Exercice 80 :

Soit $n \geq 2$

Supposons par l'absurde qu'il existe une norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ invariante par similitude

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Alors $\forall P \in GL_n(\mathbb{R})$,

$N(A) = N(PAP^{-1})$

On pose $B = AP$

$N(AP) = N(B) = N(PBP^{-1}) = N(PA)$

donc $\forall P \in GL_n(\mathbb{R})$, $N(AP) = N(PA)$

⚠ il faut utiliser que N et le produit matriciel sont continus.

Or $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

donc $\forall P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N(AP) = N(PA)$

Car on peut écrire P comme la limite d'une suite de matrices inversibles

Or en posant $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

donc $N(AB) \overset{?}{=} N(BA) = 0$

Or $AB \neq 0$

$\boxed{\text{donc c'est absurde, il n'existe pas de tel } N}$