

Devoir surveillé n° 1

Durée : 2 heures, calculatrices et documents interdits

Partie I.

Notons $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{e^t}{1+t^2}$. Il est clair que f est définie sur \mathbb{R} tout entier, et que cette fonction est de classe \mathcal{C}^∞ . Nous noterons \mathcal{C}_f la courbe représentative de f .

- 1) Quelle est la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $-\infty$?
- 2) Qu'en déduisez-vous au sujet de \mathcal{C}_f ?
- 3) Complétez chacune des phrases suivantes au moyen de l'une des locutions « est équivalent à », « est négligeable devant » et « est dominé par ».

$f(t) \dots\dots\dots e^t$ lorsque t tend vers $+\infty$

$f(t) \dots\dots\dots \frac{e^t}{t}$ lorsque t tend vers $+\infty$

$f(t) \dots\dots\dots \frac{e^t}{t^2}$ lorsque t tend vers $+\infty$

Lorsque plusieurs réponses sont acceptables, vous donnerez la plus précise. Bien entendu, vous justifierez votre réponse.

- 4) Quelle est la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$?
- 5) Soit $t \in \mathbb{R}$, expliciter $f'(t)$.
- 6) Dressez le tableau des variations de f .
- 7) Soit $t \in \mathbb{R}$, expliciter $f''(t)$.
- 8) Montrer que l'équation $f''(t) = 0$ possède deux solutions réelles : l'une est évidente, l'autre sera notée α . Vous ne chercherez pas à calculer α .
- 9) Prouver l'encadrement $-\frac{1}{5} < \alpha < 0$.
- 10) Expliciter le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.
Que pouvez-vous en déduire concernant \mathcal{C}_f ?
- 11) Tracez la courbe représentative de f . Vous préciserez son allure au voisinage du point d'abscisse 1.

Partie II.

Au vu des expressions de $f(t)$, $f'(t)$ et $f''(t)$, nous nous proposons d'établir que l'assertion $\mathcal{A}(n)$ suivante est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

Il existe un polynôme P_n tel que $\forall t \in \mathbb{R}, f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)e^t}{(1+t^2)^{n+1}}$.

Vous allez raisonner par récurrence sur n .

- 12) Il est clair que $\mathcal{A}(n)$ est vraie pour $n \in \{0, 1, 2\}$;

Vous dresserez simplement un tableau donnant l'expression de P_n pour ces valeurs de n .

13) Fixons $n \in \mathbb{N}$, et supposons l'assertion $\mathcal{A}(n)$ acquise. Etablissez l'assertion $\mathcal{A}(n+1)$;

Vous déterminerez l'expression de P_{n+1} en fonction de P_n et P'_n .

Il résulte donc des questions **12)** et **13)** que l'assertion $\mathcal{A}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

14) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n a tous ses coefficients dans \mathbb{Z} .

15) Préciser, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré et le coefficient dominant de P_n .

16) Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression simple de $c_n = P_n(i)$, où i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Partie III.

Notons $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$. Ainsi F est la primitive de f qui s'annule en 0.

17) Quel est le sens de variation de F ?

18) Montrer que $F(x)$ possède une limite ℓ finie lorsque x tend vers $-\infty$. Vous ne chercherez pas à expliciter cette limite.

19) Prouver l'encadrement $-1 \leq \ell \leq 0$.

20) Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de F , au point d'abscisse 0.

21) Expliciter le développement limité de F à l'ordre 4 au voisinage de 0.

Nous nous proposons d'étudier le comportement de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Nous noterons, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$J(x) = \int_1^x \frac{te^t}{(1+t^2)^2} dt, \quad K(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t^3} dt \quad \text{et} \quad L(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t^4} dt.$$

22) Prouver l'existence d'une constante A telle que $F(x) = f(x) + A + 2J(x)$ pour tout réel x .

23) Pour $x \geq 1$, placer les uns par rapport aux autres les réels 0, $J(x)$ et $K(x)$.

24) Avec une intégration par parties soigneusement justifiée, montrer que $K(x) - 3L(x)$ est négligeable devant $\frac{e^x}{x^2}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

25) En découpant l'intervalle $[1, x]$ sous la forme $[1, x^{3/4}] \cup [x^{3/4}, x]$, montrer que $L(x)$ est négligeable devant $\frac{e^x}{x^2}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

26) En déduire un équivalent simple de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

27) Exploiter les résultats des questions **17)**, **19)**, **20)** et **26)** pour donner l'allure de la courbe représentative de F .

— FIN —