DESMARESCAUX Anouk, PSI* : EXERCICE 85

$X \sim Y$ tel que $\Omega(X) > 0$, $\Omega(Y) > 0$ et X et Y indépendants

On distingue deux cas :

1er cas X et Y sont d'espérance finie

On pose $Z = \frac{1}{Y}$ et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$E(\sqrt{XZ})^2 \leq E(X) \times E(Z)$$

or
$$1^2 = E\left(\sqrt{X} \times \frac{1}{\sqrt{X}}\right)^2 \leq E(X) \times E\left(\frac{1}{X}\right)$$
$$\leq E(X) \times E\left(\frac{1}{Y}\right) \quad \text{car } X \sim Y$$
$$\leq E\left(\frac{X}{Y}\right) \quad \text{car } X \perp\!\!\!\perp Y$$

$$\boxed{1 \leq E\left(\frac{X}{Y}\right)}$$

2ème cas : $E(X) = +\infty$

pourquoi ?

Toujours en appliquant Cauchy-Schwarz

Quand qui tend vers quoi ?

$$\left(\sum_{x \in \Omega(X)} x P(X=x)\right) \times \left(\sum_{x \in \Omega(X)} \frac{1}{x} P(X=x)\right) \geq \sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x) \longrightarrow 1$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} p_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} p_i \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

Or
$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} p_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{x_i}{x_j} p_i p_j \xrightarrow[n \to +\infty]{} E\left(\frac{X}{Y}\right)$$

Donc $\boxed{E\left(\frac{X}{Y}\right) \geq 1}$

Où intervient Y ?
Peu clair.

Ici il me semble raisonnable de penser que l'énoncé admettait implicitement que les espérances étaient finies.