Planche 1 (ENS)

Énoncé :

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.
On définit la variation totale de f sur $[0,1]$ par :

$$V(f) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{0\leqslant t_0\leqslant t_1\leqslant \ldots\leqslant t_n\leqslant 1} \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

On appelle $BV([0,1])$ l'ensemble des fonctions à variation bornée, c'est-à-dire les fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telles que $V(f) < +\infty$.

1) Montrer que les fonctions monotones et lipschitziennes sont à variation bornée.

2) Les fonctions à variation bornée sont-elles bornées ?

3) Trouver une fonction continue qui n'est pas à variation bornée.

4) Montrer que $(BV, \|\cdot\|)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé avec

$$\|f\| = |f(0)| + V(f)$$

5) Montrer que le produit de deux fonctions à variation bornée est à variation bornée.

6) Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g : [0,1] \to [0,1]$ deux fonctions à variation bornée.

a) Si g est monotone, montrer que $f \circ g \in BV$.

b) Si f est monotone, $f \circ g \in BV$?

Indications

— Poser $f(x) = x\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$

— Poser $t_0 = 0$, $t_1 = x$

— Utiliser que $f \in BV \Rightarrow f$ est bornée

— $g(t_k)$ est une subdivision, $h \in [0,1]$

Corrigé :

1) **a)** Supposons f croissante (le cas décroissant est analogue). Soit

$$0 \leq t_0 \leq \cdots \leq t_n \leq 1$$

une subdivision. Alors :

$$\sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| = f(t_n) - f(t_0) \leq f(1) - f(0)$$

donc $f \in BV$.

b) Si f est K-lipschitzienne, alors :

$$\sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| \leq K \sum_{k=1}^{n} |t_k - t_{k-1}| \leq K$$

donc $f \in BV$.

2) Oui. Soit f non bornée. Soit $t_0 = 0$.
Soit $M \in \mathbb{R}$ et $t_1 \in [0,1]$ tel que $|f(t_1)| > M + |f(0)|$.
Alors :

$$\sum_{k=1}^{1} |f(t_k) - f(t_{k-1})| = |f(t_1) - f(t_0)| > M$$

donc $f \notin BV$.

3) Soit $f : x \mapsto x\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t_k = \frac{1}{k+1}$. Alors :

$$\sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k} \to +\infty$$

et pourtant f est continue sur $[0,1]$. Donc $f \notin BV$.

4)
- $0 \in BV$, évident.
- $\lambda f \in BV$ si $f \in BV$, facile.
- Si $f, g \in BV$, alors $f + g \in BV$ avec :

$$V(f+g) \leq V(f) + V(g)$$

Ainsi, BV est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}([0,1], \mathbb{R})$.

- $\|f\| \geq 0$, évident.
- $\|\lambda f\| = |\lambda|.\|f\|$, facile.
- Si $f, g \in BV$, nous avons vu que $V(f+g) \leq V(f) + V(g)$, ce qui implique facilement que $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$.
- Si $\|f\| = 0$, alors $f(0) = V(f) = 0$. Soit $x \in [0,1]$, posons $t_0 = 0, t_1 = x$. Alors :

$$0 \leq \sum_{k=1}^{1} |f(t_k) - f(t_{k-1})| \leq V(f) = 0$$

  donc $|f(x) - f(0)| = 0$ et $f(x) = f(0)$. Ainsi f est nulle.

Donc $\|\cdot\|$ est une norme.

5) Soient $f, g \in BV$, M un majorant de $|f|$, et N un majorant de $|g|$.
Alors pour toute subdivision $0 \leq t_0 \leq \cdots \leq t_n \leq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |(fg)(t_k) - (fg)(t_{k-1})| &= \sum_{k=1}^{n} |f(t_k)(g(t_k) - g(t_{k-1})) + g(t_{k-1})(f(t_k) - f(t_{k-1}))| \\
&\leq M \sum_{k=1}^{n} |g(t_k) - g(t_{k-1})| + N \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| \\
&= MV(g) + NV(f)
\end{aligned}$$

donc $fg \in BV$.

6) **a)** Dans le cas où g est croissante, si $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq 1$ alors $0 \leq g(t_0) \leq g(t_1) \leq \cdots \leq g(t_n) \leq 1$ donc :

$$\sum_{k=1}^{n} |f(g(t_k)) - f(g(t_{k-1}))| \leq V(f)$$

ainsi $f \circ g \in BV$.
Si g est décroissante, $1 \geq g(t_0) \leq g(t_1) \geq \cdots \geq g(t_n) \geq 0$ mais le raisonnement est le même.

b) Non.
Posons :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } x > \frac{1}{2} \end{cases}, \quad g(x) = \frac{1}{2}\left(1 + x^3 \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $t_k = \frac{1}{k+1}$.
On remarque alors que :

$$f(g(t_k)) = \begin{cases} 0 & \text{si } g(t_k) < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } g(t_k) > \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{donc } |f(g(t_k)) - f(g(t_{k-1}))| = 1.$$

Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n} |f(g(t_k)) - f(g(t_{k-1}))| = \sum_{k=1}^{n} 1 = n \to +\infty \quad \text{quand } n \to \infty$$

Donc $f \circ g \notin BV$.