Devoir facultatif n° 1

Étude des séries congruo-harmoniques alternées

L'objectif de ce problème est d'étudier une famille de séries particulières. Quelques premiers résultats sont établis dans les préliminaires. La partie 1 propose d'établir une expression des séries congruo-harmoniques alternées sous la forme d'une intégrale. La partie 2 propose de calculer la valeur de la somme de la série dans certains cas particuliers. La partie 3 s'intéresse à des calculs de probabilités relatifs aux choix des paramètres de la série. Enfin, la partie 4 se propose d'étudier la vitesse de convergence de ces séries.

Notations

- $\mathbf{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels. $\mathbf{N}^*$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels non nuls.
- $\mathbf{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels. $\mathbf{R}_+$ désigne l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls.
- $\mathbf{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes. Si $z \in \mathbf{C}$, on notera $\bar{z}$ le conjugué de z.
- Pour tout $(a, b) \in \mathbf{N}^2$ avec $a < b$, on pose $[\![a, b]\!] := [a, b] \cap \mathbf{N}$.
- Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.
- Pour tout couple $(p, q) \in (\mathbf{N}^*)^2$, on dit que p divise q et on note $p \mid q$, s'il existe un entier k tel que $q = kp$.

Définition 1

Soit $(p, q) \in (\mathbf{N}^*)^2$. On appelle **série congruo-harmonique** de paramètres p et q la série de terme général u_k défini pour tout $k \geqslant 0$ par

$$u_k := u_{p,q;k} = \frac{(-1)^k}{pk + q}$$

et l'on note, sous réserve de convergence, $S_{p,q}$ la somme de cette série. Nous ferons référence aux sommes partielles de cette série par la fonction

$$\varphi_{p,q} : \begin{cases} \mathbf{N} \to \mathbf{R} \\ n \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{pk + q} \end{cases} .$$

Préliminaires

1) Justifier que, pour tout $(p,q) \in (\mathbf{N}^*)^2$, la série $\sum u_k$ converge.

2) Dans cette question, on pose $p = q = 1$. Montrer que

$$\varphi_{1,1}(n) = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\,dt.$$

3) En déduire la valeur de $S_{1,1}$.

4) Montrer alors que, pour tout $q \geqslant 2$,

$$S_{1,q} = (-1)^q \left(\varphi_{1,1}(q-2) - \ln 2\right).$$

1. Expression de $S_{p,q}$ sous la forme d'une intégrale

Dans cette partie, on fixe $(p,q) \in (\mathbf{N}^*)^2$ et on pose $\alpha_{p,q} := \frac{p}{q}$. On définit alors, pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, l'application $I_{p,q} : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ par

$$I_{p,q}(t) := \int_0^1 \frac{x^{(t+1)\alpha_{p,q}}}{1+x^{\alpha_{p,q}}}\,dx.$$

5) Démontrer que l'application $I_{p,q}$ est bien définie et continue sur $\mathbf{R}_+$.

6) Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} I_{p,q}(n) = 0.$$

7) Pour tout $x \in [0,1]$, calculer $\sum_{k=0}^{n} (-x^{\alpha_{p,q}})^k$ puis en déduire que

$$\varphi_{p,q}(n) = \frac{1}{q}\left(\int_0^1 \frac{1}{1+x^{\alpha_{p,q}}}\,dx + (-1)^n I_{p,q}(n)\right).$$

8) Montrer alors que, pour tout $(p,q) \in (\mathbf{N}^*)^2$,

$$S_{p,q} = \int_0^1 \frac{t^{q-1}}{1+t^p}\,dt.$$

2. Calcul des $S_{p,q}$ dans trois cas particuliers

L'objectif de cette partie est de déterminer une formulation explicite de la somme de la série congruo-harmonique de paramètres p et q dans trois cas particuliers. On définit pour cela les trois ensembles suivants :

$$\begin{aligned}
E_1 &:= \left\{(p,q) \in (\mathbf{N}^*)^2 : p = q\right\},\\
E_2 &:= \left\{(p,q) \in (\mathbf{N}^*)^2 : p < q,\ p \mid q\right\},\\
E_3 &:= \left\{(p,q) \in (\mathbf{N}^*)^2 : p > q\right\}.
\end{aligned}$$

Enfin, pour tout couple $(p,q) \in (\mathbf{N}^*)^2$ fixé, on définit la fraction rationnelle $F(X)$ par

$$F(X) := \frac{X^{q-1}}{1+X^p}.$$

9) Montrer que, pour tout $(p,q) \in E_1$,

$$S_{p,q} = \frac{\ln 2}{p}.$$

10) Pour tout couple $(p,q) \in E_2$, montrer qu'il existe une constante $\lambda := \lambda(p,q)$ que l'on déterminera, telle que

$$S_{p,q} = \frac{(-1)^{\lambda-1}}{p}\left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{\lambda-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right).$$

11) Dans le reste de la partie 2, on fixe un couple $(p,q) \in E_3$. Montrer qu'il existe des constantes $(a_0, b_0, \dots, b_{\lfloor p/2 \rfloor -1}) \in \mathbf{C}^{\lfloor p/2 \rfloor +1}$ telles que

$$F(X) = \frac{1-(-1)^p}{2} \cdot \frac{a_0}{X+1} + \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor -1} \left(\frac{b_k}{X-\omega_{p,k}} + \frac{\overline{b_k}}{X-\overline{\omega_{p,k}}}\right),$$

où les $\omega_{p,k}$ sont des constantes que l'on précisera et $F(X)$ la fraction rationnelle définie au début de cette partie. Dans le cas où p est pair, on posera $a_0 = 0$.

12) Calculer alors a_0 dans le cas où p est impair puis montrer que, pour tout entier $k \in [\![0, \lfloor p/2 \rfloor - 1]\!]$, b_k peut s'écrire sous la forme

$$b_k = -\frac{1}{p} e^{iq\theta_k},$$

où l'on a posé $\theta_k := (2k+1)\frac{\pi}{p}$.

13) En déduire la décomposition en éléments simples de $F(X)$ dans $\mathbf{R}(X)$:

$$F(X) = \frac{1-(-1)^p}{2} \cdot \frac{(-1)^{q-1}}{p} \cdot \frac{1}{X+1} - \frac{2}{p} \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor -1} F_k(X),$$

où, pour tout $0 \leqslant k \leqslant \lfloor p/2 \rfloor - 1$,

$$F_k(X) := \frac{\cos(q\theta_k)X - \cos((q-1)\theta_k)}{X^2 - 2\cos(\theta_k)X + 1}.$$

On admet que les F_k sont continues sur $[0,1]$ et que pour tout $0 \leqslant k \leqslant \lfloor p/2 \rfloor - 1$,

$$\int_0^1 F_k(t)\,dt = \cos(q\theta_k)\ln\left(2\sin\left(\frac{\theta_k}{2}\right)\right) - \frac{\pi}{2p}(p-1-2k)\sin(q\theta_k).$$

14) Montrer que
$$\sum_{k=0}^{\lfloor p/2\rfloor-1} \cos(q\theta_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ est pair,} \\ \frac{(-1)^{q+1}}{2} & \text{si } p \text{ est impair.} \end{cases}$$

15) Déduire des questions précédentes que, pour tout $(p,q) \in E_3$,
$$S_{p,q} = \frac{1}{p}\left(\frac{\pi}{p}\sum_{k=0}^{\lfloor p/2\rfloor-1}(p-1-2k)\sin(q\theta_k) - 2\sum_{k=0}^{\lfloor p/2\rfloor-1}\cos(q\theta_k)\ln\left(\sin\left(\frac{\theta_k}{2}\right)\right)\right).$$

16) En déduire les valeurs exactes de $S_{2,1}$ et $S_{3,1}$.

3. Quelques calculs de probabilités

L'objectif de cette partie est d'évaluer la probabilité qu'un couple d'entiers $(p,q) \in (\mathbf{N}^*)^2$ pris au hasard appartienne au domaine d'application d'au moins l'une des formules (F1), (F2) et (F3) obtenues dans la partie 2.
On fixe pour cela $n \in \mathbf{N}^*$ et on décide de tirer successivement et avec remise deux entiers p et q selon une loi uniforme sur l'intervalle $[\![1,n]\!]$. On définit alors les événements suivants, où E_1, E_2 et E_3 sont les trois ensembles définis dans la partie 2 :

— E_n : "On obtient $(p,q) \in E_1 \cup E_2 \cup E_3$".

— A_n : "On obtient $p = q$".

— B_n : "On obtient $q > p$ et q est divisible par p".

— C_n : "On obtient $p > q$".

17) Justifier que l'ensemble $\{A_n, B_n, C_n\}$ forme une partition de E_n.

18) Calculer $\mathbf{P}(A_n)$ puis $\mathbf{P}(C_n)$.

19) Montrer que
$$\mathbf{P}(B_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{p=1}^{n}\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor - \frac{1}{n},$$
et en déduire $\mathbf{P}(A_n \cup B_n)$.

20) En notant $H_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ la série harmonique, montrer que
$$H_n \sim \ln n \quad (n \to +\infty).$$

21) Montrer alors que
$$\mathbf{P}(A_n \cup B_n) \sim \frac{\ln n}{n} \quad (n \to +\infty).$$

22) En déduire
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(E_n).$$

4. Vitesse de convergence des $S_{p,q}$

Dans cette dernière partie, on s'intéresse à la vitesse de convergence des séries congruo-harmoniques. On introduit pour cela la définition suivante.

Définition 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite convergente vers une limite réelle l telle que $u_n \neq l$ à partir d'un certain rang. On définit alors, sous réserve de convergence, la vitesse de convergence V de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par

$$V = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{u_{n+1} - l}{u_n - l} \right|.$$

On qualifie alors la vitesse de convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ selon la valeur de V :

— Si $V = 0$: la convergence sera qualifiée de supra-linéaire.

— Si $V \in]0, 1[$: la convergence sera qualifiée de linéaire.

— Si $V = 1$: la convergence sera qualifiée d'infra-linéaire.

On définit alors la vitesse de convergence d'une série comme étant celle de la suite de ses sommes partielles.
On définit enfin, pour tout $(p, q) \in (\mathbf{N}^*)^2$, l'application $R_{p,q} := \frac{1}{q} I_{p,q}$, où $I_{p,q}$ est l'application définie dans la partie 1.

23) À l'aide du changement de variables $s = x^{n+1}$ dans $I_{p,q}(n)$, démontrer que

$$R_{p,q}(n) \sim \frac{1}{2pn} \quad (n \to +\infty).$$

24) En déduire la vitesse de convergence de la série congruo-harmonique alternée $\sum u_k$, c'est-à-dire celle de la suite des sommes partielles $(\varphi_{p,q}(n))_{n\in\mathbf{N}}$.

— FIN —