

# XVI. Espaces vectoriels préhilbertiens et euclidiens

17 décembre 2025

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Produit scalaire et norme associée</b>	<b>3</b>
1.1	Produit scalaire . . . . .	3
1.2	Norme associée à un produit scalaire . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Orthogonalité</b>	<b>5</b>
2.1	Premières définitions. . . . .	5
2.2	Familles orthogonales. . . . .	6
<b>3</b>	<b>Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Bases orthonormales</b>	<b>7</b>
<b>5</b>	<b>Sous-espaces vectoriels orthogonaux</b>	<b>8</b>
<b>6</b>	<b>Formes linéaires et hyperplans d'un espace euclidien.</b>	<b>9</b>
6.1	Rappels de première année : hyperplans en dimension finie	10
6.2	Théorème de représentation et hyperplans dans un espace euclidien . . . . .	11
<b>7</b>	<b>Symétries et projecteurs orthogonaux</b>	<b>12</b>
7.1	Rappels de première année sur les projecteurs et les symétries	12
7.2	Symétries et projecteurs orthogonaux . . . . .	14

<b>8</b>	<b>Distance à un sous ev</b>	<b>15</b>
8.1	Distance et projection sur un hyperplan . . . . .	15
<b>9</b>	<b>Exercices classiques</b>	<b>17</b>
9.1	Inégalité de Cauchy-Schwarz et application (banque CCINP MP) . . . . .	17
9.2	Polynômes de Legendre . . . . .	17
9.3	Une projection orthogonale (banque CCINP MP) . . . . .	17
9.4	Une distance (banque CCINP MP) . . . . .	17
9.5	Une autre distance . . . . .	18

# Programme officiel

## Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens

### A - Espaces préhilbertiens réels

L'objectif majeur est le théorème de projection orthogonale et l'existence de la meilleure approximation quadratique. On s'appuie sur des exemples de géométrie du plan et de l'espace pour illustrer les différentes notions.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
<b>a) Produit scalaire et norme associée</b>	
Produit scalaire. Espace préhilbertien réel, espace euclidien. Exemples de référence : produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbb{R}^n$ , produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , produit scalaire défini par une intégrale sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ . Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité. Norme associée au produit scalaire.	Notations $\langle x, y \rangle$ , $(x y)$ , $x \cdot y$ .  Expression $X^\top Y$ . Expression $\text{tr}(A^\top B)$ .  Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire. Les étudiants doivent savoir manipuler les identités remarquables sur les normes (développement de $\ u \pm v\ ^2$ , identité de polarisation).
<b>b) Orthogonalité</b>	
Vecteurs orthogonaux, sous-espaces orthogonaux, orthogonal d'un sous-espace vectoriel $F$ , d'une partie $X$ . Famille orthogonale, orthonormée (ou orthonormale). Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Théorème de Pythagore. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.	Notation $F^\perp$ . L'orthogonal d'une partie est un sous-espace vectoriel.
<b>c) Bases orthonormées d'un espace euclidien</b>	
Existence de bases orthonormées dans un espace euclidien. Théorème de la base orthonormée incomplète. Expression des coordonnées, du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.	
<b>d) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie</b>	
Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie. Projection orthogonale $p_F$ sur un sous-espace vectoriel $F$ de dimension finie.  Distance d'un vecteur à un sous-espace. Le projeté orthogonal de $x$ sur $F$ est l'unique élément de $F$ qui réalise la distance de $x$ à $F$ . Projeté orthogonal d'un vecteur sur l'hyperplan $\text{Vect}(u)^\perp$ ; distance entre $x$ et $\text{Vect}(u)^\perp$ .	Dimension de $F^\perp$ en dimension finie.  Les étudiants doivent savoir déterminer $p_F(x)$ en calculant son expression dans une base orthonormée de $F$ ou en résolvant un système linéaire traduisant l'orthogonalité de $x - p_F(x)$ aux vecteurs d'une famille génératrice de $F$ . Notation $d(x, F)$ .  Application géométrique à des calculs de distances.
<b>e) Formes linéaires sur un espace euclidien</b>	
Représentation d'une forme linéaire à l'aide d'un produit scalaire.	Vecteur normal à un hyperplan.

Le corps de base est  $\mathbb{R}$ .  $n, p, q, r$  et  $s$  désignent des entiers naturels non nuls.  $E$  désigne un espace vectoriel.

## 1 Produit scalaire et norme associée

### 1.1 Produit scalaire

**Définition 1.1.1** (Produit scalaire).

On appelle **produit scalaire sur**  $E$  toute application  $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  bilinéaire symétrique et telle que pour tout  $x \in E$ , on ait d'une part  $\varphi(x, x) \geq 0$  et d'autre part  $\varphi(x, x) = 0$  si et seulement si  $x = 0$ . Un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire est dit **préhilbertien**. Si de plus il est de dimension finie, il est dit **euclidien**.

**Remarque 1.1.2.**

1. Différentes notations sont utilisées couramment pour le produit scalaire de  $x$  et  $y$  :  $(x | y)$ ,  $\langle x | y \rangle$ ,  $(x, y)$ ,  $\langle x, y \rangle$ ,  $x \cdot y$ .
2. Par bilinéarité, si  $x$  ou  $y = 0$ ,  $\langle x | y \rangle = 0$ .
3. La symétrie et la linéarité par rapport à une variable suffisent à montrer la bilinéarité.

**Exemple 1.1.3.**

1. Les produits scalaires usuels sur  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$  sont bien évidemment des produits scalaires.
2. Il existe de nombreux produits scalaires sur  $\mathbb{R}^2$  ; par exemple  $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto x_1x_2 - y_1y_2 + 2y_1y_2 - x_1y_2$ .
3. Il existe également sur  $\mathbb{R}^n$  un produit scalaire canonique ;  

$$(x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) = \sum_{k=1}^n x_k y_k.$$
4. Par extension, tout  $\mathbb{R}$ -ev de dimension  $n$ , étant isomorphe à  $\mathbb{R}^n$ , est muni d'un produit scalaire.  
Ainsi, sur  $\mathbb{R}_n[X]$  le produit scalaire usuel est

$$\left( \sum_{k=0}^n a_k X^k \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^n b_k X^k \right) = \left( \sum_{k=0}^n a_k b_k \right).$$

De même, le produit scalaire usuel sur  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$  est

$$(a_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket} \cdot (b_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{ij} b_{ij}.$$

On se reportera à l'exercice « Norme d'algèbre sur les matrices » du chapitre sur les espaces vectoriels normés pour se rappeler que pour ce produit scalaire,  $\langle A, B \rangle = \text{tr } A^T B$ .

5. Soit  $a$  et  $b$  deux réels avec  $a < b$ . Sur  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ , l'application  $(f, g) \mapsto \int_a^b fg$  est un produit scalaire (attention : cet espace est de dimension infinie, donc n'est pas euclidien, mais préhilbertien réel).

**Exercice 1.1.4.**

L'espérance munit-elle l'ensemble des variables aléatoires réelles sur un espace probabilisé fini d'un produit scalaire (via  $\langle X, Y \rangle = E(XY)$ ) ?

Proposer une solution à ce « problème ».

### 1.2 Norme associée à un produit scalaire

**Définition 1.2.1** (Norme associée à un produit scalaire).

Soit  $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien. On appelle **norme associée au produit scalaire**  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  l'application  $x \mapsto \sqrt{\langle x | x \rangle}$ .

**Remarque 1.2.2.**

1. Il est clair, par positivité du produit scalaire, que cette application est bien définie. La racine carrée étant à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ , elle est de plus à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ . Il reste à voir si cette application est bien une norme.
2. La norme associée à un produit scalaire dépend évidemment du produit scalaire. Par exemple sur  $\mathbb{R}^2$ , les normes associées respectivement au produit scalaire usuel et au produit scalaire  $((x, y), (x', y')) \mapsto \frac{1}{2}xx' + 2yy'$  sont différentes (regarder par exemple les valeurs pour les vecteurs  $(1, 0)$  et  $(0, 1)$ ).

3. On a directement que pour une famille  $(x_1, \dots, x_n)$  de vecteurs,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \langle x_i | x_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \langle x_i | x_j \rangle. \end{aligned}$$

Pour deux vecteurs, on retrouve  $\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 \pm 2 \langle x | y \rangle + \|y\|^2$ .

Dans tout ce qui suit, sauf mention expresse du contraire,  $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  désigne un espace vectoriel préhilbertien, et  $\|\cdot\|$  la norme associée à son produit scalaire.

### Proposition 1.2.3.

Soit  $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien et  $\|\cdot\|$  la norme associée. On a

1.  $\forall x \in E \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$  ;
2.  $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in E \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ .

**Démonstration.** 1. Soit  $x \in E$ . On a  $\|x\| = 0 \iff \langle x | x \rangle = 0$ .  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  étant un produit scalaire, on a donc  $\|x\| = 0 \iff x = 0$ .

2. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $x \in E$ . On a  $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x | \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x | x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x | x \rangle}$ .  $\square$

Avec ce qui précède, il suffit maintenant de démontrer que  $\|\cdot\|$  vérifie l'inégalité triangulaire pour démontrer qu'il s'agit bien d'une norme. Pour cela, on démontre tout d'abord le théorème suivant :

### Théorème 1.2.4 (Inégalité de Cauchy-Schwarz).

Soit  $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien et  $\|\cdot\|$  la norme associée. Alors pour tout  $(x, y) \in E^2$ , on a

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

L'égalité a lieu si et seulement si  $x$  et  $y$  sont colinéaires.

#### Démonstration.

Soient  $x, y \in E$ . Pour  $y = 0$  le résultat est évident. Sinon, on peut donner deux démonstrations

**Géométrique** Posons  $u = \frac{1}{\|y\|}y$ . On vérifie aisément  $\|u\| = 1$ . Posons alors  $x' = \langle x | u \rangle u$  et  $x'' = x - x'$  (faire un dessin). On a alors

$$\langle x' | x'' \rangle = \langle x' | x \rangle - \langle x' | x' \rangle = \langle x | u \rangle^2 - \langle x | u \rangle^2 = 0.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \|x'\|^2 + 2 \langle x' | x'' \rangle + \|x''\|^2 \\ &= \|x'\|^2 + \|x''\|^2 \\ &\geq \|x'\|^2. \end{aligned}$$

On en déduit  $\|x\| \cdot \|y\| \geq \|x'\| \cdot \|y\|$ . Or on a :

$$\begin{aligned} \|x'\| \cdot \|y\| &= |\langle x | u \rangle| \cdot \|y\| \\ &= |\langle x | y \rangle|. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

**Algébrique** pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a :  $\|x + ty\|^2 = \|x\|^2 + 2t \langle x | y \rangle + t^2 \|y\|^2$ . C'est un polynôme toujours positif, donc son discriminant est négatif ou nul.

Il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si et seulement si ce discriminant est nul, donc si et seulement si ce polynôme a une racine réelle, donc si et seulement si il existe  $t$  tel que [à vous de l'écrire], donc si et seulement si  $x$  et  $y$  sont colinéaires.

**Une idée calculatoire astucieuse** Si  $x = 0$  ou  $y = 0$ , le résultat est évident. Sinon, on

remarque que  $\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1$  et l'on écrit ( $\pm$  signifie qu'on le fait pour  $+$  puis pour  $-$ ) :

$$0 \leq \left\| \frac{x}{\|x\|} \pm \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 = \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\|^2 + \left\| \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \pm 2 \frac{\langle x | y \rangle}{\|x\| \|y\|}$$

ce qui donne

$$0 \leq 1 \pm \frac{\langle x | y \rangle}{\|x\| \|y\|}$$

et c'est fini !

□

**Proposition 1.2.5** (Inégalité triangulaire).

Soit  $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien,  $x, y \in E$ . Alors,

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

De plus, on a l'égalité si et seulement si  $x$  et  $y$  sont colinéaires et de même sens.

**Démonstration.**

$$\text{On a} \quad \|x + y\|^2 = \langle x + y | x + y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x | y \rangle + \|y\|^2.$$

$$\text{Or} \quad (\|x\| + \|y\|)^2 = \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2$$

$$\text{et} \quad \langle x | y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|,$$

$$\text{donc} \quad \|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2.$$

$\|x + y\|$  et  $\|x\| + \|y\|$  étant positifs, on en déduit le résultat.

L'égalité a lieu si et seulement si  $\langle x | y \rangle = \|x\| \cdot \|y\|$ .

Pour cela, il est nécessaire d'avoir  $\langle x | y \rangle \geq 0$  (car le produit de deux normes est positif ou nul) et  $x$  et  $y$  colinéaires (cas d'égalité de Cauchy-Schwarz), donc il est nécessaire que  $x$  et  $y$  soient colinéaires — l'un s'écrit comme produit de l'autre par un scalaire — et de même sens — ce scalaire est positif ou nul.

Cette condition est clairement suffisante.

□

**Théorème 1.2.6.**

Soit  $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien,  $x, y \in E$ .

1. Identité du parallélogramme :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

2. Identité de polarisation :

$$\begin{aligned} \langle x | y \rangle &= \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \\ &= \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2). \end{aligned}$$

**Démonstration.**

Il suffit de développer les normes.

□

**Remarque 1.2.7.**

Ces identités permettent de retrouver l'expression du produit scalaire quand on ne connaît que la norme.

**Exemple 1.2.8.**

Existe-t-il un produit scalaire donnant la norme  $\|(x, y)\|^2 = (x + y)^2 + x^2$  ?

## 2 Orthogonalité

Soit  $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  un ev préhilbertien et  $\|\cdot\|$  la norme associée.

### 2.1 Premières définitions.

**Définition 2.1.1.**

Soient  $x, y \in E$ . On dit que  $x$  est **unitaire** (ou **normé**) si  $\|x\| = 1$ . On dit que  $x$  et  $y$  sont **orthogonaux** et l'on note  $x \perp y$  si  $\langle x | y \rangle = 0$ .

**Remarque 2.1.2.**

Si  $x \neq 0_E$ , il y a exactement deux vecteurs unitaires colinéaires à  $x$  :  $\frac{x}{\|x\|}$  et  $-\frac{x}{\|x\|}$ .

**Exemple 2.1.3.**

1. Tout vecteur est toujours orthogonal au vecteur nul.

2. Dans  $\mathbb{R}^2$  muni du produit scalaire usuel,  $(1, 3)$  et  $(-6, 2)$  sont orthogonaux.
3. Dans  $\mathbb{R}^2$  muni du produit scalaire  $(x, y) \cdot (x', y') = 2xx' - xy' - x'y + 3yy'$ , les vecteurs  $(1, 1)$  et  $(2, -1)$  sont orthogonaux.

## 2.2 Familles orthogonales.

### Définition 2.2.1.

Une famille de vecteurs est dite **orthogonale** si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux. Si les vecteurs sont de plus unitaires, la famille est dite **orthonormale** (ou **orthonormée**).

### Exemple 2.2.2.

Les  $f_n : x \mapsto \cos(nx)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , forment une famille orthogonale pour le produit scalaire usuel de  $\mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ .

### Théorème 2.2.3 (Pythagore).

Soit  $(v_1, \dots, v_n)$  une famille orthogonale de  $n$  vecteurs. Alors  $\left\| \sum_{k=1}^n v_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \|v_k\|^2$ .

### Démonstration.

On développe le produit scalaire :  $\left\| \sum_{k=1}^n v_k \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle v_i | v_j \rangle$ . □

### Exemple 2.2.4.

Dans  $\mathbb{R}^3$  muni du produit scalaire usuel, on pose  $v_1 = (1, 2, 3)$ ,  $v_2 = (-5, 1, 1)$  et  $v_3 = (-1, -16, 11)$ . Vérifier que la famille  $(v_1, v_2, v_3)$  est orthogonale et s'assurer que l'égalité donnée par le théorème de Pythagore est vérifiée.

### Théorème 2.2.5.

Toute famille orthogonale ne comportant **aucun vecteur nul** est libre.

### Démonstration.

Soient  $\lambda_k$  tels que  $\sum_{k=1}^n \lambda_k v_k = 0$ . Alors pour tout  $i$ ,  $\left\langle \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k \mid v_i \right\rangle = 0$  or quand on développe la somme on a  $\lambda_i \langle v_i \mid v_i \rangle$ . □

### Remarque 2.2.6.

Toute famille orthonormale est en particulier une famille orthogonale ne comportant aucun vecteur nul.

### Corollaire 2.2.7.

Toute famille orthogonale ne comportant **aucun vecteur nul** et de cardinal  $\dim E$  est une base de  $E$ .

### Exemple 2.2.8.

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  forment une famille orthogonale, et donc une base de  $\mathbb{R}^3$ .

## 3 Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

### Théorème 3.0.1 (orthonormalisation de Gram-Schmidt).

On suppose  $E$  euclidien de  $\dim n$ . Soit  $(u_1, \dots, u_n)$  une base de  $E$ . Alors il existe une base  $(v_1, \dots, v_n)$  de  $E$  telle que :

1.  $(v_1, \dots, v_n)$  est orthonormale ;
2. pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k).$$

Les  $v_k$  sont uniques au signe près et on peut choisir :  $v_k = \frac{u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_k | v_i \rangle v_i}{\left\| u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_k | v_i \rangle v_i \right\|}$ .

#### Démonstration.

Explication pour le choix de  $v_1$ .

• Analyse : on suppose la famille construite jusqu'au rang  $k$ . Construisons le  $k+1^e$  vecteur.

Il faut choisir  $v_{k+1}$  dans  $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k, u_{k+1}) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k, u_{k+1})$  :  $v_{k+1} = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k + \mu u_{k+1}$ .  $\langle v_{k+1} | v_j \rangle = 0$  donne  $\lambda_j + \mu \langle u_{k+1} | v_j \rangle = 0$ , donc  $v_{k+1} = \mu \left( - \sum_{i=1}^k \langle u_{k+1} | v_i \rangle v_i + u_{k+1} \right)$ . Reste à choisir  $\mu$  pour avoir  $\|v_{k+1}\| = 1$  (2 choix possibles).

• Synthèse : on a vu unicité au signe près. On vérifie que les vecteurs trouvés conviennent bien.  $\square$

#### Exemple 3.0.2.

Orthonormaliser  $(1, X, X^2)$  pour le produit scalaire de  $\mathbb{R}_2[X]$ ,  $\langle P | Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$ . On trouve  $(P_1, P_2, P_3)$ , où

$$\begin{aligned} P_1 &= 1, \\ P_2 &= \frac{X - 1/2}{1/(2\sqrt{3})} = \sqrt{3}(2X - 1), \\ P_3 &= \frac{X^2 - X + 1/6}{\|\dots\|} = \sqrt{5}(6X^2 - 6X + 1). \end{aligned}$$

#### Corollaire 3.0.3.

Tout espace euclidien a une base orthonormale. Toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale.

#### Démonstration.

Pour l'existence, il suffit d'orthonormaliser une base quelconque.

Soit  $(e_1, \dots, e_p)$  une famille orthonormale de  $E$ . On peut la compléter en base de  $E$  :  $(e_1, \dots, e_p, e'_{p+1}, \dots, e'_n)$ .

On orthonormalise ensuite cette base : pour les  $p$  premiers vecteurs, on a à chaque fois le choix entre  $e_i$  et  $-e_i$ , on choisit bien entendu  $e_i$ .

On obtient donc une base orthonormée de  $E$  dont les  $p$  premiers vecteurs sont  $e_1, \dots, e_p$ .  $\square$

## 4 Bases orthonormales

#### Proposition 4.0.1 (Coordonnées dans une base orthonormale).

Soit  $E$  euclidien,  $(v_1, \dots, v_n)$  base orthonormale de  $E$ . Alors, pour tout

$$x \in E, x = \sum_{k=1}^n \langle x | v_k \rangle v_k.$$

#### Démonstration.

Soit  $x \in E$ , soit  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  tels que  $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k$ . Si  $1 \leq k \leq n$ , on a par bilinéarité du produit scalaire

$$\begin{aligned} \langle x | v_k \rangle &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle v_i | v_k \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{i,k} \\ &= \lambda_k. \end{aligned}$$

$\square$

#### Exemple 4.0.2.

Trouver les coordonnées de  $(1, -3)$  dans la base  $\left( \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1) \right)$  (pour le produit scalaire usuel).

#### Exercice 4.0.3.

Exprimer la formule de la proposition 4.0.1 dans le cas où  $(v_1, \dots, v_n)$  base orthogonale de  $E$ .

**Proposition 4.0.4** (Expression du produit scalaire dans une base orthonormale).

Soit  $E$  euclidien,  $(v_1, \dots, v_n)$  une base orthonormale de  $E$ .  $x$  et  $y$  de coordonnées  $(x_i)$  et  $(y_i)$  dans la base  $(v_1, \dots, v_n)$ . Alors  $\langle x | y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ .

**Corollaire 4.0.5.**

Avec les mêmes notations,

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

**Remarque 4.0.6.**

Tous les produits scalaires ont la même expression «usuelle» *à condition de se placer dans une base orthonormale pour ce produit scalaire.*

**Remarque 4.0.7.**

Ces formules d'adaptent encore dans le cas de bases orthogonales.

## 5 Sous-espaces vectoriels orthogonaux

**Définition 5.0.1.**

Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . On dit que  $F$  et  $G$  sont des *sous-espaces orthogonaux* et on écrit  $F \perp G$  si

$$\forall x \in F, \quad \forall y \in G, \quad x \perp y.$$

**Exemple 5.0.2.**

Dans  $\mathbb{R}^3$  avec le produit scalaire usuel,  $\text{Vect}(1, -1, 0) \perp \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 0, 1))$ .

**Remarque 5.0.3.**

Si  $F$  et  $G$  sont orthogonaux, alors ils sont en somme directe. En effet, soit  $x \in F \cap G$ . On a alors  $x \perp x$ , donc  $\langle x | x \rangle = 0$ , donc  $x = 0$ . Donc  $F \cap G \subset \{0\}$ , d'où on déduit le résultat.

**Théorème 5.0.4.**

Soient  $F$  et  $G$  deux sev de dimension finies de  $E$ . On note  $(f_1, \dots, f_q)$  une famille génératrice de  $F$  et  $(g_1, \dots, g_p)$  une famille génératrice de  $G$ . Alors  $F \perp G$  si et seulement si pour tout  $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$  et  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$  on a  $\langle f_i | g_j \rangle = 0$ .

**Démonstration.**

( $\Rightarrow$ ) par définition de  $F \perp G$ .

( $\Leftarrow$ ) soient  $f = \sum \lambda_i f_i$  et  $g = \sum \mu_j g_j$ . Alors  $\langle f | g \rangle = \sum_i \sum_j \lambda_i \mu_j \langle f_i | g_j \rangle = 0$ .  $\square$

**Définition 5.0.5.**

Soit  $X$  une partie (quelconque) de  $E$ . On appelle *orthogonal* de  $X$  et on noté  $X^\perp$  (ou  $X^o$ ) l'ensemble  $\{y \in E \mid \forall x \in X \quad \langle x | y \rangle = 0\}$ .

**Proposition 5.0.6.**

Soit  $X$  une partie de  $E$ . Alors

1.  $X^\perp$  est un sev de  $E$ ;
2. Pour toute partie  $Y$  de  $E$  telle que  $X \subset Y$ , on a  $Y^\perp \subset X^\perp$ ;
3.  $X \subset (X^\perp)^\perp$ .

**Démonstration.** 1. On a  $0 \in X^\perp$  car 0 est orthogonal à tout vecteur, donc à tout vecteur de  $X$ ; de plus toute combinaison linéaire de vecteurs orthogonaux à tout vecteur de  $X$  est orthogonale à tout vecteur de  $X$ .

Sinon, il suffit de voir que

$$X^\perp = \bigcap_{x \in X} \text{Ker} \langle x | \cdot \rangle.$$



2. Tout élément de  $Y^\perp$  est orthogonal à tout vecteur de  $Y$ , donc a fortiori à tout vecteur de  $X$ .
3. Soit  $x$  un vecteur de  $X$ . Tout vecteur de  $X^\perp$  est orthogonal à tout vecteur de  $X$ , donc en particulier à  $x$ . Donc  $x$  est orthogonal à tout vecteur de  $X^\perp$ , donc appartient à  $(X^\perp)^\perp$ .

□

### Remarque 5.0.7.

Il n'y a pas forcément égalité dans le dernier point. Par exemple, avec  $X = \emptyset$ ,  $(X^\perp)^\perp = \{0\}$ .

### Théorème 5.0.8.

Soit  $F$  un sev de  $E$ . Alors  $F^\perp$  est le plus grand sous-espace vectoriel orthogonal à  $F$  (et  $F$  et  $F^\perp$  sont de plus en somme directe).

Si de plus  $F$  est de dimension finie, alors  $E = F \oplus F^\perp$  et  $F^\perp$  est l'unique sous-espace vectoriel  $G$  vérifiant  $E = F \oplus G$  et  $F \perp G$ . C'est pourquoi on appelle  $F^\perp$  le supplémentaire orthogonal de  $F$  dans  $E$ .

**(HP)** : Enfin, si  $F$  est de dimension finie, alors  $F = (F^\perp)^\perp$ .

### Démonstration.

On sait déjà que  $F^\perp$  est un sous-espace vectoriel.  $F$  et  $F^\perp$  sont clairement orthogonaux (donc en somme directe) et de plus pour tout sous-espace vectoriel  $G$  tel que  $F$  et  $G$  sont orthogonaux, tout élément  $x$  de  $G$  est orthogonal à tout élément de  $F$ , donc appartient à  $F^\perp$ , donc  $G \subset F^\perp$ .

Supposons de plus que le sous-espace vectoriel  $F$  est de dimension finie. Alors  $F$  est aussi un espace vectoriel euclidien, donc possède une base orthonormale  $(f_1, \dots, f_q)$ .

Soit  $x \in E$ . Posons  $y = \sum_{i=1}^q \langle x | f_i \rangle f_i$  et  $z = x - y$ , alors  $x = y + z$  et  $y \in F$ . Par ailleurs, si  $1 \leq k \leq q$ , par bilinéarité du produit scalaire

$$\begin{aligned} \langle z | f_k \rangle &= \langle x | f_k \rangle - \langle y | f_k \rangle \\ &= \langle x | f_k \rangle - \sum_{i=1}^q \langle x | f_i \rangle \delta_{i,k} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent,  $z \in F^\perp$ . Cela assure que  $E = F \oplus F^\perp$ .

Démontrons l'unicité : soit  $G$  un sev de  $E$  vérifiant  $E = F \oplus G$  et  $F \perp G$ . Alors  $G \subset F^\perp$ .

Par ailleurs, soit  $x \in F^\perp$ . Il existe  $(f, g) \in F \times G$  tel que  $x = f + g$ , et comme  $x \in F^\perp$ ,  $\langle x | f \rangle = 0$ . Or  $\langle x | f \rangle = \langle f | f \rangle + \langle g | f \rangle = \langle f | f \rangle$ , donc  $f = 0$  et  $x \in G$ .

On en déduit que  $G = F^\perp$ .

**(HP)** : Enfin,  $F$  est un sev de  $E$  vérifiant  $E = F^\perp \oplus F$  et  $F^\perp \perp F$ . Comme l'unicité ne fait pas intervenir l'hypothèse sur la dimension finie, on peut en déduire que  $F = (F^\perp)^\perp$ . □

### Remarque 5.0.9.

Le résultat ne se généralise pas à des sev  $F$  qui ne sont pas de dimension finie. Dans ce cas, on peut trouver des sous-espaces vectoriels  $F$  tels que  $F$  et  $F^\perp$  ne soient pas supplémentaires et tels que  $(F^\perp)^\perp \neq F$  (on peut même trouver  $F$  tel que  $F \neq E$  et  $F^\perp = \{0\}$ ). On verra ce résultat en exercice dans le cas de  $\mathbb{R}[X]$ .

### Exemple 5.0.10.

On pose, pour tout couple  $(P, Q)$  d'éléments de  $\mathbb{R}_2[X]$ ,  $\langle P | Q \rangle = P'(1)Q'(1) + P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0)$ . Vérifier qu'il s'agit d'un produit scalaire et trouver  $\mathbb{R}_1[X]^\perp$  dans  $\mathbb{R}_2[X]$ .

### Exercice 5.0.11.

On considère dans  $\mathbb{R}[X]$  le sev  $F = \text{Vect}(1 + X, 1 + X^2, \dots, 1 + X^n, \dots)$ . On rappelle qu'un hyperplan est un sev admettant un supplémentaire de dimension 1.

On munit  $\mathbb{R}[X]$  du produit scalaire  $\left( \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k, \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k$ .

1. Montrer que  $F$  est un hyperplan de  $\mathbb{R}[X]$ .
2. Déterminer  $F^\perp$  pour le produit scalaire usuel de  $\mathbb{R}[X]$ .
3. Quel résultat vrai en dimension finie est ici mis en défaut ?

## 6 Formes linéaires et hyperplans d'un espace euclidien.

Dans toute cette partie,  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  désigne un espace euclidien de dimension  $n$ .

## 6.1 Rappels de première année : hyperplans en dimension finie

**Proposition 6.1.1** (Expression d'une forme linéaire en dimension finie.). Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$  et soit  $\varphi$  une forme linéaire sur  $E$ .

Soit alors  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

Pour  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , notons  $a_j = \varphi(e_j)$ .

Soit  $u \in E$ . Notons  $x_1, \dots, x_n$  ses coordonnées dans la base  $\mathcal{E}$ .

Alors on a

$$\varphi(u) = \sum_{j=1}^n a_j x_j.$$

**Démonstration.**

On a :

$$\varphi(u) = \varphi\left(\sum_{j=1}^p x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^p x_j \varphi(e_j) = \sum_{j=1}^p x_j a_j.$$

□

**Définition 6.1.2.**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On appelle **hyperplan** de  $E$  tout sev qui est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur  $E$ .

**Remarque 6.1.3.**

Une forme linéaire non nulle est nécessairement de rang 1. Ainsi, dans un ev  $E$  de dimension finie  $n$ , un hyperplan est un sev de dimension  $n - 1$ . Nous allons voir plus loin que la réciproque est vraie.

**Proposition 6.1.4.**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ . Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

Soit  $H$  un hyperplan de  $E$ . Alors les éléments de  $H$  sont les points dont les coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$  sont les solutions d'une équation de la forme  $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$ , où  $a_1, \dots, a_n$  sont des scalaires fixés non tous nuls.

Réciproquement, toute équation de cette forme est celle d'un hyperplan.

**Démonstration.**

Soit  $H$  un hyperplan de  $E$ . Alors par définition il existe une application linéaire  $\varphi$  dont  $H$  est le noyau. Or d'après 6.1.1, pour tout élément  $x \in E$ , la valeur de  $\varphi(x)$  (qui est la coordonnée de  $\varphi(x)$  dans la base canonique de  $\mathbb{K}$ ) s'exprime sous la forme  $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$ . Ker  $\varphi$  est donc l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient  $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$ .

Réciproquement, pour tout  $n$ -uplet de scalaires  $(a_1, \dots, a_n)$  non tous nuls, l'application  $\varphi$  qui à tout vecteur de  $E$  de coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$  associe  $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$  est une forme linéaire, à l'évidence non nulle (considérer le vecteur de  $E$  dont toutes les coordonnées sont nulles, exceptées la  $i^e$ , où  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  est tel que  $a_i \neq 0$ ), les points dont les coordonnées sont solutions de l'équation  $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$  sont donc les éléments du noyau de Ker  $\varphi$ , qui est un hyperplan.

□

**Proposition 6.1.5.**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $H$  un hyperplan de  $E$ . Alors toute droite vectorielle  $D$  non contenue dans  $H$  est supplémentaire de  $H$  dans  $E$ .

**Démonstration.**

Soit  $D$  une droite vectorielle non contenue dans  $H$ , et  $\varphi$  une forme linéaire non nulle dont le noyau est  $H$ .

Alors  $D \cap H$  est strictement inclus dans  $D$ , donc  $\dim D \cap H < \dim D = 1$ , donc  $D \cap H = \{0\}$ , et ainsi  $D$  et  $H$  sont en somme directe.

Enfin, soit  $x \in E$ . Notons  $\lambda = \varphi(x)$ . Soit également  $e$  un vecteur directeur de  $D$ , et  $\alpha = \varphi(e)$ . Alors  $\alpha \neq 0$  car  $e \notin H$ . Posons alors  $h = x - \frac{\lambda}{\alpha} e$ . Alors  $x = h + \frac{\lambda}{\alpha} e$ ,  $\frac{\lambda}{\alpha} e \in D$ ,

et  $\varphi(h) = \lambda - \frac{\lambda}{\alpha} \alpha = 0$ , donc  $h \in H$ . Ceci assure que  $E = H + D$ , et donc avec le premier point,  $H$  et  $D$  sont supplémentaires.

□

Étudions la réciproque :

**Proposition 6.1.6.**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et  $H$  un sev admettant une droite  $D$  comme supplémentaire. Alors  $H$  est un hyperplan de  $E$ .

**Démonstration.**

Soit  $e$  un vecteur directeur de  $D$ . Tout élément de  $x$  de  $E$  s'écrit donc de façon unique sous la forme  $h + \lambda e$ , où  $h \in H$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

Notons  $u(x)$  ce scalaire  $\lambda$ . Alors nous pouvons montrer que  $u$  est une application linéaire de  $E$  dans  $\mathbb{K}$ . Elle est non nulle car  $u(e) \neq 0$ .

De plus, pour tout  $x \in E$ , on a  $x \in \text{Ker } u$  si et seulement si  $x$  s'écrit sous la forme  $h + 0.e$ , où  $h \in H$ . Donc  $\text{Ker } u = H$ .  $\square$

**Remarque 6.1.7.**

Ce dernier résultat assure donc la réciproque de 6.1.3 : dans un ev de dimension finie  $n$ , les hyperplans sont exactement les sev de dimension  $n - 1$ .

**Exemple 6.1.8.**

- Les droites vectorielles sont les hyperplans de  $\mathbb{R}^2$ .
- Les plans vectoriels sont les hyperplans de  $\mathbb{R}^3$ .
- L'espace est un hyperplan de l'espace-temps.
- $\mathbb{K}_n[X]$  est un hyperplan de  $\mathbb{K}_{n+1}[X]$ .
- $\mathbb{K}^n$  peut être vu comme un hyperplan de  $\mathbb{K}^{n+1}$ , si l'on considère que  $\mathbb{K}^n$  est isomorphe à  $\mathbb{K}^n \times \{0\}$ , qui est un hyperplan de  $\mathbb{K}^{n+1}$ .

**Lemme 6.1.9 (HP).**

Soit  $H$  un hyperplan d'un espace vectoriel  $E$  et soit  $e$  un vecteur non nul n'appartenant pas à  $H$ . Alors pour toute forme linéaire  $u$  de noyau  $H$ , on a  $u = \lambda\varphi$ , où  $\lambda = u(e)$  et  $\varphi$  est l'application associant  $\alpha$  à tout vecteur de la forme  $h + \alpha e$ .

**Démonstration.**

Posons  $D = \text{Vect}(e)$ . L'application  $\varphi$  est bien définie car  $E = H \oplus D$  et elle est linéaire. Soit  $u \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$  vérifiant  $\text{Ker } u = H$ . Alors soit  $x \in E$ .  $x$  s'écrit sous la forme  $h + \alpha e$  et on a  $u(x) = u(h) + \alpha u(e) = 0 + \alpha\lambda = \lambda\varphi(x)$ .

Donc  $\forall x \in E, u(x) = \lambda\varphi(x)$ . Donc  $u = \lambda\varphi$ . De plus,  $\lambda \neq 0$  (sinon  $\text{ker } u = E \neq H$ ).  $\square$

**Proposition 6.1.10 (HP).**

Deux formes linéaires de même noyau sont proportionnelles.

**Démonstration.**

Direct d'après le lemme précédent.  $\square$

Ce résultat implique le suivant :

**Proposition 6.1.11.** — Soit  $H$  un hyperplan, noyau d'une forme linéaire non nulle  $u$ . Alors les formes linéaires de noyau  $H$  sont exactement les  $\lambda.u$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

— Soit  $H$  un hyperplan en dimension finie, d'équation  $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ . Alors les équations de  $H$  sont exactement les équations de la forme  $\lambda.a_1x_1 + \dots + \lambda.a_nx_n = 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

## 6.2 Théorème de représentation et hyperplans dans un espace euclidien

**Théorème 6.2.1** (Théorème de représentation de Riesz-Fréchet).

Soit  $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  euclidien. Soit  $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ . Alors il existe un unique  $v_f \in E$  vérifiant  $\forall x \in E, f(x) = \langle v_f | x \rangle$  ou encore  $f = \langle v_f | \cdot \rangle$ .

On donne trois preuves de ce résultats.

**Démonstration** (Preuve géométrique.).

La forme linéaire  $f$  est définie par son noyau (hyperplan  $H$ ) et la valeur prise sur un vecteur qui n'est pas dans le noyau.

De même,  $(\text{Vect } v_f)^\perp$  est de dimension  $n - 1$ , donc c'est un hyperplan. Si l'on choisit  $v_f$  vecteur normal à  $H$ , alors  $f$  et  $\langle v_f | \cdot \rangle$  sont des formes linéaires de même noyau, donc sont proportionnelles. La norme de  $v_f$  est alors choisie de sorte qu'elle corresponde avec la valeur précédente de  $f$  sur un vecteur qui n'est pas dans le noyau.  $\square$

**Démonstration** (Preuve algébrique.).

On considère l'application

$$\varphi : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \\ v & \longmapsto (x \mapsto \langle v | x \rangle) \end{cases}.$$

Par bilinéarité du produit scalaire,  $\varphi$  est linéaire. De plus, avec  $v_1, v_2 \in E$ , si  $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$ , alors pour tout  $x \in E$ ,  $\langle v_1 | x \rangle = \langle v_2 | x \rangle$ , *i.e.* pour tout  $x \in E$ ,  $\langle v_1 - v_2 | x \rangle = 0$ , donc  $v_1 - v_2 \in E^\perp$ .

Or  $E^\perp = \{0\}$  car pour tout  $x \in E^\perp$ ,  $\langle x | x \rangle = 0$ . Donc  $v_1 = v_2$  et  $\varphi$  est injective.

Mais comme  $\dim E = \dim \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ , alors  $\varphi$  est un isomorphisme. D'où le résultat.  $\square$

**Démonstration** (Preuve matricielle.).

Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$ . Notons

$$\text{Mat}_{\mathcal{B},1}(f) = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

Posons

$$a = \sum_{i=1}^n a_i e_i.$$

Si  $x \in E$  est de coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$  dans  $\mathcal{B}$ , alors

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i = \langle a | x \rangle.$$

L'unicité se déduit immédiatement de la représentation matricielle.  $\square$

### Définition 6.2.2.

Soit  $H$  un hyperplan d'un espace euclidien, alors  $H^\perp$  est une droite vectorielle appelée **droite normale à  $H$** .

Tout vecteur  $v$  vérifiant  $H^\perp = \text{Vect}(v)$  est appelé **vecteur normal à  $H$** .

### Remarque 6.2.3.

Soit  $a = (a_1, \dots, a_n)$  un vecteur non nul et  $H$  l'hyperplan d'équation  $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$ . Alors si  $x = (x_1, \dots, x_n)$  est un vecteur,  $x \in H$  si et seulement si  $\langle a, x \rangle = 0$  si et seulement si  $a \perp x$ . Ainsi  $a$  est un vecteur normal à  $H$ .

### Proposition 6.2.4.

Soit  $H$  un hyperplan d'un espace euclidien  $E$ , soit  $v \in E$ . Alors  $v$  est un vecteur normal à  $H$  si et seulement si  $v \neq 0_E$  et  $v \in H^\perp$ .

### Démonstration.

Immédiat.  $\square$

### Remarque 6.2.5 (Écriture matricielle du produit scalaire).

Soit  $e = (e_1, \dots, e_n)$  base orthonormale de  $E$ ,  $x$  et  $y$  des vecteurs de matrices (dans  $e$ )  $X$  et  $Y$ . Alors  $\langle x | y \rangle = X^\top Y$ .

Si  $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$  est une autre base, notons  $M = (\langle b_i, b_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$ . Si  $\tilde{X}$  et  $\tilde{Y}$  sont les matrices de  $x$  et  $y$  dans la base  $\mathcal{B}$ , alors  $\langle x, y \rangle = \tilde{X}^\top M \tilde{Y}$ .

## 7 Symétries et projecteurs orthogonaux

### 7.1 Rappels de première année sur les projecteurs et les symétries

Dans toute cette sous-section, on suppose que  $F$  et  $G$  sont deux sev supplémentaires, *i.e.*  $E = F \oplus G$ .

#### Définition 7.1.1.

On appelle **projection** sur  $F$  parallèlement à  $G$  l'endomorphisme  $p_{F\|G}$  de  $\mathcal{L}(E)$  défini par :

$$\forall y \in F, \forall z \in G \quad p_{F\|G}(y + z) = y. \quad (1)$$

#### Remarque 7.1.2.

Voir le dessin sur la figure 7.1. Exemple dans  $\mathbb{R}^3$  avec  $F = \{x = 0\}$  et  $G = \{x + y = 0, y + z = 0\}$ .

#### Théorème 7.1.3.

$p_{F\|G} \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\text{Ker } p_{F\|G} = G$ ,  $\text{Im}(p_{F\|G}) = F$ .

#### Démonstration.

- Linéarité : élémentaire.
- Soit  $x = y + z \in E$ ,  $y \in F$ ,  $z \in G$ , donc  $x \in \text{Ker } p_{F\|G}$  si et seulement si  $y = 0$  si et

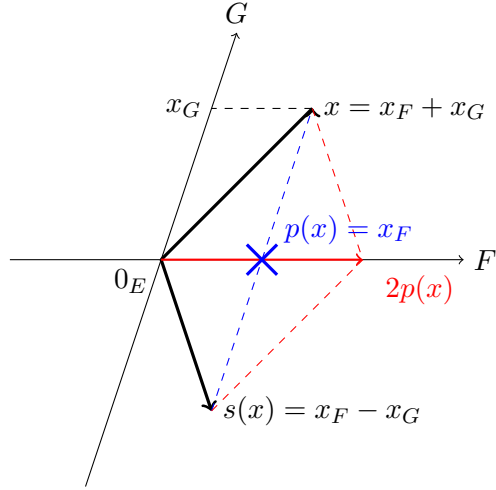


FIGURE 7.1 – Représentation de la projection et de la symétrie sur  $F$ , parallèlement à  $G$ .

seulement si  $x = z$  si et seulement si  $x \in G$ .

$x \in \text{Im } p_{F\|G}$  si et seulement si il existe  $x' = y' + z'$  tel que  $x = y'$  si et seulement si  $x \in F$ .  $\square$

#### Remarque 7.1.4.

- Cas particuliers :  $F = \{0_E\}$  et  $G = E$  :  $p_{F\|G} = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .
- $G = \{0_E\}$  et  $F = E$  :  $p_{F\|G} = \text{Id}$ . Hormis ce dernier cas, une projection n'est jamais injective, ni surjective.
- $p_{F\|G} + p_{G\|F} = \text{Id}$ ,  $p_{F\|G}|_G = 0$ ,  $p_{F\|G}|_F = \text{Id}_F$ .

#### Définition 7.1.5.

On appelle **projecteur** tout endomorphisme  $f$  tel que  $f \circ f = f$ .

#### Théorème 7.1.6.

Toute projection est un projecteur.

#### Démonstration.

Il s'agit essentiellement d'utiliser que si  $x = y + z$   $p_{F\|G}(p_{F\|G}(x)) = p_{F\|G}(y) = p_{F\|G}(y + 0_E) = y$ .  $\square$

#### Théorème 7.1.7 (Réciproque).

Soit  $f$  un projecteur. Alors  $\text{Ker } f \oplus \text{Im } f = E$ , et  $f$  est la projection sur  $\text{Im } f$  parallèlement à  $\text{Ker } f$ .

#### Démonstration.

Soit  $x \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f$ . Alors il existe  $y$  tel que  $x = f(y)$ . Or  $f(x) = 0$  mais  $f(x) = f(f(y)) = f(y) = x$ , donc  $x = 0$ .  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$  sont donc en somme directe.

Montrons que  $E = \text{Ker } f + \text{Im } f$ .

Analyse : soient  $y \in \text{Im } f$  et  $z \in \text{Ker } f$  tels que  $x = y + z$ . Alors il existe  $u$  tel que  $y = f(u)$ . Donc  $f(x) = f(f(u)) + f(z) = f(f(u)) = f(u) = y$ . Donc on a  $y = f(x)$  et donc  $z = x - f(x)$ .

Synthèse : on pose  $y = f(x)$  et  $z = x - f(x)$ . Alors on a bien  $x = y + z$ . de plus  $f(y) = f(f(x)) = f(x) = y$ , donc  $y \in \text{Im } f$ , et  $f(z) = f(x - f(x)) = f(x) - f(f(x)) = f(x) - f(x) = 0$ , et ainsi  $z \in \text{Ker } f$ . On a bien le résultat voulu.

Mais si l'on note  $x = y + z$  la décomposition associée à  $\text{Ker } f \oplus \text{Im } f = E$ , alors  $\forall x$ ,  $f(x) = y$ , donc  $f$  est bien la projection sur  $\text{Im } f$  parallèlement à  $\text{Ker } f$ .  $\square$

#### Remarque 7.1.8.

1. Si  $f$  est un projecteur, alors  $\text{Im } f = \text{Ker}(f - \text{Id})$  : on utilise que  $x \in \text{Im } f$  si et seulement si  $f(x) = x$  si et seulement si  $f(x) - x = 0_E$  si et seulement si  $(f - \text{Id})(x) = 0_E$ .
2. Si  $E = F \oplus G$ , alors

$$p_{F\|G} + p_{G\|F} = \text{Id}$$

$$p_{F\|G} \circ p_{G\|F} = p_{G\|F} \circ p_{F\|G} = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

#### Exercice 7.1.9.

Montrer que l'ensemble des fonctions paires et celui des fonctions impaires sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ . Donner l'expression des projections sur l'un de ces deux ensembles parallèlement au second.

**Définition 7.1.10.**

On appelle *symétrie par rapport à  $F$  et parallèlement à  $G$*  l'endomorphisme  $s_{F\|G}$  de  $\mathcal{L}(E)$  défini par :

$$\forall y \in F, \forall z \in G \quad s_{F\|G}(y + z) = y - z. \quad (2)$$

**Remarque 7.1.11.**

Voir le dessin sur la figure 7.1. Même exemple que pour la projection.

**Théorème 7.1.12.**

$s_{F\|G} \in \mathcal{GL}(E)$ , et on a  $s_{F\|G}^2 = \text{Id}_E$ , i.e.  $s_{F\|G} = s_{F\|G}^{-1}$ .

**Remarque 7.1.13.**

On dit que  $s_{F\|G}$  est une *involution linéaire*.

**Démonstration.**

On a déjà observé la linéarité.

Soit  $x \in E$ , soit  $y \in F$  et  $z \in G$  vérifiant  $x = y + z$ . Alors

$$s_{F\|G}(s_{F\|G}(x)) = s_{F\|G}(y - z) = y + z = x.$$

□

**Théorème 7.1.14 (Réciproque).**

Toute involution linéaire est une symétrie, plus précisément, si  $f$  est une involution linéaire, on a :

1.  $\text{Ker}(f - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f + \text{Id}) = E$ .
2.  $f$  est la symétrie par rapport à  $\text{Ker}(f - \text{Id})$  parallèlement à  $\text{Ker}(f + \text{Id})$ .

**Démonstration.**

1. • Analyse : si  $x = y + z$  avec  $y \in \text{Ker}(f - \text{Id})$  et  $z \in \text{Ker}(f + \text{Id})$ , alors  $f(y) = y$  et  $f(z) = -z$ . Donc  $f(x) = y - z$ . D'où :  $f(x) + x = 2y$  et  $x - f(x) = 2z$ . Donc  $y = \frac{1}{2}(f(x) + x)$  et  $z = \frac{1}{2}(x - f(x))$ .
- Synthèse.

2. On vient de voir que si la décomposition de  $x$  dans  $\text{Ker}(f - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f + \text{Id})$  est  $x = y + z$ , alors  $f(x) = y - z$ . CQFD.

□

**Remarque 7.1.15.**

On peut aussi montrer que

$$\text{Ker}(s_{F\|G} - \text{Id}) = \text{Im}(s_{F\|G} + \text{Id})$$

$$\text{Ker}(s_{F\|G} + \text{Id}) = \text{Im}(s_{F\|G} - \text{Id})$$

$$s_{G\|F} + s_{F\|G} = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

$$s_{F\|G} \circ s_{G\|F} = -\text{Id} = s_{G\|F} \circ s_{F\|G}$$

$$p_{F\|G} = \frac{1}{2}(s_{F\|G} + \text{Id})$$

$$s_{F\|G} = 2p_{F\|G} - \text{Id}.$$

## 7.2 Symétries et projecteurs orthogonaux

**Définition 7.2.1.**

Soit  $F$  sev de dimension finie d'un espace préhilbertien  $E$ . On appelle *projection orthogonale* (resp. *symétrie orthogonale*) toute projection (resp. symétrie) sur (resp. par rapport à)  $F$  parallèlement à  $F^\perp$ .

**Proposition 7.2.2.**

Un projecteur  $p$  est orthogonal si et seulement si  $\text{Im } p \perp \text{Ker } p$ .

Une symétrie  $s$  est orthogonale si et seulement si  $\text{Ker}(s - \text{Id}) \perp \text{Ker}(s + \text{Id})$ .

**Démonstration.**

Direct.

□

**Remarque 7.2.3.**

Une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan est appelée une *réflexion*.

**Théorème 7.2.4** (expression d'un projecteur orthogonal dans une base orthonormée).

Soit  $F$  sev de dimension finie d'un espace préhilbertien  $E$ . Soit  $(f_1, \dots, f_p)$  une base orthonormale de  $F$ . Soit  $x \in E$ . Le projeté orthogonal de  $x$  sur  $F$  est  $p(x) = \sum_{i=1}^p \langle x | f_i \rangle f_i$ .

**Démonstration.**

Démontré dans 5.0.8 □

**Exemple 7.2.5.**

Déterminer la projection orthogonale (et la symétrie orthogonale) de  $(2, 1)$  sur  $\text{Vect}(-1, 2)$ , ainsi que sur son supplémentaire orthogonal, pour le produit scalaire

$$((x_1, y_1) | (x_2, y_2)) = 5x_1x_2 + 2y_1x_2 + 2x_1y_2 + y_1y_2.$$

**Remarque 7.2.6.**

On peut ré-écrire le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt comme suit.

Avec  $F_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ , en notant  $p_k$  le projeté de  $e_{k+1}$  sur  $F_k$ , on procède comme suit.

- On renormalise  $e_1$  pour obtenir  $v_1$ .
- Pour chaque  $1 \leq k \leq p-1$ , on remarque que  $e_{k+1} - p_k \in F_k^\perp$ . On renormalise donc  $e_k - p_k$  pour obtenir  $v_{k+1}$ .

## 8 Distance à un sous ev

**Définition 8.0.1** (distance d'un point à une partie d'un espace préhilbertien).

Soit  $A$  une partie non vide de  $E$  et  $x \in E$ . On appelle distance de  $x$  à  $A$  et on note  $d(x, A)$  le réel  $\inf_{a \in A} d(x, a)$ .

**Théorème 8.0.2.**

Soit  $F$  un sev de dimension finie de  $E$ . Alors la distance de  $x$  à  $F$  est atteinte en un seul point, qui est la projection orthogonale de  $x$ . De plus :  $d(x, F)^2 = \|x - p(x)\|^2$ . En particulier  $d(x, F) = 0$  si et seulement si  $x \in F$ .

**Démonstration.**

Soit  $f \in F$ . On a la décomposition dans  $F^\perp \oplus F$  :  $x - f = x - p(x) + p(x) - f$ . On conclut en appliquant le théorème de Pythagore. □

**Exemple 8.0.3.**

Le minimum de la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) & \mapsto \int_0^1 (-a - bx + x^2)^2 dx \end{cases}$$

est atteint pour  $a = -1/6$  et  $b = 1$  et vaut  $1/180$ .

## 8.1 Distance et projection sur un hyperplan

Dans toute cette partie,  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  désigne un espace euclidien,  $H$  un hyperplan de  $E$  et  $u$  un vecteur normal à  $H$ .

Notamment,  $H = \text{Vect}(u)^\perp$ .

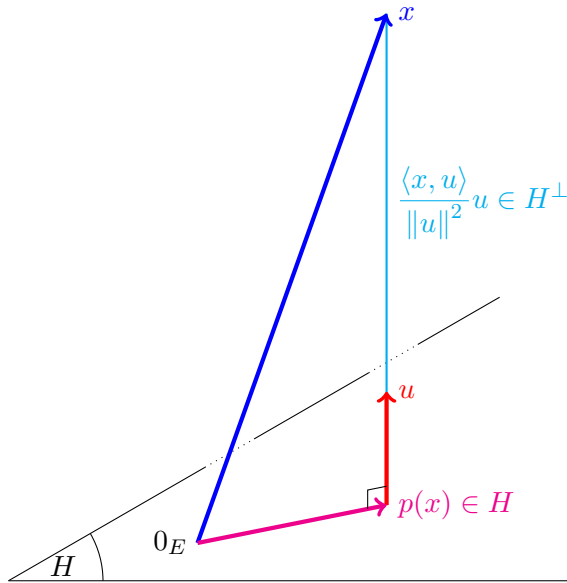
**Proposition 8.1.1** (voir figure 8.1).

Soit  $x \in E$ , le projeté orthogonal de  $x$  sur  $H$  est

$$p(x) = x - \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u.$$

La distance de  $x$  à  $H$  est

$$d(x, H) = \frac{|\langle x, u \rangle|}{\|u\|}.$$


 FIGURE 8.1 – Projection orthogonale sur un hyperplan  $H$ .

**Démonstration.**

Il suffit d'observer que

$$x = x - \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u + \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u$$

et que

$$\langle x - \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u, u \rangle = \langle x, u \rangle - \langle x, u \rangle = 0,$$

donc que

$$x - \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u \in H.$$

On peut aussi observer que  $\frac{u}{\|u\|}$  est une b.o.n. de  $H^\perp$ , et donc que  $\frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u$  est le projeté orthogonal de  $x$  sur  $\text{Vect}(u)$ . Ainsi,  $x - \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u$  est le projeté orthogonal de  $x$  sur  $\text{Vect}(u)^\perp$ .  $\square$

**Corollaire 8.1.2.**

 Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une b.o.n. de  $E$ , dans laquelle on écrit

$$u = u_1 e_1 + \dots + u_n e_n,$$

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n.$$

 Alors, la distance de  $x$  à  $H$  est

$$\frac{|x_1 u_1 + \dots + x_n u_n|}{\sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2}}.$$

**Démonstration.**

 Immédiat.  $\square$



## 9 Exercices classiques

### 9.1 Inégalité de Cauchy-Schwarz et application (banque CCINP MP)

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté  $(\cdot | \cdot)$ .  
On pose  $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{(x|x)}$ .

- Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
  - Dans quel cas a-t-on égalité? Le démontrer.
- Soit  $E = \{f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \forall x \in [a, b] f(x) > 0\}$ .  
Prouver que l'ensemble  $\left\{ \int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt, f \in E \right\}$  admet une borne inférieure  $m$  et déterminer la valeur de  $m$ .

### 9.2 Polynômes de Legendre

On note  $E = \mathbb{R}_n[X]$ , où  $n \geq 1$ .

- Vérifier que :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)dx$$

définit un produit scalaire sur  $E$ . On note  $(e_0, e_1, \dots, e_n)$  la base obtenue par orthonormalisation de la base  $(1, X, \dots, X^n)$ .

- Pour tout entier  $k \in \{1, \dots, n\}$ , on définit :

$$f_k(X) = \frac{d^k}{dX^k} \left( (X^2 - 1)^k \right)$$

- Déterminer le degré de  $f_k$ .
- Calculer  $\langle X^i, f_k \rangle$  pour  $k \in \{1, \dots, n\}$  et  $i \in \{0, \dots, k-1\}$ .
- En déduire que pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ , il existe un  $\lambda_k$  tel que  $f_k = \lambda_k e_k$ .

### 9.3 Une projection orthogonale (banque CCINP MP)

Soit  $P$  le plan d'équation  $x + y + z = 0$  et  $D$  la droite d'équation  $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ .

- Vérifier que  $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$ .
- Soit  $p$  la projection vectorielle de  $\mathbb{R}^3$  sur  $P$  parallèlement à  $D$ .  
Soit  $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .  
Déterminer  $p(u)$  et donner la matrice de  $p$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .
- Déterminer une base de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle la matrice de  $p$  est diagonale.

### 9.4 Une distance (banque CCINP MP)

On définit dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  l'application  $\varphi$  par :  
 $\varphi(A, A') = \text{tr}(A^T A')$ , où  $\text{tr}(A^T A')$  désigne la trace du produit de la matrice  $A^T$  par la matrice  $A'$ .

On admet que  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

On note  $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ .

- Démontrer que  $\mathcal{F}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
- Déterminer une base de  $\mathcal{F}^\perp$ .
- Déterminer le projeté orthogonal de  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  sur  $\mathcal{F}^\perp$ .
- Calculer la distance de  $J$  à  $\mathcal{F}$ .

### 9.5 Une autre distance

Pour  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ , calculer :

$$m_k = \inf_{a, b \in \mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (t^k - at - b)^2 e^{-t} dt.$$