Semaine 20 du 24 mars 2025 (S13)

XVII - Endomorphismes des espaces euclidiens

1 Orientation d'un espace vectoriel euclidien

2 Endomorphismes orthogonaux

3 Matrices orthogonales

4 Produit mixte

4.1 Définition et propriétés

4.2 Orientation d'une droite ou d'un plan dans un espace euclidien de dimension 3

5 Endomorphismes orthogonaux en dimension 2

6 Endomorphismes orthogonaux en dimension 3

7 Endomorphismes autoadjoints

7.1 Définition et exemples

7.2 Représentation matricielle

8 Réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles

8.1 Propriétés des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles

8.2 Théorème spectral

9 Positivité

9.1 Endomorphismes positifs et définis positifs

9.2 Matrices positives et définies positives

10 Exercices à connaître

10.1 Endomorphismes préservant l'othogonalité

Soient E un espace euclidien et $f : E \to E$ une application linéaire vérifiant

$$\forall\, x, y \in E,\ (x \mid y) = 0 \Rightarrow (f(x) \mid f(y)) = 0$$

1) Calculer $(u + v \mid u - v)$ pour u, v vecteurs unitaires.

2) Établir qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ vérifiant $\forall\, x \in E,\ \|f(x)\| = \alpha\|x\|$.

3) Conclure qu'il existe $g \in \mathrm{O}(E)$ vérifiant $f = \alpha.g$

10.2 Matrices orthogonales et inégalités

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

1) $\left|\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| \leqslant n$ **2)** $n \leqslant \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|$ **3)** $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}$

4) Peut-on avoir simultanément $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| = n\sqrt{n}$ et $\left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| = n$?

10.3 Matrices symétriques positives

1) Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
Prouver que $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \mathrm{Sp}(A) \subset [0,+\infty[$.

2) Prouver que $\forall\, A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, $A^2 \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

3) Prouver que

$$\forall\, A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}),\ \forall\, B \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}),\ AB = BA \implies A^2B \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}).$$

10.4 Racine carrée d'une matrice symétrique positive

Soit A une matrice symétrique positive réelle de taille n. Montrer qu'il existe une unique matrice B symétrique positive réelle de taille n telle que $B^2 = A$.

10.5 Décomposition polaire

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que $A^\top A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

2) Montrer que A admet une ***décomposition polaire*** $A = \Omega S$ où $\Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
On pourra utiliser directement qu'il existe $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S^2 = A^\top A$.

Et on rajouet cinq chapitres en révision :

III - Intégrales généralisées

VI - Suites de fonctions

VIII - Séries de fonctions

XI - Séries entières

XIII - Intégrales à paramètres

Avec les exercices suivant à connaître :

Exercices à connaître

10.1 Intégration par parties et équivalent

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$$

1) Montrer l'existence de I_n, pour tout n.

2) Déterminer la limite de $(I_n)_n$.

3) À l'aide d'une intégration par parties, trouver un équivalent simple de I_n.

10.2 Intégrabilité de $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$

1) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ est une intégrale convergente.

2) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$.

3) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x$ est une intégrale divergente.

4) En déduire la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x$. La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?

10.3 Interversion limite - intégrale sur un segment (banque CCP MP)

On pose $f_n(x) = (x^2+1)\dfrac{n\mathrm{e}^{x} + x\mathrm{e}^{-x}}{n+x}$.

1) Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.

2) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (x^2+1)\frac{n\mathrm{e}^{x} + x\mathrm{e}^{-x}}{n+x}\,\mathrm{d}x$.

10.4 Utilisation du théorème de convergence dominée

Montrer, pour tout $a \in [0,+\infty[$ fixé : $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{x}\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - 1\right) \mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^a \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}\,\mathrm{d}x$.

10.5 La fonction ζ de Riemann

On définit, là où cela est possible, la fonction $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

1) Donner l'ensemble de définition de ζ.

2) Montrer qu'elle ne converge pas uniformément sur $]1,+\infty[$.

3) Montrer que $\zeta \in \mathscr{C}^\infty(]1,+\infty[,\mathbb{R})$.

4) Étudier la monotonie et la convexité de ζ.

5) Montrer qu'elle a une limite en $+\infty$ et la calculer.

6) Donner un équivalent de ζ en 1^+.

10.6 Tableau de variation d'une série de fonctions

Pour $x > 0$ on pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

1) Justifier que S est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Préciser le sens de variation de S.

3) Établir $S(x+1) + S(x) = 1/x$.

4) Donner un équivalent de S en 0.

5) Donner un équivalent de S en $+\infty$.

10.7 Calculs de sommes de séries entières (Banque CCP MP)

Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivantes, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence :

1) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$.

2) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ avec $\begin{cases} a_{2n} = 4^n \\ a_{2n+1} = 5^{n+1} \end{cases}$

10.8 La fonction Γ (banque CCINP MP)

On pose : $\forall\, x \in]0,+\infty[$, $\forall\, t \in]0,+\infty[$, $f(x,t) = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$.

1) Démontrer que : $\forall x \in]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

On pose alors : $\forall\, x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$.

2) Pour tout $x \in]0,+\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.

3) Démontrer que Γ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.