Devoir surveillé n° 5 – v2

Durée : 4 heures, calculatrices et documents interdits

Concours Commun Mines-Ponts 2022 – Mathématiques I PC/PSI

Étude asymptotique du nombre de partitions d'un entier

L'objectif de ce problème est l'étude asymptotique du nombre de partitions d'un entier naturel n, c'est-à-dire du nombre de décompositions de n en somme d'entiers naturels non nuls (sans tenir compte de l'ordre des termes). Une définition rigoureuse de ce nombre, noté p_n, est donnée en début de partie **C**. Dans la partie **A**, on introduit une fonction P de variable complexe ; dans la fin de la partie **C**, on démontre qu'il s'agit de la somme, sur le disque unité ouvert complexe, de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} p_n z^n$. Dans la partie **B**, on étudie P au voisinage de 1 en variable réelle. Cette étude est mise à profit, dans la partie **D**, pour obtenir une domination de bonne qualité de la suite (p_n).
Tout au long du problème, le disque unité ouvert de $\mathbf{C}$ sera noté

$$D = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}.$$

On admettra aussi l'identité classique suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

A. Fonctions L et P

1) Soit $z \in D$. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$. Préciser la valeur de sa somme lorsque $z \in]-1, 1[$. On notera

$$L(z) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}.$$

2) Soit $z \in D$. Montrer que la fonction $\Phi : t \mapsto L(tz)$ est dérivable sur un intervalle ouvert incluant $[-1, 1]$ et donner une expression simple de sa dérivée sur $[-1, 1]$.

3) Soit $z \in D$. Montrer que la fonction $\Psi : t \mapsto (1 - tz)\mathrm{e}^{L(tz)}$ est constante sur $[0, 1]$, et en déduire que

$$\exp(L(z)) = \frac{1}{1 - z}.$$

4) Montrer que $|L(z)| \leqslant -\ln(1 - |z|)$ pour tout z dans D.
En déduire que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} L(z^n)$ est convergente pour tout z dans D.
Dans la suite, pour tout $z \in D$, on note

$$P(z) := \exp\left[\sum_{n=1}^{+\infty} L(z^n)\right].$$

5) Soit $z \in D$. Vérifier que $P(z) \neq 0$, que

$$P(z) = \lim_{N \to +\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1 - z^n}$$

et que pour tout réel $t > 0$,

$$\ln P(\mathrm{e}^{-t}) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 - \mathrm{e}^{-nt}).$$

B. Développement asymptotique en variable réelle

Dans cette partie, on introduit la fonction q qui à tout réel x associe le nombre réel $q(x) = x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

6) Montrer que q est continue par morceaux sur $\mathbf{R}$, qu'elle est 1-périodique et que la fonction $|q|$ est paire.

7) Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{\mathrm{e}^{tu} - 1}\,\mathrm{d}u$ est bien définie pour tout réel $t > 0$.

8) Montrer que pour tout entier $n > 1$,

$$\int_1^n \frac{q(u)}{u}\,\mathrm{d}u = \ln(n!) + (n - 1) - n\ln(n) - \frac{1}{2}\ln(n) = \ln\left(\frac{n!\,\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}}\right) - 1.$$

9) Montrer que $\displaystyle\int_{\lfloor x \rfloor}^{x} \frac{q(u)}{u}\,\mathrm{d}u$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, et en déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u}\,\mathrm{d}u$, ainsi que l'égalité

$$\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1.$$

10) À l'aide d'un développement en série sous l'intégrale, montrer que

$$\int_0^{+\infty} \ln(1 - \mathrm{e}^{-u})\,\mathrm{d}u = -\frac{\pi^2}{6}.$$

11) Montrer que

$$\int_0^1 \ln\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-tu}}{t}\right) \mathrm{d}u \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} -1.$$

On pourra commencer par établir que $x \mapsto \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}$ est décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$.

Pour $k \in \mathbf{N}^*$ et $t \in \mathbf{R}_+$, on pose

$$u_k(t) = \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{tq(u)}{\mathrm{e}^{tu}-1} \mathrm{d}u \quad \text{si } t>0, \quad \text{et} \quad u_k(t) = \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{q(u)}{u} \mathrm{d}u \quad \text{si } t=0.$$

12) Montrer que u_k est continue sur $\mathbf{R}_+$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$.

13) Soit $t \in \mathbf{R}_+^*$. Montrer successivement que $|u_k(t)| = \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t|q(u)|}{\mathrm{e}^{tu}-1} \mathrm{d}u$ puis $u_k(t) = (-1)^k |u_k(t)|$ pour tout entier $k \geqslant 1$, et établir enfin que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \left|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k(t)\right| \leqslant \frac{1}{2n}.$$

On admettra dans la suite que cette majoration vaut encore pour $t=0$.

14) En déduire que

$$\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{\mathrm{e}^{tu}-1} \mathrm{d}u \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1.$$

15) Montrer, pour tout réel $t>0$, l'identité

$$\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{\mathrm{e}^{tu}-1} \mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\ln(1-\mathrm{e}^{-t}) - \ln P(\mathrm{e}^{-t}) - \int_1^{+\infty} \ln(1-\mathrm{e}^{-tu}) \,\mathrm{d}u.$$

16) Conclure que

$$\ln P(\mathrm{e}^{-t}) = \frac{\pi^2}{6t} + \frac{\ln(t)}{2} - \frac{\ln(2\pi)}{2} + o(1) \quad \text{quand } t \text{ tend vers } 0^+.$$

C. Développement de P en série entière

Pour $(n,N) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$, on note $P_{n,N}$ l'ensemble des listes $(a_1,\dots,a_N) \in \mathbf{N}^N$ telles que $\sum_{k=1}^{N} k a_k = n$. Si cet ensemble est fini, on note $p_{n,N}$ son cardinal.

17) Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que $P_{n,N}$ est inclus dans $[[0,n]]^N$ et non vide pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, que la suite $(p_{n,N})_{N\geqslant 1}$ est croissante et qu'elle est constante à partir du rang $\max(n,1)$.

Dans toute la suite, on notera p_n la valeur finale de $(p_{n,N})_{N\geqslant 1}$.

18) Soit $N \in \mathbf{N}^*$. Donner une suite $(a_{n,N})_{n\in\mathbf{N}}$ telle que

$$\forall z \in D, \frac{1}{1-z^N} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,N} z^n.$$

En déduire, par récurrence, la formule

$$\forall N \in \mathbf{N}^*, \forall z \in D, \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-z^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n.$$

19) On fixe $\ell \in \mathbf{N}$ et $x \in [0,1[$. En utilisant le résultat de la question précédente, établir la majoration $\displaystyle\sum_{n=0}^{\ell} p_n x^n \leqslant P(x)$. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_n p_n z^n$.

20) Soit $z \in D$. En examinant la différence $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n$, démontrer que

$$P(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n.$$

21) Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que pour tout réel $t > 0$,

$$p_n = \frac{\mathrm{e}^{nt} P(\mathrm{e}^{-t})}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-in\theta} \frac{P(\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{i\theta})}{P(\mathrm{e}^{-t})}\, \mathrm{d}\theta. \tag{1}$$

D. Contrôle de P

22) Soit $x \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbf{R}$. En utilisant la fonction L, montrer que

$$\left|\frac{1-x}{1-x\mathrm{e}^{i\theta}}\right| \leqslant \exp\left(-(1-\cos\theta)x\right).$$

En déduire que pour tout $x \in [0,1[$ et tout réel θ,

$$\left|\frac{P(x\mathrm{e}^{i\theta})}{P(x)}\right| \leqslant \exp\left(-\frac{1}{1-x} + \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-x\mathrm{e}^{i\theta}}\right)\right).$$

23) Soit $x \in [0,1[$ et θ un réel. Montrer que

$$\frac{1}{1-x} - \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-x\mathrm{e}^{i\theta}}\right) \geqslant \frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)\left((1-x)^2 + 2x(1-\cos\theta)\right)}.$$

En déduire que si $x \geqslant \frac{1}{2}$ alors

$$\left|\frac{P(x\mathrm{e}^{i\theta})}{P(x)}\right| \leqslant \exp\left(-\frac{1-\cos\theta}{6(1-x)^3}\right) \quad \text{ou} \quad \left|\frac{P(x\mathrm{e}^{i\theta})}{P(x)}\right| \leqslant \exp\left(-\frac{1}{3(1-x)}\right).$$

Pour ce dernier résultat, on distinguera deux cas selon les valeurs relatives de $x(1-\cos\theta)$ et $(1-x)^2$.

24) Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall \theta \in [-\pi, \pi],\ 1 - \cos\theta \geqslant \alpha\theta^2.$$

En déduire qu'il existe trois réels $t_0 > 0$, $\beta > 0$ et $\gamma > 0$ tels que, pour tout $t \in [0, t_0]$ et tout $\theta \in [-\pi, \pi]$,

$$\left|\frac{P(\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{i\theta})}{P(\mathrm{e}^{-t})}\right| \leqslant \mathrm{e}^{-\beta(t^{-3/2}\theta)^2} \quad \text{ou} \quad \left|\frac{P(\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{i\theta})}{P(\mathrm{e}^{-t})}\right| \leqslant \mathrm{e}^{-\gamma(t^{-3/2}|\theta|)^{2/3}}.$$

25) En déduire que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-i\frac{\pi^2\theta}{6t^2}} \frac{P(\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{i\theta})}{P(\mathrm{e}^{-t})}\,\mathrm{d}\theta = O(t^{3/2}) \quad \text{quand } t \text{ tend vers } 0^+.$$

E. Conclusion

26) En prenant $t = \frac{\pi}{\sqrt{6n}}$ dans (1), conclure que

$$p_n = O\left(\frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}{n}\right) \quad \text{quand } n \text{ tend vers } +\infty.$$

Épilogue. Le dernier résultat est très proche de l'optimalité. Par une analyse plus fine de l'intégrale dans la formule (1), on peut en effet établir l'équivalent

$$p_n \sim \frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}{4\sqrt{3}n} \quad \text{quand } n \to +\infty,$$

formule découverte par Hardy et Ramanujan en 1918.

— FIN —