Feuille d'exercice n° 11 : **Intégrales dépendant d'un paramètre**

I. Continuité, limites

Exercice 1 Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)}$.

1) Domaine de définition de f ?

2) f est-elle continue sur D_f ?

3) Montrer que $x \in D_f \Rightarrow 1-x \in D_f$ et $f(1-x) = f(x)$.

4) Trouver un équivalent de f en chacune des bornes de D_f.

Exercice 2 Trouver un équivalent simple de $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$, lorsque $x \longrightarrow 0^+$.

II. Dérivation

Exercice 3 ( )

1) Montrer que $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est définie sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^2$ et calculer g''.

3) Montrer que $g(x) = x\,\mathrm{Arctan}\,x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

Exercice 4 Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^x(t)\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que f est définie et positive sur $]-1,+\infty[$.

2) Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ et préciser sa monotonie.

3) Former une relation entre $f(x+2)$ et $f(x)$ pour tout $x > -1$.

4) On pose pour $x > 0$,

$$\varphi(x) = xf(x)f(x-1)$$

Montrer que

$$\forall x > 0, \varphi(x+1) = \varphi(x)$$

Calculer $\varphi(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$.

5) Déterminer un équivalent à f en $+\infty$.

6) Déterminer un équivalent à f en -1^+.

Exercice 5 Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x$. Montrer que I est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$. Écrire $I(\alpha)$ comme somme de série.

Exercice 6 ( ) Calculer $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ avec $x \in]-1,+\infty[$.

Exercice 7 ( ) Soit f de classe $\mathscr{C}^p$, avec $p \geqslant 1$, sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes. Soit $a \in I$, on suppose $f(a) = 0$. Montrer qu'il existe g de classe $\mathscr{C}^{p-1}$ sur I telle que

$$\forall x \in I \quad f(x) = (x-a)g(x).$$

Indication : écrire $f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$ puis faire un changement de variable dans l'intégrale.

Exercice 8 Soit

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t\,(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

Domaine de définition ? La fonction f est-elle continue ? de classe $\mathscr{C}^1$? Calculer la dérivée de f, puis f. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$

Exercice 9 (🚲) Existence et calcul éventuel de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}\sin(tx)}{t}\,\mathrm{d}t$.

III. Équations différentielles

Exercice 10 (🚲) Soit $f \,:\, x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que f est une solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $y'' + y = \dfrac{1}{x}$.

2) Montrer que c'est la seule solution de cette équation différentielle qui est de limite nulle en $+\infty$.

Exercice 11 (🚲) On rappelle que l'intégrale de Gauß, que l'on note G, vaut $G = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

2) Donner les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\dfrac{i}{2(ix-1)} f(x)$.

3) Montrer l'existence et donner l'expression (sans signe intégrale) de $u(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}\cos(xt)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ et $v(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}\sin(xt)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$

Exercice 12 (🚲)

1) Étudier $J(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{itx}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

2) À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 1 vérifiée par J et en déduire une forme simplifiée de $J(x)$ (on rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).