Exercice 82 :

On note :

. $\forall i \in [\![1, n]\!]$, T_i : " le trésor est dans le coffre n° i. "

. C : " un trésor est caché dans un des n coffres "

On cherche $P(T_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{T_i})$

Avec la formule de Bayes on a :

$$P(T_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{T_i}) = \frac{P(\bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{T_i} | T_n) P(T_n)}{P(\bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{T_i})}$$

. $P(\bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{T_i} | T_n) = 1$ car si le trésor est dans le n-ième coffre, il est dans aucun des n-1 premiers

. $P(T_n)$: $(C, \overline{C})$ est un sce donc avec la formule des probas totales on a :

$$P(T_n) = P(T_n \cap C) + P(T_n \cap \overline{C})$$
$$= p \frac{1}{n} + 0$$

. De même on a

$$P(\bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{T_i}) = P(\bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{T_i} \cap \overline{C}) + P(\bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{T_i} \cap C)$$

$$= P(\bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{T_i} \cap \overline{C}) + \sum_{k=1}^{n} P(\bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{T_i} \cap T_k)$$

Or $\forall k \in [\![1; n-1]\!]$, $P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{T_i} \cap T_k\right) = 0$

Alors :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{T_i}\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{T_i} \cap \overline{C}\right) + P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{T_i} \cap T_n\right)$$

$$= (1-p) + p\,\frac{1}{n}.$$

Finalement :

$$\boxed{P\left(T_n \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{T_i}\right) = \frac{p}{n-(n-1)p}}$$