

Exercice 33: Soit  $u \in \mathbb{R}^N$

pour  $m \in \mathbb{N}$  on pose  $u_{m+1} = \begin{cases} u_{m+1} - u_m + u_m & \text{si } u_{m+1} \geq u_m \\ u_m & \text{si } u_{m+1} < u_m \\ \frac{u_0}{2} & \text{si } m = 0 \end{cases}$

et  $w_{m+1} = \begin{cases} w_m & \text{si } u_{m+1} \geq u_m \\ u_m + u_{m+1} - u_m & \text{si } u_{m+1} < u_m \\ \frac{u_0}{2} & \text{si } m = 0 \end{cases}$

Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $P_m: "u_m \geq u_{m-1}, w_m \leq w_{m-1}$   
et  $u_m + w_m = u_m"$

Initialisation:

• si  $u_1 \geq u_0: u_1 = u_1 - u_0 + u_0$  donc  $u_1 - u_0 \geq 0$

et  $w_1 = w_0$  donc  $w_1 - w_0 \leq 0$

$u_1 + w_1 = u_1 - u_0 + \frac{u_0}{2} + \frac{u_0}{2} = u_1$

• si  $u_1 < u_0: u_1 = u_0$  donc  $u_1 - u_0 \geq 0$

et  $w_1 = -u_0 + u_1 + w_0$  donc  $w_1 - w_0 \leq 0$

$u_1 + w_1 = u_1 - u_0 + u_0 = u_1$

Hérédité: Soit  $m \in \mathbb{N}$  on suppose  $P_m$

• si  $u_{m+1} \geq u_m: w_{m+1} = w_m$  donc  $w_{m+1} \leq w_m$

et  $u_{m+1} = u_m + u_{m+1} - u_m$  donc  $u_{m+1} - u_m \geq 0$

et  $u_{m+1} + w_{m+1} = u_{m+1} - u_m + u_m + w_m = u_{m+1} - u_m + u_m = u_{m+1}$

• si  $u_{m+1} < u_m: u_{m+1} = u_m$  donc  $u_{m+1} \geq u_m$

et  $w_{m+1} = u_m + u_{m+1} - u_m$  donc  $w_{m+1} - w_m \leq 0$

$u_{m+1} + w_{m+1} = u_{m+1} - u_m + u_m + w_m = u_{m+1}$

donc pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,  $(v_m)$  est croissante  
 $(w_m)$  décroissante et  $v_m + w_m = u_m$