Devoir surveillé n° 2 - Remarques

Barème.

Toutes les questions sont notées sur 4 points, le total est de 124 points.

Statistiques descriptives.

	Note brute	Note finale
Note maximale	53	19
Note minimale	5	5
Moyenne	$\approx 18,49$	$\approx 8,98$
Écart-type	$\approx 9,77$	$\approx 2,82$

Remarques générales.

La quasi-totalité d'entre vous a bien encadré ses résultats : bravo !
Par contre ce devoir est décevant voire inquiétant. Vous avez en général traité peu de questions correctement.
Le problème I, qui portait sur le programme de sup, a laissé voir beaucoup de lacunes.
Dans le problème II, j'ai lu en très grand nombre des erreurs scandaleuses. Beaucoup d'entre vous sont prêts à écrire absolument n'importe quoi et à inventer des théorèmes bidons de toutes pièces juste pour le plaisir d'écrire la conclusion et de l'encadrer. C'est extrêment préoccupant.

Il va falloir réagir très vite.

I. Somme de projecteurs (Mines-Ponts 2014, PC 1, extrait)

L'énoncé imposait les notations $N(T)$ et $R(T)$ pour les noyau et image de T : ces notations ne sont pas habituelles, mais il faut se plier aux choix de l'énoncé. Il ne fallait donc pas utiliser les notations $\operatorname{Ker} T$ et $\operatorname{Im} T$.
L'énoncé introduisait également un endomorphisme T. Il rappelait ensuite la définition d'homothétie, avec la formulation « on dit que T est une homothétie si ... ». Un nombre non négligeable d'entre vous a pris cette phrase pour l'hypothèse que T était une homothétie, ce qui n'était nullement le cas. Attention à lire attentivement l'énoncé.

1. C'est une question de cours, beaucoup l'ont sautée, c'est étonnant.

2. Si P est le projecteur sur F parallèlement à G, alors $I - P$ est le projecteur sur G parallèlement à F. C'est du cours et cela permet d'aller vite dans cette question. Vous êtes quasiment tous repassé par deux doubles inclusions, ça marche mais c'est long. De plus par symétrie du problème (car $P = I - P'$ et P' est un projecteur), il était inutile de détailler la seconde double inclusion.

3. La formule de Grassmann ne suffisait pas. Il fallait en plus justifier que $R(P_1 + \ldots + P_m) \subset R(P_1) + \ldots + R(P_m)$.

4. et 5. Le déroulé de l'énoncé était criticable. Le corrigé fourni également. IL était plus simple de procéder à l'envers en considérant la base de la question 5, donner la forme générale de la matrice de T dans cette base, pour en déduire le résultat de la question 4. Il n'y avait alors rien à fair epour la question 5.

6. Trop d'erreurs dans la contraposition. Si vous montrez $\neq A \Rightarrow \neq B$, alors vous avez montré $B \Rightarrow A$ mais sûrement pas $A \Rightarrow B$. Il est anormal de se tromper là-dessus en seconde année.

7. Beaucoup de réponses du style « on prend une base vérifiant ce qu'il faut et c'est bon ». Mais est-il possible de choisir une base ainsi ? Toute la question est là.

9. On demande de montrer par récurrence que le résultat est vrai pour $n \geqslant 3$. Le résultat a déjà été démontré pour $n = 2$ mis pour $n = 3$. Il est donc plus simple de rédiger la récurrence pour $n \geqslant 2$, en initialisant donc pour $n = 2$. Cela impliquera en particulier le résultat voulu pour $n \geqslant 3$.
Cet aspect vous a perdu. Certains ont initialisé à $n = 3$ pour coller à l'énoncé : c'était beaucoup plus long, et l'initialisation était alors redondante avec l'hérédité (mêmes arguments).
D'autres ont tout mélangé : ils ont défini la propriété pour $n \geqslant 3$, l'ont initialisée pour $n = 2$, et ont supposé le résultat vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}$ dans l'hérédité. Quel bazar ...
Ensuite, pour rédiger une récurrence il convient d'écrire intégralement et clairement l'énoncé à démontrer, même si vous avez l'impression que le sujet l'a fait pour vous. Et il faut à chaque étape préciser qui est n.
Enfin, l'énoncé doit dépendre de n. Ici : « il existe une base $\mathscr{B}''$ dans laquelle $\mathbb{T}_{\mathscr{B}''}$ ait pour éléments diagonaux les $t_1, \cdots, t_n$ » ne convenait pas : qui sont $\mathscr{B}''$ et T ? Quel lien ont-ils avec n ?
Il convenait d'écrire : « Soit X un ev de dimension n, et $T \in \mathscr{L}(X)$. Alors il existe une base $\mathscr{B}''$ de X dans laquelle $\mathbb{T}_{\mathscr{B}''}$ ait pour éléments diagonaux les $t_1, \cdots, t_n$ ».

10. Souvent lu : « on concatène une base de $R(T)$ et une base de $N(t)$ » : ceci n'est possible que si $X = R(T) \oplus N(T)$, ce qui n'avait aucune raison d'être vrai ici.
C'est une question archi classique et importante, vous devez savoir y répondre correctement.

11. Les $t_1, \cdots, t_p$ n'étaient pas définis dans l'énoncé. Et on les voulait tous non nuls. Consultez le corrigé.

II. Restes ou sommes partielles d'intégrales (Centrale 2003, PC 1, extrait)

Les préliminaires faisaient démontrer quelques résultats qui allaient servir sans arrêt dans la suite. Mais comme toujours, pour utiliser un résultat, il faut d'abord en vérifier les hypothèses. Vous ne l'avez quasiment JAMAIS fait, c'est proprement hallucinant. Le nombre de points perdus en route est conséquent.
On a pourtant dû vous prévenir un milliard de fois, et il est absolument anormal de constater cet échec complet en la matière dans ce devoir.

1.a. Il s'agissait tout simplement de revenir à la définition et de dérouler.
Que d'erreurs et d'inventions ... Souvent lu, et honteux : « $\dfrac{f}{g} \longrightarrow 1$ donc $\displaystyle\int_x^b \frac{f}{g} \longrightarrow 1$ » ou « $\dfrac{f}{g} \longrightarrow 1$ donc $\dfrac{\displaystyle\int_x^b f}{\displaystyle\int_x^b g} \longrightarrow 1$ ». Sérieusement ? ? ? ? Oui c'est sûr, si c'était vrai ce serait bien pratique ... Mais vos rêves ne sont pas des réalités et vous avez le droit de réfléchir un peu avant d'écrire n'importe quoi.

4.b. Poser comme hypothèse de récurrence le résultat demandé avec un o n'avait aucune chance de fonctionner. Vous ne pouvez partir de l'hypothèse au rang n qui donne une approximation à une précision donnée, et après un calcul vous retrouver avec une précision supérieure. On ne gagne pas de la précision comme ça. Si on vous donne des mesures précises au cm, vous ne pouvez pas les manipuler et récupérer des mesures précises au millimètre.

6. Beaucoup d'inventions encore. Déjà, j'ai lu des divisions par α sans avoir vérifié que $\alpha \neq 0$. En plus l'énoncé demandait de distinguer ce cas ! ! Je n'en reviens même pas de devoir encore vous dire une millième fois, en seconde année„ qu'avant de diviser on doit vérifier qu'on ne divise pas par zéro.
Sinon, il fallait utiliser les préliminaires, en vérifiant les hypothèses. On obtenait, par exemple dans le cas $\alpha \neq 0$, $\displaystyle\int_a^x \frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t \sim \int_a^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$, soit $\ln(f(x)) - \ln(f(a)) \sim \ln(x) - \ln(a)$. Beaucoup en ont

directement tiré ce qui leur faisait briller les yeux : $\ln(f(x)) \sim \ln(x)$: mais où sont passés $\ln(f(a))$ et $\ln(a)$? ? Il y avait des arguments à donner.

7.b. Et allons-y gaiement, additionnons les équivalents : $xf'(x) \sim \alpha$ donc $\dfrac{xf'(x) + f(x)}{f(x)} \sim \alpha + 1$.

Beaucoup de compositions d'équivalents dans les questions 7 et 8 aussi.

8. On ne peut pas utiliser la question 7, les hypothèses ont changé.