

Semaine 8 du 17 novembre 2025 (S47)

VII Suites de fonctions

Le chapitre VII reste au programme :

1 Convergence simple et convergence uniforme

1.1 Convergence simple

1.2 Convergence uniforme

1.3 Convergence uniforme sur tout segment

2 Continuité

3 Interversion limite - intégrale

3.1 Intégration sur un segment

3.2 Intégration sur un intervalle quelconque

4 Dérivabilité

4.1 Théorème de dérivation

4.2 Fonctions de classe \mathcal{C}^k

5 Exercices à connaître

5.1 Limite uniforme d'un produit

Soit (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions définies sur un intervalle réel I , et convergeant uniformément vers f et g respectivement.

- 1) Montrer que f est bornée si et seulement si à partir d'un certain rang toutes les f_n sont bornées.
- 2) Montrer que si f et g sont bornées, alors $(f_n g_n)$ converge uniformément vers fg .
- 3) Soit h une fonction bornée. Montrer que $(f_n h)$ converge uniformément vers fh , sans supposer que f est bornée.
- 4) Montrer que ce dernier résultat est faux si h n'est pas bornée.

5.2 Étude du type de convergence (banque CCP MP)

- 1) Soit X un ensemble, (g_n) une suite de fonctions de X dans \mathbb{C} et g une fonction de X dans \mathbb{C} .
Donner la définition de la convergence uniforme de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g .
- 2) On pose $f_n(x) = \frac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \cos(x\sqrt{n})$.
 - a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) .
 - b) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?
 - c) Soit $a > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?
 - d) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

5.3 Limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers f .

- 1) Justifier qu'il existe un entier naturel N tel que pour tout n supérieur ou égal à N , on ait pour tout réel x , $|P_n(x) - P_N(x)| \leq 1$. Que peut-on en déduire quant au degré des fonctions polynomiales $P_n - P_N$ lorsque $n \geq N$?
- 2) Conclure que f est nécessairement une fonction polynomiale.

5.4 Interversion limite - intégrale sur un segment (banque CCP MP)

On pose $f_n(x) = (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n + x}$.

- 1) Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$.
- 2) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n + x} dx$.

5.5 Utilisation du théorème de convergence dominée

Montrer, pour tout $a \in [0, +\infty[$ fixé : $\int_0^a \frac{1}{x} \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - 1 \right) dx \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_0^a \frac{e^x - 1}{x} dx$.

5.6 Recherche d'un équivalent d'une suite d'intégrales

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \int_0^1 \sqrt{1 - x^n} dx$.

- 1) Montrer : $I_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$.
- 2) Trouver un équivalent simple de $I_n - 1$ lorsque l'entier n tend vers l'infini.

S'y ajoute :

VIII Réduction des endomorphismes et des matrices

1 Diagonalisation en dimension finie

1.1 Endomorphismes diagonalisables

1.2 Matrices diagonalisables

1.3 Pratique de la diagonalisation

2 Diagonalisabilité et polynômes annulateurs

3 Applications de la diagonalisation

3.1 Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable

3.2 Suites récurrentes linéaires simultanées

3.3 Suites récurrentes linéaires à coefficients constants

3.4 Systèmes différentiels linéaires

4 Trigonalisation en dimension finie

4.1 Endomorphismes trigonalisables

4.2 Matrices trigonalisables

4.3 Trigonalisation et polynômes

5 Exercices à connaître

5.1 Deux diagonalisations – bête et méchante et plus théorique

- 1) Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.
- 2) Diagonaliser la matrice J dont tous les coefficients sont égaux à 1. Puis diagonaliser la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $a_{i,j} = \alpha$ si $i = j, a_{i,j} = \beta$ sinon.

5.2 Deux applications de la trigonalisation

- 1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente.
 - a) Montrer que A est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte.
 - b) Le résultat est-il encore vrai pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
- 2) Soit E un \mathbb{C} -ev de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\text{Sp}(P(u)) = P(\text{Sp}(u))$.

5.3 Diagonalisation simultanée

Dans un espace vectoriel E de dimension finie, on considère deux endomorphismes u et v diagonalisables tels que $u \circ v = v \circ u$.

- 1) Montrer que les sous-espaces propres de v sont stables par u .
- 2) Montrer que l'endomorphisme induit de u à un sous-espace propre de v est diagonalisable.
- 3) Montrer qu'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u et v .

5.4 Racine carrée d'une matrice

- 1) Soit M une matrice diagonale d'ordre n dont les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts. Montrer que les matrices commutant avec M sont exactement les matrices diagonales.
- 2) Déterminer les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
- 3) Combien y a-t-il de matrice M telle que $M^2 = A$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$? dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?