Dupré Nicolas PSI*

Exercice 49:

1/ Soit $x \in \mathbb{R}$

→ Si $x < 0$, par croissances comparées : $u_n(x) = \dfrac{x\, e^{\overbrace{-nx}^{>0}}}{\ln(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$

donc $\sum_{n \geq 2} u_n(x)$ diverge grossièrement.

→ Si $x \geq 0$, $n^2 u_n(x) = \dfrac{n^2 x e^{-nx}}{\ln(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ par croissances comparées

donc $u_n(x) = \underset{n \to +\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc par comparaison à une série de Riemann, $\sum_{n \geq 2} u_n(x)$ converge

Ainsi $\boxed{D = \mathbb{R}_+}$

2/ Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

u_n est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$ et : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $u_n'(x) = \dfrac{1}{\ln(n)}\left(e^{-nx} - nx e^{-nx}\right)$

$= \underbrace{\dfrac{e^{-nx}}{\ln(n)}}_{>0} (1 - nx)$

x	0		$\frac{1}{n}$		$+\infty$
$u_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$u_n(x)$		↗	$\frac{1}{n\, e \ln(n)}$	↘	

$u_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{\frac{1}{n} e^{-\frac{n}{n}}}{\ln(n)} = \dfrac{1}{e\, n \ln(n)}$

et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\forall n \geq 2$, $u_n(x) \geq 0$

donc $\| u_n(x) \|_\infty^{\mathbb{R}_+} = \dfrac{1}{n\, e \ln(n)}$

1/n^2 = o(1/neln(n)), ce qui ne prouve absolument rien du tout.
C'est une série de Bertrand divergente (comparaison série/intégrale pour le montrer)

On a $n^2 \times \dfrac{1}{n e \ln(n)} = \dfrac{n}{e \ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ par croissances comparées

donc par comparaison à une série de Riemann, $\sum_{n\geq 2} \|u_n(x)\|_{\mathbb{R}_+}$ diverge

et donc $\boxed{\sum_{n\geq 2} u_n(x) \text{ ne converge pas normalement sur } \mathbb{R}_+}$

3/ Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ et $x \in \mathbb{R}_+$

On a :

→ Si $x>0$: $|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right|$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k(x)|$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x e^{-kx}}{\ln(k)}$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x (e^{-x})^k}{\ln(n+1)}$$

$$\leq \frac{x}{\ln(n+1)} \sum_{k=n+1}^{+\infty} (e^{-x})^k$$

$$\leq \frac{x}{\ln(n+1)} \frac{e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}}$$ car $x>0$ donc $e^{-x}<1$

$$\leq \frac{1}{\ln(n)} \times \frac{x e^{-x}}{1-e^{-x}}$$

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x e^{-x}}{1-e^{-x}} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \dfrac{e^{-x}(1-x)(1-e^{-x}) - x e^{-x} e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$

$$= \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}\left[1 - e^{-x} - x + x e^{-x} - x e^{-x}\right]$$

$$= \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}\left(1 - e^{-x} - x\right)$$

Soit $g : x \mapsto 1 - e^{-x} - x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g'(x) = e^{-x} - 1 < 0$

donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

De plus $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$

donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) < 0$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \underbrace{\dfrac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}}_{>0} \underbrace{(1 - e^{-x} - x)}_{<0}$

donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) \leq \lim\limits_{x \to 0} f(x)$

Or $\dfrac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} = \dfrac{xe^{-x}}{1-(1-x+\underset{x\to 0}{o}(x))}$

$= \dfrac{x e^{-x}}{x + \underset{x \to 0}{o}(x)}$

$\underset{0}{\sim} e^{-x}$

$\underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) \leq 1$

et ainsi $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ |R_n(x)| \leq \dfrac{1}{\ln(n)} \times 1 = \dfrac{1}{\ln(n)}$

$\rightarrow$ Si $x = 0$, $|R_n(x)| = 0 \leq \dfrac{1}{\ln(n)}$

Ainsi : $\boxed{\forall n \geq 2,\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ |R_n(x)| \leq \dfrac{1}{\ln(n)}}$

4/ $\rightarrow \sum\limits_{n \geq 2} u_n(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ selon 1/

et $\|R_n(x)\|_\infty^{\mathbb{R}_+} \leq \dfrac{1}{\ln(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+$
Ainsi $\sum_{n\geq 2} u_n(x)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$

et pour tout $n\geq 2$, $x\in\mathbb{R}_+$, $u_n(x)$ est continue
Donc par théorème de continuité, $\boxed{S(x)=\sum_{n\geq 2}^{+\infty} u_n(x) \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+}$

→ Soit $n\geq 2$ et $x\in\mathbb{R}_+$

- $u_n(x) = \dfrac{x e^{-nx}}{\ln(n)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$

  et $x^2 |u_n(x)| \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées donc $|u_n(x)| \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

  Donc par comparaison à une intégrale de Riemann u_n est intégrable en $+\infty$ et donc u_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$
- $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge simplement vers S et S est continue sur $\mathbb{R}_+$
- $$\sum_{n\geq 2} \int_0^{+\infty} |u_n(x)|\,dx = \sum_{n\geq 2} \int_0^{+\infty} \left|\frac{x e^{-nx}}{\ln(n)}\right| dx$$
  $$= \sum_{n\geq 2} \frac{1}{\ln(n)} \int_0^{+\infty} x e^{-nx}\,dx$$

On $x \times \left(\dfrac{-1}{n}\right) e^{-nx} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées

et $x \mapsto x$ et $x \mapsto \dfrac{-1}{n} e^{-nx}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$
donc par intégration par parties :
$$\int_0^{+\infty} x e^{-nx} = \left[\frac{-x e^{-nx}}{n}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} e^{-nx}\,dx$$
$$= 0 + \frac{1}{n}\left[-\frac{1}{n} \times e^{-nx}\right]_0^{+\infty}$$
$$= \frac{1}{n^2}$$

donc $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \int_0^{+\infty} |u_n(x)|\,dx = \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2 \ln(n)}$

et $n^2 \times \frac{1}{n^2 \ln(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc par comparaison avec une série de Riemann

$\sum_{n \geq 2} \int_{\mathbb{R}_+} |u_n|$ converge

Ainsi par théorème d'intégration, $\boxed{S \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+}$