Devoir surveillé n° 3 – v2

Durée : 4 heures, calculatrices et documents interdits

I. Réduction des matrices nilpotentes (extrait du concours Centrale-Supelec 2019, maths 2 PSI)

Notations et rappels

Dans tout le sujet, n désigne un entier naturel non nul et E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n.
Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on note M^T la transposée de M.
Si M est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on définit la suite des puissances de M par $M^0 = I_n$ et, pour tout entier naturel k, par la relation $M^{k+1} = M\,M^k$.
De même, si u est un endomorphisme de E, on définit la suite des puissances de u par $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et, pour tout entier naturel k, par la relation $u^{k+1} = u \circ u^k$.
Une matrice M est dite *nilpotente* s'il existe un entier naturel $k \geqslant 1$ tel que $M^k = 0$. Dans ce cas, le plus petit entier naturel $k \geqslant 1$ tel que $M^k = 0$ s'appelle l'*indice de nilpotence* de M.
Soit $\mathscr{B}$ une base de E, un endomorphisme de E est nilpotent d'indice p si sa matrice dans $\mathscr{B}$ est nilpotente d'indice p.

On pose $J_1 = (0)$ et, pour un entier $\alpha \geqslant 2$, $J_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_\alpha(\mathbb{C})$.

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathscr{M}_m(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{diag}(A, B)$, la matrice diagonale par blocs

$$\mathrm{diag}(A, B) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+m}(\mathbb{C}).$$

Plus généralement, si $A_1 \in \mathscr{M}_{n_1}(\mathbb{C})$, $A_2 \in \mathscr{M}_{n_2}(\mathbb{C}), \cdots, A_k \in \mathscr{M}_{n_k}(\mathbb{C})$, on note

$$\mathrm{diag}(A_1, A_2, \dots, A_k) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n_1+n_2+\cdots+n_k}(\mathbb{C}).$$

1) Que peut-on dire d'un endomorphisme nilpotent d'indice 1 ?

A - Réduction d'une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

On suppose que $n = 2$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice $p \geqslant 2$.

2) Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$.

3) Vérifier que la famille $\left(u^k(x)\right)_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ est libre. En déduire que $p = 2$.

4) Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)$.

5) Construire une base de E dans laquelle la matrice de u est égale à J_2.

6) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 - \mathrm{tr}\,(A)A + \det(A)\mathrm{I}_2 = 0$.

7) En déduire que les matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ sont exactement les matrices de trace et déterminant nuls.

B - Réduction d'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

On suppose que $n \geqslant 3$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice 2 et de rang r.

8) Montrer que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$ et que $2r \leqslant n$.

9) On suppose que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)$. Montrer qu'il existe des vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_r$ de E tels que la famille $\left(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r)\right)$ est une base de E.

10) Donner la matrice de u dans cette base.

11) On suppose $\mathrm{Im}(u) \neq \mathrm{Ker}(u)$.
Montrer qu'il existe des vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_r$ de E et des vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_{n-2r}$ appartenant à $\mathrm{Ker}(u)$ tels que $\left(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r), v_1, v_2, \dots, v_{n-2r}\right)$ est une base de E.

12) Quelle est la matrice de u dans cette base ?

C - Réduction des matrices nilpotentes

On suppose $n \geqslant 2$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice $p \geqslant 2$.

13) Démontrer que $\mathrm{Im}(u)$ est stable par u et que l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Im}(u)$ est nilpotent.
Préciser son indice de nilpotence.

14) Pour tout vecteur x non nul de E, on note $C_u(x)$ l'espace vectoriel engendré par les $\left(u^k(x)\right)_{k \in \mathbb{N}}$; démontrer que $C_u(x)$ est stable par u et qu'il existe un plus petit entier $s(x) \geqslant 1$ tel que $u^{s(x)}(x) = 0$.

15) Démontrer que $\left(x, u(x), \dots, u^{s(x)-1}(x)\right)$ est une base de $C_u(x)$ et donner la matrice, dans cette base, de l'endomorphisme induit par u sur $C_u(x)$.

16) Démontrer par récurrence sur p qu'il existe des vecteurs $x_1, \dots, x_t$ de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i)$.

Indication : on pourra appliquer l'hypothèse de récurrence à l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Im}(u)$.
Commentaire de votre prof de maths : cette question est de loin la plus difficile du sujet.

17) Donner la matrice de u dans une base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i)$.

II. Exponentielle tronquée (extrait du concours Mines-Ponts 2017, épreuve II PC)

On rappelle la formule de Taylor avec reste intégral, que l'on pourra utiliser librement :

Formule de Taylor avec reste intégral : Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ et $(a, b) \in I^2$. Alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n \, \mathrm{d}t.$$

Pour x réel strictement positif et n entier naturel, on pose

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k x^k}{k!} \text{ et } R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k x^k}{k!}.$$

1) Justifier l'existence de $R_n(x)$. Que vaut la somme $T_n(x) + R_n(x)$?

2) En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{nt}$, prouver pour tout réel x strictement positif, pour tout entier n, la relation :

$$R_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{nx} n^{n+1}}{n!} \int_0^x (u\mathrm{e}^{-u})^n \, \mathrm{d}u.$$

Soit y un réel strictement positif. On pose

$$a_n = \frac{n^{n+1}}{n!} y^n.$$

3) Calculer $\lim_{n \to +\infty} a_{n+1}/a_n$. En déduire que, si $y < \mathrm{e}^{-1}$, alors

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0.$$

4) On suppose dans cette question que $x \in]0, 1[$. Montrer que la fonction $u \mapsto u\mathrm{e}^{-u}$ admet, sur $[0, x]$, un maximum M tel que $M < \mathrm{e}^{-1}$. En déduire qu'au voisinage de l'infini,

$$R_n(x) = o(\mathrm{e}^{nx}) \qquad \text{puis que} \qquad T_n(x) \underset{n \to +\infty}{\sim} \mathrm{e}^{nx}.$$

5) Soit $n \in \mathbb{N}$. Après avoir justifié la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$, démontrer la relation

$$n! = \int_0^{+\infty} t^n \,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

6) Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel $x > 0$, montrer l'identité suivante :

$$T_n(x) = \mathrm{e}^{nx}\frac{n^{n+1}}{n!}\int_x^{+\infty} (u\mathrm{e}^{-u})^n \,\mathrm{d}u.$$

7) En déduire que, si $x > 1$, alors $T_n(x) = o(\mathrm{e}^{nx})$ lorsque n tend vers $+\infty$.
On pourra écrire $(u\mathrm{e}^{-u})^n \leqslant (x\mathrm{e}^{-x})^{n-1}u\mathrm{e}^{-u}$ *pour* $u \geqslant x$.

— **FIN** —