Devoir surveillé n° 1

Durée : 4 heures, calculatrices et documents interdits

I. Approximation d'une intégrale polynomiale par une suite d'applications linéaires

A. Étude de deux applications

La notation $\mathbb{R}_2[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. On identifiera dans la suite de ce problème les éléments de $\mathbb{R}_2[X]$ et leurs fonctions polynomiales associées. On note $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On définit les deux applications suivantes :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & \dfrac{1}{2}\left[P\left(\dfrac{X}{2}\right) + P\left(\dfrac{X+1}{2}\right)\right] \end{array}$$

et

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(1) \end{array}$$

On rappelle aussi que l'on note $f^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = f \circ f^{n-1}$.

1) Vérifier que f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$ et montrer que f est linéaire.

2) Montrer que φ est linéaire.

3) Écrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$, en indiquant les calculs intermédiaires.

4) L'application f est-elle injective ? surjective ?

5) Déterminer une base de $\operatorname{Ker}\varphi$. Quelle est la dimension de $\operatorname{Ker}\varphi$?

6) L'application φ est-elle injective ? surjective ?

B. Calcul des puissances successives d'une matrice

On note I_3 la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Enfin, on note $\mathscr{B}'$ la famille de $\mathbb{R}_2[X]$ définie par

$$\mathscr{B}' = (1, -2X+1, 6X^2 - 6X + 1).$$

7) Justifier que la famille $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

8) Écrire la matrice de passage Q de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

9) Justifier que Q est inversible et calculer son inverse.

10) Écrire la matrice M de f dans la base $\mathscr{B}'$ en donnant les calculs intermédiaires.

11) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On explicitera les neufs coefficients de A^n.

12) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $P = a + bX + cX^2$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $f^n(P)$ en fonction de a, b, c.

13) En déduire que

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \ \lim_{n \to +\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t) \ \mathrm{d}t$$

C. Une autre preuve du résultat précédent

14) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ f^n(P) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n - 1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right).$$

15) En déduire, en utilisant un résultat du cours d'analyse que l'on énoncera avec précision, que

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \ \lim_{n \to +\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t) \ \mathrm{d}t.$$

II. Suite récurrente définie par une équation

Pour chaque $p \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation

$$x^p + x^{p-1} + \ldots + x^2 + x = 1 \qquad (\mathscr{E}_p)$$

1) **a)** Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'équation $(\mathscr{E}_p)$ possède une unique solution positive x_p.

b) Justifier que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $x_p \in]0, 1]$ et que l'on a la relation $x_p(1 - x_p^p) = 1 - x_p$.

c) Établir que la suite (x_p) est décroissante puis convergente.

d) Établir que $x_p^p \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$ et en déduire la limite de (x_p).

2) On écrit $x_p = \dfrac{1}{2}(1 + \varepsilon_p)$ avec $\varepsilon_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$ (c'est-à-dire que l'on pose $\varepsilon_p = 2x_p - 1$).

a) Montrer que $(1 + \varepsilon_p)^{p+1} = 2^{p+1}\varepsilon_p$.

b) Établir la relation $(p + 1)\varepsilon_p \ln(1 + \varepsilon_p) = (p + 1)\varepsilon_p \ln 2 + \varepsilon_p \ln \varepsilon_p$.

c) Déterminer alors la limite de $(p + 1)\varepsilon_p$ puis celle de $(1 + \varepsilon_p)^{p+1}$.

d) En déduire un équivalent simple de (ε_p).

3) Dans cette question on suppose $p = 2$, et par commodité on pose $\alpha = x_2$.

On considère la fonction $f \ : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x+1} \end{array} \right.$ et la suite récurrente réelle (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

- **a)** Simplifier $f(\alpha)$.
- **b)** Montrer que $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ est stable par f. Quelles conséquences cela a-t-il sur la suite (u_n) ?
- **c)** Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{2}{3} |u_n - \alpha|$.
- **d)** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ et déterminer la limite de la suite (u_n).

4) Dans cette question on pose $\beta = x_3$.

On introduit la fonction $g \ : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x^2+x+1} \end{array} \right.$ et on considère la suite récurrente réelle (v_n) définie par $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = g(v_n)$.

- **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in [0, 1]$.
- **b)** **Démontrer** que (v_{2n}) est décroissante et que (v_{2n+1}) est croissante, puis montrer que ces deux suites convergent.
- **c)** On pose $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} v_{2n}$ et $\ell' = \lim\limits_{n \to +\infty} v_{2n+1}$.
  Montrer que $g(\ell) = \ell'$ et $g(\ell') = \ell$.
- **d)** En déduire que ℓ est solution de l'équation $(\ell^2+1)(\ell^3+\ell^2+\ell-1) = 0$.
- **e)** Conclure que $\ell = \beta = \ell'$ puis déterminer la nature de (v_n).

— FIN —