

1/ PRÉSENTATION DU SUJET

Le sujet était composé de trois exercices totalement indépendants. Le premier exercice était centré sur la notion d'endomorphisme cyclique. Le second exercice introduisait et établissait quelques propriétés classiques de la fonction dilogarithme. Le troisième exercice concernait l'étude d'une variable aléatoire modélisant la durée d'un jeu de société dans différentes situations.

Le sujet avait pour objectif d'évaluer les candidats sur une vaste partie du programme des deux années de classe préparatoire ainsi que sur les six grandes compétences exposées dans le programme de la filière PC. L'indépendance des trois exercices avait pour but de permettre aux candidats de commencer le sujet avec les thèmes du programme qu'ils maîtrisaient le mieux, puis de pouvoir passer facilement à un autre exercice en cas de difficulté. Le sujet était d'une longueur raisonnable afin de donner une réelle possibilité au candidat de traiter l'ensemble des questions.

2/ COMMENTAIRES GÉNÉRAUX SUR LES COPIES

L'ensemble des correcteurs ont remarqué une amélioration par rapport à la session précédente dans la qualité de la présentation des copies, notamment lors de l'utilisation de théorèmes nécessitant la vérification de nombreuses hypothèses.

Rappelons néanmoins que l'objectif d'une épreuve de mathématiques ne se résume pas à évaluer les capacités calculatoires des candidats. Ces derniers doivent également prêter attention à la présentation de leurs raisonnements avec une rédaction précise. Lorsqu'un candidat souhaite utiliser un résultat du cours, il se doit de citer et de vérifier soigneusement toutes ses hypothèses. De plus, il est important de choisir une présentation claire (avec une liste numérotée par exemple) pour les théorèmes comportant de nombreuses hypothèses à vérifier (comme le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre par exemple).

De même, si un candidat souhaite utiliser le résultat d'une question précédente, il se doit de l'indiquer en citant le numéro de la question. Les candidats doivent également faire attention à introduire correctement les objets et les notations qu'ils utilisent pendant leur raisonnement. De plus, ils ne doivent pas confondre le quantificateur universel et le quantificateur existentiel.

Nous avons constaté une fois de plus qu'une partie non négligeable des candidats ne lisait pas l'énoncé et les questions assez consciencieusement : certains d'entre eux restent bloqués en ayant loupé une information dans l'énoncé ; d'autres oublient de répondre à une partie de la question.

L'ensemble des correcteurs souhaite rappeler que la présentation et le soin de la copie contribuent à son évaluation. Certains candidats n'ont pas respecté la consigne d'utiliser un stylo de couleur suffisamment

foncée, ce qui rend la lecture de leur copie très difficile. De plus, l'interdiction d'utiliser un effaceur n'empêche pas les candidats de raturer proprement. Nous encourageons également les candidats à aérer leur copie, à ne pas utiliser d'abréviation et à mettre en valeur leurs résultats afin d'en faciliter la lecture.

L'exercice 1 a été traité de manière pertinente par une majorité de candidats. Les difficultés rencontrées par les candidats se situaient principalement dans les parties III et IV. Une part importante de ces difficultés concernait des problèmes de logique pour la manipulation de la définition d'endomorphisme cyclique, notamment dans l'utilisation du quantificateur universel et du quantificateur existentiel.

L'exercice 2 a également été abordé de manière satisfaisante par une majorité des candidats. Par rapport à la session précédente, des progrès ont été constatés dans la manipulation des objets et des outils de l'analyse. Cependant, certains problèmes persistent : par exemple, le théorème d'intégration par parties pour les intégrales généralisées est rarement correctement rédigé. Il faut vérifier l'hypothèse sur les limites au bord de l'intervalle d'intégration et mentionner la convergence d'au moins une des deux intégrales en jeu avant de pouvoir écrire la relation d'égalité.

L'exercice 3 est celui qui a posé le plus de difficultés aux candidats, notamment les questions portant sur les probabilités. Nous tenons à rappeler que la rigueur et le formalisme ne sont pas facultatifs en probabilité. Il ne faut pas confondre un événement avec sa probabilité, les calculs doivent être justifiés soigneusement en mentionnant l'incompatibilité ou l'indépendance des événements lorsqu'elles sont nécessaires et il faut citer les théorèmes utilisés en vérifiant leurs hypothèses.

3/ REMARQUES DÉTAILLÉES PAR QUESTION

Exercice 1 (Endomorphisme cyclique) :

Q1. Quelques candidats n'ont pas bien appliqué la définition d'endomorphisme cyclique : ils ont oublié de remplacer l'entier n par 2. Attention à ne pas confondre cardinal et dimension.

Q2. Une part importante de candidats ne maîtrisent pas correctement la notion de matrice d'un endomorphisme dans une base, ce qui les a conduit à obtenir une matrice erronée pour f dans la base canonique. D'autres candidats ont choisi de déterminer la matrice M de f dans la base $(v_i, f(v_i))$: c'est une idée pertinente, mais ils ont souvent oublié de déduire les sous-espaces propres de f à partir des sous-espaces propres de M .

Q3. Question globalement traitée de manière pertinente.

Q4. Question globalement bien traitée.

Q5. Lorsque l'on souhaite utiliser le théorème spectral, il ne faut pas oublier de préciser que la matrice est à coefficients réels. L'utilisation d'un polynôme annulateur pour justifier la diagonalisabilité de l'endomorphisme g est peu fréquente.

Q6. Quelques candidats ont rencontré des problèmes de rédaction, notamment des confusions entre le quantificateur universel et le quantificateur existentiel.

Q7. Une part importante de candidats affirment sans aucune démonstration que l'application est à valeurs dans $R_n[X]$.

Q8. Question globalement bien traitée.

Q9. Les réponses à cette question sont souvent incomplètes et assez mal rédigées. Il ne suffit pas de traiter le cas d'un polynôme de degré n . De même, il n'est pas suffisant d'étudier uniquement l'image du terme dominant d'un polynôme P pour conclure.

Q10. Une partie des candidats ne précisent pas le polynôme P choisi pour appliquer la définition. D'autres se trompent dans la dimension de $R_n[X]$.

Q11. Il est préférable de rédiger proprement une récurrence pour démontrer la propriété demandée.

Q12. Beaucoup de candidats n'expliquent pas leurs calculs et certains ne reconnaissent pas le déterminant de Vandermonde.

Q13. Les réponses des candidats contenaient beaucoup de problèmes de logique, notamment dans l'utilisation du quantificateur universel et du quantificateur existentiel.

Exercice 2 (La fonction dilogarithme) :

Q14. Certains candidats ne comprennent pas ce qu'il faut faire dans cette question. Il n'est pas suffisant d'affirmer que le dénominateur ne s'annule pas : il faut le démontrer.

Q15. Les candidats oublient souvent de mentionner la continuité de la fonction.

Q16. Peu de candidats pensent à mentionner la positivité de f dans leur raisonnement, alors qu'ils l'utilisent implicitement pour démontrer l'inégalité.

Q17. Une part des candidats ne domine pas convenablement la fonction intégrée pour appliquer le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre.

Q18. Le théorème d'intégration par parties pour les intégrales généralisées est rarement correctement rédigé. Il faut vérifier l'hypothèse sur les limites au bord de l'intervalle d'intégration et mentionner la convergence d'au moins une des deux intégrales en jeu avant de pouvoir écrire la relation d'égalité.

Q19. La plupart des candidats reconnaissent la série géométrique, mais peu d'entre eux justifient que sa raison q vérifie $|q| < 1$.

Q20. De nombreux candidats établissent que le rayon de convergence de la série entière est $R=1$, mais ils oublient d'étudier la convergence en $x = -1$ et en $x = 1$. Des hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont souvent omises et d'autres mal formulées.

Q21. Question globalement bien traitée.

Q22. Question globalement bien traitée. Quelques candidats ont oublié que $L(1)$ était donné dans l'introduction de l'exercice.

Q23. Certains ont essayé d'utiliser la définition de L sous forme d'intégrale à paramètre, ce qui était davantage difficile que d'utiliser l'expression de L sous forme de la somme d'une série entière.

Q24. Beaucoup de candidats n'ont pas réussi à justifier correctement que h est dérivable sur l'intervalle $]0,1[$. Le calcul de h' est souvent erroné : beaucoup de candidats se sont trompés pour dériver la composée $x \rightarrow L(1-x)$.

Q25. Question peu traitée. L'étude de la limite de la fonction h en 0 ou en 1 est rarement suffisamment justifiée.

Exercice 3 (Un jeu de société) :

Q26. Les réponses des candidats sont souvent imprécises sur le lien avec l'entier n .

Q27. Les réponses des candidats sur la variable aléatoire T manquent de clarté.

Q28. Question globalement bien traitée.

Q29. Lorsqu'on utilise la règle de d'Alembert, il faut faire attention aux erreurs de calculs, notamment pour simplifier le quotient des coefficients binomiaux.

Q30. Question globalement bien traitée.

Q31. Les justifications sont souvent floues et incomplètes : il faut notamment mentionner l'indépendance entre les variables aléatoires X_k .

Q32. Les réponses données par les candidats sont souvent complètement erronées, ce qui montre une mauvaise compréhension de la situation décrite dans l'exercice.

Q33. Question globalement bien traitée.

Q34. Il n'est pas possible d'appliquer directement le résultat de la question précédente en prenant la valeur $k=0$.

Q35. Peu de candidats ont fait le lien avec la question 30.

Q36. Question globalement bien traitée. Néanmoins, peu de candidats justifient, même succinctement, que T est d'espérance finie.

Q37. Peu de candidats ont été capables d'appliquer simplement la formule des probabilités totales. Plusieurs justifications sont souvent omises pour arriver à la formule donnée dans l'énoncé.

Q38. L'initialisation est très rarement correctement justifiée.

Q39. Question très peu traitée et rarement correctement.

1/ COMMENTAIRE GÉNÉRAL SUR L'ÉPREUVE

Le sujet était composé de deux problèmes balayant une large partie du programme. Le premier problème était un problème d'analyse et de probabilités, surtout centré sur l'intégration. Il était question de démontrer une étape clé de la preuve du théorème de Moivre-Laplace. Le second problème portait sur l'algèbre linéaire et bilinéaire au travers de la décomposition QR.

Le premier problème était composé de 4 parties. Il a été l'occasion d'interroger les candidats sur les suites d'intégrales, la démonstration par récurrence, les changements de variables dans les intégrales, le théorème de convergence dominée, les lois de probabilités...

Le second problème était composé de 3 parties. Il était question de matrices de rang 1, de matrices nilpotentes, de polynôme annulateur, de diagonalisation, du théorème spectral, de matrices orthogonales au travers de projections et de symétries.

Les deux problèmes ont été abordés de manière équilibrée par la majorité des candidats avec une fin du problème d'analyse peu traitée dans l'ensemble. La « réussite » sur les deux problèmes est comparable. Le niveau des copies est décevant dans l'ensemble, hormis quelques rares bonnes copies. Il est à noter qu'un nombre non négligeable de copies sont une succession d'erreurs difficilement excusables à ce niveau.

Les copies moyennes montrent un niveau de maîtrise trop fragile de notions importantes du programme. À titre d'exemples, une partie non négligeable ne sait pas caractériser une matrice de rang 1 et beaucoup confondent un polynôme annulateur avec le polynôme caractéristique.

Le sujet était progressif et la plupart des questions formulées de manière à ce que les questions non traitées puissent tout de même être utilisées pour aborder la suite du sujet. L'une des conséquences des questions où l'on demande de prouver des affirmations est qu'un nombre significatif de candidats démarrent une preuve qui n'aboutit pas et se permettent de conclure qu'ils ont obtenu le résultat voulu. Notons que ce genre de tentative de " bluff " n'échappe pas aux correcteurs et est bien sûr sanctionnée.

2/ ANALYSE DETAILLÉE DES QUESTIONS

Q1 : bien traitée dans l'ensemble, même si la croissance (ou positivité) de l'intégrale n'est pas toujours citée. Quelques « énormité » étonnantes à ce niveau : confusion entre croissance de la suite et de la fonction intégrée, l'intégrale d'un quotient est égal au quotient des intégrales...

Q2 : mal réussie dans l'ensemble. Beaucoup tentent une intégration par partie mais n'aboutissent pas. D'autres tentent vainement une récurrence.

Q3 : Le calcul du produit est la plupart du temps vu, mais beaucoup concluent « par itération » sans écrire les récurrences. Le calcul de I_1 a posé des problèmes à certains, mais n'a pas empêché une partie d'entre eux d'affirmer aboutir au bon résultat.

Q4 : beaucoup de candidats pensent à utiliser la décroissance de la suite démontrée en question 1, mais peu justifient correctement le passage au quotient. Pour l'inégalité de droite, une partie significative des candidats utilisent l'expression de la question précédente, se lançant dans des calculs laborieux alors que la question Q2 permettait de conclure immédiatement.

Q5 : cette question est bien réussie par la grande majorité des candidats.

Q6 : le bon changement de variable est en général vu mais parfois posé de manière très peu rigoureuse entraînant des erreurs de calcul. En particulier, la division par \sqrt{n} est parfois faite dans le mauvais sens.

Q7 : cette question testait la rigueur et la maîtrise des équivalents. Beaucoup de candidats pensent à l'écriture exponentielle. On trouve ensuite des limites égales à 0, à 1, des compositions d'équivalents par l'exponentielle sans justification, et souvent la bonne limite « si $0 \leq t \leq \sqrt{n}$ » et 0 sinon.

Q8 : l'étude de fonction menant à la première inégalité est souvent bien menée. L'application $x = -\frac{t^2}{n}$ est en générale vue mais moins bien rédigée.

Q9 : une grande partie des candidats s'arrêtent à la justification, parfois peu rigoureuse, de la convergence de K. Les plus à l'aise pensent ensuite à utiliser le théorème de convergence dominée, mais peu parviennent au bout du calcul sans erreur.

Q10 : les candidats qui abordent cette question savent en général donner l'expression de g. Parmi eux, certains arrivent à poursuivre en utilisant le théorème fondamental de l'analyse. En revanche, très peu parviennent à majorer correctement $|g(x)|$.

Q11 : question souvent laissée de côté, ou abandonnée après avoir obtenu une expression intermédiaire avec des factorielles.

Q12 : les quelques candidats qui abordent cette question ont vu le lien avec la question Q10, mais peu justifient correctement les hypothèses d'utilisation de la formule. Notons tout de même qu'une poignée de candidats terminent correctement la question.

Q13 : l'ensemble des valeurs prises par Z_n n'est pas bien vu en général. La plupart des candidats partent du principe que la variable aléatoire prend des valeurs entières, ce qui les conduit à raisonner à l'envers. Un peu plus de réussite dans le calcul de l'espérance pour ceux qui ont pensé à utiliser la linéarité.

Q14 : question peu traitée avec des représentations graphiques étonnantes.

Q15 et 16 : questions peu abordées avec assez peu de réussite pour ceux qui les ont traitées.

Q17 : question abordée par quelques copies. Les rares qui ont abordé cette question se limitent généralement à vérifier la première assertion.

Q18 : la notion de matrice de rang 1 n'est pas comprise par une partie significative des candidats. Pour certains, il s'agit d'une matrice qui possède $n-1$ colonnes nulles, pour d'autres c'est une matrice colonne. Ceux qui connaissent la notion de matrice de rang 1 parviennent généralement à donner au moins un argument partiel. Un certain nombre n'évoque pas la non nullité de X et Y , et certains posent X égal à la première colonne de A sans se soucier de sa nullité.

Q19 : beaucoup se contentent de montrer que le rang est inférieur ou égal à 1.

Q20 : ceux qui pensent à utiliser la question Q18 parviennent généralement à identifier la trace et s'en sortent. Certains candidats parviennent au résultat en effectuant les calculs à partir des coefficients de $A = XY^T$.

Q21 : la rédaction précise de la récurrence remplacerait avantageusement les arguments du type « par récurrence immédiate ». Une part significative prend le temps de démontrer la trivialité : $A^k = \text{Tr}(A)A^{k-1}$.

Q22 : question souvent bien traitée avec parfois des justifications trop rapides, et parfois seulement la partie « condition nécessaire » démontrée.

Q23 : cette question été l'occasion pour les candidats de montrer leur savoir-faire sur la diagonalisation de matrice. Les justifications sont cependant souvent trop lacunaires, imprécises, voire simplement fausses.

Q24 : un calcul simple réussi par une majorité de candidats. Les erreurs sont le plus souvent dues au facteur $\frac{1}{3}$ devant la matrice dans l'expression de A . Identifier un polynôme annulateur de A n'est toutefois pas immédiat pour tous et on retrouve régulièrement $X^2 - I_3$ ou des $A^2 - I_3$, ce qui montre que la notion même de polynôme annulateur n'est pas comprise.

Q25 : bilan mitigé sur cette question. Certains utilisent correctement la question précédente (et parfois annoncent sans justification supplémentaire que les racines du polynôme trouvé précédemment sont « les » valeurs propres de A). D'autres se lancent dans le calcul du polynôme caractéristique et commettent trop souvent des erreurs de calcul. Beaucoup d'erreurs également dans le calcul des espaces propres.

Q26 : question souvent bien traitée. Certains s'en sortent par un argument théorique découlant du théorème spectral, d'autres par utilisation du produit scalaire.

Q27 : question très mal réussie. Une majorité de candidats répondent en utilisant le théorème spectral mais ne pensent pas à orthonormaliser la base obtenue à la question Q25.

Q28 : question laissée de côté ou justifiée souvent très rapidement.

Q29 : les candidats ne pensent pas toujours à utiliser un argument de dimension pour conclure à l'égalité des deux espaces. Pour la deuxième égalité, certains procèdent directement par équivalence. La rédaction est cependant souvent confuse et certains problèmes de nature d'objet apparaissent. On voit par exemple couramment l'écriture $\frac{1}{\|V\|^2} V^T V = 0$ pour la recherche du noyau.

Q30 : pour beaucoup de candidats, l'identification du noyau et de l'image suffisent à démontrer que l'application est un projecteur. Ceux qui ont bien traité la question y sont parvenus soit en montrant que $P_V^2 = P_V$, soit en étudiant la restriction de P_V à son image.

Q31 : beaucoup de confusions entre « Q_V est une matrice symétrique » et « Q_V est la matrice d'une symétrie ».

Q32 : la confusion de la question précédente se retrouve sur cette question. Certains utilisent correctement leur connaissance du cours et le fait que P_V est un projecteur.

Q33 : souvent correctement traitée par les quelques candidats qui l'ont abordée.

Q34 : question peu abordée et résultat souvent incorrect. Le petit nombre de candidats qui ont vu la bonne décomposition l'ont souvent donnée sans justification.

Q35 : un certain nombre de candidats se sont intéressés à cette question sans faire de lien avec la précédente. Ils reprennent l'expression de Q_V , se lancent dans un calcul mais n'aboutissent pas.

Q36 à 38 : questions abordées par très peu de candidats. On trouve des idées intéressantes dans les meilleures copies sans justifications complètes.

