Semaine 11 du 8 décembre 2025 (S50)

X Espaces probabilisés

Le chapitre X reste au programme :

1 Probabilité sur un univers fini ou dénombrable

1.1 Définition de probabilité

1.2 Quelques propriétés

1.3 Univers fini

1.4 Univers dénombrable

2 Espaces probabilisables

2.1 Tribus

2.2 Évènements et vocabulaire

2.3 Probabilité sur un espace probabilisable

2.4 Continuité monotone

2.5 Évènements presque sûrs et négligeables

3 Probabilités conditionnelles

3.1 Définition

3.2 Probabilités composées

3.3 Probabilités totales

3.4 Formule de Bayes

4 Évènements indépendants

5 Exercices à connaître

5.1 Loi de Zipf

Soit $a > 1$. On rappelle la définition de la fonction ζ de Riemann : $\zeta(a) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^a}$. On définit la loi de Zipf de paramètre a par

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ P(\{k\}) = \frac{1}{\zeta(a)k^a}.$$

1) Montrer que $(\mathbb{N}^*, \mathscr{P}(\mathbb{N}^*), P)$ est un espace probabilisé.

2) Pour $m \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(m\mathbb{N}^*)$.

3) Pour $i, j \in \mathbb{N}^*$, déterminer une CNS sur i, j pour que $i\mathbb{N}^*$ et $j\mathbb{N}^*$ soient indépendants.

4) *Application*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note p_n le n^{e} nombre premier, et C_n l'ensemble des entiers qui ne sont divisibles par aucun des p_i, pour $i \in [\![1, n]\!]$.

a) Calculer $P(C_n)$.

b) Déterminer $\bigcap_{n \geqslant 1} C_n$.

c) En déduire que

$$\zeta(a) = \prod_{i=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_i^a}\right)^{-1}.$$

5.2 Théorème de Borel-Cantelli

Cet exercice est long, on peut n'en donner qu'une partie

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit (A_n) une suite d'événements. On définit la limite supérieure de ces événements comme étant $B = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$.

1) Montrer que B est un événement.

2) Si $\omega \in \Omega$, donner une interprétation de $\omega \in B$ en fonction des $\omega \in A_i$.

3) Montrer le lemme de Borel-Cantelli (version faible) : si $\sum_{n \geqslant 0} P(A_n)$ converge, alors $P(B) = 0$.

4) On souhaite montrer que si $\sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n) = +\infty$, et si les A_n sont mutuellement indépendants, alors $P(B) = 1$.

a) Montrer que s'il existe une infinité de A_n tels que $P(A_n) = 1$, alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, $P\left(\bigcup_{n=p}^{+\infty} A_n\right) = 1$, et conclure.

On suppose alors qu'à partir d'un certain rang, $P(A_n) < 1$. Soit $p \in \mathbb{N}$ supérieur à ce rang.

b) Montrer que $P(\overline{B}) = \lim_{p \to +\infty} P\left(\bigcap_{n=p}^{+\infty} \overline{A_n}\right)$.

c) Montrer que si $q \geqslant p$, alors $P\left(\bigcap_{n=p}^{+\infty} \overline{A_n}\right) \leqslant \prod_{n=p}^{q} (1 - P(A_n))$.

d) Montrer que $\ln\left(\prod_{n=p}^{q} (1 - P(A_n))\right) \leqslant -\sum_{n=p}^{q} P(A_n)$.

e) Conclure.

5.3 Une suite arithmético-géométrique

On considère deux urnes U et V. L'urne U contient deux boules blanches et quatre boules noires. L'urne V contient trois boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs avec remise selon la procédure suivante. Pour le premier tirage, on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie. On note sa couleur et on la remet dans l'urne.

— Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant s'effectue dans l'urne U.

— Sinon, le tirage suivant s'effectue dans l'urne V.

On itère le procédé pour les tirages suivants. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'evénement «la boule tirée au n^{e} tirage est blanche» et $p_n = P(B_n)$.

1) Calculer p_1.

2) Déterminer p_{n+1} en fonction de p_n.

3) Déterminer la limite de la suite (p_n).

5.4 Une chaîne de Markov

Une particule se déplace sur une surface comportant quatre positions successives, A_0 qui est un puits, A_1 et A_2 deux positions intermédiaires, A_3 un second puits.
A l'instant $t = n$,

— si la particule est dans un puits, elle y reste

— si elle est en A_1, elle va en A_0 avec la probabilité p et en A_2 avec la probabilité $1 - p$

— si elle est en A_2, elle va en A_1 avec la probabilité p et en A_3 avec la probabilité $1 - p$.

On note x_n la position de la particule à l'instant $t = n$, $x_n(\Omega) = [\![0, 3]\!]$.
On pose

$$X_n = \begin{pmatrix} P(x_n = 0) \\ P(x_n = 1) \\ P(x_n = 2) \\ P(x_n = 3) \end{pmatrix}$$

1) Déterminer une matrice M indépendante de n telle que pour tout n, $X_{n+1} = MX_n$.

2) Montrer que M est diagonalisable si et seulement si $0 < p < 1$.

3) On suppose $p = 1/2$. Donner $\lim_{n\to\infty} X_n$.

4) Si $X_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, calculer $\lim_{n\to\infty} X_n$.

5.5 Apparition d'un double Pile

On considère une pièce dont la probabilité d'apparition du côté face (F) est 1/3 et celle du côté pile (P) est 2/3. On effectue des lancers de façon indépendante jusqu'à ce que le motif PP apparaisse. On note T le (premier) rang d'apparition de ce motif. (Par exemple, si on a la suite de lancers FPFFPP alors $T = 6$.) On notera $(T = +\infty)$ l'événement « le motif PP n'apparaît jamais ».

1) Pour k dans $\mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $(T = k)$ en fonction des événements $(T > k)$. Montrer que la suite de terme général $p_k = P(T > k)$ vérifie la relation de récurrence

$$\forall k \geqslant 2, p_k = \frac{2}{9}p_{k-2} + \frac{1}{3}p_{k-1}$$

2) Exprimer p_k en fonction de k.

3) Calculer la probabilité que le motif PP n'apparaisse jamais.

S'y ajoute :

XIII - Intégrales à paramètre

1 Cadre

1.1 Fonctions dont la variable intervient dans les bornes d'une intégrale (et pas ailleurs)

1.2 Fonctions définies par une intégrale, dont la variable n'intervient pas dans les bornes

1.3 Et si la variable intervient à la fois dans les bornes et dans l'intégrande ?

2 Continuité

2.1 Théorème de continuité par domination

2.2 Limite

3 Dérivation

3.1 Rappels de première année : dérivées partielles

3.2 Dérivation par domination

3.3 Dérivées d'ordres supérieurs

4 Exercices à connaître

4.1 La fonction Γ (banque CCINP MP)

On pose : $\forall\, x \in]0,+\infty[,\ \forall\, t \in]0,+\infty[,\ f(x,t) = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$.

1) Démontrer que : $\forall x \in]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

On pose alors : $\forall\, x \in]0,+\infty[,\ \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$.

2) Pour tout $x \in]0,+\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

4) Démontrer que Γ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

4.2 Produit de convolution

On note E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, 2π périodiques, à valeurs complexes. On munit E de la norme N_∞.
On étudie la loi $*$ qui, à deux fonctions f et g de E, fait correspondre la fonction $f*g$ définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ (f*g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t$$

et appelée ***produit de convolution*** de f et g.

1) Montrer qu'une fonction continue périodique est bornée.

2) Démontrer que la fonction $f*g$ est définie sur $\mathbb{R}$, bornée et donner un majorant de $N_\infty(g*f)$ en fonction de $N_\infty(f)$ et $N_\infty(g)$.

3) Démontrer que $*$ est une loi de composition interne sur E.

4) Montrer que la fonction $f*g$ est égale à la fonction $g*f$.

5) Soit $k, l \in \mathbb{Z}$, $e_k : t \mapsto \mathrm{e}^{ikt}$ et $e_l : t \mapsto \mathrm{e}^{ilt}$. Calculer $e_k * e_l$.

4.3 L'intégrale de Gauss

Soient $f(x) = \left(\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2$ et $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

1) Montrer que f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$et déterminer leur dérivée.

2) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, on a $f(x) + g(x) = \dfrac{\pi}{4}$.

3) En déduire $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.

4.4 Transformée de Laplace et intégrale de Dirichlet

On utilisera directement ici que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$ converge.

On définit, si $s \in \mathbb{R}_+$,

$$F(s) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}_+$, et est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Calculer $F(s)$ pour $s \in \mathbb{R}_+^*$.

3) Montrer que F est continue en 0.

4) Déduire de ce qui précède la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.