Devoir surveillé n° 2

Durée : 2 heures, calculatrices et documents interdits

I. Étude de quatre séries

On considère dans ce problème, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{n\,2^{n+1}\,n!} = \frac{1}{n\,2^{n+1}\,n!}\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)$$

Pour $n\in\mathbb{N}$, on note

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k2^k}\qquad S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\qquad T_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}a_k\qquad V_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)2^k}$$

Le but de ce problème est de déterminer des équivalents des quatre suites $(R_n)_n$, $(S_n)_n$, $(T_n)_n$ et $(V_n)_n$.

On rappelle que la notation $u_n \sim v_n$ signifie que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et que la notation $u_n = o(v_n)$ signifie que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1) **a)** Soit $n\in\mathbb{N}$: justifier l'existence des trois réels R_n, S_n et V_n.

b) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{(2n)!}{n\,2^{2n+1}(n!)^2}$.

c) Après avoir rappelé la formule de Stirling, montrer que la série de terme général a_n est convergente.

2) On note dans cette question $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $U_n = \displaystyle\sum_{i=n+1}^{+\infty}\frac{1}{2^i}$.

a) Pour n dans $\mathbb{N}$, calculer U_n.
Écrire, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2^k}$ en fonction de deux termes de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $R_n = \dfrac{U_n}{n+1} - \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{U_k}{k(k+1)}$.

c) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{U_k}{k(k+1)} = o(R_n)$.

d) Montrer que $R_n \sim \dfrac{1}{n2^n}$.

3) **a)** Montrer que

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\quad \forall\, t\in[0,1],\quad \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k = \frac{1}{1+t} - (-1)^n\frac{t^n}{1+t}$$

b) En admettant que $\ln 2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$, montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n = (-1)^n\displaystyle\int_0^1\frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t$.

c) Montrer que l'on a

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \frac{(-1)^n}{2(n+1)} + \frac{(-1)^n}{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}\mathrm{d}t$$

d) Conclure que $S_n \sim \dfrac{(-1)^n}{2n}$.

4) Soit $\varepsilon > 0$.

a) Montrer qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, k \geqslant N, \quad (1-\varepsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}\, k^{\frac{3}{2}}} \leqslant a_k \leqslant (1+\varepsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi} k^{\frac{3}{2}}}$$

b) Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 2$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{3}{2}}} \leqslant \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{3}{2}}}$.

c) Déduire des questions précédentes que

$$\forall\, n \geqslant N, \quad (1-\varepsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{3}{2}}} \leqslant T_n \leqslant (1+\varepsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{n}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{3}{2}}}$$

d) Conclure que $T_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

5) Montrer que $V_n \sim \dfrac{1}{n^2 2^n}$.

6) Parmi les quatre séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n2^n}$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)2^n}$, laquelle converge le plus rapidement ? Laquelle converge le moins rapidement ? Justifier vos réponses.

II. Une suite récurrente

On considère la suite u définie par récurrence par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n - 4}{u_n - 1}.$$

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 2$.

2) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite ℓ.

4) Redémontrons les résultats de la question **3)** en utilisant une autre méthode.

a) Montrer que la suite de terme général $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$ est arithmétique et donner sa raison.

b) Calculer, en fonction de n, le terme général de la suite v_n, puis celui de u_n.

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite ℓ.

5) Montrer que la suite de terme général $w_n = n(u_n - \ell)$ converge et donner sa limite.

— FIN —