Feuille d'exercice n° 06 : **Suites de fonctions**

I. Convergences simple et uniforme

Exercice 1 On pose $f_n(x) = x^n \ln x$ avec $x \in]0,1]$ et $f_n(0) = 0$. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[0,1]$.

Exercice 2 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n$.

1) Étudier la limite simple de (f_n).
2) Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$ y a-t-il convergence uniforme ?

Exercice 3 Étudier la convergence (simple, uniforme, uniforme sur tout segment) de la suite de fonctions

$$b_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2nx^2}{1+n^2x^4}. \end{array}$$

Exercice 4 Étudier (convergence simple, convergence uniforme, convergence uniforme sur des parties de l'ensemble de départ) les suites d'applications suivantes :

1) $f_n : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto n(1-x)\left(\sin \dfrac{\pi x}{2}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$;
2) $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sin\left(\dfrac{n+1}{n}x\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$;
3) $f_n : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \ln\left(1 + \dfrac{nx^2}{1+nx}\right)$, $n \in \mathbb{N}$;
4) $f_n :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto (nx)^{\frac{x}{n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 5 On pose $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x+\cdots+x^n}$ pour $x \geqslant 0$. Donner l'allure du graphe de f_n. Étudier la convergence simple puis convergence uniforme de la suite (f_n).

Exercice 6 Pour tout entier naturel non nul n et tout réel positif x, on définit $f_n(x) = \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n$ si $x \leqslant n$ et $f_n(x) = 0$ si $x > n$. Étudier la convergence de cette suite de fonctions.

Exercice 7 Soit $f : x \mapsto 2x(1-x)$ de $[0,1]$ dans lui-même. On définit par récurrence : $f_0 = \mathrm{Id}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} = f \circ f_n$. La suite (f_n) converge-t-elle simplement ? uniformément ?

Exercice 8 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$g_n : x \mapsto n\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right).$$

1) Si f est dérivable, montrer que (g_n) converge simplement vers une fonction g, à définir.
2) Si f est $\mathscr{C}^2$ et à dérivée seconde bornée, montrer que cette convergence est uniforme.
3) Si f est $\mathscr{C}^1$, montrer que cette convergence est uniforme sur tout segment.

Exercice 9

Soient X un ensemble non vide, $(f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}_+)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$une application. On suppose : $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{C.U} f$.

Montrer : $\ln(1+f_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{C.U.} \ln(1+f)$.

Exercice 10

Soit $f_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, bornée, $\geqslant 0$. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite d'applications $(f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{n+1}(x) = \ln\left(1 + f_n(x)\right)$$

II. Régularité de la limite d'une suite de fonctions

Exercice 11 Soit $f_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n}}$.

Montrer que (f_n) converge vers une limite f. Est-ce que la convergence est uniforme ? Est-ce que f est $\mathscr{C}^1$?

III. Interversion limite - intégrale

Exercice 12 ()

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 - x^n}\, \mathrm{d}x$.

1) Montrer : $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

2) Trouver un équivalent simple de $I_n - 1$ lorsque l'entier n tend vers l'infini.

Exercice 13 Trouver un équivalent simple, lorsque l'entier n tend vers l'infini, de :

1) $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln\left(1 + x^n\right) \mathrm{d}x$

2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)}{x\left(1 + x^2\right)} \mathrm{d}x.$

Exercice 14 Former un développement asymptotique à la précision $o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ de $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{nx^n}{1 + x^{2n}}\, \mathrm{d}x$, lorsque l'entier n tend vers l'infini.

On laissera un des coefficients sous forme d'une intégrale.

Exercice 15 () On définit $(u_n)_n$ suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par :

$$u_0(x) = 1 \text{ et } u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n\left(t - t^2\right) \mathrm{d}t.$$

1) Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$:

$$0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

2) En déduire, pour tout $x \in [0, 1]$, la convergence de la suite $(u_n(x))_n$.

3) Établir que la suite $(u_n)_n$ converge uniformément vers une fonction u non nulle, vérifiant :

$$u'(x) = u\left(x - x^2\right).$$