Exercice 9

1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $P, R \in E$, $A(P+\lambda R) = AP + \lambda AR$

Or il existe $Q_1, Q_2 \in E$ tq $\begin{cases} AP = BQ_1 + f(P) \\ AR = BQ_2 + f(R) \end{cases}$

Pour pouvoir l'affirmer, il faut d'abord montrer que deg(f(P)+lambda f(R))<4

alors $A(P+\lambda R) = BQ_1 + f(P) + \lambda(BQ_2 + f(R))$
$= B(Q_1 + \lambda Q_2) + f(P) + \lambda f(R)$

Donc le reste de la division euclidienne de $A(P+\lambda R)$ par B vaut $f(P) + \lambda f(R)$ et alors $f(P) + \lambda f(R) = f(P+\lambda R)$ donc f est linéaire.

De plus si $P \in E$, $\deg(f(P)) < \deg B = 4$ donc $f(P) \in \mathbb{R}_3[X] = E$

$\boxed{\text{Donc } f \text{ est un endomorphisme.}}$

2) Soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = M$

alors $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$ et avec le théorème du rang, $\boxed{\mathrm{rg}(f) = 3}$

3) $\det(XI_4 - D) = \begin{vmatrix} X+1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & X+1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & X+1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & X+1 \end{vmatrix}$

$= (X+1)\begin{vmatrix} X+1 & 0 & -1 \\ -1 & X+1 & 0 \\ 0 & -1 & X+1 \end{vmatrix}$ développement par rapport à la 1ère ligne

$= (X+1)^2 \begin{vmatrix} X+1 & 0 \\ -1 & X+1 \end{vmatrix} - (X+1)\begin{vmatrix} -1 & X+1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ développement par rapport à la 1ère ligne

$= (X+1)^4 - (X+1)$
$= X(X+1)(X^2+3X+3)$
$= X(X+1)\left(X + \frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X + \frac{3-i\sqrt{3}}{2}\right)$

Donc <u>f est diagonalisable dans $\mathbb{C}$</u>, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \left\{0, -1, \frac{-3+i\sqrt{3}}{2}, -\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right\}$.

mais pas dans R.

Le calcul donne $\mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Ker}(-I_4 - M) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$\mathrm{Ker}\left(\left(\frac{-3+i\sqrt{3}}{2}\right)I_4 - M\right) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{-1+i\sqrt{3}} \\ \frac{4}{(-1+i\sqrt{3})^2} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Ker}\left(\left(-\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right)I_4 - M\right) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{-1-i\sqrt{3}} \\ \frac{4}{(-1-i\sqrt{3})^2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = PDP^{-1} \text{ avec } D = \mathrm{diag}\left(0, -1, \frac{-3+i\sqrt{3}}{2}, -\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right) \text{ et } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{-1+i\sqrt{3}} & \frac{2}{-1-i\sqrt{3}} \\ 1 & 0 & \frac{4}{(-1+i\sqrt{3})^2} & \frac{4}{(-1-i\sqrt{3})^2} \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$

Très bien, mais cela n'est même pas demandé : on ne demande pas de diagonaliser f, seulement sa diagonalisabilité.