## Ex 89

1)

On nq $\forall k < n,\ P(X=k) = 0$ (boules numérotées distinctement de 1 à $N \geq n$)

tir simultané ≡ tirs successifs sans remise

Prenons un exemple : $N = 6,\ n = 3$

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=i)$ | 0 | 0 | | | | |

$(X=3)$ = " sur les 3 boules tirées, tous les numéros sont $\leq 3$ et une vaut 3 "

= " boules tirées = 1, 2 et 3 " = " (1,2,3), (1,3,2) (2,1,3) (2,3,1) (3,1,2) (3,2,1) "

Pour $(X=4)$ : "sur les 3 boules tirées, 1 est 4 et les 2 autres $<4$"

Si $l$ et $m$ sont 2 autres boule, $3!$ tirages différents pour tirer $l, m$ et $4$

boules possiblement tirées : $(1,2,4)$ , $(1,3,4)$ , $(2,3,4)$

$$\text{nbr tirages} = 3! \times \binom{3}{2}$$

$\binom{3}{2}$ : parmis 1, 2 et 3 = 3 boules, choisir 2 boules

$$= 3! \times \frac{3!}{2!1!} = 3 \times 3!$$

tirage uniforme : toutes boules ont même chance d'être tiré

dc quelque soit le tirage $(a,b,c)$, $P(a,b,c) = P(a)\, P_{(a)}(b)\, P_{(a,b)}(c)$

$$= \frac{1}{N} \times \frac{1}{N-1} \times \frac{1}{N-2} = P(1 \text{ tirage})$$

alors $P(X=4) = \text{nbr tirages} \times P(1 \text{ tirage})$ car tirages disjoints

$$= 3! \times \binom{3}{2} \times \frac{1}{N(N-1)(N-2)}$$

Pour $X=5$ :

2 boules à tirer parmi 1, 2, 3 et 4

$$\text{nbr tirage} : 3! \times \binom{4}{2}$$

Traiter des exemples n'est pas une démonstration !

$$P(X=5) = 3! \times \binom{4}{2} \frac{1}{N(N-1)(N-2)}$$

de façon générale :

$$\boxed{\begin{array}{l} \to \text{si } k<n : P(X=k)=0 \\ \to \text{si } k \geq n ; \quad P(X=k) = \dfrac{n!}{N(N-1)\cdots(N-n+1)} \times \dbinom{k-1}{n-1} \end{array}}$$

Nombre total de tirages : $\binom{N}{n}$

Si i est entre n et N :

Nombre de tirages avec tous les numéros <= i : $\binom{i}{n}$

Donc $P(X<=i) = \dfrac{\binom{i}{n}}{\binom{N}{n}}$

D'où $P(X=i) = P(X<=i) - P(X<=i-1) = \dfrac{\binom{i}{n} - \binom{i-1}{n}}{\binom{N}{n}} = \dfrac{\binom{i-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}$

2) Par récurrence sur N

$\forall N \in \mathbb{N}^*$, posons $H(N)$ : « $\sum_{k=m}^{N} \binom{k}{m} = \binom{N+1}{m+1}$ »

→ pour $N=1$ : $1 \leq m \leq N$ donc $m=1$

$\left.\begin{array}{l} \sum_{k=1}^{1} \binom{k}{1} = \binom{1}{1} = 1 \\ \\ \binom{1+1}{1+1} = 1 \end{array}\right\}$ $H(1)$ vraie

→ Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tq $H(N)$ soit vraie

$$\sum_{k=m}^{N+1} \binom{k}{m} = \sum_{k=m}^{N} \binom{k}{m} + \binom{N+1}{m}$$

$$\underset{\text{hypothèse rec}}{=} \binom{N+1}{m+1} + \binom{N+1}{m}$$

$$\underset{\text{triangle Pascal}}{=} \binom{N+2}{m+1}$$ dc $H(N+1)$ vraie

Ainsi $\boxed{\forall N \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=m}^{N} \binom{k}{m} = \binom{N+1}{m+1}}$

Sans récurrence :

$$\sum_{k=n}^{N}\binom{k}{n} = 1 + \overbrace{\sum_{k=n+1}^{N}\binom{k+1}{n+1}-\binom{k}{n+1}}^{\text{Pascal}}$$

$$= \binom{N+1}{n+1} - \binom{n+1}{n+1} + 1$$

télescopage

$$= \binom{N+1}{n+1}$$

3) $E(X) = \sum_{k=1}^{N} k\, P(X=k)$

$$= \sum_{k=m}^{N} k\, P(X=k)$$

$$= \sum_{k=m}^{N} k \cdot \frac{m!}{N(N-1)\cdots(N-m+1)} \binom{k-1}{m-1}$$

$$= \sum_{k=m}^{N} k \frac{(N-m)!\, m!}{N!} \frac{(k-1)!}{(m-1)!(k-m)!} \times \frac{m}{m}$$

$$= \frac{m!(N-m)!}{N!} \times m \sum_{k=m}^{N} \frac{k!}{m!(k-m)!}$$

$$= m \frac{m!\,(N-m)!}{N!} \sum_{k=m}^{N} \binom{k}{m}$$

$$\underset{Q2)}{=} \binom{N+1}{m+1} \frac{m!\,(N-m)!}{N!} m$$

$$= \frac{(N+1)!}{(m+1)!\,\cancel{(N-m)!}} \cdot \frac{m!\,\cancel{(N-m)!}\,m}{N!}$$

$$= \frac{N+1}{m+1} m$$

dc $\boxed{E(X) = \frac{m}{m+1}(N+1)}$