exercice 13

1) $L_i(j) = \prod_{\substack{0 \leq k \leq 3 \\ k \neq i}} \frac{j-k}{i-k}$ avec $i, j \in [\![0;3]\!]$

Si $i = j$, $L_i(i) = 1$

Si $i \neq j$, $L_i(j) = 0$ car k va prendre la valeur de j et $\prod_{\substack{k \neq i \\ k \neq j}} \frac{j-k}{i-k} \times \frac{j-j}{i-j} = 0$

Donc $\boxed{\forall i, j \in [\![0;3]\!],\ L_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$ (1)

$E = \mathbb{R}_3[X]$ donc $\dim E = 4$

De plus, soit $B = (L_0, L_1, L_2, L_3)$: $\dim B = 4$

Soit $i \in [\![0;3]\!]$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ tq $\sum_{i=0}^{3} \alpha_i L_i = 0$.

On veut montrer que $\forall i \in [\![0;3]\!]$, $\alpha_i = 0$

Soit $x_k \in \mathbb{R}$, $k \in [\![0;3]\!]$, on a : $\sum_{i=0}^{3} \alpha_i L_i(x_k) = \alpha_k L_k(x_k) = \alpha_k = 0$ avec (1)

Donc $\forall k \in [\![0;3]\!]$, $\alpha_k = 0 \Rightarrow$ la famille (L_0, L_1, L_2, L_3) est libre.

$\boxed{(L_0, L_1, L_2, L_3) \text{ base de } E}$

2) $P, Q \in E$: $\phi(P,Q) = \sum_{k=0}^{3} (P(k) + P(1))(Q(k) + Q(1))$

ce mot tout seul n'a pas vraiment de sens, il faut parler de "forme bilinéaire". Ou alors dis que cette fonction est "à valeurs dans IR".

ϕ est une forme.

$\phi(P,Q) = \sum_{k=0}^{3} (P(k) + P(1))(Q(k) + Q(1)) = \sum_{k=0}^{3} (Q(k) + Q(1))(P(k) + P(1)) = \phi(Q,P)$

donc ϕ est symétrique.

Soit $P, Q, R \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$: $\phi(P + \lambda Q, R) = \sum_{k=0}^{3} (P(k) + \lambda Q(k) + P(1) + \lambda Q(1))(R(k) + R(1))$

$= \sum_{k=0}^{3} (P(k) + P(1))(R(k) + R(1)) + \lambda \sum_{k=0}^{3} (Q(k) + Q(1))(R(k) + R(1))$

Surtout pas !! Elle n'est pas linéaire, elle est bilinéaire. Mais elle est linéaire par rapport à chacune de ses variables.

$\varphi(\lambda(a,b)) = \lambda^2 \varphi(a,b)$
$\neq \lambda \varphi(a,b)$

$= \phi(P,R) + \lambda \phi(Q,R)$

donc ϕ est ~~linéaire~~ (et bilinéaire car symétrique).

Soit $P \in E$, $\phi(P,P) = \sum_{k=0}^{3} (P(k)+P(1))^2$

Somme de termes positifs donc $\phi(P,P) > 0$.

Soit $P \in E$ tq $\phi(P,P) = 0$, donc $\forall k \in [\![0;3]\!]$, $(P(k)+P(1))^2 = 0$

Donc $P(k) = -P(1)$ $\forall k \in [\![0;3]\!]$ $\Rightarrow P(1) = -P(1)$ donc $P(1) = 0$

Ainsi, $\forall k \in [\![0;3]\!]$, $P(k) = 0$.

P est de degré 3 et possède 4 racines donc $P = 0$.

$\boxed{\phi \text{ est un P.S sur } E}$

3) Base de E : (L_0, L_1, L_2, L_3) qu'on veut orthonormaliser. On utilise Gram-Schmidt.

- $e_0 = \dfrac{L_0}{\|L_0\|}$ avec $\|L_0\|^2 = \phi(L_0, L_0)$

$$= \sum_{k=0}^{3} (L_0(k) + L_0(1))^2$$

$$= 1$$

Donc $e_0 = L_0$

- $e_1 = \dfrac{L_1 - \phi(e_0, L_1)e_0}{\|L_1 - \phi(e_0, L_1)e_0\|}$

$$\phi(e_0, L_1) = \sum_{k=0}^{3} (e_0(k) + e_0(1))(L_1(k) + L_1(1))$$

$$= 1$$

$\|L_1 - \phi(e_0, L_1)e_0\| = \|L_1 - L_0\|$

$$\|L_1 - L_0\|^2 = \sum_{k=0}^{3} (L_1(k) - L_0(k) + L_1(1) - L_0(1))^2$$

$$= 6$$

Donc $e_1 = \dfrac{L_1 - L_0}{\sqrt{6}}$

- $e_2 = \dfrac{L_2 - \phi(e_0, L_2)e_0 - \phi(e_1, L_2)e_1}{\|L_2 - \phi(e_0, L_2)e_0 - \phi(e_1, L_2)e_1\|}$

$\phi(e_0, L_2) = 0$ et $\phi(e_1, L_2) = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$

$$\left\| L_2 - \frac{L_1 - L_0}{6} \right\|^2 = \frac{5}{6}$$

Donc $e_2 = \dfrac{6L_2 - L_1 + L_0}{\sqrt{30}}$

• $e_3 = \dfrac{30L_3 + 6L_2 - 7L_1 + 6L_0}{\sqrt{1286}}$

$\boxed{(e_0, e_1, e_2, e_3) \text{ bon de } E}$

Plus simple : on vérifie facilement que (L_0, L_2, L_3) est orthonormale.

On a : $L_1 - L_0 - L_2 - L_3$ est $\perp$ à L_0, L_2 et L_3.

et $\| L_1 - L_0 - L_2 - L_3 \| = 2$ donc

$\left(L_0, L_2, L_3, \dfrac{L_1 - L_0 - L_2 - L_3}{2}\right)$ est une bon.