Ex 10

1) Soit $N \in M_n(\mathbb{R})$ nilpotente d'indice $p \in \mathbb{N}^*$

Mq $p \leq n$:

Supposons par l'absurde que $p > n$:

Or $Im(N^2) \subset Im(N)$

donc $rg(N^2) \leq rg(N)$

à démontrer

si $rg(N^2) = rg(N)$ alors $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $rg(N^p) = rg(N)$

donc $dim(Ke(N^p)) = dim(Ke(N)) \neq n$

donc N n'est pas nilpotente absurde

donc $rg(N^2) < rg(N)$

donc $rg(N^2) \leq rg(N) - 1$

donc comment fais-tu ?

très abusif, et tu ne peux plus utiliser

~~par récurrence immédiate~~ $rg(N^p) \leq rg(N) - p$

or $rg(N) + dim\, Ke(N) = n$ (idem pour N^p)

donc $dim(Ker(N^p)) \geq dim(Ke(N)) + p$

donc $n \geq dim\, Ker(N)) + p$

donc $dim(Ke(N)) \leq n - p < 0$

absurde

donc $p \leq n$

Problème : P est un polynôme à coeff matriciels; totalement HP. Passer par les fonctions coordonnées.

2) Posons $P : \lambda \mapsto (A + \lambda B)^n$

P est polynomiale en λ et de degré n

or $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $P(\lambda_i) = 0$ ($n+1$ racines)

donc $P = 0$

donc $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $(A + \lambda B)^n = 0$

3) En particulier pour $\lambda = 0$:

$A^n = 0$

donc A est nilpotente

et $\forall \lambda \in \mathbb{C}^*$, $\frac{1}{\lambda^n}(A + \lambda B)^n = 0$

$(\frac{1}{\lambda}A + B)^n = 0$

donc $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \left(\frac{1}{\lambda} A + B\right)^n = B^n = 0$

donc B est nilpotente

pour cela il faut expliquer et justifier
que M -> M^n est continue

Consulter les exercices 10.5 et 10.6 du chapitre II pour la question 1.