DESMARESCAUX Anaïs PSI* **EXERCICE 70**

$$(E)\begin{cases} x' = x + 2y + te^{t} \\ y' = 8x + y + e^{-t} \end{cases}$$

On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} te^{t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$

Le système (E) devient :

$X'(t) = AX(t) + B(t)$

1_ On diagonalise A :

$\chi_A = \det(XI_2 - A)$

$= \begin{vmatrix} X-1 & -2 \\ -8 & X-1 \end{vmatrix}$

$= (X-1)^2 - 16$

$= (X-5)(X+3)$ 5 et -3 sont valeurs propres de A.

$E_{-3}(A) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$E_5(A) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Soit $A = PDP^{-1}$ $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

Soit $Y(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$ tel que $X(t) = PY(t)$

Le système devient $PY'(t) = APY(t) + B(t)$

$\Leftrightarrow Y'(t) = P^{-1}APY(t) + P^{-1}B(t)$

$\Leftrightarrow Y'(t) = DY(t) + P^{-1}B(t)$

Soit $\begin{cases} a'(t) = -3a(t) + \frac{1}{2}te^{t} - \frac{1}{4}e^{-t} & (1) \\ b'(t) = 5b(t) + \frac{1}{2}te^{t} + \frac{1}{4}e^{-t} & (2) \end{cases}$

• pour (1) équation homogène : $a'(t) + 3a(t) = 0$ (1_H)

a_H est solution de $(1_H) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $a_H(t) = \lambda e^{-3t}$

Pour la solution particulière on utilise la méthode de la variation de la constante

Soit $\lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, $a(t) = \lambda(t) e^{-3t}$

$a(t)$ est sol de (1) $\iff \lambda'(t) = \frac{1}{2} t e^{4t} - \frac{1}{4} e^{2t}$

$\iff \exists K_1 \in \mathbb{R}, \quad \lambda(t) = \left(\frac{1}{8}t - \frac{1}{32}\right)e^{4t} - \frac{1}{8}e^{2t} + K_1$

Donc $\mathcal{S}_1 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \left(\frac{1}{8}t - \frac{1}{32}\right)e^{t} - \frac{1}{8}e^{-t} + K_1 e^{-3t} \end{array} \quad K_1 \in \mathbb{R} \right\}$

• pour (2) on procède de la même manière et on trouve

$\mathcal{S}_2 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \left(-\frac{1}{8}t - \frac{1}{32}\right)e^{t} - \frac{1}{24}e^{-t} + K_2 e^{5t} \end{array} \quad K_2 \in \mathbb{R} \right\}$

Ensemble de solutions
très bien écrit

Finalement $X(t) = P\,Y(t)$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} x(t) = K_1 e^{-3t} + K_2 e^{5t} - \frac{1}{16}e^{t} - \frac{1}{6}e^{-t} & \\ y(t) = 2K_2 e^{5t} - 2K_1 e^{-3t} - \frac{1}{2}te^{t} + \frac{1}{6}e^{-t} & K_1, K_2 \in \mathbb{R} \end{array}}$$

Ensemble de solutions
pas très bien écrit