

Contrôle d'orientation du satellite DEMETER

1 Contrôle d'attitude du satellite

Objectif L'objectif de cette partie est de mettre en place une loi de commande permettant d'asservir les positions angulaires du satellite à des positions de référence. Dans les parties subsection 1.1, subsection 1.2 et subsection 1.3, il s'agira de déterminer le régulateur qui assure les performances de la chaîne d'asservissement. Dans la partie subsection 1.4, il s'agira de vérifier si la loi de commande déterminée permet de respecter les contraintes imposées à l'actionneur : couple maximal et vitesse maximale qu'il peut réaliser.

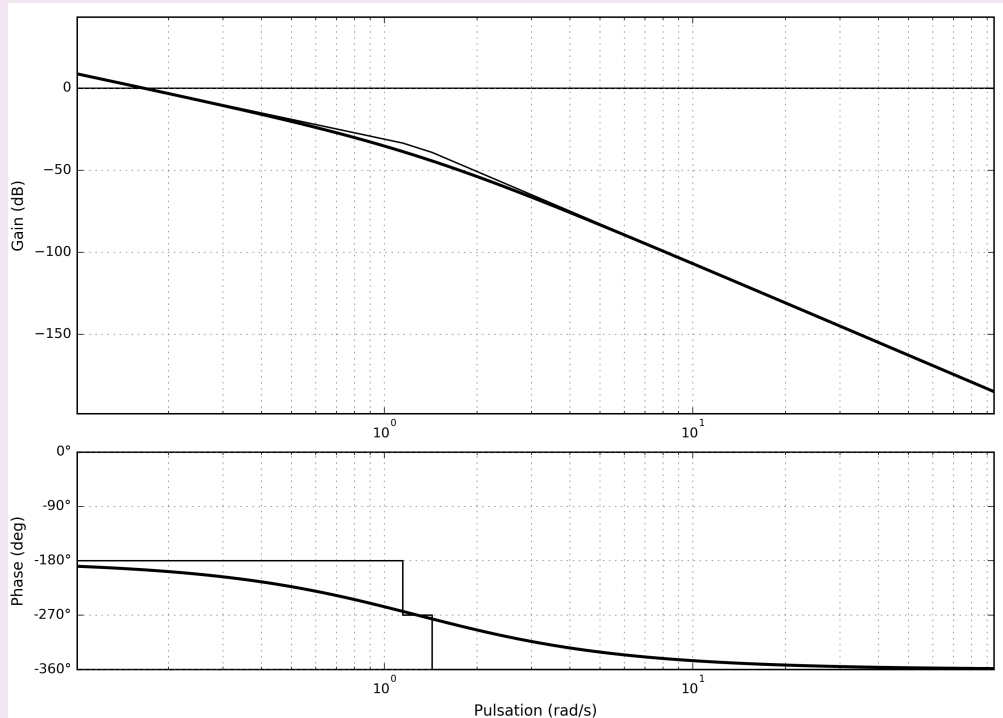
1.1 Choix d'un modèle de commande et analyses préliminaires

Question 1 Exprimer θ en fonction de θ_{ref} , C_{ext} et des différentes fonctions de transfert.

Question 2 La figure du document réponse donne le diagramme de Bode de la fonction $A_r(p)H(p)F(p)$. Tracer directement sur cette figure les diagrammes asymptotiques associés à cette fonction (document réponse à rendre avec la copie). Vous justifierez le tracé en utilisant un tableau de variation.

Correction Les pentes des asymptotes sont données par le tableau suivant.

	$\omega \rightarrow 0$	$\frac{1}{1,5} = 0,7$	0,87	$\omega \rightarrow +\infty$
$\frac{1}{p^2}$	-40 dB/décade -180°	-40 dB/décade -180°	-40 dB/décade -180°	-40 dB/décade -180°
$\frac{1}{1 + \frac{p}{0,87}}$	0 dB/décade 0°	0 dB/décade 0°	-20 dB/décade -90°	-20 dB/décade -90°
$\frac{1}{1 + 1,5 p}$	0 dB/décade 0°	-20 dB/décade -90°	-20 dB/décade -90°	-20 dB/décade -90°
$H_{BO}(p)$	-40 dB/décade -180°	-60 dB/décade -270°	-80 dB/décade -370°	-80 dB/décade -370°



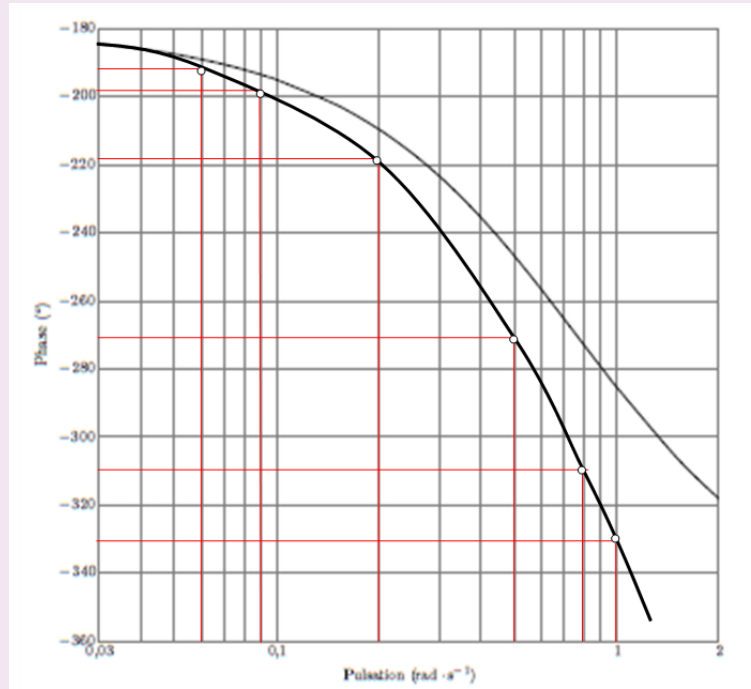
Correction De plus, en basse fréquence, lorsque $\omega \ll 0,1 \text{ rad s}^{-1}$, $H_{BO}(p) \simeq \frac{0,028}{p^2}$. On a donc en $\omega = 0,01 \text{ rad s}^{-1}$, $G_{dB}(0,01) \simeq 20 \log \left(\frac{0,028}{0,01^2} \right) \simeq 50 \text{ dB}$.

Question 3 En prenant $R(p) = 1$, préciser la fonction de transfert en boucle ouverte et tracer les diagrammes de Bode réels (5 ou 6 points judicieusement choisis suffisent pour ces tracés) sur la figure B. Au regard des tracés effectués, justifier que des corrections proportionnelle ou proportionnelle-intégrale ne permettent pas d'assurer le cahier des charges escompté.

Correction On a $FTBO(p) = F(p)A(p)H(p)B(p) = \frac{1}{1 + 1,5p} \frac{1}{1 + \frac{1}{0,87}p} e^{-0,1p} \frac{0,028}{p^2} e^{-0,7p}$. Il s'agit donc d'ajouter le retard $e^{-0,8p}$.

Le gain du retard est unitaire. Il ne change donc pas le diagramme de gain. Le déphasage ajouté par le retard est de $-0,8\omega$. On « descend » donc la phase des valeurs suivantes.

$\omega (\text{rad/s})$	0,03	0,06	0,1	0,5	1	2
$\varphi (\text{rad})$	-0,021	-0,042	-0,07	-0,35	-0,7	-1,4
$\varphi (^\circ)$	-1,2°	-2,4°	-3,1°	-20°	-40°	-80°



Correction Cahier des charges :

- écart de pointage : avec un double intégrateur, le système est précis pour une entrée échelon – exigence respectée;
- pulsation de coupure à 0 dB = $0,13 \text{ rad s}^{-1}$ – exigence respectée (et réglable avec des correcteurs P et PI);
- marge de phase : avec un système de classe 2, la phase est forcément inférieure à -180° – exigence qui ne pourra pas être respectée avec un P ou un PI;
- marge de gain : si la marge de phase n'est pas respectée, on ne pourra pas stabiliser le système...

Question 4 En déduire les conditions sur le module et l'argument de $R(j\omega)$ pour assurer la pulsation de coupure et la marge de phase demandées par le cahier des charges associé au modèle nominal.

Correction En utilisant la BO non corrigée, on mesure :

- $\omega_{0\text{dB}} = 0,16 \text{ rad s}^{-1}$;
- $M_\varphi = -25^\circ$

Le cahier des charges demande

- $\omega_{0\text{dB}} = 0,13 \text{ rad s}^{-1}$;
- $M_\varphi \geq 30^\circ$, il faut donc que $\arg(R(j\omega_{0\text{dB}})) = 45^\circ$.
- $M_G \geq 6 \text{ dB}$.
- Dans ces conditions, il faudrait déterminer la pulsation pour laquelle la phase vaut -180° puis ajuster le gain.

1.2 Analyse des contraintes sur la loi de commande

Question 5 En prenant une consigne $\theta_{\text{ref}} = 0$, déterminer la fonction de transfert $T(p) = \frac{\theta(p)}{C_{\text{ext}}(p)}$ entre les couples perturbateurs $C_{\text{ext}}(p)$ et la position $\theta(p)$ et l'exprimer à partir des fonctions de transfert de la ??.

Correction On a $T(p) = \frac{H(p)}{1 + H(p)B(p)A(p)C(p)}$ ou encore $T(p) = \frac{H(p)}{1 + H(p)B(p)A(p)F(p)R(p)}$

Question 6 En utilisant les approximations fréquentielles $\|T_{bo}(j\omega)\| \gg 1$ et $\|T_{bo}(j\omega)\| \ll 1$ où $T_{bo}(p)$ est la fonction de transfert en boucle ouverte, montrer que dans l'intervalle des pulsations des couples perturbateurs, on peut écrire : $\|T(j\omega)\| \simeq \frac{1}{\|R(j\omega)F(j\omega)A(j\omega)B(j\omega)\|}$. Justifier que cette relation peut encore être simplifiée selon la

formulation : $\|T(j\omega)\| \simeq \frac{1}{\|R(j\omega)\|}$.

Correction Pour des pulsations comprises entre $0,001 \text{ rad s}^{-1}$ et $0,002 \text{ rad s}^{-1}$, la FTBO tend vers $H(p)R(p)$. Le gain est de la FTBO y est supérieur à 40 dB. On peut donc considérer que $\|T(j\omega)\| \simeq \frac{\|H(j\omega)\|}{\|H(j\omega)R(j\omega)F(j\omega)A(j\omega)B(j\omega)\|} = \frac{1}{\|R(j\omega)F(j\omega)A(j\omega)B(j\omega)\|}$.
Or, $\|F(j\omega)A(j\omega)B(j\omega)\| \simeq 0$ entre $0,001 \text{ rad s}^{-1}$ et $0,002 \text{ rad s}^{-1}$; donc $\|T(j\omega)\| \simeq \frac{1}{\|R(j\omega)\|}$.

Question 7 Donner l'expression de l'amplitude de l'évolution temporelle de $\theta(t)$, en fonction de $\|R(j\omega)\|$, en réponse au couple perturbateur sinusoïdal de pulsation ω_0 . En déduire la condition que doit vérifier $\|R(j\omega)\|$ en vue de satisfaire la précision d'écart de pointage, pour une consigne $\theta_{ref} = 0$, lorsque le satellite est soumis à ce couple perturbateur. Reprendre cette analyse dans le cas du couple perturbateur de pulsation $2\omega_0$.

Correction La perturbation étant sinusoïdale de la forme $c_{ext} = C_{00} \sin(\omega_0 t)$ on a $\theta(t) = K C_{00} \sin(\omega_0 t + \varphi)$ avec $K = \frac{1}{\|R(j\omega_0)\|}$ et $\varphi = \arg(T(j\omega_0))$.
D'après le cahier des charges, l'écart de pointage doit rester inférieur à $0,04^\circ = 7 \times 10^{-4} \text{ rad}$. De plus, $C_{00} = C_{01}$; donc $K C_{00} < 7 \times 10^{-4} \text{ rad} \Rightarrow K < \frac{7 \times 10^{-4}}{30 \times 10^{-6}} = 23 \text{ rad N}^{-1} \text{ m}^{-1}$ et $\|R(j\omega_0)\| > 0,043 \text{ Nmrad}^{-1}$.

1.3 Synthèse du régulateur

Pour la synthèse du régulateur $C(p)$, on recherche une solution de la forme : $R(p) = K \frac{(1 + \tau p)^2}{p}$.

Question 8 Déterminer la valeur de τ permettant d'obtenir la marge de phase $M_\varphi = 30^\circ$ exigée par le cahier des charges.

Correction On a $\arg R(p) = \arg K + \arg(1 + \tau p)^2 - \arg p = -\frac{\pi}{2} + 2 \arctan(\tau \omega)$.
D'après la question 4, l'apport de phase ajouté doit être de 55° pour une pulsation de $0,13 \text{ rad s}^{-1}$; donc $55 = -90 + 2 \arctan(\tau 0,13)$ et $\tau = \tan\left(\frac{55 + 90}{2}\right) \frac{1}{0,13} = 24,4 \text{ s}$.

Question 9 En conservant la valeur de τ déterminée précédemment, calculer la valeur du gain K qui assure la pulsation de coupure imposée par le cahier des charges.

Correction On a $\|T_{bo}(j\omega)\| = \|H(j\omega)B(j\omega)A(j\omega)F(j\omega)R(j\omega)\| = 0,028 \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{0,87^2}}} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 1,5^2}} K \frac{1 + \tau^2 \omega^2}{\omega}$.
Pour $\omega = \omega_{0dB} = 0,13 \text{ rad s}^{-1}$ et $\tau = 24,4 \text{ s}$; $\|T_{bo}(j\omega_{0dB})\| = 136,8K$. On souhaite que le gain dB soit nul (et donc le module unitaire); donc $K = \frac{1}{136,8} = 0,0073$.

Question 10 Vérifier si le régulateur déterminé permet d'assurer les conditions nécessaires à satisfaire les performances, en termes d'écart de l'angle de pointage, lorsque le satellite est soumis aux variations sinusoïdales du couple perturbateur.

Correction Si on considère qu'en basses fréquences, $\|T(j\omega)\| \simeq \frac{1}{\|R(j\omega)\|}$.

$$\|R(j\omega)\| = \left\| 0,073 \frac{(1 + 24,4j\omega)^2}{j\omega} \right\| = 0,073 \frac{\|1 + 24,4j\omega\|^2}{\|j\omega\|} = 0,073 \frac{1 + 24,4^2\omega^2}{\omega}$$

Pour une perturbation sinusoïdale, l'amplitude de θ est donnée par $\|T(j\omega)\|C_{00}$. D'où :

- pour $\omega = 0,001 \text{ rad s}^{-1}$, $\|T(j\omega)\|C_{00} = 0,14 \times 30 \times 10^{-6} = 5,8 \times 10^{-6} \text{ rad} = 0,0003^\circ \leq 0,04^\circ$;
- pour $\omega = 0,002 \text{ rad s}^{-1}$, $\|T(j\omega)\|C_{00} = 0,27 \times 30 \times 10^{-6} = 2,2 \times 10^{-5} \text{ rad} = 0,0012^\circ \leq 0,04^\circ$.

1.4 Validation de la loi de commande

1.4.1 Amélioration des performances vis-à-vis du dépointage initial

Question 11 En considérant que $\theta_{ref} = 0$ et $C_{ext} = 0$, déterminer $T_d(p) = \frac{C_{pilote}(p)}{\theta_0(p)}$ à partir des différentes fonctions de transfert de la ???. On note $c_{pa}(t) = c_{pilote}(t + \tau_1)$, avec $\tau_1 = 0,7 \text{ s}$. En déduire à partir de $T_d(p)$ l'expression de $\frac{C_{pa}(p)}{\theta_0(p)}$.

Correction Dans les conditions énoncées : $C_{pilote}(p) = -\theta(p)B(p)C(p)$. De plus, $\theta(p) = \theta_0(p) + C_{pilote}(p)A(p)H(p)$. On a donc $C_{pilote}(p) = -(\theta_0(p) + C_{pilote}(p)A(p)H(p))B(p)C(p)$. En conséquences, $C_{pilote}(p)(1 + A(p)H(p)B(p)C(p)) = -\theta_0(p)B(p)C(p)$. Au final, $T_d(p) = \frac{C_{pilote}(p)}{\theta_0(p)} = -\frac{B(p)C(p)}{1 + A(p)H(p)B(p)C(p)}$.

On a $c_{pa}(t) = c_{pilote}(t + \tau_1) \Leftrightarrow c_{pa}(t - \tau_1) = c_{pilote}(t)$. En utilisant le théorème du retard, et en passant dans le domaine de Laplace, $C_{pa}(p)e^{-\tau_1 p} = C_{pilote}(p)$.

$$\text{Or, } T_d(p) = \frac{C_{pilote}(p)}{\theta_0(p)}; \text{ donc } T_d(p) = \frac{C_{pa}(p)e^{-\tau_1 p}}{\theta_0(p)}.$$

Question 12 En utilisant le théorème de la valeur initiale, ou toute autre méthode de votre choix, déterminer littéralement et numériquement $c_{pa}(0)$ en réponse à une condition initiale $\theta_0(t) = \Theta_0 \gamma(t)$ d'amplitude $\Theta_0 = 20^\circ$. En déduire $c_{pilote}(\tau_1)$. [Remarques : $\gamma(t)$ désigne l'échelon d'Heaviside d'amplitude 1. On admettra que la valeur déterminée est proche de la valeur maximale (en valeur absolue) de celle obtenue pour des cas d'utilisation de filtres $F(p)$ d'ordre supérieur à 1.]

Correction

On applique le théorème de la valeur initiale en considérant une consigne d'entrée de type échelon d'amplitude $\Theta_0 = 20^\circ$.

$$c_{pa}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} c_{pa}(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot C_{pa}(p) = -\lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot \frac{C(p)}{1 + T_{bo}(p)} \cdot \frac{\Theta_0}{p}$$

$$\text{Or } \lim_{p \rightarrow \infty} T_{bo}(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{0,028}{p^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{0,87} \cdot p\right) \cdot (1 + 1,5 \cdot p)} \cdot e^{-0,8 \cdot p} \cdot K \cdot \frac{(1 + 24,4 \cdot p)^2}{p} \equiv \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p^2 e^{-0,8 \cdot p}}{p^4} = 0$$

$$\text{Donc on a } c_{pa}(0) = -\lim_{p \rightarrow \infty} C(p) \cdot \Theta_0 = -\lim_{p \rightarrow \infty} R(p) \cdot F(p) \cdot \Theta_0 = -\lim_{p \rightarrow \infty} \left(K \cdot \frac{(1 + \tau p)^2}{p \cdot (1 + 1,5 \cdot p)} \cdot \Theta_0 \right)$$

$$\Rightarrow c_{pa}(0) \equiv -\lim_{p \rightarrow \infty} \left(K \cdot \frac{\tau^2 p^2}{1,5 \cdot p^2} \cdot \Theta_0 \right) = -\frac{2}{3} K \cdot \tau^2 \cdot \Theta_0$$

$$\text{Application Numérique : } \Rightarrow c_{pa}(0) = -0,0073 \cdot \frac{24,4^2}{1,5} \cdot \frac{20}{180} \cdot \pi = -1,011 \text{ N.m}$$

D'après la question précédente, on sait que $c_{pilote}(t) = c_{pa}(t - \tau_1)$, donc $c_{pilote}(\tau_1) = c_{pa}(0) = -1,011 \text{ N.m}$

Question 13 En réponse à une condition initiale $\theta_0(t) = \Theta_0 \gamma(t)$ d'amplitude 20° , la ??? montre l'évolution de la vitesse de rotation angulaire $\dot{\theta}$ autour de l'axe \vec{y} . À partir de la relation obtenue à la question ??, déterminer la valeur maximale de la vitesse angulaire de la roue de réaction ω_r . Effectuer l'application numérique pour $I_y = 35,7 \text{ kg m}^2$ et $I_{ry} = 4 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2$.

Correction La question ?? a permis d'établir que $I_y \dot{\theta}(t) = -I_{ry} \omega_r(t)$. D'après la figure, $|\dot{\theta}|_{\max} \simeq 3^\circ \text{s}^{-1}$. On a donc

$$\omega_r(t) = \frac{I_y}{I_{ry}} \dot{\theta} = -\frac{35,7}{4 \times 10^{-4}} \times 3 = 267750^\circ \text{s}^{-1} = 44625 \text{tr min}^{-1}.$$

Question 14 Conclure alors sur la capacité de la loi de commande à satisfaire les contraintes imposées par l'actionneur à roue de réaction.

Correction D'après le cahier des charges :

- couple maximal : $0,005 \text{ Nm} \ll 1 \text{ Nm}$;
- vitesse maximale : $2800 \text{ tr min}^{-1} \ll 44625 \text{ tr min}^{-1}$.

Les performances ne sont donc pas vérifiées.

1.4.2 Amélioration des performances vis-à-vis du dépointage initial

Question 15 Justifier que pour $|\Delta\theta| > 0,3^\circ$, la deuxième composante de la loi de commande est une régulation de vitesse avec une consigne de vitesse $\dot{\theta}_c(t)$ constante.

Correction

Question 16 On admet que $I_y \dot{\theta}(t) = -I_{ry} \omega_r(t)$. Déterminer la valeur maximale $|\dot{\theta}_c|_{\max}$ (en $^\circ \text{s}^{-1}$) de la consigne de vitesse $\dot{\theta}_c(t)$ que l'on peut imposer. Effectuer l'application numérique pour $I_y = 35,7 \text{ kg m}^2$, $I_{ry} = 4 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2$ et une vitesse maximale de la roue de 2800 tr min^{-1} (correspondant à la vitesse maximale de l'actionneur donnée par le tableau de la ??).

Correction La question ?? a permis d'établir que $I_y \dot{\theta}(t) = -I_{ry} \omega_r(t)$.

$$\text{On a donc } |\omega_r(t)| = \frac{I_{ry}}{I_y} |\dot{\theta}(t)| = \frac{4 \times 10^{-4}}{35,7} \times 2800 = 0,03 \text{ tr min}^{-1} = 0,19^\circ \text{s}^{-1}.$$

Question 17 La ?? montre les réponses obtenues (en utilisant un simulateur trois axes comportant en particulier les modes oscillants dus aux souplesses de la structure) avec la loi de commande définie précédemment pour un dépointage initial $\Theta_0 = 20^\circ$. Commenter les réponses obtenues et conclure alors sur la capacité de la nouvelle loi de commande à satisfaire l'ensemble des contraintes imposées par le cahier des charges.

Correction D'après le cahier des charges :

- couple maximal : $0,005 \text{ Nm}$: l'exigence est respectée, sauf ponctuellement au démarrage de la roue à réaction et au changement de loi de commande à $t = 1300 \text{ s}$;
- vitesse maximale : $2800 \text{ tr min}^{-1} = 293 \text{ rad s}^{-1}$: l'exigence est respectée, car la vitesse reste inférieure à 35 rad s^{-1} .

Ces résultats permettent de valider la nouvelle loi de commande.

1.4.3 Analyse des performances vis-à-vis d'un couple perturbateur constant

L'objet de cette partie est d'analyser les performances de la loi de commande lorsque le satellite est soumis à un couple extérieur constant, $C_{\text{ext}} = C_0 \gamma(t)$ d'amplitude $C_0 = 10^{-6} \text{ Nm}$.

Question 18 Sans calcul, mais en justifiant votre réponse, préciser l'écart en régime permanent en réponse à un couple perturbateur constant.

Correction $C(p) = K \frac{(1 + \tau p)^2}{p}$. Le correcteur contient une action intégrale en amont de la perturbation. Pour une perturbation constante, l'écart en régime permanent est donc nul.