

# Semaine 18 du 10 mars 2025 (S11)

## XV - Espaces vectoriels préhilbertiens et euclidiens

Le chapitre XV reste au programme :

### 1 Produit scalaire et norme associée

#### 1.1 Produit scalaire

#### 1.2 Norme associée à un produit scalaire

### 2 Orthogonalité

#### 2.1 Premières définitions.

#### 2.2 Familles orthogonales.

### 3 Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

### 4 Sous-espaces vectoriels orthogonaux

### 5 Formes linéaires et hyperplans d'un espace euclidien.

#### 5.1 Rappels de première année : hyperplans en dimension finie

#### 5.2 Théorème de représentation et hyperplans dans un espace euclidien

### 6 Symétries et projecteurs orthogonaux

#### 6.1 Rappels de première année sur les projecteurs et les symétries

#### 6.2 Symétries et projecteurs orthogonaux

### 7 Distance à un sous ev

#### 7.1 Distance et projection sur un hyperplan

### 8 Exercices à connaître

#### 8.1 Inégalité de Cauchy-Schwarz et application (banque CCINP MP)

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté  $(|)$ .  
On pose  $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{(x|x)}$ .

- 1) a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.  
b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.

- 2) Soit  $E = \{f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \forall x \in [a, b] f(x) > 0\}$ .

Prouver que l'ensemble  $\left\{ \int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt, f \in E \right\}$  admet une borne inférieure  $m$  et déterminer la valeur de  $m$ .

#### 8.2 Polynômes de Legendre

On note  $E = \mathbb{R}_n[X]$ , où  $n \geq 1$ .

- 1) Vérifier que :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)dx$$

définit un produit scalaire sur  $E$ . On note  $(e_0, e_1, \dots, e_n)$  la base obtenue par orthonormalisation de la base  $(1, X, \dots, X^n)$ .

2) Pour tout entier  $k \in \{1, \dots, n\}$ , on définit :

$$f_k(X) = \frac{d^k}{dX^k} \left( (X^2 - 1)^k \right)$$

- a) Déterminer le degré de  $f_k$ .
- b) Calculer  $\langle X^i, f_k \rangle$  pour  $k \in \{1, \dots, n\}$  et  $i \in \{0, \dots, k-1\}$ .
- c) En déduire que pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ , il existe un  $\lambda_k$  tel que  $f_k = \lambda_k e_k$ .

### 8.3 Une projection orthogonale (banque CCINP MP)

On définit dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  l'application  $\varphi$  par :  $\varphi(A, A') = \text{tr}(A^T A')$ , où  $\text{tr}(A^T A')$  désigne la trace du produit de la matrice  $A^T$  par la matrice  $A'$ .

On admet que  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

On note  $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ .

- 1) Démontrer que  $\mathcal{F}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
- 2) Déterminer une base de  $\mathcal{F}^\perp$ .
- 3) Déterminer le projeté orthogonal de  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  sur  $\mathcal{F}^\perp$ .
- 4) Calculer la distance de  $J$  à  $\mathcal{F}$ .

### 8.4 Une autre distance

Pour  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ , calculer :

$$m_k = \inf_{a, b \in \mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (t^k - at - b)^2 e^{-t} dt.$$

S'y ajoute :

## XVI - Équations différentielles

### 9 Généralités sur les équations différentielles linéaires.

#### 9.1 Cadre

#### 9.2 Structure de l'ensemble des solutions

### 10 Rappels sur les équations différentielles linéaires du premier ordre

#### 10.1 Résolution de l'équation homogène

#### 10.2 Résolution d'une équation avec second membre.

### 11 Rappels sur les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

#### 11.1 Cadre du programme de première année

#### 11.2 Résolution d'une équation avec second membre

#### 11.3 Seconds membres particuliers

## 12 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients continus

### 12.1 Théorème de Cauchy linéaire et structure de l'ensemble des solutions

Il n'y a aucune méthode au programme pour trouver une solution particulière, l'énoncé doit vous guider.

### 12.2 Si l'on connaît une solution de l'équation homogène

On utilise la méthode variation de la constante.

### 12.3 Trouver une solution grâce à un développement en série entière

## 13 Systèmes différentiels

### 13.1 Définition

Il n'y a rien au programme concernant l'étude générale des systèmes différentiels linéaires.

Nous nous cantonnons à donner des exemples dans le cas où les  $a_{ij}$  sont des constantes et où  $A$  est diagonalisable ou trigonalisable.

### 13.2 Exemples

## 14 Autres méthodes à connaître

Nous présentons ces techniques au travers d'exemples uniquement.

### 14.1 Raccordements de solutions

### 14.2 Changements de fonction ou de variable

## 15 Exercices à connaître

### 15.1 Méthode de variation de la constante

- 1) Calculer la dérivée de la fonction  $t \mapsto \frac{1}{2} \arctan t + \frac{1}{2} \frac{t}{1+t^2}$ .
- 2) Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle  $(t^2 + 1)y'' - 2y = 0$  en commençant par rechercher une solution polynomiale de degré 2.
- 3) Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle  $(t^2 + 1)y'' - 2y = t$ .

### 15.2 Un raccordement de solutions (banque CCINP MP)

On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$2xy' - 3y = 0 \quad (H)$$

$$2xy' - 3y = \sqrt{x} \quad (E)$$

- 1) Résoudre l'équation  $(H)$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .
- 2) Résoudre l'équation  $(E)$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .
- 3) L'équation  $(E)$  admet-elle des solutions sur l'intervalle  $[0, +\infty[$  ?

### 15.3 Un système différentiel linéaire

$$\text{Résoudre le système } \begin{cases} x' &= y + z \\ y' &= x \\ z' &= x + y + z \end{cases}.$$

### 15.4 Un changement de fonction

Résoudre  $(x^2 + 1)y'' - (3x^2 - 4x + 3)y' + (2x^2 - 6x + 4)y = 0$  en utilisant le changement de fonction inconnue  $z = (x^2 + 1)y$ .