Semaine 4 du 6 octobre 2025 (S41)

III Rappels et compléments d'algèbre linéaire (2nde partie)

1. Trace d'un endomorphisme, trace d'une matrice

1.1. Définition.

1.2. Linéarité.

1.3. Propriété fondamentale de la trace.

1.4. Invariance par similitude.

1.5. Trace d'un endomorphisme en dimension finie.

1.6. Propriétés.

1.7. Trace d'un projecteur.

2. Sous-espaces vectoriels stables

2.1. Définitions et premières propriétés

2.2. Stabilité et matrices triangulaires par blocs

3. Déterminant

3.1. Déterminant d'une matrice carrée

3.2. Déterminant « par blocs »

3.3. Déterminant de Vandermonde

4. Polynômes d'endomorphismes

4.1. Définitions

4.2. Polynômes annulateurs

4.3. Exemples d'utilisations d'un polynôme annulateur

5. Interpolation de Lagrange

5.1. Définition du problème

5.2. Polynômes de Lagrange

5.3. Lien avec le déterminant de Vandermonde

6. Exercices à connaître

6.1. Expression et éléments caractéristiques d'un projecteur ou d'une symétrie

1) Donner les éléments caractéristiques de l'application f définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3x & - & y & + & 2z \\ -x & + & 3y & + & 2z \\ x & + & y & + & 2z \end{pmatrix} \end{array} \right. .$$

2) Donner l'expression de la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}(1,0,-1)$ et parallèlement à $\mathrm{Vect}\left((1,2,0),(1,1,-1)\right)$.

6.2. Endomorphismes de rang 1

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1.

1) Montrer qu'il existe $C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $L \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ vérifiant $A = CL$.

2) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que pour tout entier naturel non nul n, $A^n = \alpha^{n-1}A$.

3) Montrer que $A^2 = \mathrm{tr}\,(A)A$.

4) Après avoir calculé $(1+\mathrm{tr}\,A)(A+\mathrm{I}_n)-(1+\mathrm{tr}\,A)\mathrm{I}_n$, déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $A+\mathrm{I}_n$ soit inversible. Le cas échéant, déterminer $(A+\mathrm{I}_n)^{-1}$.

6.3. Matrice à diagonale dominante

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ à coefficients diagonaux dominants, c'est-à-dire telle que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|.$$

Montrer que A est inversible.

6.4. Une caractérisation de la trace

Trouver toutes les formes linéaires f sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant :

$$\forall\, A,B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ f(AB) = f(BA).$$

Indication : pour deux matrices élémentaires $E_{i,j}$ et $E_{k,\ell}$, calculer le produit $E_{i,j}E_{k,\ell}$.

S'y ajoute :

IV Intégrales généralisées

1. Fonctions continues par morceaux sur un segment

2. Rappels de première année

2.1. Le théorème fondamental

2.1a. Primitives

2.1b. Existence de primitives.

2.1c. Fonctions dont la variable intervient dans les bornes d'une intégrale (cas particulier d'intégrales dépendant d'un paramètre).

2.2. Intégration par parties

2.3. Changements de variable

3. Extension aux fonctions continues par morceaux sur un intervalle

4. Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$

4.1. Définition

4.2. Cas des fonctions positives

4.3. Cas général

5. Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

6. Propriétés

7. Méthodes de calcul

7.1. Calcul par primitivation

7.2. Intégration par parties

7.3. Changement de variable

8. Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

8.1. Définition

8.2. Un exemple de référence : les intégrales de Riemann

8.3. Théorèmes de comparaison

8.4. Étude de l'existence d'une intégrale

9. Exercices à connaître

9.1. Intégrales de Wallis

On pose, pour tout entier naturel n, $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin x)^n \mathrm{d}x$.

1) Calculer I_0 et I_1.
Pour tout $n \geqslant 2$, donner une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}.
En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de I_n selon la parité de n.

2) Montrer que la suite (I_n) est décroissante. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n-1}}{I_n}$.

3) Montrer : $\forall n \geqslant 1$, $nI_nI_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n\sqrt{n}$.

4) Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2n(I_{2n})^2 = \frac{\pi}{2}$.
En déduire que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left[n \left(\frac{1.3.5.\dots.(2n-1)}{2.4.6\dots 2n} \right)^2 \right] = \frac{1}{\pi}$ (**formule de Wallis**).

9.2. Détermination de la nature d'une intégrale

Préciser la nature des intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)\sqrt{t}}$

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}}\mathrm{d}t$

3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2\sqrt{1+t^2}}$ (et la calculer).

9.3. Intégration par parties et équivalent

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n\left(1+x^2\right)}\,\mathrm{d}x$$

1) Montrer l'existence de I_n, pour tout n.

2) Déterminer la limite de $(I_n)_n$.

3) À l'aide d'une intégration par parties, trouver un équivalent simple de I_n.

9.4. Intégrabilité de $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$

1) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$ est une intégrale convergente.

2) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$.

3) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} \mathrm{d}x$ est une intégrale divergente.

4) En déduire la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} \mathrm{d}x$. La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?