Feuille d'exercice n° 20 : **Fonctions de plusieurs variables**

I. Limite et continuité

Exercice 1 Étudier la limite en 0 des applications suivantes :

1) Soit f définie par $f(x,y) = \frac{|x|\sqrt{|y|}}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$.

2) Soit f définie par $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^4+y^6} & \text{si } x \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$

3) Soit f définie par $f(x,y) = \frac{\big((x-1)^2+y^2\big)\ln\big((x-1)^2+y^2\big)}{|x|+|y|}$.

Exercice 2 Étudier la continuité de l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{x^3y^3}{x^2+y^4}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

Exercice 3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4 - 2x^2y + 3y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que la restriction de f à toute droite passant par l'origine est continue.

2) Montrez que la fonction f n'est pas continue à l'origine.

Exercice 4 Étudier l'existence et la valeur éventuelle d'une limite finie en $(0,0)$ pour les fonctions f de deux variables réelles définies par les formules suivantes :

1) $\frac{xy}{x^2+xy+y^2}$.

2) $\frac{x^2y}{x^2-xy+y^2}$.

3) $\frac{x^3y^4}{x^4+y^6}$.

4) $\frac{xy^4}{x^4+y^6}$.

5) $\frac{e^{xy}-1}{e^x-1}$.

Exercice 5 On note $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2+y^2-z^2 \neq 0\}$. L'application $f : U \longrightarrow \mathbb{R}, (x,y,z) \longmapsto \frac{x^4+y^4-z^4}{x^2+y^2-z^2}$ admet-elle une limite (finie ou infinie) en $(0,0,0)$?

II. Dérivées partielles d'ordre 1

Exercice 6 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \frac{\sin(xy)}{|x|+|y|} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) \mapsto 0 \end{cases}$.

Étudier la continuité de f et l'existence des dérivées partielles. f est-elle $\mathscr{C}^1$?

Exercice 7 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f admet des dérivées dans toutes les directions en 0, mais n'est pas continue en 0.

Exercice 8

1) Donner l'ensemble de définition de la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right).$$

2) La fonction f est-elle continue ? de classe $\mathscr{C}^1$?

3) En $C = (0,1)$, déterminer la dérivée de f dans la direction d'un vecteur unitaire $\overrightarrow{n} = (a,b)$. Comment choisir $\overrightarrow{n}$ pour que cette dérivée soit maximale ?

Exercice 9 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Calculer les dérivées partielles de :

$$g(x,y) = f(x+y) \qquad h(x,y) = f(x^2+y^2) \qquad k(x,y) = f(xy)$$

III. Différentielle

Exercice 10 Montrer que l'application $P \mapsto \displaystyle\int_0^1 (P(t))^2\,\mathrm{d}t$ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ est différentiable et calculer sa différentielle.

Exercice 11 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

Étudier la différentiabilité de f.

IV. Courbes et surfaces

Exercice 12 On considère la surface (S) d'équation $xyz = 1$. Montrer que pour tout point $M \in (S)$, les intersections du plan tangent à (S) en M avec les plans xOy, yOz et xOz forment un tétraèdre de volume constant.

Exercice 13 Trouver tous les plans tangents à la surface (S) d'équation $x^2 - 4y^2 + z^2 = 1$ passant par des points $A(a,0,0), B(0,b,0)$ et $C(0,0,c)$ tels que $c = 2a = 2b$ (on supposera a,b,c non nuls).

V. Dérivées partielles d'ordre 2

Exercice 14 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\begin{cases} f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

Montrez que f admet des dérivées partielles secondes en tout point. Que pouvez-vous déduire du calcul de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$?

VI. Équations aux dérivées partielles

Exercice 15 En réalisant le changement de variables

$$\begin{cases} u = xy \\ v = x/y \end{cases}$$

déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Exercice 16 En réalisant le changement de variables $\begin{cases} u = x \\ v = y - x \end{cases}$, déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = f.$$

Exercice 17 Résoudre sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ l'équation aux dérivées partielles :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^3 + y^3}$$

en utilisant les coordonnées polaires.

VII. Extrema

Exercice 18 Déterminer les extrema locaux des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes :

1) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$

2) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 5$

3) $f(x, y) = x^3 + y^3$

4) $f(x, y) = (x - y)^2 + (x + y)^3$

5) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy.$

Exercice 19 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $f : (x, y) \mapsto x + y - (x^2 + y^2 + ay)$ et $D = \{(x, y) \in]0, 1[^2 \ , \ x + y < 1\}$.

1) Représenter D dans le plan.

2) Discuter l'existence d'extrema locaux de f sur D en fonction de la valeur de a.

Exercice 20 Calculer l'aire maximale d'un triangle inscrit dans un cercle de rayon r.

Exercice 21 Trouver les extremums de la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = x\mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^x.$$

Exercice 22 Où sont les extremums de $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ sur $[-1, 1] \times [-1, 1]$?

Exercice 23 Déterminer les extrémums locaux des applications f suivantes, pour lesquelles on donne l'ensemble de départ et l'image $f(x, y)$ de (x, y) :

1) $\mathbb{R}^2, 4x + 2y - x^2 - y^2 - 2x^3.$

2) $\mathbb{R}^2, xy + x^3y^2.$