Exo 1 $\Rightarrow$: non, il s'agit d'un inf

Soit $x \in E$

1. $d(x) = 0 \;\cancel{\Leftrightarrow}\; \exists f \in F,\ \|x - f\| = 0$) séparation de la norme

$\Leftrightarrow \exists f \in F,\ x - f = 0$ $\Rightarrow$: par contraposée

$\Leftrightarrow \exists f \in F,\ x = f.$ si $x \notin F$, $x \in F^c$ qui est ouvert, donc il existe $r > 0$ tq. $B(x,r) \subset F^c$. Dc $\forall f \in F,\ \|x - f\| \geq r > 0$ donc $d(x,F) > 0$.

~~Donc, si $d(x) = 0$, $x \in F$.~~

$\boxed{\text{Ainsi, } d(x) = 0 \text{ ssi } x \in F}$

2. ~~$d(x) = \inf_{f \in F} \|x - F\|$~~

~~F est non vide, donc il existe au moins un $f' \in F$ tel que~~

~~$d(x) = \inf_{f \in F} \|x - f\| = \|x - f'\|$~~

~~Donc $\Gamma(x)$ est non vide~~

⚠ il faut choisir f tq. $\|y - f\| = d(y)$ sinon la manip d'inégalités est fausse

3. Soit $(x, y) \in E^2$ et $f \in F$.

On a : TT inversée

$\|x - y\| = \|x - f - y + f\| \geq \|x - f\| - \|y - f\|$; $\|x - f\| \geq \inf_{f \in F} \|x - f\|$

$\geq d(x) - d(y)$

Aussi :

$\|x - y\| = \|y - f - x + f\| \geq \|y - f\| - \|x - f\|$

$\geq d(y) - d(x).$

Donc : $|d(x) - d(y)| \leq \|x - y\|$

Donc $\boxed{d \text{ est } 1\text{-Lipschitzienne}}$

4. Soit $(f, f') \in F^2$ tel que $f \neq f'$

On a, avec l'identité du parallélogramme :

$\left\|\frac{1}{2}(f + f') - x\right\|^2 = \left\|\frac{f - x}{2} + \frac{f' - x}{2}\right\|^2$

2) Par prop. de l'inf, il existe $(f_n) \in F^{\mathbb{N}}$ tq. $\|x - f_n\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} d(x, F)$.

APCR, $\|x - f_n\| \leq d(x, F) + 1$

donc $\|f_n\| \leq d(x, F) + 1 + \|x\|$.

(f_n) est bornée donc on peut en extraire une sous-suite convergente : $f_{\varphi(n)} \to f$

Par continuité de la norme : $\|x - f_{\varphi(n)}\|$

$\longrightarrow \|x - f\|$

$= d(x, F)$

De plus F est fermé donc $f \in F$.

$$= \frac{1}{2}\left(\left\|\frac{f-x}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{f'-x}{2}\right\|^2\right) - \left\|\frac{f-x}{2} - \frac{f'-x}{2}\right\|^2$$

$f \neq f'$, donc $\|f-f'\| > 0$

$$= \frac{2}{4}\left(\|f-x\|^2 + \|f'-x\|^2\right) - \frac{1}{4}\|f-f'\|^2$$

$$< \frac{1}{2}\left(d(x)^2 + d(x)^2\right)$$

$$< d(x)^2.$$

PARENTHÈSES !!

Finalement,

$$\boxed{\forall (f,f') \in \Gamma(x)^2, f \neq f' \Rightarrow \left\|\frac{1}{2}(f+f') - x\right\|^2 < d(x)^2.}$$

5. Soit $(f, f') \in \Gamma(x)^2$

Supposons par l'absurde que $f \neq f'$.

Alors : $\left\|\frac{1}{2}(f+f') - x\right\|^2 < d(x)^2$.

Or, F est convexe, donc $\frac{1}{2}f + \frac{1}{2}f' \in F$.

Donc, ~~$\exists f^*$~~ donc : $\exists f^* \in F$ tel que

$\|f^* - x\|^2 < \inf_{f \in F} \|f - x\|$

absurde, donc $f = f'$

$\boxed{\text{Donc } \Gamma(x) \text{ est réduit à 1 seul élément}}$.

6. Soit $y \in F$

F est convexe, donc : $\forall t \in [0;1]$, $(1-t)p(x) + ty \in F$.

Posons $\forall t \in [0;1]$: $\varphi(t) = \|x - ((1-t)p(x) + ty)\|$

il faut justifier que $\varphi \in \mathcal{C}^1$.

$\varphi(0) = \|x - p(x)\|$ est un minimum ($\|x - p(x)\| = \inf_{f \in F} \|x - f\|$).

On a : $\varphi(t) = \|x\|^2 - 2t\langle x - p(x) ; y - p(x)\rangle + t^2\|y\|^2$

donc : $\varphi'(t) = -2\langle x - p(x) ; y - p(x)\rangle + 2t\|y\|^2$

0 est un minimum, donc : $\varphi'(0^+) \geq 0$.

Donc nécessairement $\langle x - p(x) ; y - p(x)\rangle \leq 0$

Finalement, $\boxed{\forall y \in F, \langle x - p(x) ; y - p(x)\rangle \leq 0}$.