Espérance, variance etc

I. Calculs d'espérance et de variance

1) L'expérience est la suivante : l'épreuve de l'appel téléphonique de la secrétaire vers un correspondant est répétée n fois et ces n épreuves sont mutuellement indépendantes.
De plus, chaque épreuve n'a que deux issues possibles : le correspondant est joint avec la probabilité p (succès) ou le correspondant n'est pas joint avec la probabilité $1-p$ (échec).
La variable X considérée représente le nombre de succès et suit donc une loi binômiale de paramètres (n,p).
C'est-à-dire $X(\Omega)=[\![0,n]\!]$ et $\forall k\in[\![0,n]\!]$ $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

2) **a)** Soit $i\in[\![0,n]\!]$.
Sous la condition $(X=i)$, la secrétaire rappelle $n-i$ correspondants lors de la seconde série d'appels. Comme cette nouvelle série d'appels se fait dans les mêmes conditions que pour la question 1., sauf pour le nombre de répétitions qui est maintenant égal à $n-i$, alors on se retrouve dans le schéma d'une loi binomiale de paramètre $(n-i,p)$.

Donc $P_{(X=i)}(Y=k)=\begin{cases}\binom{n-i}{k}p^k(1-p)^{n-i-k} & \text{si } k\in[\![0,n-i]\!]\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$

b) $Z(\Omega)=[\![0,n]\!]$ et $\forall k\in[\![0,n]\!]$ $P(Z=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i\cap Y=k-i)=\sum_{i=0}^{k}P_{(X=i)}(Y=k-i)P(X=i)$.

Soit $k\in[\![0,n]\!]$. D'après les questions précédentes,
$P(Z=k)=\sum_{i=0}^{k}\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i}p^k(1-p)^{2n-k-i}$.

Or, d'après l'indication, $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i}=\binom{k}{i}\binom{n}{k}$. Donc

$$\begin{aligned}P(Z=k)&=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{2n-k-i}\\&=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{2n-k}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left(\frac{1}{1-p}\right)^i.\end{aligned}$$

Donc d'après le binôme de Newton,

$$\begin{aligned}P(Z=k)&=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{2n-k}\left(\frac{2-p}{1-p}\right)^k\\&=\binom{n}{k}\left(p(2-p)\right)^k\left((1-p)^2\right)^{n-k}.\end{aligned}$$

On vérifie que $1-p(2-p)=(1-p)^2$ et donc on peut conclure que : Z suit une loi binomiale de paramètre $(n,p(2-p))$.
Remarque : preuve (non demandée dans l'exercice) de l'égalité proposée dans l'indication :
$\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i}=\frac{(n-i)!}{(n-k)!\,(k-i)!}\frac{n!}{i!\,(n-i)!}=\frac{n!}{(k-i)!\,(n-k)!\,i!}=\frac{k!}{(k-i)!\,i!}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=\binom{k}{i}\binom{n}{k}$.

c) D'après le cours, comme Z suit une loi binomiale de paramètre $(n,p(2-p))$, alors :
$E(Z)=np(2-p)$ et $V(Z)=np(2-p)\left(1-p(2-p)\right)=np(2-p)(p-1)^2$.

II. Un couple de variables aléatoires

1) $\forall\,(i,j)\in\mathbb{N}^2$, $P((X=i)\cap(Y=j))=\frac{1}{\mathrm{e}\,2^{i+1}j!}$.
$X(\Omega)=\mathbb{N}$.
Soit $i\in\mathbb{N}$.
$\sum_{j\geqslant 0}\frac{1}{\mathrm{e}\,2^{i+1}j!}=\frac{1}{\mathrm{e}\,2^{i+1}}\sum_{j\geqslant 0}\frac{1}{j!}$ converge et $\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}\,2^{i+1}j!}=\frac{1}{2^{i+1}}$.
Or $P(X=i)=\sum_{j=0}^{+\infty}P((X=i)\cap(Y=j))$ donc $P(X=i)=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}2^{i+1}j!}=\frac{1}{\mathrm{e}2^{i+1}}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j!}=\frac{1}{2^{i+1}}$.

Conclusion : $\forall\, i \in \mathbb{N},\ P(X=i) = \dfrac{1}{2^{i+1}}$.
$Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

Soit $j \in \mathbb{N}$.
$\displaystyle\sum_{i\geqslant 0} \frac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1} j!} = \frac{1}{2\mathrm{e}j!}\sum_{i\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\right)^i$ converge (série géométrique de raison $\frac{1}{2}$) et
$\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1} j!} = \frac{1}{2\mathrm{e}j!}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\mathrm{e}j!}$.
Or $P(Y=j) = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} P((X=i)\cap(Y=j))$.
Donc $P(Y=j) = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}2^{i+1}j!} = \frac{1}{2\mathrm{e}j!}\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{2\mathrm{e}j!}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\mathrm{e}j!}$.
Conclusion : $\forall\, j \in \mathbb{N},\ P(Y=j) = \dfrac{1}{\mathrm{e}j!}$.

2) **a)** On pose $Z = X+1$.
$Z(\Omega) = N^*$.
De plus, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $P(Z=n) = P(X=n-1) = \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.
Donc Z suit une loi géométrique de paramètre $p = \dfrac{1}{2}$.
Donc, d'après le cours, $E(Z) = \dfrac{1}{p} = 2$ et $V(Z) = \dfrac{1-p}{p^2} = 2$.

Donc $E(X) = E(Z-1) = E(Z)-1 = 2-1 = 1$ et $V(X) = V(Z-1) = V(Z) = 2$.
C'est-à-dire $E(X) = 1$ et $V(X) = 2$.

b) Y suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$.
Donc, d'après le cours, $E(Y) = V(Y) = \lambda = 1$.

3) On a : $\forall\, (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $P((X=i)\cap(Y=j)) = P(X=i)P(Y=j)$. Donc les variables X et Y sont indépendantes.

4) $(X=Y) = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}}((X=k)\cap(Y=k))$ et il s'agit d'une union d'événements deux à deux incompatibles donc :

$$P(X=Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} P((X=k)\cap(Y=k)) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}2^{k+1}}\frac{1}{k!}$$
$$= \frac{1}{2\mathrm{e}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!} = \frac{1}{2\mathrm{e}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}.$$

Donc $P(X=Y) = \dfrac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}}}$.

III. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

1) Soit $a \in\,]0,+\infty[$. Pour toute variable aléatoire X telle que X admettant une variance, on a :
$P\left(|X-E(X)| \geqslant a\right) \leqslant \dfrac{V(X)}{a^2}$.

2) On pose $X = \dfrac{S_n}{n}$.
Par linéarité de l'espérance et comme toutes les variables Y_i ont la même espérance, on a $E(X) = E(Y_1)$.
De plus, comme les variables sont indépendantes, on a $V(X) = \dfrac{1}{n^2}V(S_n) = \dfrac{1}{n}V(Y_1)$.
Alors, en appliquant 1. à X, on obtient le résultat souhaité.

3) $\forall i \in \mathbb{N}^*$, on considère la variable aléatoire Y_i valant 1 si la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est rouge et 0 sinon.
Y_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p avec $p = \dfrac{2}{5} = 0,4$.
Les variables Y_i suivent la même loi, sont indépendantes et $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $Y_i \in L^2$.
On a d'après le cours, $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $E(Y_i) = 0,4$ et $V(Y_i) = 0,4(1-0,4) = 0,24$.
On pose $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$. S_n représente le nombre de boules rouges obtenues au cours de n tirages.
Alors $T_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}$ représente la proportion de boules rouges obtenues au cours de n tirages.
On cherche à partir de combien de tirages on a $P(0,35 \leqslant T_n \leqslant 0,45) > 0,95$.

Or

$$\begin{aligned}
&P\left(0,35 \leqslant T_n \leqslant 0,45\right)\\
=&P\left(0,35 \leqslant \frac{S_n}{n} \leqslant 0,45\right) = P\left(-0,05 \leqslant \frac{S_n}{n} - E(Y_1) \leqslant 0,05\right)\\
=&P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \leqslant 0,05\right) = 1 - P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| > 0,05\right).
\end{aligned}$$

On a donc $P\left(0,35 \leqslant T_n \leqslant 0,45\right) = 1 - P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| > 0,05\right)$.

Or, d'après la question précédente, $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant 0,05\right) \leqslant \frac{0,24}{n(0,05)^2}$.

Donc $P\left(0,35 \leqslant T_n \leqslant 0,45\right) \geqslant 1 - \frac{0,24}{n(0,05)^2}$.

Il suffit alors pour répondre au problème de chercher à partir de quel rang n, on a $1 - \frac{0,24}{n(0,05)^2} \geqslant 0,95$.

La résolution de cette inéquation donne $n \geqslant \frac{0,24}{0,05^3}$ c'est-à-dire $n \geqslant 1920$.

IV. Calculs d'espérance et de variance grâce à la fonction génératrice

1) Pour $|t| < \sqrt{2}$, on a par sommation géométrique

$$G_X(t) = \frac{t}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{t^2}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n+1}}{2^{n+1}}$$

On en déduit la loi de X : X prend presque sûrement ces valeurs dans $2\mathbb{N}+1$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(X = 2n+1) = \frac{1}{2^{n+1}}$$

2) Presque sûrement, Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(Y = n) = P(X = 2n-1) = \frac{1}{2^n} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-1}\frac{1}{2}$$

La variable Y suit une loi géométrique de paramètre $1/2$. On sait alors $\mathrm{E}(Y) = 2$ et $\mathrm{V}(Y) = 2$. L'égalité $X = 2Y - 1$ donne $\mathrm{E}(X) = 2\mathrm{E}(Y) - 1$ et $\mathrm{V}(X) = 4\ \mathrm{V}(Y)$ donc $\mathrm{E}(X) = 3$ et $\mathrm{V}(X) = 8$

V. Détermination d'une fonction génératrice

1) On considère la série entière $\sum p_n t^n$ et on note R son rayon de convergence.

La série $\sum p_n$ converge car $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.

Donc $\sum p_n t^n$ converge pour $t = 1$, donc $R \geqslant 1$.
Notons D_{G_X} l'ensemble de définition de G_X.
On a donc : $]-1,1[\subset D_{G_X}$

2) Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On pose $S = X_1 + X_2$.
Prouvons que $\forall t \in]-1,1[,\ G_S(t) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)$.

a) En utlisant le produit de Cauchy de deux séries entières :

Notons R_1 le rayon de convergence de la série entière $\sum P(X_1 = n)t^n$.
Notons R_2 le rayon de convergence de la série entière $\sum P(X_2 = n)t^n$.

Notons R le rayon de convergence de la série entière produit $\sum c_n t^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} P(X_1 = k)P(X_2 = n-k)$.
On a, d'après le cours, $R \geqslant \min\left(R_1, R_2\right)$ et :

$\forall t \in]-R,R[,\ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(X_1 = n)t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(X_2 = n)t^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} P(X_1 = k)P(X_2 = n-k)\right)t^n$
Or, on a vu dans la question 1. que $R_1 \geqslant 1$ et $R_2 \geqslant 1$.

Donc, $R \geqslant 1$.
Donc, par produit de Cauchy pour les séries entières,
$\forall t \in]-1,1[,\ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(X_1 = n)t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(X_2 = n)t^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} P(X_1 = k)P(X_2 = n-k)\right)t^n$. (*)
De plus, pour tout entier naturel n,

$(S = n) = (X_1 + X_2 = n) = \bigcup_{k=0}^{n}\left((X_1 = k) \cap (X_2 = n-k)\right)$ (union d'événements deux à deux incompatibles).

Donc : $P(S=n)=\sum_{k=0}^{n} P(X_1=k)P(X_2=n-k)$. (**)

Donc, d'après (*) et (**), $\forall t \in]-1,1[$, $G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)=\sum_{n=0}^{+\infty} P(S=n)t^n$.

C'est-à-dire, $\forall t \in]-1,1[$, $G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)=G_S(t)$.

b) En utilisant uniquement la définition de de $G_X(t)$:

Soit $t \in]-1,1[$.
D'après 1., t^{X_1} et t^{X_2} admettent une espérance.
De plus, $G_{X_1}(t)=E[t^{X_1}]$ et $G_{X_2}(t)=E[t^{X_2}]$.
X_1 et X_2 sont indépendantes donc t^{X_1} et t^{X_2} sont indépendantes.
Donc $t^{X_1}t^{X_2}=t^S$ admet une espérance et $E[t^S]=E[t^{X_1}]E[t^{X_2}]$.
C'est-à-dire, $G_S(t)=G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)$.

3) Soit S_n variable aléatoire égale à la somme des numéros tirés.
Soit $i \in [\![1,n]\!]$.
On note X_i la variable aléatoire égale au numéro tiré au $i^{\text{ème}}$ tirage.
$X_i(\Omega)=\{0,1,2\}$.
De plus, $P(X_i=0)=\frac{1}{4}$, $P(X_i=1)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ et $P(X_i=2)=\frac{1}{4}$.
Donc, $\forall t \in]-1,1[$, $G_{X_i}(t)=E[t^{X_i}]=t^0P(X_i=0)+t^1P(X_i=1)+t^2P(X_i=2)$.
Donc, $\forall t \in]-1,1[$, $G_{X_i}(t)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}t^2=\frac{1}{4}(t+1)^2$.
On a : $S_n=X_1+X_2+...+X_n$.

De plus, les variables aléatoires $X_1,X_2,...,X_n$ sont indépendantes.
D'après 2., on en déduit que : $\forall t \in]-1,1[$, $G_{S_n}(t)=G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)....G_{X_n}(t)$.
C'est-à-dire, $\forall t \in]-1,1[$, $G_{S_n}(t)=\frac{1}{4^n}(1+t)^{2n}$.

Ou encore, $\forall t \in]-1,1[$, $G_{S_n}(t)=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\frac{1}{4^n}t^k$.

Or, $\forall t \in]-1,1[$, $G_{S_n}(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}P(S_n=k)t^k$.

Donc, par unicité du développement en série entière :

$S(\Omega)=[\![0,2n]\!]$ et $\forall k \in [\![0,2n]\!]$, $P(S_n=k)=\binom{2n}{k}\frac{1}{4^n}=\binom{2n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}$

Donc, S_n suit une loi binomiale de paramètre $(2n,\frac{1}{2})$.