Semaine 7 du 10 novembre 2025 (S46)

VI Valeurs propres et vecteurs propres

Le chapitre VI reste au programme :

1 Élements propres d'un endomorphisme et d'une matrice

1.1 Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme

1.2 Sous-espaces propres d'un endomorphisme

1.3 Éléments propres d'un endomorphisme en dimension finie

1.4 Éléments propres d'une matrice

2 Lien avec les polynômes d'endomorphisme

2.1 Valeur propre et racines d'un polynôme annulateur

2.2 Polynôme caractéristique

2.3 Polynôme caractéristique et valeurs propres

2.4 Multiplicité et dimension des espaces propres

2.5 Théorème de Cayley-Hamilton

La démonstration est hors-programme.

3 Exercices à connaître

3.1 Le spectre « commute » et polynôme caractéristique d'une matrice diagonale par blocs

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que AB et BA ont le même spectre.

2) Soit $A_1, \dots, A_p$ des matrices carrées. Exprimer le polynôme caractéristique de $A = \operatorname{diag}(A_1, \dots, A_p)$ en fonction de ceux des A_i.

3.2 Détermination du spectre d'un endomorphisme de polynômes

Soit $E = \mathbb{K}[X]$ et $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ défini par $\varphi : P \mapsto XP'(X)$. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de φ.

3.3 Éléments propres d'une matrice

Donner les éléments propres de

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).$$

3.5 Matrice compagne

Pour $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$ polynôme unitaire, on définit la matrice compagne de P :

$$\mathscr{C}(P) = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Pour $n = 1$, P s'écrit $X + a_0$ et $\mathscr{C}(P) = \mathscr{C}(X + a_0) = (-a_0)$.

1) Montrer que P est le polynôme caractéristique de $\mathscr{C}(P)$.

2) On suppose dans cette question que P est scindé à racines simples, notées $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Montrer que :

$$\mathscr{C}(P)^\top = V \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) V^{-1}$$

où V désigne la matrice de Vandermonde de $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

S'y ajoute :

VI Suites de fonctions

1 Convergence simple et convergence uniforme

1.1 Convergence simple

1.2 Convergence uniforme

1.3 Convergence uniforme sur tout segment

2 Continuité

3 Interversion limite - intégrale

3.1 Intégration sur un segment

3.2 Intégration sur un intervalle quelconque

4 Dérivabilité

4.1 Théorème de dérivation

4.2 Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

5 Exercices à connaître

5.1 Limite uniforme d'un produit

Soit (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions définies sur un intervalle réel I, et convergeant uniformément vers f et g respectivement.

1) Montrer que f est bornée si et seulement si à partir d'un certain rang toutes les f_n sont bornées.

2) Montrer que si f et g sont bornées, alors $(f_n g_n)$ converge uniformément vers fg.

3) Soit h une fonction bornée. Montrer que $(f_n h)$ converge uniformément vers fh, sans supposer que f est bornée.

4) Montrer que ce dernier résultat est faux si h n'est pas bornée.

5.2 Étude du type de convergence (banque CCP MP)

1) Soit X un ensemble, (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$.
Donner la définition de la convergence uniforme de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g.

2) On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1} \mathrm{e}^{-nx^2} \cos(x\sqrt{n})$.

a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).

b) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?

c) Soit $a > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?

d) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

5.3 Limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers f.

1) Justifier qu'il existe un entier naturel N tel que pour tout n supérieur ou égal à N, on ait pour tout réel x, $|P_n(x) - P_N(x)| \leqslant 1$.
Que peut-on en déduire quant au degré des fonctions polynômes $P_n - P_N$ lorsque $n \geqslant N$?

2) Conclure que f est nécessairement une fonction polynomiale.

5.4 Interversion limite - intégrale sur un segment (banque CCP MP)

On pose $f_n(x) = (x^2+1)\dfrac{n\mathrm{e}^{x} + x\mathrm{e}^{-x}}{n+x}$.

1) Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.

2) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (x^2+1)\frac{n\mathrm{e}^{x} + x\mathrm{e}^{-x}}{n+x}\,\mathrm{d}x$.

5.5 Utilisation du théorème de convergence dominée

Montrer, pour tout $a \in [0,+\infty[$ fixé : $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{x}\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - 1\right)\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^a \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}\,\mathrm{d}x$.

5.6 Recherche d'un équivalent d'une suite d'intégrales

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^n}\,\mathrm{d}x$.

1) Montrer : $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

2) Trouver un équivalent simple de $I_n - 1$ lorsque l'entier n tend vers l'infini.