X – Espaces probabilisés

I. Loi de Zipf

1) D'une part les réels $P(\{k\})$ sont tous positifs. D'autre part

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(\{k\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(a)k^a} = \frac{1}{\zeta(a)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^a} = \frac{\zeta(a)}{\zeta(a)} = 1.$$

Ils définissent donc bien une probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

2) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Par le calcul, on trouve

$$P(m\mathbb{N}^*) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(\{km\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(a)(km)^a} = \frac{1}{m^a \zeta(a)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^a} = \frac{1}{m^a}.$$

3) Soit $(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$. D'une part, d'après le calcul précédent, $P(i\mathbb{N}^*)\,P(j\mathbb{N}^*) = 1/(ij)^a$.

D'autre part $i\mathbb{N}^* \cap j\mathbb{N}^*$ est l'ensemble des entiers qui sont multiples à la fois de i et de j. On a donc $i\mathbb{N}^* \cap j\mathbb{N}^* = (i \vee j)\mathbb{N}^*$ (où $i \vee j$ désigne le p.p.c.m. de i et de j). Comme

$$P(i\mathbb{N}^* \cap j\mathbb{N}^*) = \frac{1}{(i \vee j)^a}.$$

les événements $i\mathbb{N}^*$ et $j\mathbb{N}^*$ sont indépendants si et seulement si $ij = i \vee j$, c'est-à-dire si i et j sont premiers entre eux.

4) **a)** On peut écrire $C_n = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{p_i\mathbb{N}^*}$. En reprenant la question précédente, on prouve que les $(p_i\mathbb{N}^*)_{i\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendants. Il en va donc de même de leurs complémentaires, donc

$$P(C_n) = \prod_{i=1}^{n} (1 - P(p_i\mathbb{N}^*)) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_i^a}\right)$$

b) L'ensemble $\bigcap_{n\geqslant 1} C_n$ est l'ensemble des entiers non nuls qui ne sont divisibles par aucun des nombres premiers. Évidemment il n'y a que 1 dans ce cas, et donc $\bigcap_{n\geqslant 1} C_n = \{1\}$.

c) Comme la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, on a

$$\lim_{n\to+\infty} P(C_n) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{n\geqslant 1} C_n\right) = P(\{1\}) = \frac{1}{\zeta(a)}$$

$$\text{donc} \quad \zeta(a) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_i^a}\right)^{-1}.$$

II. Théorème de Borel-Cantelli

1) Par stabilité d'une tribu par réunion dénombrable, puis par intersection dénombrable, B est bien un évènement.

2) $\omega \in B$ si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant n$ et $\omega \in A_k$. Ainsi B est l'ensemble des élèments qui sont dans une infinité de A_k.

3) Posons, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $U_p = \bigcup_{k=p}^{+\infty} A_k$ et $B_p = \bigcap_{n=0}^{p} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k = \bigcap_{n=0}^{p} U_n$.

On remarque que la suite $(U_p)_p$ est décroissante, et donc $B_p = U_p = \bigcup_{n=p}^{+\infty} A_n$. La suite des $(B_p)_p$ est donc également décroissante, et par continuité décroissante

$$P(B) = \lim_{p\to+\infty} P\left(\bigcup_{n=p}^{+\infty} A_n\right).$$

Mais

$$P\left(\bigcup_{n=p}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=p}^{+\infty} P(A_n)$$

Et la suite des restes d'une série convergente converge vers 0 , ce qui permet de conclure.

4) **a)** Dans ce cas, pour tout $p \in \mathbb{N}$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 \geqslant p$ et $P(A_{n_0}) = 1$. Alors

$$1 \geqslant P\left(\bigcup_{n=p}^{+\infty} A_n\right) \geqslant P(A_{n_0}) = 1$$

et le résultat cherché s'ensuit directement car l'égalité $P(B) = \lim_{p\to+\infty} P\left(\bigcup_{n=p}^{+\infty} A_n\right)$ est toujours valable.

b) Il faut avoir une première idée : l'indépendance se traduit mieux avec des intersections qu'avec des réunions d'événements. On va donc considérer l'évènement complémentaire de la limite supérieure :

$$\overline{B}=\bigcup_{p=0}^{+\infty}\left(\bigcap_{n=p}^{+\infty}\overline{A_n}\right)$$

Par continuité croissante,

$$P(\overline{B})=\lim_{p\to+\infty}\left(P\left(\bigcap_{n=p}^{+\infty}\overline{A_n}\right)\right)$$

c) On a par croissance, et ensuite par indépendance des $\overline{A_n}$

$$\forall q\geqslant p\quad P\left(\bigcap_{n=p}^{+\infty}\overline{A_n}\right)\leqslant P\left(\bigcap_{n=p}^{q}\overline{A_n}\right)=\prod_{n=p}^{q}\left(1-P\left(A_n\right)\right)$$

d) La deuxième idée est de prendre le logarithme, l'hypothèse portant sur une série. Pour cela nous utilisons qu'au moins à partir du rang p, $P\left(A_n\right)<1$. Alors, si $p\leqslant q$,

$$\ln\left(\prod_{n=p}^{q}\left(1-P\left(A_n\right)\right)\right)=\sum_{n=p}^{q}\ln\left(1-P\left(A_n\right)\right)$$

La suite $\left(P\left(A_n\right)\right)$ ne converge pas vers 0 a priori, donc on ne peut pas utiliser d'équivalents. On utilise donc une comparaison basée sur

$$\forall\, x>-1,\quad \ln(1+x)\leqslant x$$

Donc

$$\ln\left(\prod_{n=p}^{q}\left(1-P\left(A_n\right)\right)\right)\leqslant-\sum_{n=p}^{q}P\left(A_n\right).$$

e) Mais $\sum P\left(A_n\right)=+\infty$, donc

$$\sum_{n=p}^{q}P\left(A_n\right)\xrightarrow[q\to+\infty]{}+\infty$$

et donc

$$\ln\left(\prod_{n=p}^{q}\left(1-P\left(A_n\right)\right)\right)\xrightarrow[q\to+\infty]{}-\infty$$

et, donc,

$$P\left(\bigcap_{n=p}^{+\infty}\overline{A_n}\right)=0$$

Donc $P(\overline{B})=0$, ce qui conclut.

III. Une suite arithmético-géométrique

1) On définit l'événement U (respectivement V) « le premier tirage s'effectue dans l'urne U » (respectivement « le premier tirage s'effectue dans l'urne V »). La famille (U,V) est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}p_1&=P\left(B_1\right)=P\left(B_1\cap U\right)+P\left(B_1\cap V\right)\\&=P_U\left(B_1\right)P(U)+P_V\left(B_1\right)P(V).\end{aligned}$$

Compte tenu de l'énoncé :

$$p_1=\frac{2}{6}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{12}.$$

2) La famille $\left(B_n,\overline{B}_n\right)$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}p_{n+1}&=P\left(B_{n+1}\right)=P_{B_n}\left(B_{n+1}\right)P\left(B_n\right)+P_{\overline{B}_n}\left(B_{n+1}\right)P\left(\overline{B}_n\right)\\&=\frac{2}{6}p_n+\frac{3}{6}\left(1-p_n\right).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,p_{n+1}=-\frac{1}{6}p_n+\frac{1}{2}$$

3) La suite $\left(p_n\right)_{n\geqslant1}$ est une suite arithmético-géométrique. Déterminons une expression de p_n en fonction de n.
L'équation $-\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}=x$ admet l'unique solution $\ell=\frac{3}{7}$. On définit alors la suite $\left(u_n\right)_{n\geqslant1}$ par $u_n=p_n-\ell$ pour tout $n\geqslant1$. La suite $\left(u_n\right)_{n\geqslant1}$ est géométrique de raison $-\frac{1}{6}$ donc pour tout $n\geqslant1,u_n=\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}u_1$. Or

$u_1 = p_1 - \ell = \frac{5}{12} - \frac{3}{7} = -\frac{1}{84}$.
On en déduit que

$$\forall n \geqslant 1,\ p_n = -\frac{1}{84}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{3}{7}.$$

On vérifie que p_1 est bien égal à $\frac{5}{12}$.

Comme la suite géométrique $\left(\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0, $p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{3}{7}$.

IV. Une chaîne de Markov

1)

$$\forall i \in [\![0,3]\!],\ P\left(x_{n+1} = i\right) = \sum_{j=0}^{3} P_{(x_n=j)}\left(x_{n+1} = i\right) P\left(x_n = j\right)$$

Les probabilités conditionnelles sont données par l'énoncé. Ces égalités s'écrivent matrîciellement $X_{n+1} = MX_n$ avec M la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 1 \end{pmatrix}$$

2) Le polynôme caractéristique de M est

$$\chi_M(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -p & 0 & 0 \\ 0 & x & -p & 0 \\ 0 & p-1 & x & 0 \\ 0 & 0 & p-1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)^2\left[x^2 - (p(1-p))\right]$$

par des développements successifs. Le spectre de M est donc

$$\mathrm{Sp}(M) = \{1, \pm\sqrt{p(1-p)}\}$$

— Si $p \in]0,1[$ alors M possède trois valeurs propres distinctes, et on observe sur la 1ère et la dernière colonne de M, que $\dim E_M(1) \geqslant 2$. La matrice M est donc diagonalisable.

— Si $p = 0$ ou $p = 1$ alors $\mathrm{Sp}(M) = \{1, 0\}$.

Dans ce cas, M est de rang 3 donc $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension 1 alors que 0 est une valeur propre double. Donc M n'est pas diagonalisable.

3) Les 1ers et 4èmes vecteurs de la base canonique, e_1 et e_4, forment une base de E_1. Si $X_0 = (a,b,c,d)$, alors $a+b+c+d = 1$, et $X_n = M^n X_0 = ae_1 + \frac{1}{2^n}(be_2 + ce_3) + de_4 \xrightarrow[n\to+\infty]{} ae_1 + be_4$.

4) Posons $v_1 = (1-1,-1,1)$ et $v_3 = (1,-3,3,-1)$. Alors (e_1, v_2, v_3, e_4) est une base de vecteurs propres de M. De plus $X_0 = \frac{1}{6}[3e_1 - v_2 + v_3 + 3e_4]$, donc $\lim_{n\to\infty} X_n = (1/2, 0, 0, 1/2)$.

V. Apparition d'un double Pile

1) Le support de T est $T(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$.
Pour k dans $\mathbb{N}$, étudions l'événement $(T > k)$ = « le motif PP n'est pas apparu avant le rang k » dont la probabilité est notée p_k. On a $p_0 = p_1 = 1$.
La suite d'événements $(T > k)_{k\geqslant 0}$ est une suite décroissante pour l'inclusion. Ainsi

$$P(T = k) = P(T > k-1) - P(T > k)$$

Notons X_k la variable aléatoire égale à 1 si au k-ème lancer on obtient pile et égale à 0 sinon. Les évènements $(X_k = 0), (X_k = 1)$ forment un système complet d'évènements. On a ainsi la décomposition :

$$(T > k) = ((T > k) \cap (X_k = 1)) \sqcup ((T > k) \cap (X_k = 0)) \qquad (\star)$$

Supposons $k \geqslant 2$.
Si au k-ème lancer le résultat est pile et si le motif PP n'est pas apparu avant le rang k, le $(k-1)$-ème lancer est nécessairement face. De plus, le motif PP n'a pas pu apparaître avant le $(k-2)$-ème lancer :

1	...	$k-2$	$k-1$	k
	...		F	P

On a donc

$$P\left((T > k) \cap (X_k = 1)\right) = P\left((T > k-2) \cap (X_{k-1} = 0) \cap (X_k = 1)\right)$$

Par indépendance des lancers :

$$P\left((T > k) \cap (X_k = 1)\right) = p_{k-2} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9} p_{k-2}$$

Si au k-ème lancer le résultat est face et si le motif PP n'est pas apparu avant le rang k, alors le motif PP n'est pas apparu avant le $(k-1)$-ème lancer. On a donc

$$P\left((T > k) \cap (X_k = 0)\right) = P\left((T > k-1) \cap (X_k = 0)\right) = p_{k-1} \times \frac{1}{3}.$$

D'après la réunion disjointe $(\star)$,

$$p_k = \frac{2}{9} p_{k-2} + \frac{1}{3} p_{k-1}$$

de sorte que la suite $(p_k)_{k \geqslant 0}$ vérifie la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ 9p_{k+2} - 3p_{k+1} - 2p_k = 0 \text{ et } p_0 = p_1 = 1$$

2) L'équation caractéristique est $9r^2 - 3r - 2 = 0$ de racines $-1/3$ et $2/3$. Il existe des constantes α et β telles que

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ p_k = \alpha \left(\frac{2}{3}\right)^k + \beta \left(-\frac{1}{3}\right)^k$$

Les données initiales $p_0 = p_1 = 1$ donnent $\alpha = 4/3$ et $\beta = -1/3$. Ainsi,

$$\forall\, k \geqslant 0,\ p_k = \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k + \left(-\frac{1}{3}\right)^{k+1}$$

Pour $k \geqslant 1$,

$$P(T = k) = p_{k-1} - p_k = \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} + \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^k$$

Commentaires :
La formule donne bien la probabilité attendue $P(T = 1) = 0$. De plus,

$$P(T = 2) = P\left(X_1 = 1 \cap X_2 = 1\right) = \frac{4}{9}$$

ce qui est également cohérent.
Un calcul de somme donne $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} P(T = k) = 1$.

3) Notons $(T = +\infty)$ l'événement « le motif PP n'apparaît pas ». On a

$$(T = +\infty) = \bigcap_{k=0}^{+\infty} (T > k)$$

Par continuité décroissante (la famille $(T > k)_{k \geqslant 0}$ est décroissante pour l'inclusion) :

$$P(T = +\infty) = P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} (T > k)\right) = \lim_{k \to \infty} P(T > k) = \lim_{k \to \infty} p_k = 0$$

Ainsi, le motif PP arrive presque sûrement.