

# Intégrales dépendant d'un paramètre

## I. La fonction $\Gamma$ (banque CCINP MP)

1) Soit  $x \in ]0, +\infty[$ .

La fonction  $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$  est définie, positive et continue par morceaux sur  $]0, +\infty[$ .

$f(x, t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1}$  et  $t \mapsto t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$  est intégrable sur  $]0, 1]$  (fonction de

Riemann avec  $1 - x < 1$ ).

Donc, par critère d'équivalence pour les fonctions positives,  $t \mapsto f(x, t)$  est intégrable sur  $]0, 1]$ . (\*)

De plus,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 f(x, t) = 0$ , donc, pour  $t$  au voisinage de  $+\infty$ ,

$$f(x, t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Or  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$  (fonction de Riemann intégrable).

Donc  $t \mapsto f(x, t)$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ . (\*\*)

Donc, d'après (\*) et (\*\*),  $t \mapsto f(x, t)$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

2) Par intégration par parties, justifiée ci-après  $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^x dt =$

$$[-e^{-t}t^x]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1} dt.$$

Le crochet possède des limites finies à ses bornes par croissances comparées, et est de valeur nulle, ce qui valide ce calcul et donne

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

3) i) pour tout  $x > 0$ ,  $t \mapsto f(x, t)$  est continue par morceaux et intégrable sur  $]0, +\infty[$  (d'après la question 1.).

ii)  $\forall t \in ]0, +\infty[$ , la fonction  $x \mapsto f(x, t)$  est dérivable et  $\forall (x, t) \in ]0, +\infty[^2$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = (\ln t)e^{-t}t^{x-1}$ .

iii) Pour tout  $x > 0$ ,  $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $]0, +\infty[$ .

iv) Pour tout  $t > 0$ ,  $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .

v) Pour tout  $[a, b] \subset ]0, +\infty[$  et  $\forall (t, x) \in ]0, +\infty[ \times [a, b]$  :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t) \text{ avec } \varphi(t) = \begin{cases} |\ln t|e^{-t}t^{a-1} & \text{si } t \in ]0, 1[ \\ |\ln t|e^{-t}t^{b-1} & \text{si } t \in [1, +\infty[ \end{cases}$$

avec  $\varphi$  continue par morceaux et intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

En effet :

$$\varphi(t) \underset{0^+}{\sim} |\ln t|t^{a-1} = \varphi_1(t) \text{ et } \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{1-\frac{a}{2}}\varphi_1(t) = \lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{a}{2}}|\ln t| = 0.$$

Donc, au voisinage de  $0^+$ ,  $\varphi_1(t) = o\left(\frac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}\right)$ .

Or  $t \mapsto \frac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}$  est intégrable sur  $]0, 1[$  (fonction de Riemann avec  $1 - \frac{a}{2} < 1$ ).

Donc,  $\varphi_1$  est intégrable sur  $]0, 1[$ .

Donc, par critère d'équivalence pour les fonctions positives,  $\varphi$  est intégrable sur  $]0, 1[$ . (\*)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \varphi(t) = 0.$$

Donc, pour  $t$  au voisinage de  $+\infty$ ,  $\varphi(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ .

Or,  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$  (fonction de Riemann intégrable).

Donc  $\varphi$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ . (\*\*)

D'après (\*) et (\*\*),  $\varphi$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

D'où, d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres,  $\Gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$ .

$$\text{De plus, } \forall x \in ]0, +\infty[, \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)e^{-t}t^{x-1} dt.$$

## II. Produit de convolution

- 1) Soit  $f$  une fonction continue  $T$ -périodique, avec  $T > 0$ .  
 Soit  $y \in f(\mathbb{R})$ . Il existe donc  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $y = f(x)$ .  
 Posons  $k = \lfloor \frac{x}{T} \rfloor$ . Alors  $x = kT + (x - kT)$ . Puisque  $k \in \mathbb{Z}$ , alors  $y = f(x) = f(x - kT)$ .  
 Mais  $k \leq \frac{x}{T} < k + 1$  donc  $0 \leq x - kT < T$ , et ainsi  $y \in f([0, T])$ . Et donc  $f(\mathbb{R}) \subset f([0, T])$ .  
 Mais  $f$  est continue et  $[0, T]$  est un segment, donc  $f([0, T])$  est un ensemble borné, donc  $f(\mathbb{R})$  aussi.
- 2) Pour tout réel  $x$ ,  $f * g(x)$  est définie comme intégrale sur un segment d'une fonction continue. Une fonction continue  $2\pi$ -périodique est bornée. Donc on peut majorer :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |(f * g)(x)| \leq 2\pi N_\infty(f) N_\infty(g),$$

ce qui permet de dire que  $f * g$  est bornée et  $N_\infty(f * g) \leq 2\pi N_\infty(f) N_\infty(g)$ .

- 3) La  $2\pi$ -périodicité de  $f * g$  résulte immédiatement de celle de  $f$ .  
 Il s'agit ensuite de montrer que, si  $f$  et  $g$  sont continues,  $f * g$  l'est.  
 Définissons  $\varphi : (x, t) \mapsto f(x - t)g(t)$  sur  $\mathbb{R} \times [-\pi, \pi]$ . Elle est continue par rapport à chacune de ses variables, et

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [-\pi, \pi], \quad |\varphi(x, t)| \leq N_\infty(f) N_\infty(g).$$

Or la fonction  $t \mapsto N_\infty(f) N_\infty(g)$  est continue sur  $[-\pi, \pi]$  (la continuité par morceaux suffirait), intégrable sur ce segment. Le théorème de continuité sous le signe  $\int$  permet alors de conclure.

- 4) Nous avons

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x - t)g(t)dt \\ &= \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(u)g(x - u)du \quad (\text{changement de variable } t = x - u). \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(u)g(x - u)du &= \int_{x-\pi}^{-\pi} f(u)g(x - u)du + \int_{-\pi}^{\pi} f(u)g(x - u)du \\ &\quad + \int_{\pi}^{x+\pi} f(u)g(x - u)du \end{aligned}$$

et, en faisant le changement de variable  $v = u + 2\pi, u = v - 2\pi$  dans la première intégrale, tenant compte de la  $2\pi$ -périodicité de  $f$  et  $g$ , on obtient finalement

$$f * g = g * f.$$

5)

$$\begin{aligned} (e_k * e_l)(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik(x-t)} e^{ilt} dt \\ &= \left( \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(l-k)t} dt \right) e_k(x) \end{aligned}$$

Si  $k = l$ , on obtient  $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(l-k)t} dt = 2\pi$ .

Si  $k \neq l$ ,  $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(l-k)t} dt = \left[ \frac{1}{i(l-k)} e^{i(l-k)t} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$ .

Finalement  $e_k * e_l = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq l \\ 2\pi e_k & \text{si } k = l \end{cases}$ .

### III. L'intégrale de Gauss

- 1) On pose  $f = F^2$  où  $F : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$  est la primitive s'annulant en 0 de  $x \mapsto e^{-x^2}$ . La fonction  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^+$ . Donc  $f$  l'est également, avec pour tout  $x \geq 0$ ,  $f'(x) = 2F'(x)F(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$ .

Posons  $h : (x, t) \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$  pour  $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 1]$ . Pour tout  $x \geq 0$ ,  $t \mapsto h(x, t)$  est continue sur  $[0, 1]$  et donc intégrable sur  $[0, 1]$ . Pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $x \mapsto h(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^+$  avec  $\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = -2xe^{-(1+t^2)x^2}$ .

Soit  $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$ . Pour  $(x, t) \in [a, b] \times [0, 1]$ ,  $\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq 2b$  et  $t \mapsto 2b$  est continue et intégrable sur  $[0, 1]$ . Donc  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^+$  avec, pour tout  $x \geq 0$ ,  $g'(x) = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt = -2e^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2 t^2} x dt$ . Le changement linéaire  $u = xt$  donne  $\forall x \in \mathbb{R}^+$ ,  $g'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du$ .

- 2) D'après les calculs précédents,  $f + g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^+$ , de dérivée nulle. La fonction  $f + g$  est donc constante. Or  $f(0) = 0$  et  $g(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \text{Arctan } 1 = \frac{\pi}{4}$ . Pour tout  $x \geq 0$ ,  $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$ .
- 3) La fonction  $\varphi : t \mapsto e^{-t^2}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$  car  $\varphi$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$  et  $\varphi(t) = o_{t \rightarrow +\infty}(e^{-t})$ . Ainsi  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = I^2$ . On détermine la limite de  $g$  en  $+\infty$  par encadrement. Pour  $x \geq 0$ , on a  $0 \leq g(x) \leq \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4} e^{-x^2}$ . Par encadrement, on obtient  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ . En conclusion  $I^2 = \frac{\pi}{4}$  et puisque  $I \geq 0$ , on obtient  $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

### IV. Transformée de Laplace et intégrale de Dirichlet

- 1)  $F$  est bien définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  car pour  $s > 0$ , on a  $e^{-st} \frac{\sin(t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1$  et  $e^{-st} \frac{\sin(t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$  donc  $t \mapsto e^{-st} \frac{\sin(t)}{t}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  pour  $s > 0$ .

D'après la première phrase de l'énoncé,  $F(0)$  est définie également. Montrons que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Soit  $f : (x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_+^* \mapsto e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t}$ . Alors  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $(\mathbb{R}_+^*)^2$  avec  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -e^{-xt} \sin(t)$ .

Soit  $a > 0$ , pour tout  $x \geq a$  et  $t > 0$ ,  $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = e^{-xt} |\sin(t)| \leq e^{-at}$  et  $t \mapsto e^{-at}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ , donc par théorème de dérivation sous le signe somme,  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]a, +\infty[$ , donc sur  $\mathbb{R}_+^*$ , avec pour tout  $s > 0$ ,

$$\begin{aligned} F'(x) &= - \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin(t) dt = - \text{Im} \left( \int_0^{+\infty} e^{-(x-i)t} dt \right) \\ &= \text{Im} \left( \frac{1}{i-x} \right) = - \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

- 2) Donc il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall x > 0$ ,  $F(x) = c - \arctan(x)$ . Or, comme

$$|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

On a donc  $c = \frac{\pi}{2}$  et  $\forall x > 0$ ,  $F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$ .

- 3) Il n'est pas possible d'utiliser le théorème de continuité sous le signe intégrale en l'état car  $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$  n'est pas intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

Posons

$$\begin{cases} F_1(x) = \int_0^1 e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t} dt \\ F_2(x) = \int_1^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t} dt \end{cases}$$

de sorte que  $F = F_1 + F_2$ .

La fonction  $F_1$  est de classe  $\mathcal{C}^0$  sur  $\mathbb{R}^+$  car on dispose de la domination  $|f(x, t)| = e^{-xt} \frac{|\sin(t)|}{t} \leq 1$  et la constante 1 est intégrable sur  $]0, 1]$ .

Montrons la continuité sur  $\mathbb{R}_+$  de  $F_2 = \text{Im } G$  avec  $G : x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{e^{-(x-i)t}}{t} dt$ .  
 Pour  $X \geq 1$ ,

$$\int_1^X \frac{e^{-(x-i)t}}{t} dt = \left[ \frac{1}{i-x} \frac{e^{-(x-i)t}}{t} \right]_1^X + \frac{1}{i-x} \int_1^X \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2} dt$$

Comme  $\left| \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$ , la fonction  $t \mapsto \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2}$  est intégrable et

$$G(x) = \frac{e^{i-x}}{x-i} + \frac{1}{i-x} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2} dt$$

Or,  $(x, t) \mapsto \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}^+ \times [1, +\infty[$  et on dispose de la domination  $\left| \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$  donc  $G$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$  donc  $F_1$  et  $F_2$  le sont. Et donc  $F$  aussi.

4) On a donc  $\frac{\pi}{2} = F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ .