Exercice 2 :

~~S~~ Pour $n \geq 2$, $f_n : x \mapsto \dfrac{x e^{-nx}}{\ln(n)}$

$S : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x)$

1) • Si $x > 0$:

~~pour tout $n \geq 2$, $f_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{}$~~

pour tout $n \geq 2$, $f_n(x) = \dfrac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$

• $n^2 \times \dfrac{x e^{-nx}}{\ln(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ par croissances comparées

donc $\dfrac{x e^{-nx}}{\ln(n)} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

donc par comparaison avec une série de Riemann, ~~$\sum_{n=2}^{+\infty}$~~

S converge sur $\mathbb{R}_+^*$.

• Si $x = 0$: $f_n(x) = 0$

donc S converge lorsque $x = 0$

• Si $x < 0$:

$\dfrac{x e^{-nx}}{\ln(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$

donc S diverge grossièrement.

~~On a~~ donc $\boxed{S \text{ ~~qui~~ est définie sur } \mathbb{R}_+}$

2) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}_+^*$, $a < b$,

soit $n \geq 2$,

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} \left| \frac{x e^{-nx}}{\ln(n)} \right|$$

$$= \frac{b e^{-na}}{\ln(n)}$$

car $x \mapsto x$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $x \mapsto e^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$

. Convergence normale :

Soit $n \geq 2$, $\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} \left| \frac{x e^{-nx}}{\ln(n)} \right|$

Or, $\forall n \geq 2$, $f_n : x \mapsto x e^{-nx}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme produit de fonctions dérivables,

et $\forall x \in \mathbb{R}_+$,

$$f_n'(x) = (1 - nx) e^{-nx}$$

donc, $f_n'\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

x	0		$\frac{1}{n}$		$+\infty$
signe de f'		$+$	0	$-$	
variations de f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e n \ln(n)}$	$\searrow$	0

. $f_n(0) = 0$

$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{e n \ln(n)}$

. $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$

Or, $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n) e}$ diverge (d'après le résultat sur les séries de Bertrand)

$\boxed{\text{Donc, il n'y a pas convergence ~~uniforme~~ normale de la série sur } \mathbb{R}_+.}$

• Convergence uniforme :

On pose, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x e^{-kx}}{\ln(k)} \right|$

$\leq x \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-kx} \right|$

Le fait que $R_n \to 0$, c'est la cv simple !!! On veut sup $|R_n(x)| \to 0$, il faut donc majorer le reste indépendamment de x

Car $n+1 \geq 3$ et $\ln(3) \geq \ln(e) = 1$

• si $x = 0$: $|R_n(x)| = 0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

• si $x > 0$: $|R_n(x)| \leq \frac{x e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}}$ (série géométrique)

$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Montrer par exemple que $0 \leq R_n(x) \leq cte/\ln(n)$

donc $\boxed{\text{la série converge uniformément sur } \mathbb{R}_+.}$

3) • $\forall n \geq 2$, $f_n : x \mapsto \frac{x e^{-nx}}{\ln(n)} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ comme produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

• $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ (question 1)) donc en particulier sur $\mathbb{R}_+^*$.

• Soit $n \geq 2$, soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $a < b$,
$f_n : x \mapsto \frac{x e^{-nx}}{\ln(n)} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$

et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n'(x) = \frac{(1 - nx) e^{-nx}}{\ln(n)}$

$|f_n'(x)| = \left| \frac{(1 - nx) e^{-nx}}{\ln(n)} \right|$

$$\leq \frac{(1+nb)e^{-na}}{\ln(n)}$$

$$\leq \frac{e^{-na}}{\ln(n)} + \frac{nb\,e^{-na}}{\ln(n)}$$

Or, $\cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-na}}{\ln(n)} = 0$

$\cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{nb\,e^{-na}}{\ln(n)} = 0$ par croissances comparées

donc $|f_n'(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

permet uniquement de dire qu'il n'y a pas div grossière

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = 0$ par croissances comparées

donc $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$

donc en particulier sur $[\varepsilon ; +\infty[$ avec $\varepsilon > 0$

D'après le théorème de transfert $\mathcal{C}^1$:

S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon ; +\infty[$.

D'après le caractère local de la continuité de la dérivée,

$$\boxed{S \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0 ; +\infty[.}$$

??
f_n(0)=0

4) En $x = 0$, $\forall n \geq 2$, $f_n(x) = \frac{(1-n\times 0)e^{-n\times 0}}{\ln(n)} = \frac{1}{\ln(n)}$

et $\sum \frac{1}{\ln(n)}$ diverge grossièrement (comparaison avec une série de Bertrand), donc, $\boxed{S \text{ n'est pas dérivable en } 0.}$