer que (B_n) admet une limite finie, et la donner.
- 4) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

Exercice 34 Soit $a \in]0, 1[$. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 0} a^{\sqrt{n}}$.

