Semaine 1 du 16 septembre 2024 (S38)

I Séries numériques

1 Rappel sur les sommes finies et les sommes doubles

1.1 Propriétés des sommes finies

1.2 Formules usuelles

1.3 Sommes doubles

2 Premières définitions sur les séries

3 Séries réelles à termes positifs

3.1 Propriété fondamentale

3.2 Outils de comparaison

3.3 Séries de Riemann

4 Comparaison série - intégrale

4.1 Principe

4.2 Cas d'une fonction croissante

4.3 Estimation du reste dans le cas de convergence

5 Séries complexes et convergence absolue

5.1 Résultats généraux

5.2 Séries alternées

5.3 Comparaison logarithmique et règle de d'Alembert

6 Formule de Stirling

Démonstration non exigible.

7 Produit de Cauchy

Démonstration non exigible.

9 Exercices à connaître

9.1 Révision sur les suites : le théorème de Césaro

On considère une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de nombres réels ou complexes. On définit la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ par

$$v_n = \frac{1}{n+1}\left(u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n\right)$$

1) On suppose que la suite (u_n) converge vers 0. Montrer que la suite (v_n) converge vers 0 .
Indication : soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un rang N tel que, si $n \geqslant N, |v_n| \leqslant \varepsilon$. Pour cela, couper v_n en deux morceaux.

2) On suppose que la suite (u_n) converge. Montrer que la suite (v_n) converge. C'est le théorème de Césaro.

3) Montrer que la réciproque est fausse.

On montrerait avec les mêmes outils que si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, v_n aussi.

9.2 Série harmonique et constante d'Euler

On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la suite $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.

L'objectif est de montrer que (u_n) converge. Sa limite est appelée ***constante d'Euler*** et notée γ.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1) Montrer que $H_n \sim \ln n$.

2) Montrer que $u_{n+1} - u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

3) On pose pour tout $n > 0$, $v_n = u_{n+1} - u_n$. Donner la nature de $\sum v_n$ et conclure.

9.3 Une décomposition de somme

Soit $k > 1$; on note $S_k = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k}$ et $T_k = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^k}$. Calculer T_k en fonction de S_k.

9.4 Natures de deux séries

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $v_n = \frac{u_n}{S_n}$. L'objectif est de comparer la nature de $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

On pourra traiter les cas où $\sum u_n$ converge ou diverge, et dans ce dernier étudier la série de terme général $w_n = \ln\left(1 - \frac{u_k}{S_k}\right)$ pour $n \geqslant 1$.

9.5 Transformation d'Abel

Soit (a_n) une suite positive décroissante de limite nulle et (S_n) une suite bornée.

1) Montrer que la série $\sum (a_n - a_{n+1})S_n$ est convergente.

2) En déduire que la série $\sum a_{n+1}(S_{n+1} - S_n)$ est convergente.

3) Établir que la série $\sum \frac{\sin(n)}{n}$ est convergente.
Indication : On pourra commencer par montrer que la suite $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \sin k$ est bornée.