Révisions cinématique et statique

Pied stabilisateur

Question 1 *Analyser le mécanisme (calculer le degré d'hyperstisme) et proposer les étapes de résolution du problème de détermination des efforts dans les liaisons.*

Correction Les pièces {1+2}, 3 et 4 sont bi-rotulées. Donc il existe une mobilité de rotation propre (respectivement autour de $\overrightarrow{x_{12}}$, $\overrightarrow{x_3}$, $\overrightarrow{x_4}$. La pièce 5 peut faire 3 mouvements de rotation.

Au final, $m = 6$.

Il y a 6 liaisons rotules; donc 18 inconnues statiques.

Il y a 4 pièces que l'on peut isoler, donc 24 équations statiques.

Au final, $h = m - E_S + I_S = 6 - 24 + 18 = 0$. Le système est isostatique. On peut calculer toutes les actions mécaniques.

Le torseur d'une liaison rotule, en statique est un glisseur.

Les ensembles {1+2}, 3 et 4 sont tous 3 soumis à deux glisseurs.

En appliquant le PFS à chacun de ces ensembles, on a : $\{\mathscr{T}(2 \to 5)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_2 \overrightarrow{x_{12}} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_D$, $\{\mathscr{T}(3 \to 5)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_3 \overrightarrow{x_3} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_D$, $\{\mathscr{T}(4 \to 5)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_4 \overrightarrow{x_4} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_D$.

On isole alors 5 soumis à 4 actions mécaniques. On applique le TRS en projection sur $\overrightarrow{x_0}$, $\overrightarrow{y_0}$, $\overrightarrow{z_0}$.

Question 2 *Donner la stratégie permettant d'exprimer l'action dans le vérin. Pour cela, on donnera la succession d'solements à réaliser. Pour chaque isolement, on précisera le bilan des actions mécaniques et le théorème utilisé.*

Question 3 *Calculer les actions exercées par le patin sur les barres et le vérin.*

Correction On a $\overrightarrow{x_{12}} = \dfrac{\overrightarrow{CD}}{||\overrightarrow{CD}||} = \dfrac{1}{\sqrt{36a^2 + 25a^2}} \begin{pmatrix} 6a \\ 0 \\ -5a \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{61}} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$.

On a $\overrightarrow{x_3} = \dfrac{\overrightarrow{AD}}{||\overrightarrow{AD}||} = \dfrac{1}{\sqrt{4a^2 + a^2 + 36a^2}} \begin{pmatrix} 6a \\ 2a \\ -a \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{41}} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On a $\overrightarrow{x_4} = \dfrac{\overrightarrow{BD}}{||\overrightarrow{BD}||} = \dfrac{1}{\sqrt{36a^2 + 4a^2 + a^2}} \begin{pmatrix} 6a \\ -2a \\ -a \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{41}} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

En isolant 5 et en appliquant le TRS, on a donc : $\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{6F_2}{\sqrt{61}} + \dfrac{6F_3}{\sqrt{41}} + \dfrac{6F_4}{\sqrt{41}} = 0 \\ 0 + \dfrac{2F_3}{\sqrt{41}} - \dfrac{2F_4}{\sqrt{41}} = 0 \\ -\dfrac{5F_2}{\sqrt{61}} - \dfrac{F_3}{\sqrt{41}} - \dfrac{F_4}{\sqrt{41}} + F = 0 \end{array} \right.$

D'après la résultante sur $\overrightarrow{y}$, $F_3 = F_4$; donc $\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{6F_2}{\sqrt{61}} + \dfrac{12F_3}{\sqrt{41}} = 0 \\ -\dfrac{5F_2}{\sqrt{61}} - \dfrac{2F_3}{\sqrt{41}} + F = 0 \end{array} \right.$

Par suite, $\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{6F_2}{\sqrt{61}} + \dfrac{12F_3}{\sqrt{41}} = 0 \\ -\dfrac{30F_2}{\sqrt{61}} - \dfrac{12F_3}{\sqrt{41}} + 6F = 0 \end{array} \right.$; donc $-\dfrac{24F_2}{\sqrt{61}} + 6F = 0$ et $F_2 = F\dfrac{\sqrt{61}}{4}$.

Enfin, $F_3 = -\dfrac{F_2\sqrt{41}}{2\sqrt{61}} = -F\dfrac{\sqrt{61}}{4}\dfrac{\sqrt{41}}{2\sqrt{61}} = -F\dfrac{\sqrt{41}}{8}$

Question 4 *Réaliser l'application numérique.*

Correction $F_2 = 58576\,\text{N}$, $F_3 = F_4 = -24011\,\text{N}$,

Question 5 *Les exigences du cahier des charges sont-elles vérifiées ?*

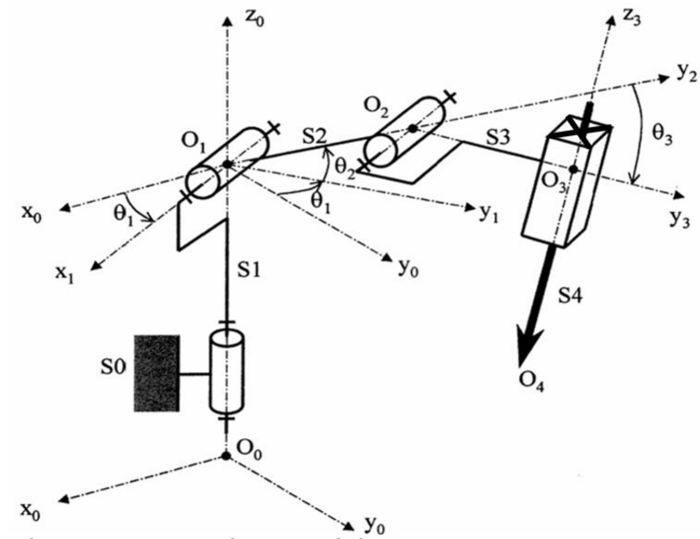
Correction Dans les barres 3 et 4 l'action maximale n'est pas dépassée. De plus, le vérin hydraulique est adapté à l'effort. Les deux exigences sont donc vérifiées.

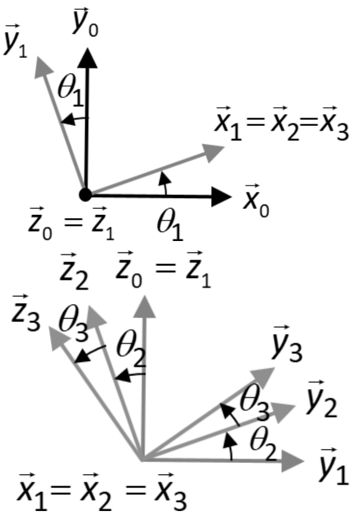
Robot Soudeur

Pôle Chateaubriand - Joliot Curie.

Mise en situation

On s'intéresse à un robot soudeur dont le schéma cinématique lié à cette étude est proposé ci-dessous. Sur ce schéma, les « flèches » au dessus des vecteurs unitaires ne sont pas représentées.





Ce robot est constitué de cinq solides :

- le bâti 0, fixé au sol de l'atelier, de repère associé $\mathcal{R}_0=\left(O_0,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}\right)$ tel que $\overrightarrow{z_0}$ vertical ascendant;
- le fût 1, de repère associé $\mathcal{R}_1=\left(O_1,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1}\right)$ tel que $\overrightarrow{z_1}=\overrightarrow{z_0}$;
- le bras 2, de repère associé $\mathcal{R}_2=\left(O_2,\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2}\right)$ tel que $\overrightarrow{x_1}=\overrightarrow{x_2}$;
- l'avant-bras 3, de repère associé $\mathcal{R}_3=\left(O_3,\overrightarrow{x_3},\overrightarrow{y_3},\overrightarrow{z_3}\right)$ tel que $\overrightarrow{x_2}=\overrightarrow{x_3}$;
- la buse 4, de repère associé $\mathcal{R}_4=\left(O_4,\overrightarrow{x_4},\overrightarrow{y_4},\overrightarrow{z_4}\right)$ tel que $\mathcal{B}_4=\mathcal{B}_3$.

Chaque articulation possède son propre actionneur, le mouvement qui lui est associé peut donc être réalisé indépendamment des autres.

Paramètres du mouvement :

- $\theta_1=\left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_1}\right)$;
- $\theta_2=\left(\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{y_2}\right)$;
- $\theta_3=\left(\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{y_3}\right)$;
- $\overrightarrow{O_3O_4}=\lambda\overrightarrow{z_3}$.

Caractéristiques géométriques :

- $\overrightarrow{O_0O_1}=L_1\overrightarrow{z_0}$;
- $\overrightarrow{O_1O_2}=L_2\overrightarrow{y_2}$;
- $\overrightarrow{O_2O_3}=L_3\overrightarrow{y_3}$.

Les figures de changement de base sont donnés ci-contre.

On donne ci-dessous un extrait du cahier des charges :

- exigence 1 : afin d'assurer la sécurité de l'environnement, la buse doit rester en permanence à l'intérieur d'une sphère de centre O_0 et de rayon R.
- exigence 2 : en phase d'utilisation normale, la buse doit se déplacer par rapport au bâti suivant la droite $\left(O_0,\overrightarrow{y_0}\right)$: réalisation d'un cordon de soudure linéaire.
- exigence 3 : pour que le cordon de soudure linéaire suivant $\overrightarrow{y_0}$ soit correctement réalisé, l'orientation de la buse 4 par rapport à la direction verticale doit être constante, et la vitesse de la buse doit être constante : V.

Objectif Déterminer les relations à imposer entre les valeurs instantanées des paramètres de mouvement et de leurs dérivées lors de la réalisation d'un cordon de soudure.

Question 6 *Préciser une condition sur le vecteur position du point O_4 dans le repère lié à 0 qui traduit l'exigence Ex1 du cahier des charges. En déduire une relation à imposer aux paramètres de mouvement.*

Question 7 *Préciser deux conditions sur le vecteur position du point O_4 dans le repère lié à 0 qui traduisent l'exigence Ex2 du cahier des charges. En déduire une relation à imposer aux paramètres de mouvement.*

Question 8 *Déterminer le torseur $\{\mathcal{V}(4/0)\}$ au point O_4 puis calculer $\overrightarrow{\Gamma(O_4,4/0)}$.*

Question 9 *Déterminer le torseur $\{\mathcal{V}(4/0)\}_{impose}$ qui traduit l'exigence Ex3.*

Question 10 *On se place dans le cas où le moteur de l'articulation entre 0 et 1 est arrêté dans la position $\theta_1=0$, traduire alors la condition $\{\mathcal{V}(4/0)\}=\{\mathcal{V}(4/0)\}_{impose}$ en deux relations vectorielles.*

Question 11 *En déduire 3 relations scalaires imposées entre les paramètres de mouvement et/ou leurs dérivées.*

Roulement à billes

Ressources de Renan Bonnard.

Question 12 *Réaliser les figures planes correspondant au paramétrage du système.*

Question 13 *Déterminer* $\overrightarrow{\Omega(1/0)}$, $\overrightarrow{V(O,1/0)}$ *et* $\overrightarrow{V(I,1/0)}$.

Correction

$$\{\mathscr{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(1/0)} = \dot{\theta}_1 \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{V(O,1/0)} = \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(1/0)} = \dot{\theta}_1 \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{V(I,1/0)} = r_1 \omega_1 \overrightarrow{j} \end{array} \right\}_I$$

Question 14 *Déterminer* $\overrightarrow{\Omega(2/0)}$, $\overrightarrow{V(O,2/0)}$ *et* $\overrightarrow{V(J,2/0)}$.

Correction

$$\{\mathscr{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(2/0)} = \dot{\theta}_2 \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{V(O,2/0)} = \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(2/0)} = \dot{\theta}_2 \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{V(J,2/0)} = r_1 \omega_2 \overrightarrow{j} \end{array} \right\}_J$$

Question 15 *Exprimer les conditions de roulement sans glissement en I et J. Établir les expression des vecteurs* $\overrightarrow{V(I,3/0)}$ *et* $\overrightarrow{V(J,3/0)}$.

Correction

$$\overrightarrow{V(I,3/1)} = \overrightarrow{0}$$

$$\overrightarrow{V(I,3/0)} = \overrightarrow{V(I,3/1)} + \overrightarrow{V(I,1/0)} \Longrightarrow \overrightarrow{V(I,3/0)} = \overrightarrow{V(I,1/0)} = r_1 \omega_1 \overrightarrow{j}$$

$$\overrightarrow{V(J,3/2)} = \overrightarrow{0}$$

$$\overrightarrow{V(J,3/0)} = \overrightarrow{V(J,3/2)} + \overrightarrow{V(J,2/0)} \Longrightarrow \overrightarrow{V(J,3/0)} = \overrightarrow{V(J,2/0)} = r_2 \omega_2 \overrightarrow{j}$$

Question 16 *En déduire l'expression de ω_3 en fonction de r_1, r_2, ω_1, ω_2.*

Correction

$$\overrightarrow{V(I,3/0)} = \overrightarrow{V(J,3/0)} + \overrightarrow{IJ} \wedge \overrightarrow{\Omega(3/0)}$$

$$\omega_3 = \frac{r_2\omega_2 - r_1\omega_1}{r_2 - r_1}$$

Question 17 *Déterminer* $\overrightarrow{V(G,3/0)}$ *en fonction de r_1, r_2, ω_1, ω_2.*

Correction

$$\overrightarrow{V(G,3/0)} = \overrightarrow{V(I,3/0)} + \overrightarrow{GI} \wedge \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \frac{r_2\omega_2 + r_1\omega_1}{2} \overrightarrow{j}$$

Question 18 *Déterminer l'expression de la vitesse de glissement de la bille 3 par rapport à la cage 4 au point C en fonction de r_1, r_2, ω_1, ω_2.*

Correction On cherche à calculer $\overrightarrow{V(C,3/4)}$:

$$\overrightarrow{V(C,3/4)} = \overrightarrow{V(G,3/4)} + \overrightarrow{CG} \wedge \overrightarrow{\Omega(3/4)}$$

Calcul de $\overrightarrow{CG}$:

$$\overrightarrow{CG} = -\frac{1}{2}(r_2 - r_1)\overrightarrow{j}$$

Calcul de $\overrightarrow{\Omega(3/4)}$:

$$\overrightarrow{\Omega(3/4)} = \overrightarrow{\Omega(3/0)} - \overrightarrow{\Omega(4/0)}$$

Calcul de ω_4 :

$$\overrightarrow{V(G,3/4)} = \overrightarrow{V(G,3/0)} - \overrightarrow{V(G,4/0)} = \overrightarrow{0}$$

Calcul de $\overrightarrow{V(G,4/0)}$:

$$\overrightarrow{V(G,4/0)} = \overrightarrow{V(O,4/0)} + \overrightarrow{GO} \wedge \overrightarrow{\Omega(4/0)} = \frac{r_2 + r_1}{2}\omega_4\overrightarrow{j}$$

Au final calcul de ω_4 :

$$\omega_4 = \frac{r_2\omega_2 + r_1\omega_1}{r_1 + r_2}$$

Calcul de $\overrightarrow{\Omega(3/4)}$:

$$\overrightarrow{\Omega(3/4)} = \overrightarrow{\Omega(3/0)} - \overrightarrow{\Omega(4/0)} = \left(\frac{r_2\omega_2 - r_1\omega_1}{r_2 - r_1} - \frac{r_2\omega_2 + r_1\omega_1}{r_2 + r_1}\right)\overrightarrow{z_0}$$

Au final en faisant le calcul on obtient :

$$\overrightarrow{V(C,3/4)} = \frac{r_2 r_1(\omega_1 - \omega_2)}{r_1 + r_2}\overrightarrow{i}$$

DM 2