V – Espaces vectoriels normés

I. Produit d'espaces vectoriels normés

Soit $(x_1,\dots,x_p),(y_1,\dots,y_p)\in E$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.
• La positivité de N est évidente.
•

$$\begin{aligned}N(\lambda(x_1,\dots,x_p)) &= N(\lambda x_1,\dots,\lambda x_p)=\max_{1\leqslant k\leqslant p}N_k(\lambda x_k)\\ &=\max_{1\leqslant k\leqslant p}|\lambda|N_k(x_k)=|\lambda|\max_{1\leqslant k\leqslant p}N_k(x_k)\\ &=|\lambda|N(x_1,\dots,x_p)\end{aligned}$$

• En utilisant la norme $\|.\|_\infty$ de $\mathbb{R}^p$, nous avons :

$$\begin{aligned}N((x_1,\dots,x_p)+(y_1,\dots,y_p)) &= \max_{1\leqslant k\leqslant p}N_k(x_k+y_k)\\ &\leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant p}[N_k(x_k)+N(y_k)]\\ &\leqslant \|(N_1(x_1),\dots,N_p(x_p))+(N_1(y_1),\dots,N_p(y_p))\|_\infty\\ &\leqslant \|(N_1(x_1),\dots,N_p(x_p))\|_\infty+\|(N_1(y_1),\dots,N_p(y_p))\|_\infty\\ &\leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant p}[N_k(x_k)]+\max_{1\leqslant k\leqslant p}[N(y_k)]\\ &\leqslant N(x_1,\dots,x_p)+N(y_1,\dots,y_p).\end{aligned}$$

• Si $N(x_1,\dots,x_p)=0$, alors pour tout k, $0\leqslant N_k(x_k)\leqslant N(x_1,\dots,x_p)=0$. Donc $N_k(x_k)=0$ et ainsi $x_k=0$ et $(x_1,\dots,x_p)=0$.

Avec tous ces points, N est bien une norme.

II. Comparaison de deux normes

1) On a bien sûr $N_1,N_2:\mathbb{R}[X]\to\mathbb{R}_+$.
•

$$\begin{aligned}N_1(P+Q) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\left|P^{(k)}(0)+Q^{(k)}(0)\right|\\ &\leqslant \sum_{k=0}^{+\infty}\left|P^{(k)}(0)\right|+\left|Q^{(k)}(0)\right|\\ &\leqslant \sum_{k=0}^{+\infty}\left|P^{(k)}(0)\right|+\sum_{k=0}^{+\infty}\left|Q^{(k)}(0)\right|\\ &= N_1(P)+N_1(Q).\end{aligned}$$

• $N_1(\lambda P)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left|\lambda P^{(k)}(0)\right|=|\lambda|\sum_{k=0}^{+\infty}\left|P^{(k)}(0)\right|=|\lambda|N_1(P)$.

• $N_1(P)=0\Rightarrow\forall k\in\mathbb{Z},P^{(k)}(0)=0$, or $P=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{P^{(k)}(0)}{k!}X^k$ donc $P=0$.

Finalement N_1 est une norme.
•

$$\begin{aligned}N_2(P+Q) &= \sup_{t\in[-1,1]}|P(t)+Q(t)|\\ &\leqslant \sup_{t\in[-1,1]}|P(t)|+|Q(t)|\\ &\leqslant \sup_{t\in[-1,1]}|P(t)|+\sup_{t\in[-1,1]}|Q(t)|\\ &= N_2(P)+N_2(Q).\end{aligned}$$

• $N_2(\lambda P)=\sup_{t\in[-1,1]}|\lambda P(t)|=\sup_{t\in[-1,1]}|\lambda||P(t)|=|\lambda|\sup_{t\in[-1,1]}|P(t)|=|\lambda|N_2(P)$.
• $N_2(P)=0\Rightarrow\forall t\in[-1,1],P(t)=0$ et par infinité de racines, $P=0$.

2) La suite $\frac{1}{n}X^n$ converge vers 0 pour N_2 mais n'est pas bornée et donc diverge pour N_1.

3) Les normes ne peuvent être équivalentes car sinon les suites convergeant pour l'une des normes convergerait pour l'autre.

III. Opérations sur les convexes

• Réunion finie et infinie : non, par exemple $[-2,-1] \cup [1,2]$.
• Intersection finie et infinie : oui, revenir à la définition.
Soit I un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de convexes d'un ev E.
Soit $M, N \in \bigcap_{i\in I} A_i$. Alors pour tout $i \in I$, $M, N \in A_i$ donc $[M,N] \subset A_i$. Ainsi $[M,N] \subset \bigcap_{i\in I} A_i$ et $\bigcap_{i\in I} A_i$ est bien convexe.

IV. Limite d'une suite de matrices

1) On note $A_n = (a_{i,j,n})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, $B_n = (b_{i,j,n})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, $A_nB_n = (c_{i,j,n})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, $A = (\alpha_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, $B = (\beta_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $AB = (d_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
On raisonne coefficient par coefficient : pour tout i,j, $a_{i,j,n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha_{i,j}$ et $b_{i,j,n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \beta_{i,j}$.

Alors pour tout i,j, $c_{i,j,n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{i,k,n}b_{k,j,n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=1}^{p} \alpha_{i,k}\beta_{k,j} = d_{i,j}$, donc $A_nB_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} AB$.

2) $(A^n)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} P^2$ mais aussi $(A^n)^2 = A^{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} P$ donc $P = P^2$.

V. Norme d'algèbre sur les matrices et convergence d'une suite

1) Le tout est de remarquer que cette fonction correspond au produit scalaire usuel. Notons $A = (a_{ij})$, $A^\top = (c_{ij})$, et $B = (b_{ij})$.
Alors $\operatorname{tr}(A^\top B) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} c_{ik}b_{ki}) = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}b_{ki})$: c'est bien l'expression du produits scalaire usuel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ associé à la base canonique.
Vérifions que $\varphi(A,B) = \operatorname{tr}(A^\top B)$ est bien un produit scalaire :
Soit $A, B, C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_i n\mathbb{R}$.
• $\varphi(B,A) = \operatorname{tr}(B^\top A) = \operatorname{tr}((B^\top A)^\top = \operatorname{tr}(A^\top B) = \varphi(A,B)$;
• Pour on a $\operatorname{tr}((A+\lambda B)^\top C) = \operatorname{tr}(A^\top C + B^\top C) = \operatorname{tr}(A^\top C) + \operatorname{tr}(B^\top C)$ donc φ est linéaire par rapport à la première variable. Par symétrie elle est donc bilinéaire ;
• $\varphi(A,A) = \displaystyle\sum_{i,j} a_{ij}^2 \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si tous les a_{ij} sont nuls, *i.e.* $A = 0$.

2) Grâce à la question précédente, la norme associée à φ est la norme euclidienne usuelle associée à la base canonique.
Avec $A_{*,j}$ la colonne j de A, $A_{i,*}$ la ligne i de A et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, on a

$$N(A)^2 = \sum_{i=1}^{n} \|A_{i,*}\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|A_{*,j}\|^2 .$$

Si $x \in \mathbb{R}^n$, on a alors par l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $\mathbb{R}^n$:

$$\|Ax\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle A_{i,*}, x\rangle^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|A_{i,*}\|^2 \|x\|^2 = N(A)\|x\|^2$$

Alors,

$$N(AB) = \sum_{j=1}^{n} \|(AB)_{*,j}\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|A \times B_{*,j}\|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n} N(A)\|B_{*,j}\|^2 = N(A)N(B).$$