Feuille d'exercice n° 04 : **Intégrales généralisées**

I. Révision de 1ère année

Exercice 1 Soit $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ continue.

1) Montrer que si $\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin t\,\mathrm{d}t = 0$ alors il existe $a \in]0,\pi[$ tel que f s'annule en a.

2) Montrer que si $\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin t\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi f(t)\cos t\,\mathrm{d}t = 0$ alors f s'annule 2 fois sur $]0,\pi[$.
(indice : on pourra regarder $\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin(t-a)\,\mathrm{d}t$).

Exercice 2 () [Irrationalité du nombre π]

1) Pour $a, b \in \mathbb{N}^\star$, montrer que la fonction polynomiale $P_n(x) = \dfrac{1}{n!}x^n(bx-a)^n$ et ses dérivées successives prennent en 0 et en $\dfrac{a}{b}$ des valeurs entières.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^\pi P_n(t)\sin t\,\mathrm{d}t$. Montrer que $I_n \to 0$.

3) En supposant $\pi = \dfrac{a}{b}$, montrer que $I_n \in \mathbb{Z}$. Conclure.

Exercice 3 Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$.

1) Trouver toutes les fonctions f, continues sur $[a,b]$ et à valeurs réelles telles que $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

2) Même question pour des fonctions à valeurs complexes.

Exercice 4 () Déterminer les primitives suivantes :

1) $\displaystyle\int \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$ **2)** $\displaystyle\int \frac{t^2}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$ **3)** $\displaystyle\int \frac{t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ **4)** $\displaystyle\int \tan t\,\mathrm{d}t$ **5)** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$ **6)** $\displaystyle\int \cos^3 t\,\mathrm{d}t$ **7)** $\displaystyle\int \cos^2 t\sin^3 t\,\mathrm{d}t$.

Exercice 5 () Déterminer les primitives suivantes :

1) $\displaystyle\int \ln t\,\mathrm{d}t$ **2)** $\displaystyle\int t\,\mathrm{Arctan}\,t\,\mathrm{d}t$ **3)** $\displaystyle\int (t^2-t+1)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 6 () Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ **2)** $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t+t(\ln t)^2}$ **3)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{\,t}+1}$ **4)** $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ **5)** $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 7 () Calculer $I_{m,n} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(mt)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$ pour $m, n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8 () Pour tout entier n on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$. Calculer I_0 et I_1. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (3+2n)I_n = 2nI_{n-1}.$$

Exercice 9 (▲) On définit la fonction F de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $F(x) = \int_0^\pi \frac{|\sin(tx)|}{t}\,\mathrm{d}t$.

1) Justifier proprement la définition de F.

2) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer sa dérivée.

3) Nous étudions à présent le comportement asymptotique de F.

a) Montrer que $\forall x > 1$, $F(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x\rfloor -1} \left(\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t \right) + \int_{\pi\lfloor x\rfloor}^{\pi x} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$.

b) On rappelle que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$. En déduire que $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\pi}\ln x$.

Exercice 10 (✎)

Montrer que : $\forall x \in [0, \pi/2]$, $x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

Exercice 11 Déterminer les limites des suites définies par le terme général suivant :

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$ 2) $\displaystyle\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$.

II. Convergence et intégrabilité

Exercice 12 (✎) Soient α, $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. On pose $I(\alpha,\beta) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{|1-x^\alpha|^\beta}$. Représenter l'ensemble des points du plan $M(\alpha,\beta)$ où $I(\alpha,\beta)$ converge.

Exercice 13 (✎) Donner une CNS sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que $\int_0^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ existe.

Exercice 14 (✎) Étudier l'intégrabilité des applications suivantes :

1) $x \longmapsto \frac{1+x}{\sqrt{x}+x^2}$ sur $]0;1]$

2) $x \longmapsto \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{x^3+1}}$ sur $[0;+\infty[$

3) $x \longmapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x^3+1}}$ sur $[1;+\infty[$

4) $x \longmapsto \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+x}}$ sur $]0;1]$

5) $x \longmapsto \frac{\ln x}{x^3+x^2}$ sur $]0;1]$

6) $x \longmapsto \frac{1}{x}\left(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}\right)$ sur $[1;+\infty[$

7) $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^6}}$ sur $]-1;1[$

8) $x \longmapsto \frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^4}}$ sur $]0;+\infty[$

9) $x \longmapsto \frac{1+x^2\mathrm{e}^{-x}}{x^2+\mathrm{e}^{-2x}}$ sur $]-\infty;+\infty[$.

Exercice 15 Soit $f \in \mathscr{C}^1([0,+\infty[,\mathbb{R})$. On suppose que f et f' sont intégrables sur $[0,+\infty[$. Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 16 Soient $y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que y et y'' sont de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$: montrer que y' l'est également.

Exercice 17

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

1) Prouver que $\int_0^{+\infty} f$ converge si et seulement si la suite $n \mapsto \int_0^n f$ converge et que dans ces conditions :

$$\int_0^{+\infty} f = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n f.$$

2) Que se passe-t-il si on enlève l'hypothèse $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$?

Exercice 18 (▲)
Soient $\alpha > 0$ et $f \in \mathscr{C}^0\left([1,+\infty\,[,\mathbb{R}_+^*\right)$.

1) On suppose que f est intégrable sur $[1,+\infty\,[$. On pose $R(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x \geqslant 1$. Étudier l'intégrabilité de $x \mapsto \dfrac{f(x)}{R(x)^\alpha}$ sur $[1,+\infty[$.

2) On suppose que f n'est pas intégrable sur $[1,+\infty\,[$. On pose $S(x) = \displaystyle\int_1^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x \geqslant 1$. Étudier l'intégrabilité de $x \mapsto \dfrac{f(x)}{S(x)^\alpha}$ sur $[2,+\infty[$.

Exercice 19 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue, décroissante et de limite nulle. On pose pour tout $n \geqslant 0$:

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

2) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Quel est son signe ?

3) On suppose que $f(x) \geqslant \dfrac{1}{x}$ au voisinage de $+\infty$. Montrer que $t \mapsto f(t)\sin(t)$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 20
Soit $f : [1,+\infty\,[\to \mathbb{R}$ continue. Montrer que si $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

III. Calculs, limites et équivalents d'intégrales généralisées

Exercice 21 (✎) Existence et calcul des intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{x^{10}+1}\,\mathrm{d}x$ **3)** $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ **5)** $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \ln\left(1-3x+2x^2\right)\mathrm{d}x.$

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} 2x}\,\mathrm{d}x$ **4)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x$

Exercice 22 (✎) Existence et calcul des intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x$ **3)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x-\operatorname{Arctan} x}{x^3}\,\mathrm{d}x$

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x$ **4)** $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1+x}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x.$

Exercice 23 On veut étudier la convergence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$, et calculer cette intégrale.

1) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Majorer $\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ en fonction de x (on distinguera deux cas : $x < 1$ et $x \geqslant 1$).

2) En déduire que I converge.

3) Calculer I grâce à une intégration par parties.

Exercice 24 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}}$.

1) Existence de I_n ?

2) Donner une relation entre I_n et I_{n+1} (on pourra utiliser une intégration par parties).

3) Calculer I_n en fonction de n.

Exercice 25 Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1) Donner un équivalent simple de $f(x)$ en 0.

2) Donner un équivalent simple de $f(x)$ en $+\infty$ (on pourra utiliser une intégration par parties et écrire que $f(x) = \int_x^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [uv]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$, et montrer que $\int_x^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x}f(x)$).

Exercice 26 On pose : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\mathrm{d}x$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\mathrm{d}x$ et $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)dx$.

1) Justifier l'existence de I, J et K.

2) Démontrer que $I = J = K$.

3) Calculer I.

Exercice 27

1) Montrer que $\int_0^1 x\ln(x)\mathrm{d}x$ converge.

2) Soit $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^\alpha}\,\mathrm{d}x$

- **a)** Déterminer la nature de $I(\alpha)$ en fonction de α.
- **b)** Effectuer le changement de variable $y = \frac{1}{x}$ dans $I(2)$. En déduire la valeur de $I(2)$.

Exercice 28 Considérons $I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^a)}$ où $a \in \mathbb{R}_+$.

1) Montrer que I converge.

2) Via un changement de variable, calculer I.

Exercice 29 Convergence de la suite $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t^n}\,\mathrm{d}t$? Limite ?

Exercice 30 Soit f une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ et F de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que si f admet une limite ℓ non nulle en $+\infty$, alors F admet aussi ℓ pour limite en $+\infty$.

2) Montrer que si f admet 0 pour limite en $+\infty$, alors F également.

3) Donner un exemple où f n'a pas de limite en $+\infty$ mais où F tend vers 0.

4) Montrer que si $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, alors $F(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 31 Le but de cet exercice est de montrer la convergence de l'intégrale généralisée suivante : $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4\sin^2 x}$.

Pour cela, on considère la série de terme général

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4\sin^2 x}.$$

1) Par un changement de variable, transformer u_n en $u_n = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{1+(n\pi+x)^4\sin^2 x}$.

2) Encadrer ensuite u_n par les termes de la suite v_n où $v_n = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{1+(n\pi)^4\sin^2 x}$.

3) Calculer explicitement l'intégrale v_n (*indication* : considérer le changement de variable $t = \tan x$).

4) En déduire un équivalent de u_n.

5) Conclure.

Exercice 32 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $A_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x}\,\mathrm{d}x$ et $B_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

1) Question préliminaire : soit g une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ telle que $g(0) = 0$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\sin((2n+1)t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2) Étudier $A_n - A_{n-1}$ puis calculer A_n.

3) Étudier $B_n - A_n$ puis montrer que (B_n) admet une limite finie, et la donner.

4) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 33 Soit $a \in]0,1[$. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a^{\sqrt{n}}$.