Exo 63

1) On a $g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1-\cos(x)}{x^2}$$

En 0 : $\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1-(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2))}{x^2}$

$$= \frac{1}{2} + \underset{x\to 0}{o}(1)$$

donc $\frac{1-\cos(x)}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} = \underset{x\to 0}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

donc g est intégrable sur $]0,a[$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$

En $+\infty$ $\left|\frac{1-\cos(x)}{x^2}\right| \leq \frac{2}{x^2}$

Donc par comparaison à une intégrale de Riemann g est intégrable sur $[1,+\infty[$

$\boxed{\text{Ainsi } g \text{ est intégrable sur }]0,+\infty[}$

2) • $h : x \mapsto \frac{1-\cos(tx)}{t^2(1+t^2)}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $\frac{\partial^2 h(x)}{\partial x^2} = \frac{t^2\cos(tx)}{t^2(1+t^2)} = \frac{\cos(tx)}{1+t^2}$

• $t \mapsto \frac{1-\cos(tx)}{t^2(1+t^2)}$ et $t \mapsto \frac{t\sin(tx)}{t^2(1+t^2)}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$

• $t \mapsto \frac{t^2\cos(tx)}{t^2(1+t^2)}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$

- $\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R} \quad \left|\frac{t^2\cos(tx)}{t^2(1+t^2)}\right| \leqslant \frac{1}{1+t^2}$

or $\varphi : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$

Donc avec le théorème de classe $\mathcal{C}^2$ pour une intégrale à paramètre, $\boxed{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$

On sait en outre que $\forall t \in \mathbb{R}_+ \ \forall x \in \mathbb{R}$

$$\cos(tx) \geqslant 1 - \frac{(tx)^2}{2}$$

ainsi $1 - \cos(tx) \leqslant \frac{(tx)^2}{2}$

donc $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(tx)}{t^2(1+t^2)} dt \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{2(1+t^2)} \leqslant \frac{x^2}{2}\left[\arctan(t)\right]_0^{+\infty}$

$$\leqslant \frac{x^2}{2} \times \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\text{donc } \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant \frac{x^2 \times \pi}{4} < x^2}$$

On a avec le théorème de classe $\mathcal{C}^2$ que

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)} dt$

donc $\boxed{f'(0) = \int_0^{+\infty} 0 \, dt = 0}$

3) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$f''(x) - f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2} dt - \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(tx)}{t^2(1+t^2)} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)(t^2+1) - 1}{t^2(t^2+1)} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx) - \frac{1}{t^2+1}}{t^2}\,dt \qquad \text{on pose } u = tx$$
$$du = x\,dt$$

alors $f''(x) - f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(u) - \frac{1}{(\frac{u}{x})^2+1}}{(\frac{u}{x})^2} \frac{du}{x}$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{x\left(\cos(u) - \frac{x^2}{u^2+x^2}\right)}{u^2}\,du$$

$$= x\int_0^{+\infty} \frac{\cos(u)-1}{u^2}\,du + x\int_0^{+\infty} \frac{1 - \frac{x^2}{u^2+x^2}}{u^2}\,du$$

$$= -x\int_0^{+\infty} g(t)\,dt + x\int_0^{+\infty} \frac{\frac{u^2}{u^2+x^2}}{u^2}\,du$$

$$= x\int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2+x^2}\,du - x\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$$

$$= x\left[\frac{1}{x}\arctan\left(\frac{u}{x}\right)\right]_0^{+\infty} - x\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$$

$$= \frac{\pi}{2} - x\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$$

Ainsi f est bien solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation

$$y'' - y = \frac{\pi}{2} - x\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$$

Inutile, on rq que si a=intégrale de g de 0 à +inf, alors $x \to -\pi/2 + ax$ est une solution particulière, puis on utilise les conditions initiales $f(0)=f'(0)=0$ pour calculer A et B

4) Résolvons tout d'abord (H) : $y'' - y = 0$

(EC) : $x^2 - 1 = 0$ donc $x = \pm 1$

Ainsi $y_H(x) = Ae^{x} + Be^{-x}$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$

Or en réalisant une IPP on sait que (vu dans un exo classique du chapitre 3)

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}$$

on a donc que $\int^{+\infty} g(x)\,dx$ est l'intégrale de dirichlet

dont la valeur est bien connue et vaut $\frac{\pi}{2}$.

Ainsi l'équation différentielle devient

$$y''(x) + y(x) = \frac{\pi}{2}(1-x)$$

une solution particulière est $y_P(x) = \frac{\pi}{2}(x-1)$

Ainsi ~~la~~ solution ~~f~~totale est

$$y(x) = Ae^{x} + Be^{-x} + \frac{\pi}{2}(x-1)$$

Or f est la solution de cette équation qui vérifie $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$

f est donc unique et vaut pour tout x dans $\mathbb{R}_+$ $\boxed{f(x) = \frac{\pi}{2}e^{-x} + \frac{\pi}{2}(x-1)}$

Exercice 30 :

Soit $X \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

On va montrer de manière analogue à la démonstration du cours concernant les matrices symétriques que toutes les valeurs propres de X sont ~~antisym~~ imaginaires pures.

On note λ une valeur propre complexe de X (existe car son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{C}$) et Y ~~le~~ UN vecteur propre associé on a $\lambda Y^T \overline{Y} = (\lambda Y)^T \overline{Y} = (XY)^T \overline{Y}$

$$= Y^T X^T \overline{Y}$$

$$= -Y^T X \overline{Y} \quad \text{car } X \text{ est antisymétrique}$$

$$= -Y^T (\overline{XY}) \quad \text{car } X \text{ est réelle}$$

$$= -Y^T (\overline{\lambda Y})$$

$$= -\overline{\lambda}\, Y^T \overline{Y}$$

or $Y \neq 0$ et si $Y = (y_1, \dots y_n)$

$$Y^T \overline{Y} = \sum_{k=1}^{n} |y_k|^2 > 0$$

donc $\lambda = -\overline{\lambda}$ et ainsi $Re(\lambda) = 0$

Toutes les valeurs propres de X sont imaginaires pures.

Soit λ une vp de X, $\exists Y \neq 0$ tq :

$$XY = \lambda Y$$

alors $(I_n - X)Y = Y - XY = Y - \lambda Y$

$$= (1-\lambda) Y$$

Ainsi $1 - \lambda$ est une valeur propre de $I_n - X$

Or comme λ est imaginaire pur $1 - \lambda \neq 0$

0 ne peut pas être valeur propre de $I_n - X$

Donc $I_n - X$ est inversible.