XVI. Espaces vectoriels préhilbertiens et euclidiens

I. Inégalité de Cauchy-Schwarz et application (banque CCINP MP)

1) **a)** Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$.
On pose $\forall\, x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.
Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall (x,y) \in E^2$, $|\,(x|y)\,| \leqslant ||x||\,||y||$
Preuve :
Soit $(x,y) \in E^2$. Posons $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda) = ||x+\lambda y||^2$.

On remarque que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda) \geqslant 0$.
De plus, $P(\lambda) = (x+\lambda y|x+\lambda y)$.
Donc, par bilinéarité et symétrie de $(\,|\,)$, $P(\lambda) = ||y||^2\lambda^2 + 2\lambda\,(x|y) + ||x||^2$.
On remarque que $P(\lambda)$ est un trinôme en λ si et seulement si $||y||^2 \neq 0$.
Premier cas : si $y = 0$
Alors $|\,(x|y)\,| = 0$ et $||x||\,||y|| = 0$ donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vérifiée.
Deuxième cas : $y \neq 0$
Alors $||y|| = \sqrt{(y|y)} \neq 0$ car $y \neq 0$ et $(\,|\,)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive.
Donc, P est un trinôme du second degré en λ qui est positif ou nul.
On en déduit que le discriminant réduit Δ est négatif ou nul.
Or $\Delta = (x|y)^2 - ||x||^2||y||^2$ donc $(x|y)^2 \leqslant ||x||^2||y||^2$.
Et donc, $|\,(x|y)\,| \leqslant ||x||\,||y||$.

b) On reprend les notations de 1. .
Prouvons que $\forall (x,y) \in E^2$, $|\,(x|y)\,| = ||x||\,||y|| \iff x$ et y sont colinéaires.
Supposons que $|\,(x|y)\,| = ||x||\,||y||$.

Premier cas : si $y = 0$
Alors x et y sont colinéaires.
Deuxième cas : si $y \neq 0$
Alors le discriminant de P est nul et donc P admet une racine double λ_0.
C'est-à-dire $P(\lambda_0) = 0$ et comme $(\,|\,)$ est définie positive, alors $x + \lambda_0 y = 0$.
Donc x et y sont colinéaires.
Supposons que x et y soient colinéaires.
Alors $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x = \alpha y$ ou $y = \alpha x$.
Supposons par exemple que $x = \alpha y$ (raisonnement similaire pour l'autre cas).
$|\,(x|y)\,| = |\alpha|.|\,(y|y)\,| = |\alpha|\,||y||^2$ et $||x||\,||y|| = \sqrt{(x|x)}\,||y|| = \sqrt{\alpha^2(y|y)}||y|| = |\alpha|.||y||^2$.
Donc, on a bien l'égalité.

2) On considère le produit scalaire classique sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ défini par :
$\forall (f,g) \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt$.

On pose $\mathscr{E} = \left\{ \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\ ,\ f \in A \right\}$.
$\mathscr{E} \subset \mathbb{R}$.
$\mathscr{E} \neq \varnothing$ car $(b-a)^2 \in \mathscr{E}$ (valeur obtenue pour la fonction $t \longmapsto 1$ de A).
De plus, $\forall\, f \in A, \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t \geqslant 0$ donc $\mathscr{E}$ est minorée par 0.
On en déduit que A admet une borne inférieure et on pose $m = \inf \mathscr{E}$.

Soit $f \in A$.
On considère la quantité $\left(\displaystyle\int_a^b \sqrt{f(t)}\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\mathrm{d}t\right)^2$.
D'une part, $\left(\displaystyle\int_a^b \sqrt{f(t)}\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\mathrm{d}t\right)^2 = \left(\int_a^b 1\mathrm{d}t\right)^2 = (b-a)^2$.
D'autre part, si on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire $(\,|\,)$ on obtient :
$\left(\displaystyle\int_a^b \sqrt{f(t)}\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$.
On en déduit que $\forall\, f \in E$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t \geqslant (b-a)^2$.

Donc $m \geqslant (b-a)^2$.
Et, si on considère la fonction $f : t \longmapsto 1$ de A, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t = (b-a)^2$.
Donc $m = (b-a)^2$.

II. Polynômes de Legendre

1) Bilinéarité et positivité évidentes et si $\varphi(P,P)=0$ c'est que P est la fonction nulle car P^2 est une fonction continue positive d'intégrale nulle. On en déduit que P est le polynôme nul car il possède une infinité de racines, d'où la propriété de définie positivité.

2) **a)** $\left(x^2-1\right)^k$ est de degré $2k$ donc sa dérivée k-ième est de degré $2k-k=k$.

b) En intégrant par parties en posant $v'=\frac{\mathrm{d}^k\left(\left(x^2-1\right)^k\right)}{\mathrm{d}x^k}$ et $u=x^i$, on a $v=\frac{\mathrm{d}^{k-1}\left(\left(x^2-1\right)^k\right)}{\mathrm{d}x^{k-1}}$ et $u'=ix^{i-1}$, d'où

$$\begin{aligned}\varphi\left(X^i,f^k\right)&=\int_{-1}^{1}x^i\frac{\mathrm{d}^k\left(\left(x^2-1\right)^k\right)}{\mathrm{d}x^k}\mathrm{d}x\\&=\left[x^i\frac{\mathrm{d}^{k-1}\left(\left(x^2-1\right)^k\right)}{\mathrm{d}x^{k-1}}\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}ix^{i-1}\frac{\mathrm{d}^{k-1}\left(\left(x^2-1\right)^k\right)}{\mathrm{d}x^{k-1}}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Mais 1 et -1 sont des racines de multiplicité k de $p_k(x)=\left(x^2-1\right)^k$, donc 1 et -1 annulent p_k jusqu'à sa dérivée $k-1$-ième. Ainsi,

$$\varphi\left(X^i,f^k\right)=-\int_{-1}^{1}ix^{i-1}\frac{\mathrm{d}^{k-1}\left(\left(x^2-1\right)^k\right)}{\mathrm{d}x^{k-1}}\mathrm{d}x$$

Une nouvelle intégration par parties donne

$$\begin{aligned}\varphi\left(X^i,f^k\right)&=\left[-ix^{i-1}\frac{\mathrm{d}^{k-2}\left(\left(x^2-1\right)^k\right)}{\mathrm{d}x^{k-2}}\right]_{-1}^{1}\\&\quad+\int_{-1}^{1}i(i-1)x^{i-2}\frac{\mathrm{d}^{k-2}\left(\left(x^2-1\right)^k\right)}{\mathrm{d}x^{k-2}}\mathrm{d}x\\&=\int_{-1}^{1}i(i-1)x^{i-2}\frac{\mathrm{d}^{k-2}\left(\left(x^2-1\right)^k\right)}{\mathrm{d}x^{k-2}}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

puisque 1 et -1 annulent $\frac{\mathrm{d}^{k-2}\left(\left(x^2-1\right)^k\right)}{\mathrm{d}x^{k-2}}$. Et ainsi de suite : en dérivant $i+1$ fois, il restera

$$\begin{aligned}\varphi\left(X^i,f^k\right)&=\int(-1)^i i!\frac{\mathrm{d}^{k-i}\left(\left(x^2-1\right)^k\right)}{\mathrm{d}x^{k-i}}\\&=\left[(-1)^i i!\frac{\mathrm{d}^{k-i-1}\left(\left(x^2-1\right)^k\right)}{\mathrm{d}x^{k-i-1}}\right]_{-1}^{1}\\&=0\end{aligned}$$

puisque 1 et -1 annulent $\frac{\mathrm{d}^{k-i}\left(\left(x^2-1\right)^k\right)}{\mathrm{d}x^{k-i}}$.

c) Par définition même du processus d'orthonormalisation de la base $(1,X,\ldots,X^n)$, on a $\mathrm{Vect}\left(1,X,\ldots,X^i\right)=\mathrm{Vect}\left(e_0,e_1,\ldots,e_i\right)$, donc chaque e_i est combinaison de $1,X,\ldots,X^i$. Puisque $\varphi\left(X^j,f_k\right)=0$ pour tout $j\in\{0,\ldots,k-1\}$, on a $\varphi\left(e_j,f_k\right)=0$ lorsque $j\leqslant k-1$. Enfin, f_k étant de degré k, f_k est combinaison de $\left(1,X,\ldots,X^k\right)$ donc de $(e_0,e_1,\ldots,e_k)$ et on peut donc écrire

$$f_k=\sum_{j=0}^{k}\lambda_j e_j$$

et comme $(e_0,\ldots,e_n)$ est une base orthonormée, $\varphi\left(f_k,e_j\right)=\lambda_j$. C'est donc que $\lambda_j=0$ pour tout $j\leqslant k-1$ et $f_k=\lambda_k e_k$.

III. Une projection orthogonale

1) $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$ est une base de P.

De plus $D = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ donc $D \subset P^\perp$.

Pour raisons de dimension, $D = P^\perp$ donc $P \oplus D = \mathbb{R}^3$.

2) Posons $u_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $u_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

Alors $u_3 = u_1 \wedge u_2$ complète (u_1, u_2, u_3) en une b.o.n. de $\mathbb{R}^3$ et $\text{Vect}(u_2, u_3) = D^\perp = P$.

On calcule $u_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$.

Alors

$$p(u) = \langle u|u_2\rangle u_2 + \langle u|u_3\rangle u_3 = \frac{1}{2}(x-y)\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{6}(x+y-2z)\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2x-y-3\\x+2y-3\\-x-y+2z\end{pmatrix}$$

Si $\mathscr{C}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, alors $\text{Mat}_{\mathscr{C}}(p) = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$.

3) Si $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$ alors B est une b.o.n. et

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

IV. Une distance (banque CCINP MP)

1) On a immédiatement $\mathscr{F} = \text{Vect}(\mathrm{I}_2, K)$ avec $K = \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$.

On peut donc affirmer que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

$\mathscr{F} = \text{Vect}(\mathrm{I}_2, K)$ donc (I_2, K) est une famille génératrice de $\mathscr{F}$.
De plus, I_2 et K sont non colinéaires donc la famille (I_2, K) est libre.
On en déduit que (I_2, K) est une base de $\mathscr{F}$.

2) Soit $M = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
Comme (I_2, K) est une base de $\mathscr{F}$,
$M \in \mathscr{F}^\perp \iff \varphi(M, \mathrm{I}_2) = 0$ et $\varphi(M, K) = 0$.
C'est-à-dire, $M \in \mathscr{F}^\perp \iff a + d = 0$ et $b - c = 0$.
Ou encore, $M \in \mathscr{F}^\perp \iff d = -a$ et $c = b$.
On en déduit que $\mathscr{F}^\perp = \text{Vect}(A, B)$ avec $A = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$.
(A, B) est une famille libre et génératrice de $\mathscr{F}^\perp$ donc (A, B) est une base de $\mathscr{F}^\perp$.

3) On peut écrire $J = \mathrm{I}_2 + B$ avec $\mathrm{I}_2 \in \mathscr{F}$ et $B \in \mathscr{F}^\perp$.
Donc le projeté orthogonal de J sur $\mathscr{F}^\perp$ est $B = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$.

4) On note $d(J, \mathscr{F})$ la distance de J à $\mathscr{F}$.
D'après le cours, $d(J, \mathscr{F}) = ||J - p_{\mathscr{F}}(J)||$ où $p_{\mathscr{F}}(J)$ désigne le projeté orthogonal de J sur $\mathscr{F}$.
On peut écrire à nouveau que $J = \mathrm{I}_2 + B$ avec $\mathrm{I}_2 \in \mathscr{F}$ et $B \in \mathscr{F}^\perp$.
Donc $p_{\mathscr{F}}(J) = \mathrm{I}_2$.
On en déduit que $d(J, \mathscr{F}) = ||J - p_{\mathscr{F}}(J)|| = ||J - \mathrm{I}_2|| = ||B|| = \sqrt{2}$.

V. Une autre distance

1) Soit P et Q dans E.

La fonction $f\ : t \mapsto P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[$. Donc $f(t) = \underset{t\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Puisque $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\ \mathrm{d}t$ converge, l'intégrale $\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$ est absolument convergente donc convergente.

2) Par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$, $(P,Q) \mapsto \langle P \mid Q\rangle$ est symétrique.

La linéarité de l'intégrale et les règles usuelles de calculs de $\mathbb{R}$ entraînent la linéarité de $P \mapsto \langle P \mid Q\rangle$. Par symétrie on a la linéarité à droite.

Pour tout $P \in E, \langle P \mid P\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)^2\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$ est positive car $f\ : t \mapsto P(t)^2\mathrm{e}^{-t}$ est positive. De plus si $\langle P \mid P\rangle = 0$, f étant continue, positive et d'intégrale nulle sur $[0,+\infty[$, on a $f=0$ sur $[0,+\infty[$. D'où P est nul sur $[0,+\infty[$. Donc P est un polynôme qui a une infinité de racines : P est le polynôme nul.
La forme $(P,Q) \mapsto \langle P \mid Q\rangle$ est symétrique, bilinéaire, définie positive : c'est un produit scalaire sur E.

3) Classiquement $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1$ car $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t} = 0$.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on a par intégration par parties :

$$I_p = \int_0^{+\infty} t^p\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t = \left[t^p\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} t^{p-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$$

Puisque $\lim_{t\to+\infty} t^p\mathrm{e}^{-t} = 0$, on obtient pour tout $p \geqslant 1, I_p = pI_{p-1}$.

On en déduit que pour $p \in \mathbb{N}, I_p = \int_0^{+\infty} t^p\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t = p!$.

4) Soit $k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Notons $P_k = X^k$.

En notant d la distance au sens de$\langle | \rangle$ de P_k à $\mathscr{P} = \operatorname{vect}(P_0,P_1)$, on sait que :

$$m_k = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} \left(t^k - at - b\right)^2 \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t = d^2$$

Base orthonormale de $\mathscr{P}$ (par la méthode de Gram-Schmidt)

$$\|P_0\|^2 = \int_0^{+\infty} 1^2\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t = I_0 = 1. \text{ Donc } P_0 \text{ est de norme } 1$$

Posons $P = P_1 - \langle P_0 \mid P_1\rangle P_0$.

$$\langle P_0 \mid P_1\rangle = \int_0^{+\infty} 1\cdot t\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t = I_1 = 1$$

Donc $P = P_1 - P_0 = X - 1$.

$$\|P\|^2 = \int_0^{+\infty} (t-1)^2\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t = I_2 - 2I_1 + I_0 = 2 - 2 + 1 = 1$$

Une base orthonormale de $\mathscr{P}$ est $(Q_0,Q_1) = (1, X-1)$.
Projeté orthogonal de P_k sur $\mathscr{P} = \operatorname{vect}(Q_0,Q_1)$.
On a alors si p désigne la projection orthogonale sur $\mathscr{P}$:

$$p(P_k) = \langle Q_0 \mid P_k\rangle Q_0 + \langle Q_1 \mid P_k\rangle Q_0$$
$$\|p(P_k)\|^2 = \langle Q_0 \mid P_k\rangle^2 + \langle Q_1 \mid P_k\rangle^2$$

Or $\langle Q_0 \mid P_k\rangle = I_k = k!$ et :

$$\begin{aligned}\langle Q_1 \mid P_k\rangle &= \left\langle X-1 \mid X^k\right\rangle \\ &= \left\langle X \mid X^k\right\rangle - \left\langle 1 \mid X^k\right\rangle \\ &= I_{k+1} - I_k \\ &= (k+1)! - k! \\ &= k(k!).\end{aligned}$$

Donc $\|p(P_k)\|^2 = \left(1+k^2\right)(k!)^2$. Enfin $\|P_k\|^2 = \left\langle X^k \mid X^k\right\rangle = I_{2k} = (2k)\ !$ et :

$$m_k = \|P_k\|^2 - \|p(P_k)\|^2 = (2k)! - \left(1+k^2\right)(k!)^2$$