Lycée La Martinière Monplaisir — Année 2025/2026

PSI* — Mathématiques

Feuille d'exercice n° 17 : **Équations différentielles**

I. Premier ordre

Exercice 1 Trouver $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(x) + \displaystyle\int_0^1 f(t)dt \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Exercice 2 () Résoudre $2x(1-x)y' + (1-x)y = 1$. On fera attention à bien préciser les intervalles de résolution. Existe-t-il des solutions définies sur $\mathbb{R}$? Lesquelles ?

Exercice 3 () Résoudre l'équation (E) : $ty' - y = t^2$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 () Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $xy' + y = \dfrac{1}{x^2y^2}$ (on pourra poser $u(x) = xy(x)$) ;

2) $yy' + y^2 = \dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{2}$ (on pourra poser $u(x) = y^2(x)$).

II. Second ordre

Exercice 5 () Trouver les applications de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + f(-x) = x\mathrm{e}^{x}$.

Exercice 6 () Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation $x^2y'' + xy' + y = 0$ en effectuant le changement de variable $t = \ln x$.

Exercice 7

1) Calculer la dérivée de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{2}\arctan t + \dfrac{1}{2}\dfrac{t}{1+t^2}$.

2) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(t^2+1)y'' - 2y = 0$ en commençant par rechercher une solution polynomiale de degré 2.

3) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(t^2+1)y'' - 2y = t$.

Exercice 8 () Résoudre l'équation $t^2x'' + 2tx' - 2x = t\cos t - \sin t$ (*indication* : pour la résolution de l'équation homogène, chercher x sous la forme $x = t^{\alpha}$).

Exercice 9 On considère sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$x^2y'' + 3xy' + y = 1 + x^2. \qquad (\mathscr{E})$$

On va résoudre cette équation différentielle par plusieurs méthodes différentes. Les questions sont indépendantes.

1) On fait le changement de fonction inconnue $u(x) = xy(x)$.
Former l'équation différentielle (E_1) que satisfait la fonction $u(x)$.
Résoudre (E_1) et en déduire l'ensemble des solutions de $(\mathscr{E})$.

2) On pose $v(x) = x^2y'(x) + xy(x)$.
Déterminer v. En déduire par une autre méthode l'ensemble des solutions de $(\mathscr{E})$.

Exercice 10 () Le but de cet exercice est de résoudre l'équation différentielle :

$$(1+x)y'' - 2y' + (1-x)y = x\mathrm{e}^{x} \qquad (1)$$

Posons $y = z\mathrm{e}^{x}$.

1) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par z.

2) La résoudre.

3) En déduire les solutions de l'équation (1).

Exercice 11 Soit l'équation différentielle **(E)** : $(x^2+1)y''-2y=0$.

1) Question préliminaire : On considère la fonction $\varphi\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}\ ,\ \ x\mapsto \dfrac{1}{2}\left(\operatorname{Arctan} x+\dfrac{x}{1+x^2}\right)$. Calculer φ'.
2) Déterminer une solution polynomiale de degré 2 de **(E)**, que l'on notera y_0.
3) Montrer que toute fonction y de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ peut s'écrire sous la forme $y=y_0\,z$, où z est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
4) En posant $y=y_0\,z$, montrer que y est solution de **(E)** si et seulement si la fonction $Z=z'$ est solution d'une équation différentielle **(E')** que l'on écrira.
5) En déduire toutes les solutions de l'équation **(E)** sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12 Soit $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ une fonction continue non nulle. Montrer que toute solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y''+p(x)y=0$ s'annule.

Exercice 13 Soit $f\ :\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f+f''\geqslant 0$. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x+\pi)+f(x)\geqslant 0$.

Exercice 14 On étudie l'équation différentielle

$$(E) : xy''+y'+y=0$$

1) Déterminer les solutions de (E) développables en série entière.
   Soit f une solution de l'équation (E).
2) Montrer que $xf'^2(x)+f^2(x)$ possède une limite quand x tend vers $+\infty$.
3) En déduire que la fonction f est bornée au voisinage de $+\infty$ et que sa dérivée y est de limite nulle.
4) Justifier la convergence des intégrales suivantes :

$$\int_1^{+\infty}-f'^2(x)\mathrm{d}x,\quad \int_1^{+\infty}\frac{f'(x)f(x)}{x}\,\mathrm{d}x\quad \text{et}\quad \int_1^{+\infty}\frac{f^2(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

5) En déduire la limite de f en $+\infty$.

III. Systèmes

Exercice 15 Résoudre le système différentiel suivant : $\begin{cases} x'=4x-2y\\ y'=x+y\end{cases}$

Exercice 16 Résoudre le système différentiel linéaire $\begin{cases} x'=x-z\\ y'=x+y+z\\ z'=-x-y+z\end{cases}$.

IV. Développements en série entière

Exercice 17 Résoudre l'équation différentielle

$$(E)\ :\ 4tx''-4x'+t^3x=0.$$

Exercice 18 Résoudre l'équation différentielle

$$xy''+2y'+\omega^2xy=0 \text{ avec } \omega\neq 0.$$

Exercice 19 Résoudre l'équation différentielle

$$(E)\ :\ 4xy''+2y'-y=0.$$