Feuille d'exercice n° 18 : **Endomorphismes d'un espace vectoriel euclidien**

I. Endomorphismes orthogonaux et matrices orthogonales

Exercice 1 (✎) Soit f un automorphisme orthogonal d'un espace euclidien E.

1) Montrer que $\operatorname{Ker}(f-\operatorname{Id}) = \operatorname{Im}(f-\operatorname{Id})^{\perp}$.

2) En déduire que si $(f-\operatorname{Id})^2 = 0$, alors $f = \operatorname{Id}$.

Exercice 2 (🚲) Soit E un espace euclidien. Soit $(u_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ et $(v_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ deux familles de vecteurs de E telles que :

$$\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2 \quad \langle u_i \mid u_j\rangle = \langle v_i \mid v_j\rangle .$$

1) Montrer que les familles de vecteurs $(u_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ et $(v_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ ont même rang.

2) En déduire qu'il existe un automorphisme orthogonal f de E tel que $f(u_i) = v_i$ pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, à l'ordre près des vecteurs.

Exercice 3 Soit E un espace euclidien. Quels sont les endomorphismes de E tels que pour tout sous-espace vectoriel V de E, $f\left(V^{\perp}\right) \subset (f(V))^{\perp}$?

Exercice 4 (✎) Donner une CNS pour qu'une matrice réelle orthogonale soit diagonalisable.

Exercice 5 (🚲) On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne usuelle, soit $a \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^n)$.

1) Montrer que $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker}(a-\operatorname{Id}) \oplus \operatorname{Im}(a-\operatorname{Id})$.

2) On définit pour tout $N \geqslant 1$: $b_N = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} a^k$. Montrer que la suite (b_N) converge et identifier sa limite.

Exercice 6 (🚲) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. En interprétant A comme la matrice de passage entre une base orthonormée d'un espace euclidien et une autre base de cet espace et en orthonormalisant cette dernière, établir qu'il existe deux matrices $Q \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et R triangulaire supérieure telles que $A = QR$.

II. Matrices orthogonales en dimensions 2 et 3

Exercice 7 (✎) Déterminer les natures et les éléments caractéristiques des transformations de $\mathbb{R}^2$ dont les matrices dans la base canonique sont les suivantes.

1) $A = \dfrac{1}{25}\begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix}$ **2)** $B = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ **3)** $C = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 8 (🚲) Soient E un espace euclidien orienté de dimension 2, r une rotation de E et s une réflexion de E. Déterminer $r\circ s\circ r$ et $s\circ r\circ s$.

Exercice 9 Soit des réels a,b,c. On pose $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab-c & ac+b \\ ab+c & b^2 & bc-a \\ ac-b & bc+a & c^2 \end{pmatrix}$. A quelle condition A est-elle orthogonale ? Cette condition étant réalisée, reconnaître l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice canonique A.

Exercice 10 (✎) Former la matrice M dans une base o.n.d (i,j,k) de $\mathbb{R}^3$, de la rotation d'axe $i+j+k$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Exercice 11 (✎) Dans l'espace usuel rapporté à une base orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les endomorphismes de matrices :

$$A=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}4&7&4\\1&4&-8\\-8&4&1\end{pmatrix}\text{ et }B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&-1&2\\2&2&-1\end{pmatrix}$$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de ces endomorphismes.

Exercice 12 Déterminer la nature de l'endomorphisme associé, dans une base orthonormée, à la matrice :

$$A=\begin{pmatrix}\cos t&-\sin t&0\\\cos t\sin t&\cos^2 t&-\sin t\\\sin^2 t&\sin t\cos t&\cos t\end{pmatrix}$$

III. Endomorphismes autoadjoints et matrices symétriques

Exercice 13 Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n non nulle.

1) Soit p un projecteur orthogonal de E. Montrer que p est symétrique.

2) Soit p et q projecteurs orthogonaux. Montrer que $p\circ q\circ p$ est symétrique positif, et que ses valeurs propres sont dans $[0,1]$.

3) Montrer que $(\operatorname{Im} p+\operatorname{Ker} q)^{\perp}=\operatorname{Im} q\cap\operatorname{Ker} p$.

4) En déduire que $E=\operatorname{Im} p+\operatorname{Ker} pq$.

5) Montrer que $p\circ q$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont dans $[0,1]$.

Exercice 14 Soient $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $B=\dfrac{1}{2}\left(A^{\top}+A\right)$. On note α la petite valeur propre de B et β sa plus grande. Etablir $\operatorname{Sp} A\subset[\alpha,\beta]$.

Exercice 15 (🚲) Soit E un espace euclidien de dimension n, f un endomorphisme symétrique dont les valeurs propres sont notées $\lambda_1\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n$.

1) Montrer que pour tout $x\in E$: $\lambda_1\|x\|^2\leqslant\langle f(x),x\rangle\leqslant\lambda_n\|x\|^2$.

2) Montrer que si un vecteur $x\in E$ non nul atteint une de ces bornes, alors c'est un vecteur propre de u.

3) Soit $(e_1,\ldots,e_n)$ une base orthonormée de E vérifiant pour tout $1\leqslant i\leqslant n$: $\langle f(e_i),e_i\rangle=\lambda_i$.
Que peut-on dire de cette base ?

Exercice 16

Soit $A\in\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres dans $\mathbb{R}_+$. Soit $\alpha\geqslant 0$.

1) Le produit de matrices carrées symétriques est-il symétrique ?

2) Montrer que $I_n+\alpha A$ est inversible.

3) Montrer que $M=(\mathrm{I}_n-\alpha A)(\mathrm{I}_n+\alpha A)^{-1}$ est symétrique.

Exercice 17 (▲) On dit qu'une matrice symétrique $A\in\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est définie positive si pour tout X non nul : $X^{\top}AX>0$.

1) Montrer que $A\in\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est définie positive si et seulement si $\operatorname{Sp}(A)\subset\mathbb{R}_+^*$.

2) Soit A symétrique définie positive.

- **a)** Montrer qu'il existe un produit scalaire $\langle .,.\rangle$ tel que pour tout $x,y\in\mathbb{R}^n$, $\langle x,y\rangle=X^{\top}AY$, où X et Y sont les matrices de x et y dans $\mathscr{B}$.
- **b)** Montrer qu'il existe une matrice triangulaire supérieure T telle que $A=T^{\top}T$.
- **c)** Montrer que cette matrice T est unique si on impose la condition : $\forall\,1\leqslant i\leqslant n$, $t_{i,i}>0$.

3) *Application* : montrer que si A est symétrique définie positive, $\det(A)\leqslant a_{1,1}\ldots a_{n,n}$.

Cette décomposition $A = T^\top T$ est appelée *décomposition de Cholesky.*

Exercice 18 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathscr{S}_n$ et $\mathscr{S}_n^+$ les ensembles des matrices réelles de taille n, symétriques et symétriques positives.
Soit $A \in \mathscr{S}_n$. Montrer que $A \in \mathscr{S}_n^+ \Leftrightarrow \big(\forall\, B \in \mathscr{S}_n^+,\ \operatorname{tr}(AB) \geqslant 0\big)$.

Exercice 19 () Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathscr{S}_n$, $\mathscr{S}_n^+$ et $\mathscr{S}_n^{++}$ les ensembles des matrices réelles de taille n, symétriques, symétriques positives, et symétriques définies positives.

1) Soit $A \in \mathscr{S}_n^{++}$ et $B \in \mathscr{S}_n$. Montrer qu'il existe P inversible et Δ diagonale telles que $A = P^T P$ et $B = P^T \Delta P$.

2) Soit $A, B \in \mathscr{S}_n^+$. Montrer que

$$\forall\, \alpha \in]0,1[,\ \ (\det A)^\alpha (\det B)^{1-\alpha} \leqslant \det\left(\alpha A + (1-\alpha)B\right).$$

Exercice 20 Soit $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que AB est diagonalisable (on pourra commencer par montrer qu'il existe une matrice R symétrique définie positive telle que $R^2 = A$).