Semaine 11 du 9 décembre 2024 (S50)

IX Espaces probabilisés

Le chapitre IX reste au programme :

1 Probabilité sur un univers fini ou dénombrable

1.1 Définition de probabilité

1.2 Quelques propriétés

1.3 Univers fini

1.4 Univers dénombrable

2 Espaces probabilisables

2.1 Tribus

2.2 Évènements et vocabulaire

2.3 Probabilité sur un espace probabilisable

2.4 Continuité monotone

2.5 Évènements presque sûrs et négligeables

3 Probabilités conditionnelles

3.1 Définition

3.2 Probabilités composées

3.3 Probabilités totales

3.4 Formule de Bayes

4 Évènements indépendants

5 Exercices à connaître

5.1 Loi de Zipf

Soit $a > 1$. On rappelle la définition de la fonction ζ de Riemann : $\zeta(a) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^a}$. On définit la loi de Zipf de paramètre a par

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ P(\{k\}) = \frac{1}{\zeta(a)k^a}.$$

1) Montrer que $(\mathbb{N}^*, \mathscr{P}(\mathbb{N}^*), P)$ est un espace probabilisé.

2) Pour $m \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(m\mathbb{N}^*)$.

3) Pour $i, j \in \mathbb{N}^*$, déterminer une CNS sur i, j pour que $i\mathbb{N}^*$ et $j\mathbb{N}^*$ soient indépendants.

4) *Application*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note p_n le n^{e} nombre premier, et C_n l'ensemble des entiers qui ne sont divisibles par aucun des p_i, pour $i \in [\![1, n]\!]$.

a) Calculer $P(C_n)$.

b) Déterminer $\bigcap_{n\geqslant 1} C_n$.

c) En déduire que

$$\zeta(a) = \prod_{i=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_i^a}\right)^{-1}.$$

5.2 Théorème de Borel-Cantelli

Cet exercice est long, on peut n'en donner qu'une partie

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit (A_n) une suite d'événements. On définit la limite supérieure de ces événements comme étant $B = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$.

1) Montrer que B est un événement.

2) Si $\omega \in \Omega$, donner une interprétation de $\omega \in B$ en fonction des $\omega \in A_i$.

3) Montrer le lemme de Borel-Cantelli (version faible) : si $\sum_{n \geqslant 0} P(A_n)$ converge, alors $P(B) = 0$.

4) On souhaite montrer que si $\sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n) = +\infty$, et si les A_n sont mutuellement indépendants, alors $P(B) = 1$.

a) Montrer que s'il existe une infinité de A_n tels que $P(A_n) = 1$, alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, $P\left(\bigcup_{n=p}^{+\infty} A_n\right) = 1$, et conclure.

On suppose alors qu'à partir d'un certain rang, $P(A_n) < 1$. Soit $p \in \mathbb{N}$ supérieur à ce rang.

b) Montrer que $P(\overline{B}) = \lim_{p \to +\infty} P\left(\bigcap_{n=p}^{+\infty} \overline{A_n}\right)$.

c) Montrer que si $q \geqslant p$, alors $P\left(\bigcap_{n=p}^{+\infty} \overline{A_n}\right) \leqslant \prod_{n=p}^{q} (1 - P(A_n))$.

d) Montrer que $\ln\left(\prod_{n=p}^{q} (1 - P(A_n))\right) \leqslant -\sum_{n=p}^{q} P(A_n)$.

e) Conclure.

5.3 Une suite arithmético-géométrique

On considère deux urnes U et V. L'urne U contient deux boules blanches et quatre boules noires. L'urne V contient trois boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs avec remise selon la procédure suivante. Pour le premier tirage, on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie. On note sa couleur et on la remet dans l'urne.

— Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant s'effectue dans l'urne U.

— Sinon, le tirage suivant s'effectue dans l'urne V.

On itère le procédé pour les tirages suivants. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'evénement «la boule tirée au n^{e} tirage est blanche» et $p_n = P(B_n)$.

1) Calculer p_1.

2) Déterminer p_{n+1} en fonction de p_n.

3) Déterminer la limite de la suite (p_n).

5.4 Une chaîne de Markov

Une particule se déplace sur une surface comportant quatre positions successives, A_0 qui est un puits, A_1 et A_2 deux positions intermédiaires, A_3 un second puits.
A l'instant $t = n$,

— si la particule est dans un puits, elle y reste

— si elle est en A_1, elle va en A_0 avec la probabilité p et en A_2 avec la probabilité $1 - p$

— si elle est en A_2, elle va en A_1 avec la probabilité p et en A_3 avec la probabilité $1 - p$.

On note x_n la position de la particule à l'instant $t = n$, $x_n(\Omega) = [\![0, 3]\!]$.
On pose

$$X_n = \begin{pmatrix} P(x_n = 0) \\ P(x_n = 1) \\ P(x_n = 2) \\ P(x_n = 3) \end{pmatrix}$$

1) Déterminer une matrice M indépendante de n telle que pour tout n, $X_{n+1} = MX_n$.

2) Montrer que M est diagonalisable si et seulement si $0 < p < 1$.

3) On suppose $p = 1/2$. Donner $\lim\limits_{n\to\infty} X_n$.

4) Si $X_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, calculer $\lim\limits_{n\to\infty} X_n$.

5.5 Apparition d'un double Pile

On considère une pièce dont la probabilité d'apparition du côté face (F) est 1/3 et celle du côté pile (P) est 2/3. On effectue des lancers de façon indépendante jusqu'à ce que le motif PP apparaisse. On note T le (premier) rang d'apparition de ce motif. (Par exemple, si on a la suite de lancers FPFFPP alors $T = 6$.)

1) Pour k dans $\mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $(T = k)$ en fonction des événements $(T > k)$. Montrer que la suite de terme général $p_k = P(T > k)$ vérifie la relation de récurrence

$$\forall k \geqslant 2, p_k = \frac{2}{9}p_{k-2} + \frac{1}{3}p_{k-1}$$

2) Exprimer p_k en fonction de k.

3) Calculer la probabilité que le motif PP n'apparaisse jamais.

S'y ajoute :

X Topologie des espace vectoriels normés

1 Intérieur et adhérence

1.1 Rappels sur l'intersection et la réunion

1.2 Parties ouvertes

1.3 Parties fermées

1.4 Point adhérent et adhérence

1.5 Caractérisation séquentielle des fermés et de l'adhérence

1.6 Normes équivalentes

2 Densité

3 Limite et continuité d'une fonction entre deux espaces vectoriels normés

3.1 Limite et continuité en un point

3.2 Caractérisations séquentielles

3.3 Opérations sur les limites

3.4 Continuité sur une partie

3.5 Fonctions lipschitziennes

4 Limite et continuité en dimension finie

4.1 Utilisation des fonctions coordonnées

4.2 Continuité des applications linéaires, multilinéaires et polynomiales

4.3 Théorème des bornes atteintes

5 Continuité, ouverts et fermés

6 Exercices à connaître

6.1 Un peu de topologie dans $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$

1) Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|.\|_\infty$ et $F = \left\{f \in E,\ \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x > 0\right\}$. Proposer deux méthodes pour montrer que F est un ouvert de E.

2) On note $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ que l'on munit des deux normes en posant :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} (|f(x)|) \text{ et } \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$$

On considère $A = \{f \in E, f(0) = 0\}$ et $g : x \mapsto 1$.

a) Est-ce que g est adhérent à A pour la norme $\|\cdot\|_\infty$?

b) Est-ce que g est adhérent à A pour la norme $\|\cdot\|_1$?

6.2 Deux exercices : densité des matrices inversibles et distance à un fermé borné

1) Montrer que $\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Soit E un evn de dimension finie et A est une partie non vide, fermée et bornée de E. Soit $x \in E$. Montrer que $\inf\limits_{y\in A} \|x - y\|$ existe et qu'il existe $a \in A$ tel que $\|x - a\| = \inf\limits_{y\in A} \|x - y\|$.

Ce réel est appelé ***distance de*** x ***à*** A et noté $\mathrm{d}(x, A)$.

6.3 Densité et continuité

1) Trouver toutes les fonctions g continues sur $\mathbb{R}$, vérifiant $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x + y) = g(x) + g(y)$.

2) Même question pour $g(x + y) = g(x)g(y)$.

6.4 Norme subordonnée

Soit u une application linéaire continue de E dans F, deux espaces vectoriels normés non nuls. On définit :

$$M_1 = \sup\left\{\frac{\|u(x)\|}{\|x\|},\ x \in E\backslash\{0\}\right\}$$
$$M_2 = \sup\{\|u(x)\|,\ x \in E \text{ t.q. } \|x\| = 1\}$$
$$M_3 = \inf\{k \geqslant 0 \text{ t.q. } \forall x \in E,\ \|u(x)\| \leqslant k\|x\|\}$$

1) Justifier l'existence de ces nombres.

2) Montrer que $M_1 = M_2 = M_3$.

Remarque : On note en général $|||u|||$ ce nombre, et on peut montrer que $|||.|||$ définit sur $\mathscr{L}(E,F)$ une norme. Cette norme s'appelle la ***norme subordonnée*** à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$, et elle satisfait :

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\|_F \leqslant |||u|||\, \|x\|_E.$$