Devoir surveillé n° 5 – v2

Durée : 4 heures, calculatrices et documents interdits

Mines-Ponts 2009 – PC – Maths I

Étude spectrale d'un opérateur de transfert

Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et T un endomorphisme de V : on dira que le complexe λ est une valeur propre de T s'il existe un élément f de V non nul tel que $Tf = \lambda f$.
Soit $\mathscr{C}^0$ l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui sont continues et 1-périodiques. Cet espace est normé par

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|,\ x \in \mathbb{R}\}$$

On désigne par e_0 la fonction constante égale à 1 sur tout $\mathbb{R}$ et par D le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0$ engendré par e_0.
Si $f \in \mathscr{C}^0$, on définit

$$Tf(x) = \frac{1}{2}\left(f(\frac{x}{2}) + f(\frac{x+1}{2})\right)$$

L'objet du problème est l'étude des propriétés spectrales de diverses restrictions de T à des sous-espaces invariants de $\mathscr{C}^0$. On mettra en évidence sur certains de ces sous-espaces la propriété de "trou spectral" : il existe $0 < r < 1$ tel que les valeurs propres autres que 1 sont de module inférieur ou égal à r.

A - Préliminaires.

1) Montrer que si f appartient à $\mathscr{C}^0$ alors Tf aussi.

2) Montrer que pour tout élément f de $\mathscr{C}^0$ on a l'inégalité $\|Tf\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$ puis que

$$\sup_{\|f\|_\infty = 1} \|Tf\|_\infty = 1$$

On appelle H° l'hyperplan de $\mathscr{C}^0$ des fonctions f telles que

$$\int_0^1 f(t)\, dt = 0$$

3) Montrer que H° est stable par T.

4) Montrer que D et H° sont des sous-espaces vectoriels supllémentaires de $\mathscr{C}^0$, et expliciter le projecteur P sur D parallèlement à H°.

B - Fonctions trigonométriques.

Pour tout entier relatif k, on note $e_k(x) = e^{2i\pi kx}$ de sorte que e_k est continue et 1-périodique, c'est-à-dire que e_k appartient à $\mathscr{C}^0$. Pour tout entier n, on désigne par E_n le sous-espace de $\mathscr{C}^0$ engendré par $e_0, e_1, e_{-1}, \ldots, e_n, e_{-n}$.

5) Montrer que T est linéaire.
Déterminer Te_k (respectivement Pe_k) pour tout entier relatif k et en déduire que les espaces E_n sont T-stables (respectivement P-stables).

On note T_n (respectivement P_n) l'endomorphisme de E_n induit par T (respectivement par P).

Pour $f, g \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on notera aussi $\varphi(f,g) = \displaystyle\int_0^1 \overline{f(t)}g(t)\,\mathrm{d}t$.

6) Soit $k, l \in \mathbb{Z}$ tels que $k \neq l$. Montrer que $\varphi(e_k, e_l) = 0$ et $\varphi(e_k, e_k) \neq 0$.

7) En déduire que la famille $(e_0, e_1, e_{-1}, \ldots, e_n, e_{-n})$ est libre et est une base de E_n.

8) Calculer les valeurs propres de T_2. L'endomorphisme T_2 est-il diagonalisable ?

9) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et k l'unique entier tel que $2^{k-1} \leqslant n < 2^k$. Montrer pour tout entier $p \geqslant k$, l'identité suivante :

$$T_n^p = P_n$$

C - Fonctions höldériennes.

On rappelle que pour tous les réels x et y,

$$|e^{ix} - e^{iy}| \leqslant |x - y|$$

Soit $\alpha \in]0,1[$. On appelle $\mathscr{C}^\alpha$ le sous-espace de $\mathscr{C}^0$ des fonctions f telles que

$$\left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} / \ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq y \right\} \quad \text{soit majoré}$$

On notera alors

$$m_\alpha(f) = \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} / \ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq y \right\}$$

On admettra que

$$\|f\|_\alpha = m_\alpha(f) + \|f\|_\infty$$

définit une norme sur $\mathscr{C}^\alpha$.

10) Montrer que pour tout $f \in \mathscr{C}^\alpha$, $m_\alpha(Tf) \leqslant 2^{-\alpha} m_\alpha(f)$ et que $\mathscr{C}^\alpha$ est stable par T.

On notera T_α l'endomorphisme de $\mathscr{C}^\alpha$ induit par T.

11) Montrer que pour tout $f \in \mathscr{C}^\alpha$, $\|T_\alpha f\|_\alpha \leqslant \|f\|_\alpha$ puis que $\displaystyle\sup_{f \in \mathscr{C}^\alpha,\ \|f\|_\alpha = 1} \|T_\alpha f\|_\alpha = 1$.

Soit λ un nombre complexe de module strictement inférieur à 1. On pose, pour tout réel x,

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda^k e_{2^k}(x)$$

12) Montrer que la série de fonctions $\sum_{k\geqslant 0} \lambda^k e_{2^k}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $f_\lambda \in \mathscr{C}^0$ et que $Tf_\lambda = \lambda f_\lambda$.

On admettra, que dans ce cas, la suite $(S_n, n \geqslant 0)$ converge dans l'espace vectoriel $(\mathscr{C}^0, \|\|_\infty)$ vers f_λ :

$$\lim_{n\to+\infty} \|S_n - f_\lambda\|_\infty = 0$$

13) Montrer qu'alors $Tf_\lambda = \lambda f_\lambda$. Est-ce que λ est une valeur propre de T ?

14) Soit maintenant λ tel que $|\lambda| \leqslant 2^{-\alpha}$ et deux réels x et y tels que $|x-y| \leqslant 1$.
Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$2^{-n-1} < |x-y| \leqslant 2^{-n}.$$

En considérant séparément les sommes avec $k \leqslant n$ et $k > n$ dans la série ayant pour valeur $f_\lambda(x) - f_\lambda(y)$, montrer que $f_\lambda \in \mathscr{C}^\alpha$.

15) Montrer que $H^\alpha = H^\circ \cap \mathscr{C}^\alpha$ est stable par T_α.

16) Soit $f \in \mathscr{C}^0$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T^n(f)(x) = 2^{-n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f(k2^{-n} + x2^{-n})$$

17) Établir, pour $f \in \mathscr{C}^\alpha$ et $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité suivante :

$$\sup_{x\in[0,1]} |T_\alpha^n(f)(x) - \int_0^1 f(t)\, dt| \leqslant m_\alpha(f) 2^{-n\alpha}$$

18) Montrer que si $f \in H^\alpha$ alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\|T_\alpha^n(f)\|_\alpha \leqslant 2^{1-n\alpha} \|f\|_\alpha$$

19) En déduire que l'ensemble des valeurs propres de T_α est la réunion du singleton $\{1\}$ et du disque fermé de centre 0 et de rayon $2^{-\alpha}$ (phénomène de trou spectral).

— FIN —