

# VII. Réduction des endomorphismes et des matrices

5 novembre 2024

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Diagonalisation en dimension finie</b>	<b>3</b>
1.1	Endomorphismes diagonalisables . . . . .	3
1.2	Matrices diagonalisables . . . . .	3
1.3	Pratique de la diagonalisation . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Diagonalisabilité et polynômes annulateurs</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Applications de la diagonalisation</b>	<b>7</b>
3.1	Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable . . . .	7
3.2	Suites récurrentes linéaires simultanées . . . . .	7
3.3	Suites récurrentes linéaires à coefficients constants . . . .	7
3.4	Systèmes différentiels linéaires . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Trigonalisation en dimension finie</b>	<b>9</b>
4.1	Endomorphismes trigonalisables . . . . .	9
4.2	Matrices trigonalisables . . . . .	9
4.3	Trigonalisation et polynômes . . . . .	9
4.4	Deux exemples . . . . .	10
<b>5</b>	<b>Exercices classiques</b>	<b>11</b>
5.1	Deux diagonalisations – bête et méchante et plus théorique	11
5.2	Deux applications de la trigonalisation . . . . .	11
5.3	Diagonalisation simultanée . . . . .	11

5.4	Racine carrée d'une matrice . . . . .	11
-----	---------------------------------------	----

<b>6</b>	<b>Annexe : démonstrations</b>	<b>12</b>
----------	--------------------------------	-----------

# Programme officiel

### c) Diagonalisation en dimension finie

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale.

Une matrice carrée est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Une telle base est constituée de vecteurs propres.

Interprétation en termes d'endomorphisme.

Application au calcul des puissances d'une matrice diagonalisable, à des exemples de systèmes différentiels à coefficients constants.

Dans la pratique des cas numériques, on se limite à  $n = 2$  ou  $n = 3$ .

### Exemple des projecteurs et des symétries.

Traduction matricielle.

Traduction matricielle.

Polynôme caractéristique scindé à racines simples.  
Traduction matricielle.

#### d) Diagonalisabilité et polynômes annulateurs

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

La démonstration n'est pas exigible.

Traduction matricielle.

Le lemme de décomposition des noyaux est hors programme.

L'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace vectoriel stable est diagonalisable.

Un endomorphisme  $u$  est diagonalisable si et seulement s'il admet  $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)$  pour polynôme annulateur.

### e) Trigonalisation en dimension finie

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire.

Expression de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable à l'aide des valeurs propres.

Interprétation en termes d'endomorphisme.

blable à une matrice triangulaire.

Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur  $\mathbb{K}$ .

La démonstration n'est pas exigible.

Traduction matricielle.

La technique générale de trigonalisation est hors programme. On se limite dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication.

Dans ce chapitre,  $E$  désigne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ .

## 1 Diagonalisation en dimension finie

### 1.1 Endomorphismes diagonalisables

**Définition 1.1.1** (Endomorphisme diagonalisable).

Un endomorphisme de  $u \in \mathcal{L}(E)$  est dit **diagonalisable** lorsqu'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale.

**Remarque 1.1.2.**

Une telle base si elle existe est appelée une **base de diagonalisation** de  $u$ .

**Proposition 1.1.3.**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On a équivalence entre les points suivants :

- (i)  $u$  est diagonalisable ;
- (ii) il existe une base de  $E$  constituée de vecteurs propres de  $u$  ;
- (iii)  $E$  est somme directe des sous-espaces propres de  $u$  :  $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$ .

**Démonstration.**

- (i)  $\Rightarrow$  (ii) : soit  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  une base dans la quelle la matrice de  $u$  est diagonale, égale à  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . La « lecture » de cette matrice indique exactement que pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $u(v_i) = \lambda_i v_i$ , et  $\mathcal{B}$  est bien une base de vecteurs propres.
- (ii)  $\Rightarrow$  (iii) : soit  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  une base de vecteurs propres de  $u$ . Soit  $x \in E$ , alors il existe  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$  tels que  $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ . Or tous les  $v_i$  appartiennent à un sous-espace propre, donc  $x$  s'écrit bien comme la somme de vecteurs des différents sous-espaces propres. Comme l'on sait que les sous-espaces propres sont toujours en somme directe, nous avons bien le point (iii).
- (iii)  $\Rightarrow$  (i) : soit  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  une base adaptée à l'écriture  $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$ .

Alors les  $v_i$  sont par définition tous des vecteurs propres (ce qui prouve (ii) au passage), et donc pour tout  $i$  il existe  $\lambda_i \in \mathbb{K}$  tel que  $u(v_i) = \lambda_i v_i$ , et ainsi  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .  $\square$

**Remarque 1.1.4.**

- Puisque les sous-espaces propres de  $u$  sont toujours en somme directe, cette dernière condition est équivalente à  $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim(E_\lambda(u)) = n$ .
- Si  $u$  est diagonalisable dans une base  $\mathcal{B}$ , alors les coefficients diagonaux de  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  sont les valeurs propres de  $u$ .

**Exemple 1.1.5.**

Les homothéties, les projecteurs et les symétries sont des endomorphismes diagonalisables.

**Exercice 1.1.6.** 1. Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ . Montrer que tout sous-espace propre associé à une valeur propre non nulle est inclus dans  $\text{Im}(u)$ .

2. Montrer que tout vecteur propre de  $u$  est dans  $\text{Im}(u)$  ou dans  $\text{Ker}(u)$ .
3. Montrer que pour que  $u$  soit diagonalisable, il est nécessaire que

$$\text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u) = E$$

4. Montrer que si  $E = \mathbb{K}_n[X]$  et  $u : P \mapsto P - P'$ , alors  $\text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u) = E$  mais  $u$  n'est pas diagonalisable.

### 1.2 Matrices diagonalisables

**Définition 1.2.1** (Matrice diagonalisable).

Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est dite **diagonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale.

**Remarque 1.2.2.**

Ainsi  $A$  est diagonalisable si et seulement s'il existe une matrice diagonale  $D$  et une matrice inversible  $P$  telles que  $A = PDP^{-1}$ .

**Proposition 1.2.3.**

Une matrice est diagonalisable si et seulement si sa transposée l'est.

**Démonstration.**

Si  $A = PDP^{-1}$  avec  $P$  inversible et  $D$  diagonale, alors  $A^T = (P^T)^{-1}D^T P^T = QDQ^{-1}$  avec  $Q = (P^T)^{-1}$  qui est bien inversible.  $\square$

**Théorème 1.2.4.**

Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ ,  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ . Alors  $u$  est diagonalisable si et seulement si  $M$  est diagonalisable.

**Démonstration.**

( $\Rightarrow$ ) Soit  $\mathcal{B}'$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = D$  est diagonale. Avec  $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  dans  $\mathcal{B}'$ , nous avons  $M = PDP^{-1}$ , d'où le résultat.

( $\Leftarrow$ ) Soit  $P$  inversible et  $D$  diagonale telle que  $M = PDP^{-1}$ . Il existe une base  $\mathcal{B}'$  de  $E$  telle que  $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ . Alors  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = D$  par changement de base.  $\square$

**Remarque 1.2.5.**

On évitera d'écrire toujours la relation de similitude de la définition 1.2.1 sous la forme  $A = P^{-1}DP$ . En effet, sous la forme  $A = PDP^{-1}$ , la matrice  $P$  s'interprète comme la matrice d'une base de vecteurs propres de  $A$  exprimée dans la base canonique, donc comme la matrice de passage de la base canonique vers une base de vecteurs propres. Elle est donc facile à calculer, et c'est  $P^{-1}$  qui nécessite logiquement des calculs supplémentaires.

De plus, avoir des habitudes de calcul permet d'éviter de s'emmêler les pinces et d'être plus efficace.

### 1.3 Pratique de la diagonalisation

Pour diagonaliser un endomorphisme  $u$  en pratique, il convient de déterminer ses éléments propres. Les résultats théoriques présentés dans les sections qui vont suivre permettent parfois de le faire avec un minimum de calcul.

Si ces résultats ne sont pas suffisants, il faut alors calculer le polynôme

caractéristique et en calculer les racines, afin de déterminer les valeurs propres.

Pour savoir si  $u$  est diagonalisable, il suffit de déterminer les dimensions des sous-espaces propres, et de vérifier si  $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim(E_{\lambda}(u)) = n$  ou pas.

Si l'on veut en plus obtenir une base de diagonalisation, il faut alors déterminer une base de chaque sous-espace propre, et les concaténer.

Dans le cas d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  on procède de la même manière. La base de diagonalisation  $\mathcal{B}$  permet d'obtenir la matrice de passage  $P$  telle que  $A = PDP^{-1}$  où  $D$  est diagonale. Si  $\mathcal{C}$  est la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ , alors  $P = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$ .

Diagonaliser  $A$ , c'est donc déterminer  $D$  et  $P$ . Il n'est en général pas nécessaire de calculer  $P^{-1}$ . La matrice  $D$  est unique à l'ordre près des coefficients diagonaux. La matrice  $P$  n'est pas du tout unique : il existe une infinité de vecteurs propres formant une base.

**Exemple 1.3.1.**

Étudions la diagonalisabilité de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ .

On calcule le polynôme caractéristique de  $A$  :

$$\begin{aligned} \chi_A &= \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X-1 & -4 & -2 \\ 0 & X+3 & 2 \\ 0 & -4 & X-3 \end{vmatrix} \\ &= (X-1)(X^2-1) = (X-1)^2(X+1) \end{aligned}$$

Les valeurs propres de  $A$  sont donc 1 (double) et -1 (simple). On cherche ensuite les sous-espaces propres :

- Pour la valeur propre 1 :  $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ . On remarque que cette matrice est de rang 1, donc  $E_1(A)$  est de dimension 2.

Sa première colonne est nulle donc  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A - I_3)$ . Ensuite, la seconde colonne moins deux fois la troisième vaut 0, donc  $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A - I_3)$ . Ces deux vecteurs sont bien indépendants, et donc finalement  $E_1(A) = \text{Vect}(v_1, v_2)$ .

• Pour la valeur propre  $-1$  : cette valeur propre est simple donc  $\dim E_{-1}(A) = 1$ . De plus  $A + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ . On remarque que  $(1^{\text{ère}} \text{ colonne}) - (2^{\text{ème}} \text{ colonne}) + (3^{\text{ème}} \text{ colonne}) = 0$ , donc  $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A + I_3)$ , et  $E_{-1}(A) = \text{Vect}(v_3)$ .

Les sous-espaces propres étant toujours en somme directe, on peut affirmer que  $(v_1, v_2, v_3)$  est libre, donc c'est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

Alors  $A$  est diagonalisable et  $A = PDP^{-1}$  où  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$  et  $D = \text{diag}(1, 1, -1)$ .

### Exercice 1.3.2.

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ? Si oui, déterminer  $P$  telle que  $A = PDP^{-1}$  avec  $D$  diagonale.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 2 Diagonalisabilité et polynômes annulateurs

**Proposition 2.0.1** (Condition nécessaire de diagonalisabilité).  
Si  $u$  (ou  $A$ ) est diagonalisable, son polynôme caractéristique est scindé.

### Démonstration.

Elle est contenue dans la démonstration du résultat suivant.  $\square$

### Remarque 2.0.2.

Cette condition n'est pas suffisante. Considérons par exemple la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Théorème 2.0.3** (Une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité).

$u \in \mathcal{L}(E)$  (resp.  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ) est diagonalisable si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) son polynôme caractéristique est scindé ;
- (ii) la multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre.

Le dernier point se détaille de la manière suivante : si les valeurs propres sont  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ , et pour tout  $i$  on pose  $m_i = \dim E_{\lambda_i}(u)$ , alors le polynôme caractéristique s'écrit  $\prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{m_i}$ .

### Démonstration.

( $\Rightarrow$ ) Si  $u$  est diagonalisable, il existe une base  $\mathcal{B}$  dans laquelle la matrice de  $u$  est  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Quitte à changer l'ordre des vecteurs de cette base, nous pouvons regrouper les coefficients diagonaux égaux, de sorte que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) =$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{m_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_p I_{m_p} \end{pmatrix} \quad \text{où } p \text{ est le nombre de valeurs propres distinctes et } m_k$$

le nombre de fois où  $\lambda_k$  apparaît sur la diagonale. Alors  $\chi_u = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{m_k}$ , où les  $\lambda_k$  sont donc les valeurs propres deux à deux distinctes, et les  $m_k$  sont leurs multiplicités.

$$\text{Alors } E_{\lambda_1}(u) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (\lambda_2 - \lambda_1)I_{m_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (\lambda_p - \lambda_1)I_{m_p} \end{pmatrix}, \text{ qui est de dimension } m_1$$

car les  $\lambda_k$  sont deux à deux distincts. Le même calcul se fait pour les autres sous-espaces propres.

( $\Leftarrow$ ) Dans ce cas nous avons directement  $\chi_u = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{m_k}$ , où les  $\lambda_k$  sont donc les valeurs propres deux à deux distinctes, et les  $m_k$  sont leurs multiplicités. Par raison

de degré,  $\dim E = n = \sum_{k=1}^p m_k$ . Mais alors par hypothèse  $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim(E_\lambda(u)) = n$ ,

ce qui assure que les sous-espaces propres sont supplémentaires et donc que  $u$  est diagonalisable.  $\square$

#### Exemple 2.0.4.

La matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$  est typiquement non diagonalisable.

#### Exercice 2.0.5.

Quels sont les endomorphismes diagonalisables ayant une seule valeur propre ?

#### Exercice 2.0.6.

On considère la matrice  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  avec  $a_{i,j} = 1$  si  $i = n$  ou  $j = n$ ,  $a_{i,j} = 0$  sinon. Déterminer une base de  $\text{Ker}(A)$  et une base de  $\text{Im}(A)$ . Puis montrer que  $A$  est diagonalisable.

*Retenir que beaucoup de matrices à diagonaliser sont de rang petit, donc ont un noyau de grande dimension. Or le noyau est déjà un sous-espace propre.*

#### Corollaire 2.0.7 (Une condition suffisante de diagonalisabilité).

Si  $u$  (ou  $A$ ) admet  $n$  valeurs propres deux à deux distinctes – ce qui revient à dire que son polynôme caractéristique est scindé à racines simples – alors  $u$  (ou  $A$ ) est diagonalisable.

#### Théorème 2.0.8 (Une seconde condition nécessaire de diagonalisabilité).

Si  $u \in \mathcal{L}(E)$  est diagonalisable, le polynôme  $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)$  est annulateur de  $u$ .

#### Démonstration 1.

Avec des endomorphismes :

Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  les valeurs propres distinctes de  $u$  et  $P = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)$ . Soit  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ .

Pour tout  $x \in E_{\lambda_i}$ , on a  $(u - \lambda_i \text{Id}_E)(x) = 0$ , donc

$$P(u)(x) = \left( \prod_{j=1}^p (u - \lambda_j \text{Id}_E) \right)(x) = \left( \prod_{j \neq i} (u - \lambda_j \text{Id}_E) \right) \circ (u - \lambda_i \text{Id}_E)(x) = 0$$

$u$  étant diagonalisable, on a  $E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$ , et puisque la relation  $P(u)(x) = 0$  est vérifiée pour tout  $x \in E_{\lambda_i}$  pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , elle l'est pour tout  $x \in E$ . Donc  $P(u) = 0$ , i.e  $P$  est annulateur de  $u$ .  $\square$

#### Démonstration 2.

Avec des matrices :

Si  $u$  a pour matrice  $D$  diagonale dans une base de vecteurs propres, chaque matrice  $D - \lambda_i I$  comporte un bloc de zéros à la place des  $\lambda_i$  donc le produit (en le voyant par blocs) de ces matrices est nul.  $\square$

#### Théorème 2.0.9 (Une seconde condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité).

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

**Démonstration.**

- Le sens direct est assuré par le théorème précédent.
- La démonstration du sens indirect n'est pas exigible et figure à la fin de ce chapitre, en annexe.  $\square$

**Corollaire 2.0.10.**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $F$  un sev stable par  $u$ . On note  $v$  l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $F$ .

Alors, si  $u$  est diagonalisable,  $v$  aussi.

**Démonstration.**

Soit  $P$  un polynôme scindé à racines simples annulateur de  $u$ . On écrit  $P = \sum_{k=1}^p a_k X^k$ .

Alors pour tout  $x \in F$  :

$$\begin{aligned} 0 &= P(u)(x) = \sum_{k=1}^p a_k u^k(x) \\ &= \sum_{k=1}^p a_k v^k(x) \quad \text{car } x \in F \\ &= P(v)(x). \end{aligned}$$

Ainsi  $v$  admet un polynôme annulateur scindé à racines simples : il est diagonalisable.  $\square$

**Exercice 2.0.11.**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  diagonalisable et  $F$  un sev de  $E$ . Montrer que  $F$  est stable par  $u$  si et seulement s'il admet une base formée de vecteurs propres de  $u$ .

## 3 Applications de la diagonalisation

### 3.1 Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable

- Première idée : si  $A = PDP^{-1}$  avec  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $A^k = PD^kP^{-1}$ , avec  $D^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$ .
- Seconde idée : en connaissant un polynôme annulateur de  $A$ , on peut exploiter une division euclidienne.

**Exercice 3.1.1.**

Pour  $k \in \mathbb{N}$ , calculer  $A^k$  lorsque  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , avec les deux méthodes.

**Remarque 3.1.2.**

Ces méthodes permettent d'aller plus loin et de calculer, grâce au binôme de Newton, les puissances de  $A$  si  $A$  s'écrit  $A = D + N$  où  $D$  est diagonalisable,  $N$  est nilpotente et  $DN = ND$ . Nous avons déjà vu des exemples de cette méthode dans le cas particulier où  $D$  est diagonale. Si  $D$  n'est que diagonalisable, le calcul des puissances de  $D$  rallonge le calcul de celles de  $A$ .

### 3.2 Suites récurrentes linéaires simultanées

**Exercice 3.2.1.**

Déterminer les suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 1 \\ w_0 = 1 \end{cases} \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n + w_n \\ w_{n+1} = 2u_n + v_n + w_n \end{cases}$$

### 3.3 Suites récurrentes linéaires à coefficients constants

**Définition 3.3.1.**

On dit qu'une suite  $(u_n)_n$  satisfait une **relation de récurrence linéaire d'ordre  $p$  à coefficients constants** s'il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $a_0, a_1, \dots, a_{p-1} \in \mathbb{K}$  des scalaires tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+(p-1)} + \dots + a_1u_{n+1} + a_0u_n$$

On appelle **équation caractéristique** associée à cette relation de récurrence l'équation :

$$r^p = a_{p-1}r^{p-1} + \dots + a_1r + a_0$$

Les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 étudiées en première année rentrent dans ce cadre.

### Proposition 3.3.2.

L'ensemble des suites vérifiant la relation de récurrence linéaire d'ordre  $p$  à coefficients constant est un espace vectoriel de dimension  $p$  sur  $\mathbb{K}$ .

En pratique : on conserve les notations de la définition, et on définit

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & \dots & \dots & a_{p-2} & a_{p-1} \end{pmatrix}.$$

La suite  $(u_n)_n$  vérifie la relation de récurrence précédente si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$$

Par suite, la suite  $(X_n)$  est uniquement déterminée par  $X_0$  et on a par récurrence :

$$X_n = A^n X_0$$

La matrice  $A$  est alors la matrice compagne du polynôme :

$$P = X^p - a_{p-1}X^{p-1} - \dots - a_1X - a_0$$

donc  $\chi_A = P$ . Les racines de l'équation caractéristique sont les valeurs propres de la matrice  $A$ .

### Exemple 3.3.3.

Déterminer la suite définie par :

$$u_0 = 1, u_1 = 1, u_2 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 7u_{n+2} - 14u_{n+1} + 8u_n.$$

## 3.4 Systèmes différentiels linéaires

On s'intéresse au système différentiel :

$$\begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{cases}$$

où les inconnues sont  $x$  et  $y$ , deux fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

Sous forme matricielle il s'écrit  $X' = AX$  avec  $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

Après une étude habituelle de diagonalisation, nous trouvons  $A = PDP^{-1}$  avec  $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

Le système est alors équivalent au nouveau système  $P^{-1}X' = D(P^{-1}X)$ . Nous allons donc poser  $Y = P^{-1}X$ , résoudre le système  $Y' = DY$ , et en déduire  $X = PY$ .

Le système  $Y' = DY$  est simple à résoudre. En effet, si  $Y = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ , il s'écrit tout simplement  $f' = 2f$  et  $g' = 3g$ . Ainsi l'ensemble des solutions est  $\left\{ \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \begin{pmatrix} K_1 e^{2t} \\ K_2 e^{3t} \end{pmatrix}, K_1, K_2 \in \mathbb{R} \right\}$ .

Si  $K_1, K_2, t \in \mathbb{R}$ ,  $P \begin{pmatrix} K_1 e^{2t} \\ K_2 e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1 e^{2t} + 2K_2 e^{3t} \\ K_1 e^{2t} + K_2 e^{3t} \end{pmatrix}$  et donc l'ensemble des solutions de  $X' = AX$  est donc

$$\left\{ \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \begin{pmatrix} K_1 e^{2t} + 2K_2 e^{3t} \\ K_1 e^{2t} + K_2 e^{3t} \end{pmatrix}, K_1, K_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$



## 4 Trigonalisation en dimension finie

### 4.1 Endomorphismes trigonalisables

**Définition 4.1.1** (Endomorphisme trigonalisable).

Un endomorphisme  $u$  de  $E$  est dit **trigonalisable** s'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est triangulaire supérieure. Une telle base est dite **base de trigonalisation** de l'endomorphisme  $u$ .

**Remarque 4.1.2.**

- Un endomorphisme diagonalisable est bien sûr aussi trigonalisable.
- Le premier vecteur d'une base de trigonalisation est un vecteur propre de  $u$ .

**Théorème 4.1.3.**

Soit  $e = (e_1, \dots, e_n)$  une base de l'espace  $E$ . On a équivalence entre :

- (i) la base  $e$  trigonalise un endomorphisme  $u$  ;
- (ii)  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$  est stable par  $u$ .

**Démonstration.**

Nous avons déjà dans un précédent chapitre que la matrice d'un endomorphisme dans une base  $e = (e_1, \dots, e_n)$  était triangulaire supérieure si et seulement si on avait le point (ii).  $\square$

### 4.2 Matrices trigonalisables

**Définition 4.2.1** (Matrice trigonalisable).

Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

**Théorème 4.2.2.**

Soit  $A$  la matrice d'un endomorphisme  $u$  dans une base  $e$  de  $E$ . On a équivalence entre :

- (i)  $A$  est trigonalisable ;
- (ii)  $u$  est trigonalisable.

### 4.3 Trigonalisation et polynômes

**Théorème 4.3.1.**

Un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé dans  $\mathbb{K}[X]$ .  
Il existe un critère analogue pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

**Démonstration.**

Elle n'est pas exigible et figure en annexe.  $\square$

**Corollaire 4.3.2.**

Tout endomorphisme d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie est trigonalisable.

Toute matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est trigonalisable.

**Corollaire 4.3.3.**

Si  $\chi_u$  est scindé dans  $\mathbb{K}[X]$  alors  $\text{tr}(u)$  et  $\det(u)$  sont la somme et le produit des valeurs propres comptées avec multiplicité.

Idem pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

**Démonstration.**

$u$  est trigonalisable et peut donc être représenté par une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \star \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de  $u$  est alors

$$\prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$$

Les  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  sont alors les valeurs propres comptées avec multiplicité. Or nous savons que le coefficient constant de  $\chi_u$  vaut  $(-1)^n \det u$  et que son coefficient de degré  $n-1$  vaut  $-\text{tr } u$ , d'où le résultat.  $\square$

## 4.4 Deux exemples

### Exemple 4.4.1.

Trigonalisons  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ .

On calcule  $\begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ -1 & 3 & X-3 \end{vmatrix} = X^3 - 3X^2 + 3X - 1 = (X-1)^3$ .

La seule matrice diagonale n'ayant que 1 comme valeur propre est  $I_3$ , qui ne peut être semblable à  $A$ . Ainsi  $A$  n'est pas diagonalisable.

Cherchons tout d'abord un vecteur propre. On observe que  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  convient.

On cherche ensuite un vecteur  $v_2$  pour lequel il existe  $a \in \mathbb{C}$  tel que  $Av_2 = v_2 + av_1$ , soit  $(A - I_3)v_2 = av_1$ . Après résolution, nous obtenons

par exemple  $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , avec  $Av_2 = v_2 + v_1$ . Nous complétons  $(v_1, v_2)$

en une base  $(v_1, v_2, v_3)$ , en posant par exemple  $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Il se trouve

que  $Av_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_2 + v_3$ . Ainsi  $A = PTP^{-1}$  avec  $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  et

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Exemple 4.4.2.

Trigonalisons  $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ .

On calcule  $\chi_B = (X+1)(X-1)^2$ .

Ensuite nous calculons  $E_{-1}(B) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \text{Vect } v_1$  et  $E_1(B) =$

$\text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{Vect } v_2$ . Pour des raisons de dimension  $B$  n'est pas diagonalisable, mais elle est trigonalisable.

On complète  $(v_1, v_2)$  en une base de  $\mathbb{R}^3$  en rajoutant par exemple le vecteur  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Alors si  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , nous avons  $B = QTQ^{-1}$  avec

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous aurions pu trouver une matrice  $T$  encore plus simple en cherchant, au moment de compléter  $(v_1, v_2)$  en une base, un vecteur  $v_3$  pour lequel il

existe  $b \in \mathbb{K}$  tel que  $Bv_3 = bv_2 + v_3$ . En posant  $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , on a alors

$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . L'existence d'un tel vecteur  $v_3$  se démontre, mais cela n'est pas au programme.

## 5 Exercices classiques

### 5.1 Deux diagonalisations – bête et méchante et plus théorique

1. Diagonaliser  $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ .
2. Diagonaliser la matrice  $J$  dont tous les coefficients sont égaux à 1. Puis diagonaliser la matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $a_{i,j} = \alpha$  si  $i = j$ ,  $a_{i,j} = \beta$  sinon.

### 5.2 Deux applications de la trigonalisation

1. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice nilpotente.
  - a) Montrer que  $A$  est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte.
  - b) Le résultat est-il encore vrai pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ?
2. Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -ev de dimension finie  $n$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que  $\text{Sp}(P(u)) = P(\text{Sp}(u))$ .

### 5.3 Diagonalisation simultanée

Dans un espace vectoriel  $E$  de dimension finie, on considère deux endomorphismes  $u$  et  $v$  diagonalisables tels que  $u \circ v = v \circ u$ .

1. Montrer que les sous-espaces propres de  $v$  sont stables par  $u$ .
2. Montrer que l'endomorphisme induit de  $u$  à un sous-espace propre de  $v$  est diagonalisable.
3. Montrer qu'il existe une base de  $E$  constituée de vecteurs propres de  $u$  et  $v$ .

### 5.4 Racine carrée d'une matrice

1. Soit  $M$  une matrice diagonale d'ordre  $n$  dont les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts. Montrer que les matrices commutant avec  $M$  sont exactement les matrices diagonales.
2. Déterminer les valeurs propres de  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .
3. Combien y a-t-il de matrice  $M$  telle que  $M^2 = A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  ? dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ?

## 6 Annexe : démonstrations

**Démonstration** (théorème 2.0.9).

Soit  $P = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_p)$  un polynôme annulateur de  $u$ , scindé à racines simples, i.e les  $\lambda_i$  sont deux à deux distincts. Les valeurs propres de  $u$  sont donc incluses dans l'ensemble  $\{\lambda_i, i \in \llbracket 1, p \rrbracket\}$ . Soit  $(L_j)_{1 \leq j \leq p}$  la famille des polynômes définis par :

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, L_j = \prod_{i \neq j} (X - \lambda_i).$$

On montre d'abord que cette famille forme une base de  $\mathbb{K}_{p-1}[X]$  :

Soit  $\mu_1, \dots, \mu_p \in \mathbb{K}$  tels que  $\sum_{i=1}^p \mu_i L_i = 0$ . On évalue cette relation en  $\lambda_j$ . Puisque

$L_i(\lambda_j) = 0$  si  $i \neq j$ , il reste  $\mu_j L_j(\lambda_j) = 0$ . Mais  $L_j(\lambda_j) \neq 0$  donc  $\mu_j = 0$ , et ce pour tout  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . Cette famille est donc libre, et pour raison de cardinal, c'est bien une base de  $\mathbb{K}_{p-1}[X]$ .

En particulier, il existe des scalaires  $\alpha_j$  tels que  $1 = \sum_{j=1}^p \alpha_j L_j$ .

On en déduit :  $\text{Id}_E = \sum_{j=1}^p \alpha_j L_j(u)$ , donc, pour tout  $x \in E, x = \sum_{j=1}^p \alpha_j L_j(u)(x)$  (\*).

Puisque  $(X - \lambda_j) L_j = P$ , on a alors pour tout  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $(u - \lambda_j \text{Id}_E) \circ L_j(u) = P(u)$  d'où  $(u - \lambda_j \text{Id}_E)(L_j(u)(x)) = P(u)(x) = 0$  et donc  $L_j(u)(x) \in \text{Ker}(u - \lambda_j \text{Id}_E)$ . La

relation (\*) prouve donc l'égalité  $E = \sum_{j=1}^p \text{Ker}(u - \lambda_j \text{Id}_E)$ .

Le fait que la somme est directe a déjà été vu.

Même si certains des  $\text{Ker}(u - \lambda_i \text{Id}_E)$  peuvent être réduits à  $\{0\}$  (si  $\lambda_i$  n'est pas une valeur propre de  $u$ ), cela prouve que  $E$  est somme directe des sous-espaces propres de  $u$ , donc  $u$  est diagonalisable.  $\square$

**Démonstration** (théorème 4.3.1).

$\Rightarrow$  : Supposons  $u$  trigonalisable. Il existe alors une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est de la forme

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\chi_u = \chi_T = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$$

qui est bien un polynôme scindé.

$\Leftarrow$  : Raisonnons matriciellement. Par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$ , montrons que si le polynôme caractéristique de  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est scindé alors  $A$  est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Cas  $n = 1$  : C'est immédiat, une matrice  $A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$  étant déjà triangulaire supérieure. Supposons la propriété établie à un rang  $n \geq 1$ . Soit  $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$  de polynôme caractéristique  $\chi_A$  scindé.

Le polynôme  $\chi_A$  possède au moins une racine  $\lambda_1 \in \mathbb{K}$ , et celle-ci est une valeur propre de  $A$ . Soit  $e_1 \in \mathbb{K}^{n+1}$  un vecteur propre associé. On complète ce vecteur en une base de  $\mathbb{K}^{n+1}$  de la forme  $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ . La matrice de l'endomorphisme  $u$  canoniquement

associé à la matrice  $A$  dans la base  $e$  est de la forme  $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star \\ 0 & A' \end{pmatrix}$ , avec  $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

On a alors

$$\chi_A = (X - \lambda_1) \chi_{A'}$$

et donc le polynôme caractéristique de  $A'$  est scindé. Par hypothèse de récurrence, il existe  $P' \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  telle que la matrice  $P'^{-1} A' P'$  soit triangulaire supérieure. Considérons alors la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$$

La matrice  $P$  est inversible avec

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P'^{-1} \end{pmatrix}$$

Par produit par blocs

$$P^{-1} B P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star' \\ 0 & P'^{-1} A' P' \end{pmatrix}$$

est triangulaire supérieure.

Finalement,  $A$  est semblable à une matrice triangulaire supérieure, ce qui prouve l'hypothèse de récurrence au rang  $n + 1$ .  $\square$