Semaine 3 du 29 septembre 2025 (S40)

II Séries numériques

1. Rappel sur les sommes finies et les sommes doubles

1.1. Propriétés des sommes finies

1.2. Formules usuelles

1.3. Sommes doubles

2. Premières définitions sur les séries

3. Séries réelles à termes positifs

3.1. Propriété fondamentale

3.2. Outils de comparaison

3.3. Séries de Riemann

4. Comparaison série - intégrale

4.1. Principe

4.2. Cas d'une fonction croissante

4.3. Estimation du reste dans le cas de convergence

5. Séries complexes et convergence absolue

5.1. Résultats généraux

5.2. Séries alternées

5.3. Comparaison logarithmique et règle de d'Alembert

6. Formule de Stirling

Démonstration non exigible.

7. Produit de Cauchy

Démonstration non exigible.

8. Exercices à connaître

8.1. Révision sur les suites : le théorème de Césaro

On considère une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de nombres réels ou complexes. On définit la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ par

$$v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$$

1) On suppose que la suite (u_n) converge vers 0. Montrer que la suite (v_n) converge vers 0 .
Indication : soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un rang N tel que, si $n \geqslant N, |v_n| \leqslant \varepsilon$. Pour cela, couper v_n en deux morceaux.

2) On suppose que la suite (u_n) converge. Montrer que la suite (v_n) converge, et a même limite que (u_n). C'est le théorème de Césaro.

3) Montrer que la réciproque est fausse.

On montrerait avec les mêmes outils que si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, v_n aussi.

8.2. Révision sur les suites : irrationalité de e

On définit la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

1) En introduisant la suite de terme général $v_n = u_n + \dfrac{1}{n!}$, montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite que l'on notera ℓ

2) Montrer que ℓ est irrationnel. On pourra raisonner par l'absurde, et encadrer ℓ par u_n et v_n pour n bien choisi.

8.3. Série harmonique et constante d'Euler

On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la suite $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.

L'objectif est de montrer que (u_n) converge. Sa limite est appelée ***constante d'Euler*** et notée γ.
Nous allons employer deux méthodes.

8.3a. Comparaison série-intégrale et série télescopique

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1) Montrer que $H_n \sim \ln n$.

2) Montrer que $u_{n+1} - u_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

3) On pose pour tout $n > 0$, $v_n = u_{n+1} - u_n$. Donner la nature de $\sum v_n$ et conclure.

8.3b. Deux suites adjacentes

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $w_n = u_n + \ln n - \ln(n+1)$. Montrer que (u_n) et (w_n) sont adjacentes et conclure.

8.4. Une décomposition de somme

Soit $k > 1$; on note $S_k = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k}$ et $T_k = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^k}$. Calculer T_k en fonction de S_k.

8.5. Natures de deux séries

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ et $v_n = \dfrac{u_n}{S_n}$. L'objectif est de comparer la nature de $\sum u_n$ et $\sum v_n$.
On pourra traiter les cas où $\sum u_n$ converge ou diverge, et dans ce dernier étudier la série de terme général $w_n = \ln\left(1 - \dfrac{u_n}{S_n}\right)$ pour $n \geqslant 1$.

8.6. Transformation d'Abel

Soit (a_n) une suite positive décroissante de limite nulle et (S_n) une suite bornée.

1) Montrer que la série $\sum (a_n - a_{n+1})S_n$ est convergente.

2) En déduire que la série $\sum a_{n+1}(S_{n+1} - S_n)$ est convergente.

3) Établir que la série $\sum \dfrac{\sin(n)}{n}$ est convergente.
Indication : On pourra commencer par montrer que la suite $\sigma_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin k$ est bornée.

S'y ajoute :

III Rappels et compléments d'algèbre linéaire (2nde partie)

1. Trace d'un endomorphisme, trace d'une matrice

1.1. Définition.

1.2. Linéarité.

1.3. Propriété fondamentale de la trace.

1.4. Invariance par similitude.

1.5. Trace d'un endomorphisme en dimension finie.

1.6. Propriétés.

1.7. Trace d'un projecteur.

2. Sous-espaces vectoriels stables

2.1. Définitions et premières propriétés

2.2. Stabilité et matrices triangulaires par blocs

3. Déterminant

3.1. Déterminant d'une matrice carrée

3.2. Déterminant « par blocs »

3.3. Déterminant de Vandermonde

4. Polynômes d'endomorphismes

4.1. Définitions

4.2. Polynômes annulateurs

4.3. Exemples d'utilisations d'un polynôme annulateur

5. Interpolation de Lagrange

5.1. Définition du problème

5.2. Polynômes de Lagrange

5.3. Lien avec le déterminant de Vandermonde

6. Exercices à connaître

6.1. Expression et éléments caractéristiques d'un projecteur ou d'une symétrie

1) Donner les éléments caractéristiques de l'application f définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3x & - & y & + & 2z \\ -x & + & 3y & + & 2z \\ x & + & y & + & 2z \end{pmatrix} \end{array} \right. .$$

2) Donner l'expression de la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}(1,0,-1)$ et parallèlement à $\mathrm{Vect}\left((1,2,0),(1,1,-1)\right)$.

6.2. Endomorphismes de rang 1

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1.

1) Montrer qu'il existe $C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $L \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ vérifiant $A = CL$.

2) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que pour tout entier naturel non nul n, $A^n = \alpha^{n-1} A$.

3) Montrer que $A^2 = \operatorname{tr}(A) A$.

4) Après avoir calculé $(1 + \operatorname{tr} A)(A + \mathrm{I}_n) - (1 + \operatorname{tr} A)\mathrm{I}_n$, déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $A + \mathrm{I}_n$ soit inversible. Le cas échéant, déterminer $(A + \mathrm{I}_n)^{-1}$.

6.3. Matrice à diagonale dominante

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ à coefficients diagonaux dominants, c'est-à-dire telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|.$$

Montrer que A est inversible.

6.4. Une caractérisation de la trace

Trouver toutes les formes linéaires f sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant :

$$\forall\, A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ f(AB) = f(BA).$$

Indication : pour deux matrices élémentaires $E_{i,j}$ et $E_{k,\ell}$, calculer le produit $E_{i,j}E_{k,\ell}$.