Feuille d'exercice n° 09 : **Séries de fonctions**

I. Convergence

Exercice 1 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à termes dans $[0,+\infty[$, décroissante.
On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto a_n x^n(1-x)$.

1) Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $[0,1]$.

2) Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[0,1]$ si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{a_n}{n}$ converge.

3) Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ si et seulement si : $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 2 (🚲) Étudier les types de convergence (simple, normale, uniforme) des séries de fonctions $\sum\limits_{n} f_n$ suivantes :

1) f_n : $]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{x^a}{(n+x)^b}$, $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ fixé, $n \in \mathbb{N}^*$.

2) f_n : $[0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\ln n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

3) f_n : $[0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{(-1)^n x}{x^2+n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

4) f_n : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \operatorname{Arctan}(x+n) - \operatorname{Arctan} n$, $n \in \mathbb{N}$.

5) f_n : $[0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{nx}{1+n^3x^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

II. Régularité

Exercice 3 (🚲) Soit $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$ et $\zeta_2(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

1) Déterminer les domaines de définition des fonctions ζ et ζ_2.

2) Justifier que les fonctions ζ et ζ_2 sont continues.

3) Établir la relation $\zeta_2(x) = (1-2^{1-x})\zeta(x)$ pour tout $x > 1$.

Exercice 4 (🚲) On définit pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}, u_n(x) = \ln\left(1+\mathrm{e}^{-nx}\right)$ et $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ lorsque cela est défini.

1) Domaine de définition de f, continuité sur cet intervalle. Montrer que f est strictement décroissante.

2) Limite de f en $+\infty$.

3) Équivalent de f en 0 .

Exercice 5 On pose sous réserve de convergence et pour $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2n^2}$.

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Quelle est la limite de f en $+\infty$?

3) Quelle est la limite de $x^2 f(x)$ lorsque x tend vers 0 ?

Exercice 6

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: f_n : $[0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{\ln(n+x)}{n^2}$.

1) Étudier la convergence simple de la série d'applications $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$. On note S la somme.

2) Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,+\infty[$ et exprimer, pour tout $x \in [0,+\infty[$, $S'(x)$ et $S''(x)$ sous forme de sommes de séries.

3) En déduire que S est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ et que S est concave sur $[0,+\infty[$.

Exercice 7

Montrer : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n} \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\ln 2}{1-x}$.

Exercice 8

1) Déterminer les domaines de définition de :

$$A : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+x^{2n}\right)$$

$$B : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+x^{2n-1}\right)$$

$$\text{et} \quad C : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1-x^{2n-1}\right)$$

2) Montrer que A, B et C sont continues sur leurs domaines de définition respectifs.

3) Donner une expression simplifiée de la fonction $x \mapsto A(x)+B(x)+C(x)$.

Exercice 9 On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: f_n : $[0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \operatorname{Arctan} \dfrac{n+x}{1+n^3x}$.

1) Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ et converge normalement sur $[1,+\infty[$. On note S la somme.

2) Montrer : $S(x) \underset{x\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} L = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Arctan} \frac{1}{n^3}$, et calculer une valeur approchée décimale de L à 10^{-3} près.

Exercice 10 (▲▲) On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n \ : \ [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}.$$

1) Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ et converge uniformément sur $[1,+\infty[$.

On note S la somme.

2) Montrer : $S(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n : $[1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{nx}}$.

Montrer que pour tout $x \in [1,+\infty[$, $|f_n(x)-g_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{2x^{3/2}}\dfrac{1}{n^{3/2}}$.

4) On note $a = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Établir : $S(x) = \dfrac{a}{\sqrt{x}} + \underset{x\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)$.

III. Interversion somme - intégrale

Exercice 11 (✎) Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$. Le résultat est à exprimer en fonction de $\zeta(2)$.

Exercice 12 (✎) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^{\,t}-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 13 (▲) Existence et calcul de $\displaystyle I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{sh} x}\,\mathrm{d}x$. On admettra que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 14 On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$: f_n : $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \ln(1+x^n)$.

1) Étudier les convergences de la série d'applications $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$. On note S la somme.

2) Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1[$ et que S est strictement croissante sur $[0,1[$.

3) **a)** Montrer : $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[,\ \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \geqslant \ln\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)$.

b) En déduire : $\displaystyle S(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$.

4) En utilisant une comparaison série/intégrale, montrer :

$$S(x) \underset{I\longrightarrow 1^-}{\sim} \frac{I}{1-x}, \text{ où } I = \int_0^{+\infty} \ln\left(1+\mathrm{e}^{-u}\right)\mathrm{d}u.$$

Exercice 15 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $\displaystyle f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^{2\alpha}+x^2}$, avec α dans $\mathbb{R}_+^*$.

1) Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\alpha > 1/2$.

2) Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

3) Soit $\displaystyle S : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Montrer que

$$\int_0^1 S(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \arctan\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

4) Déterminer la limite de S en $+\infty$.

5) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$.