Exercice 61

Soit $a > -1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{+\infty} x^a e^{-nx} dx$

(1)

- Soit $f_n : x \mapsto x^a e^{-nx}$, f_n est continue sur $]0, +\infty[$
- Au voisinage de $x \to +\infty$, $x^a e^{-nx} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ par croissances comparées
- Au voisinage de $x \to 0$, $x^a e^{-nx} \underset{0}{\sim} x^a$

Or $\int_0^1 \left(\frac{1}{x}\right)^{-a} dx$ converge pour $-a < 1$ soit $a > -1$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ I_n existe

(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $I_n = \int_0^{+\infty} x^a e^{-nx} dx$

changement de variable
$u = nx$
$du = n dx$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{n}\right)^a e^{-u} \frac{du}{n}$$

$$= \frac{1}{n^{a+1}} \int_0^{+\infty} u^a e^{-u} du$$

Or $J = \int_0^{+\infty} u^a e^{-u} du$ est une intégrale convergente avec les mêmes arguments que (1)

Donc $I_n = O\left(\frac{1}{n^{a+1}}\right)$ $a+1>0$

$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

On pouvait également utiliser la convergence simple de f_n vers 0, et le théorème de convergence dominée avec $|f_n| <= f_1$