Semaine 5 du 13 octobre 2025 (S42)

IV Intégrales généralisées

1. Fonctions continues par morceaux sur un segment

2. Rappels de première année

2.1. Le théorème fondamental

2.1a. Primitives

2.1b. Existence de primitives.

2.1c. Fonctions dont la variable intervient dans les bornes d'une intégrale (cas particulier d'intégrales dépendant d'un paramètre).

2.2. Intégration par parties

2.3. Changements de variable

3. Extension aux fonctions continues par morceaux sur un intervalle

4. Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

4.1. Définition

4.2. Cas des fonctions positives

4.3. Cas général

5. Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

6. Propriétés

7. Méthodes de calcul

7.1. Calcul par primitivation

7.2. Intégration par parties

7.3. Changement de variable

8. Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

8.1. Définition

8.2. Un exemple de référence : les intégrales de Riemann

8.3. Théorèmes de comparaison

8.4. Étude de l'existence d'une intégrale

9. Exercices à connaître

9.1. Intégrales de Wallis

On pose, pour tout entier naturel n, $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin x)^n \mathrm{d}x$.

1) Calculer I_0 et I_1.
Pour tout $n \geqslant 2$, donner une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}.
En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de I_n selon la parité de n.

2) Montrer que la suite (I_n) est décroissante. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n-1}}{I_n}$.

3) Montrer : $\forall n \geqslant 1, \quad nI_nI_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n\sqrt{n}$.

4) Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2n(I_{2n})^2 = \frac{\pi}{2}$.
En déduire que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left[n\left(\frac{1.3.5.\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n}\right)^2 \right] = \frac{1}{\pi}$ (**formule de Wallis**).

9.2. Détermination de la nature d'une intégrale

Préciser la nature des intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)\sqrt{t}}$

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}}\mathrm{d}t$

3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2\sqrt{1+t^2}}$ (et la calculer).

9.3. Intégration par parties et équivalent

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n\left(1+x^2\right)}\,\mathrm{d}x$$

1) Montrer l'existence de I_n, pour tout n.

2) Déterminer la limite de $(I_n)_n$.

3) À l'aide d'une intégration par parties, trouver un équivalent simple de I_n.

9.4. Intégrabilité de $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$

1) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ est une intégrale convergente.

2) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$.

3) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x$ est une intégrale divergente.

4) En déduire la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x$. La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

S'y ajoute :

V Espaces vectoriels normés

1. Espaces vectoriels normés

1.1. Définition de norme

1.2. Normes sur $\mathbb{K}^n$ et certains ensembles de fonctions

1.3. Comparaison de normes

1.4. Distance associée à une norme

2. Topologie élémentaire

2.1. Boules ouvertes et fermées, sphères

2.2. Parties bornées

2.3. Parties convexes

3. Suites d'un espace vectoriel normé

3.1. Convergence

3.2. Suites extraites

3.3. Convergence d'une suite en dimension finie

4. Exercices à connaître

4.1. Produit d'espaces vectoriels normés

Soit $E_1, \dots, E_p$ des $\mathbb{K}$-ev, munis respectivement des normes $N_1, \dots, N_p$. On considère l'espace vectoriel produit $E = E_1 \times \dots \times E_p$. Sur E, on pose l'application

$$N : \begin{array}{ccl} E & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_p) & \mapsto & \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant p} N_k(x_k) \end{array}.$$

Montrer que N est une norme sur E.
(E, N) est appelé *espace vectoriel normé produit* des $(E_k, N_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$.

4.2. Comparaison de deux normes

Sur $\mathbb{R}[X]$, on définit N_1 et N_2 par :

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left| P^{(k)}(0) \right| \text{ et } N_2(P) = \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)|$$

1) Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.

2) On considère la suite de terme général $P_n = \dfrac{1}{n} X^n$. Est-elle bornée pour la norme N_1 ? pour la norme N_2 ?

3) Les deux normes sont-elles équivalentes ?

4.3. Opérations sur les convexes

Une réunion finie de convexes est-elle convexe ? Et une intersection ? Et pour des réunions et intersections quelconques ?

4.4. Limite d'une suite de matrices

1) Soit (A_n) et (B_n) deux suites de matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ convergeant respectivement vers A et B. Montrer que $A_n B_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} AB$.

2) Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ telle que (A^k) converge vers une matrice P. Montrer que P est une matrice de projection.

4.5. Norme d'algèbre sur les matrices et convergence d'une suite

Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

1) Montrer que $(A, B) \mapsto \operatorname{tr}(A^\top B)$ est un produit scalaire sur E.

2) Montrer que la norme associée à ce produit scalaire est en fait la norme $\|.\|_2$ de E muni de la base canonique. On l'appelle aussi *norme de Frobenius*.

3) Montrer que pour tout $A, B \in E$, $\|AB\|_2 \leqslant \|A\|_2 \|B\|_2$.

4) Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|A\|_2 < 1$. Montrer que $A^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.