

Semaine 9 du 24 novembre 2025 (S48)

VII Réduction des endomorphismes et des matrices

Le chapitre VII reste au programme :

1 Diagonalisation en dimension finie

1.1 Endomorphismes diagonalisables

1.2 Matrices diagonalisables

1.3 Pratique de la diagonalisation

2 Diagonalisabilité et polynômes annulateurs

3 Applications de la diagonalisation

3.1 Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable

3.2 Suites récurrentes linéaires simultanées

3.3 Suites récurrentes linéaires à coefficients constants

3.4 Systèmes différentiels linéaires

4 Trigonalisation en dimension finie

4.1 Endomorphismes trigonalisables

4.2 Matrices trigonalisables

4.3 Trigonalisation et polynômes

5 Exercices à connaître

5.1 Deux diagonalisations – bête et méchante et plus théorique

- 1) Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.
- 2) Diagonaliser la matrice J dont tous les coefficients sont égaux à 1. Puis diagonaliser la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $a_{i,j} = \alpha$ si $i = j, a_{i,j} = \beta$ sinon.

5.2 Deux applications de la trigonalisation

- 1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente.
 - a) Montrer que A est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte.
 - b) Le résultat est-il encore vrai pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
- 2) Soit E un \mathbb{C} -ev de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\text{Sp}(P(u)) = P(\text{Sp}(u))$.

5.3 Diagonalisation simultanée

Dans un espace vectoriel E de dimension finie, on considère deux endomorphismes u et v diagonalisables tels que $u \circ v = v \circ u$.

- 1) Montrer que les sous-espaces propres de v sont stables par u .
- 2) Montrer que l'endomorphisme induit de u à un sous-espace propre de v est diagonalisable.
- 3) Montrer qu'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u et v .

5.4 Racine carrée d'une matrice

- 1) Soit M une matrice diagonale d'ordre n dont les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts. Montrer que les matrices commutant avec M sont exactement les matrices diagonales.

- 2) Déterminer les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- 3) Combien y a-t-il de matrice M telle que $M^2 = A$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$? dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

S'y ajoute :

VIII Séries de fonctions

1 Différents types de convergence

1.1 Convergence simple

1.2 Convergence uniforme

1.3 Convergence normale

1.4 Liens entre les différentes convergences

2 Régularité et limites de la somme d'une série de fonctions

2.1 Continuité

2.2 Interversion de limites

2.3 Déivation des séries de fonctions

3 Séries de fonctions et intégration

3.1 Intégration terme à terme sur un segment

3.2 Intégration terme à terme sur un intervalle quelconque

3.3 Utilisation du théorème de convergence dominée

4 Exercices à connaître

4.1 Convergence uniforme de $\sum f_n$ et limite de $\|f_n\|_\infty$ (banque CCP MP)

Soit $A \subset \mathbb{C}$ et (f_n) une suite de fonctions de A dans \mathbb{C} .

- 1) Démontrer l'implication :

$$\left(\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } A \right) \Downarrow$$

(la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers 0 sur A)

- 2) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; +\infty[, f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$.

Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0; +\infty[$.

$\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0; +\infty[$? Justifier.

4.2 La fonction ζ de Riemann

On définit, là où cela est possible, la fonction $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

- 1) Donner l'ensemble de définition de ζ .
- 2) Montrer qu'elle ne converge pas uniformément sur $]1, +\infty[$.
- 3) Montrer que $\zeta \in \mathcal{C}^\infty(]1, +\infty[, \mathbb{R})$.
- 4) Étudier la monotonie et la convexité de ζ .
- 5) Montrer qu'elle a une limite en $+\infty$ et la calculer.
- 6) Donner un équivalent de ζ en 1^+ .

4.3 Tableau de variation d'une série de fonctions

Pour $x > 0$ on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

- 1) Justifier que S est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .
- 2) Préciser le sens de variation de S .
- 3) Établir $S(x+1) + S(x) = 1/x$.
- 4) Donner un équivalent de S en 0.
- 5) Donner un équivalent de S en $+\infty$.

4.4 Interversion somme/intégrale

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$.

4.5 Utilisation du théorème de convergence dominée

Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$, en justifiant soigneusement que les théorèmes d'intégration terme à terme sur un segment ou un intervalle quelconque ne peuvent être utilisés.