Feuille d'exercice n° 09 : **Espaces probabilisés**

I. Familles sommables

Exercice 1 Soit $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Démontrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^{an}}{1 - z^{bn+c}} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{z^{cn}}{1 - z^{bn+a}}$.

Exercice 2 Soit $q \in]-1, 1[$.

1) Montrer que la famille $(q^{k\ell})_{k,\ell\in\mathbb{N}^*}$ est sommable.

2) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q^k}{1 - q^k} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)q^n$, où $d(n)$ est le nombre de diviseurs positifs de n.

II. Espaces probabilisés et tribus

Exercice 3 (✎) Soit $\mathscr{A}$ une tribu sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ ]-\infty, x] \in \mathscr{A}.$$

Montrer que tout intervalle de $\mathbb{R}$ est élément de $\mathscr{A}$.

Exercice 4 On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des parties A de $\mathbb{N}$ vérifiant

$$\forall k \in \mathbb{N},\ 2k \in A \Leftrightarrow 2k + 1 \in A.$$

Établir que $\mathscr{A}$ est une tribu sur $\mathbb{N}$.

Exercice 5 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement décroissante de réels positifs de limite nulle. Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe une probabilité P sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{P}(\{n, n+1, \ldots\}) = \lambda a_n.$$

Exercice 6 (✎) On pose : « la probabilité de tirer l'entier $n \in \mathbb{N}^*$ est $\dfrac{1}{2^n}$ ».

1) Montrer qu'on définit ainsi une probabilité P sur $\mathscr{P}(\mathbb{N}^*)$.

2) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note A_k l'événement « l'entier n est un multiple de k ». Déterminer $P(A_k)$.

3) Calculer $P(A_2 \cup A_3)$.

4) On note B l'événement « n est un nombre premier ». Montrer l'encadrement : $\dfrac{13}{32} < P(B) < \dfrac{209}{504}$.

Exercice 7 (✎) Une urne contient 4 boules blanches, 6 rouges et 10 noires.

1) On tire trois boules, successivement et avec remise. Calculer la probabilité que le tirage soit tricolore, bicolore ou unicolore.

2) Même question si le tirage des trois boules est simultané.

III. Probabilités conditionnelles

Exercice 8 (✎) Une urne contient trois pièces. La première est équilibrée ; la seconde fait face avec la probabilité p et la troisième avec la probabilité $0,3$. De plus, on sait que, lorsque l'on choisit une pièce au hasard et qu'on la lance, la probabilité de faire face est de $0,5$.
On choisit une pièce au hasard et on la lance trois fois. On obtient une fois face et deux fois pile. Quelle est la probabilité d'avoir tiré la troisième pièce ?

Exercice 9 () Un groupe de candidats répond à un QCM contenant deux questions Q_1 et Q_2 . S'ils connaissent la réponse à l'une des questions, ils donnent la solution, sinon ils choisissent au hasard parmi les quatre réponses possibles. On suppose que :

— 3/4 des candidats ne connaissent pas la réponse à Q_1 ;

— 2/3 des candidats ne connaissent pas la réponse à Q_2 ;

— 1/2 des candidats ne connaissent aucune réponse.

1) On prend un candidat au hasard. Déterminer la probabilité qu'il trouve la bonne réponse aux deux questions.

2) Déterminer la raison la plus plausible quand on répond juste aux deux questions : le candidat connaît 0, 1 ou 2 réponses ?

Exercice 10 () Des enfants sont placés en file indienne et se transmettent une information. Chaque enfant transmet l'information reçue telle quelle avec la probabilité p, tandis qu'il transmet l'information contraire avec la probabilité $1-p$.
On note p_n la probabilité que l'information transmise soit correcte après n enfants.

1) Établir une relation de récurrence satisfaite par p_n.

2) En déduire l'expression de p_n en fonction de n.

3) Quelle est la limite de $(p_n)_n$? Qu'en penser ?

Exercice 11 () Une puce peut se déplacer sur trois cases C_1, C_2, C_3. À l'instant $t=0$, elle est sur la case C_1. À l'instant n :

— si la puce est sur C_1, elle peut passer, à l'instant $n+1$, sur C_2 ou C_3 de manière équiprobable ;

— si la puce est sur C_2, elle peut passer, à l'instant $n+1$, sur C_1 ou C_3 de manière équiprobable ;

— si elle est sur C_3, elle reste sur C_3.

On définit les événements

— A_n : la puce est sur C_1 à l'instant n,

— B_n : la puce est sur C_2 à l'instant n,

— C_n : la puce est sur C_3 à l'instant n

et l'on note

$$a_n = P(A_n),\ b_n = P(B_n),\ c_n = P(C_n)$$

1) Écrire les relations entre $a_{n+1},\ b_{n+1},\ c_{n+1}$ et a_n, b_n, c_n.

2) Trouver une relation entre c_{n+2}, c_{n+1} et c_n. En déduire c_n en fonction de n.

3) Calculer la probabilité que la puce finisse sur la case C_3.

Exercice 12 () Une urne contient n boules blanches et n boules rouges.
On tire successivement et sans remise n boules dans cette urne. Déterminer la probabilité qu'une boule rouge figure dans ce tirage.

Exercice 13 ()
On considère deux urnes. La première contient 4 boules noires et 2 blanches, la deuxième 2 noires et 4 blanches. On choisit une urne au hasard, on tire successivement 3 boules sans remise. Donner la probabilité de tirer une troisième boule noire sachant que l'on a dejà tiré 2 boules noires avant.

IV. Évènements indépendants

Exercice 14 () Combien de fois faut-il lancer un dé (équilibré, à six faces) pour avoir au moins une chance sur deux d'obtenir un six ?

Exercice 15 () Le gardien d'un phare doit ouvrir une porte avec un trousseau de n clefs, dont une seule convient.

Malheureusement, il a oublié quelle était la bonne clef, et essaye les clefs les unes après les autres.

On cherche la probabilité p_k que la porte s'ouvre au bout du k^{e} essai.

Lorsque le gardien est ivre, il oublie, après chaque tentative, quelle clef il a essayé. Sinon, il n'essaie pas d'ouvrir la porte avec une clef déjà utilisée.

1) Calculer p_1.

2) Calculer p_2 dans chacun des cas (gardien ivre, ou non)

3) Exprimer p_k en fonction des A_i, et en déduire p_k dans chacun des cas.

Le gardien est ivre en moyenne trois jours par semaine.

4) Un jour, le gardien utilise 9 clefs : quelle est la probabilité qu'il soit ivre ?

Exercice 16

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $1 - x \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.

2) Dans un espace probablisé muni d'une probabilité $\mathbb{P}$, soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \cdots, E_n$ une famille de n événements indépendants. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{E_i}\right) \leqslant \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i)\right).$$

3) On dispose d'une urne vide au départ. Le premier jour, une personne met une boule numérotée 1 dans l'urne, la tire, note son numéro, et la remet dans l'urne. Ensuite, chaque jour, elle ajoute une boule qui porte le numéro du jour courant, tire une boule au hasard, note le numéro de cette boule, et la remet dans l'urne. Le processus se poursuit indéfiniment.

a) On note A_k l'événement « la boule n° 10 sort lors du k-ème tirage ». Que vaut la probabilité de A_k ?

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la probabilité que la boule n° 10 sorte au moins une fois à partir du k-ème tirage ?

c) Quelle est la probabilité que la boule n° 10 sorte une infinité de fois ?

d) Calculer la probabilité que la boule n° 10 sorte une infinité de fois de suite.

Exercice 17 (▲)

On effectue une suite de lancers d'une pièce équilibrée. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on désigne par p_k la probabilité qu'au cours des k premiers lancers, le résultat Pile n'ait pas été obtenu trois fois de suite.

1) Calculer p_1, p_2, p_3. Dans la suite, on pose $p_0 = 1$. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 3$, on a

$$p_k = \frac{1}{2}p_{k-1} + \frac{1}{4}p_{k-2} + \frac{1}{8}p_{k-3}$$

2) Montrer que la suite (p_k) est une combinaison linéaire de trois suites géométriques.

3) En déduire la convergence et la limite de la suite (p_k). Donner une interprétation du résultat obtenu.