Devoir surveillé n° 7 – Concours blanc, première épreuve – v1

Durée : 4 heures, calculatrices et documents interdits

Le sujet est constitué de deux extraits indépendants : le premier problème provient du concours CCINP 2023, PC, et le second du concours CCINP 2022, PSI.

I. CCINP 2023 – PC

Un jeu de société

Présentation générale

On considère deux entiers $M \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et $A \in \mathbb{N}^*$. On dispose d'un plateau de jeu infini sur lequel se trouve un parcours composé de cases numérotées par les entiers naturels. Un pion se trouve initialement sur la case numérotée 0 et il doit atteindre ou dépasser la case numérotée A pour terminer le jeu. À chaque tour de jeu, le joueur utilise un ordinateur qui génère aléatoirement et uniformément un élément de l'ensemble $[\![0, M-1]\!]$: le pion est avancé d'autant de cases que le nombre généré.

Dans la suite, on s'intéresse tout particulièrement au nombre de tours de jeu nécessaire pour que le pion atteigne ou dépasse la case numérotée A.

Pour modéliser cette situation, on se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et on considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles indépendantes de loi uniforme sur $[\![0, M-1]\!]$.

On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_0 = 0$ et :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

On considère la variable aléatoire T définie de la façon suivante :

1) si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n < A$, alors on pose $T = 0$;

2) sinon, on pose $T = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n \geqslant A\}$.

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'espérance de la variable aléatoire T dans deux cas particuliers.

Partie I - Préliminaires

I.1 - Modélisation

Dans cette sous-partie, on effectue le lien entre la situation présentée dans l'introduction et le modèle considéré ci-dessus.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que représentent les variables aléatoires X_n et S_n dans le contexte de la situation présentée ?

2) Que représente la variable aléatoire T ?

I.2 - Calcul de la somme d'une série entière

On considère la fonction $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\, x \in]-1,1[, \quad f(x) = \frac{1}{1-x}$$

3) Montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et que :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad \forall\, x \in]-1,1[, \quad f^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}.$$

4) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant p} \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} x^n$ est égal à 1 .

5) Soit $p \in \mathbb{N}$. En développant la fonction f en série entière, déduire des questions précédentes l'égalité suivante :

$$\forall\, x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=p}^{+\infty} \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} x^n = \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}$$

Partie II - Étude d'un premier cas

Dans cette partie uniquement, on suppose que $M = 2$.

II.1 - Loi des variables aléatoires S_n et T

6) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que S_n suit une loi binomiale de paramètres n et $1/2$.

7) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire T ?

8) Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant A$. Exprimer l'évènement $(T = k)$ en fonction des évènements $(S_{k-1} = A-1)$ et $(X_k = 1)$. En déduire que :

$$P(T = k) = \begin{pmatrix} k-1 \\ A-1 \end{pmatrix} \frac{1}{2^k}$$

9) Calculer $P(T = 0)$.

II.2 - Espérance de la variable aléatoire T

On déduit des résultats précédents que la fonction génératrice G_T de la variable aléatoire T est égale à la somme de la série entière $\sum\limits_{k \geqslant A} P(T = k)x^k$ sur son intervalle de convergence.

10) Déterminer la rayon de convergence R_T de la série entière $\sum\limits_{k \geqslant A} P(T = k)x^k$ et montrer que :

$$\forall\, x \in]-R_T, R_T[, \quad G_T(x) = \left(\frac{x}{2-x}\right)^A.$$

11) En déduire le nombre moyen de tours de jeu pour terminer notre partie.

Partie III - Étude d'un second cas

Dans cette partie uniquement, on suppose que $A \leqslant M$.

III. 1 - Calcul de la probabilité $P\left(S_n \leqslant k\right)$

Dans cette sous-partie, on pourra librement utiliser la formule suivante :

$$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2, \quad \sum_{\ell=0}^{k} \binom{n+k-\ell}{n} = \binom{n+1+k}{n+1}.$$

12) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En considérant le système complet d'évènements

$$\left(\left(X_{n+1}=0\right), \ldots, \left(X_{n+1}=M-1\right)\right),$$

montrer que :

$$\forall\, k \in [\![0, A-1]\!], \quad P\left(S_{n+1} \leqslant k\right) = \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^{k} P\left(S_n \leqslant k-\ell\right).$$

13) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall\, k \in [\![0, A-1]\!], \quad P\left(S_n \leqslant k\right) = \frac{1}{M^n} \binom{n+k}{n}$$

III.2 - Espérance de la variable aléatoire T

On rappelle le résultat suivant qui pourra être utilisé librement dans la suite : si Z est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} P(Z>n)$ converge, alors Z admet une espérance et on a l'égalité :

$$E(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Z>n)$$

14) Que peut-on dire des évènements $(T>n)$ et $(S_n < A)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$? En déduire que la variable aléatoire T admet une espérance et calculer sa valeur.

II. CCINP 2022 – PSI

Intégrales de Gauss et théorème de Moivre-Laplace

Présentation

Le théorème de Moivre-Laplace permet d'approcher les calculs de probabilité pour une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $p \in [0,1]$ par des calculs d'intégrales de fonctions gaussiennes. Une première démonstration a été donnée en 1733 par Abraham de Moivre pour le cas où $p = \dfrac{1}{2}$.

La **partie I** permet d'obtenir un résultat de convergence. La **partie II** aboutit à un calcul exact de fonction gaussienne dite « intégrale de Gauss ». La **partie III** permet d'établir une majoration utile à la **partie IV** qui s'intéresse à la convergence simple d'une suite de fonctions vers une fonction gaussienne. Ce résultat de convergence constitue une étape clé dans une démonstration possible du théorème de Moivre-Laplace.

Partie I – Convergence d'une suite

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, on pose :

$$a_{k,n} = \frac{\sqrt{2n}}{2^{2n+1}} \binom{2n}{k}.$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_m = \int_0^1 \left(1 - t^2\right)^{\frac{m}{2}} \, \mathrm{d}t.$$

15) Montrer que la suite $(I_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

16) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$I_{m+2} = \frac{m+2}{m+3} I_m.$$

17) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$I_{2n} = \frac{\sqrt{2n}}{2(2n+1)a_{n,n}}, \qquad \text{et :} \qquad I_{2n-1} = \frac{\pi}{\sqrt{2n}} a_{n,n}.$$

18) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$1 \leqslant \frac{I_{2n-1}}{I_{2n}} \leqslant \frac{I_{2n-2}}{I_{2n}}.$$

En déduire que :

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2n}} \leqslant 2\pi \left(a_{n,n}\right)^2 \leqslant 1.$$

19) En déduire la convergence de la suite $(a_{n,n})_{n\geqslant 1}$ lorsque n tend l'infini, puis que :

$$I_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

Partie II – Calcul d'une intégrale de Gauss

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on pose :

$$J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on pose :

$$u_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \sqrt{n}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Enfin, on considère l'intégrale de Gauss :

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2\pi}}.$$

20) À l'aide d'un changement de variable simple, déduire de la **19)** que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ converge et donner sa limite.

21) Montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ et donner sa limite.

22) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $1+x \leqslant \mathrm{e}^{x}$, et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$:

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leqslant u_n(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t^2}.$$

23) Montrer que l'intégrale K est convergente, puis déduire des questions précédentes une valeur exacte de K.

Partie III – Calcul d'une majoration

24) Montrer qu'il existe une fonction $g : \left[0, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$ et un réel $M \geqslant 0$, tels que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad \frac{1-x}{1+x} = \mathrm{e}^{-2x+g(x)}, \qquad \text{et :} \quad |g(x)| \leqslant Mx^3.$$

25) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrer que pour tout $k \in [\![n+1, 2n]\!]$:

$$\frac{a_{k,n}}{a_{n,n}} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{k-n-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)}{\prod\limits_{i=1}^{k-n-1}\left(1+\frac{i}{n}\right)} \times \frac{n}{k}.$$

26) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 \leqslant k \leqslant \frac{3n}{2}+1$, il existe $b_{k,n} \in \mathbb{R}$ tel que : $|b_{k,n}| \leqslant \frac{M}{n^3}(k-n-1)^4$, et :

$$\frac{a_{k,n}}{a_{n,n}} = \frac{n}{k}\mathrm{e}^{b_{k,n}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}(k-n-1)(k-n)}.$$

Partie IV – Vers le théorème de Moivre-Laplace

On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 1}$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \Sigma, \mathrm{P})$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, la variable aléatoire X_n suit une loi binomiale $\mathscr{B}\left(2n, \frac{1}{2}\right)$ et on pose :

$$Z_n = \frac{2X_n - 2n}{\sqrt{2n}}.$$

Pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, on pose $t_{k,n} = \frac{2k-2n}{\sqrt{2n}}$ et $J_{k,n} = \left[t_{k,n} - \frac{1}{\sqrt{2n}}, t_{k,n} + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right[$. On admet que les intervalles $J_{k,n}$, pour $k \in [\![0, 2n]\!]$, sont disjoints deux à deux et que :

$$\left[-\sqrt{2n} - \frac{1}{\sqrt{2n}}, \sqrt{2n} + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right[= \bigcup_{k=0}^{2n} J_{k,n}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, on définit une fonction $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en escalier de la manière suivante :

$$h_n : t \mapsto \begin{cases} \frac{\sqrt{2n}}{2}\mathrm{P}(X_n = k) & \text{s'il existe } k \in [\![0, 2n]\!] \text{ tel que } t \in J_{k,n}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

27) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de la variable aléatoire Z_n.

28) Proposer une représentation graphique de la fonction h_2.

29) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Vérifier que la fonction h_n possède un maximum sur $\mathbb{R}$ et déterminer pour quelles valeurs ce maximum est atteint.

30) Soit $x \in]0, +\infty[$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, vérifiant $n \geqslant n_0$, il existe $k_n \in \mathbb{N}$, tel que $x \in J_{k_n,n}$. Vérifier qu'alors :

$$k_n - n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x\sqrt{2n}}{2} \ , \ t_{k_n,n} \underset{n\to+\infty}{\sim} x \ , \ k_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n.$$

31) Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Vérifier que pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$: $h_n(t_{k,n}) = a_{k,n}$. Montrer ensuite, en utilisant les résultats des **19)**, **26)**, **30)**, que la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et préciser sa limite.

Remarque culturelle : La convergence simple de cette suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ est une étape importante permettant de démontrer un cas particulier du théorème de Moivre-Laplace :

Théorème
Pour tous réels $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, tels que $a < b$:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(a \leqslant Z_n \leqslant b) = \int_a^b \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2\pi}}.$$

— FIN —