XIII. Intégrales à paramètre

20 décembre 2024

Table des matières

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
f) Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre	
Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de régularité par rapport à x et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t.	
Théorème de continuité : si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $A \times I$, telle que : – pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A ; – pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ; – il existe une fonction φ intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait $\lvert f(x,t)\rvert \leqslant \varphi(t)$; alors la fonction $x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.	En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.
Théorème de convergence dominée à paramètre continu : si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$, a une borne de A et f une fonction définie sur $A \times I$ telle que : – pour tout $t \in I$, $f(x,t) \xrightarrow[x \to a]{} \ell(t)$; – pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \ell(t)$ sont continues par morceaux sur I ; – il existe une fonction φ intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait $\lvert f(x,t)\rvert \leqslant \varphi(t)$; alors ℓ est intégrable sur I et : $$\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x \to a]{} \int_I \ell(t)\,\mathrm{d}t.$$	On remarque qu'il s'agit d'une simple extension du théorème relatif aux suites de fonctions.
Théorème de dérivation : si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $A \times I$, telle que : – pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A ; – pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I ; – pour tout $x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ; – il existe une fonction φ intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait $\left\lvert \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right\rvert \leqslant \varphi(t)$; alors la fonction $g : x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A et vérifie : $$\forall x \in A, \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$	La démonstration n'est pas exigible. En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.
Extension à la classe $\mathscr{C}^k$ d'une intégrale à paramètre, sous hypothèse de domination de $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ et d'intégrabilité des $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ pour $0 \leqslant j < k$.	
	Exemples d'études de fonctions définies comme intégrales à paramètre : régularité, étude asymptotique, exploitation d'une équation différentielle élémentaire.

1 Cadre

1.1 Fonctions dont la variable intervient dans les bornes d'une intégrale (et pas ailleurs)

Nous avons déjà rencontré des fonctions définies à partir d'une intégrale. C'est le cas par exemple des fonctions dont la variable intervient dans les bornes d'une intégrale. À ce sujet, rappelons un résultat concernant ce type de fonctions :

Théorème 1.1.1.
Soit $\varphi, \psi \in \mathscr{C}^1(I, J)$ où I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$, et soit $f \in \mathscr{C}^0(J, \mathbb{K})$. Alors la fonction

$$\Gamma : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^1$, et sa dérivée est

$$\gamma : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{array}{c} \psi'(x) \times (f \circ \psi)(x) \\ -\varphi'(x) \times (f \circ \varphi)(x) \end{array} \end{array} \right. .$$

Mais il existe un autre type de fonctions, pour lesquelles la variable n'intervient pas dans les bornes : c'est ce type de fonctions que nous allons étudier dans ce chapitre.

1.2 Fonctions définies par une intégrale, dont la variable n'intervient pas dans les bornes

Dans toute la suite de ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$, et $f : \begin{array}{ccc} A \times I & \to & \mathbb{K} \\ (x,t) & \mapsto & f(x,t) \end{array}$ est une fonction de deux variables.

Nous allons nous intéresser à la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$.
Il sera primordial de bien comprendre que la variable d'intégration est t, et pas x. Il ne faudra donc en aucun oublier les « $\mathrm{d}t$ » dans les intégrales.
Mais cette intégrale dépend de x, et pas de t (qui n'a aucune existence en dehors de l'intégrale), donc F est une fonction de la seule variable x.
Une telle fonction est appelée ***intégrale dépendant d'un paramètre***.

La première étape sera de déterminer l'ensemble de définition de F, à savoir les valeurs de x pour lesquelles $\displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ converge.
Nous nous intéresserons ensuite aux propriétés de régularité de F.

La plupart des résultats seront basés sur une hypothèse de domination, comparable à celle intervenant dans le théorème de convergence dominée concernant les suites de fonctions.

1.3 Et si la variable intervient à la fois dans les bornes et dans l'intégrande ?

Il n'y a aucun résultat général dans ce cas. Souvent, on essaie par un changement de variable de se ramener à l'un des deux cas précédents.

Exercice 1.3.1. 1. $F(x) = \displaystyle\int_0^x \sin(x+t)\,\mathrm{d}t$.

2. $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

2 Continuité

2.1 Théorème de continuité par domination

Théorème 2.1.1 (Théorème de continuité)**.**
Si

(i) pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A ;

(ii) pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;

(iii) il existe une fonction φ intégrable sur I telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$ on a $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$,

alors la fonction $F : x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.

Remarque 2.1.2.
Comme nous allons le voir dans la démonstration qui suit, et comme très souvent dans les résultats de continuité, la continuité « sur A » peut être remplacée dans l'énoncé du théorème par la continuité « en a », où $a \in A$.

Démonstration.
Tout d'abord, grâce à l'hypothèse de domination (iii), pour tout $x \in A$, l'intagrale $\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ converge, donc F est bien définie sur A.
Nous allons prouver la continuité de F en un point de A grâce à la caractérisation séquentielle de la continuité, en nous appuyant sur le théorème de convergence dominée.
Soit $a \in A$ et (a_n) une suite d'éléments de A convergeant vers a. Posons alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in I$, $u_n(t) = f(a_n,t)$. Ainsi $F(a_n) = \int_I u_n(t)\,\mathrm{d}t$.
Grâce à l'hypothèse (i) de continuité en la première variable, pour tout $t \in I$, $u_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a,t)$. Si nous notons $\ell : t \mapsto f(a,t)$, la suite de fonctions (u_n) converge simplement vers ℓ sur I.
Utilisons maintenant le théorème de convergence dominée : ℓ est continue grâce à l'hypothèse (i), les u_n sont continues grâce à l'hypothèse (ii), et l'hypothèse (ii) assure que $|u_n| \leqslant \varphi$. Nous pouvons donc conclure que $\int_I u_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I \ell(t)\,\mathrm{d}t$, ce qui s'écrit aussi $F(a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F(a)$.
Par caractérisation séquentielle, F est continue en a, et ce pour tout $a \in A$, donc F est continue sur A. $\square$

Exemple 2.1.3.
Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle ***transformée de Fourier de*** f la fonction $\hat{f} : \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{ixt} f(t)\,\mathrm{d}t$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\left|\mathrm{e}^{ixt} f(t)\right| \leqslant |f(t)|$. Or f est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc $\hat{f}(x)$ converge, et ainsi $\hat{f}$ est définie sur $\mathbb{R}$.
La majoration précédente satisfait l'hypothèse de domination du théorème de continuité.
Comme de plus $x \mapsto \mathrm{e}^{ixt} f(t)$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{ixt} f(t)$ sont continues sur $\mathbb{R}$, respectivement pour t et pour x fixé, alors le théorème de continuité assure que $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.1.4.
Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle ***transformée de Laplace de*** f la fonction $\mathscr{L}(f) : \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{ixt} f(t)\,\mathrm{d}t$.
Montrer que $\mathscr{L}(f)$ est bien continue et définie sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque 2.1.5.
Lorsque l'intégrale n'est pas généralisée, on peut utiliser comme fonction dominante une fonction constante.

Exercice 2.1.6.
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int^1 \cos(xt)\mathrm{d}t$. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Il arrive parfois que l'on n'arrive pas à dominer $f(x,t)$ sur tout l'intervalle A. Il est alors possible de passer par une domination sur tout segment :

Théorème 2.1.7 (Domination sur tout segment)**.**
Si

(i) pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A ;

(ii) pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;

(iii) pour tout segment $K \subset A$, il existe une fonction φ_K intégrable sur I telle que pour tout $(x,t) \in K \times I$ on a $|f(x,t)| \leqslant \varphi_K(t)$,

alors la fonction $F : x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.

Remarque 2.1.8.
Seule l'hypothèse de domination change, tout le reste de l'énoncé demeure.

Démonstration.
Tout simplement, il suffit de remarquer que tout point a de A appartient à un segment inclus dans A. On applique alors le théorème **2.1.1** sur K, et ainsi F est définie et continue en a. □

Exercice 2.1.9.
Montrer que $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}\sin t}{x\sqrt{t}+t}\,\mathrm{d}t$ est continue sur $]0,+\infty[$.

Remarque 2.1.10.
L'exemple qui suit montre que l'hypothèse de domination est indispensable :
La fonction $f : (x,t) \mapsto \frac{x}{1+x^2t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, et, pour tout x, la fonction $t \mapsto \frac{x}{1+x^2t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Si l'on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t$, on a alors, par un calcul simple :

$$g(0) = 0 \quad , \quad g(x) = \frac{\pi}{2} \text{ si } x > 0 \quad , \quad g(x) = -\frac{\pi}{2} \text{ si } x < 0,$$

et g n'est pas continue en 0 !
On pourra cependant vérifier que l'hypothèse de domination est bien vérifiée sur tout segment $[a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, ce qui implique la continuité sur $\mathbb{R}_+^*$.

2.2 Limite

Théorème 2.2.1 (Théorème de convergence dominée à paramètre continu)**.**
Si a est une borne de A et si

(i) il existe une fonction $\ell : I \to \mathbb{K}$ telle que pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t) \xrightarrow[x\to a]{} \ell(t)$;

(ii) pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I, ainsi que ℓ ;

(iii) il existe une fonction φ intégrable sur I telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$ on a $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$,

alors la fonction ℓ est intégrable sur I et $\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to a]{} \int_I \ell(t)\,\mathrm{d}t$.

Démonstration.
Elle suit exactement le même cheminement que la démonstration du théorème de continuité **2.1.1**. □

Remarque 2.2.2.
1. On remarquera la très forte similitude avec le théorème de convergence dominée pour les suites. L'hypothèse (i) est l'analogue de la convergence simple. Le paramètre discret $n \in \mathbb{N}$ est remplacé pas le paramètre continu x.
2. Si a n'est pas une borne de A, autrement dit si $a \in A^\circ$, alors $a \in A$. L'hypothèse (ii) revient alors à dire que pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue en a. Le théorème de continuité (version « en a », cf. remarque **2.1.2**) assure alors que F est continue en a, ce qui est bien la conclusion voulue. Le théorème de convergence dominée à paramètre continu n'apporte donc quelque chose que si a est une borne de A, et même une borne de A qui n'appartient pas à A.

Exercice 2.2.3.
Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ a une limite quand $x \to +\infty$, et la calculer.

3 Dérivation

3.1 Rappels de première année : dérivées partielles

Proposition 3.1.1 (voir figure 1)**.**
Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert, soit $(x_0,y_0) \in U$. Alors, il existe deux intervalles ouverts J et K tels que

— $x_0 \in J$;
— $y_0 \in K$;
— $J \times K \subset U$.

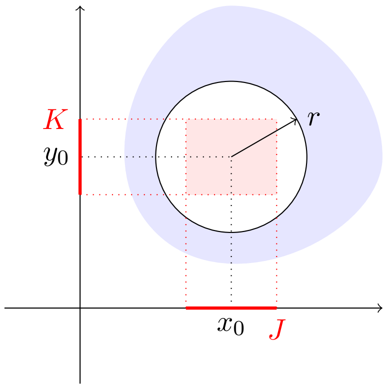

FIGURE 1 – Un ouvert U, contenant un disque, contenant un rectangle.

Démonstration.
Il existe $r > 0$ tel que le $B((x_0, y_0), r) \subset U$. En posant

$$J = \left]x_0 - \frac{r}{\sqrt{2}}; x_0 + \frac{r}{\sqrt{2}}\right[$$
$$K = \left]y_0 - \frac{r}{\sqrt{2}}; y_0 + \frac{r}{\sqrt{2}}\right[$$

on vérifie aisément que $J \times K \subset B((x_0, y_0), r)$, J et K étant bien des intervalles ouverts contenant respectivement x_0 et y_0. □

Définition 3.1.2.
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et h une application de U dans $\mathbb{K}$. Soit $(x_0, y_0) \in U$. Alors le lemme 3.1.1 assure qu'il existe deux intervalles ouverts J et K tels que $x_0 \in J$, $y_0 \in K$ et $J \times K \subset U$. On considère alors les deux ***fonctions partielles*** de h :

— y_0 étant fixé, la première fonction partielle de h est $h_1 : J \to \mathbb{R}$, $x \mapsto h(x, y_0)$.
— x_0 étant fixé, la seconde fonction partielle de h est $h_2 : K \to \mathbb{R}$, $y \mapsto h(x_0, y)$.

Définition 3.1.3.
Nous gardons les notations précédentes h_1 et h_2 pour les fonctions partielles de h.
On dit que la fonction h est ***dérivable en un point*** (x_0, y_0) ***par rapport à sa première variable*** si la fonction partielle $h_1 : x \mapsto h(x, y_0)$ est dérivable en x_0. On note alors

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x_0, y_0) = h_1'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{h(x, y_0) - h(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

La fonction h est dite ***dérivable par rapport à sa première variable sur*** U si elle l'est en tout point de U.
De même, on dit que la fonction h est ***dérivable en un point*** (x_0, y_0) ***par rapport à sa deuxième variable*** si la fonction partielle $h_2 : y \mapsto h(x_0, y)$ est dérivable en y_0. On note alors

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0) = h_2'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{h(x_0, y) - h(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

La fonction h est dite ***dérivable par rapport à sa deuxième variable sur*** U si elle l'est en tout point de U.

Remarque 3.1.4.
La notation $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ signifie la dérivation par rapport à la *première* variable de la fonction h, et est parfois notée $D_1 h$, ou $\partial_1 h$, *idem* pour la dérivation par rapport à la seconde variable.

Si l'on a noté une fonction $h\ :\ (u,v)\mapsto [...]$, on pourra bien entendu écrire $\dfrac{\partial h}{\partial u}$ pour signifier la dérivation par rapport à la première variable de h, *idem* pour la dérivation par rapport à la seconde variable.

On évitera absolument de considérer une fonction $h\ :\ (y,x)\mapsto [...]$.

On pourra aussi utiliser le symbole $\dfrac{\partial}{\partial \heartsuit}$ pour signifier la dérivation partielle d'une expression par rapport à la variable $\heartsuit$, toutes les autres variables étant considérées comme fixées.

Exemple 3.1.5.
Avec $h\ :\ (x,y)\mapsto x^2\mathrm{e}^{-x+y^2}$, définie sur $\mathbb{R}^2$, on a pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = (2x-x^2)\mathrm{e}^{-x+y^2},$$
$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 2x^2y\mathrm{e}^{-x+y^2}.$$

Une fonction de deux variables peut être dérivable par rapport à chacune de ses deux variables, sans pour autant être continue.

Par exemple, la fonction définie par

$$h\ :\ (x,y)\mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad x=y=0 \end{cases}$$

admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$, mais n'est pas continue.

La dérivabilité par rapport à chacune des variables est élémentaire, la non continuité en 0 découle par exemple du fait que pour tout $x\in\mathbb{R}^*$,

$$h(x,x) = \frac{1}{2}.$$

Il suffit ensuite prendre x suffisamment petit pour nier la continuité de h.

Définition 3.1.6.
Toujours avec les mêmes notations, et avec $k\in\mathbb{N}^*$, on dit que la fonction h est ***dérivable k fois en un point*** (x_0,y_0) ***par rapport à sa première variable*** si la fonction partielle $h_1\ :\ x\mapsto h(x,y_0)$ est dérivable k fois en x_0. On note alors

$$\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x_0,y_0) = h_1^{(k)}(x_0).$$

La fonction h est dite ***dérivable k fois par rapport à sa première variable sur*** U si elle l'est en tout point de U.

De même, on dit que la fonction h est ***dérivable k fois en un point*** (x_0,y_0) ***par rapport à sa deuxième variable*** si la fonction partielle $h_2\ :\ y\mapsto h(x_0,y)$ est dérivable k fois en y_0. On note alors

$$\frac{\partial^k h}{\partial y^k} = h_2^{(k)}(y_0).$$

La fonction h est dite ***dérivable k fois par rapport à sa deuxième variable sur*** U si elle l'est en tout point de U.

Remarque 3.1.7.
$\dfrac{\partial^0 f}{\partial x^0}$ n'est autre que f, et $\dfrac{\partial^1 f}{\partial x^1}$ n'est autre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. Même chose en dérivant par rapport à y.

3.2 Dérivation par domination

Reprenons les notations de ce chapitre concernant A, I, f et F.

Théorème 3.2.1 (Théorème de dérivation)**.**
Si

(i) pour tout $t\in I$, $x\mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A ;

(ii) pour tout $x\in A$, $t\mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I ;

(iii) pour tout $x\in A$, $t\mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;

(iv) il existe une fonction φ intégrable sur I telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$ on a $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$,

alors la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A et vérifie :

$$\forall x \in A,\ F(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 3.2.2.
Là encore l'hypothèse (iv) peut être remplacée par une hypothèse sur tout segment : « pour tout segment K inclus dans I il existe une fonction φ_K intégrable sur K telle que pour tout $(x,t) \in A \times K$ on a $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$ ».
Le reste de l'énoncé, en particulier la conclusion, restent exactement les mêmes.

Démonstration.
Cette démonstration n'est pas exigible.
On note φ une fonction dominant les $\dfrac{\partial f}{\partial x}$:

$$\forall x \in A,\ \forall t \in I,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$$

et φ intégrable sur I.
Soit $x_0 \in A$, pour h un réel suffisament petit, notons $\delta(h) = \left|F(x_0+h) - F(x) - h\displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,\mathrm{d}t\right|$. Alors

$$\delta(h) = \left|\int_I \left(f(x_0+h,t) - f(x_0,t) - h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right)\mathrm{d}t\right|.$$

Or $f(x_0+h,t) - f(x_0,t) = \displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} \frac{\partial f}{\partial x}(y,t)\,\mathrm{d}y$. Donc :

$$\delta(h) \leqslant \int_I \left|\int_{x_0}^{x_0+h} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(y,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right)\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}t.$$

Soit alors (h_n) une suite ne s'annulant pas et convergeant vers 0, on peut écrire $\dfrac{\delta(h_n)}{|h_n|} \leqslant \displaystyle\int_I a_n(t)\,\mathrm{d}t$ avec $a_n(t) = \dfrac{1}{|h_n|}\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h_n} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(y,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right|\mathrm{d}y$.

On a par inégalité triangulaire $|a_n(t)| \leqslant 2\varphi(t)$ et, pour tout t, $(a_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 par continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. On applique alors le théorème de convergence dominée, qui permet de conclure que $\dfrac{\delta(h_n)}{|h_n|}$ converge vers 0. La caractérisation des limites par les suites, puis la définition de la dérivée permettent de conclure. □

Exemple 3.2.3.
Un exemple de transformée de Fourier : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $\hat{f}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{ixt}\,\mathrm{d}t$. Nous avons vu dans l'exemple **2.1.3** que $\hat{f}$ était bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Si l'on note $u : (x,t) \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{ixt}$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto u(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -it\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{ixt}$. De plus pour tout $x,t \in \mathbb{R}$, $\left|\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant t\mathrm{e}^{-t^2}$, qui est intégrable sur $\mathbb{R}$ – c'est un $o(1/t^2)$ en $\pm\infty$.
Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto u(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, et intégrable, car elle ausi est un $o(1/t^2)$ en $\pm\infty$.
Par conséquent le théorème de dérivation assure que $\hat{f}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et $\hat{f}'(x) = i\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{ixt}\,\mathrm{d}t$.
Nous pouvons calculer cette intégrale par intégration par parties ;

$$\begin{aligned}\hat{f}'(x) &= i\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{ixt}\right]_{-\infty}^{+\infty} - i\int_{-\infty}^{+\infty} -ix\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{ixt}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{2}x\hat{f}(x).\end{aligned}$$

Par résolution de cette équation différentielle du premier ordre, il existe donc $k \in \mathbb{R}$ tel que $\hat{f} : x \mapsto k\mathrm{e}^{-x^2/4}$.
Or $\hat{f}(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t (= \sqrt{\pi})$. Donc $\hat{f} : x \mapsto \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-x^2/4}$.

3.3 Dérivées d'ordres supérieurs

Théorème 3.3.1 (classe $\mathscr{C}^k$).
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si

(i) f admet des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \ldots, \dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}$;

(ii) pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I ;

(iii) pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;

(iv) pour tout $t \in I$, $x \mapsto \dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)$ est continue sur A ;

(v) il existe une fonction φ intégrable sur I telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$ on a $\left|\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$,

alors la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur A et vérifie :

$$\forall\, k \in [\![1, n]\!]\, \forall\, x \in A,\ F^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 3.3.2.
Là encore l'hypothèse (v) peut être remplacée par une hypothèse sur tout segment : « pour tout segment K inclus dans I il existe une fonction φ_K intégrable sur K telle que pour tout $(x,t) \in A \times K$ on a $\left|\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$ ». Le reste de l'énoncé, en particulier la conclusion, restent exactement les mêmes.

Démonstration.
Le résultat se démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ à partir du théorème **3.2.1**, qui traite le cas $n = 1$.
Supposons le résultat vrai à un rang $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit f vérifiant les cinq hypothèses de l'énoncé.
Le point central est de repasser par un segment $[a,b] \subset A$, et d'écrire que pour tout $(x,t) \in [a,b] \times I$,

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) = \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(a,t) + \int_a^x \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}}(y,t)\,\mathrm{d}y,$$

d'où l'on tire

$$\left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| \leqslant \left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(a,t)\right| + (b-a)\varphi(t).$$

On pose alors $\psi(t) = \left|\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(a,t)\right| + (b-a)\varphi(t)$, qui est intégrable sur $[a,b]$ car φ l'est et car $\left|\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}\right|$ est continue sur le segment $[a,b]$.
Par hypothèse de récurrence, F est donc de classe $\mathscr{C}^n$ sur A et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $F^{(k)}(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\,\mathrm{d}t$.
Les hypothèses vérifiées par f au rang $(n+1)$ assurent que $F^{(n)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, et $(F^{(n)})'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}}(x,t)\,\mathrm{d}t$.
Il en vient la propriété au rang $(n+1)$, et le résultat voulu par principe de récurrence. □

Exercice 3.3.3.
Montrer que $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

4 Exercices classiques

4.1 La fonction Γ (banque CCINP MP)

On pose : $\forall\, x \in]0, +\infty[$, $\forall\, t \in]0, +\infty[$, $f(x,t) = \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}$.

1. Démontrer que : $\forall\, x \in]0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

   On pose alors : $\forall\, x \in]0, +\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\mathrm{d}t$.

2. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.
3. Démontrer que Γ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

4.2 Produit de convolution

On note E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}, 2\pi$ périodiques, à valeurs complexes. On munit E de la norme N_∞.

On étudie la loi $*$ qui, à deux fonctions f et g de E, fait correspondre la fonction $f*g$ définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ (f*g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

et appelée ***produit de convolution*** de f et g.

1. Montrer qu'une fonction continue périodique est bornée.
2. Démontrer que la fonction $f*g$ est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, bornée et égale à la fonction $g*f$.
3. Donner un majorant de $N_\infty(g*f)$ en fonction de $N_\infty(f)$ et $N_\infty(g)$.
4. Démontrer que $*$ est une loi de composition interne sur E.
5. Soit $k,l \in \mathbb{Z}$, $e_k\ : t \mapsto \mathrm{e}^{ikt}$ et $e_l\ : t \mapsto \mathrm{e}^{ilt}$. Calculer $e_k * e_l$.

4.3 L'intégrale de Gauss

Soient $f(x) = \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$ et $g(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$et déterminer leur dérivée.
2. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, on a $f(x)+g(x) = \frac{\pi}{4}$.
3. En déduire $I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

4.4 Transformée de Laplace et intégrale de Dirichlet

On utilisera directement ici que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

On définit, si $s \in \mathbb{R}_+$,

$$F(s) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}$, et est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Calculer $F(s)$ pour $s \in \mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que F est continue en 0.
4. Déduire de ce qui précède la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.