Devoir à la maison n° 2

À rendre le 7 octobre

Soit d un entier, $d \geqslant 2$. Soit $\omega = (\omega_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de complexes, périodique de période d, c'est-à-dire telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \omega_{n+d} = \omega_n.$$

Dans ce problème, on s'intéresse à la nature (convergente ou divergente) de la série $\sum u_n(\lambda)$ de terme général

$$\forall n \geqslant 1 \quad u_n(\lambda) = \frac{\omega_n + \lambda}{n}$$

où λ est un complexe. On note plus simplement $u_n = u_n(0)$ pour tout $n \geqslant 1$.

1) Supposons, dans cette question uniquement, qu'il existe un complexe λ tel que $\sum u_n(\lambda)$ converge. Montrer que, pour toute valeur $\mu \neq \lambda$, la série $\sum u_n(\mu)$ diverge.

2) Dans cette question, on choisit $\lambda = 0$. Pour tout entier naturel n non nul, on note S_n la somme partielle associée à la série $\sum u_n$, c'est-à-dire $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\omega_k}{k}$.

- **a)** Pour tout entier naturel m, exprimer $\frac{1}{md+1}\sum_{k=1}^{d} \omega_{md+k}$ en fonction de $\Omega = \sum_{k=1}^{d} \omega_k$.
- **b)** Déterminer un réel α tel que

$$S_{(m+1)d} - S_{md} = \frac{1}{md+1}\sum_{k=1}^{d} \omega_{md+k} + \frac{\alpha}{m^2} + \underset{m\to\infty}{o}\left(\frac{1}{m^2}\right)$$

- **c)** En déduire une condition nécessaire et suffisante sur Ω pour que la série $\sum \left(S_{(m+1)d} - S_{md}\right)$ converge.
- **d)** Montrer très soigneusement que la condition obtenue à la question précédente est une condition nécessaire et suffisante pour que la série $\sum u_n$ converge.

3) Montrer qu'il existe une unique valeur $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que la série $\sum u_n(\lambda)$ converge.

4) **Une généralisation :** Dans cette question, on se donne une suite croissante $(a_n)_{n\geqslant 1}$ de réels, telle que $a_1 > 0$ et $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. On suppose que $\Omega = 0$. On pose, pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_n = \frac{\omega_n}{a_n} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} \omega_k.$$

Par souci de commodité, on note également $T_0 = 0$.

- **a)** Montrer que la suite $(T_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée.
- **b)** Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} T_k\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right) + \frac{T_n}{a_{n+1}}.$$

- **c)** Montrer que la série $\sum T_k\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)$ converge.
- **d)** Montrer que la série $\sum u_k$ converge.

— FIN —