Semaine 15 du 19 janvier 2026 (S4)

XIII - Variables aléatoires discrètes

Le chapitre XIV reste au programme :

1 Rayon de convergence

1.1 Définition de série entière

1.2 Rayon et disque de convergence, cercle d'incertitude

2 Méthodes de détermination du rayon de convergence

2.1 Résultats de comparaison

2.2 Règle de d'Alembert

2.3 Utilisation de suites bornées

2.4 Utilisation du cercle d'incertitude

2.5 Quelques exemples fréquents, séries entières dérivée et primitive

2.6 Somme

2.7 Produit de Cauchy

3 Régularité des séries entières réelles

3.1 Convergence pour les séries entières réelles

3.2 Continuité

3.3 Dérivation

3.4 Intégration

4 Fonctions développables en série entière

4.1 Développement en série entière au voisinage de 0

4.2 Série de Taylor

4.3 Développement et formule de Taylor avec reste intégral

4.4 Développement par dérivation et primitivation

4.5 Développement par opérations

4.6 Développement et équation différentielle

4.7 Une application : régularité d'un prolongement continu

5 Exemples de séries entières d'une variable complexe

5.1 Série géométrique complexe

5.2 Exponentielle complexe

5.3 Continuité sur le disque ouvert de convergence

6 Formulaire

7 Exercices à connaître

7.1 Comparaisons de rayons de convergence

Soit (a_n) une suite complexe.

1) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} n^\alpha a_n z^n$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

2) En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{P(n)}{Q(n)} a_n z^n$ où $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ sont deux polynômes non nuls.

7.2 Calculs de rayons de convergence (Banque CCP MP)

1) Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.

2) Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :

a) $\sum \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$ **b)** $\sum n^{(-1)^n} z^n$ **c)** $\sum \cos n z^n$

7.3 Une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ (Banque CCP MP)

1) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$.

On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{(2n)!}$.

2) Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ et préciser le rayon de convergence.

3) **a)** Déterminer $S(x)$.

b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(0) = 1, \quad f(x) = \mathrm{ch}\sqrt{x} \text{ si } x > 0, \quad f(x) = \cos\sqrt{-x} \text{ si } x < 0\ .$$

Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

7.4 Une équation différentielle (Banque CCP MP)

Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

1) Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ de $\mathbb{R}$, avec $r > 0$.
Déterminer la somme des séries entières obtenues.

2) Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y''+3xy'+y = 0$ sur $]0;1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$?

Pour la dernière question on admettra que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients non constants est un espace vectoriel de dimension 2.

7.5 Calculs de sommes de séries entières (Banque CCP MP)

Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivantes, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence :

1) $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{3^n x^{2n}}{n}$.

2) $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ avec $\begin{cases} a_{2n} = 4^n \\ a_{2n+1} = 5^{n+1} \end{cases}$

7.6 Développements en série entière (Banque CCP MP)

1) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$ converge.

On se propose de calculer la somme de cette série.

2) Donner le développement en série entière en 0 de $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.
Remarque : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.

3) En déduire le développement en série entière en 0 de $x \longmapsto \operatorname{Arcsin} x$ ainsi que son rayon de convergence.

4) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$.

S'y ajoute, en révision, l'intégralité des chapitres suivants :

I. et III. Rappels et compléments d'algèbre linéaire
V. Espaces vectoriels normés
VI. Valeurs propres et vecteurs propres
VIII. Réduction des endomorphismes

Les exercices à connaître sont les suivants :
L'exercice 7.8 est très long. Vous pourrez ne donner qu'une partie des questions, par exemple (1 et 2), (1 et 3) ou (5).

7.7 Image d'une base par un endomorphisme

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.

1) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un endomorphisme u tel que $\operatorname{Ker}(u) = F$ et $\operatorname{Im}(u) = G$.

2) Construire un tel endomorphisme u avec $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \}$ dans $\mathbb{R}^3$ et $G = \{ \lambda(2, -1, -1) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$.

7.8 Une caractérisation des homothéties

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, où E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

1) Déterminer l'ensemble des endomorphismes de E laissant stables tous les sev de dimension 1.

Cette question est archi-classique, et n'est pas toujours présentée sous cette forme.
On pourra se demander le lien entre

$$\forall x \in E, \exists \lambda \in \mathbb{K}, f(x) = \lambda x$$

et

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, f(x) = \lambda x.$$

2) Déterminer l'ensemble des endomorphismes de E laissant stables tous les sev de dimension 2.

3) Si E est de dimension finie, en déduire le « centre » de $\mathscr{L}(E)$, c'est-à-dire l'ensemble endomorphismes qui commutent avec tous les endomorphismes (on pourra remarquer qu'un tel endomorphisme commute nécessairement avec les projections sur toutes les droites vectorielles).

4) Quel est le centre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$?

5) Retrouver le résultat précédent en utilisant la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

7.9 Noyaux itérés

Soit f un endomorphisme d'un espace de dimension finie n non nulle. On définit, pour tout entier naturel p :

$$F_p = \operatorname{Ker}(f^p) \quad \text{et} \quad G_p = \operatorname{Im}(f^p)$$

(f^p désigne l'itérée d'ordre p de f : $f^0 = \mathrm{Id}$ et, $f^{p+1} = f \circ f^p$).

1) Démontrer que, des deux suites de s.e.v. (F_p) et (G_p), l'une est croissante et l'autre décroissante (pour l'inclusion).

2) Démontrer qu'il existe un plus petit entier naturel r tel que $F_r = F_{r+1}$, et démontrer qu'alors, pour tout entier naturel p supérieur ou égal à r, $F_p = F_{p+1}$.

3) Démontrer qu'il existe un plus petit entier naturel s tel que $G_s = G_{s+1}$, et démontrer qu'alors, pour tout entier naturel p supérieur ou égal à s, $G_p = G_{p+1}$. Y-a-t-il un lien entre r et s ?

4) Démontrer que G_s et F_r sont supplémentaires dans E.

7.10 « Inégalité triangulaire » et une autre inégalité autour du rang

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et $u, v \in \mathscr{L}(E, F)$.

1) **a)** Montrer que $\operatorname{rg}(u+v) \leqslant \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$.

b) En déduire que $|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leqslant \operatorname{rg}(u+v)$.

2) On suppose que $E = F$, et $\dim E = n$. Montrer l'encadrement :

$$\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) - n \leqslant \operatorname{rg}(u \circ v) \leqslant \inf(\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v)).$$

7.11 Endomorphismes nilpotents

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$. On dit que $f \in \mathscr{L}(E)$ est nilpotent lorsqu'il existe $k \geqslant 1$ tel que $f^k = 0$.

1) Montrer qu'il existe un unique entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{p-1} \neq 0$ et $f^p = 0$. Cet entier est appelé *indice de nilpotence* de f.

Dans cet énoncé, on considère $f \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice p.

2) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\mathscr{F} = (x, f(x), \cdots, f^{p-1}(x))$ est une famille libre.

3) En déduire que $p \leqslant n$.

4) On suppose dans cette question que $p = n$. Déterminer $\operatorname{Mat}_{\mathscr{F}}(f)$ et $\operatorname{rg}(f)$.

5) Donner un exemple d'espace vectoriel E de dimension n et d'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice n.

7.12 Expression et éléments caractéristiques d'un projecteur ou d'une symétrie

1) Donner les éléments caractéristiques de l'application f définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3x & - & y & + & 2z \\ -x & + & 3y & + & 2z \\ x & + & y & + & 2z \end{pmatrix} \end{array} \right. .$$

2) Donner l'expression de la symétrie par rapport à $\operatorname{Vect}(1, 0, -1)$ et parallèlement à $\operatorname{Vect}((1, 2, 0), (1, 1, -1))$.

7.13 Endomorphismes de rang 1

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1.

1) Montrer qu'il existe $C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $L \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ vérifiant $A = CL$.

2) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que pour tout entier naturel non nul n, $A^n = \alpha^{n-1}A$.

3) Montrer que $A^2 = \mathrm{tr}\,(A)A$.

4) Après avoir calculé $(1+\mathrm{tr}\,A)(A+\mathrm{I}_n)-(1+\mathrm{tr}\,A)\mathrm{I}_n$, déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $A+\mathrm{I}_n$ soit inversible. Le cas échéant, déterminer $(A+\mathrm{I}_n)^{-1}$.

7.14 Matrice à diagonale dominante

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ à coefficients diagonaux dominants, c'est-à-dire telle que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|.$$

Montrer que A est inversible.

7.15 Une caractérisation de la trace

Trouver toutes les formes linéaires f sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant :

$$\forall\, A,B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ f(AB) = f(BA).$$

Indication : pour deux matrices élémentaires $E_{i,j}$ et $E_{k,\ell}$, calculer le produit $E_{i,j}E_{k,\ell}$.

7.16 Produit d'espaces vectoriels normés

Soit $E_1,\dots,E_p$ des $\mathbb{K}$-ev, munis respectivement des normes $N_1,\dots,N_p$. On considère l'espace vectoriel produit $E = E_1 \times \ldots \times E_p$. Sur E, on pose l'application

$$N : \begin{array}{ccl} E & \to & \mathbb{R} \\ (x_1,\dots,x_p) & \mapsto & \displaystyle\max_{1\leqslant k\leqslant p} N_k(x_k) \end{array}.$$

Montrer que N est une norme sur E.
(E,N) est appelé *espace vectoriel normé produit* des $(E_k,N_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$.

7.17 Comparaison de deux normes

Sur $\mathbb{R}[X]$, on définit N_1 et N_2 par :

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left|P^{(k)}(0)\right| \text{ et } N_2(P) = \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)|$$

1) Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.

2) On considère la suite de terme général $P_n = \dfrac{1}{n}X^n$. Est-elle bornée pour la norme N_1 ? pour la norme N_2 ?

3) Les deux normes sont-elles équivalentes ?

7.18 Opérations sur les convexes

Une réunion finie de convexes est-elle convexe ? Et une intersection ? Et pour des réunions et intersections quelconques ?

7.19 Limite d'une suite de matrices

1) Soit (A_n) et (B_n) deux suites de matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ convergeant respectivement vers A et B. Montrer que $A_nB_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} AB$.

2) Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ telle que (A^k) converge vers une matrice P. Montrer que P est une matrice de projection.

7.20 Norme d'algèbre sur les matrices et convergence d'une suite

Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

1) Montrer que $(A,B) \mapsto \mathrm{tr}\,(A^\top B)$ est un produit scalaire sur E.

2) Montrer que la norme associée à ce produit scalaire est en fait la norme $\|.\|_2$ de E muni de la base canonique. On l'appelle aussi *norme de Frobenius.*

3) Montrer que pour tout $A, B \in E$, $\|AB\|_2 \leqslant \|A\|_2 \|B\|_2$.

4) Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|A\|_2 < 1$. Montrer que $A^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

7.21 Le spectre « commute » et polynôme caractéristique d'une matrice diagonale par blocs

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que AB et BA ont le même spectre.

2) Soit $A_1, \ldots, A_p$ des matrices carrées. Exprimer le polynôme caractéristique de $A = \mathrm{diag}(A_1, \ldots, A_p)$ en fonction de ceux des A_i.

7.22 Détermination du spectre d'un endomorphisme de polynômes

Soit $E = \mathbb{K}[X]$ et $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ défini par $\varphi : P \mapsto XP'(X)$. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de φ.

7.23 Éléments propres d'une matrice

Donner les éléments propres de

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).$$

7.24 Matrice compagne

Pour $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$ polynôme unitaire, on définit la matrice compagne de P :

$$\mathscr{C}(P) = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Pour $n = 1$, P s'écrit $X + a_0$ et $\mathscr{C}(P) = \mathscr{C}\,(X + a_0) = (-a_0)$.

1) Montrer que P est le polynôme caractéristique de $\mathscr{C}(P)$.

2) On suppose dans cette question que P est scindé à racines simples, notées $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Montrer que :

$$\mathscr{C}(P)^\top = V \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) V^{-1}$$

où V désigne la matrice de Vandermonde de $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

7.25 Deux diagonalisations – bête et méchante et plus théorique

1) Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Diagonaliser la matrice J dont tous les coefficients sont égaux à 1 . Puis diagonaliser la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $a_{i,j} = \alpha$ si $i = j, a_{i,j} = \beta$ sinon.

7.26 Deux applications de la trigonalisation

1) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente.

a) Montrer que A est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte.

b) Le résultat est-il encore vrai pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

2) Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie n et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $\mathrm{Sp}\,(P(u)) = P(\mathrm{Sp}\,(u))$.

7.27 Diagonalisation simultanée

Dans un espace vectoriel E de dimension finie, on considère deux endomorphismes u et v diagonalisables tels que $u \circ v = v \circ u$.

1) Montrer que les sous-espaces propres de v sont stables par u.

2) Montrer que l'endomorphisme induit de u à un sous-espace propre de v est diagonalisable.

3) Montrer qu'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u et v.

7.28 Racine carrée d'une matrice

1) Soit M une matrice diagonale d'ordre n dont les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts. Montrer que les matrices commutant avec M sont exactement les matrices diagonales.

2) Déterminer les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3) Combien y a-t-il de matrice M telle que $M^2 = A$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$? dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?