Topologie des evns

I. Un peu de topologie dans $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$

1) a) Soit $f \in F$. Alors la boule ouverte de centre f, de rayon $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 f$ (qui est bien strictement positif) est incluse dans F. En effet, si $g \in B\left(f, \frac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 f\right)$ alors $\|g-f\|_\infty < \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 f$ donc $f - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 f \leqslant g \leqslant f + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 f$.

Donc par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^1 g \geqslant \int_0^1 f - \frac{1}{2}\int_0^1 f = \frac{1}{2}\int_0^1 f > 0$ donc $g \in F$.

b) La fonction $\varphi : E \to \mathbb{R},\ f \mapsto \displaystyle\int_0^1 f$ vérifie : pour tout $f, g \in E$, $|\varphi(f) - \varphi(g)| \leqslant \displaystyle\int_0^1 \|f-g\|_\infty = \|f-g\|_\infty$. Elle est donc 1-lipschitzienne, et ainsi elle est continue.
Or $F = \varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ et $\mathbb{R}_+^*$ est un ouvert, donc F aussi.

2) a) Soit $f \in A$. Alors $|f(0) - g(0)| = 1$ donc $\|f-g\|_\infty \geqslant 1$. Donc $\mathscr{B}(g, \frac{1}{2}) \cap A = \varnothing$: g n'est pas adhérent à A pour $\|.\|_\infty$.

b) Soit f_n telle que $f_n(x) = 1$ si $x > \dfrac{1}{n}$ et $f(x) = nx$ si $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$. Alors $f_n \in A$ et $\|g - f_n\|_1 = \displaystyle\int_0^{1/n} (1-nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n}$. Donc g est limite d'une suite d'éléments de A : c'est un point adhérent à A pour $\|.\|_1$.

II. Deux exercices sur la densité

1) $\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert car image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}^\star$ par l'application continue det.
L'application $\lambda \mapsto \det(A - \lambda I_n)$ est polynomiale non nulle en λ donc possède un nombre fini de racines.
Fixons $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $r \in \mathbb{R}_+^\star$. Si l'on considère la norme $\|.\|_\infty$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors pour tout $\alpha \in]-r, r[$, $\|\alpha \mathrm{I}_n\|_\infty = |\alpha|$ donc $\alpha \mathrm{I}_n \in \mathscr{B}(0, r)$, et ensuite $A - \alpha\mathrm{I}_n \in \mathscr{B}(A, r)$. Or avec le point précédent, il existe une infinité de $\alpha \in]-r, r[$ tels que $\det(A - \alpha \mathrm{I}_n) \neq 0$, donc il existe une infinité de matrices de $\mathscr{B}(A, r)$ qui sont inversibles.
Par suite : $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \forall r > 0, \mathscr{B}(A, r) \cap \mathscr{GL}_n(\mathbb{R}) \neq \varnothing$, d'où la densité de $\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$.

2) a) Analyse : Soit g solution.
• $g(0) = g(0+0) = g(0) + g(0)$, donc $g(0) = 0$.
• Soit $y \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons (H_n) : $g(ny) = ng(y)$.
(H_0) a été démontrée.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que (H_n) est vraie. Alors $g((n+1)y) = g(ny) + g(y) = ng(y) + g(y) = (n+1)g(y)$, et ainsi par récurrence (H_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, nous avons montré, en posant $y = 1$, que

$$\forall x \in \mathbb{N},\ g(x) = xg(1).$$

• Soit $n \in \mathbb{N}$, $0 = g(0) = g(n-n) = g(n) + g(-n)$ et donc $g(-n) = -g(n) = -ng(1)$, ce qui prouve que

$$\forall x \in \mathbb{Z},\ g(x) = xg(1).$$

• Soit $q \in \mathbb{Q}$. Il existe $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $q = \dfrac{a}{b}$. Alors $bg(q) = g(bq) = g(a) = ag(1)$ donc $g(q) = \dfrac{a}{b}g(1)$ donc

$$\forall x \in \mathbb{Q},\ g(x) = xg(1).$$

• Soit $x \in \mathbb{R}$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite de rationnels (q_n) qui converge vers x. D'une part $g(q_n) = q_n g(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} xg(1)$ et d'autre part, par continuité de g, $g(q_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(x)$. Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = xg(1).$$

Par conséquent il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g = \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

Synthèse : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, il est immédiat que $\lambda\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ est solution.

L'ensemble des solutions est donc $\{\lambda \mathrm{id}_{\mathbb{R}},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

b) Analyse : Soit g solution.
Alors pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $\ln \circ g(x+y) = \ln(g(x)g(y)) = \ln \circ g(x) + \ln \circ g(y)$. Grâce à la première question, il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\ln \circ g = \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, donc $g = \exp \circ (\lambda \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$.

Synthèse : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, il est immédiat que $\exp \circ (\lambda \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$ est solution.

L'ensemble des solutions est donc $\{\exp \circ (\lambda \mathrm{id}_{\mathbb{R}}),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

III. Distance à un fermé borné

Soit l'application $u : A \to E$, $y \mapsto x - y$. Pour tout $y, z \in A$, $\|u(y) - u(z)\| = \|y - z\|$. Étant 1-lipschitzienne, u est continue.
L'application $v : E \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \|y\|$ vérifie : pour tout $y, z \in E$, $|v(y) - v(z)| \leqslant \|y - z\|$ par inégalité triangulaire. Elle est donc elle aussi 1-lipschitzienne et continue.
Par composition $\varphi : A \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \|x - y\|$ est continue (on aurait pu démontrer directement qu'elle est 1-lipschitzienne).
Puisque A est fermée et bornée et que E est de dimension finie, φ est bornée et atteint ses bornes. En particulier elle a un minimum, ce qui répond aux deux questions.

IV. Norme subordonnée

1) u étant continue, il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout x, $\|u(x)\| \leqslant k\,\|x\|$. Donc $\left\{\dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|},\ x \in E\backslash\{0\}\right\}$ est majoré Comme il est non vide, M_1 existe.
De plus, $\left\{\dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|},\ x \in E\backslash\{0\}\right\} = \{\|u(x/\|x\|)\|,\ x \in E\backslash\{0\}\} = \{\|u(x)\|,\ x \in E \text{ t.q. } \|x\| = 1\}$, donc M_2 existe, et vaut d'ailleurs M_1.
Le dernier ensemble est inclus dans $\mathbb{R}_+$, non vide car u est continue, et minoré par 0, donc M_3 existe.

2) Nous avons déjà remarqué que $M_1 = M_2$.
M_1 majore $\left\{\dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|},\ x \in E\backslash\{0\}\right\}$ donc pour tout x, $\|u(x)\| \leqslant M_1\,\|x\|$.
Donc $M_1 \in \{k \geqslant 0 \text{ t.q. } \forall\, x \in E,\ \|u(x)\| \leqslant k\|x\|\}$, donc $M_3 \leqslant M_1$.
Réciproquement, soit $k \in \{k \geqslant 0 \text{ t.q. } \forall\, x \in E,\ \|u(x)\| \leqslant k\|x\|\}$. Donc si $x \neq 0$, $\dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|} \leqslant k$. Ainsi k est un majorant de $\left\{\dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|},\ x \in E\backslash\{0\}\right\}$, et donc $M_1 \leqslant M_3$.
Finalement $M_1 = M_2 = M_2$.