XVII. Endomorphismes d'un espace vectoriel euclidien

3 février 2025

Table des matières

B - Endomorphismes d'un espace euclidien

Cette section vise les objectifs suivants :

- *étudier les isométries vectorielles et matrices orthogonales, et les décrire en dimension deux et trois en insistant sur les représentations géométriques ;*
- *approfondir la thématique de réduction des endomorphismes dans le cadre euclidien en énonçant les formes géométrique et matricielle du théorème spectral ;*
- *introduire la notion d'endomorphisme autoadjoint positif, qui trouvera notamment son application au calcul différentiel d'ordre 2.*

La notion d'adjoint est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Isométries vectorielles d'un espace euclidien	
Un endomorphisme d'un espace euclidien est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme. Caractérisations par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormée.	Exemple : symétries orthogonales, cas particulier des réflexions.
Groupe orthogonal.	Notation $O(E)$. On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.	
b) Matrices orthogonales	
Une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si $A^\top A = I_n$.	Interprétation en termes de colonnes et de lignes. Caractérisation comme matrice de changement de base orthonormée.
Caractérisation d'une isométrie vectorielle à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée.	On mentionne la terminologie « automorphisme orthogonal », tout en lui préférant celle d'« isométrie vectorielle ».
Groupe orthogonal.	Notations $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$.
Déterminant d'une matrice orthogonale. Groupe spécial orthogonal.	Notations $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n)$.
Orientation. Bases orthonormées directes.	
c) Espace euclidien orienté de dimension 2 ou 3	
Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base orthonormée directe : produit mixte.	Notations $[u, v]$, $[u, v, w]$. Interprétation géométrique comme aire ou volume.
Produit vectoriel. Calcul dans une base orthonormée directe.	
Orientation d'un plan ou d'une droite dans un espace euclidien orienté de dimension 3.	
d) Isométries vectorielles d'un plan euclidien	
Description des matrices de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.	Commutativité de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.
Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté.	On introduit à cette occasion, sans soulever de difficulté, la notion de mesure d'un angle orienté de vecteurs non nuls.
Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien.	

e) Isométries d'un espace euclidien de dimension 3	
Description des matrices de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.	
Rotation vectorielle d'un espace euclidien orienté de dimension 3.	Axe et mesure de l'angle d'une rotation.
f) Réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles	
Endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien.	Notation $\mathscr{S}(E)$. Caractérisation des projecteurs orthogonaux.
Caractérisation d'un endomorphisme autoadjoint à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée.	On mentionne la terminologie « endomorphisme symétrique », tout en lui préférant celle d'« endomorphisme autoadjoint ».
Théorème spectral : tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien admet une base orthonormée de vecteurs propres.	La démonstration n'est pas exigible. Forme matricielle du théorème spectral.
Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif.	Caractérisation spectrale. Notations $\mathscr{S}^+(E)$, $\mathscr{S}^{++}(E)$.
Matrice symétrique positive, définie positive.	Caractérisation spectrale. Notations $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

1 Orientation d'un espace vectoriel euclidien

Définition 1.0.1 (Orientation)**.**
On dit que deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de E ont ***la même orientation*** si $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') > 0$. Il y a exactement deux orientations possibles.

Démonstration.
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E : elle définit une orientation. Soit $\mathscr{B}' = (-e_1, \dots, e_n)$ une seconde base. Puisque $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = -1$, $\mathscr{B}'$ définit une seconde orientation.
Montrons qu'il n'y en pas d'autre : soit $\mathscr{B}''$ une troisième base. Puisque $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}'') = \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}'). \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}'')$, et $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') < 0$, alors $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}'')$ et $\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}'')$ sont de signes opposés, donc l'un des deux est strictement positif, donc $\mathscr{B}''$ a la même orientation que $\mathscr{B}$ ou que $\mathscr{B}'$. $\square$

Orienter E, c'est dire que l'une de ces deux orientations est ***directe***. Les bases représentant l'autre orientation seront alors dites ***indirectes***.

2 Endomorphismes orthogonaux

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Définition 2.0.1 (Isométrie)**.**
Une ***isométrie*** est une application de E dans E telle que pour tout $x, y \in E$, $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.
Si une isométrie est linéaire, on parle alors d'***isométrie vectorielle***, et alors pour tout $x, y \in E$, $\|f(x - y)\| = \|x - y\|$, ce qui est équivalent à dire que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$.

Exemple 2.0.2.
Les symétries orthogonales sont des isométries vectorielles.

Définition 2.0.3 (Endomorphisme orthogonal)**.**
On appelle ***endomorphisme orthogonal*** toute application $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que pour tous $x, y \in E$, $\langle f(x) \mid f(y) \rangle = \langle x \mid y \rangle$. On dit qu'un tel endomorphisme ***préserve le produit scalaire***.

On a le théorème fondamental suivant :

Théorème 2.0.4.
1. Un endomorphisme f est orthogonal si et seulement s'il préserve les normes, *i.e.* pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$. Les endomorphismes orthogonaux sont donc exactement les isométries vectorielles.
2. Toute isométrie vectorielle est une bijection. Un endomorphisme orthogonal est donc un automorphisme.

Démonstration.
1. ($\Rightarrow$) C'est évident, puisque $\|f(x)\|^2 = \langle f(x) \mid f(x) \rangle = \langle x \mid x \rangle = \|x\|^2$.
   ($\Leftarrow$) On utilise l'identité de polarisation :
$$\begin{aligned}\langle f(x) \mid f(y) \rangle &= \frac{1}{2}(\|f(x) + f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|f(x + y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \\ &= \langle x \mid y \rangle .\end{aligned}$$
2. Déjà fait en début d'année : si on a $x, y \in E$, $\|f(x) - f(y)\| = \|f(x - y)\| = \|x - y\|$.

$\square$

Exercice 2.0.5.
Dans la démonstration précédente, utilise t-on la linéarité de f ? Et si c'est le cas, où ?

Exemple 2.0.6.
Les symétries orthogonales sont donc des automorphismes orthogonaux. Tant mieux.

Mais ... les projections orthogonales n'en sont pas, sauf l'identité ! Attention à ce faux-ami.

Proposition 2.0.7.
Tout endomorphisme orthogonal change une base orthonormale en une base orthonormale.

Démonstration.
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une b.o.n. Ceci est équivalent à :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ \langle e_i \mid e_j \rangle = \delta_{ij},$$

où δ déssgine le symbole de Kronecker.

Ainsi, si $i, j \in [\![1, n]\!]$,

$$\langle f(e_i) \mid f(e_j) \rangle = \langle e_i \mid e_j \rangle = \delta_{ij},$$

donc $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est également une b.o.n. □

Proposition 2.0.8.
Toute application (sans la supposer linéaire) de E dans E qui préserve le produit scalaire est nécessairement linéaire.

Démonstration.
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E. Pour montrer que f est linéaire, il suffit de montrer que pour tout $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $f(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(e_k)$. On pose $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$. Mais on a déjà vu que les coordonnées de x dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ sont $\langle x \mid e_1 \rangle, \ldots, \langle x \mid e_n \rangle$ donc pour tout k, $\lambda_k = \langle x \mid e_k \rangle$.
Mais $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est aussi une base orthonormale de E car f est orthogonale.
On a alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^{n} \langle f(x) \mid f(e_k) \rangle f(e_k) \\ &\qquad \text{car } (f(e_1), \ldots, f(e_n)) \text{ est une base orthonormale} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \langle x \mid e_k \rangle f(e_k) \\ &\qquad \text{car } f \text{ préserve le produit scalaire} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(e_k) \end{aligned}$$

et donc la linéarité de f est bien prouvée. □

Remarque 2.0.9.
Il y a en revanche des applications non linéaires qui préservent la norme sans préserver le produit scalaire. Par exemple, sur $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire $(x, y) \mapsto xy$, la norme associée au produit scalaire est la valeur absolue et l'application qui à tout rationnel associe lui-même et à tout irrationnel associe son opposé préserve la norme. En revanche, elle ne préserve pas le produit scalaire (regarder par exemple l'effet sur 1 et $\sqrt{2}$, ou raisonner par l'absurde en utilisant la remarque précédente).

Voyons maintenant les propriétés des endomorphismes orthogonaux.

Définition 2.0.10 (Groupe orthogonal)**.**
On note $\mathrm{O}(E)$, appelé ***groupe orthogonal***, l'ensemble des endomorphismes orthogonaux.

Proposition 2.0.11 (Propriétés des endomorphismes orthogonaux)**.**

1. $\mathrm{O}(E)$ contient l'identité, il est stable par composition et par passage à l'inverse :
   — $\mathrm{Id}_E \in \mathrm{O}(E)$;

— $\forall\, u, v \in \mathrm{O}(E)$, $u \circ v \in \mathrm{O}(E)$;
— $\forall\, u \in \mathrm{O}(E)$, u^{-1} existe et $u^{-1} \in \mathrm{O}(E)$.

On dit que c'est un ***groupe***.

2. Un endomorphisme est orthogonal si et seulement s'il change une base orthonormale en une base orthonormale (auquel cas, il change toute base orthonormale en une base orthonormale).
3. Soient $\mathscr{B}$ une base orthonormale de E, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. Alors $f \in \mathrm{O}(E)$ si et seulement si $M^\top M = MM^\top = \mathrm{I}_n$.
4. Si $f \in \mathrm{O}(E)$, alors $\det f = \pm 1$.
5. Si F est un sev de E stable par f, $F^\perp$ est aussi stable par f.

Démonstration. 1. On a déjà vu que tout endomorphisme orthogonal est une bijection.
De plus $\mathrm{Id}_E \in \mathrm{O}(E)$.
En outre, si $f, g \in \mathrm{O}(E)$ on a pour tout $(x, y) \in E^2$:

$$\begin{aligned}\langle (f \circ g)(x) \mid (f \circ g)(y) \rangle &= \langle g(x) \mid g(y) \rangle \\ &= \langle x \mid y \rangle ,\end{aligned}$$

car f et g sont orthogonales. Par conséquent, $f \circ g \in \mathrm{O}(E)$. Donc $\mathrm{O}(E)$ est stable par composition.
Enfin, soit $f \in \mathrm{O}(E)$. On a f bijective et pour tout $(x, y) \in E^2$, on a :

$$\begin{aligned}\langle x \mid y \rangle &= \left\langle f(f^{-1}(x)) \mid f(f^{-1}(y)) \right\rangle \\ &= \left\langle f^{-1}(x) \mid f^{-1}(y) \right\rangle .\end{aligned}$$

Ainsi, f^{-1} préserve le produit scalaire. $\mathrm{O}(E)$ est donc stable par passage à l'inverse.

2. On a déjà démontré le sens direct de cette proposition. Démontrons l'autre sens : Soit f un endomorphisme changeant une b.o.n. en une b.o.n. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une b.o.n. Pour montrer que f est orthogonal, on va montrer que f préserve la norme. Soit $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$. Puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est une b.o.n, alors $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$. Mais $f(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k f(e_k)$ et $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une b.o.n, donc $\|f(x)\|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \|x\|^2$.
3. Notons $(e_1, \dots, e_n)$ les vecteurs de $\mathscr{B}$ et $C_1, \dots, C_n$ les vecteurs colonnes de M. On a donc, pour tout j : $C_i = (m_{ij})_{i \in [\![1,n]\!]}$. Le coefficient $a_{i,j}$ de la matrice $M^\top M$ a pour expression $\sum_{k=1}^{n} m_{ki} m_{kj}$, et on remarque qu'il s'agit exactement du produit scalaire $\langle f(e_1) \mid f(e_j) \rangle$.
Notons $\mathscr{B}'$ la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$. $M^\top M = \mathrm{I}_n$ si et seulement si pour tout (i, j), $a_{i,j} = \delta_{i,j}$, c'est-à-dire si et seulement si pour tout (i, j), $\langle f(e_i) \mid f(e_j) \rangle = \delta_{i,j}$, c'est-à-dire si et seulement si $\mathscr{B}'$ est une base orthonormale.
Or $\mathscr{B}'$ est l'image d'une base orthonormale par l'endomorphisme f. Donc d'après le point 2 il s'agit d'une base orthonormale si et seulement si f est orthogonal. On en déduit $f \in \mathrm{O}(E) \iff M^\top M = \mathrm{I}_n$.
Ainsi $M^\top = M^{-1}$ donc nous avons aussi $MM^\top = \mathrm{I}_n$.
4. Soient $\mathscr{B}$ une base orthonormale de E, on note $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. Alors $\det f = \det M$. Or $\det M = \det M^\top$, et donc $1 = \det \mathrm{I}_n = \det(M^\top M) = \det M^\top . \det M = (\det M)^2 = (\det f)^2$. Donc $\det f = \pm 1$.
5. On suppose F stable par f. Montrons d'abord que $f(F) = F$, et non pas seulement $f(F) \subset F$. Puisque $f(F) \subset F$, alors $f|_F$ est un endomorphisme de F. Mais puisque f est injective, $f|_F$ l'est aussi est ainsi $f|_F$ est une bijection de F dans lui-même, d'où le résultat.
Soit $x \in F^\perp$. Il s'agit de montrer que $f(x) \in F^\perp$, *i.e.* pour tout $y \in F$, $\langle f(x) \mid y \rangle = 0$. Fixons $y \in F$. Puisque $f(F) = F$, alors il existe $z \in F$ tel que $y = f(z)$. Ainsi $\langle f(x) \mid y \rangle = (\langle f(x) \mid f(z) \rangle = \langle x \mid z \rangle$ car f est orthogonal. Mais $x \in F^\perp$ et $z \in F$, donc $\langle x \mid z \rangle = 0$ et ainsi $\langle f(x) \mid y \rangle = 0$. Par conséquent $f(x) \in F^\perp$.

□

Proposition 2.0.12 (HP)**.**
Si $f \in \mathrm{O}(E)$, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f) \subset \{ 1, -1 \}$.

Démonstration.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre réelle de f, et soit x un vecteur propre associé. Alors $\|x\| = \|f(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$. Puisque $\|x\| \neq 0$, alors $|\lambda| = 1$ et $\lambda = \pm 1$. □

Définition 2.0.13 (Groupe spécial orthogonal)**.**

1. L'ensemble des endomorphismes orthogonaux de déterminant 1 est noté $\mathrm{SO}(E)$ ou $\mathrm{O}^+(E)$, et appelé le ***groupe spécial orthogonal***. Les éléments de $\mathrm{SO}(E)$ sont dits ***directs*** ou ***positifs***, on dit aussi que ce sont des ***rotations***.

2. L'ensemble des endomorphismes orthogonaux de déterminant -1, soit $\mathrm{O}(E)\backslash\mathrm{SO}(E)$, est noté $\mathrm{O}^-(E)$.
   Les éléments de $\mathrm{O}^-(E)$ sont dits ***indirects*** ou ***négatifs***.

Proposition 2.0.14.
$\mathrm{SO}(E)$ contient Id_E et est stable par composition et passage à l'inverse – on dit que c'est un sous-groupe de $\mathrm{O}(E)$.

Démonstration.
On sait déjà que $\mathrm{Id}_E \in \mathrm{O}(E)$, et que si $u, v \in \mathrm{O}(E)$, $u \circ v$ et u^{-1} aussi.
Il reste à dire que $\det \mathrm{Id}_E = 1$, et si $\det u = \det v = 1$, $\det(u \circ v) = \det u^{-1} = 1$. □

Exercice 2.0.15.
Une symétrie orthogonale est-elle positive ou négative ?

3 Matrices orthogonales

Définition 3.0.1 (Matrice orthogonale)**.**
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que M est ***orthogonale*** si $M^\top.M = M.M^\top = \mathrm{I}_n$, *i.e.* M est inversible d'inverse $M^\top$.

Remarque 3.0.2.
Il suffit de montrer que $M^\top.M = \mathrm{I}_n$ ou $M.M^\top = \mathrm{I}_n$.

Exercice 3.0.3.
$M = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ est-elle orthogonale ?

Théorème 3.0.4.
Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormale de E et $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors f est orthogonal si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est orthogonale.

Démonstration.
Déjà vu en 3 □

Définition 3.0.5 (Groupe orthogonal)**.**
1. L'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n est appelé appelé ***groupe orthogonal de degré*** n et noté $\mathrm{O}(n)$ ou $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
2. L'ensemble des matrices orthogonales de déterminant 1 est appelé le ***groupe spécial orthogonal de degré*** n et est noté $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{O}^+(n)$. Les matrices de $\mathrm{SO}(n)$ sont dites ***positives***.
3. L'ensemble $\mathrm{O}(n)\backslash\mathrm{SO}(n)$ est noté $\mathrm{O}^-(n)$ ou $\mathrm{O}_n^-(\mathbb{R})$, ses matrices sont dites ***négatives***.

Proposition 3.0.6 (Propriétés des matrices orthogonales)**.**
Soit M une matrice orthogonale.
1. $M^\top$ est orthogonale.
2. $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $(\mathscr{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$ (contient I_n et est stable par produit et passage à l'inverse).
3. La famille des colonnes de M forme une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.
4. La famille des lignes de M forme une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.
5. $\det M = \pm 1$.
6. $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
7. Si $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}$ est une base orthonormale de E, $f \in \mathrm{O}(E)$ si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathrm{O}(n)$.
8. Si $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}$ est une base orthonormale de E, $f \in \mathrm{SO}(E)$ si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathrm{SO}(n)$.

Démonstration.
On ne fait que redire ce qui a été vu avant. □

Théorème 3.0.7 (Changement de base orthonormale)**.**

1. Soit $\mathscr{B}$ un b.o.n. de E, et $\mathscr{B}'$ une seconde base de E. Notons $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$ la matrice de passage de $\mathscr{B}$ dans $\mathscr{B}'$.
   Alors $\mathscr{B}'$ est une bo.n. si et seulement si P est orthogonale.
2. Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases orthonormales et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ dans $\mathscr{B}'$. Les deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ ont la même orientation si et seulement si $P \in \mathrm{SO}(n)$.

Démonstration.

1. Il suffit de remarquer que les vecteurs colonnes de P sont les coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}'$ exprimées dans la base $\mathscr{B}$. Or P est orthogonale si et seulement si ses colonnes forment une b.o.n.
2. Si les deux bases sont orthonormales, $P \in \mathrm{O}(n)$, donc $\det P = \pm 1$. Les deux bases ont la même orientation si et seulement si $\det P > 0$, donc dans le cas d'une matrice orthonormale, si et seulement si $P \in \mathrm{SO}(n)$, et donc $\det P = 1$.

□

Remarque 3.0.8.
Si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux b.o.n. et $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$, alors $P^{-1} = P^\top$. En particulier, si $u \in \mathscr{L}(E)$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)$, alors $A = PBP^\top$.

4 Produit mixte

4.1 Définition et propriétés

Soit $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien orienté de dimension n.

Définition 4.1.1 (Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base)**.**
Soit E de dimension n, $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{F}$ une famille de n vecteurs de E.
On appelle ***déterminant de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{B}$*** le réel $\det \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$, que l'on note $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$.

Théorème 4.1.2.
Le déterminant d'une famille de vecteurs ne dépend pas de la b.o.n. directe choisie, c'est-à-dire : soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{B}$ deux bases orthonormales directes de E, et $\mathscr{F}$ une famille de n vecteurs de E. Alors $\det_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}) = \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$.

Démonstration.
On a $\det_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}) = \det \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{F})$, et $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \det \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$.
D'une part si l'on note $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})$, alors par changement de base nous avons $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}) = P\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$.
D'autre part $\mathscr{C}$ et $\mathscr{B}$ sont orthonormales, donc P est orthogonale d'où $\det P = \pm 1$. Et enfin $\mathscr{C}$ et $\mathscr{B}$ sont toutes deux directes, donc $\det P > 0$.
Finalement $\det P = 1$ et $\det \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}) = \det P \det \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \det \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$, d'où le résultat. □

Remarque 4.1.3.
De la même manière on montrerait que si $\mathscr{B}$ est une b.o.n.d. et $\mathscr{C}$ est une b.o.n. indirecte, alors $\det_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}) = -\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$.

Définition 4.1.4.
Soit $x_1, \ldots, x_n$ n vecteurs de E. On appelle ***produit mixte*** de ces vecteurs et on note $[x_1, \ldots, x_n]$ le déterminant de cette famille de vecteurs pris dans une base orthonormale directe $\mathscr{B}$:

$$[x_1, \ldots, x_n] = \det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n).$$

Remarque 4.1.5.
Pour justifier cette définition, il est essentiel de remarquer :

1. d'une part qu'il existe au moins toujours une base orthonormale directe (il suffit de prendre n'importe quelle base othonormale et, si elle n'est pas directe, de changer l'un de ses vecteurs en son opposé) ;
2. d'autre part que la valeur de $\det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)$ est la même dans toutes les bases orthonormales directes.

Remarque 4.1.6.
Le produit mixte de x_1, ..., x_n s'interprète géométriquement comme le volume orienté d'un parallélépipède donc un sommet est l'origine et dont les arêtes partant de l'origine sont $[OM_1]$, ..., $[OM_n]$, où $\overrightarrow{OM_i} = x_i$ pour $i = 1, \dots, n$.

Définition 4.1.7 (Produit vectoriel)**.**
Étant donné $n-1$ vecteurs $x_1, \dots, x_{n-1}$, l'application $\varphi : y \mapsto [x_1, \dots, x_n, y]$ est une forme linéaire. D'après le théorème de Riesz, il existe un unique vecteur x tel que pour tout y, $\varphi(y) = \langle x \mid y \rangle$. Ce vecteur est appelé ***produit vectoriel*** de x_1,..., x_{n-1} et est noté $x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$. On a donc, par définition du produit vectoriel, pour tout y :

$$[x_1, \dots, x_{n-1}, y] = \langle x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1} \mid y \rangle .$$

Remarque 4.1.8.
On voit donc que le calcul du déterminant dans une b.o.n. fait intervenir le produit scalaire et le produit vectoriel, d'où le nom de produit ***mixte***.

Remarque 4.1.9.
Dans le cas $n = 3$, soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, et $w = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned}
[u, v, w] &= \begin{vmatrix} x & x' & a \\ y & y' & b \\ z & z' & c \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{dvpt 3ème col}}{=} a(yz' - y'z) - b(xz' - x'z) + c(xy' - x'y) \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} yz' - y'z \\ x'z - xz' \\ xy' - x'y \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle
\end{aligned}$$

et par conséquent $u \wedge w = \begin{pmatrix} yz' - y'z \\ x'z - xz' \\ xy' - x'y \end{pmatrix}$.

Proposition 4.1.10.
Avec les notations de **4.1.7**,

1. $x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$ est orthogonal à x_i pour $i = 1, \dots, n-1$;
2. le produit vectoriel est $(n-1)$-linéaire alterné, à savoir :
   — il est linéaire en chacune de ses variables. Par exemple pour la première variable
   $$(x_1 + \lambda x_1') \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1} = x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1} + \lambda (x_1' \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1}) ;$$
   — $x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1} = 0$ si et seulement si la famille $(x_1, \dots, x_{n-1})$ est liée ;
   — échanger deux vecteurs dans le produit vectoriel revient à le multiplier par -1.
   Par exemple $x_2 \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-1} = -x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$.
3. Si $(x_1, \dots, x_{n-1})$ est orthonormale, alors
   $$(x_1, \dots, x_{n-1}, x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1})$$
   est une b.o.n.d. de E.

4.2 Orientation d'une droite ou d'un plan dans un espace euclidien de dimension 3

Définition 4.2.1.
Soit E euclidien de dimension 3.

1. Orienter une droite $\mathscr{D}$ dans E, c'est choisir un vecteur directeur u de $\mathscr{D}$.

Étant donné un autre vecteur directeur v, on dit qu'il induit la même orientation que u si $\langle u, v\rangle > 0$ (c'est-à-dire qie u et v sont colinéaires de même sens). Si $\langle u, v\rangle < 0$ (donc u et v sont colinéaires de sens contraire), u et v définissent deux orientations différentes.
Il existe donc deux orientations d'une droite dans E.

2. Orienter un plan $\mathscr{P}$ dans E, c'est choisir une base (u, v) de $\mathscr{P}$. Cela revient aussi à choisir le vecteur normal $u \wedge v$.
Étant donnée une autre base (u', v'), on dit qu'elle induit la même orientation que (u, v) si $\langle u \wedge v, u' \wedge v'\rangle > 0$, ou encore $[u, v, u' \wedge v'] > 0$, ou encore $(u, v, u' \wedge v')$ est une b.o.n.d. de E. Dans ce cas les deux vecteurs normaux $u \wedge v$ et $u' \wedge v'$ sont colinéaires de même sens.
Si $\langle u \wedge v, u' \wedge v'\rangle < 0$, (u, v) et (u', v') définissent deux orientations contraires.
Orienter $\mathscr{P}$ revient donc à orienter la droite $\mathscr{P}^\perp$, et il y a deux orientations d'un plan dans E.

5 Endomorphismes orthogonaux en dimension 2

Dans cette partie, E est un ev euclidien **orienté** de dimension 2.

Théorème 5.0.1 (Description de O(2) et SO(2))**.**

1. Soit $M \in \mathrm{SO}(2)$. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que
$$M = R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$
2. Pour tous $\theta, \rho \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} R(\theta+\rho) &= R(\theta) \times R(\rho) \\ R(\theta) \times R(\rho) &= R(\rho) \times R(\theta) \\ R(\theta)^{-1} &= R(-\theta). \end{aligned}$$
3. Pour tous $\theta, \rho \in \mathbb{R}$, $R(\theta) = R(\rho)$ si et seulement si $\theta = \rho\,[2\pi]$.
4. Si $M \in \mathrm{O}(2)\backslash\mathrm{SO}(2)$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$. Là encore θ est unique modulo 2π.

Démonstration. 1. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(2)$. Alors les vecteurs colonnes de M forment une b.o.n, donc :
$$\begin{cases} ab + cd = 0 \\ a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \end{cases}.$$
Ainsi, il existe $\theta, \rho \in \mathbb{R}$ tels que $a = \cos\theta, c = \sin\theta, b = \cos\rho, d = \sin\rho$. Alors, $\cos\theta\cos\rho + \sin\theta\sin\rho = 0$ *i.e.* $\cos(\theta-\rho) = 0$, *i.e.* $\theta = \rho + \dfrac{\pi}{2}[\pi]$. Ainsi,
$$\begin{cases} \cos\theta = \sin\rho \\ \sin\theta = -\cos\rho \end{cases}$$
ou
$$\begin{cases} \cos\theta = -\sin\rho \\ \sin\theta = \cos\rho \end{cases}.$$
Le premier cas n'est possible que si $M \in \mathrm{SO}(2)$, le second que si $M \in \mathrm{O}(2)\backslash\mathrm{SO}(2)$.

2. Il suffit de bien utiliser ses formules de trigonométrie.
$$\begin{aligned} R(\theta+\rho) &= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\rho) & -\sin(\theta+\rho) \\ \sin(\theta+\rho) & \cos(\theta+\rho) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\rho) - \sin(\theta)\sin(\rho) & -\cos(\theta)\sin(\rho) - \sin(\theta)\cos(\rho) \\ \sin(\theta)\cos(\rho) + \cos(\theta)\sin(\rho) & -\sin(\theta)\sin(\rho) + \cos(\theta)\cos(\rho) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\rho & -\sin\rho \\ \sin\rho & \cos\rho \end{pmatrix} \\ &= R(\theta) \times R(\rho). \end{aligned}$$
Puisque $\theta + \rho = \rho + \theta$, $R(\theta) \times R(\rho) = R(\theta+\rho) = R(\rho+\theta) = R(\rho) \times R(\theta)$.
Enfin $R(\theta) \times R(-\theta) = R(\theta-\theta) = R(0) = \mathrm{I}_2$, donc $R(\theta)^{-1} = R(-\theta)$.

3. $R(\theta) = R(\rho)$ ssi $R(\theta-\rho) = \mathrm{I}_2$ ssi $[\cos(\theta-\rho) = 1$ et $\sin(\theta-\rho) = 0]$ ssi $\theta - \rho = 0\,[2\pi]$.
4. Même démonstration.

□

Théorème 5.0.2 (Classification des isométries vectorielles directes)**.**
Soit f une isométrie vectorielle directe de E (*i.e.* un automorphisme orthogonal positif, *i.e.* un élément de $\mathrm{SO}(E)$). Alors :

1. Il existe un unique θ (modulo 2π) tel que la matrice de f dans n'importe quelle b.o.n. **directe** soit $R(\theta)$.
   On dit alors que f est la ***rotation (vectorielle) d'angle*** θ et que θ est une ***mesure*** de l'angle de f.
2. Si f n'est pas l'identité, l'ensemble des points fixes de f est réduit à $\{0\}$, *i.e.* $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \{0\}$.

Démonstration.
1. Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux b.o.n. directes de E. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathrm{SO}(2)$, donc d'après le théorème 5.0.1, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = R(\theta)$. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = PR(\theta)P^{-1}$, où P est la matrice de passage $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B})$. Mais comme $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux b.o.n. directes, $P \in \mathrm{SO}(2)$, et donc il existe $\rho \in \mathbb{R}$ tel que $P = R(\rho)$. On a ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = R(\rho)R(\theta)R(-\rho) = R(\rho + \theta - \rho) = R(\theta)$.
   Il faut démontrer l'unicité de θ : mais pour tout $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, on a $R(\theta_1) = R(\theta_2)$ ssi $R(\theta_1 - \theta_2) = \mathrm{Id}$ ssi $(\theta_1 - \theta_2) \in \mathrm{Ker}\,\varphi$ ssi $(\theta_1 - \theta_2) \in 2\pi\mathbb{Z}$ ssi $\theta_1 = \theta_2\ [2\pi]$.
2. Si $f = \mathrm{Id}$, on a immédiatement $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = E$.
   Sinon, on a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f - \mathrm{Id}) = R(\theta) - \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} \cos\theta - 1 & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice a pour déterminant $(\cos\theta - 1)^2 + \sin^2\theta = 2(1 - \cos\theta)$. Or $f \neq \mathrm{Id}$, donc $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, *i.e.* $\cos\theta \neq 1$. Le déterminant précédent est donc non nul, c'est-à-dire que $(f - \mathrm{Id})$ est un automorphisme, donc son noyau est réduit à $\{0\}$.

□

Remarque 5.0.3.
Géométriquement, une rotation vectorielle d'angle non nul modulo 2π n'a qu'un point fixe : son centre.

Remarque 5.0.4.
On parle de « rotation d'angle de mesure θ » dans le point (1) du théorème 5.0.2 sans avoir jamais défini auparavant les mots « angle » et « mesure ».

Bien que toute construction rigoureuse de la notion d'angle orienté soit hors programme, on peut cependant résumer la définition d'un angle orienté de la manière suivante : pour tous vecteurs non nuls u et v de $\mathbb{R}^2$, avec $u' = \|u\|^{-1} u$ et $v' = \|v\|^{-1} v$, il existe une unique rotation r telle que $r(u') = v'$, et c'est cette rotation que l'on peut appeler *angle orienté* de (u, v). Tout réel θ pour lequel r admet $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ pour matrice dans une base orthonormale directe est alors appelé **UNE** *mesure* de l'angle (u, v) et est généralement notée elle aussi (u, v). La notation usuelle $(u, v) = \theta\ [2\pi]$ se trouve ainsi justifiée.

Attention, il est indispensable que la base utilisée pour déterminer θ via la matrice de r soit **DIRECTE**, sinon une mesure de l'angle obtenue est en fait l'opposée d'une mesure de l'angle (u, v), modulo 2π.

Théorème 5.0.5 (Détermination d'une mesure de l'angle d'une rotation)**.**
Soient f une rotation vectorielle de E, θ une mesure de son angle et u un vecteur **unitaire**. Soit $\mathscr{C}$ une b.o.n. directe de E. Alors $\cos\theta = \langle u \mid f(u) \rangle$ et $\sin\theta = \det_{\mathscr{C}}(u, f(u))$.

Démonstration.
Soit v un vecteur tel que (u, v) soit une b.o.n.d. $\mathscr{B}$ de E. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = R(\theta)$. Donc $f(u) = \cos\theta u + \sin\theta v$, d'où $\langle u \mid f(u) \rangle = \cos\theta$, et $\det_{\mathscr{C}}(u, f(u)) = \det_{\mathscr{B}}(u, f(u)) = \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta \\ 0 & \sin\theta \end{vmatrix} = \sin\theta$. □

Remarque 5.0.6.
Si u n'est pas unitaire, $\det(u, f(u)) = \|u\|^2 \sin\theta$ et $\langle u \mid f(u) \rangle = \|u\|^2 \cos\theta$.

Remarque 5.0.7.
On remarque que dans une b.o.n.d., la trace d'une rotation est $2\cos\theta$. La trace ne dépendant pas de la base choisie, si l'on connaît la matrice M d'une rotation dans une base quelconque, alors une mesure θ de son angle vérifie $2\cos\theta = \mathrm{tr}\, M$.

Théorème 5.0.8 (Classification des isométries vectorielles indirectes)**.**
Une application orthogonale négative (*i.e.* qui n'est pas une rotation) est une ***réflexion***, c'est-à-dire une symétrie orthogonale par rapport à une droite.

Remarque 5.0.9.
En dimension quelconque, une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

Démonstration.
Soit $f \in \mathrm{O}^-(E)$. Soit $\mathscr{B}$ une b.o.n.d. de E et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = A(\theta)$. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$. On introduit le vecteur $u = \cos\frac{\theta}{2}e_1 + \sin\frac{\theta}{2}e_2$. On le complète en une b.o.n.d. avec $v = -\sin\frac{\theta}{2}e_1 + \cos\frac{\theta}{2}e_2$. On calcule $f(u) = A(\theta).\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = u$ et $f(v) = A(\theta).\begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = -v$. Par conséquent $\mathrm{Mat}_{(u,v)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, qui est bien la matrice d'une réflexion. □

Exemple 5.0.10.
Caractérisons les endomorphismes dont les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont les suivantes :

1. $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$
2. $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

1. On remarque que les deux vecteurs définis par les colonnes de A sont de norme 1 et orthogonaux entre eux, donc A est une matrice orthogonale. De plus, $\det A = 1$ donc A est une rotation. Son angle est θ tel que $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{1}{2}$. Ainsi A est la rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$.
2. $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ avec $\theta = \frac{\pi}{6}$. Donc B est la symétrie orthogonale par rapport à la droite dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$.

Exemple 5.0.11.
Tout automorphisme orthogonal de E est un produit de réflexions.
En effet, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Or dans ce produit de matrices, la première matrice est celle d'une réflexion d'après le théorème précédent, et la seconde également.

6 Endomorphismes orthogonaux en dimension 3

Dans cette partie, E est un ev euclidien **orienté** de dimension 3.

Lemme 6.0.1.
Soit $f \in \mathrm{O}(E)$. Alors 1 ou -1 est une valeur propre de f.
Ainsi $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \neq \{0\}$ ou $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \neq \{0\}$.

Démonstration.
Le polynôme caractéristique de f est de degré 3, impair, donc on sait qu'il a au moins une racine réelle. Mais avec **2.0.12**, les seules racines réelles éventuelles de f sont 1 et -1. □

Au programme ne figure que la description des isométries vectorielles directes. Ainsi seul le point 3 du théorème qui suit est au programme. Mais les autres points ne coûtent pas beaucoup plus cher, et s'appuient sur la même démarche.

Théorème 6.0.2 (Classification des isométries vectorielles)**.**
Soit $f \in \mathrm{O}(E)$. On note $d = \dim \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$. Donc d est la dimension du sev des points fixes de f.

1. Si $d = 3$, $f = \mathrm{Id}$;
2. Si $d = 2$, f est une réflexion ; soit (u, v) une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et (w) une base de $(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}))^\perp$. Alors $\mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
3. Si $d = 1$, alors f est une rotation. L'ensemble des points fixes $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ est une droite vectorielle appelée l'axe de f, et notée Δ.
   Si (u, v) est une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})^\perp$, alors la matrice de f dans la bond $(u, v, u \wedge v)$ est de la forme $\begin{pmatrix} R(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. θ est l'***angle*** de la

rotation f, unique modulo 2π. f est la ***rotation d'axe Δ orienté*** par $u \wedge v$ et d'angle de mesure θ.

4. Si $d = 0$, d'après le lemme 6.0.1, il existe w non nul dans $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$, et il existe u, v tels que (u, v, w) soit une b.o.n.d. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(f)$ soit $\begin{pmatrix} R(\theta) & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On dit que f est une ***anti-rotation*** (la composée d'une rotation et d'une réflexion).

Démonstration. 1. $d = 3$ ssi $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = E$ ssi $f = \mathrm{Id}$.

2. $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ est stable par f. En effet, si $x \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$, on a $f(x) = x$, donc $(f - \mathrm{Id})(f(x)) = f(f(x)) - f(x) = f(x) - x = 0$.
   Donc puisque f est orthogonal e, $(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}))^\perp$ est aussi stable par f, i.e. il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(w) = \lambda w$. Alors $\mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Mais puisque $\det f = \pm 1$, on a $\lambda = \pm 1$. Enfin, $w \notin \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$, donc on ne peut pas avoir $\lambda = 1$.

3. Soient (u, v) une b.o.n. de $(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}))^\perp$ et $w = u \wedge v$. Alors w est dans $((\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}))^\perp)^\perp$, i.e. dans $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$. On a $\Delta = \mathrm{Vect}\, w$. Comme en (ii), $\Delta^\perp$ est stable par f, donc on considère la restriction $\tilde{f} = f|_{\Delta^\perp}$. Comme f est une isométrie linéaire, $\tilde{f}$ aussi, donc $\tilde{f} \in \mathrm{O}(\Delta^\perp)$. Donc $\tilde{f}$ est soit une rotation, soit une réflexion. Mais si $\tilde{f}$ est une réflexion, elle a des points fixes non nuls, et ces points fixes sont dans $\Delta^\perp$. Ces points fixes sont donc aussi des points fixes de f, et par définition les points fixes de f sont tous dans Δ. Puisque $\Delta \cap \Delta^\perp = \{0\}$, on aboutit à une contradiction, donc $\tilde{f}$ est une rotation. On en déduit la forme de la matrice de f dans la base (u, v, w).

4. Soit $w' \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$. On a $f(w') = -w'$, donc $\mathrm{Vect}(w')$ est stable par f, et donc $(\mathrm{Vect}(w'))^\perp$ aussi. Soit (u, v) une b.o.n. de $(\mathrm{Vect}(w'))^\perp$. On note $\tilde{f} = f|_{\mathrm{Vect}(u,v)}$. Comme en (iii), $\tilde{f}$ est orthogonale et n'a pas de point fixe non nul, donc $\tilde{f}$ est une rotation. On pose $w = u \wedge v$. Alors $w \in \mathrm{Vect}(w')$, donc $f(w) = -w$, et enfin (u, v, w) est une b.o.n.d. de E. On obtient alors la forme voulue pour $\mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(f)$.

□

Remarque 6.0.3.

1. Id est une rotation ayant n'importe quelle droite pour axe et d'angle 0 modulo 2π.
2. L'axe d'une rotation **doit être orienté** : il y a deux rotations différentes d'axe $\mathrm{Vect}(1, 0, 0)$ et d'angle $\pi/2$, suivant l'orientation de l'axe.

Exemple 6.0.4.
Comme en dimension 2, toute rotation est le produit de deux réflexions. Il suffit de remarquer que l'on a l'égalité matricielle suivante : $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Les deux matrices de ce produit ont des vecteurs colonnes orthogonaux et de norme 1, et leurs déterminants valent -1 : cette égalité est l'écriture matricielle du résultat voulu.

Proposition 6.0.5 (Détermination de l'angle d'une rotation)**.**
Soit r une rotation, d'axe orienté Δ dirigé par un vecteur d unitaire, et d'angle θ. Alors :

1. $\mathrm{tr}\, f = 2\cos\theta + 1$.
2. pour tout $x \in E$, $r(x) = (\cos\theta)x + (1 - \cos\theta) \langle d \mid x \rangle d + (\sin\theta)(d \wedge x)$. En particulier, si x est orthogonal à d, alors $r(x) = (\cos\theta)x + \sin\theta(d \wedge x)$.
3. pour tout vecteur u unitaire orthogonal à d, $\cos\theta = \langle u \mid r(u) \rangle$ et $\sin\theta = [u, r(u), d]$.

Démonstration. 1. Se lit sur la matrice de f dans une b.o.n.d.

2. On introduit l'application $\varphi : x \mapsto \cos\theta x + (1 - \cos\theta) \langle d \mid x \rangle d + \sin\theta d \wedge x$. On prend une b.o.n.d. (u, v, d), et on sait que $\mathrm{Mat}_{(u,v,d)}(r) = \begin{pmatrix} R(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Mais $\varphi(u) = \cos\theta u + (1 - \cos\theta) \langle d \mid u \rangle d + \sin\theta d \wedge u = \cos\theta u + \sin\theta v = r(u)$. De même $\varphi(v) = r(v)$. Enfin, $\varphi(d) = \cos\theta d + (1 - \cos\theta) \langle d \mid d \rangle = r(d)$. φ et r coïncident sur une base, donc sont égales.

3. On pose $v = d \wedge u$. Alors (u, v, d) est une b.o.n.d. donc : $\langle u \mid r(u) \rangle = \langle u \mid \varphi(u) \rangle = \langle u \mid \cos\theta u + \sin\theta v \rangle = \cos\theta \|u\|^2 = \cos\theta$. Et : $[u, r(u), d] = \langle u \wedge r(u) \mid d \rangle = \langle u \wedge \varphi(u) \mid d \rangle = \langle \sin\theta u \wedge v \mid d \rangle = \sin\theta \|d\|^2 = \sin\theta$.

□

Exemple 3.4.11
$A = \mathrm{Mat}_{\text{base canonique}}(f) = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ est la rotation d'axe orienté par $\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ et d'angle de mesure π. Pour déterminer cela, on calcule $\dim \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$, on trouve 1. On déduit que f est une rotation, et on en obtient son axe, dont on choisit une orientation. On calcule son angle en utilisant le vecteur $d = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, unitaire et dirigeant l'axe, et le vecteur $u = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, unitaire et orthogonal à d. En utilisant la proposition 6.0.5, on obtient le cosinus et le sinus de l'angle, et donc l'angle.

7 Endomorphismes autoadjoints

7.1 Définition et exemples

Définition 7.1.1 (Endomorphisme autoadjoint)**.**
On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est ***autoadjoint*** ou ***symétrique*** si

$$\forall\ x, y \in E,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle\,.$$

L'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E est noté $\mathscr{S}(E)$.

Exemple 7.1.2.
0 et I_E sont symétriques.

Proposition 7.1.3.
$\mathscr{S}(e)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.

Proposition 7.1.4 (Caractérisation des projecteurs orthogonaux)**.**
Un projecteur est un projecteur orthogonal si et seulement si c'est un endomorphisme symétrique.

Démonstration.
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $G = F \oplus G$. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G.
• Si p est orthogonal, donc si $G = \mathbb{F}^\perp$, alors pour tout $x, y \in E$, $x - p(x), y - p(y) \in F^\perp$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\langle p(x), y\rangle &= \langle p(x), y - p(y)\rangle + \langle p(x), p(y)\rangle \\
&= \langle p(x), p(y)\rangle \quad \text{car } p(x) \in F,\ y - p(y) \in F^\perp \\
&= \langle p(x) - x, p(y)\rangle + \langle x, p(y)\rangle \\
&= \langle x, p(y)\rangle \quad \text{car } p(y) \in F,\ p(x) - x \in F^\perp
\end{aligned}$$

et par conséquent p est symétrique.
• Réciproquement, si p est symétrique, soit $x \in F$ et $y \in G$, alors

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle &= \langle p(x), y\rangle \quad \text{car } x \in F \\
&= \langle x, p(y)\rangle \quad \text{car } p \in \mathscr{S}(E) \\
&= 0 \quad \text{car } y \in G \text{ donc } p(y) = 0
\end{aligned}$$

et donc $F \perp G$ et p est orthogonal. □

Exercice 7.1.5.
Montrer que si s est une symétrie, alors s est une symétrie orthogonale si et seulement si s est un endomorphisme autoadjoint.

7.2 Représentation matricielle

Théorème 7.2.1 (Matrice d'un endomorphisme autoadjoint)**.**
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E.
Nous avons équivalence entre :

(i) u est symétrique ;

(ii) la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est symétrique.

Démonstration.
Notons $A = \mathrm{Mat}_e(u)$.
$(\Rightarrow)$: supposons u autoadjoint. La j-ème colonne de A est constituée des coordonnées de $u(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}$. Puisque cette base est orthonormale, alors $u(e_j) = \sum_{k=1}^{n} \langle u(e_j), e_i \rangle e_i$. Donc, si $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, $a_{ij} = \langle u(e_j), e_i \rangle$. Par symétrie de u et du produit scalaire nous avons

$$a_{ij} = \langle u(e_j), e_i \rangle = \langle e_j, u(e_i) \rangle = \langle u(e_i), e_j \rangle = a_{ji}$$

d'où la symétrie de A.
$(\Leftarrow)$: supposons A symétrique. Soit $x, y \in E$, de matrices X et Y dans la base $\mathscr{B}$. Alors

$$\langle u(x), y \rangle = (AX)^\top Y = X^\top A^\top Y = X^\top AY = X^\top (AY) = \langle x, u(y) \rangle$$

et ainsi u est autoadjoint. □

Corollaire 7.2.2.
Si $\dim E = n$, $\mathscr{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration.
Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormale de E. D'après le théorème précédent, $\varphi : \mathscr{L}(E) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $u \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ établit un isomorphisme entre $\mathscr{S}(E)$ et $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, où $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est le sev des matrices symétriques réelles d'ordre n. Comme nous savons que $\dim \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$, le résultat voulu en découle. □

8 Réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles

8.1 Propriétés des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles

Les résultats de cette section ne sont pas explicitement au programme mais sont utiles pour établir le théorème spectral qui va suivre, et sont classiques et à connaître quoi qu'il en soit.

Dans tout la suite, $u \in \mathscr{S}(E)$.

Proposition 8.1.1.
$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)^\perp$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathrm{Ker}\, u$ et $y \in \mathrm{Im}(u)$. Il existe donc $t \in E$ tel que $y = u(t)$.
Alors $\langle x, y \rangle = \langle x, u(t) \rangle = \langle u(x), t \rangle = 0$ car $u(x) = 0$. Ainsi $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)^\perp$. On conclut par le théorème du rang : $\dim \mathrm{Im}(u) = \dim E - \dim \mathrm{Ker}(u) = \dim \mathrm{Ker}(u)^\perp$. □

Proposition 8.1.2.
1. Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^\perp$ est également stable par u.
2. De plus les endomorphismes induits par u sur F et $F^\perp$ sont toujours autoadjoints.

Démonstration.
1. Soit $y \in F^\perp$. Montrons que $u(y) \in F^\perp$. Soit $x \in F$. Alors $\langle u(y), x \rangle = \langle y, u(x) \rangle$. Or $x \in F$ donc par stabilité $u(x) \in F$. Or $y \in F^\perp$, donc $\langle u(y), x \rangle = \langle y, u(x) \rangle = 0$. Donc $u(y) \in F^\perp$.
2. Notons u_F l'endomorphisme induit par u sur F. Alors pour tout $x, y \in F$, $\langle u_F(x), y \rangle = \langle u(x), y \rangle = \langle x, u()y \rangle = \langle x, u_F(y) \rangle$. Donc u_F est symétrique. Même démonstration pour $u_{F^\perp}$.

□

Proposition 8.1.3.
Les sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint sont deux à deux orthogonaux.

Démonstration.
Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ deux valeurs propres distinctes de u, et x et y des vecteurs propres associés respectifs. Alors

$$\begin{aligned} \lambda \langle x, y \rangle &= \langle \lambda x, y \rangle = \langle u(x), y \rangle \\ &= \langle x, u(y) \rangle = \langle x, \mu y \rangle \\ &= \mu \langle x, y \rangle . \end{aligned}$$

Or $\lambda \neq \mu$ donc $\langle x, y \rangle = 0$, et $E_\lambda(u) \perp E_\mu(u)$. □

Proposition 8.1.4.
Les valeurs propres d'un endomorphisme autoadjoint u d'un espace euclidien non nul sont toutes réelles.
En particulier le polynôme caractéristique de u est scindé dans $\mathbb{R}$, et u admet au moins une valeur propre réelle.

Démonstration.
Le polynôme caractéristique de u est scindé dans $\mathbb{C}$, et u admet au moins une valeur propre complexe.
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre complexe de u, et x un vecteur propre associé. Plaçons-nous dans une base orthonormale $\mathscr{B}$ et notons X la matrice de x dans $\mathscr{B}$.

$$\begin{aligned}
\lambda X^\top \bar{X} &= (\lambda X)^\top \bar{X} = (AX)^\top \bar{X} \\
&= X^\top A^\top \bar{X} = X^\top A \bar{X} && \text{car } A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \\
&= X^\top \bar{A} \bar{X} && \text{car } A \text{ est réelle} \\
&= X^\top \overline{(AX)} = X^\top \overline{\lambda X} \\
&= \bar{\lambda} X^\top \bar{X}.
\end{aligned}$$

Or si $X = (x_1, \dots, x_n)$, $X^\top \bar{X} = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 > 0$ car $X \neq 0$, et donc il vient $\lambda = \bar{\lambda}$.
Finalement $\lambda \in \mathbb{R}$. □

8.2 Théorème spectral

Théorème 8.2.1 (Théorème spectral pour un endomorphisme)**.**
Tout endomorphisme autoadjoint est diagonalisable dans une base orthonormale.

Démonstration.
Elle utilise les résultats de la section précédente.
Considérons $F = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)}} E_\lambda(u)$ la somme des sous-espaces propres de u. Nous savons que cette somme est directe, et que les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux. De plus elle n'est pas réduite à 0 car u a au moins une racine réelle.
Alors u est diagonalisable si et seulement si $F = E$.
Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors F est non nul et stable par u, et l'endomorphisme induit par u sur $F^\perp$ est encore symétrique. Ainsi il a a au moins une valeur propre réelle. Cette valeur propre est donc aussi une valeur propre de u, et il existe donc un vecteur propre réel de u inclus dans F. Or par construction tous les vecteurs propres de u sont dans F, mais $F \cap F^\perp = \{0\}$: d'où une contradiction.
Donc $F = E$ et u est diagonalisable.
Pour finir, considérons une b.o.n. de chaque sous-espace propre, et concaténons-les. Les sous-espaces propres étant deux à deux orthognoaux, cette concaténation est une b.o.n. de E, dans laquelle la matrice de u est diagonale. □

Théorème 8.2.2 (Théorème spectral pour une matrice)**.**
Tout matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormale, ou encore :

$$\forall\ A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}),\ \exists\ P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \text{ et } D \text{ diagonale tq } A = PDP^\top.$$

Démonstration.
Soit $\mathscr{C}$ une b.o.n. et u un endomorphisme de E tel que $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u)$. Alors u est autoadjoint donc il existe une b.o.n. $\mathscr{B}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = D$ est diagonale. Si $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})$, alors $P \in \mathrm{O}(E)$ en tant que matrice de passage entre deux b.o.n, donc $P^{-1} = P^\top$, et donc $A = PDP^{-1} = PDP^\top$. □

Exemple 8.2.3.
Pour toute matrice A réelle, $A^\top A$ est diagonalisable dans une b.o.n. réelle.

Remarque 8.2.4.
Le théorème précédent ne s'applique pas aux matrices symétriques réelles. Considérer par exemple $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$, dont le spectre est réduit à 0, et qui n'est donc pas diagonalisable, car non nulle.

9 Positivité

9.1 Endomorphismes positifs et définis positifs

Définition 9.1.1.
Soit $u \in \mathscr{S}(E)$.

1. u est dit ***positif*** si pour tout $x \in E$, $\langle x, u(x) \rangle \geqslant 0$.
2. u est dit ***défini positif*** si pour tout $x \in E$ tel que $x \neq 0$, $\langle x, u(x) \rangle > 0$.
3. On note respectivement $\mathscr{S}^+(E)$ et $\mathscr{S}^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs et celui des endomorphismes autoadjoints définis positifs.

Théorème 9.1.2.
Soit $u \in \mathscr{S}(E)$.

1. $u \in \mathscr{S}^+(E)$ si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.
2. $u \in \mathscr{S}^{++}(E)$ si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

Démonstration.
On sait déjà que toutes les valeurs propres de u sont réelles, et que u est diagonalisable dans une base orthonormale $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Soit $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.

Alors pour tout $x \in E$; si $X = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$, $\langle x, u(x) \rangle = X^\top D X = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2$.

1. ($\Leftarrow$) : si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_k \geqslant 0$, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2 \geqslant 0$ donc $\langle x, u(x) \rangle \geqslant 0$.

   ($\Rightarrow$) si $u \in \mathscr{S}^+(E)$, alors pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\langle e_k, u(_e k) \rangle \geqslant 0$. Or $\langle e_k, u(e_k) \rangle = \lambda_k$, donc $\lambda_k \geqslant 0$.
2. ($\Leftarrow$) : si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_k > 0$ et si $x \neq 0$, alors il existe $l \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_l > 0$. D'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2 \geqslant \lambda_l x_l > 0$ donc $\langle x, u(x) \rangle > 0$.

   ($\Rightarrow$) si $u \in \mathscr{S}^{++}(E)$, alors pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\langle e_k, u(_e k) \rangle > 0$. Or $\langle e_k, u(e_k) \rangle = \lambda_k$, donc $\lambda_k > 0$.

□

Remarque 9.1.3.
On en déduit que $\mathscr{S}^{++}(E) = \mathscr{S}^+(E) \cap \mathscr{GL}(E)$.

9.2 Matrices positives et définies positives

Les définitions et résultats précédents s'adaptent pour des matrices symétriques.

Définition 9.2.1.
Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

1. A est dite ***positive*** si pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top A X \geqslant 0$.
2. A est dite ***définie positive*** si pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X \neq 0$, $X^\top A X > 0$.
3. On note respectivement $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives et celui des matrices symétriques définies positives.

Exemple 9.2.2.
Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $A^\top A$ et $AA^\top$ sont symétriques positives.
Si de plus A est inversible, elles sont définies positives.

Proposition 9.2.3.
Soit $u \in \mathscr{S}(E)$ et soit $\mathscr{B}$ une b.o.n. de E. Alors $u \in \mathscr{S}^+(E)$ (resp. $\mathscr{S}^{++}(E)$) si et seulement si $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$).

Démonstration.
Direct car dans une b.o.n., si $x \in E$, $A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ et $X = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$, alors $\langle x, u(x) \rangle = X^\top A X$. □

Théorème 9.2.4.
Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

1. $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.
2. $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

10 Exercices classiques

10.1 Endomorphismes préservant l'othogonalité

Soient E un espace euclidien et $f : E \to E$ une application linéaire vérifiant

$$\forall x, y \in E,\ (x \mid y) = 0 \Rightarrow (f(x) \mid f(y)) = 0$$

1. Calculer $(u + v \mid u - v)$ pour u, v vecteurs unitaires.
2. Établir qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ vérifiant $\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \alpha\|x\|$.
3. Conclure qu'il existe $g \in \mathrm{O}(E)$ vérifiant $f = \alpha.g$

10.2 Matrices orthogonales et inégalités

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

1. $\left|\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| \leqslant n$
2. $n \leqslant \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|$
3. $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}$
4. Peut-on avoir simultanément $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| = n\sqrt{n}$ et $\left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| = n$?

10.3 Matrices symétriques positives

1. Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
   Prouver que $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \mathrm{Sp}(A) \subset [0, +\infty[$.
2. Prouver que $\forall A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}),\ A^2 \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.
3. Prouver que

$$\forall A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}),\ \forall B \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}),\ AB = BA \implies A^2B \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}).$$

10.4 Racine carrée d'une matrice symétrique positive

Soit A une matrice symétrique positive réelle de taille n. Montrer qu'il existe une unique matrice B symétrique positive réelle de taille n telle que $B^2 = A$.

10.5 Décomposition polaire

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $A^\top A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que A admet une ***décomposition polaire*** $A = \Omega S$ où $\Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
   On pourra utiliser directement qu'il existe $S \in \mathscr{S}_n^{++}$ telle que $S^2 = A$.