Feuille d'exercice n° 06 : **Valeurs propres et vecteurs propres – Corrigé**

I. Valeurs propres et vecteurs propres

Exercice 1 Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, notons

$$A=\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, U=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On, a, puisque $U \neq 0$: $U \overrightarrow{\mathrm{vp}}$ de $A \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, AU=\lambda U$

$$\Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\left\{\begin{array}{l} x+5=\lambda \\ 2y+4=2\lambda \\ 3=3\lambda \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x+5=1 \\ 2y+4=2 \end{array} \Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=-4 \\ y=-1 . \end{array}\right.\right.$$

On conclut qu'il y a un couple (x, y) convenant et un seul, $(x, y)=(-4,-1)$.

Exercice 2 1ère méthode : Utilisation de la définition :

Puisque $U \neq 0$ et $V \neq 0, A$ admet U et V pour vecteurs propres si et seulement si : AU est colinéaire à U, et AV est colinéaire à V. On a : $AU=\begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & b \end{pmatrix}\binom{2}{1}=\binom{2+a}{-2+b}$, donc : AU colinéaire à U

$$\Longleftrightarrow\left|\begin{array}{cc} 2+a & 2 \\ -2+b & 1 \end{array}\right|=0 \Longleftrightarrow a-2b+6=0 .$$

Et : $AV=\begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & b \end{pmatrix}\binom{1}{1}=\binom{1+a}{-1+b}$, donc : AV colinéaire à V

$$\Longleftrightarrow\left|\begin{array}{cc} 1+a & 1 \\ -1+b & 1 \end{array}\right|=0 \Longleftrightarrow a-b+2=0 .$$

Enfin : $\left\{\begin{array}{l} a-2b+6=0 \\ a-b+2=0 \end{array} \Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{l} a=2 \\ b=4 .\end{array}\right.\right.$ On conclut qu'il y a un couple (a, b) convenant et un seul, $(a, b)=(2,4)$. 2^e méthode : Utilisation d'une matrice de passage : Notons $P=\begin{pmatrix} U & V \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Il est clair que P est inversible et $P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. La matrice A admet U et V pour vecteurs propres si et seulement si $P^{-1}AP$ est diagonale. On calcule le produit $P^{-1}AP$ et on obtient :

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 4+a-b & 2+a-b \\ -6-a+2b & -3-a+2b \end{pmatrix}.$$

On a : $P^{-1}AP$ diagonale

$$\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{l} 2-a+b=0 \\ -6-a+2b=0 \end{array} \Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{l} a=2 \\ b=4 .\end{array}\right.\right.$$

II. Espaces propres

Exercice 4 - Puisque A (resp. B) est triangulaire, les valeurs propres de A (resp. B) se lisent sur sa diagonale, donc : les valeurs propres de A (resp. B) sont 0 (double) et 1 (simple). - Soit $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

1) $* X \in \operatorname{SEP}(A, 0) \Longleftrightarrow AX=0$

$$\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{l} y+z=0 \\ z=0 \end{array} \Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{l} y=0 \\ z=0, \end{array}\right.\right.$$

$$\text{donc } \operatorname{SEP}(A, 0)=\operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dim \operatorname{SEP}(A, 0)=1$$

$$* X \in \operatorname{SEP}(A, 1) \Longleftrightarrow AX=X$$

$$\left\{\begin{array}{l} y+z=x \\ z=y \end{array} \Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=2y \\ z=y, \end{array}\right.\right.$$

$$\text{donc } \operatorname{SEP}(A, 1)=\operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \dim \operatorname{SEP}(A, 1)=1.$$

2) $*X \in \mathrm{SEP}(B,0) \Longleftrightarrow BX=0 \Longleftrightarrow y+z=0$,

donc $\mathrm{SEP}(B,0)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$, $\dim \mathrm{SEP}(B,0)=2$.

$*X \in \mathrm{SEP}(B,1) \Longleftrightarrow BX=X \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}y=x\\z=0\end{array}\right.$ donc $\mathrm{SEP}(B,1)=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\dim \mathrm{SEP}(B,1)=1$.

Remarque : Il en résulte que A n'est pas diagonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$, et que B est diagonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 5 Cherchons $V=(x,y,z,t)^{\top}$ tel que $AV=iV$. Cela s'écrit

$$\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=i\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{ll}-z=ix&\\-t&=iy\\x&=iz\\y&=it\end{array}\right.\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=iz\\y=it\end{array}\right..$$

Ainsi $V\in \operatorname{Ker}(A-iI_4)$ si et seulement si il existe $(z,t)\in\mathbb{C}^2$ tel que $V=\begin{pmatrix}iz\\it\\z\\t\end{pmatrix}$. Finalement $\operatorname{Ker}(A-iI_4)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}i\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\i\\0\\1\end{pmatrix}\right)$. En résolvant le système $AV=-iV$, on vérifie de la même façon que $\operatorname{Ker}(A+iI_4)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-i\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-i\\0\\1\end{pmatrix}\right)$. Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^4$, il n'y pas d'autre sous-espace propre.

Remarques - On aurait pu remarquer que $A\in\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ et utiliser que $AV=iV \Leftrightarrow A\bar{V}=-i\bar{V}$.
- On aurait pu également effectuer un résolution à l'aide d'une écriture par blocs $V=\binom{X}{Y}$ où X et Y sont dans $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{C})$.

III. Polynôme caractéristique

Exercice 9 D'abord, il est clair que f est un endomorphisme de E. I^{re} méthode : Étude matricielle Formons la matrice M de f dans la base canonique $\mathscr{B}=(\mathrm{E}_{11},\mathrm{E}_{12},\mathrm{E}_{21},\mathrm{E}_{22})$ de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$. On a : $f(\mathrm{E}_{11})=\mathrm{E}_{22}, f(\mathrm{E}_{12})=-\mathrm{E}_{12}$, d'où :

$$f(\mathrm{E}_{21})=-\mathrm{E}_{21},\quad f(\mathrm{E}_{22})=\mathrm{E}_{11},$$
$$M=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

On calcule le polynôme caractéristique de M, par exemple en développant par rapport à la première colonne :

$$\chi_M(\lambda)=\begin{vmatrix}-\lambda&0&0&1\\0&-1-\lambda&0&0\\0&0&-1-\lambda&0\\1&0&0&-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=-\lambda\begin{vmatrix}-1-\lambda&0&0\\0&-1-\lambda&0\\0&0&-\lambda\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0&0&1\\-1-\lambda&0&0\\0&-1-\lambda&0\end{vmatrix}$$
$$=(-\lambda)^2(-1-\lambda)^2-(-1-\lambda)^2$$
$$=(1+\lambda)^2\left(\lambda^2-1\right)=(\lambda-1)(\lambda+1)^3.$$

On déduit que les valeurs propres de M sont : -1 (triple) et 1 (simple). On a, pour toute $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in\mathbf{M}_{4,1}(\mathbb{R})$:

$\cdot\, MX=-X \Longleftrightarrow x_4=-x_1$, donc :

$$\mathrm{SEP}(M,-1)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right),$$
$$\mathrm{SEP}(f,-1)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)$$

- $MX = X \Longleftrightarrow (x_1 = x_4, x_2 = 0, x_3 = 0)$ donc

$$\mathrm{SEP}(M,1) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathrm{SEP}(f,1) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2^e méthode : Utilisation d'un polynôme annulateur (PC, PSI) On remarque que, pour toute $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$f^2(A) = f\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A,$$

donc : $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbf{M}_2(\mathbb{R})}$. Remarque : f est une symétrie. Ainsi, le polynôme $\mathrm{X}^2 - 1$ est annulateur de A. Il en résulte : $\mathrm{Sp}(f) \subset \{-1, 1\}$. On a, pour toute $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$- f(A) = -A \Longleftrightarrow d = -a, \text{donc}$$
$$\mathrm{SEP}(f,-1) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$
$$\text{- } f(A) = A \Longleftrightarrow (d = a, b = 0, c = 0), \text{ donc :}$$
$$\mathrm{SEP}(f,1) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10

1) On a facilement b) $\Rightarrow$ c) et c) $\Rightarrow$ a). Pour montrer a) $\Rightarrow$ b), on utilise qu'il existe une base dans laquelle un endomorphisme nilpotent a une matrice triangulaire sup à diagonale nulle.

Exercice 11

(iii) $\Rightarrow$ **(ii)** 1 n'est pas valeur propre sinon il existe x non nul tel que $Mx = x$ donc $M^p x = x$ et par passage à la limite quand $M^p \to 0$, $x = 0$: absurde. Donc $(I - M)$ est inversible.
alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} M^k = \left(I - M^{p+1}\right)(I - M)^{-1} \to (I - M)^{-1}$.

(ii) $\Rightarrow$ **(i)** Soit x un vecteur propre. Alors $(\displaystyle\sum_{k=0}^{p} M^k)(x) = \sum_{k=0}^{p}(M^k(x)) = \sum_{k=0}^{p} a^k x = (\sum_{k=0}^{p} a^k)x$. Or cette somme converge donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} a^k$ converge, donc $|a| < 1$.

(i) $\Longrightarrow$ **(iii)** On écrit $M = aI + N$, alors N est nilpotente, donc $N^n = 0$, ainsi que toutes les puissances suivantes. Comme I et N commutent, avec Newton : $M^p = (aI + N)^p = \sum_{k=0}^{n-1} a^{p-k}\binom{p}{p-k}N^k$. Mais $a^{p-k}\binom{p}{p-k} \leqslant \dfrac{p^k}{k!}a^{p-k} \to 0$ par croissances comparées.

Exercice 14 Soit v l'endomorphisme de $\mathrm{Im}\, u$ induit par u sur $\mathrm{Im}\, u$. Soit $P = X\chi_v$, où χ_v est le polynôme caractéristique de v. Alors $\deg P = 1 + r$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, pour tout $x \in E$:

$$P(u)(x) = \chi_v(u)(u(x)) = \chi_v(v)(u(x)) = 0.$$

Ceci assure que P est un polynôme annulateur de u de degré $r + 1$.

Exercice 16 Formons le polynôme caractéristique χ_M de M :

$$\chi_M(X) = \det\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n - X\mathrm{I}_n & \mathrm{I}_n \\ A & A - X\mathrm{I}_n \end{pmatrix}.$$

En multipliant les colonnes numéros $n+1$ à $2n$ par $(1 - X)$, on obtient :

$$(1-X)^n\chi_M(X) = \det\begin{pmatrix} (1-X)\mathrm{I}_n & (1-X)\mathrm{I}_n \\ A & (1-X)(A - X\mathrm{I}_n) \end{pmatrix}.$$

En, faisant $C_j \longleftarrow C_j - C_{j-n}$ pour $j = n+1, \dots 2n$, on a :

$$\begin{aligned} &(1-X)^n\chi_M(X) \\ &= \det\begin{pmatrix} (1-X)\mathrm{I}_n & 0 \\ A & (1-X)(A - X\mathrm{I}_n) - A \end{pmatrix} \\ &= \det((1-X)\mathrm{I}_n)\det(-XA - X(1-X)\mathrm{I}_n) \\ &= (1-X)^n(-X)^n\det(A - (X-1)\mathrm{I}_n) \\ &= (1-X)^n(-X)^n\chi_A(X-1). \end{aligned}$$

Ainsi : $(1-X)^n\left(\chi_M(X) - (-X)^n\chi_A(X-1)\right) = 0$. Comme l'anneau $K[X]$ est intègre et que $(1-X)^n \neq 0$, on peut simplifier et on conclut :

$$\chi_M(X) = (-X)^n\chi_A(X-1)$$

On pouvait aussi utiliser que si C et D commutent, $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(AD - BC)$.

Exercice 17 Puisque A est inversible, toute valeur propre de A est non nulle. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$,

$$\begin{aligned}\chi_{A^{-1}}(\lambda) &= \det\left(A^{-1} - \lambda I_n\right) = \det\left(-\lambda A^{-1}\left(-\frac{1}{\lambda}I_n + A\right)\right) \\ &= (-\lambda)^n \frac{1}{\det A}\det\left(A - \frac{1}{\lambda}I_n\right) = (-\lambda)^n \frac{1}{\det A}\chi_A\left(\frac{1}{\lambda}\right).\end{aligned}$$

Conclusion : $\chi_{A^{-1}}(X) = \frac{(-1)^n}{\det A} X^n \chi_A\left(\frac{1}{X}\right)$. On peut remarquer que le polynôme $X^n\chi_A\left(\frac{1}{X}\right)$ a ses coefficients écrits dans l'ordre inverse de ceux du polynôme $\chi_A(X)$.