



Feuille d'exercice n° 12 : Topologie des espaces vectoriels normés

I. Ouverts, fermés


Exercice 1 () Montrer que si un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel normé E est ouvert alors $F = E$.

Exercice 2 Soient A et B deux parties d'un espace vectoriel normé (E, N) .

- 1) On suppose $A \subset B$. Etablir $A^\circ \subset B^\circ$ et $\bar{A} \subset \bar{B}$.
- 2) Comparer $(A \cap B)^\circ$ et $A^\circ \cap B^\circ$ d'une part puis $(A \cup B)^\circ$ et $A^\circ \cup B^\circ$ d'autre part.
- 3) Comparer $\overline{A \cup B}$ et $\bar{A} \cup \bar{B}$ d'une part puis $\overline{A \cap B}$ et $\bar{A} \cap \bar{B}$ d'autre part.

Exercice 3 () Soient A et B deux parties quelconques d'un espace vectoriel normé E . On note $A + B$ l'ensemble $\{a + b, (a, b) \in A \times B\}$.

- 1) Montrer que lorsque A est ouverte, la partie $A + B$ l'est aussi.
- 2) Montrer que lorsque A est fermée et b est un élément de E , la partie $A + b$ (notation simplifiée de $A + \{b\}$) est fermée également.

Exercice 4 () On considère l'espace vectoriel normé \mathbb{R} . On note $A = \mathbb{Z}$ et $B = \left\{n - \frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$.


- 1) Montrer que A et B sont fermés.
- 2) Montrer que $A + B$ n'est pas fermé.

Exercice 5 Soit E le \mathbb{R} -espace vectoriel des suites réelles bornées muni de la norme $\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.

Déterminer si les sous-ensembles suivants sont fermés ou non :


$$A = \{\text{suites croissantes}\} \quad B = \{\text{suites convergeant vers } 0\}.$$

II. Densité


Exercice 6 () Soient U et V deux ouverts denses d'un espace vectoriel normé E .

Établir que $U \cap V$ est encore un ouvert dense de E .

En déduire que la réunion de deux fermés d'intérieur vide est aussi d'intérieur vide.

Exercice 7 () Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

III. Continuité

Exercice 8 () Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$.

- 1) Soit l'ensemble des nombres dyadiques $\mathcal{D} = \left\{\frac{k}{2^n}, (k, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*\right\}$.
Montrer que \mathcal{D} est dense dans \mathbb{R} .
- 2) Montrer par récurrence que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et k entier compris entre 0 et 2^n , on a : $f\left(\frac{k}{2^n}x + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)y\right) = \frac{k}{2^n}f(x) + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)f(y)$.

- 3) En déduire que si a, b sont deux réels tels que $f(a) = f(b) = 0$, alors $f|_{[a,b]} = 0$.
- 4) On suppose dans cette question que f s'annule en 0 et en 1.
 - a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(2^n) = 0$.
 - b) Montrer que f est nulle.
- 5) Conclure que dans le cas général f est une fonction affine.

Exercice 9 (🚲) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue telle que $f(0) = 1$, $\lim_{-\infty} f = 0$ et $\lim_{+\infty} f = 0$.

- 1) Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que si $|x| > a$ alors $f(x) \leq \frac{1}{2}$.
- 2) Montrer que f est bornée et possède un maximum.

Exercice 10 (🚲) Étudier la continuité sur \mathbb{R}^2 des fonctions suivantes :

- 1) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
- 2) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 11 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$\begin{cases} f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 - 2x^2 y + 3y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}$$

- 1) Montrer que la restriction de f à toute droite passant par l'origine est continue.
- 2) Montrez que la fonction f n'est pas continue à l'origine.

Exercice 12 Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} muni de la norme

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx.$$

On considère l'application $L : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $L(f) = f(1)$.

- 1) Montrer que L est une application linéaire.
- 2) En considérant les fonctions $f_n : x \mapsto \sqrt{n}x^n$, montrer que L n'est pas continue.

Exercice 13 (🖋️) Soit $\varphi : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ définie par $\varphi(f) : x \mapsto \int_0^x t f(t) dt$.

- 1) Montrer que φ est linéaire.
- 2) Examiner si φ est continue pour $\|f\|_\infty = \max_{t \in [0, 1]} |f(t)|$.

Exercice 14 (🚲) On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\|P\|_\infty = \max |a_i|$ si $P = \sum a_i X^i$. Soit φ la forme linéaire définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $\varphi(P) = P(1)$. Montrer que φ n'est pas continue.

Exercice 15 Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que pour toute suite (u_n) tendant vers 0, $f(u_n)$ est bornée. Montrer que f est continue.

