Exercice 55 :

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^n$

$\geq \sum_{k=1}^{n} 1^n$

$\geq n$

Or $n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

$\boxed{\text{Par minoration, } S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty}$

2)

. $\forall k \in \mathbb{N}^*$, f_k est continue sur $]0 ; +\infty[\setminus \left\{\frac{1}{k}\right\}$

. En 0 ; $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(1-kx)^{1/x} = e^{\frac{1}{x}\ln(1-kx)}$

Or $e^{\frac{1}{x}\ln(1-kx)} = e^{\frac{1}{x}(-kx + o(x))}$
$= e^{-k + o(1)}$

donc $(1-kx)^{1/x} \xrightarrow[x \to 0]{} e^{-k}$

Puisque $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f_k(0) = e^{-k}$,

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, f_k est continue en 0.

. En ~~$+\infty$~~ $\frac{1}{k}$; $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $(1-kx)^{1/x} \xrightarrow[x \to 1/k]{} 0$

Or $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f_k\left(\frac{1}{k}\right) = 0$

Ainsi $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, f_k \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+}$

3)a) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $x \longmapsto (1-kx)^{1/x}$

est décroissante sur $]0, \frac{1}{k}[$ et

positive

Ainsi, f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$

d'où $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f_k(x)| = e^{-k}}$

3b)

i) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, f_k est continue sur $\mathbb{R}_+$.

ii) $\sum_{k=1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-k}$ or cette

série converge car on reconnait une série géométrique.

Donc $\sum_{k \geq 1} f_k$ converge normalement

donc uniformément sur $\mathbb{R}_+$

Avec le théorème de transfert de continuité on a :

$\boxed{F \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+}$

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$F\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} f_k\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-k)^n}{n^n}$

$= \frac{1}{n^n} \sum_{p=1}^{n-1} p^n = \frac{S_n - n^n}{n^n} = \boxed{\frac{S_n}{n^n} - 1}$

5) Donc $\frac{S_n}{n^n} = F\left(\frac{1}{n}\right) \cancel{+1}$

Or par continuité de F,

$F\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} F(0)$

et $F(0) = \frac{e^{-1}}{1-e^{-1}} = \frac{1}{e-1}$

~~avec le théorème de la double limite~~

?? $F\left(\frac{1}{n}\right) \longrightarrow \frac{1}{e-1}$

donc $\frac{S_n}{n^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{e}{e-1}$

et $\frac{S_n}{n^n} = F\left(\frac{1}{n}\right) + 1 \longrightarrow \frac{e}{e-1}$

d'où $\boxed{S_n \underset{n \to +\infty}{\sim} C n^n}$

avec $\boxed{C = \frac{e}{e-1} > 0}$

et c'est tout.