Semaine 2 du 23 septembre 2024 (S39)

I Séries numériques

Tout le programme de la semaine dernière sur les séries est reconduit, y compris les exercices à connaître.
S'y ajoute :

II Rappels et compléments d'algèbre linéaire (début)

1 Produits et espaces vectoriels d'applications

1.1 Espaces vectoriels produits

1.2 Applications à valeurs dans un ev

2 Sommes d'espaces vectoriels

2.1 Rappels de première année : sommes, sommes directes, supplémentaires

2.2 Généralisation à plus de deux sev

3 Matrices par blocs

3.1 Définition

3.2 Opérations par blocs

4 Matrices semblables

10 Exercices à connaître

10.1 Image d'une base par un endomorphisme

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.

1) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un endomorphisme u tel que $\operatorname{Ker}(u) = F$ et $\operatorname{Im}(u) = G$.

2) Construire un tel endomorphisme u avec $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \}$ dans $\mathbb{R}^3$ et $G = \{ \lambda(2, -1, -1) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$.

10.2 Expression et éléments caractéristiques d'un projecteur ou d'une symétrie

1) Donner les éléments caractéristiques de l'application f définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3x & - & y & + & 2z \\ -x & + & 3y & + & 2z \\ x & + & y & + & 2z \end{pmatrix} \end{array} \right. .$$

2) Donner l'expression de la symétrie par rapport à $\operatorname{Vect}(1, 0, -1)$ et parallèlement à $\operatorname{Vect}\left((1, 2, 0), (1, 1, -1)\right)$.

10.3 Une caractérisation des homothéties

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, où E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

1) Déterminer l'ensemble des endomorphismes de E laissant stables tous les sev de dimension 1.

Cette question est archi-classique, et n'est pas toujours présentée sous cette forme.
On pourra se demander le lien entre

$$\forall x \in E, \exists \lambda \in \mathbb{K}, f(x) = \lambda x$$

et

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, f(x) = \lambda x.$$

2) Déterminer l'ensemble des endomorphismes de E laissant stables tous les sev de dimension 2.

3) Si E est de dimension finie, en déduire le "centre" de $\mathscr{L}(E)$, c'est-à-dire l'ensemble endomorphismes qui commutent avec tous les endomorphismes (on pourra remarquer qu'un tel endomorphisme commute nécessairement avec les projections sur toutes les droites vectorielles).

10.4 « Inégalité triangulaire » du rang

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et $u, v \in \mathscr{L}(E, F)$.

1) Montrer que $\mathrm{rg}(u+v) \leqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$.

2) En déduire que $|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leqslant \mathrm{rg}(u+v)$.

3) On suppose que $E = F$, et $\dim E = n$. Montrer l'encadrement :

$$\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - n \leqslant \mathrm{rg}(f \circ g) \leqslant \inf(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g)).$$