Intégrales dépendant d'un paramètre

I. La fonction Γ (banque CCINP MP)

1) Soit $x \in \left]0,+\infty\right[$.
La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$ est définie, positive et continue par morceaux sur $\left]0,+\infty\right[$.
$f(x,t) \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1}$ et $t \longmapsto t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable sur $\left]0,1\right]$ (fonction de Riemann avec $1-x<1$).
Donc, par critère d'équivalence pour les fonctions positives, $t \longmapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\left]0,1\right]$. (*)
De plus, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 f(x,t) = 0$, donc, pour t au voisinage de $+\infty$, $f(x,t) = o(\dfrac{1}{t^2})$.
Or $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $\left[1,+\infty\right[$ (fonction de Riemann intégrable).
Donc $t \longmapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\left[1,+\infty\right[$. (**)
Donc, d'après (*) et (**), $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\left]0,+\infty\right[$.

2) Par intégration par parties, justifiée ci-après $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^x\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}t^x\right]_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.
Le crochet possède des limites finies à ses bornes par croissances comparées, et est de valeur nulle, ce qui valide ce calcul et donne
$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

3) i) pour tout $x>0$, $t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\left]0,+\infty\right[$ (d'après la question 1.).
ii) $\forall\, t \in \left]0,+\infty\right[$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable et $\forall\,(x,t) \in \left]0,+\infty\right[^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = (\ln t)\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$.
iii) Pour tout $x>0$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $\left]0,+\infty\right[$.
iv) Pour tout $t>0$, $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\left]0,+\infty\right[$.
v) Pour tout $[a,b] \subset \left]0,+\infty\right[$ et $\forall\,(t,x) \in \left]0,+\infty\right[\times [a,b]$:
$\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$ avec $\varphi(t) = \begin{cases} |\ln t|\mathrm{e}^{-t}t^{a-1} & \text{si} \quad t \in \left]0,1\right[\\ |\ln t|\mathrm{e}^{-t}t^{b-1} & \text{si} \quad t \in \left[1,+\infty\right[\end{cases}$
avec φ continue par morceaux et intégrable sur $\left]0,+\infty\right[$.
En effet :
$\varphi(t) \underset{0^+}{\sim} |\ln t|t^{a-1} = \varphi_1(t)$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} t^{1-\frac{a}{2}}\varphi_1(t) = \lim\limits_{t\to 0} t^{\frac{a}{2}}|\ln t| = 0$.
Donc, au voisinage de 0^+, $\varphi_1(t) = o\left(\dfrac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}\right)$.
Or $t \longmapsto \dfrac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}$ est intégrable sur $\left]0,1\right[$(fonction de Riemann avec $1-\dfrac{a}{2}<1$).
Donc, φ_1 est intégrable sur $\left]0,1\right[$.
Donc, par critère d'équivalence pour les fonctions positives, φ est intégrable sur $\left]0,1\right[$. (*)

$\lim\limits_{t\to+\infty} t^2\varphi(t) = 0$.
Donc, pour t au voisinage de $+\infty$, $\varphi(t) = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
Or, $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $\left[1,+\infty\right[$ (fonction de Riemann intégrable).
Donc φ est intégrable sur $\left[1,+\infty\right[$. (**)
D'après (*) et (**), φ est intégrable sur $\left]0,+\infty\right[$.

D'où, d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, Γ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]0,+\infty\right[$.
De plus, $\forall\, x \in \left]0,+\infty\right[$, $\Gamma'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.

II. Produit de convolution

1) Soit f une fonction continue T-périodique, avec $T > 0$.
Soit $y \in f(\mathbb{R})$. Il existe donc $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$.
Posons $k = \lfloor \frac{x}{T} \rfloor$. Alors $x = kT + (x - kT)$. Puisque $k \in \mathbb{Z}$, alors $y = f(x) = f(x - kT)$.
Mais $k \leqslant \dfrac{x}{T} < k + 1$ donc $0 \leqslant x - kT < T$, et ainsi $y \in f([0, T])$. Et donc $f(\mathbb{R}) \subset f([0, T])$.
Mais f est continue et $[0, T]$ est un segment, donc $f([0, T])$ est un ensemble borné, donc $f(\mathbb{R})$ aussi.

2) Pour tout réel x, $f * g(x)$ est définie comme intégrale sur un segment d'une fonction continue. Une fonction continue 2π-périodique est bornée. Donc on peut majorer :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |(f * g)(x)| \leqslant 2\pi N_\infty(f) N_\infty(g),$$

ce qui permet de dire que $f * g$ est bornée et $N_\infty(f * g) \leqslant 2\pi N_\infty(f) N_\infty(g)$.

3) La 2π-périodicité de $f * g$ résulte immédiatement de celle de f.
Il s'agit ensuite de montrer que, si f et g sont continues, $f * g$ l'est.
Définissons $\varphi : (x, t) \mapsto f(x - t)g(t)$ sur $\mathbb{R} \times [-\pi, \pi]$. Elle est continue par rapport à chacune de ses variables, et

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [-\pi, \pi], \quad |\varphi(x, t)| \leqslant N_\infty(f) N_\infty(g).$$

Or la fonction $t \mapsto N_\infty(f) N_\infty(g)$ est continue sur $[-\pi, \pi]$ (la continuité par morceaux suffirait), intégrable sur ce segment. Le théorème de continuité sous le signe $\displaystyle\int$ permet alors de conclure.

4) Nous avons

$$\begin{aligned}(f * g)(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x - t)g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(u)g(x - u)\,\mathrm{d}u \text{ (changement de variable } t = x - u).\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(u)g(x - u)\,\mathrm{d}u = \int_{x-\pi}^{-\pi} f(u)g(x - u)\,\mathrm{d}u &+ \int_{-\pi}^{\pi} f(u)g(x - u)\,\mathrm{d}u \\ &+ \int_{\pi}^{x+\pi} f(u)g(x - u)\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

et, en faisant le changement de variable $v = u + 2\pi, u = v - 2\pi$ dans la première intégrale, tenant compte de la 2π-périodicité de f et g, on obtient finalement

$$f * g = g * f.$$

5)

$$\begin{aligned}(e_k * e_l)(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{ik(x-t)} \mathrm{e}^{ilt}\,\mathrm{d}t \\ &= \left(\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{i(l-k)t}\,\mathrm{d}t\right) e_k(x)\end{aligned}$$

Si $k = l$, on obtient $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{i(l-k)t}\,\mathrm{d}t = 2\pi$.

Si $k \neq l$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{i(l-k)t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{i(l-k)} \mathrm{e}^{i(l-k)t}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$.

Finalement $e_k * e_l = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq l \\ 2\pi e_k & \text{si } k = l \end{cases}$.

III. L'intégrale de Gauss

1) On pose $f = F^2$ où $F : x \mapsto \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t$ est la primitive s'annulant en 0 de $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$. La fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$. Donc f l'est également, avec pour tout $x \geqslant 0, f'(x) = 2F'(x)F(x) = 2\mathrm{e}^{-x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t$.

Posons $h : (x,t) \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ pour $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times [0,1]$. Pour tout $x \geqslant 0$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue sur $[0,1]$ et donc intégrable sur $[0,1]$. Pour tout $t \in [0,1], x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$avec $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -2x\mathrm{e}^{-(1+t^2)x^2}$. Pour $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times [0,1]$, $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 1$ et $t \mapsto 1$ est continue et intégrable sur $[0,1]$. Donc g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$avec, pour tout $x \geqslant 0$, $g'(x) = -2x \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}\, \mathrm{d}t = -2\mathrm{e}^{-x^2} \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2t^2} x\, \mathrm{d}t$. Le changement linéaire $u = xt$ donne $\forall x \in \mathbb{R}^+, g'(x) = -2\mathrm{e}^{-x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{-u^2} du$.

2) D'après les calculs précédents, $f+g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, de dérivée nulle. La fonction $f+g$ est donc constante. Or $f(0) = 0$ et $g(0) = \int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \operatorname{Arctan} 1 = \dfrac{\pi}{4}$. Pour tout $x \geqslant 0, f(x) + g(x) = \dfrac{\pi}{4}$.

3) La fonction $\varphi : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$car φ est continue sur $\mathbb{R}^+$et $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(\mathrm{e}^{-t})$. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = I^2$. On détermine la limite de g en $+\infty$ par encadrement. Pour $x \geqslant 0$, on a $0 \leqslant g(x) \leqslant \int_0^1 \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}}{1+t^2}\, \mathrm{d}t = \dfrac{\pi}{4}\mathrm{e}^{-x^2}$. Par encadrement, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. En conclusion $I^2 = \dfrac{\pi}{4}$ et puisque $I \geqslant 0$, on obtient $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

IV. Transformée de Laplace et intégrale de Dirichlet

1) F est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ car pour $s > 0$, on a $\mathrm{e}^{-st}\dfrac{\sin(t)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$ et $\mathrm{e}^{-st}\dfrac{\sin(t)}{t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $t \mapsto \mathrm{e}^{-st}\dfrac{\sin(t)}{t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ pour $s > 0$.
D'après la première phrase de l'énoncé, $F(0)$ est définie également.
Montrons que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Soit $f : (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_+^* \mapsto \mathrm{e}^{-xt}\dfrac{\sin(t)}{t}$. Alors f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ avec $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\mathrm{e}^{-xt}\sin(t)$.
Soit $a > 0$, pour tout $x \geqslant a$ et $t > 0$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \mathrm{e}^{-xt}|\sin(t)| \leqslant \mathrm{e}^{-at}$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{-at}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, donc par théorème de dérivation sous le signe somme, F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a, +\infty[$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$, avec pour tout $s > 0$,

$$\begin{aligned} F'(x) &= -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\sin(t)\mathrm{d}t = -\operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x-i)t}\, \mathrm{d}t\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(\frac{1}{i-x}\right) = -\frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Donc il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\, x > 0,\ F(x) = c - \arctan(x)$. Or, comme

$$|F(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

On a donc $c = \dfrac{\pi}{2}$ et $\forall\, x > 0, F(x) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan(x)$.

2) Il n'est pas possible d'utiliser le théorème de continuité sous le signe intégrale en l'état car $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.
Posons

$$\begin{cases} F_1(x) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-xt}\frac{\sin(t)}{t}\, \mathrm{d}t \\ F_2(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\frac{\sin(t)}{t}\, \mathrm{d}t \end{cases}$$

de sorte que $F = F_1 + F_2$.

La fonction F_1 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ car on dispose de la domination $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \mathrm{e}^{-xt}|\sin(t)| \leqslant 1$ et la constante 1 est intégrable sur $]0,1]$.

Montrons la continuité sur $\mathbb{R}_+$ de $F_2 = \operatorname{Im} G$ avec $G : x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(x-i)t}}{t}\,\mathrm{d}t$.
Pour $X \geqslant 1$,

$$\int_1^X \frac{\mathrm{e}^{-(x-i)t}}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{i-x}\frac{\mathrm{e}^{-(x-i)t}}{t}\right]_1^X + \frac{1}{i-x}\int_1^X \frac{\mathrm{e}^{-(x-i)t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Comme $\left|\dfrac{\mathrm{e}^{-(x-i)t}}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-(x-i)t}}{t^2}$ est intégrable et

$$G(x) = \frac{\mathrm{e}^{i-x}}{x-i} + \frac{1}{i-x}\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(x-i)t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Or, $(x,t) \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-(x-i)t}}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+ \times [1,+\infty[$ et on dispose de la domination $\left|\dfrac{\mathrm{e}^{-(x-i)t}}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}$ donc G est continue sur $\mathbb{R}^+$donc F_1 et F_2 le sont. Et donc F aussi.

3) On a donc $\dfrac{\pi}{2} = F(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.