IX. Espaces probabilisés

11 décembre 2024

Table des matières

B - Probabilités, variables aléatoires discrètes et lois usuelles

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Univers, événements, variables aléatoires discrètes	
Univers Ω, tribu $\mathscr{A}$. Espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$.	On se limite à la définition et à la stabilité par les opérations ensemblistes finies ou dénombrables. Traduction de la réalisation des événements $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ à l'aide des quantificateurs $\exists$ et $\forall$.
Événements.	Généralisation du vocabulaire relatif aux événements introduit en première année.
b) Probabilité	
Probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$, σ-additivité.	Notation $P(A)$.
Espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire. Croissance de la probabilité.	
Continuité croissante, continuité décroissante.	Application : pour une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements (non nécessairement monotone), limites quand n tend vers l'infini de $$P\Big(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\Big) \quad \text{et} \quad P\Big(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\Big).$$
Sous-additivité : $P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.	En cas de divergence de la série à termes positifs $\sum P(A_n)$, on rappelle que $$\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = +\infty.$$
Événement presque sûr, événement négligeable.	Système quasi-complet d'événements.
c) Probabilités conditionnelles	
Si $P(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par la relation $P(A\|B) = P_B(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$. L'application P_B définit une probabilité. Formule des probabilités composées.	
Formule des probabilités totales.	Si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est un système complet ou quasi-complet d'événements, alors $$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B\cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B\|A_n)P(A_n)$$ On rappelle la convention $P(B\|A_n)P(A_n) = 0$ lorsque $P(A_n) = 0$.
Formule de Bayes.	
e) Événements indépendants	
Indépendance de deux événements.	Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B équivaut à $$P(A\|B) = P(A).$$
Indépendance d'une famille finie d'événements.	L'indépendance deux à deux n'entraîne pas l'indépendance.
Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi.	Extension au cas de n événements.

Nous avons vu dans la première partie de ce chapitre que la notion de probabilité sur un univers fini ne pouvait pas se généraliser facilement à un univers infini.
Les théories des ensembles dénombrables et des familles sommables vont nous permettre de le faire.
Nous procéderons en deux temps. Tout d'abord, grâce à la sommabilité nous pourrons définir la notion de σ-additivité, et ainsi de probabilité sur un univers dénombrable. Sur ces univers, les évènements que nous pourrons considérer seront toutes les parties de l'univers, comme sur un univers fini.
Ce ne sera plus le cas dans le cas d'un univers infini, et nous aurons dans un second temps besoin de la définition de tribu.

1 Probabilité sur un univers fini ou dénombrable

1.1 Définition de probabilité

Définition 1.1.1 (Probabilité sur un univers au plus dénombrable)**.**
Soit Ω un ensemble au plus dénombrable. Une ***probabilité*** sur Ω est une application P définie sur $\mathscr{P}(\Omega)$ telle que

(i) $\forall A \in \mathscr{P}(\Omega)$, $P(A) \in [0, 1]$;

(ii) $P(\Omega) = 1$;

(iii) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de parties de Ω deux à deux disjointes, alors

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

Cette dernière propriété est appelée ***σ-additivité*** (on utilise en général le préfixe σ pour signifier le passage du fini au dénombrable).

1.2 Quelques propriétés

Proposition 1.2.1.
Soit P une probabilité sur un univers fini ou dénombrable Ω.

(i) $P(\varnothing) = 0$.

(ii) Si $(A, B) \in P(\Omega)^2$ et $(A \cap B) = \varnothing$, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

(iii) Si les $(A_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ sont des parties de Ω deux-à-deux disjointes, alors $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$.

Remarque 1.2.2.
Si Ω est fini, $\mathscr{P}(\Omega)$ l'est aussi, et donc la σ-additivité n'est rien de plus que l'additivité.

1.3 Univers fini

Si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$, P est entièrement définie par la donnée des $P(\omega_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, qui forment une famille de réels positifs dont la somme vaut 1. Et, pour toute partie A de Ω,

$$P(A) = \sum_{\omega\in A} P(\{\omega\})$$

Les probabilités des « évènements élémentaires » (les singletons) déterminent donc P.

1.4 Univers dénombrable

Le résultat précédent s'adapte, grâce à la sommabilité :

Proposition 1.4.1 (Germe de probabilité)**.**
Soit Ω un ensemble dénombrable. Pour toute famille $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ de réels

positifs sommable et de somme 1, il existe une unique probabilité sur $\mathscr{P}(\Omega)$ telle que

$$\forall\, \omega \in \Omega \qquad P(\{\omega\}) = p_\omega$$

Cette probabilité vérifie

$$\forall\, A \in \mathscr{P}(\Omega) \qquad P(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$$

Ici, encore une fois, P est définie de manière unique par les probabilités des singletons, qu'on appelle évènements élémentaires.
On obtient ainsi toutes les probabilités possibles sur $\mathscr{P}(\Omega)$.

2 Espaces probabilisables

On veut définir une probabilité sur un ensemble Ω non dénombrable.
La première difficulté est qu'on n'arrive pas en général à définir la probabilité de toutes les parties de Ω (contrairement au cas fini ou dénombrable).
Un théorème d'Ulam dit que si Ω est en bijection avec $\mathbb{R}$, si P est une probabilité définie sur $\mathscr{P}(\Omega)$, alors il existe une partie dénombrable D de Ω telle que $P(D) = 1$ et donc $P(\Omega \backslash D) = 0$.
On ne pourra donc attribuer une probabilité qu'à certaines parties de Ω, ce sont ces parties qui seront appelées ***évènements***. Pour que P ait les propriétés qu'on attend d'une probabilité, ces évènements doivent former une ***tribu***.

2.1 Tribus

Définition 2.1.1 (Tribu)**.**
Soit Ω un ensemble. On appelle ***tribu*** sur Ω toute partie $\mathscr{A}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ vérifiant :

(i) $\varnothing \in \mathscr{A}$;

(ii) $\forall\, A \in \mathscr{A},\ \overline{A} \in \mathscr{A}$ [stabilité par passage au complémentaire] ;

(iii) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{A}$, $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}$ [stabilité par réunion dénombrable].

Remarque 2.1.2.
Avec le point (ii), le point (i) peut être remplacé par : $\Omega \in \mathscr{A}$.

Exemple 2.1.3.

- $\mathscr{P}(\Omega)$ est une tribu de Ω.
- $\{\varnothing, \Omega\}$ est une tribu de Ω.
- Si $A \subset \Omega$, $\left\{\varnothing, A, \overline{A}, \Omega\right\}$ est une tribu de Ω, et c'est la plus petite contenant A.

Proposition 2.1.4.
Une tribu est stable par réunion finie ou dénombrable et par intersection finie ou dénombrable.
Si $N \in \mathbb{N}$ et $\mathscr{A}$ est une tribu sur Ω,

(i) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{A}$, $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}$;

(ii) Pour tout $A, B \in \mathscr{A}$, $A \cup B \in \mathscr{A}$;

(iii) Pour tout $A, B \in \mathscr{A}$, $A \cap B \in \mathscr{A}$;

(iv) Pour tout $A, B \in \mathscr{A}$, $A \backslash B \in \mathscr{A}$;

(v) Si $(A_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ est une famille finie d'éléments de $\mathscr{A}$, $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{N} A_n \in \mathscr{A}$;

(vi) Si $(A_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ est une famille finie d'éléments de $\mathscr{A}$, $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{N} A_n \in \mathscr{A}$.

Démonstration. (i) $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n = \overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty} \bar{A}_n}$.

(ii) Posons $A_0 = A$, $A_1 = B$ et pour tout $n \geqslant 2$, $A_n = \varnothing$. Alors $A \cup B = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$.

(iii) Posons $A_0 = A$, $A_1 = B$ et pour tout $n \geqslant 2$, $A_n = \Omega$. Alors $A \cap B = \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$, et on utilise le point (i).

(iv) $A \backslash B = A \cap \overline{B}$.

(v) Même méthode que le point (ii).

(vi) Même méthode que le point (iii).

□

2.2 Évènements et vocabulaire

Définition 2.2.1 (Espace probabilisable)**.**
On appelle ***espace probabilisable*** tout couple $(\Omega, \mathscr{A})$ formé d'un ensemble et d'une tribu sur cet ensemble. Les éléments de $\mathscr{A}$ seront appelés les ***évènements***.

- Un ***évènement élémentaire*** est un singleton (en supposant que les singletons appartiennent à la tribu).
- Si A est un évènement, $\overline{A}$ est l'***évènement contraire***.
- L'évènement $A \cap B$ est appelé A ***et*** B ou ***conjonction*** de A et B.
- L'évènement $A \cup B$ est appelé A ***ou*** B ou ***disjonction*** de A et B.
- Deux évènements A et B sont dits ***incompatibles*** lorsque $A \cap B = \varnothing$.
- On dit que l'évènement A ***implique*** l'évènement B si $A \subset B$.
- L'***évènement impossible*** est $\varnothing$, l'***évènement certain*** est Ω.

Exemple 2.2.2.
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements de l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$.

- L'évènement $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ correspond à la réalisation de tous les A_n.
- L'évènement $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ correspond à la réalisation d'au moins un A_n.
- L'évènement $\bigcup_{N=0}^{+\infty} \bigcap_{n=N}^{+\infty} A_n$ correspond à la réalisation de tous les A_n à partir d'un certain rang.
- L'évènement $\bigcap_{N=0}^{+\infty} \bigcup_{n=N}^{+\infty} A_n$ correspond à la réalisation d'une infinité de A_n.

Remarque 2.2.3.
Notons que les ensembles décrits dans l'exemple au dessus sont bien éléments de la tribu $\mathscr{A}$.

2.3 Probabilité sur un espace probabilisable

Définition 2.3.1 (Probabilité sur un espace probabilisable)**.**
Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. Une ***probabilité*** sur $(\Omega, \mathscr{A})$ est une application P définie sur $\mathscr{A}$ telle que

(i) $\forall A \in \mathscr{A},\ P(A) \in [0,1]$;

(ii) $P(\Omega) = 1$;

(iii) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'évènements deux à deux incompatibles,
$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

Cette dernière propriété est appelée ***σ-additivité***.

Définition 2.3.2 (Espace probabilisé)**.**
On appelle ***espace probabilisé*** tout triplet $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ formé d'un ensemble Ω, d'une tribu $\mathscr{A}$ sur Ω et d'une probabilité P sur $\mathscr{A}$.

Proposition 2.3.3 (Propriétés élémentaires)**.**
Soit P une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$. Alors

(i) Si A et B sont deux évènements incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;

(ii) Si les $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ sont des évènements deux-à-deux incompatibles, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(A_k) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant 1$;

(iii) Si $A \in \mathscr{A}$, $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ – en particulier $P(\varnothing) = 0$;

(iv) Si $A, B \in \mathscr{A}$ tels que $A \subset B$, alors $P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$. En particulier, $P(A) \leqslant P(B)$ [croissance de la probabilité] ;

(v) Si $A, B \in \mathscr{A}$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;

(vi) Si les $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ sont des évènements, $\displaystyle P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$.

Démonstration. (i) Avec la définition et en posant $A_0 = A$, $A_1 = B$ et $A_k = \varnothing$ pour $k \geqslant 2$.

(ii) Par récurrence à partir du point précédent.

(iii) Avec le point (i) et car $\Omega = A \sqcup \bar{A}$.

(iv) $B = A \sqcup (B \backslash A)$.

(v) $A \cup B = A \sqcup (B \backslash (A \cap B))$.

(vi) Par récurrence à partir du point (iv).

□

Proposition 2.3.4 (Inégalité de Boole – σ-sous additivité)**.**
Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'évènements, $\displaystyle P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)$.

Démonstration.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $\displaystyle B_n = A_n \backslash \left(\bigcup_{k=0}^{n-1} A_k\right)$.

Montrons alors que les B_n sont deux à deux disjoints, et que $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$.

Pour le premier point, soit $i \neq j$ et $x \in B_i \cap B_j$. Supposons par exemple que $i < j$. Alors $x \in B_i$ et $B_i \subset A_i$, donc $x \in A_i$. Puisque $i < j$, $\displaystyle x \in \bigcup_{k=0}^{j-1} A_k$, et donc $x \notin B_j$: c'est absurde.

Pour le second point, puisque pour tout n, $B_n \subset A_n$, alors $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$.

Réciproquement, soit $\displaystyle x \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in A_n$. Soit $\mathscr{E} = \{k \in \mathbb{N},\ x \in A_k\}$. Nous venons de voir que $\mathscr{E}$ est non vide, donc il admet un minimum, noté n_0. Alors $x \in A_{n_0}$, et pour tout $k < n_0$, $x \notin A_k$. Cela signifie exactement que $x \in B_{n_0}$, donc $\displaystyle x \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$.

Poursuivons : $B_n \subset A_n$, donc par croissance $P(B_n) \leqslant P(A_n)$. De tout cela il vient

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) &= P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(B_n) \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n). \end{aligned}$$

□

Remarque 2.3.5.
On observera que cette dernière somme peut très bien valoir $+\infty$, si la famille $(P(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas sommable, c'est-à-dire si la série $\sum P(A_n)$ diverge. C'est ce qui rend ce résultat assez peu utilisé, car nous avons dans tous les cas $\displaystyle P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant 1$.

2.4 Continuité monotone

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.

Définition 2.4.1 (Suite d'évènements monotone)**.**
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements.
On dit quelle est ***croissante*** (resp. ***décroissante***) si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$ (resp. $A_n \supset A_{n+1}$).

Théorème 2.4.2 (Continuité monotone)**.**

(i) **Continuité croissante :** Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'évènements. Alors

$$P(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

(ii) **Continuité décroissante :** Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'évènements. Alors

$$P(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

Démonstration. (i) Comme dans la démonstration de l'inégalité de Boole, posons $B_0 = A_0$ puis, pour tout $n \geqslant 1$, $B_n = A_n \backslash A_{n-1}$.
Alors de la même manière que dans la démonstration de l'inégalité de Boole, puisque la suite (A_n) est croissante pour l'inclusion, les évènements de la suite (B_n) sont deux à deux disjoints. Et de plus

$$A_n = \bigcup_{k=0}^{n} B_k \text{ et } \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$$

Par conséquent

$$P\left(A_n\right) = \sum_{k=0}^{n} P\left(B_k\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{n=0}^{+\infty} P\left(B_n\right)$$

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P\left(B_n\right) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

(ii) Posons $B_n = \bar{A}_n$. Alors (B_n) est une suite croissante d'évènements avec

$$\overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{B_n} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$$

Par continuité croissante

$$P\left(B_n\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right)$$

et donc

$$P\left(A_n\right) = 1 - P\left(B_n\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 - P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

□

Corollaire 2.4.3.
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque d'évènements. Alors

(i) $P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$.

(ii) $P\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$.

Démonstration. (i) Posons $B_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$. Alors (B_n) est une suite croissante d'évènements. En appliquant la continuité croissante, nous obtenons $P(B_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right)$. Il reste à observer que $\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$, et nous avons terminé.

(ii) Même méthode, en posant $B_n = \bigcap_{k=0}^{n} A_k$, qui est une suite décroissante d'évènements, et en lui appliquant la continuité décroissante.

□

2.5 Évènements presque sûrs et négligeables

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.

Définition 2.5.1.
Soit A un évènement.

- A est dit ***presque sûr*** ou ***quasi-certain*** si $P(A) = 1$.
- A est dit ***négligeable*** ou ***quasi-impossible*** si $P(A) = 0$.

Remarque 2.5.2.

- L'évènement certain, Ω, est presque sûr. La réciproque n'est pas vraie : obtenir au moins un 6 lors d'une infinité de lancers de dés est presque sûr mais pas certain.
- L'évènement impossible, $\varnothing$, est négligeable. La réciproque n'est pas vraie. Par exemple ne jamais obtenir de Pile lors d'une infinité de lancers d'une pièce est négligeable mais pas impossible.

Proposition 2.5.3. (i) Une réunion finie ou dénombrable d'évènements négligeables est négligeable.

(ii) Soit A, B deux évènements. Si B est négligeable et $A \subset B$, alors A est négligeable aussi.

(iii) Une intersection finie ou dénombrable d'évènements quasi-certains est quasi-certain.

(iv) Soit A, B deux évènements. Si B est quasi-certain et $A \supset B$, alors A est quasi-certain aussi.

3 Probabilités conditionnelles

Dans toute la suite, $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est un espace probabilisé.

3.1 Définition

Le résultat d'une expérience aléatoire dépend parfois du résultat d'une autre. Par exemple, en prenant pour univers l'ensemble des jours de l'année 2024 muni de la probabilité uniforme P, si on appelle A l'évènement « j'attrape un rhume aujourd'hui » et B l'évènement « il fait un temps froid et humide aujourd'hui », on aimerait pouvoir exprimer que lorsque B est réalisé, A a une plus grande probabilité d'être réalisé.

Pour cela, on peut restreindre notre univers Ω à l'ensemble des jours où B est réalisé et regarder quelle est la probabilité de l'évènement « attraper un rhume » dans cet univers restreint. On appellera cette probabilité la ***probabilité de A sachant B***.

Dans l'univers Ω, l'évènement A est l'ensemble des jours où j'attrape un rhume, B est l'ensemble des jours froids et humides. Notre univers restreint est B et l'évènement « j'attrape un rhume » dans cet univers est l'ensemble $A \cap B$. Sa probabilité, si on le munit de la probabilité uniforme est $\dfrac{\operatorname{Card}(A \cap B)}{\operatorname{Card} B} = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Cet exemple nous conduit à la définition suivante :

Définition 3.1.1.
Soit B un évènement tel que $P(B) > 0$. Pour tout évènement $A \in \mathscr{A}$, on définit la probabilité conditionnelle de A sachant B par

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Remarque 3.1.2.
On trouve encore parfois la notation $P(A \mid B)$ mais ce n'est plus la notation au programme et nous éviterons de l'utiliser. En effet, elle laisse à penser qu'il existe un évènement « A sachant B », ce qui est incorrect.

Proposition 3.1.3.
P_B est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

Démonstration.• P_B est bien définie sur $\mathscr{A}$;

- Pour tout $A \in \mathscr{A}$, $P_B(A) \geqslant 0$, et même $P_B(A) \in [0,1]$ puisque par croissance $P(A \cap B) \leqslant P(B)$;
- $P_B(\Omega) = 1$;
- Comme on pouvait s'y attendre, c'est la σ-additivité qui est le point le plus délicat. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements de $\mathscr{A}$ deux à deux incompatibles.

 Alors $P_B\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \dfrac{P\left(B \cap \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)\right)}{P(B)} = \dfrac{P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty}(B \cap A_n)\right)}{P(B)}$, d'où

 $P_B\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_B(A_n)$, car les $B \cap A_n$ sont deux à deux incompatibles.

□

3.2 Probabilités composées

Proposition 3.2.1 (Formule des probabilités composées)**.**

(i) Si A et B sont deux évènements et $P(B) \neq 0$, alors $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$.

(ii) Plus généralement, si $A_1, \ldots, A_m$ sont des évènements et si $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{m-1}) \neq 0$, alors

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_m) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times \ldots \times P_{(A_1 \cap \ldots \cap A_{m-1})}(A_m)$$

ou encore

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{m} A_k\right) = \prod_{k=1}^{m} P_{\left(\bigcap_{j=1}^{k-1} A_j\right)}(A_k)$$

avec la convention habituelle $\bigcap_{j=1}^{0} A_j = \Omega$, car Ω est le neutre pour $\cap$.

On remarque que $P_\Omega = P$.

Démonstration.
Elle est évidente pour le premier point. Elle se fait par récurrence pour le second, à partir du premier. □

Exemple 3.2.2.
Une urne contient une boule blanche et une boule rouge.
On tire successivement des boules dans cette urne. À chaque boule tirée, on note la couleur de celle-ci et on la remet dans l'urne accompagnée d'une boule de la même couleur.
Montrons qu'il est presque sûr que la boule rouge initiale sera tirée.

Notons A_i l'événement « la boule tirée au i-ème tirage est blanche ». Par probabilités composées

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times \ldots \times P_{(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})}(A_n)$$

avec

$$P(A_1) = \frac{1}{2}, \quad P_{A_1}(A_2) = \frac{2}{3}, \quad \ldots \quad , \quad P_{(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})}(A_n) = \frac{n}{n+1}$$

On a donc par télescopage

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \frac{1}{n+1}$$

Par continuité décroissante

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = 0$$

Ainsi, l'événement « toutes les boules tirées sont blanches » est négligeable et l'événement complémentaire « la boule rouge initiale est tirée » est presque sûr.

3.3 Probabilités totales

On adapte la définition ***système complet d'évènements*** au cas d'un univers infini :

Définition 3.3.1 (Système complet)**.**
Soit I un ensemble fini ou dénombrable. On dit que la famille $(A_i)_{i\in I}$ d'évènements est un ***système complet d'évènements*** lorsque les A_i sont deux à deux disjoints et $\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$.
Si on impose de plus les A_i non vides, ce qui se fait parfois, alors $\{A_i\}_{i\in I}$ est une ***partition*** de Ω.

Exemple 3.3.2.

- Si A est un évènement, alors $(A, \bar{A})$ est un système complet d'évènements.
- Si Ω est dénombrable avec $\Omega = \{\omega_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, où les ω_n sont deux à deux distincts, et si $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ alors les $A_n = \{\omega_n\}$ définissent un système complet d'évènements.

La seconde condition de la définition de système complet peut être affaiblie, et l'on obtient la notion de ***système quasi-complet d'évènements*** :

Définition 3.3.3 (Système quasi-complet)**.**
Soit I un ensemble fini ou dénombrable. On dit que la famille $(A_i)_{i\in I}$ d'évènements est un ***système quasi-complet d'évènements*** lorsque les A_i sont deux à deux disjoints et leur union presque sûre, c'est-à-dire $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1$.

Remarque 3.3.4.
Dans ces deux définitions, I est le plus souvent égal à $\mathbb{N}$ ou à un intervalle d'entiers.

Théorème 3.3.5 (Formule des probabilités totales, 1ère forme)**.**
Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet ou quasi-complet d'évènements (I fini ou dénombrable). Alors, pour tout évènement B,

$$P(B) = \sum_{i\in I} P(A_i \cap B).$$

Théorème 3.3.6 (Formule des probabilités totales, 2nde forme)**.**
Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet ou quasi-complet d'évènements (I fini ou dénombrable) tels que $\forall i \in I \quad P(A_i) > 0$. Alors, pour tout évènement B,

$$P(B) = \sum_{i\in I} P(A_i) P_{A_i}(B).$$

Remarque 3.3.7.

- Si I est infini dénombrable, cela sous-entend que les séries en œuvre convergent.
- Si parmi les A_i certains sont négligables, et si $J = \{i \in I; P(A_i) \neq 0\}$, alors $(A_j)_{j\in J}$ est aussi un système quasi-complet d'évènements et on peut donc écrire

$$P(B) = \sum_{i\in J} P(A_i \cap B) = \sum_{i\in J} P(A_i) P_{A_i}(B).$$

- On adopte en général la convention que si $P(A_i) = 0$, alors $P_{A_i}(B)P(A_i) = 0$, bien que le premier terme de ce produit n'existe en toute rigueur pas.
- Lorsque l'on utilisera l'un de ces deux théorèmes, il faudra bien préciser le système (quasi-) complet utilisé.

Exemple 3.3.8.
On dispose d'une urne contenant une boule blanche. On joue alors à Pile

ou Face. Chaque fois que l'on obtient Face, on ajoute une boule noire, et la première fois que l'on obtient Pile, on tire une boule dans l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?

Soit B : « on tire une boule blanche » et A_n : « on obtient Pile pour la 1ère fois au n-ième coup » ($n \geqslant 1$).
Calculons $P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right)$ pour montrer que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système quasi-complet d'évènements.
L'évènement contraire de $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ est l'évènement F : « ne jamais obtenir Pile », ou encore « n'obtenir que des Face ». Si l'on note F_n l'évènement « n'obtenir que des Face lors des n premiers lancers », alors $P(F_n) = \dfrac{1}{2^n}$.
Or la suite (F_n) est décroissante et $F = \bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n$, donc par continuité décroissante, $P(F_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P(F)$. Ainsi $P(F) = 0$ et donc $P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = 1$: $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système quasi-complet d'évènements, et $P(A_n) = \dfrac{1}{2^n} \neq 0$.
Donc $P(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} P_{A_n}(B)\, P(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1}{2^n} = \ln 2$.

3.4 Formule de Bayes

Théorème 3.4.1 (Formule de Bayes)**.**

(i) Soit A et B deux événements tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$. Alors

$$P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)}.$$

(ii) Si de plus $P\left(\bar{A}\right) > 0$ alors

$$P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(A)P_A(B) + P\left(\bar{A}\right) P_{\bar{A}}(B)}.$$

(iii) Plus généralement, si $(A_i)_{i\in I}$ est un système complet ou quasi-complet d'événements (I fini ou dénombrable) tels que $\forall\, i \in I,\ P(A_i) \neq 0$, on a

$$\forall\, i \in I,\ P_B(A_i) = \frac{P(A_i)\, P_{A_i}(B)}{\sum_{k\in I} P(A_k)\, P_{A_k}(B)}.$$

Exercice 3.4.2.
On effectue un test de dépistage d'une maladie. Le test rend un résultat binaire : positif ou négatif. La probabilité que le test rende un résultat positif pour une personne si cette personne a contracté la maladie est appelé *sensibilité* du test et est notée p_1. La probabilité que le test rende un résultat négatif pour une personne qui n'a pas contracté cette maladie est appelée *spécificité* et est notée p_2.

Une personne prise au hasard dans la population française effectue le test et celui-ci rend un résultat positif. Quelle est la probabilité que cette personne soit malade ?

On donne : $p_1 = 0,99$, $p_2 = 0,98$, population française : $N = 6 \times 10^7$ personnes, nombre de personnes ayant contracté la maladie dans la population française : $m = 10^3$.

4 Évènements indépendants

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.

Définition 4.0.1 (Couple d'évènements indépendants)**.**
On dit que deux événements A et B de l'espace probabilisé (Ω, P) sont ***indépendants*** si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Remarque 4.0.2.

1. Si $P(B) > 0$, alors cette condition est équivalente à $P_B(A) = P(A)$. Autrement dit, de façon informelle, savoir B ne modifie pas la probabilité de A.
2. Si $P(B) > 0$ et $P(\bar{B}) > 0$, elle est également équivalente à $P_B(A) = P_{\bar{B}}(A)$.
3. Il arrive que l'on démontre l'indépendance de deux événements mais le plus souvent, il s'agit d'une hypothèse de modélisation du problème considéré.
4. Dans tout exercice de probabilités, il est primordial de bien repérer dans l'énoncé les hypothèses d'indépendance.

Exercice 4.0.3.

1. Quels sont les événements indépendants d'eux-mêmes ?
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante simple pour que deux évènements incompatibles soient indépendants.

Exercice 4.0.4.
On considère une urne contenant 10 boules noires et 10 boules blanches. On tire successivement deux boules, sans remise. On note A (resp. B) l'événement «la première (resp. seconde) est blanche».

Modéliser ce problème.

A et B sont-elles indépendantes ? Calculer $P(A)$ et $P(B)$. Que vaut $P_B(A)$? Que vaut $P_A(B)$?

Mêmes questions si on tire maintenant simultanément deux boules, l'une de la main gauche, l'autre de la main droite et qu'on note A (resp. B) l'événement «la boule tirée par la main gauche (resp. droite) est blanche».

Définition 4.0.5 (Famille d'évènements mutuellement indépendants)**.**
Soit n un entier. On dit que des événements $A_1, \ldots, A_n$ sont ***mutuellement indépendants*** si pour toute partie I de $[\![1, n]\!]$, on a

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i).$$

On dit qu'ils sont ***deux à deux indépendants*** si et seulement si pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, avec $i \neq j$, A_i et A_j sont indépendants.

Remarque 4.0.6.

1. L'ordre des éléments n'a aucune importance.
2. L'indépendance mutuelle entraîne l'indépendance deux à deux (prendre pour I une paire d'indices).
3. La réciproque est fausse. Considérer par exemple deux tirages d'un dé et les événements « le premier tirage donne un nombre pair », « le second tirage donne un nombre pair » et « la somme des deux nombres obtenus est paire ».
4. Si $(A_1, \ldots, A_n)$ sont mutuellement indépendants et si $J \subset [\![1, n]\!]$, alors $(A_j)_{j \in J}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants.

Remarque 4.0.7.

1. Il ne suffit pas de vérifier que la probabilité de l'intersection des A_i est égale au produit des $P(A_i)$ pour l'ensemble de tous les indices mais bien de le vérifier pour tous les ensembles d'indices possibles. Considérer par exemple l'univers $\Omega = [\![1, 8]\!]$ des résultats possibles d'un dé équilibré à 8 faces, et les événements $A_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $A_2 = \{1, 2, 3, 4\}$ et $A_3 = \{1, 5, 6, 7\}$.
2. Le plus souvent, l'indépendance mutuelle est une hypothèse faite lors de la modélisation du problème. Le problème, c'est que dans de nombreux énoncés, cette hypothèse n'est écrite nulle part : c'est le mathématicien qui analyse le problème [1] qui doit se poser la question

1. Donc vous en particulier !

de l'indépendance des événements.

3. Lorsqu'il s'agit de montrer l'indépendance mutuelle de plusieurs événements, il faut vérifier autant de conditions que de sous-ensembles de $[\![1,n]\!]$, soit 2^n, dont $n+1$ sont trivialement vérifiées (celles pour lesquelles I possède 0 ou 1 élément).

Proposition 4.0.8.
Remplacer, dans une famille d'événements mutuellement indépendants, certains événements par leurs contraires donne une nouvelle famille d'événements mutuellement indépendants. En d'autres termes, soit n un entier et A_1, …, A_n n événements indépendants. On se donne n événements B_1, …, B_n tels que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, B_i est égal à A_i ou à $\bar{A}_i$. Alors la famille B_1, …, B_n est une famille d'événements indépendants.

Démonstration.
Il suffit de montrer le cas où $B_i = A_i$ pour $i = 1, \dots, n-1$ et où $B_n = \bar{A}_n$. En effet, on peut alors en déduire que si, dans une famille d'événements mutuellement indépendants, on change l'un des événements en son contraire, on obtient de nouveau une famille d'événements mutuellement indépendants. Par une récurrence immédiate, il vient alors que si on change p événements en leurs contraires, on obtient de nouveau une famille d'événements mutuellement indépendants.

Posons donc $B_i = A_i$ pour $i \in [\![1,n-1]\!]$ et $B_n = \bar{A}_n$.

Soit alors I une partie de $[\![1,n]\!]$, montrons qu'on a

$$P\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \prod_{i\in I} P(B_i)$$

Si I ne contient pas n, c'est évident.

Si I contient n, alors posons $J = I \setminus \{ n \}$. On a successivement :

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) &= P\left(\bar{A}_n \cap \bigcap_{i\in J} A_i\right) &&= P\left((\Omega\setminus A_n) \cap \bigcap_{i\in J} A_i\right) \\
&= P\left(\bigcap_{i\in J} A_i \setminus \left(A_n \cap \bigcap_{i\in J} A_i\right)\right) &&= P\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) - P\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \\
&= \prod_{i\in J} P(A_i) - \prod_{i\in I} P(A_i) &&= (1-P(A_n)) \prod_{i\in J} P(A_i) \\
&= P(B_n) \prod_{i\in J} P(B_i) &&= \prod_{i\in I} P(B_i).
\end{aligned}$$

□

Exemple 4.0.9.
On lance indéfiniment une pièce.
Soit A_i l'événement « on obtient Face lors du i-ème lancer ».
Les événements de la famille $(A_n)_{n\geqslant 1}$ sont modélisés comme étant mutuellement indépendants.
Si la probabilité d'obtenir Face lors de chaque lancer vaut $p \in]0,1[$, alors la probabilité que Face apparaisse pour la première fois lors du n-ième lancer vaut

$$P\left(A_n \cap \bar{A}_{n-1} \cap \dots \cap \bar{A}_1\right) = p(1-p)^{n-1}.$$

En effet, les événements $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_{n-1}$ et A_n sont mutuellement indépendants.

5 Exercices classiques

5.1 Loi de Zipf

Soit $a > 1$. On rappelle la définition de la fonction ζ de Riemann : $\zeta(a) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^a}$. On définit la loi de Zipf de paramètre a par

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ P(\{k\}) = \frac{1}{\zeta(a)k^a}.$$

1. Montrer que $(\mathbb{N}^*, \mathscr{P}(\mathbb{N}^*), P)$ est un espace probabilisé.
2. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(m\mathbb{N}^*)$.
3. Pour $i, j \in \mathbb{N}^*$, déterminer une CNS sur i, j pour que $i\mathbb{N}^*$ et $j\mathbb{N}^*$ soient indépendants.
4. *Application*
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note p_n le n^{e} nombre premier, et C_n l'ensemble des entiers qui ne sont divisibles par aucun des p_i, pour $i \in [\![1,n]\!]$.
   a) Calculer $P(C_n)$.

b) Déterminer $\bigcap_{n\geqslant 1} C_n$.

c) En déduire que

$$\zeta(a) = \prod_{i=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{p_i^a}\right)^{-1}.$$

5.2 Théorème de Borel-Cantelli

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit (A_n) une suite d'événements. On définit la limite supérieure de ces événements comme étant $B = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$.

1. Montrer que B est un événement.
2. Si $\omega \in \Omega$, donner une interprétation de $\omega \in B$ en fonction des $\omega \in A_i$.
3. Montrer le lemme de Borel-Cantelli (version faible) : si $\sum_{n\geqslant 0} P(A_n)$ converge, alors $P(B) = 0$.
4. On souhaite montrer que si $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) = +\infty$, et si les A_n sont mutuellement indépendants, alors $P(B) = 1$.
   a) Montrer que s'il existe une infinité de A_n tels que $P(A_n) = 1$, alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, $P\left(\bigcup_{n=p}^{+\infty} A_n\right) = 1$, et conclure.

   On suppose alors qu'à partir d'un certain rang, $P(A_n) < 1$. Soit $p \in \mathbb{N}$ supérieur à ce rang.

   b) Montrer que $P(\overline{B}) = \lim_{p\to+\infty} P\left(\bigcap_{n=p}^{+\infty} \overline{A_n}\right)$.

   c) Montrer que si $q \geqslant p$, alors $P\left(\bigcap_{n=p}^{+\infty} \overline{A_n}\right) \leqslant \prod_{n=p}^{q} (1 - P(A_n))$.

   d) Montrer que $\ln\left(\prod_{n=p}^{q} (1 - P(A_n))\right) \leqslant -\sum_{n=p}^{q} P(A_n)$.

   e) Conclure.

5.3 Une suite arithmético-géométrique

On considère deux urnes U et V. L'urne U contient deux boules blanches et quatre boules noires. L'urne V contient trois boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs avec remise selon la procédure suivante. Pour le premier tirage, on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie. On note sa couleur et on la remet dans l'urne.

— Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant s'effectue dans l'urne U.

— Sinon, le tirage suivant s'effectue dans l'urne V.

On itère le procédé pour les tirages suivants. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'evénement «la boule tirée au n^{e} tirage est blanche» et $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Déterminer p_{n+1} en fonction de p_n.
3. Déterminer la limite de la suite (p_n).

5.4 Une chaîne de Markov

Une particule se déplace sur une surface comportant quatre positions successives, A_0 qui est un puits, A_1 et A_2 deux positions intermédiaires, A_3 un second puits.
A l'instant $t = n$,

— si la particule est dans un puits, elle y reste

— si elle est en A_1, elle va en A_0 avec la probabilité p et en A_2 avec la probabilité $1 - p$

— si elle est en A_2, elle va en A_1 avec la probabilité p et en A_3 avec la probabilité $1 - p$.

On note x_n la position de la particule à l'instant $t = n$, $x_n(\Omega) = [\![0, 3]\!]$.
On pose

$$X_n = \begin{pmatrix} P(x_n = 0) \\ P(x_n = 1) \\ P(x_n = 2) \\ P(x_n = 3) \end{pmatrix}$$

1. Déterminer une matrice M indépendante de n telle que pour tout n, $X_{n+1} = MX_n$.

2. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si $0 < p < 1$.

3. On suppose $p = 1/2$. Donner $\lim\limits_{n\to\infty} X_n$.

4. Si $X_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, calculer $\lim\limits_{n\to\infty} X_n$.

5.5 Apparition d'un double Pile

On considère une pièce dont la probabilité d'apparition du côté face (F) est 1/3 et celle du côté pile (P) est 2/3. On effectue des lancers de façon indépendante jusqu'à ce que le motif PP apparaisse. On note T le (premier) rang d'apparition de ce motif. (Par exemple, si on a la suite de lancers FPFFPP alors $T = 6$.)

1. Pour k dans $\mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $(T = k)$ en fonction des événements $(T > k)$. Montrer que la suite de terme général $p_k = P(T > k)$ vérifie la relation de récurrence

$$\forall k \geqslant 2, p_k = \frac{2}{9} p_{k-2} + \frac{1}{3} p_{k-1}$$

2. Exprimer p_k en fonction de k.
3. Calculer la probabilité que le motif PP n'apparaisse jamais.