

# IX – Séries de fonctions

## I. La fonction $\zeta$ de Riemann

- 1) Par comparaison à des séries de Riemann,  $\zeta$  converge simplement sur  $]1, +\infty[$ .
- 2) S'il y avait convergence uniforme en 1, alors  $\sum \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{n^x}$  convergerait, ce qui n'est pas le cas.

- 3) Posons  $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$ .

Les fonctions  $f_n$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]1, +\infty[$  et

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{(-\ln n)^k}{n^x}.$$

Sur  $[a, b] \subset ]1, +\infty[$ ,

$$\forall s \in [a, b], \left| f_n^{(k)}(x) \right| \leq \frac{(\ln n)^k}{n^a}.$$

Soit  $\rho \in ]1, a[$ , on a

$$n^\rho \times \frac{(\ln n)^k}{n^a} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et il y a donc convergence de la série  $\sum \frac{(\ln n)^k}{n^a}$ .

Par majoration uniforme, la série de fonctions  $\sum u_n^{(k)}$  converge normalement sur  $[a, b]$ .

Par convergence uniforme sur tout segment de  $]1, +\infty[$ , on peut affirmer que  $\zeta$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]1, +\infty[$  et

$$\zeta^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln n)^p}{n^x}.$$

- 4) Monotonie :

$$\zeta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\ln n}{n^x} \leq 0$$

donc  $\zeta$  est décroissante.

Convexité :

$$\zeta''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^x} \geq 0$$

donc  $\zeta$  est convexe.

- 5) Limite en  $+\infty$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^x} = \begin{cases} 0 & \text{si } n > 1 \\ 1 & \text{si } n = 1 \end{cases}.$$

Pour appliquer le théorème de la double limite, observons la convergence uniforme au voisinage de  $+\infty$ .

Pour  $x \geq 2$

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$$

Or  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge, donc  $\sum u_n$  converge normalement et donc uniformément sur  $[2, +\infty[$ . Par le théorème de la double limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^x} = 1 + 0 + 0 + \dots = 1.$$

- 6) La fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^x}$  est décroissante donc

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^x}$$

On en déduit

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} \leq \zeta(x) \leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x}$$

i.e.

$$\frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}.$$

Par suite

$$\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{x-1}.$$

## II. Tableau de variation d'une série de fonctions

- 1) Les fonctions  $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n+x}$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $f'_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$ .

Par le CSSA  $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$  CS sur  $]0, +\infty[$  vers  $S$ .

$\forall a > 0$ , sur  $[a, +\infty[$ ,  $\|f'_n\|_{\infty, [a, +\infty[} \leq \frac{1}{(n+a)^2}$  et  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+a)^2} < +\infty$  donc

$\sum f'_n$  CN sur  $[a, +\infty[$  puis CU sur tout segment de  $[a, +\infty[$ . Par théorème,

$S$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$  et  $S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$ .

- 2) On peut appliquer le CSSA à la série de somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$ . Celle-ci

est donc du signe de son premier terme  $\frac{-1}{x^2}$ . Ainsi  $S'(x) \leq 0$  et  $S$  est décroissante.

- 3)  $S(x+1) + S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = \frac{1}{x}$ .

- 4) Quand  $x \rightarrow 0 : S(x) = \frac{1}{x} - S(x+1)$  et  $S(x+1) \rightarrow S(1)$  donc  $S(x) \sim \frac{1}{x}$ .

- 5) Quand  $x \rightarrow +\infty : \frac{1}{2}(S(x) + S(x+1)) \leq S(x) \leq \frac{1}{2}(S(x) + S(x-1))$  et  $\frac{1}{x} \sim \frac{1}{x-1}$  d'où  $S(x) \sim \frac{1}{2x}$ .

## III. Intersion somme/intégrale

Commençons par observer que

$$\begin{aligned} \frac{\sin t}{e^t - 1} &= \sin t \times \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sin t \times e^{-nt}. \end{aligned}$$

De plus  $t \mapsto \sin t \times e^{-nt}$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$  par comparaison à une série exponentielle, et

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |\sin t| e^{-nt} dt &\leq \int_0^{+\infty} t e^{-nt} dt \\ &\leq \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

et ce dernier terme est le terme général d'une série convergente, donc  $t \mapsto \frac{\sin t}{e^t - 1}$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

Enfin, nous pouvons utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque, et ainsi

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1} dt &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin t \cdot e^{-nt} dt. \\ \text{Or } \int_0^{+\infty} \sin t \cdot e^{-nt} dt &= \text{Im} \int_0^{+\infty} e^{(-n+i)t} dt \\ &= \frac{1}{n^2 + 1}. \end{aligned}$$

Finalement

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}.$$

#### IV. Utilisation du théorème de convergence dominée

Commençons par remarquer que  $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$ .

Par sommation géométrique on peut écrire  $\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n}$  sur  $[0, 1[$ .

Par suite  $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_{[0,1[} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  avec  $f_n(t) = (-1)^n t^{2n}$  définie sur  $[0, 1[$ .

Ici  $\sum f_n$  ne converge pas en 1 donc on ne peut pas utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, et  $\sum \int_{[0,1[} |f_n| = \sum \frac{1}{2n+1}$  diverge et on ne peut pas appliquer le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque non plus. Transitons alors par les sommes partielles.

On pose  $S_n(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k}$ .

On a  $S_n \xrightarrow{CS} S$  sur  $[0, 1[$ , avec  $S(t) = \frac{1}{1+t^2}$ .

Les fonctions  $S_n$  et  $S$  sont continues par morceaux, et

$$|S_n(t)| = \frac{|1 - (-1)^{n+1} t^{2n+2}|}{1+t^2} \leq \frac{2}{1+t^2} = \varphi(t)$$

avec  $\varphi$  intégrable.

Par convergence dominée  $\int_0^1 S_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 S(t) dt$ . Or

$$\begin{aligned} \int_0^1 S_n(t) dt &= \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} dt \\ &= \sum_{k=0}^n \int_0^1 (-1)^k t^{2k} dt \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \end{aligned}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$