

V – Espaces vectoriels normés

I. Produit d'espaces vectoriels normés

Soit $(x_1, \dots, x_p), (y_1, \dots, y_p) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- La positivité de N est évidente.

•

$$\begin{aligned} N(\lambda(x_1, \dots, x_p)) &= N(\lambda x_1, \dots, \lambda x_p) = \max_{1 \leq k \leq p} N_k(\lambda x_k) \\ &= \max_{1 \leq k \leq p} |\lambda| N_k(x_k) = |\lambda| \max_{1 \leq k \leq p} N_k(x_k) \\ &= |\lambda| N(x_1, \dots, x_p) \end{aligned}$$

- En utilisant la norme $\|\cdot\|_\infty$ de \mathbb{R}^p , nous avons :

$$\begin{aligned} N((x_1, \dots, x_p) + (y_1, \dots, y_p)) &= \max_{1 \leq k \leq p} N_k(x_k + y_k) \\ &\leq \max_{1 \leq k \leq p} [N_k(x_k) + N_k(y_k)] \\ &\leq \|(N_1(x_1), \dots, N_p(x_p)) + (N_1(y_1), \dots, N_p(y_p))\|_\infty \\ &\leq \|(N_1(x_1), \dots, N_p(x_p))\|_\infty + \|(N_1(y_1), \dots, N_p(y_p))\|_\infty \\ &\leq \max_{1 \leq k \leq p} [N_k(x_k)] + \max_{1 \leq k \leq p} [N_k(y_k)] \\ &\leq N(x_1, \dots, x_p) + N(y_1, \dots, y_p). \end{aligned}$$

- Si $N(x_1, \dots, x_p) = 0$, alors pour tout k , $0 \leq N_k(x_k) \leq N(x_1, \dots, x_p) = 0$. Donc $N_k(x_k) = 0$ et ainsi $x_k = 0$ et $(x_1, \dots, x_p) = 0$.

Avec tous ces points, N est bien une norme.

II. Comparaison de deux normes

- 1) On a bien sûr $N_1, N_2 : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}_+$.

•

$$\begin{aligned} N_1(P + Q) &= \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0) + Q^{(k)}(0)| \\ &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| + |Q^{(k)}(0)| \\ &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| + \sum_{k=0}^{+\infty} |Q^{(k)}(0)| \\ &= N_1(P) + N_1(Q). \end{aligned}$$

$$\bullet N_1(\lambda P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |\lambda P^{(k)}(0)| = |\lambda| \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| = |\lambda| N_1(P).$$

$$\bullet N_1(P) = 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, P^{(k)}(0) = 0, \text{ or } P = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k \text{ donc } P = 0.$$

Finalement N_1 est une norme.

•

$$\begin{aligned} N_2(P + Q) &= \sup_{t \in [-1, 1]} |P(t) + Q(t)| \\ &\leq \sup_{t \in [-1, 1]} |P(t)| + |Q(t)| \\ &\leq \sup_{t \in [-1, 1]} |P(t)| + \sup_{t \in [-1, 1]} |Q(t)| \\ &= N_2(P) + N_2(Q). \end{aligned}$$

$$\bullet N_2(\lambda P) = \sup_{t \in [-1, 1]} |\lambda P(t)| = \sup_{t \in [-1, 1]} |\lambda| |P(t)| = |\lambda| \sup_{t \in [-1, 1]} |P(t)| = |\lambda| N_2(P).$$

$$\bullet N_2(P) = 0 \Rightarrow \forall t \in [-1, 1], P(t) = 0 \text{ et par infinité de racines, } P = 0.$$

- 2) La suite $\frac{1}{n} X^n$ converge vers 0 pour N_2 mais n'est pas bornée et donc diverge pour N_1 .

- 3) Les normes ne peuvent être équivalentes car sinon les suites convergeant pour l'une des normes convergerait pour l'autre.

III. Opérations sur les convexes

- Réunion finie et infinie : non, par exemple $[-2, -1] \cup [1, 2]$.
- Intersection finie et infinie : oui, revenir à la définition.

IV. Limite d'une suite de matrices

$$(A^n)^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P^2 \text{ mais aussi } (A^n)^2 = A^{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P \text{ donc } P = P^2.$$

V. Norme d'algèbre sur les matrices et convergence d'une suite

- 1) Le tout est de remarquer que cette fonction correspond au produit scalaire usuel. Notons $A = (a_{ij})$, $A^\top = (c_{ij})$, et $B = (b_{ij})$.

$$\text{Alors } \text{tr}(A^\top B) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n c_{ik} b_{ki} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ki} b_{ki} \right) : \text{c'est bien l'expression}$$

du produits scalaire usuel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associé à la base canonique.

Vérifions que $\varphi(A, B) = \text{tr}(A^\top B)$ est bien un produit scalaire :

Soit $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $\varphi(B, A) = \text{tr}(B^\top A) = \text{tr}((B^\top A)^\top) = \text{tr}(A^\top B) = \varphi(A, B)$;
- Pour on a $\text{tr}((A + \lambda B)^\top C) = \text{tr}(A^\top C + B^\top C) = \text{tr}(A^\top C) + \text{tr}(B^\top C)$ donc φ est linéaire par rapport à la première variable. Par symétrie elle est donc bilinéaire ;
- $\varphi(A, A) = \sum_{i,j} a_{ij}^2 \geq 0$ avec égalité si et seulement si tous les a_{ij} sont nuls,

i.e. $A = 0$.

- 2) Grâce à la question précédente, la norme associée à φ est la norme euclidienne usuelle associée à la base canonique.

Avec $A_{*,j}$ la colonne j de A , $A_{i,*}$ la ligne i de A et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur \mathbb{R}^n , on a

$$N(A)^2 = \sum_{i=1}^n \|A_{i,*}\|^2 = \sum_{j=1}^n \|A_{*,j}\|^2.$$

Si $x \in \mathbb{R}^n$, on a alors par l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur \mathbb{R}^n :

$$\|Ax\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle A_{i,*}, x \rangle^2 \leq \sum_{i=1}^n \|A_{i,*}\|^2 \|x\|^2 = N(A) \|x\|^2$$

Alors,

$$N(AB) = \sum_{j=1}^n \|(AB)_{*,j}\|^2 = \sum_{j=1}^n \|A \times B_{*,j}\|^2 \leq \sum_{j=1}^n N(A) \|B_{*,j}\|^2 = N(A) N(B).$$