Exercices préparation oraux

!!!! TOUT PREMIER POINT À VÉRIFIER :

il faut justifier que cette intégrale est bien définie, par exemple avec $|fg|<=(1/2)(f^2+g^2)$

Exercice 15

1. Soit $E = \{ f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}} f^2 \text{ existe} \}$

$\forall (f,g) \in E^2$, on pose $\langle f,g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)\,dt$

- $\forall (f,g) \in E^2$, $\langle f,g \rangle = \langle g,f \rangle$ donc $\langle \cdot,\cdot \rangle$ est symétrique

arnaque

- $\forall (f,g,h) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \langle f, g+\lambda h \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)\,dt + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)h(t)\,dt$ (Possible car f,g et $h \in E$ donc toutes les intégrales convergent)

$\langle \cdot,\cdot \rangle$ est linéaire à droite donc bilinéaire

- $\forall f \in E$, f^2 est continue$^\times$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)\,dt$ existe avec $\forall t \in \mathbb{R}, (f(t))^2 \geq 0$

$^\times$ par composition de fonctions continues

On en conclut que $\forall f \in E, \langle f,f \rangle \geq 0$

- ~~Soit $f = 0$: $\langle f,f \rangle = 0$~~ inutile

Réciproquement, $\forall f \in E$, si $\langle f,f \rangle = 0$:

f^2 est continue sur $\mathbb{R}$ avec $\forall t \in \mathbb{R}, f^2(t) \geq 0$

Nécessairement, $f^2 = 0$ donc $f = 0$ si $\langle f,f \rangle = 0$

On en déduit que $\forall f \in E, \langle f,f \rangle = 0 \iff \forall t \in \mathbb{R}, f(t) = 0$

$$\boxed{\langle \cdot,\cdot \rangle \text{ est donc un produit scalaire sur } E}$$

2. Soient $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in E^{\mathbb{N}^*}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, Q_n = (\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On suppose que $\exists n \in \mathbb{N}^*$, Q_n est inversible.

D'une part, $Q_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ donc toutes ses valeurs propres sont réelles.

D'autre part, Q_n est inversible donc 0 n'est pas valeur propre de Q_n

Soit $X \in \mathbb{R}^n$: on note $X = (x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$

$$X^T Q_n X = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{n} x_i \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \langle \sum_{i=1}^{n} \varphi_i x_i, \varphi_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \varphi_i x_i, \sum_{j=1}^{n} \varphi_j x_j \rangle$$

$\langle \cdot,\cdot \rangle$ est un produit scalaire

En posant $x = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j x_j$, $X^T Q_n X = \|x\|^2 \geq 0$ donc $Q_n \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R})$

$Q_n \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R})$ et $0 \notin Sp(Q_n)$ donc $Sp(Q_n) \subset \mathbb{R}_+^*$

$\boxed{\text{Ainsi, la plus petite valeur propre de } Q_n \text{ est strictement positive.}}$

car l'ensemble des valeurs propres est FINI, donc il a bien un minimum

3. • Montrons que $\varphi_{n+1} \in Vect(\varphi_1, \cdots \varphi_n) \Rightarrow Q_{n+1}$ non-inversible.

Si $\varphi_{n+1} \in Vect(\varphi_1, \cdots \varphi_n)$, alors $(\varphi_1, \cdots \varphi_{n+1})$ est lié.
$\exists (\lambda_i)_{i \in [\![1;n+1]\!]} \in \mathbb{R}^{n+1}$ non tous nuls, $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \varphi_i = 0$

$\forall j \in [\![1;n+1]\!]$, $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \langle \varphi_j ; \varphi_i \rangle = 0$ donc en notant $(C_j)_{j \in [\![1;n+1]\!]}$ les vecteurs colonnes de Q_{n+1}, on a $\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j C_j = 0$.

$(C_j)_{j \in [\![1;n+1]\!]}$ est lié donc $rg((C_j)) < n+1$: Q_{n+1} est donc non-inversible.

• Par contraposé, si Q_n est inversible, alors $(\varphi_1, \cdots \varphi_n)$ est libre.

• Montrons que Q_n inversible $\Leftarrow (\varphi_1, \cdots \varphi_n)$ est libre.

rappelle qui est x

Soit $X \in \mathbb{R}^n$: $X^T Q_n X = \langle x, x \rangle$ d'après la question 2.
$\langle x, x \rangle = 0$ si $x = 0$, donc par liberté de $(\varphi_1, \cdots \varphi_n)$, ~~si $X = 0$.~~ et pourquoi ? à détailler

Ainsi, Q_n est définie positive stricte donc $0 \notin Sp(Q_n)$: Q_n est inversible

• On a montré que Q_n inversible $\Leftrightarrow (\varphi_1, \cdots \varphi_n)$ libre donc on en déduit Q_{n+1} non-inversible $\Leftrightarrow (\varphi_1, \cdots \varphi_{n+1})$ lié.

pas de tiret entre "non" et un adjectif,
seulement entre "non" et un substantif

Montrons que Q_{n+1} non-inversible $\Rightarrow \varphi_{n+1} \in Vect(\varphi_1, \cdots \varphi_n)$.

Soit Q_{n+1} non-inversible :

et pourquoi ?? Je pense que tu parles de (phi_1,..,phi_r) mais tu n'écris pas r mais n :

c'est incompréhensible

$\exists (\lambda_i) \in \mathbb{R}^{n+1}$ non tous nuls, $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \varphi_i = 0$.

~~Or, $(\varphi_1, \dots \varphi_n)$ est libre~~ donc $\lambda_{n+1} \neq 0$ car sinon il y a contradiction

Ainsi, $\varphi_{n+1} = -\frac{1}{\lambda_{n+1}} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i$ donc $\varphi_{n+1} \in Vect(\varphi_1, \dots \varphi_n)$

On a donc montré que $\boxed{Q_{n+1} \text{ non-inversible} \Leftrightarrow \varphi_{n+1} \in Vect(\varphi_1, \dots \varphi_n)}$

c'est donc un r ??

4. Montrons par récurrence sur $\mathbb{N}^*$: "$\varphi_m \in Vect(\varphi_1, \dots \varphi_n)$" en supposant que Q_{n+1} est non inversible et que $\forall (i,j,k) \in (\mathbb{N}^*)^3$, $\langle \varphi_{i+k}, \varphi_{j+k} \rangle = \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle$

Pour $m = 1$, $\varphi_1 = \varphi_1 + \sum_{i=2}^{n} 0 \times \varphi_i$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

car r>0

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(1), \mathcal{P}(2), \dots \mathcal{P}(m)$ sont vraies. Montrons que $\mathcal{P}(m+1)$ est vraie par hérédité.

$\forall (i,j) \in [\![1;n+1]\!]^2, \forall k \in \mathbb{N}^*, \langle \varphi_{i+k}, \varphi_{j+k} \rangle = \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle$ donc la matrice de Gram de $(\varphi_{k+1}, \dots \varphi_{k+n+1})$ est égale à celle de $(\varphi_1, \dots \varphi_n)$

Ces deux matrices sont non inversibles donc d'après la question 3, $\varphi_{k+n+1} \in Vect(\varphi_{k+1} \dots \varphi_{k+n})$

> on pose k=n-r>0

Si $m \cancel{\geq} n$, on ~~note $m = k+n$~~ donc $\varphi_{m+1} \in Vect(\varphi_{m-n+1}, \dots \varphi_m)$

Or, par hypothèse de récurrence, $\forall i \in [\![m-n+1; m]\!]$, $\varphi_i \in Vect(\varphi_1, \dots \varphi_n)$ donc $\varphi_{m+1} \in Vect(\varphi_1, \dots \varphi_n)$: $\mathcal{P}(m+1)$ est vraie

Ainsi, $\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*, \varphi_m \in Vect(\varphi_1, \dots \varphi_n)}$