

XIII – Variables aléatoires discrètes

I. Premier tirage d'une boule (Banque CCP MP)

1) $X(\Omega) = \llbracket 1, 3 \rrbracket$.

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note B_i la $i^{\text{ème}}$ boule blanche.

$\forall i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$, on note N_i la $i^{\text{ème}}$ boule noire.

On pose $E = \{B_1, B_2, \dots, B_n, N_1, N_2\}$.

Alors Ω est l'ensemble des permutations de E et donc $\text{card}(\Omega) = (n+2)!$.

$(X=1)$ correspond aux tirages des $(n+2)$ boules pour lesquels la première boule tirée est blanche.

On a donc n possibilités pour le choix de la première boule blanche et donc $(n+1)!$ possibilités pour les tirages restants.

$$\text{Donc } P(X=1) = \frac{n \times (n+1)!}{(n+2)!} = \frac{n}{n+2}.$$

$(X=2)$ correspond aux tirages des $(n+2)$ boules pour lesquels la première boule tirée est noire et la seconde est blanche.

On a donc 2 possibilités pour la première boule, puis n possibilités pour la seconde boule et enfin $n!$ possibilités pour les tirages restants.

$$\text{Donc } P(X=2) = \frac{2 \times n \times (n)!}{(n+2)!} = \frac{2n}{(n+1)(n+2)}.$$

$(X=3)$ correspond aux tirages des $(n+2)$ boules pour lesquels la première boule et la seconde boule sont noires.

On a donc 2 possibilités pour la première boule, puis une seule possibilité pour la seconde et enfin $n!$ possibilités pour les boules restantes.

$$\text{Donc } P(X=3) = \frac{2 \times 1 \times (n)!}{(n+2)!} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}.$$

Autre méthode :

Dans cette méthode, on ne s'intéresse qu'aux "premières" boules tirées, les autres étant sans importance.

$$X(\Omega) = \llbracket 1, 3 \rrbracket.$$

$(X=1)$ est l'événement : "obtenir une boule blanche au premier tirage".

$$\text{Donc } P(X=1) = \frac{\text{nombre de boules blanches}}{\text{nombre de boules de l'urne}} = \frac{n}{n+2}.$$

$(X=2)$ est l'événement : " obtenir une boule noire au premier tirage puis une boule blanche au second tirage".

D'où $P(X=2) = \frac{2}{n+2} \times \frac{n}{n+1} = \frac{2n}{(n+2)(n+1)}$, les tirages se faisant sans remise.

$(X=3)$ est l'événement : "obtenir une boule noire lors de chacun des deux premiers tirages puis une boule blanche au troisième tirage".

D'où $P(X=3) = \frac{2}{n+2} \times \frac{1}{n+1} \times \frac{n}{n} = \frac{2}{(n+2)(n+1)}$, les tirages se faisant sans remise.

2) $Y(\Omega) = \llbracket 1, n+1 \rrbracket$.

Soit $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$.

L'événement $(Y=k)$ correspond aux tirages des $(n+2)$ boules où les $(k-1)$ premières boules tirées ne sont ni B_1 ni N_1 et la $k^{\text{ème}}$ boule tirée est B_1 ou N_1 .

On a donc, pour les $(k-1)$ premières boules tirées, $\binom{n}{k-1}$ choix possibles de ces boules et $(k-1)!$ possibilités pour leur rang de tirage sur les $(k-1)$ premiers tirages, puis 2 possibilités pour le choix de la $k^{\text{ème}}$ boule et enfin $(n+2-k)!$ possibilités pour les rangs de tirage des boules restantes.

$$\text{Donc } P(Y=k) = \frac{\binom{n}{k-1} \times (k-1)! \times 2 \times (n+2-k)!}{(n+2)!} =$$

$$\frac{2 \frac{n!}{(n-k+1)!} \times (n+2-k)!}{(n+2)!}$$

$$\text{Donc } P(Y=k) = \frac{2(n+2-k)!}{(n+1)(n+2)}.$$

Autre méthode :

$$Y(\Omega) = \llbracket 1, n+1 \rrbracket.$$

On note A_k l'événement " une boule ne portant pas le numéro 1 est tirée au rang k ".

Soit $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$.

$$\text{On a : } (Y=k) = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k-1} \cap \overline{A_k}.$$

Alors, d'après la formule des probabilités composées,

$$P(Y=k) = P(A_1)P_{A_1}(A_2) \dots P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k-2}}(A_{k-1})P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k-1}}(\overline{A_k}).$$

$$P(Y = k) = \frac{n}{n+2} \times \frac{n-1}{(n+2)-1} \times \frac{n-2}{(n+2)-2} \times \dots \times \frac{n-(k-2)}{(n+2)-(k-2)} \times \frac{2}{(n+2)-(k-1)}$$

$$P(Y = k) = \frac{n}{n+2} \times \frac{n-1}{n+1} \times \frac{n-2}{n} \times \dots \times \frac{n-k+2}{n-k+4} \times \frac{2}{n-k+3}.$$

$$P(Y = k) = 2 \frac{n!}{(n-k+1)!} \times \frac{(n-k+2)!}{(n+2)!}.$$

$$P(Y = k) = \frac{2(n-k+2)}{(n+2)(n+1)}.$$

II. Loi d'un couple et lois marginales

1) La loi conjointe de X et Y déterminant une probabilité

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = j, Y = k) = 1$$

Or

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = j, Y = k) = 8a$$

car

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{j}{2^{j+k}} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j}{2^j} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{j}{2^{j-1}} = \frac{1}{(1-1/2)^2} = 4$$

On en déduit $a = 1/8$

2) Pour $j \in \mathbb{N}$

$$P(X = j) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = j, Y = k) = \frac{j+1}{2^{j+2}}$$

et pour $k \in \mathbb{N}$

$$P(Y = k) = \sum_{j=0}^{+\infty} P(X = j, Y = k) = \frac{k+1}{2^{k+2}}$$

3) Les variables ne sont pas indépendantes car l'on vérifie aisément

$$P(X = j, Y = k) \neq P(X = j)P(Y = k)$$

pour $j = k = 0$.

4) Par probabilités totales

$$P(X = Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n, Y = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n}{2^{2n+3}} = \frac{1}{16} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4^{n-1}} = \frac{1}{9}$$

III. Max et min de deux lois géométriques (Banque CCP MP)

1) $(U, V)(\Omega) = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } m \geq n\}$. Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \geq n$.
Premier cas : si $m=n$

$P((U = m) \cap (V = n)) = P((X = n) \cap (Y = n)) = P(X = n)P(Y = n)$ car X et Y sont indépendantes.

Donc $P((U = m) \cap (V = n)) = p^2q^{2n}$.

Deuxième cas : si $m > n$

$P((U = m) \cap (V = n)) = P([(X = m) \cap (Y = n)] \cup [(X = n) \cap (Y = m)])$
 Les événements $((X = m) \cap (Y = n))$ et $((X = n) \cap (Y = m))$ sont incompatibles donc :

$P((U = m) \cap (V = n)) = P((X = m) \cap (Y = n)) + P((X = n) \cap (Y = m))$.
 Or les variables X et Y suivent la même loi et sont indépendantes donc :

$$P((U = m) \cap (V = n)) = 2P(X = m)P(Y = n) = 2p^2q^{n+m}.$$

$$\text{Bilan : } P((U = m) \cap (V = n)) = \begin{cases} p^2q^{2n} & \text{si } m = n \\ 2p^2q^{n+m} & \text{si } m > n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2) $U(\Omega) = \mathbb{N}$ et $V(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit $m \in \mathbb{N}$.

$$P(U = m) = \sum_{n=0}^{+\infty} P((U = m) \cap (V = n)). \text{ (loi marginale de } (U, V) \text{)}$$

Donc d'après 1., $P(U = m) = \sum_{n=0}^m P((U = m) \cap (V = n)) \quad (*)$

Premier cas : $m \geq 1$

D'après (*), $P(U = m) = P((U = m) \cap (V = m)) + \sum_{n=0}^{m-1} P((U = m) \cap (V = n))$.

$$\text{Donc } P(U = m) = p^2q^{2m} + \sum_{n=0}^{m-1} 2p^2q^{n+m} = p^2q^{2m} + 2p^2q^m \sum_{n=0}^{m-1} q^n =$$

$$p^2q^{2m} + 2p^2q^m \frac{1-q^m}{1-q} = p^2q^{2m} + 2pq^m(1-q^m)$$

Donc $P(U = m) = pq^m(pq^m + 2 - 2q^m)$.

Deuxième cas : $m = 0$

D'après (*) et 1., $P(U = 0) = P((U = 0) \cap (V = 0)) = p^2$.

Bilan : $\forall m \in \mathbb{N}$, $P(U = m) = pq^m(pq^m + 2 - 2q^m)$.

3) $W(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$P(W = n) = P(V = n - 1) = pq^{2(n-1)}(1+q) = (1-q)q^{2(n-1)}(1+q).$$

$$\text{Donc } P(W = n) = (1-q^2)(q^2)^{n-1}.$$

Donc W suit une loi géométrique de paramètre $1-q^2$.

4) $P((U = 0) \cap (V = 1)) = 0$ et $P(U = 0)P(V = 1) = p^3q^2(1+q) \neq 0$. Donc U et V ne sont pas indépendantes.

IV. Couples de variables aléatoires de Poisson (Banque CCP MP)

1) $X_1(\Omega) = \mathbb{N}$ et $X_2(\Omega) = \mathbb{N}$ donc $(X_1 + X_2)(\Omega) = \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$(X_1 + X_2 = n) = \bigcup_{k=0}^n ((X_1 = k) \cap (X_2 = n - k))$ (union d'événements deux à deux disjoints).

Donc :

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 = n) &= \sum_{k=0}^n P((X_1 = k) \cap (X_2 = n - k)) \\ &= \sum_{k=0}^n P(X_1 = k)P(X_2 = n - k) \text{ car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes.} \\ &= \sum_{k=0}^n e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} \times e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!} \end{aligned}$$

Ainsi $X_1 + X_2 \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

2) Soit $k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = \sum_{m=0}^{+\infty} P((X = k) \cap (Y = m)) = \sum_{m=0}^{+\infty} P_{(Y=m)}(X = k)P(Y = m)$.

Or, par hypothèse,

$$\forall m \in \mathbb{N}, P_{(Y=m)}(X = k) = \begin{cases} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} & \text{si } k \leq m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{m=k}^{+\infty} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda} \frac{p^k}{k!} \lambda^k \sum_{m=k}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{m-k}}{(m-k)!} \\ &= e^{-\lambda} \frac{p^k}{k!} \lambda^k \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^m}{m!} = e^{-\lambda} \frac{p^k}{k!} \lambda^k e^{\lambda(1-p)} \\ &= e^{-\lambda} p \frac{(\lambda p)^k}{k!} \end{aligned}$$

Ainsi $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda p)$.