

# XVII – Endomorphismes d’une espace vectoriel euclidien

## I. Endomorphismes préservant l’orthogonalité

- 1)  $(u + v \mid u - v) = \|u\|^2 - \|v\|^2 = 0$  pour  $u$  et  $v$  unitaires.
- 2) Soient  $u$  et  $v$  des vecteurs unitaires de  $E$ .  $u + v$  et  $u - v$  sont orthogonaux donc  $f(u + v)$  et  $f(u - v)$  le sont aussi. Or par linéarité

$$f(u + v) = f(u) + f(v) \text{ et } f(u - v) = f(u) - f(v)$$

de sorte que l’orthogonalité de ces deux vecteurs entraîne

$$\|f(u)\| = \|f(v)\|$$

Ainsi les vecteurs unitaires de  $E$  sont envoyés par  $f$  sur des vecteurs ayant tous la même norme  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ . Montrons qu’alors

$$\forall x \in E, \|f(x)\| = \alpha \|x\|$$

Soit  $x \in E$ .

Si  $x = 0$  alors on a  $f(x) = 0$  puis  $\|f(x)\| = \alpha \|x\|$ .

Si  $x \neq 0$  alors en introduisant le vecteur unitaire  $u = x/\|x\|$ , on a  $\|f(u)\| = \alpha$  puis  $\|f(x)\| = \alpha \|x\|$

- 3) Si  $\alpha = 0$  alors  $f = \tilde{0}$  et n’importe quel  $g \in O(E)$  convient.  
Si  $\alpha \neq 0$  alors introduisons l’endomorphisme

$$g = \frac{1}{\alpha} f$$

La relation obtenue en **2)** assure que  $g$  conserve la norme et donc  $g \in O(E)$  ce qui permet de conclure.

## II. Matrices orthogonales et inégalités

- 1) Avec  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$  et  $u$  l’endomorphisme canonique associé à  $A$ , si  $e = e_1 + \dots + e_n$  alors  $\sum_{i,j} a_{i,j} = \langle u(e), e \rangle$ , pour le produit scalaire canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Puis on conclut en utilisant l’inégalité de Cauchy-Schwarz.
- 2) Pour tout  $j$ ,  $\sum_i a_{i,j}^2 = 1$  donc pour tout  $i$   $a_{i,j}^2 \leq 1$ , donc  $|a_{i,j}| \leq 1$  donc  $\sum_{i,j} |a_{i,j}| \geq \sum_{i,j} a_{i,j}^2 = n$ .
- 3)  $\sum_{i,j} |a_{i,j}| = \sum_{i,j} |a_{i,j}| \times 1 = \langle |A|, J \rangle$  pour le produit scalaire canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , où  $J$  est la matrice dont tous les coefficients valent 1, et  $|A| = (|a_{i,j}|)$ . Alors, toujours avec l’inégalité de Cauchy-Schwarz,  $\sum_{i,j} |a_{i,j}| \leq \sqrt{\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2} \sqrt{\sum_{i,j} 1^2} \leq n\sqrt{n}$ .
- 4) On peut avoir l’égalité si  $n = 1$  mais aussi si  $n = 4$  avec

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

En fait, un approfondissement du problème donne  $\sqrt{n} \in 2\mathbb{Z}$  comme condition nécessaire à l’obtention de l’égalité.

Pour avoir égalité dans l’inégalité de Cauchy-Schwarz de la questionn **1)**, il faut que tous les coefficients de  $A$  soient de même valeur absolue  $\lambda$ . Et donc en faisant la somme des  $|a_{i,j}|$  on obtient  $n^2\lambda = n\sqrt{n}$  donc  $\lambda = 1/\sqrt{n}$ .

Pour l’inégalité de Cauchy-Schwarz de la questionn **3)**, il faut que la somme de tous les coefficients d’une ligne vaille une constante. Cette constante doit valoir 1 pour que la somme de tous les coefficients vaille  $n$ . Si on appelle  $a$  le nombre de  $+$  sur une ligne, on doit donc avoir  $(a - (n - a))\sqrt{n} = 1$ , donc  $2a = n + \sqrt{n}$ . Donc  $n$  doit être un carré parfait.

Enfin les colonnes doivent être deux à deux orthogonales, donc le nombre de  $+$ ,  $a$ , doit avoir la même parité que  $n$  (je ne sais pas trop le montrer rigoureusement :) ) donc  $n$  doit être pair.

### III. Matrices symétriques positives

On introduit, sur  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , la norme euclidienne, notée  $\|\cdot\|$ , associée au produit scalaire canonique, définie par :  $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|X\| = \sqrt{X^T X}$ .

- 1) Soit  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . Prouvons que  $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \text{Sp}(A) \subset [0, +\infty[$ .

Raisonnons par double implication.

Supposons que  $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ .

Prouvons que  $\text{Sp}(A) \subset [0, +\infty[$ .

Soit  $\lambda \in \text{Sp}(A)$ .

$\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} / AX = \lambda X$ .

Alors  $X^T AX = X^T \lambda X = \lambda \|X\|^2$ .

Or,  $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  donc  $X^T AX \geq 0$ .

Donc  $\lambda \|X\|^2 \geq 0$ .

Or,  $X \neq 0$  donc  $\|X\|^2 > 0$ .

Donc  $\lambda \geq 0$ .

Supposons que  $\text{Sp}(A) \subset [0, +\infty[$ .

Prouvons que  $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ .

$A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  donc, d'après le théorème spectral,  $\exists P \in \text{O}(n) / A = PDP^T$

où  $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ .

Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

$X^T AX = X^T PDP^T X = (P^T X)^T D(P^T X)$ .

Notons  $y_1, y_2, \dots, y_n$  les composantes de la matrice colonne  $Y = P^T X$ .

$$\text{Ainsi } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ et donc } X^T AX = Y^T DY = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2. \quad (1)$$

Or,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  sont les valeurs propres de  $A$  donc, par hypothèse,  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i \geq 0$ .

Donc  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i y_i^2 \geq 0$ .

Donc, d'après (1),  $X^T AX \geq 0$ .

- 2) Soit  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ .

Prouvons que  $A^2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ .

$(A^2)^T = A^T A^T$ .

Or,  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  donc  $A^T = A$ . Donc  $(A^2)^T = A^2$ . Donc  $A^2 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ .

Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

$X^T A^2 X = X^T A^T A X = (AX)^T (AX) = \|AX\|^2 \geq 0$ .

Donc  $A^2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ .

- 3) soit  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et soit  $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ .

On suppose que  $AB = BA$ .

Prouvons que  $A^2 B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ .

Remarque : par hypothèse,  $A$  et  $B$  commutent donc  $A^2$  et  $B$  commutent.

En effet :  $A^2 B = A(AB) = A(BA) = (AB)A = (BA)A = BA^2$ .

$(A^2 B)^T = B^T (A^2)^T = B^2 (A^T)^2$ .

Or,  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  donc  $A^T = A$  et  $B^T = B$ .

Donc  $(A^2 B)^T = BA^2$ .

Or, d'après la remarque,  $A^2$  et  $B$  commutent.

Donc  $(A^2 B)^T = A^2 B$ .

Donc  $A^2 B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ .

Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

$A$  et  $B$  commutent donc  $X^T (A^2 B) X = X^T A B A X$ .

Or,  $A$  est symétrique donc  $X^T A B A X = (AX)^T B(AX)$ .

On pose  $Y = AX$ .

$Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  donc  $(AX)^T B(AX) = Y^T B Y \geq 0$ .

Donc  $X^T A^2 B X \geq 0$ .

Donc  $A^2 B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ .

#### IV. Racine carrée d'une matrice symétrique positive

Existence : il existe  $P \in O_n(\mathbb{R})$  telle que  $A = P^T D P$ , où  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$  et les  $d_i \in \mathbb{R}_+$ . Posons  $B = P^T D' P$  avec  $D' = \text{diag}(\sqrt{d_1}, \dots, \sqrt{d_n})$ . Alors  $B^2 = A$ .

Unicité :

1ère méthode : Notons  $f$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ .  $A$  est diagonalisable, donc  $E = \mathbb{R}^n$  est la somme directe des espaces propres de  $A$ . Soit  $F$  un espace propre associé à une valeur propre  $d$ , et soit  $B$  telle que  $B^2 = A$ , représentant l'endomorphisme  $g$ .

Alors  $A$  et  $B$  commutent, donc  $F$  est stable par  $B$ . Notons  $h = f|_F$ . Alors  $h$  est aussi symétrique positive réelle et donc elle est diagonalisable. Ses valeurs propres sont positives, mais puisque  $h^2 = d \text{Id}$ , alors ces valeurs propres valent toutes  $\sqrt{d}$ . Donc  $h = \sqrt{d} \text{Id}$ .  $f$  est donc définie de manière unique sur chaque sous-espace propre. Ces derniers étant supplémentaires,  $f$  est définie de manière unique.

2ème méthode :

Soient  $R$  et  $S$  deux racines, on note  $V = \text{Sp}(R) \cup \text{Sp}(S)$ , et on appelle  $v_1, \dots, v_p$  ses éléments, nommés injectivement. Comme elles sont positives, alors les  $v_1^2, \dots, v_p^2$  sont deux à deux distinctes. On note  $L$  le polynôme d'interpolation qui envoie les  $v_i^2$  sur les  $v_i$ .

Si on note  $R = Q^T \Delta Q$  avec  $Q$  inversible et  $\Delta$  diagonale, les coefficients diagonaux de  $\Delta$  sont dans  $V$ . Alors  $L(A) = L(R^2) = Q^T L(\Delta^2) Q = Q^T L(\Delta) Q = R$ . Et de même  $L(A) = S$ , donc  $R = S$ .

3ème méthode :

Si  $B_1 = P_1^T D_1 P_1$  et  $B_2 = P_2^T D_2 P_2$  sont deux racines carrées (convenablement diagonalisées), alors l'égalité  $B_1^2 = B_2^2$  entraîne  $D_1^2 Q - Q D_2^2 = 0$  avec  $Q = P_1 P_2^T$ . En termes de coefficients, cela donne

$$\begin{aligned} 0 &= [D_1^2 Q - Q D_2^2]_{i,j} = [D_1]_{i,i}^2 [Q]_{i,j} - [D_2]_{j,j}^2 [Q]_{i,j} \\ &= [Q]_{i,j} \left( [D_1]_{i,i} - [D_2]_{j,j} \right) \left( [D_1]_{i,i} + [D_2]_{j,j} \right) \end{aligned}$$

Or on a  $[D_1]_{i,i} > 0$  et  $[D_2]_{j,j} > 0$ . Ce qui fournit  $[Q]_{i,j} \left( [D_1]_{i,i} - [D_2]_{j,j} \right) = 0$ , c'est-à-dire  $[D_1 Q - Q D_2]_{i,j} = 0$  ou encore  $D_1 Q - Q D_2 = 0$  et enfin  $B_1 - B_2 = 0$ . Autrement dit, les endomorphismes matriciels  $Q \mapsto D_1^2 Q - Q D_2^2$  et  $Q \mapsto D_1 Q - Q D_2$  ont le même noyau dès lors que  $D_1$  et  $D_2$  sont deux matrices diagonales à valeurs propres strictement positives !

#### V. Décomposition polaire

Soit  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ .

- 1)  $(A^T A)^T = A^T A$  dont  $A^T A$  est symétrique.  
Soit  $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$  non nul. Alors  $X^T (A^T A) X = (AX)^T (AX) = \|AX\|^2$ .  
Mais  $X \neq 0$  et  $A$  est inversible donc  $\|AX\|^2 > 0$ , donc  $A^T A \in \mathcal{S}_n^{++}$ .
- 2) On nous rappelle qu'il existe  $S \in \mathcal{S}_n^{++}$  telle que  $A^T A = S^2$ .  
Notons  $\Omega = AS^{-1}$ . On a alors  $A = \Omega S$ , et :

$$\Omega^T \Omega = (AS^{-1})^T AS^{-1} = (S^{-1})^T (A^T A) S^{-1} = S^{-1} S^2 S^{-1} = I_n$$

donc  $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ . Ceci montre l'existence d'un couple  $(\Omega, S)$  convenant.