Devoir à la maison n° 5

À rendre le 12 janvier

Ce problème est long, si vous arrivez jusqu'à la question 3.d, ce sera très bien.

1) **a)** Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$:

$$\int_{\pi}^{n\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} - \frac{1}{\pi} - \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

b) Étudier la convergence de la série de terme général $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$, puis de la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t\right)$ et conclure sur la convergence de :

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

Dans ce qui suit, a désigne un réel strictement positif.

2) **a)** Montrer que la série de terme général :

$$\frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$$

est absolument convergente.

b) Montrer que la fonction :

$$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \psi(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0, \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

est développable en série entière, de rayon de convergence infini.

c) Montrer que :

$$\int_0^a \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$$

Dans ce qui suit, la partie réelle d'un nombre complexe z sera notée $\mathscr{Re}(z)$.

3) **a)** Rappeler le développement en série entière de la fonction exponentielle complexe, en précisant : le rayon de convergence, et le domaine de convergence.

b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul N :

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n a^n}{n!} \mathscr{Re}\left(\mathrm{e}^{-int}\right)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{\pi}{2} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$$

c) Exprimer, pour tout réel t de l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, à l'aide de la somme d'une série :

$$\mathrm{e}^{-a\mathrm{e}^{-it}}$$

d) Calculer, pour $p = 0$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathscr{Re}\left(\mathrm{e}^{-ipt}\right)\, \mathrm{d}t$$

puis, pour tout entier naturel non nul n :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathscr{Re}\left(\mathrm{e}^{-int}\right)\, \mathrm{d}t$$

(On pensera à distinguer les cas, en fonction de la parité de n.)

e) En déduire l'expression de la partie réelle de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-a\mathrm{e}^{-it}}\, \mathrm{d}t$ en fonction de la somme d'une série.

f) On pose : $F(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-x\cos t}\, \mathrm{d}t$.

i) Étudier la continuité de l'application F sur $[0, +\infty[$.

ii) Déterminer le sens de variation de la fonction qui, à tout réel t de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, associe : $\mathrm{e}^{-a\cos t}$.

iii) Montrer que :

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-a\cos t}\, \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\sqrt{a}}$$

iv) En déduire la valeur de :

$$\lim_{a \to +\infty} F(a)$$

g) Déterminer, pour tout réel t de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, la partie réelle, la partie imaginaire et le module de $\mathrm{e}^{-a\mathrm{e}^{-it}}$.

h) Montrer que :

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}} \mathscr{Re}\left(\mathrm{e}^{-a\mathrm{e}^{-it}}\right)\, \mathrm{d}t \right| \leqslant F(a)$$

et en déduire :

$$\lim_{a \to +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}} \mathscr{Re}\left(\mathrm{e}^{-a\mathrm{e}^{-it}}\right)\, \mathrm{d}t$$

i) Retrouver, à l'aide des résultats précédents, la valeur de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$$

— FIN —