



Feuille d'exercice n° 05 : Valeurs propres et vecteurs propres

I. Valeurs propres et vecteurs propres

Exercice 1 () Déterminer tous les $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que la matrice $\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ admette $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ pour vecteur propre.


Exercice 2 () Trouver tous les $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & b \end{pmatrix}$ admette $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour vecteurs propres.

Exercice 3 Soit $n \geq 1$, on définit sur \mathbb{R}^n la norme $\|(x_1, \dots, x_n)\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $\forall x \in (\mathbb{R}_+)^n$, $f(x) \in (\mathbb{R}_+)^n$ et $\|f(x)\|_1 = \|x\|_1$.

- 1) Donner un exemple d'un tel endomorphisme (différent de l'identité).
- 2) Montrer que 1 est valeur propre de f .

II. Espaces propres

Exercice 4 () Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et de

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Exercice 5 Soit Φ l'endomorphisme qui a pour matrice dans la base canonique de \mathbb{C}^4


$$A = \begin{pmatrix} 0_2 & -I_2 \\ I_2 & 0_2 \end{pmatrix}.$$

En appliquant la définition, montrer que i et $-i$ sont des valeurs propres de Φ et déterminer les vecteurs propres associés. En déduire tous les sous-espaces propres de A .

Exercice 6 () Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par

$$f : P \mapsto X(P(X) - P(X - 1))$$

Déterminer les éléments propres de f . Quels sont le noyau et l'image de f ?

Exercice 7 () Soit E l'espace vectoriel des applications continues de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} . Pour $f \in E$ on définit une application $T_f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ par $T_f(0) = f(0)$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, T_f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

- 1) Montrer que, pour tout $f \in E$, $T_f \in E$.
- 2) Soit $T : E \rightarrow E$, $f \mapsto T_f$. Montrer que T est linéaire.
- 3) Déterminer les éléments propres de T .

III. Polynôme caractéristique

Exercice 8 (🚲) Soit f un endomorphisme non nul de \mathbb{R}^3 tel que $f \circ (f^2 + \text{id}) = (f^2 + \text{id}) \circ f = f^3 + f = 0$.

- 1) Montrer que $\text{Ker } f \oplus \text{Im } f = \mathbb{R}^3$.
- 2) a) Montrer que, si λ est valeur propre de f , alors $\lambda^3 + \lambda = 0$. En déduire la seule valeur propre réelle possible de f .
b) En considérant le degré du polynôme caractéristique de f , expliquer pourquoi f admet au moins une valeur propre réelle. Conclure quant à $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$.
- 3) Montrer que l'on peut trouver une base dans laquelle f a pour matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 9 (🚲) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de

$$f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 10 (🚲) Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie n , et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence des trois propositions suivantes :

- (i) il existe N nilpotent tel que $u = \text{Id}_E + N$;
- (ii) il existe une base dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale ;
- (iii) le polynôme caractéristique de u a toutes ses racines dans \mathbb{C} égales à 1.

Exercice 11 (🚲) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire admettant a pour unique valeur propre. Montrer l'équivalence entre :

- (i) $|a| < 1$

- (ii) $\sum_{k=0}^p M^k$ converge lorsque $p \rightarrow +\infty$
- (iii) $M^p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$

Exercice 12 (🚲) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang 1.

- 1) Montrer que $A^2 = \text{tr}(A)A$.
- 2) Déterminer le polynôme caractéristique de A .

Exercice 13

- 1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A - I_n$. Montrer que n est pair.
- 2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A^2 - A$. Montrer que A est de rang pair.

Exercice 14 Soit u un endomorphisme de \mathbb{R}^n de rang r . Montrer que u possède un polynôme annulateur de degré $r + 1$.

Exercice 15 Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ une matrice de trace non nulle. Prouver alors que

$$\forall B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}), \left[A^2 B = B A^2 \Rightarrow AB = BA \right].$$

Exercice 16 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ la matrice définie par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ A & A \end{pmatrix}$$

Exprimer le polynôme caractéristique de M en fonction de celui de A .

Exercice 17 (🖋️) Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. Exprimer le polynôme caractéristique de A^{-1} en fonction de celui de A .

