

# Semaine 7 du 10 novembre 2025 (S46)

## VI Valeurs propres et vecteurs propres

Le chapitre VI reste au programme :

### 1 Éléments propres d'un endomorphisme et d'une matrice

#### 1.1 Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme

#### 1.2 Sous-espaces propres d'un endomorphisme

#### 1.3 Éléments propres d'un endomorphisme en dimension finie

#### 1.4 Éléments propres d'une matrice

### 2 Lien avec les polynômes d'endomorphisme

#### 2.1 Valeur propre et racines d'un polynôme annulateur

#### 2.2 Polynôme caractéristique

#### 2.3 Polynôme caractéristique et valeurs propres

#### 2.4 Multiplicité et dimension des espaces propres

#### 2.5 Théorème de Cayley-Hamilton

La démonstration est hors-programme.

## 3 Exercices à connaître

### 3.1 Le spectre « commute » et polynôme caractéristique d'une matrice diagonale par blocs

- 1) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Montrer que  $AB$  et  $BA$  ont le même spectre.
- 2) Soit  $A_1, \dots, A_p$  des matrices carrées. Exprimer le polynôme caractéristique de  $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_p)$  en fonction de ceux des  $A_i$ .

### 3.2 Détermination du spectre d'un endomorphisme de polynômes

Soit  $E = \mathbb{K}[X]$  et  $\varphi \in \mathcal{L}(E)$  défini par  $\varphi : P \mapsto XP'(X)$ . Déterminer l'ensemble des valeurs propres de  $\varphi$ .

### 3.3 Éléments propres d'une matrice

Donner les éléments propres de

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

### 3.5 Matrice compagne

Pour  $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$  polynôme unitaire, on définit la matrice compagne de  $P$  :

$$\mathcal{C}(P) = \begin{pmatrix} 0 & & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots \\ & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Pour  $n = 1$ ,  $P$  s'écrit  $X + a_0$  et  $\mathcal{C}(P) = \mathcal{C}(X + a_0) = (-a_0)$ .

- 1) Montrer que  $P$  est le polynôme caractéristique de  $\mathcal{C}(P)$ .

- 2) On suppose dans cette question que  $P$  est scindé à racines simples, notées  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Montrer que :

$$\mathcal{C}(P)^\top = V \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) V^{-1}$$

où  $V$  désigne la matrice de Vandermonde de  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .

S'y ajoute :

## VI Suites de fonctions

### 1 Convergence simple et convergence uniforme

#### 1.1 Convergence simple

#### 1.2 Convergence uniforme

#### 1.3 Convergence uniforme sur tout segment

### 2 Continuité

### 3 Interversion limite - intégrale

#### 3.1 Intégration sur un segment

#### 3.2 Intégration sur un intervalle quelconque

### 4 Dérivabilité

#### 4.1 Théorème de dérivation

#### 4.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

## 5 Exercices à connaître

### 5.1 Limite uniforme d'un produit

Soit  $(f_n)$  et  $(g_n)$  deux suites de fonctions définies sur un intervalle réel  $I$ , et convergeant uniformément vers  $f$  et  $g$  respectivement.

- 1) Montrer que  $f$  est bornée si et seulement si à partir d'un certain rang toutes les  $f_n$  sont bornées.
- 2) Montrer que si  $f$  et  $g$  sont bornées, alors  $(f_n g_n)$  converge uniformément vers  $fg$ .
- 3) Soit  $h$  une fonction bornée. Montrer que  $(f_n h)$  converge uniformément vers  $fh$ , sans supposer que  $f$  est bornée.
- 4) Montrer que ce dernier résultat est faux si  $h$  n'est pas bornée.

### 5.2 Étude du type de convergence (banque CCP MP)

- 1) Soit  $X$  un ensemble,  $(g_n)$  une suite de fonctions de  $X$  dans  $\mathbb{C}$  et  $g$  une fonction de  $X$  dans  $\mathbb{C}$ .  
Donner la définition de la convergence uniforme de la suite de fonctions  $(g_n)$  vers la fonction  $g$ .
- 2) On pose  $f_n(x) = \frac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \cos(x\sqrt{n})$ .
  - a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions  $(f_n)$ .
  - b) La suite de fonctions  $(f_n)$  converge-t-elle uniformément sur  $[0, +\infty[$  ?
  - c) Soit  $a > 0$ . La suite de fonctions  $(f_n)$  converge-t-elle uniformément sur  $[a, +\infty[$  ?
  - d) La suite de fonctions  $(f_n)$  converge-t-elle uniformément sur  $]0, +\infty[$  ?

### 5.3 Limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et  $(P_n)$  une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers  $f$ .

- 1) Justifier qu'il existe un entier naturel  $N$  tel que pour tout  $n$  supérieur ou égal à  $N$ , on ait pour tout réel  $x$ ,  $|P_n(x) - P_N(x)| \leq 1$ .  
Que peut-on en déduire quant au degré des fonctions polynômes  $P_n - P_N$  lorsque  $n \geq N$  ?
- 2) Conclure que  $f$  est nécessairement une fonction polynomiale.

### 5.4 Intersion limite - intégrale sur un segment (banque CCP MP)

On pose  $f_n(x) = (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n + x}$ .

- 1) Démontrer que la suite de fonctions  $(f_n)$  converge uniformément sur  $[0, 1]$ .
- 2) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n + x} dx$ .

### 5.5 Utilisation du théorème de convergence dominée

Montrer, pour tout  $a \in [0, +\infty[$  fixé :  $\int_0^a \frac{1}{x} \left( \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - 1 \right) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{e^x - 1}{x} dx$ .

### 5.6 Recherche d'un équivalent d'une intégrale à paramètre entier naturel

Trouver un équivalent simple, lorsque l'entier  $n$  tend vers l'infini, de  $\int_0^1 \ln(1 + x^n) dx$ , on admettra :  $\int_0^1 \frac{\ln(1 + t)}{t} dt = \frac{\pi^2}{12}$ .