

Devoir surveillé n° 1 - Remarques

Barème.

Toutes les questions sont notées sur 4 points, le total est de 128 points.

Statistiques descriptives.

	Note brute	Note finale
Note maximale	103	19
Note minimale	38	7
Moyenne	$\approx 55,35$	$\approx 12,05$
Écart-type	$\approx 15,58$	$\approx 2,85$

Remarques générales.

Laissez une marge à gauche de toutes les pages, sinon je n'ai pas la place de mettre les remarques et les points.

Il faut encadrer tous vos résultats : c'est une demande de certains concours, et c'est très agréable pour le correcteur. Je vous demanderai de vraiment encadrer, pas seulement souligner ni surligner. Ça ne prend pas beaucoup de temps et ce sera un vrai plus pour votre copie (et votre note).

Ce sont les conclusions qu'il faut encadrer, pas les résultats intermédiaires.

Je n'ai enlevé qu'un point sur 4 à chaque question où la conclusion n'était pas encadrée. Ce sera directement 0 à la question la prochaine fois.

Attention, ce sont les fonctions qui sont dérivables, pas leurs images, donc « $f(x)$ est dérivable » n'a pas de sens. C'est : « f est dérivable ».

De même, on n'écrit pas $(te^t)'$. Soit on donne un nom à la fonction : soit $f : t \mapsto te^t$ alors $f'(t) = \dots$;

ou alors vous pouvez écrire $\frac{dte^t}{dt} = \dots$

Les suites s'écrivent entre parenthèses.

On ne met pas « $\forall n$ » dans l'hypothèse de récurrence : c'est directement 0 à la question. De manière plus globale, les récurrences ne sont pas toujours bien rédigées. La propriété à démontrer doit être énoncée, n doit être quantifié et introduit aussi bien pour définir (H_n) mais aussi lors de l'hérédité.

I. Approximation d'une intégrale polynomiale par une suite d'applications linéaires

4. Utiliser la matrice trouvée à la question précédente est la plus rapide des méthodes.

6. φ est à valeurs dans \mathbb{R} , pas dans $\mathbb{R}_2[X]$.

7. C'est une famille échelonnée, ce qui fait gagner beaucoup de temps si vous l'utilisez.

8. et 9. Piège classique : ne pas mélanger les deux matrices de passages.

Pour la justification de l'inverse, il suffit qu'une matrice de passage est toujours inversible, c'est du cours.

15. On demande d'énoncer avec précision le théorème sur les sommes de Riemann. En particulier il fallait mentionner l'hypothèse de continuité.

II. Suite récurrente définie par une équation

- 1.a.** Il n'y a vraiment pas besoin de dériver $x \mapsto x^p + \dots + x + 1$ pour ses variations : c'est une somme de fonctions strictement croissantes.
Dans 90% des sujets d'analyse il faudra utiliser le théorème de la bijection. Apprenez à bien l'utiliser !
- 1.b.** Une somme géométrique intervenait : il est anormal qu'un nombre aussi importants d'élèves aient directement écrit $\sum_{k=0}^p x^k = \frac{1-x^{p+1}}{1-x}$ sans jamais se soucier de savoir si $x \neq 1$. C'est désespérant. Ce sera directement 0 à la question la prochaine fois.
- 1.d.** Erreur quasi-systématique et pourtant bien mise en évidence en cours : « $0 \leq x_n < 1$ donc $x_n^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ». Et pourtant $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1} \neq 0$.
- 3.b.** Pour pouvoir affirmer que $f([1/2, 1]) = [f(1), f(1/2)]$ il faut d'abord montrer que f est décroissante, sinon c'est faux.
- 3.c.** Revoyez l'inégalité des accroissements finis et leur lien avec les fonctions lipschitziennes : j'ai lu beaucoup de grand n'importe quoi.
- 3.d.** Toute la question tient dans une récurrence. Ne pas la rédiger en disant qu'on obtient le résultat facilement revient en gros à ne pas traiter la question.
- 4.a.** Même question qu'en 3.b., rédigée différemment. Le moyen le plus rapide et le plus élégant de répondre est de montrer que $[0, 1]$ est stable par g .
- 4.b.** g est décroissante donc $g \circ g$ est croissante.
Poser pour hypothèse de récurrence (H_n) : « (v_{2n}) est décroissante » est absurde puisque cet énoncé ne dépend pas de n (méditez!).
- 4.c.** Question très simple, mais, comme répété de nombreuses fois en cours, le point à ne pas manquer est que g est continue. J'ai mis 3 points sur 4 pour cette hypothèse, qui est la seule difficulté de la question.

Et pour finir, noyons-nous allégrement dans ce puits de sagesse insondable :

