Topologie des evns

I. Un peu de topologie dans $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$

1) **a)** Soit $f \in F$. Alors la boule ouverte de centre f, de rayon $\frac{1}{2}\int_0^1 f$ (qui est bien strictement positif) est incluse dans F. En effet, si $g \in B\left(f, \frac{1}{2}\int_0^1 f\right)$ alors $\|g-f\|_\infty < \frac{1}{2}\int_0^1 f$ donc $f - \frac{1}{2}\int_0^1 f \leqslant g \leqslant f + \frac{1}{2}\int_0^1 f$.

Donc par croissance de l'intégrale, $\int_0^1 g \geqslant \int_0^1 f - \frac{1}{2}\int_0^1 f = \frac{1}{2}\int_0^1 f > 0$ donc $g \in F$.

b) La fonction $\varphi\ : E \to \mathbb{R},\ f \mapsto \int_0^1 f$ vérifie : pour tout $f, g \in E$, $|\varphi(f) - \varphi(g)| \leqslant \int_0^1 \|f-g\|_\infty = \|f-g\|_\infty$. Elle est donc 1-lipschitzienne, et ainsi elle est continue.
Or $F = \varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ et $\mathbb{R}_+^*$ est un ouvert, donc F aussi.

2) **a)** Soit $f \in A$. Alors $|f(0) - g(0)| = 1$ donc $\|f-g\|_\infty \geqslant 1$. Donc $\mathscr{B}\big(g, \frac{1}{2}\big) \cap A = \varnothing$: g n'est pas adhérent à A pour $\|.\|_\infty$.

b) Soit f_n telle que $f_n(x) = 1$ si $x > \frac{1}{n}$ et $f(x) = nx$ si $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$. Alors $f_n \in A$ et $\|g - f_n\|_1 = \int_0^{1/n} (1-nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n}$. Donc g est limite d'une suite d'éléments de A : c'est un point adhérent à A pour $\|.\|_1$.

II. Deux exercices sur la densité

1) $\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert car image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}^*$ par l'application continue det.
L'application $\lambda \mapsto \det(A - \lambda I_n)$ est polynomiale non nulle en λ donc possède un nombre fini de racine.
Par suite : $\forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall\, \alpha > 0, B(A,\alpha) \cap \mathscr{GL}_n(\mathbb{R}) \neq \varnothing$.

2) **a)** Montrer que $g(0) = 0$, puis que $\forall x, ng(nx) = ng(x)$ puis que $\forall x, qg(qx) = qg(x)$ puis conclure par densité des rationnels.

b) Composer par le log.

III. Distance à un fermé borné

Soit l'application $u\ : A \to E,\ y \mapsto x - y$. Pour tout $y, z \in A$, $\|u(y) - u(z)\| = \|y - z\|$. Étant 1-lipschitzienne, u est continue.
L'application $v\ : E \to \mathbb{R},\ y \mapsto \|y\|$ vérifie : pour tout $y, z \in E$, $|v(y) - v(z)| \leqslant \|y - z\|$ par inégalité triangulaire. Elle est donc elle aussi 1-lipschitzienne et continue.
Par composition $\varphi\ : A \to \mathbb{R},\ y \mapsto \|x - y\|$ est continue (on aurait pu démontrer directement qu'elle est 1-lipschitzienne).
Puisque A est fermée et bornée et que E est de dimension finie, φ est bornée et atteint ses bornes. En particulier elle a un minimum, ce qui répond aux deux questions.

IV. Norme subordonnée

1) u étant continue, il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout x, $\|u(x)\| \leqslant k\,\|x\|$. Donc $\left\{\frac{\|u(x)\|}{\|x\|},\ x \in E\backslash\{0\}\right\}$ est majoré Comme il est non vide, M_1 existe.
De plus, $\left\{\frac{\|u(x)\|}{\|x\|},\ x \in E\backslash\{0\}\right\} = \{\|u(x/\,\|x\|)\|,\ x \in E\backslash\{0\}\} = \{\|u(x)\|,\ x \in E \text{ t.q. } \|x\| = 1\}$, donc M_2 existe, et vaut d'ailleurs M_1.
Le dernier ensemble est inclus dans $\mathbb{R}_+$, non vide car u est continue, et minoré par 0, donc M_3 existe.

2) Nous avons déjà remarqué que $M_1 = M_2$.
M_1 majore $\left\{\frac{\|u(x)\|}{\|x\|},\ x \in E\backslash\{0\}\right\}$ donc pour tout x, $\|u(x)\| \leqslant M_1\,\|x\|$.
Donc $M_1 \in \{k \geqslant 0 \text{ t.q. } \forall\, x \in E,\ \|u(x)\| \leqslant k\|x\|\}$, donc $M_3 \leqslant M_1$.
Réciproquement, soit $k \in \{k \geqslant 0 \text{ t.q. } \forall\, x \in E,\ \|u(x)\| \leqslant k\|x\|\}$. Donc si $x \neq 0$, $\frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \leqslant k$. Ainsi k est un majorant de $\left\{\frac{\|u(x)\|}{\|x\|},\ x \in E\backslash\{0\}\right\}$, et donc $M_1 \leqslant M_3$.
Finalement $M_1 = M_2 = M_2$.