Exercice 5 : Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

" $\Rightarrow$ " Om suppose A semblable à $-A$ donc il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ tq $A = -PAP^{-1}$

tr(A)=tr(-A)
=-tr(A)
donc tr(A)=0
et c'est tout

Soient $\lambda \in Sp(A)$ et $X \in E_\lambda(A)$

$AX = \lambda X = -PAP^{-1}X$ donc $-\lambda P^{-1}X = AP^{-1}X$

donc $P^{-1}X \in E_{-\lambda}(A)$

· Si $\lambda \neq 0$: il existe une base où A est triangulaire avec ses valeurs propres λ et $-\lambda$ sur sa diagonale ainsi $tr(A) = \lambda - \lambda = 0$

· Si $\lambda = 0$: par l'absurde on supp que $tr(A) \neq 0$. 0 est valeur propre de A. Donc il existe une base où A est triangulaire avec un 0 sur sa diagonale. donc $det(A) = 0$ ainsi $\chi_A = X^2 - tr(A)X = X(X - tr(A))$ donc $tr(A)$ est val-p de A donc $-tr(A)$ est val-p de A. Absurde A ne peut pas avoir ~~3~~ valeurs propres.

quelles sont
les 2 autres ?

" $\Leftarrow$ " Om suppose que $tr(A) = 0$, il existe $Q \in GL_2(\mathbb{C})$ et $a, \lambda \in \mathbb{R}$ tels que $A = Q\begin{pmatrix}\lambda & a \\ 0 & -\lambda\end{pmatrix}Q^{-1}$ donc $det(A) = \lambda^2$

· Si $\lambda = 0$: on pose $S = \begin{pmatrix}-1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ on remarque que $S^2 = I_2$ donc $S^{-1} = S$

$$S\begin{pmatrix}0 & a \\ 0 & 0\end{pmatrix}S = \begin{pmatrix}-1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & a \\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -a \\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -a \\ 0 & 0\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}0 & a \\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

donc $A = \underbrace{QSQ^{-1}}_{P}(-A)\underbrace{QSQ^{-1}}_{P^{-1}}$

Si $\lambda \neq 0$: $\chi_A = X^2 - \lambda^2 = (X+\lambda)(X-\lambda)$
scindé à racines simples donc A est diagonalisable et il existe $R \in GL_2(\mathbb{C})$

telle que $A = R\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}R^{-1} = R\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}R^{-1}$

on rq que $R\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}RR^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= I_2$ donc A est semblable à $-A$ dans les 2 cas

$\boxed{A \text{ est semblable à } -A \text{ si et seulement si } \mathrm{tr}(A) = 0}$