Devoir surveillé n° 3 - Remarques

Barème.

Toutes les questions sont notées sur 4 points, le total est de 160 points (v1) et 188 points (v2).

Statistiques descriptives.

	Note brute v1	Note finale v1	Note brute v2	Note finale v2
Note maximale	81	17	68	18
Note minimale	25	5	21	6
Moyenne	$\approx 49,69$	$\approx 10,34$	≈ 45	$\approx 12,10$
Écart-type	$\approx 12,68$	$\approx 2,74$	$\approx 12,47$	$\approx 3,14$

Remarques générales.

Il y avait malheureusement une faute de frappe dans les retranscriptions des sujets que j'ai utilisées, et ce pour chacune des deux versions.
Dans la v1, la question 1.d. du second problème contenait une erreur, très préjudiciable pour la suite, j'en suis désolé.

v1 : I. Étude d'un endomorphisme surun espace de polynômes (CCINP 2022, PC, extrait)

1. Si $P \in \mathbb{C}_n[X]$, alors on ne peut pas dire que $\deg P = n$, mais que $\deg P \leqslant n$.

2. Avoir $A(P_1 + \lambda P_2) = B(Q_1 + \lambda Q_2) + (R_1 + \lambda R_2)$ ne signifie pas que $R_1 + \lambda R_2$ est le reste de la division euclidienne : il faut en plus vérifier que $\deg(R_1 + \lambda R_2) \leqslant n$.

3. et 6. L'énoncé donne la solution : si vous ne justifiez pas le résultat en détail et de manière convaincante, vous n'aurez aucun point, n'importe qui est capable de recopier la conclusion et de l'encadrer sans avoir rien compris.

4. Beaucoup trop d'erreurs de calcul, c'est anormal. Je vous rappelle qu'après avoir calculé les solutions d'un système, vous devez les vérifier au brouillon. Si vous trouvez que v est vecteur propre pour la valeur propre λ d'un endomorphisme u, vous devez calculer $u(v)$ et vérifier que vous obtenez bien λv. Ça vous éviterait de donner des résultats totalement fantaisistes.
Si vous écrivez « $C_1 + 2C_2 - C_3 = 0$ », précisez que vous parlez des colonne de la matrice étudiée.

6. T est triangulaire il n'y aucun calcul à faire pour calculer ses valeurs propres ! ! Tous ceux qui ont calculé le po.ca. avec de spivots de Gauss ont fait du travail inutile. Si en plus il y a une erreur de calcul ...

9. Beaucoup ont écrit que D avait une infinité de racines. Je ne comprends pas, on a trouvé $x_0, \dots, x_n$ juste avant, ça en fait $n+1$, pas une infinité.

10. La question 9 assurait que la famille était génératrice. Comme elle a le bon cardinal, on conclut. Montrer qu'elle est libre se fait, mais c'est du travail pour rien.

v1 : II. Étude d'une équation différentielle (E3A 2018, PSI 2, extrait)

Que de problèmes de rédaction ... Le principe de la quantification n'est toujours pas compris par beaucoup d'élèves. L'homogénéité dans une équation non plus : $U_a(f) = \mathrm{e}^{ax} \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-at} f(t)\,\mathrm{d}t$ n'a aucun sens : le membre de droite dépend de x, mais pas celui de gauche. Le membre de gauche devait s'écrire $U_a(f)(x)$. Et je suis bien fatigué de lire en seconde année « e^x est de classe $\mathscr{C}^1$ », « $\sin x$ est décroissante » etc. Ce n'est pas normal.

L'erreur d'énoncé en question 1.d. était bien regrettable et vous a pénélisés, mais cela en a conduit beaucoup à écrire n'importe quoi pour répondre à certaines questions (par exemple les questions 2.d ou 4).

1.a. Rédaction souvent abominable : K et x ne sont jamais quantifiés, les solutions des équations différentielles sont données sans ensembles de départ ni d'arrivée, souvent sous la forme « $z(x) = K\mathrm{e}^{ax}$ avec $K \in \mathbb{R}$ ». À revoir.

1.b. Rédaction trop souvent lue : « soit f et g deux solutions bornées, blablabla, et on arrive à une absurdité ». Si vous ne supposez pas que $f \neq g$, alors on peut très bien avoir $f = g$, et il n'y a aucune absurdité. Donc soit vous supposez que $f \neq g$, et là vous arrivez en effet à une absurdité. Ou alors vous ne supposez rien, et dans ce cas vous devez montrer que $f = g$.

1.c. J'ai lu un grand nombre de fois « $\mathrm{e}{-at}f(t)$ tend vers 0 en $+\infty$, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}{-at}f(t)\,\mathrm{d}t$ converge ». C'est la pire chose que vous puissiez écrire sur les intégrales impropres, c'est montrer que vous n'avez rien compris. Revoyez le cours.
Il ne suffisait pas d'étudier ce qu'il se passait en $+\infty$, il fallait aussi mentionner que l'intégrande était continue en 1.

1.d. Erreur d'énoncé : l'intégrale devait aller de x et $+\infty$, et non de 1 à $+\infty$. Avec cette mauvaise expression, plusieurs questions n'étaient pas faisables. Par contre, vous aviez tout de même le droit de vous rendre compte qu'il y avait un souci, et de le mentionner sur votre copie. Beaucoup ont par exemple réussi à montrer que $U_a(f)$ était bien bornée : quelle arnaque.

2.b. Beaucoup confondent encore application linéaire et sous-espace vectoriel. Non, une application linéaire n'est pas stable par combinaison linéaire ... et $u(0) = 0$ ne fait pas partie de la définition d'application linéaire.

2.c.i. Énormèment d'arnaques. Non, $\displaystyle\int \varphi = 0$ n'implique pas que $\varphi = 0$. Ici, $\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}{-at}f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ n'implique pas que $f = 0$, même si vous rajoutez l'entourloupe « $\mathrm{e}^{-at} > 0$: on ne connaît pas le signe de f.

6. Ne pas oublire de vérifier que $|f| \in \mathscr{E}$.

v2 : Centrale 2017 - PSI, 2ème épreuve

1. et 3. Pour bien faire la question 1, il fallait d'abord répondre à la question 3. L'ordre des questions dans ce devoir n'était pas optimal.

5. Plutôt que de partir sur $\max(AB)_{ij} \leqslant \max(\dots) \leqslant \dots$, qui oblige à utiliser implicitement beaucoup de résultats non démontrés sur les max, il vaut mieux majorer globalement tous les $(AB)_{ij}$: pour tout i, j, $(AB)_{ij} \leqslant \dots \leqslant K$, donc $\max(AB)_{ij} \leqslant K$. En plus il y a moins de caractères à écrire.

6. Le cours (de sup) n'est pas absolument pas su. À revoir de toute urgence.

10. Lisez bien l'énoncé : donner une valeur de a pour laquelle il existe une solution 4-périodique ne répond absolument pas à la question.

11. Beaucoup de remarques sur cette question :
- Il faut déjà montrer que Sol(II.2) est un sev. Et on ne peut pas réutiliser la question **6.** car (II.2) n'est pas une relation de récurrence à coefficients constants.
- Pour la même raison, la dimension de Sol(II.2) n'est absolument pas connue pour l'instant.
- Il ne faut pas oublier de démontrer la linéarité de ψ.

- $\psi(az_n + by_n)$ n'a pas de sens, car l'argument de ψ doit être une suite. Il s'agit donc d'écrire $\psi(a(y_n) + b(z_n))$.
- Si ψ est injective, on ne peut pas conclure que ψ est bijective car « on est en dimension finie ». Déjà on ne sait pas si Sol(II.2) est de dimension finie, et même si c'est le cas, cela ne suffit pas. Il faut avoir dim Sol(II.2)=dim $\mathbb{C}^2$.

12. Si vous parlez de W_{k-1}, il faut prendre k dans $\mathbb{N}^*$ et non dans $\mathbb{N}$.

13. Dire que $((y_k),(z_k))$ est libre n'a rien à voir avec « pour tout k, (y_k, z_k) est libre ».
Dire que (y_k) et (z_k) sont colinéaires n'implique pas qu'il existe λ tel que $(y_k) = \lambda(z_k)$. On a cela si l'on sait que $(z_k) \neq 0$, sinon on a « il existe λ tel que $(y_k) = \lambda(z_k)$ ou tel que $(z_k) = \lambda(y_k)$ ».

15. Il s'agit d'un produit téléscopique : dites-le.

16. La notation $\prod$ est réservée à des produits commutatifs. On ne l'utilise donc pas pour des matrices.

22. On demande ici de prouver l'existence d'une suite vérifiant une certaine condition. Commencer par « soit (Y_k) solution de (III.1) » est donc absurde.

23. erreur d'énoncé : il fallait lire $P_k B^k$ et non $P_k B$.

24. Quand vous utilisez une question précédente, vérifiez les hypothèses ! ! On ne pouvait pas appliquer la question **1.** à la suite (P_k) car ce n'est pas une suite complexe. Mais on pouvait l'utiliser à la suite $(\|P_k\|_0)$.

29. La formulation « la » solution impliquait qu'il fallait montrer l'unicité d'une telle solution (ce que le corrigé ne faisait pas, mais c'est une erreur).
Quantifiez vos t ! !