IV – Intégrales généralisées

I. Intégrales de Wallis

1) $I_0 = \pi/2$; $I_1 = 1$ et $nI_n = (n-1)I_{n-2}$, d'où :
Si n est pair, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$, et par récurrence $I_n = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$;
Si n est impair, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p+1$, et par récurrence $I_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!(2p+1)}$.

2) $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$ est clair. De plus $t \mapsto \sin^n t$ est continue, positive, et prend une valeur strictement positive, donc $I_n > 0$.
D'où $\dfrac{I_{n-1}}{I_n} \geqslant 1$ et $\dfrac{I_{n-1}}{I_n} \leqslant \dfrac{I_{n-2}}{I_n} = \dfrac{n}{n-1}$ et donc $\lim \dfrac{I_{n-1}}{I_n} = 1$.

3) Soit $u_n = nI_nI_{n-1} = (n-1)I_{n-2}I_{n-1} = u_{n-1}$ donc la suite (u_n) est constante égale à $u_1 = \dfrac{\pi}{2}$.
d'où $nI_n^2 \sim \dfrac{\pi}{2}$ et donc $\sqrt{n}I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

4) $\lim(nI_n^2) = \dfrac{\pi}{2}$ d'où $\lim(2nI_{2n}^2) = \dfrac{\pi}{2}$ et en combinant avec la question **1)**, on obtient la formule de Wallis.

II. Détermination de la nature d'une intégrale

1) En 0, $\dfrac{1}{(1-t)\sqrt{t}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, qui est intégrable (c'est une intégrale de Riemann).
En 1, $\dfrac{1}{(1-t)\sqrt{t}} \sim \dfrac{1}{1-t}$, qui n'est pas intégrable car $h \mapsto \dfrac{1}{h}$ n'est pas intégrable en 0. Cette intégrale n'est donc pas définie.

2) En 0, $\dfrac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}} \sim \ln t = o(1/\sqrt{t})$, qui est donc intégrable en 0. Quand $t \to 1$, on pose $h = 1-t$ et alors $\dfrac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}} = \dfrac{\ln(1-h)}{h^{3/2}} \sim -\dfrac{1}{\sqrt{h}}$, qui est intégrable quand $h \to 0$. Ainsi cette intégrale est bien définie.

3) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2\sqrt{1+t^2}}$ est continue en 1, donc l'intégrabilité en 1 ne pose pas de souci. Cette fonction est équivalente à $t \mapsto \dfrac{1}{t^3}$ quand $t \to +\infty$, donc l'intégrale est bien définie, par comparasion à une série de Riemann.
Pour le calcul, posons $\varphi(t) = \dfrac{1}{t}$ et $f(u) = -\dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}$, alors $\dfrac{1}{t^2\sqrt{1+t^2}} = \varphi'(t).f(\varphi(t))$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2\sqrt{1+t^2}} = \int_{\varphi(1)}^{\lim_{+\infty}\varphi} f(u)\,\mathrm{d}u = -\int_1^0 \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u = \left[\sqrt{1+u^2}\right]_0^1 = \sqrt{2}-1$.

III. Intégration par parties et équivalent

1) Pas de problème d'intégrabilité en 1. En $+\infty$, $\dfrac{1}{x^n(1+x^2)} \sim \dfrac{1}{x^{n+2}}$, donc par comparaison à une intégrale de Riemann, I_n converge.

2) $0 \leqslant \dfrac{1}{x^n(1+x^2)} \leqslant \dfrac{1}{x^{n+2}}$. Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n+2}}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{n+1}.\frac{1}{x^{n+1}}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{n+1}$, donc par encadrement, $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

3) On a, par une intégration par parties pour des applications de classe $\mathscr{C}^1$, pour tout $X \in [1,+\infty[$:

$$\begin{aligned}\int_1^X \frac{1}{x^n\,(1+x^2)}\mathrm{d}x &= \int_1^X x^{-n}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\frac{1}{1+x^2}\right]_1^X - \int_1^X \frac{x^{-n+1}}{-n+1}\frac{-2x}{(1+x^2)^2},\,\mathrm{d}x\\ &=\frac{X^{-n+1}}{-n+1}\frac{1}{1+X^2}+\frac{1}{2(n-1)}-\frac{2}{n-1}\int_1^X\frac{x^{-n+2}}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

On en déduit, en faisant tendre X vers $+\infty$:

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)} - \frac{2}{n-1}\underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{x^{-n+2}}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x}_{\text{notée } J_n}$$

On a, pour $n \geqslant 4$:

$$0 \leqslant J_n \leqslant \int_1^{+\infty} x^{-n+2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{-n+3}}{-n+3}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{n-3}$$

donc : $J_n = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$, puis :

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{2(n-1)} \sim \frac{1}{2n}$$

IV. Intégrabilité de $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$

1) En 0 : prolongeable par continuité. En $+\infty$: On pose $f(t) = 1-\cos(t)$ et $g(t) = \dfrac{1}{t}$. Alors d'une part $fg \to 0$ en $+\infty$ et en 0, donc par IPP $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'g$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} fg'$ ont même nature. Et d'autre part $f(t)g'(t) = \dfrac{1-\cos(t)}{t^2} = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc fg' est intégrable en $+\infty$. Puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'g = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$, on obtient la convergence voulue.

2) On continue l'IPP :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Or il y a convergence des deux termes en second membre donc il y a convergence de l'intégrale en premier membre et on a l'égalité

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Puisque $1-\cos t = 2\sin^2(t/2)$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}2\frac{\sin^2(t/2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Enfin par le changement de variable $u = t/2$ sous-jacente à une bijection de classe $\mathscr{C}^1$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,\mathrm{d}u$$

3) $2\sin^2 t = 1-\cos(2t)$. Comme dans la question précédente on montre que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(2t)}{2t}\,\mathrm{d}t$ converge, mais $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{2t}\,\mathrm{d}t$ diverge.

4) On observe que $|\sin t| \geqslant \sin^2 t$.