I – Rappels et compléments d'algèbre linéaire, 1ère partie

I. Image d'une base par un endomorphisme

1) **Condition nécessaire :** Supposons qu'il existe $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\operatorname{Ker} u = F$ et $\operatorname{Im} u = G$. Avec $n = \dim E$, par le théorème du rang $\dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Im} u = \dim E$, donc $\dim E = \dim F + \dim G$ est une conditon nécessaire.

Condition sufisante : Réciproquement, en posant $p = \dim F$, $q = \dim G$, supposons que $p + q = n$. Nous allons construire u convenable en la définissant sur une base judicieusement choisie de E.
Soit $(f_1, \cdots, f_p)$ une base de F, que l'on complète par $(f_{p+1}, \cdots, f_{p+q})$ en une base de E : cette base servira de base « de départ » pour u.
Soit $(g_1, \cdots, g_q)$ une base de G, on considère la famille « à l'arrivée » $(0, \cdots, 0, g_1, \cdots, g_q)$, dont les p premiers vecteures sont nuls. Notons cette famille $(k_1, \cdots, k_n)$.
On sait alors qu'il existe un unique endomorpisme u tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u(f_i) = k_i$.
Alors : $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(u(f_1), \cdots, u(f_n)) = \operatorname{Vect}(0, \cdots, 0, g_1, \cdots, g_q) = \operatorname{Vect}(g_1, \cdots, g_q) = G$.
En particulier, $\operatorname{rg} u = \dim G = q$.
Or pour tout i de 1 à p, $f_i \in \operatorname{Ker} u$ donc $F = \operatorname{Vect}(f_1, \cdots, f_p) \subset \operatorname{Ker} u$. Or avec le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} u = \dim E - \operatorname{rg} u = n - q = p = \dim F$.
Donc $F = \operatorname{Ker} u$: la condition était bien suffisante.

2) Une base de F est $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, que l'on compléte en la base de $\mathbb{R}^3$ $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, notée (f_1, f_2, f_3). Posons $g_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Cherchons l'expression de l'endomorpisme u tel que $u(f_1) = u(f_2) = 0$ et $u(f_3) = g_1$.
Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Décomposons-le dans la base (f_1, f_2, f_3). Une résolution de système linéaire sans surprise donne $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z f_1 + (y+z) f_2 + (x+y+z) f_3$.
Ainsi $u\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z u(f_1) + (y+z) u(f_2) + (x+y+z) u(f_3) = (x+y+z) g_1$.
Une application u telle que $\operatorname{Ker} u = F$ et $\operatorname{Im} u = G$ est donc u : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & (x+y+z)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array}\right.$.

II. Une caractérisation des homothéties

1) Pour tout $x \neq 0_E$, il existe $\lambda(x) \in \mathbb{K}$ tel que

$$f(x) = \lambda(x).x$$

et le but est de montrer que $\lambda(x)$ ne dépend pas de x, i.e. que si $x \neq y, \lambda(x) = \lambda(y)$. Pour cela on considère deux vecteurs non nuls x et y, et on examine deux cas : Si (x, y) est liée, il existe μ tel que $y = \mu x$. On a alors

$$f(y) = \mu f(x) = \mu\lambda(x)x = \lambda(x)y$$

et donc $\lambda(x) = \lambda(y)$. Si (x, y) est libre, on passe par l'intermédiaire de $x + y$. En effet, $f(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda(x)x + \lambda(y)y$ d'une part, $f(x+y) = \lambda(x+y)(x+y)$ d'autre part. Comme (x, y) libre, on obtient $\lambda(x) = \lambda(y) = \lambda(x+y)$. Et c'est ce qu'on voulait...

2) Une droite est l'intersection de deux plans donc une telle application stabilise aussi les droites : c'est donc une homothétie.

3) Une homothétie commute avec tout endomorphisme. Réciproquement, soit f un endomorphisme qui commute avec tout endomorphisme. Si $x \neq 0_E$, soit F un supplémentaire de Vect (x) dans E (C'est pour l'existence de ce supplémentaire qu'on suppose E de dimension finie). Soit p la projection sur $\operatorname{Vect}(x)$ parallèlement à F. Alors $f \circ p = p \circ f$. On applique cela en x, on obtient $p(f(x)) = f(x)$, donc $f(x)$ est lié avec x. Et ce, pour tout x. Il ne reste plus qu'à appliquer la question précédente.

4) On en déduit que le centre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est constitué par les homothéties (en utilisant l'isomorphisme canonique entre $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$).

5) On retrouve ce résultat en considérant une matrice M du centre et en écrivant

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!] \quad M E_{i,j} = E_{i,j} M$$

III. Noyaux itérés

1) Si $f^p(x) = 0_E, f\left(f^p(x)\right) = 0_E$, i.e. $f^{p+1}(x) = 0_E$. On a donc

$$x \in F_p \Longrightarrow x \in F_{p+1}$$

Ou encore $F_p \subset F_{p+1}$. De plus, si $y \in G_{p+1}$, il existe x tel que $y = f^{p+1}(x)$. Mais alors $y = f^p(f(x))$, donc $y \in G_p$. Et finalement $G_{p+1} \subset G_p$.

2) On est en dimension finie : la suite des dimensions des F_p, croissante et majorée, converge vers ℓ. Mais c'est une suite d'entiers naturels. Elle est donc stationnaire et $\ell \in \mathbb{N}$. Il existe donc l tel que pour tout $k \geqslant l$, $F_k = F_{k+1} = F_l$ (si un sev est inclus dans un autre et s'ils ont même dimension, ils sont égaux). On peut alors poser $r = \min\{\, l \in \mathbb{N}\ ,\ F_l = F_{l+1}\,\}$. C'est un ensemble d'entiers naturels, non vide d'après le point précédent, donc r existe bien.
On montre ensuite par récurrence sur p que :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ H_p : \text{« } \operatorname{Ker}(f^r) = \operatorname{Ker}(f^{r+p}) \text{ »}.$$

.

Initialisation : H_0 est évidente.

Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}$, montrons $H_p \Rightarrow H_{p+1}$ et supposons pour cela H_p. On a d'abord, par croissance de la suite de sous-espaces vectoriels de E ($\operatorname{Ker} f^n$), que $\operatorname{Ker}(f^r) \subset \operatorname{Ker}(f^{r+p+1})$. Ensuite, soit $x \in \operatorname{Ker}(f^{r+p+1})$. On a alors $f^{p+r+1}(x) = f^{p+r}(f(x)) = 0_E$ et donc $f(x) \in \operatorname{Ker}(f^{r+p})$. Par hypothèse de récurrence, on a donc $f(x) \in \operatorname{Ker} f^r$, et donc $f^r(f(x)) = f^{r+1}(x) = 0_E$, soit $x \in \operatorname{Ker} f^{r+1}$. D'après la question précédente, on a finalement que $x \in \operatorname{Ker} f^r$ et donc $\operatorname{Ker}(f^{r+p+1}) \subset \operatorname{Ker} f^r$, soit $\operatorname{Ker}(f^{r+p+1}) = \operatorname{Ker} f^r$.

Conclusion : Par récurrence, pour tout entier naturel p, H_p est vraie.

3) On peut faire le même genre de raisonnement qu'à la question précédente, mais il est plus simple de se souvenir du théorème du rang. En effet, comme pour tout p on a $G_{p+1} \subset G_p$, on a

$$G_p = G_{p+1} \Longleftrightarrow \dim\left(G_p\right) = \dim\left(G_{p+1}\right)$$

Mais du théorème du rang on déduit facilement que

$$\left(\dim\left(G_p\right) = \dim\left(G_{p+1}\right)\right) \Longleftrightarrow \left(\dim\left(F_p\right) = \dim\left(F_{p+1}\right)\right)$$

et on est ramené à utiliser les résultats de la question précédente. On trouve $r = s$.

4) Comme $r = s$, le théorème du rang fait qu'il nous suffit de montrer que

$$F_r \cap G_r = \{0_E\}$$

Mais si $x \in F_r \cap G_r$, soit y tel que $x = f^r(y)$; de $f^r(x) = 0_E$ on déduit que $f^{2r}(y) = 0_E$. Donc $y \in F_{2r}$. Mais $F_{2r} = F_r$ d'après 2. Donc $y \in F_r$, donc $x = 0_E$, ce qui conclut.

IV. « Inégalité triangulaire » et une autre inégalité autour du rang

1) a) Il suffit de remarquer que $\operatorname{Im}(u+v) \subset \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$. En effet, si $y \in \operatorname{Im}(u+v)$, il existe $x \in E$ tel que $y = (u+v)(x) = u(x) + v(x)$. Or $u(x) \in \operatorname{Im} u$ et $v(x) \in \operatorname{Im} v$.
Attention, l'inclusion réciproque est fausse : essayez de la démontrer, remarquez où la démonsration échoue et cherchez un contre-exemple.
On en tire : $\operatorname{rg}(u+v) \leqslant \dim(\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v) \leqslant \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v$, la dernière inégalité découlant de la formule de Grassman.

b) Commençons pas remarquer que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\operatorname{Im}(\lambda u) = \operatorname{Im} u$. En effet, si $y \in \operatorname{Im}(\lambda u)$, il existe $x \in E$ tel que $y = \lambda u(x) = u(\lambda x) \in \operatorname{Im} u$. L'inclusion réciproque se démontre de la même manière, en utilisant bien que $\lambda \neq 0$.
Ainsi

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(u) &= \operatorname{rg}((u+v) + (-v)) \\
&\leqslant \operatorname{rg}(u+v) + \operatorname{rg}(-v) && \text{grâce à la première question} \\
&\leqslant \operatorname{rg}(u+v) + \operatorname{rg}(v) && \text{avec la remarque précédente}
\end{aligned}$$

d'où

$$\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v) \leqslant \operatorname{rg}(u+v) \tag{1}$$

En inversant les rôles de u et v et en écrivant $v = (u+v) - u$, on obtient de la même manière

$$\operatorname{rg}(v) - \operatorname{rg}(u) \leqslant \operatorname{rg}(u+v) \tag{2}$$

Les équations (1) et (2) assurent alors que

$$|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leqslant \operatorname{rg}(u+v).$$

2) Nous savons que $\operatorname{Im}(u \circ v) \subset \operatorname{Im} u$ donc $\operatorname{rg}(u \circ v) \leqslant \operatorname{rg} u$. De plus $\operatorname{Im}(u \circ v) = u(\operatorname{Im} v)$. Si $\tilde{u}$ est la restriction de u à $\operatorname{Im} v$, alors $\operatorname{rg}(u \circ v) = \operatorname{rg}(\tilde{u})$. Le théorème du rang assure que $\operatorname{rg}(\tilde{u}) = \dim \operatorname{Im} v - \dim \operatorname{Ker} \tilde{u} \leqslant \operatorname{rg} v$. Ainsi

$$\operatorname{rg}(u \circ v) \leqslant \inf(\operatorname{rg} u, \operatorname{rg} v).$$

D'autre part, en repartant de $\mathrm{rg}(\tilde{u}) = \dim \mathrm{Im}\, v - \dim \mathrm{Ker}\, \tilde{u}$, nous avons $\mathrm{Ker}\, \tilde{u} = \mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Im}\, v \subset \mathrm{Ker}\, u$ donc $\dim \mathrm{Ker}\, \tilde{u} \leqslant \dim \mathrm{Ker}\, u$. Avec le théorème du rang il vient $\dim \mathrm{Ker}\, \tilde{u} \leqslant n - \mathrm{rg}\, u$, et donc finalement

$$\mathrm{rg}\, v + \mathrm{rg}\, u - n \leqslant \mathrm{rg}(u \circ v).$$

V. Endomorphismes nilpotents

1) Introduire $\mathscr{E} = \left\{ k \in \mathbb{N},\ f^k = 0 \right\}$ et montrer qu'il a un min, qui est donc unique.

2) Prendre $x \notin \mathrm{Ker}\, f^{p-1}$, regarder une combinaison nulle non triviale de la famille, poser k le plus petit indice tel que $\lambda_k \neq 0$ et composer par f^{p-k} : on aboutit à une contradiction.

3) Une famille libre a toujours moins de n éléments.

4) Ligne de 1 en-dessous de la diagonale.

5) $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $P \mapsto P'$.