Devoir surveillé n° 5 – v1

Durée : 4 heures, calculatrices et documents interdits

CCINP 2007 – MP – Mathématiques 1

PARTIE PRÉLIMINAIRE

Les résultats de cette partie seront utilisés plusieurs fois dans le problème.

1) Fonction Gamma d'Euler

a) Soit $x \in]0,+\infty[$, montrer que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$ est integrable sur $]0,+\infty[$.
On pose, pour $x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$

b) Determiner, pour $x \in]0,+\infty[$, une relation entre $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$ et en déduire $\Gamma(n)$ pour tout entier naturel non nul n.

2) Fonction zêta de Riemann

On définit la fonction zêta sur $]1,+\infty[$ par $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

On connait $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \dfrac{\pi^4}{90}$, *on sait que pour p entier pair, $\zeta(p)$ est de la forme $q\pi^p$ où q est un rationnel ; il a été démontré que certains $\zeta(p)$ pour p entiers impairs sont irrationnels mais on ne sait pas s'ils le sont tous. On se propose de rechercher des valeurs approchées de ces réels $\zeta(p)$.*

a) On note, pour n entier naturel non nul et x réel $x > 1$, $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} = \zeta(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x}$ Prouver que, pour n entier naturel non nul et x réel $x > 1$, $R_n(x) \leqslant \dfrac{1}{(x-1)n^{x-1}}$

b) On fixe l'entier $p \geqslant 2$ et un reel $\varepsilon > 0$. Indiquer une valeur de n pour laquelle on a $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} - \zeta(p)\right| \leqslant \varepsilon$

PREMIÈRE PARTIE : SUITES DE FONCTIONS

Préliminaire : Dans les questions 3 et 4 suivantes, on n'utilisera pas pour les démonstrations le théorème de convergence dominée.

3) Exemples et contre-exemples

a) Déterminer une suite (f_n) de fonctions continues et affines par morceaux sur le segment $[0,1]$ qui converge simplement mais non uniformément vers une fonction

f sur $[0,1]$ et telle que la suite de réels $\left(\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)$ ne converge pas vers le réel $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$

Remarque : on peut se contenter d'une vision graphique et, dans ce cas, il est inutile d'exprimer $f_n(x)$, mais on attend une justification des deux propriétés demandées

b) Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur le segment $[0,1]$, démontrer qu'il est possible que la suite de réels $\left(\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)$ converge vers le réel $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ sans que la convergence de la suite de fonctions (f_n) ne soit uniforme sur $[0,1]$.

4) Cas d'un intervalle quelconque

a) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ définies sur $I = [0,+\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{x^n \mathrm{e}^{-x}}{n!}$$

converge uniformément sur $[0,+\infty[$.

A-t-on $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim\limits_{n\to+\infty} (f_n(x))\,\mathrm{d}x$?

Remarque : on pourra utiliser la formule de Stirling sans la démontrer.

b) On considère (f_n) une suite de fonctions continues et intégrables sur I intervalle borné, qui converge uniformément vers une fonction f sur I.

i) Justifier l'existence d'un entier naturel p tel que, pour tout réel $x \in I$, $|f(x)| \leqslant 1 + |f_p(x)|$ et en déduire que f est intégrable sur I.

ii) Montrer que la suite de réels $\left(\int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)$ converge vers le réel $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$.
On notera $\ell(I)$ la longueur de l'intervalle I.

5) Théorème de convergence dominée pour les suites de fonctions

a) Rappeler pourquoi il est inutile de vérifier, lorsqu'on utilise le théorème de convergence dominée, que les fonctions f_n sont intégrables sur I et justifier que f est intégrable sur I.

b) Exemples

i) Montrer à l'aide d'un exemple simple que ce théorème peut être pratique sur un segment I sur lequel la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers la fonction f.

ii) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

DEUXIÈME PARTIE : SÉRIES DE FONCTIONS

6) Théorème de convergence uniforme pour les séries de fonctions

Rappeler le théorème d'intégration terme à terme sur un segment pour une série de fonctions.

7) **Application**

Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

8) **Intégration terme à terme d'une série de fonctions**

a) Rappeler le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque pour une série de fonctions.

Application : théorème de Hardy

On suppose que $\sum a_n$ est une série de réels absolument convergente.

b) Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\left(\sum \frac{a_n x^n}{n!}\right)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers une fonction f continue sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que la fonction $x \mapsto f(x)\mathrm{e}^{-x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et exprimer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ comme la somme d'une série numérique.

9) **Cas où les théorèmes d'intégration terme à terme ne s'appliquent pas**

a) Montrer que, la série de fonctions $(\sum(-1)^n x^n)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas uniformément sur l'intervalle borné $I = [0, 1[$

b) Montrer que, pour la série de fonctions $(\sum(-1)^n x^n)_{n\geqslant 0}$ sur $I = [0, 1[$, les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque ne sont pas toutes vérifiées.

c) Montrer que, néanmoins, $(\sum \displaystyle\int_0^1 (-1)^n x^n\,\mathrm{d}x)_{n\geqslant 0}$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n x^n\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n\right) \mathrm{d}x$$

10) **Théorème de convergence monotone**

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues par morceaux et intégrables sur un intervalle I qui converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I.

On suppose que toutes les fonctions f_n sont positives sur I et que la fonction f est intégrable sur I.

On pose, pour tout entier naturel n non nul et tout $x \in I$, $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(x)$.

Montrer que la suite de fonctions (S_n) vérifie les hypothèses du théorème de convergence dominée, et en déduire que : la série $(\sum \displaystyle\int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x)_{n\geqslant 0}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) \mathrm{d}x$

11) **Application à la physique**

a) Calculer, après avoir justifié son existence, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\mathrm{e}^{\,t}-1}\,\mathrm{d}t$

On détaillera toutes les étapes et on pourra remarquer que, pour $t \in]0, +\infty[$, on a $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\,t}-1} = \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}$.

Cette intégrale intervient notamment dans la théorie du rayonnement du corps noir.

La loi de Planck donne l'expression de la densité spectrale d'énergie électromagnétique u_λ rayonnée par le corps noir, en fonction de la longueur d'onde par la formule :

$$u_\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{exp\left(\frac{hc}{k_B\lambda T}\right)-1}$$

où h et k_B sont les constantes de Planck et de Boltzmann, c la célérité de la lumière dans le vide, λ la longueur d'onde et T la température.

Ainsi, la densité volumique totale d'énergie électromagnétique u (rayonnée sur tout le spectre des longueurs d'onde) s'écrit : $u = \displaystyle\int_0^{+\infty} u_\lambda\, d\lambda$.

Si on note M l'exitance totale d'un corps noir on sait que M et u sont liés par la relation $M = \dfrac{c}{4}u$.

b) Démontrer la loi de Stefan : $M = \sigma T^4$ où $\sigma = \dfrac{2\pi^5(k_B)^4}{15h^3c^2}$

12) Généralisation

a) Exprimer de même pour x réel $x > 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{\mathrm{e}^{\,t}-1}\,\mathrm{d}t$ en fonction de $\Gamma(x)$ et $\zeta(x)$

b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^{\,t}-1}\,\mathrm{d}t$ et exprimer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^6}{\mathrm{e}^{\,t}-1}\,\mathrm{d}t$ en fonction de $\zeta(7)$.

— **FIN** —