Devoir à la maison n° 1

À rendre le 15 septembre

Soit $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 muni de sa structure d'espace vectoriel et soit J la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On considère l'application S de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même qui associe à tout élément M de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'élément $S(M) = JMJ$.

1) **a)** Montrer que l'application S ainsi définie est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Quel est l'automorphisme réciproque de S ?

b) Montrer que si M et N sont deux éléments quelconques de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on a $S(MN) = S(M)S(N)$.

2) On considère les éléments :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que (I, J, K, L) forme une base de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

3) Déterminer la matrice représentant l'automorphisme S dans la base (I, J, K, L).

4) Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des éléments M de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $S(M) = M$ et soit $\mathscr{G}$ l'ensemble des éléments M de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $S(M) = -M$.

a) Montrer par deux méthodes que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Montrer que tout élément M de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $M = M_+ + M_-$ avec $M_+ \in \mathscr{F}$ et $M_- \in \mathscr{G}$. Interpréter ce résultat pour les sous-espaces $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$.

c) À titre d'exemple, déterminer les matrices A_+ et A_- lorsque $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

d) Déterminer une base de $\mathscr{F}$ et une base de $\mathscr{G}$.

5) **a)** Montrer que le produit de deux matrices appartenant à $\mathscr{F}$ appartient aussi à $\mathscr{F}$. Que peut-on dire du produit de deux éléments de $\mathscr{G}$?

b) Plus précisément, pour deux matrices M et N de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, exprimer $(MN)_+$ et $(MN)_-$ en fonction de M_+, M_-, N_+, N_-.

— **FIN** —