Devoir surveillé n° 5 – v1

Durée : 4 heures, calculatrices et documents interdits

Banque PT 2025, Mathématiques C

Préambule

1) Étudier la convergence des intégrales :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4+1} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}\,\mathrm{d}t$$

2) Énoncer le théorème de changement de variable pour les intégrales généralisées.

3) Comparer (sans les calculer) :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4+1}$$

(On pourra utiliser le changement de variable $\frac{1}{t} = x$.)

Partie I

4) Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_h$ de la fonction h qui, à tout réel t de $\mathscr{D}_h$, associe :

$$h(t) = \frac{2t-\sqrt{2}}{t^2+1-\sqrt{2}t}$$

5) Soit X un réel positif. Calculer $\displaystyle\int_0^X h(t)\,\mathrm{d}t$, puis, à l'aide de ce résultat, $\displaystyle\int_X^0 h(-t)\,\mathrm{d}t$.

6) Que vaut :

$$\lim_{X\to+\infty} \int_0^X (h(t)+h(-t))\,\mathrm{d}t \quad ?$$

7) Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction φ qui, à tout réel t, associe :

$$\varphi(t) = \frac{2}{2\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}$$

8) On considère la fonction g qui, à tout réel t de son domaine de définition $\mathscr{D}_g$, associe :

$$g(t) = \frac{\sqrt{2}}{t^2 + 1 - \sqrt{2}t}$$

Montrer que $\mathscr{D}_g = \mathscr{D}_h$, puis déterminer une primitive G de g sur $\mathscr{D}_g$.

9) Utiliser la primitive de g obtenue lors du calcul de la question précédente pour calculer simplement, pour tout réel positif X :

$$\int_0^X g(-t)\,\mathrm{d}t$$

10) Déterminer :

$$\lim_{X \to +\infty} \int_0^X (g(t) + g(-t))\,\mathrm{d}t$$

11) Calculer, pour tout réel $t \geqslant 0$:

$$h(t) + h(-t) + g(t) + g(-t)$$

12) **a)** Que vaut :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4 + 1}\,\mathrm{d}t \quad ?$$

b) Déduire des questions précédentes et du Préambule la valeur de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4 + 1}$$

13) Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t^2}{t^4 + 1}\,\mathrm{d}t$. On donnera la réponse en fonction de $\arctan 2$ et $\ln(5)$.

Partie II

14) Dans cette question, C et S désignent deux fonctions à valeurs réelles, paires, définies sur un intervalle de la forme $]-R, R[$, où R est soit un réel strictement positif, soit $+\infty$.

On considère les équations différentielles suivantes :

$$\forall x \in]-R, R[: \quad C'(x) = -2xS(x) \quad (\mathscr{E}_1)$$

$$\forall x \in]-R, R[: \quad S'(x) = 2xC(x) \quad (\mathscr{E}_2)$$

avec les conditions initiales :

$$C(0) = 1 \quad \text{et} \quad S(0) = 0$$

Le but de cette question est de déterminer les expressions des fonctions C et S, en recherchant leur développement en série entière sur $]-R, R[$.

a) Pour tout réel x de $]-R, R[$, on pose :

$$C(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{et} \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$(n+1)a_{n+1} = -2b_{n-1} \quad \text{et} \quad (n+1)b_{n+1} = 2a_{n-1}$$

b) En déduire, pour tout entier naturel $n \geqslant 4$:

$$a_n = -\frac{4}{n(n-2)} a_{n-4}$$

c) On rappelle que les fonctions C et S sont supposées paires. Que peut-on en déduire pour les coefficients de leurs développements en série entière respectifs ?

d) **i)** Montrer que tout entier naturel n peut s'écrire sous l'une des formes suivantes :

$$n = 4p \quad \text{ou} \quad n = 4p+1 \quad \text{ou} \quad n = 4p+2 \quad \text{ou} \quad n = 4p+3$$

où p est dans $\mathbb{N}$.

ii) Montrer que, pour tout entier naturel n qui n'est pas multiple de 4 :

$$a_n = 0$$

e) Montrer que, pour tout entier naturel p :

$$a_{4p} = \frac{(-1)^p}{(2p)!}$$

f) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ et donner, pour tout réel x de $]-R, R[$, une expression simplifiée de $C(x)$, puis de $S(x)$.

15) On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{4n}$.

a) Préciser le rayon de convergence R' de cette série entière, puis, pour tout réel x de $]-R', R'[$, exprimer la somme $D(x)$ de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{4n}$ en fonction de x.

b) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{1+x^4}$ peut s'exprimer comme la somme d'une série numérique, que l'on explicitera.

c) Que vaut :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(4n+1)} \quad ?$$

Partie III

Pour tout réel $X > 0$, on pose :

$$I(X) = \int_1^X \cos(t^2)\,\mathrm{d}t, \quad J(X) = \int_1^X \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$$

16) Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
On donne, pour la suite du problème :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

17) Étudier la convergence des intégrales :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

18) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que les limites :

$$\lim_{X\to+\infty} I(X) \quad \text{et} \quad \lim_{X\to+\infty} J(X)$$

existent et sont finies.

19) Montrer la convergence de l'intégrale :

$$\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{it^2}\,\mathrm{d}t$$

20) Donner le développement en série entière de la fonction :

$$t \mapsto \mathrm{e}^{it^2}$$

21) **a)** Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de la fonction f :

$$x \mapsto f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i}\,\mathrm{d}t$$

b) Montrer que, pour tout réel strictement positif x :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2x^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2x}$$

c) Déduire de la question précédente la valeur de :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

d) Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction f introduite à la question **21)a)** (pour cela, on se placera sur un intervalle de la forme $[\varepsilon, a]$, où ε et a sont deux réels strictement positifs tels que $\varepsilon \leqslant a$).

e) Montrer que, pour tout réel strictement positif x :

$$f'(x) = -\sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{-ix^2}$$

f) En déduire, à l'aide des résultats de la Partie I, la valeur de :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ix^2}\,dx$$

puis de :

$$\int_0^{+\infty} C(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} S(x)\,dx$$

où S et C sont les fonctions introduites au début de la Partie II.

Dans ce problème, on calcule, à l'aide d'intégrales généralisées, la valeur de l'intégrale (complexe) $\int_0^{+\infty} e^{-ix^2}\,dx$*, connue comme l'expression complexe des intégrales (réelles) de Fresnel, qui interviennent dans les phénomènes de diffraction. La somme pour toutes les valeurs de* x *peut s'interpréter intuitivement (et de façon très simplifiée) comme le fait qu'à chaque fois qu'une onde lumineuse se propage, une infinité de rayons sont à prendre en compte - et on somme les effets de cette infinité de rayons, en lien avec le principe de superposition de Huygens-Fresnel, en physique.*

— FIN —