Devoir surveillé n° 3 – v1

Durée : 4 heures, calculatrices et documents interdits

I. Premier problème : Étude d'un endomorphisme sur un espace de polynômes

Présentation générale

On rappelle le théorème de la division euclidienne pour les polynômes : si $U \in \mathbb{C}[X]$ et $V \in \mathbb{C}[X]$ sont deux polynômes avec $V \neq 0$, alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{C}[X]^2$ tel que :

$$U = VQ + R \quad \text{avec} \quad (R = 0 \quad \text{ou} \quad \deg(R) < \deg(V)) \ .$$

Les polynômes Q et R sont respectivement appelés le quotient et le reste dans la division euclidienne du polynôme U par V.
Dans cet exercice, on se donne un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un couple $(A, B) \in \mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(B) = n + 1$. On considère également l'application φ définie sur $\mathbb{C}_n[X]$ qui à un polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ associe le reste dans la division euclidienne de AP par B.
Par exemple, si on suppose que l'on a :

$$n = 2, \quad A = X^2, \quad B = X^3 - X, \quad P = X^2 + X + 1,$$

alors, en effectuant la division euclidienne de AP par B, on obtient :

$$AP = X^4 + X^3 + X^2 = BQ + R \quad \text{avec} \quad Q = X + 1 \quad \text{et} \quad R = 2X^2 + X \,,$$

donc on a $\varphi(P) = 2X^2 + X$.

Partie A - Généralités sur l'application φ

Dans cette partie, on démontre que l'application φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.

1) Justifier que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $\varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X]$.

On considère deux polynômes $P_1 \in \mathbb{C}_n[X]$ et $P_2 \in \mathbb{C}_n[X]$. Par le théorème de la division euclidienne rappelé dans la présentation, il existe $(Q_1, R_1) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ et $(Q_2, R_2) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ tels que :

$$AP_1 = BQ_1 + R_1 \quad \text{et} \quad AP_2 = BQ_2 + R_2 \,.$$

2) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Exprimer le quotient et le reste dans la division euclidienne de $A(P_1 + \lambda P_2)$ par B en fonction de λ et des polynômes Q_1, Q_2, R_1 et R_2 en justifiant votre réponse. En déduire que φ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_n[X]$.

Partie B - Étude d'un premier exemple

Dans cette partie uniquement, on suppose que :

$$n = 2, \quad A = X^2 + 2X \quad \text{et} \quad B = X^3 + X^2 - X - 1 \,.$$

3) Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}_2[X]$ dans la base $(1, X, X^2)$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C}) .$$

4) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice M.

5) Justifier que l'endomorphisme φ est diagonalisable. Déterminer une base de $\mathbb{C}_2[X]$ formée de vecteurs propres de φ.

Partie C - Étude d'un second exemple

Dans cette partie uniquement, on suppose que $n = 2$ et que $B = X^3$. Comme A est un élément de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_2[X]$, il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que $A = \alpha + \beta X + \gamma X^2$.

6) Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}_2[X]$ dans la base $(1, X, X^2)$ est :

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C}) .$$

7) Montrer que l'endomorphisme φ est diagonalisable si et seulement si le polynôme A est constant.

Partie D - Étude du cas où B est scindé à racines simples

Dans cette partie, on ne suppose plus que $n = 2$: le nombre n est un entier quelconque de $\mathbb{N}^*$. Jusqu'à la fin de l'exercice, on suppose que B est un polynôme scindé à racines simples. On note $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ les racines de B qui sont donc des nombres complexes distincts.
On définit les polynômes de Lagrange $L_0, \ldots, L_n \in \mathbb{C}_n[X]$ associés aux points $x_0, \ldots, x_n$ par :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad L_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{X - x_i}{x_k - x_i} .$$

En particulier, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\forall (k, j) \in [\![0, n]\!]^2, \quad L_k(x_j) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si} \quad j = k \\ 0 & \text{si} \quad j \neq k \end{array} \right. .$$

D.1 - Décomposition avec les polynômes de Lagrange

8) Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Montrer que $x_0, \ldots, x_n$ sont des racines du polynôme $D = P - \sum_{i=0}^{n} P(x_i) L_i$.

9) Déduire de la question précédente que pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $P = \sum_{i=0}^{n} P(x_i) L_i$.

10) Montrer que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

D.2 - Réduction de l'endomorphisme φ

Pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, on désigne respectivement par $Q_k \in \mathbb{C}[X]$ et $R_k \in \mathbb{C}_n[X]$ le quotient et le reste dans la division euclidienne de $A L_k$ par B.

11) Soit $(j,k) \in [\![0,n]\!]^2$. Montrer que $R_k(x_j) = 0$ si $j \neq k$ et que $R_k(x_k) = A(x_k)$.

12) En utilisant **9)**, en déduire pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ que $\varphi(L_k) = A(x_k)L_k$.

13) Justifier que l'endomorphisme φ est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

II. Second problème : Étude d'une équation différentielle

Dans tout le problème, I est l'intervalle $[1, +\infty[$.
On note $\mathscr{E}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur I à valeurs réelles, et $\mathscr{E}_1 = \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de fonctions de classe C^1 sur I à valeurs réelles.
Lorsque V est un endomorphisme de $\mathscr{E}$, on rappelle que $V^0 = \mathrm{I}_{\mathscr{E}}$ et que si n est un entier naturel non nul, $V^n = \underbrace{V \circ \cdots \circ V}_{n}$.

Soit a un **réel strictement positif**.
Pour tout f de $\mathscr{E}$, on considère l'équation différentielle sur I :

$$y' - ay + f = 0 \qquad (E_a^f)$$

et on note $\mathscr{S}_a^f$ l'ensemble de ses solutions sur I.

1) Étude de l'équation (E_a^f).

- **a)** Soient $f \in \mathscr{E}$ et $z \in \mathscr{E}_1$.
Montrer que z est solution de (E_a^f) si et seulement s'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall\, x \in I, \quad z(x) = \mathrm{e}^{\,ax}\left(K - \int_1^x \mathrm{e}^{\,-at} f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

- **b)** Prouver que s'il existe une solution de (E_a^f) qui soit bornée sur I, alors celle-ci est unique.
- **c)** Vérifier que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{\,-at} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.
- **d)** Démontrer que la fonction $F : x \in I \mapsto \mathrm{e}^{\,ax} \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{\,-at} f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique solution de (E_a^f) bornée sur I.

On définit ainsi une application U_a de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui à toute fonction f de $\mathscr{E}$ associe la fonction $F = U_a(f)$ ainsi obtenue.

2) Étude de quelques propriétés de U_a.

- **a)** Expliciter $U_a(f)$ lorsque f est la fonction constante égale à 1.
- **b)** Vérifier que U_a est un endomorphisme de $\mathscr{E}$.
- **c)** **i)** L'endomorphisme U_a est-il injectif ?
  - **ii)** Montrer que pour tout f élément de $\mathscr{E}$, $U_a(f) \in \mathscr{E}_1$.
  - **iii)** L'endomorphisme U_a est-il surjectif ?
- **d)** **On suppose dans cette question et uniquement dans cette question que $a = 1$.**
Montrer que le sous-espace de $\mathscr{E}$: $\mathscr{F} = \mathrm{Vect}(\sin, \cos)$ est stable par U_1. En donner une base $\mathscr{B}$.
Écrire la matrice M de la restriction de U_1 à $\mathscr{F}$ dans cette base.

3) **On revient au cas général**.

a) Pour $r \in [0, +\infty[$, on note f_r la fonction de $\mathscr{E}$ définie par : $x \mapsto \mathrm{e}^{-rx}$.
Déterminer $U_a(f_r)$.

b) Soit $\lambda \in \left]0; \dfrac{1}{a}\right]$. Le réel λ est-il valeur propre de l'endomorphisme U_a ?

c) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(U_a^n(f_r))_{n\in\mathbb{N}}$ sur I.

d) Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} U_a^n(f_r)$ sur I et déterminer sa somme lorsqu'elle converge.

4) Prouver que l'on a, pour tout élément f de $\mathscr{E}$:

$$\forall\, x \in I, \quad U_a(f)(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at} f(x+t)\,\mathrm{d}t$$

5) Pour tout entier naturel k, on note g_k la fonction de $\mathscr{E}$ définie par : $g_k(x) = \mathrm{e}^{-x}x^k$ et on note $G_k = U_a(g_k)$.
Pour tout entier naturel p, on note $\mathscr{F}_p = \mathrm{Vect}(g_0, \ldots, g_p)$.

a) Donner une base $\mathscr{B}_p$ de $\mathscr{F}_p$.

b) Vérifier que $\mathscr{F}_p$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$ stable par U_a.

c) Calculer le déterminant de la restriction de U_a à $\mathscr{F}_p$.

6) Prouver que l'on a : $\forall\, f \in \mathscr{E}$, $|U_a(f)| \leqslant U_a(|f|)$.

7) Soit f dans $\mathscr{E}$ à valeurs positives. En est-il de même pour $U_a(f)$?

8) Soit f dans $\mathscr{E}$ décroissante. Prouver que $aU_a(f) \leqslant f$ puis que $U_a(f)$ est décroissante.

9) On note :

— $\mathscr{H}$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{E}$ de classe C^1 sur I et tels que f' est bornée sur I.

— D l'opérateur de dérivation sur $\mathscr{H}$.

Soit $f \in \mathscr{H}$.

a) Montrer que l'on a : $U_a(f') - aU_a(f) + f = 0$.

b) En déduire que U_a et D commutent dans $\mathscr{H}$.

10) Soit $f \in \mathscr{E}$. Vérifier que pour tout entier naturel n, $U_a^{n+1}(f)$ est la fonction
$x \mapsto \mathrm{e}^{ax} \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} \mathrm{e}^{-at} f(t)\,\mathrm{d}t$.
On pourra procéder par intégration par parties.

11) Soit $f \in \mathscr{E}$. **On suppose dans cette question et uniquement dans cette question que $a > 1$.**

a) Soient $x \in I$ et t un réel supérieur ou égal à x. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(t-x)^n}{n!} \mathrm{e}^{-at} f(t) \right)$.

b) Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} U_a(f)$ est simplement convergente sur I. On notera S sa somme.
On pourra utiliser sans démonstration le résultat valable pour tout entier naturel n : $\displaystyle\int_0^{+\infty} u^n \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = n!$

c) Démontrer qu'il existe un réel $b > 0$ tel que $S = U_b(f)$.

— **FIN** —