Devoir surveillé n° 6

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

Concours Commun Mines-Ponts 2021 - Mathématiques II PC

Notations

— Pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, on notera $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ le coefficient binomial où $n! = n(n-1)\cdots 2\cdot 1$.

— On note $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$. On dit que a est un zéro d'ordre $m > 0$ de $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ si

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(m)}(a) \neq 0.$$

Dans la suite du texte quand on liste les zéros d'un polynôme on répètera chaque racine autant de fois que sa multiplicité : ainsi les racines de $X^3(X-1)^2$ sont $0, 0, 0, 1, 1$.

— On note $D : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ l'opérateur de dérivation, i.e. $D(f) = f'$. Pour $Q = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on note $Q(D)$ l'opérateur défini par

$$Q(D) : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}), \quad f \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k D^k(f),$$

c'est-à-dire que

$$Q(D)f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^{(k)}(x)$$

où $f^{(k)}$ est la fonction dérivée k-ème.

I. Log-concavité des suites

Soit $(a_0, \cdots, a_n)$ une suite à valeurs réelles. On dira qu'elle est

— **unimodulaire** s'il existe $0 \leqslant j \leqslant n$ tel que $a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_j \geqslant a_{j+1} \geqslant \cdots \geqslant a_n$;

— **log-concave** si pour tout $1 \leqslant j \leqslant n-1$, on a $a_j^2 \geqslant a_{j-1}a_{j+1}$;

— **ultra log-concave** si $\left(\dfrac{a_k}{\binom{n}{k}}\right)_{k=0,\cdots,n}$ est log-concave.

1) Montrer que la suite binomiale $\left(\binom{n}{k}\right)_{k=0,\cdots,n}$ est log-concave.

2) Montrer que si $(a_k)_{k=0,\cdots,n}$ est ultra log-concave, alors elle est log-concave.

3) Montrer que si $(a_k)_{k=0,\cdots,n}$ est strictement positive et log-concave, alors elle est unimodulaire.

II. Polynômes réels à racines toutes réelles

Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{R}[X]$ avec $a_n \neq 0$. Il est dit à racines toutes réelles si toutes ses racines complexes sont en fait réelles, i.e. $P(z) = 0$ implique $z \in \mathbb{R}$.
On suppose dans cette partie que P est de degré n à racines toutes réelles.

4) Montrer que P' est à racines toutes réelles.
Indication : on pourra utiliser le théorème de Rolle en veillant aux multiplicités des racines.

5) Montrer que $Q(X) = X^n P(1/X)$ est un polynôme à racines toutes réelles.
Indication : on commencera par préciser le degré de $Q(X)$.

6) Pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, on considère $Q_1(X) = P^{(k-1)}(X)$ puis $Q_2(X) = X^{n-k+1} Q_1(X^{-1})$ et enfin $Q(X) = Q_2^{(n-k-1)}(X)$. Montrer que $Q(X)$ est un polynôme de degré au plus 2 à racines toutes réelles et en déduire que $(a_k)_{k=0,\ldots,n}$ est ultra log-concave.

7) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathrm{e}^{\alpha x} D(\mathrm{e}^{-\alpha x} P(x))$ est un polynôme à racines toutes réelles.

8) Soient $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j$ des polynômes réels à racines toutes réelles. Montrer que $Q(D)P(X)$ est un polynôme à racines toutes réelles.

Dans la question **27)**, nous utiliserons le théorème de composition de Schur suivant, que nous admettons.

Théorème 1. Soient $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j$ des polynômes réels à racines toutes réelles. On suppose en outre que les racines de Q ont toutes le même signe. Alors le polynôme

$$P \circ Q(X) := \sum_{k=0}^{\min(n,m)} a_k b_k (k!) X^k$$

est à racines toutes réelles.

III. Quelques exemples

Soit A une matrice symétrique réelle de taille n.
On rappelle le ***théorème spectral*** : *Toute matrice symétrique réelle peut-être diagonalisée dans une base orthonormale réelle.*

9) Montrer que son polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ est à racines toutes réelles.

10) On suppose que toutes les racines de $\chi_A(X)$ sont positives.

- **a)** Montrer qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telle que $A = PDP^\top$.
- **b)** Montrer l'existence d'une matrice symétrique C telle que $A = C^2$.

11) Soit B une matrice symétrique réelle. On suppose que les racines de $\chi_A(X)$ sont strictement positives. Montrer que les valeurs propres de AB sont toutes réelles.

On considère

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R} \\ (P, Q) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} P(x)Q(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x. \end{cases}$$

12) Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

13) Justifier (on ne demande pas de les calculer) qu'il existe une famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant les propriétés suivantes :

— les L_i sont de degré i ;

— pour tout $0 \leqslant i, j \leqslant n$, $\varphi(L_i, L_j) = \delta_{i,j}$, i.e. nul si $i \neq j$ et égal à 1 pour $i = j$.

14) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, le polynôme L_n est à racines toutes réelles.

Soit $(B_i)_{i=1,\ldots,n}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli $\mathscr{B}(b_i)$ indépendantes de paramètres respectifs $b_i \in [0,1]$, i.e. $\mathbf{P}\left(B_i = 1\right) = b_i$ et $\mathbf{P}\left(B_i = 0\right) = 1 - b_i$. Soit alors $B = \sum_{i=1}^{n} B_i$ et soit

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} p_k X^k$$

où $p_k = \mathbf{P}(B = k)$.

15) Montrer que $P(X)$ est à racines toutes réelles.

16) Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} p_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ à coefficients positifs, i.e. $p_k \geqslant 0$ pour tout $k = 0, \ldots, n$. On suppose en outre que P est à racines toutes réelles et que $P(1) = 1$. Montrer alors qu'il existe des variables de Bernoulli indépendantes B_i telles que pour tout $k = 0, \ldots, n$, on a $p_k = \mathbf{P}(\sum_{i=1}^{n} B_i = k)$.

IV. Théorème de Hermite-Sylvester

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n. On note $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ les racines réelles distinctes de P et $\beta_1, \overline{\beta}_1, \ldots, \beta_s, \overline{\beta}_s$ ses racines complexes non réelles, où $\overline{\beta}_i$ désigne le conjugué de β_i. On note m_i la multiplicité de α_i et n_j celle de β_j et $\overline{\beta}_j$.
Pour tout $k \geqslant 0$, on introduit

$$s_k = \sum_{i=1}^{r} m_i \alpha_i^k + \sum_{j=1}^{s} n_j (\beta_j^k + \overline{\beta}_j^k).$$

On introduit les applications linéaires $\varphi_k : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$ définies par

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_k^{i-1}$$

ainsi que

$$\psi_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \beta_k^{i-1}.$$

On notera aussi $\overline{\psi}_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{\beta}_k^{i-1}$.

17) **a)** Notons $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, notons e_i^* la i-ième forme linéaire coordonnée sur $\mathbb{C}^n$, i.e. l'application $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$.
Montrer que $\mathscr{B}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathscr{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$.

b) Pour $k \in [\![1, r]\!]$, donner les coordonnées de φ_k dans $\mathscr{B}^*$, et pour $k \in [\![1, s]\!]$, donner les coordonnées de ψ_k et $\overline{\psi}_k$ dans $\mathscr{B}^*$.

c) Montrer que la famille $\mathscr{F} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_r, \psi_1, \overline{\psi}_1, \ldots, \psi_s, \overline{\psi}_s)$ est une famille libre.
Indication : on pourra considérer sa matrice dans la base $\mathscr{B}^*$.

18) Montrer que

$$q(x_1,\dots,x_n)=\sum_{k=1}^{r} m_k\varphi_k(x_1,\dots,x_n)^2+\sum_{k=1}^{s} n_k\left(\psi_k(x_1,\dots,x_n)^2+\overline{\psi}_k(x_1,\dots,x_n)^2\right)$$

s'écrit sous la forme $q(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n} s_{i+j-2}x_ix_j$.

19) Montrer que si P est à racines toutes réelles, alors $q:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ définie par $q(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n} s_{i+j-2}x_ix_j$ est à valeurs positives.

On suppose à présent $r<n$ et on écrit pour tout $i=1,\dots,s$

$$\psi_i^2+\overline{\psi}_i^2=2\operatorname{Re}(\psi_i)^2-2\operatorname{Im}(\psi_i)^2.$$

20) Montrer que les applications linéaires $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ suivantes sont $\mathbb{R}$-linéairement indépendantes :

$$\varphi_1,\dots,\varphi_r,\operatorname{Re}(\psi_1),\operatorname{Im}(\psi_1),\dots,\operatorname{Re}(\psi_s),\operatorname{Im}(\psi_s).$$

21) Conclure que P est à racines toutes réelles si et seulement si q est à valeurs positives sur $\mathbb{R}^n$.
Indication : on pourra utiliser, sans justification, l'existence d'un vecteur $(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ qui annule toutes les formes linéaires de la question précédente sauf une au choix.

V. Suite multiplicative de Polya-Schur

Étant donnée une suite réelle $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on considère l'opérateur $\Gamma:\mathbb{R}[X]\to\mathbb{R}[X]$ défini par la formule

$$\Gamma\left(\sum_{k=0}^{n} a_kX^k\right)=\sum_{k=0}^{n} a_k\gamma_kX^k.$$

Une suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite multiplicative au sens de Polya-Schur si l'opérateur Γ préserve l'ensemble des polynômes à racines toutes réelles.

22) Montrer que la suite définie par $\gamma_n=n$ est multiplicative au sens de Polya-Schur.

23) Montrer que si $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ est multiplicative au sens de Polya-Schur alors pour tout $k\geqslant 0$, la suite $(\gamma_n)_{n\geqslant k}=(\gamma_k,\gamma_{k+1},\dots)$ l'est aussi.

Soit $P(X)=a_0+a_1X+\cdots+a_nX^n$ avec $a_n\neq 0$. On suppose que P a toutes ses racines réelles : on les note $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$. On rappelle que $-\frac{a_{n-1}}{a_n}=\sum_{k=1}^{n}x_k$ et on admet que $\dfrac{a_{n-2}}{a_n}=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j$ de sorte que

$$a_{n-1}^2-2a_na_{n-2}=a_n^2\sum_{k=1}^{n}x_k^2.$$

24) Soit $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ une suite non nulle, multiplicative au sens de Polya-Schur et on suppose qu'il existe $k>0$ tel que $\gamma_k=0$ avec $\gamma_{k-1}\neq 0$. Montrer que $\gamma_{k+1}=0$ puis que $\gamma_m=0$ pour tout $m\geqslant k$.
Indication : on pourra utiliser les expressions de $\Gamma\left((1+X)^{k+1}\right)$ et $\Gamma\left(X^{k+1}-X^{k-1}\right)$, puis, pour $m\geqslant k+2$, raisonner sur les racines de $\Gamma\left((1+X)^m\right)$.

25) On suppose que la suite multiplicative $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ ne s'annule jamais. Montrer alors qu'elle est soit de signe constant, soit alternée.
Indication : on pourra utiliser encore l'expression de $\Gamma\left(X^{k+1}-X^{k-1}\right)$.

VI. Théorème de Polya-Schur

On considère à présent une suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ strictement positive, i.e. $\gamma_n > 0$ pour tout $n \geqslant 0$.

26) On suppose que $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ est multiplicative au sens de Polya-Schur.
Montrer que $Q_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k \binom{n}{k} X^k$ a toutes ses racines réelles et négatives.

27) Réciproquement, supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Q_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k \binom{n}{k} X^k$ a toutes ses racines réelles négatives. On fait le changement de variable $x = z/n$, de sorte que

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\gamma_k}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) z^k,$$

a toutes ses racines réelles et négatives.
En utilisant le **théorème 1**, montrer que $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ est multiplicative au sens de Polya-Schur.

On suppose que $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ est multiplicative au sens de Polya-Schur.

28) Montrer que $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est log-concave, i.e. $\gamma_k^2 \geqslant \gamma_{k+1}\gamma_{k-1}$ pour tout $k \geqslant 1$.

29) En déduire que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \gamma_n x^n$ a un rayon de convergence strictement positif.

30) En déduire que $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\gamma_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence infini et peut s'obtenir comme la limite uniforme sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, de polynômes à racines toutes réelles et négatives.

On veut montrer la réciproque : on ne suppose donc plus que $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ est multiplicative au sens de Polya-Schur.

31) Réciproquement, montrer que si $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\gamma_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence infini et peut s'obtenir comme la limite uniforme, sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, de polynômes à racines toutes réelles et négatives, alors $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ est multiplicative au sens de Polya-Schur.
Indication : pour cette question, toute tentative de réponse, partielle ou purement qualitative, sera considérée par le Jury.

— **FIN** —