Exercices à préparer
(59 et 36)

Exercice 59

1) f est bornée sur $\mathbb{R}$, il existe donc $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq M$

donc, pour tout $x, t \in \mathbb{R}^2$
$$|e^{-|t|} f(x-t)| \leq M e^{-|t|}$$

Or $t \mapsto M e^{-|t|}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$
($t^2 M e^{-|t|} \underset{\substack{t \to +\infty \\ t \to -\infty}}{\longrightarrow} 0$ donc $M e^{-|t|} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$)

$\boxed{\text{Par comparaison } t \mapsto e^{-|t|} f(x-t) \text{ est intégrable sur } \mathbb{R} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ donc } g \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$

Soit $x \in \mathbb{R}$
On pose ensuite $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$t \mapsto x - t$
φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

On applique donc le changement de variable suivant :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} f(x-t)\,dt = \int_{+\infty}^{-\infty} - e^{-|x-t|} f(t)\,dt = \cancel{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-t)} g(t)\,dt}$$

donc

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-t|} f(t)\,dt$$

$\forall t \in \mathbb{R}$ tel que $t \neq x$

~~infractmot~~

· ~~il existe~~ $\dfrac{\partial e^{-|x-t|}}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 e^{-|x-t|}}{\partial x^2}$ existent

vraiment pas clair avec le pb x=t
il vaut mieux couper l'intégale en 2, 1 de x à +inf, l'autre de -inf à x, et dériver les 2 séparément. Elles se recollent très bien à la fin

$\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t) e^{-|t-x|}$ et $t \mapsto f(t) \dfrac{\partial e^{-|t-x|}}{\partial x}$

sont intégrables sur $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ (d'après question 1)

– $\forall x \in \mathbb{R}$ $t \mapsto \dfrac{\partial^2 e^{-|t-x|}}{\partial x^2} f(t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R} \setminus \{x\}$

$\forall t \in \mathbb{R}$ $x \mapsto \dfrac{\partial^2 e^{-|t-x|}}{\partial x^2} f(t)$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{t\}$

– $\forall x, t \in \mathbb{R}^2$ tq $x \neq t$ $\left| \dfrac{\partial^2 e^{-|t-x|}}{\partial x^2} f(t) \right| \leq f(t)$

et $f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$

$$\boxed{\text{Finalement, on a bien } g \in \mathcal{C}^2}$$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-x|} f(t)\,dt$$

oui !

$$\text{donc } g(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-|t-x|} f(t)\,dt + \int_{x}^{+\infty} e^{-|t-x|} f(t)\,dt$$

Or $\forall x, t \in \mathbb{R}^2$

si $t < x$, $e^{-|t-x|} = e^{-x+t}$

si $t > x$ $e^{-|t-x|} = e^{-t+x}$

$$\text{donc } g(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-x+t} f(t)\,dt + \int_{x}^{+\infty} e^{-t+x} f(t)\,dt$$

On note $I_1(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-x+t} f(t)dt$

$$I_2(x) = \int_{x}^{+\infty} e^{x-t} f(t)dt$$

I_1 et I_2 sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ d'après la question 1.

D'après le théorème fondamental de l'analyse :
$\forall x \in \mathbb{R}$

$$I_1'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} -e^{-x+t} f(t)dt + e^{0} f(x) - \lim_{t \to -\infty} e^{-x+t} f(t)$$

Or f est borné donc $\lim_{t \to -\infty} e^{-x+t} f(t) = 0$

donc : $\forall x \in \mathbb{R} \quad I_1'(x) = \cancel{-g(x)} + f(x) - I_1(x)$

de la même façon :

$\forall x \in \mathbb{R}, \ I_2'(x) = I_2(x) - f(x)$

donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \ g'(x) = I_1'(x) + I_2'(x) = -I_1(x) - f(x) + f(x) + I_2(x)$

donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \ g'(x) = I_2(x) - I_1(x)$

donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \ g''(x) = I_2'(x) - I_1'(x)$

$$g''(x) = I_2(x) - f(x) - f(x) + I_1(x)$$
$$g''(x) = (I_2(x) + I_1(x)) - 2f(x)$$
$$g''(x) = g(x) - 2f(x)$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \mathbb{R}, \ g''(x) = g(x) - 2f(x)}$$