

Topologie des evns

I. Un peu de topologie dans $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$

- 1) a) Soit $f \in F$. Alors la boule ouverte de centre f , de rayon $\frac{1}{2} \int_0^1 f$ (qui est bien strictement positif) est incluse dans F . En effet, si $g \in B\left(f, \frac{1}{2} \int_0^1 f\right)$ alors $\|g - f\|_\infty < \frac{1}{2} \int_0^1 f$ donc $f - \frac{1}{2} \int_0^1 f \leq g \leq f + \frac{1}{2} \int_0^1 f$.

Donc par croissance de l'intégrale, $\int_0^1 g \geq \int_0^1 f - \frac{1}{2} \int_0^1 f = \frac{1}{2} \int_0^1 f > 0$ donc $g \in F$.

- b) La fonction $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_0^1 f$ vérifie : pour tout $f, g \in E$, $|\varphi(f) - \varphi(g)| \leq \int_0^1 \|f - g\|_\infty = \|f - g\|_\infty$. Elle est donc 1-lipschitzienne, et ainsi elle est continue. Or $F = \varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ et \mathbb{R}_+^* est un ouvert, donc F aussi.

- 2) a) Soit $f \in A$. Alors $|f(0) - g(0)| = 1$ donc $\|f - g\|_\infty \geq 1$. Donc $\mathcal{B}(g, \frac{1}{2}) \cap A = \emptyset$: g n'est pas adhérent à A pour $\|\cdot\|_\infty$.
- b) Soit f_n telle que $f_n(x) = 0$ si $x > \frac{1}{n}$ et $f_n(x) = nx$ si $x \in [0, \frac{1}{n}]$. Alors $f_n \in A$ et $\|g - f_n\|_1 = \int_0^{1/n} (1 - nx) dx = \frac{1}{2n}$. Donc g est limite d'une suite d'éléments de A : c'est un point adhérent à A pour $\|\cdot\|_1$.

II. Deux exercices sur la densité

- 1) $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert car image réciproque de l'ouvert \mathbb{R}^* par l'application continue \det .
L'application $\lambda \mapsto \det(A - \lambda I_n)$ est polynomiale non nulle en λ donc possède un nombre fini de racine.
Par suite : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall \alpha > 0, B(A, \alpha) \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$.
- 2) a) Montrer que $g(0) = 0$, puis que $\forall x, ng(nx) = ng(x)$ puis que $\forall x, qg(qx) = qg(x)$ puis conclure par densité des rationnels.
- b) Composer par le log.

III. Distance à un fermé borné

Soit l'application $u : A \rightarrow E, y \mapsto x - y$. Pour tout $y, z \in A$, $\|u(y) - u(z)\| = \|y - z\|$. Étant 1-lipschitzienne, u est continue.

L'application $v : E \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto \|y\|$ vérifie : pour tout $y, z \in E$, $|v(y) - v(z)| \leq \|y - z\|$ par inégalité triangulaire. Elle est donc elle aussi 1-lipschitzienne et continue.

Par composition $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto \|x - y\|$ est continue (on aurait pu démontrer directement qu'elle est 1-lipschitzienne).

Puisque A est fermée et bornée et que E est de dimension finie, φ est bornée et atteint ses bornes. En particulier elle a un minimum, ce qui répond aux deux questions.

IV. Norme subordonnée

- 1) u étant continue, il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout x , $\|u(x)\| \leq k \|x\|$. Donc $\left\{ \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}, x \in E \setminus \{0\} \right\}$ est majoré. Comme il est non vide, M_1 existe.

De plus, $\left\{ \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}, x \in E \setminus \{0\} \right\} = \{\|u(x/\|x\|)\|, x \in E \setminus \{0\}\} = \{\|u(x)\|, x \in E \text{ t.q. } \|x\| = 1\}$, donc M_2 existe, et vaut d'ailleurs M_1 .

Le dernier ensemble est inclus dans \mathbb{R}_+ , non vide car u est continue, et minoré par 0, donc M_3 existe.

- 2) Nous avons déjà remarqué que $M_1 = M_2$.

M_1 majore $\left\{ \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}, x \in E \setminus \{0\} \right\}$ donc pour tout x , $\|u(x)\| \leq M_1 \|x\|$.

Donc $M_1 \in \{k \geq 0 \text{ t.q. } \forall x \in E, \|u(x)\| \leq k \|x\|\}$, donc $M_3 \leq M_1$.

Réciproquement, soit $k \in \{k \geq 0 \text{ t.q. } \forall x \in E, \|u(x)\| \leq k \|x\|\}$. Donc si $x \neq 0$, $\frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \leq k$. Ainsi k est un majorant de $\left\{ \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}, x \in E \setminus \{0\} \right\}$, et donc $M_1 \leq M_3$.

Finalement $M_1 = M_2 = M_3$.