Lycée La Martinière Monplaisir — Année 2025/2026
PSI* — Mathématiques

Feuille d'exercice n° 03 : **Rappels et compléments d'algèbre linéaire, 2nde partie**

I. Trace

Exercice 1 (🚲) Soit $n \geqslant 2$.

1) Soit φ une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(M) = \operatorname{tr}(AM).$$

2) En déduire que tout hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ possède au moins une matrice inversible.

Exercice 2 Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\operatorname{tr} M = 0$.
Montrer que M est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls (on pourra utiliser, en le montrant, que si M n'est pas une homothétie, alors il existe un vecteur X tel que (X, MX) soit libre).

II. Déterminant

Exercice 3 (🚲) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq b$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on note B_n le déterminant suivant :

$$B_n = \begin{vmatrix} a+b & a & & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ 0 & & b & a+b \end{vmatrix}$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 4,\ B_n = (a+b)B_{n-1} - abB_{n-2}$ Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2,\ B_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}.$$

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Calculer

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x_1 - x & \alpha - x & \cdots & \alpha - x \\ \beta - x & x_2 - x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha - x \\ \beta - x & \cdots & \beta - x & x_n - x \end{vmatrix}.$$

Exercice 5 (🚲) Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \det(A+B)\det(A-B).$$

Exercice 6 Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} \geqslant 0.$$

Exercice 7 Soit $A, B, C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $D \in GL_n(\mathbb{R})$.

1) Trouver quatre matrices $X, Y, Z, T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & X \\ 0 & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z & 0 \\ T & I_n \end{pmatrix}.$$

2) En déduire que, si C et D commutent,

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(AD - BC).$$

Exercice 8 Soient E un ev de dimension finie, $u, v \in \mathscr{L}(E)$ avec v nilpotent.

1) Montrer que $\det(\mathrm{Id} + v) = 1$.

2) Montrer que $\det(u + v) = \det u$ si $u \circ v = v \circ u$.

Exercice 9

Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n et $(a_0, \ldots, a_n)$ un $(n+1)$–uplet de réels tous distincts.

Montrer que $(P(X + a_0), P(X + a_1), \ldots, P(X + a_n))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

III. Polynôme annulateur

Exercice 10 Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension quelconque, $u \in \mathscr{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. On suppose que P est annulateur de u, et que 0 est racine simple de P.

1) Montrer que $\operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u^2 = \operatorname{Im} u$.

2) En déduire que $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

Exercice 11 (🚲) Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ non nul vérifiant $u^3 + u = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

1) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.

2) Montrer que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u^2 + \mathrm{Id})$.

3) Montrer que u n'est pas injective.

Indication : on pourra raisonner par l'absurde.

4) Montrer que $\mathrm{rg}(u) = 2$.

5) Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ pour laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 12 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, f, g et h trois endomorphismes de E vérifiant

$$f \circ g = h, \ \ g \circ h = f \text{ et } h \circ f = g \ .$$

1) Montrer que f, g et h ont même noyau et même image.

2) Montrer que $X^5 - X$ est un polynôme annulateur de f.

3) En déduire que l'image et le noyau de f sont supplémentaires dans E.