Feuille d'exercice n° 04 : **Espaces vectoriels normés**

I. Normes et distances

Exercice 1 Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ telles que $f(0)=0$.

1) On pose pour tout $f \in E$, $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Montrer que N est une norme sur E.

2) Montrer que, si $f \in E$ alors, pour tout $x \in [0,1]$: $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\int_0^x \mathrm{e}^{\,t}(f(t)+f'(t))\,\mathrm{d}t$.

3) On pose, pour tout $f \in E$, $N'(f) = \|f+f'\|_\infty$. Montrer que N' est une norme sur E, équivalente à N.

Exercice 2 Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$, muni de la norme N_∞ :

$$N_\infty(f) = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|\ .$$

Soit $g \in E$. Pour toute fonction f de E, on pose $N_g(f) = N_\infty(fg)$.

1) Donner une condition nécessaire et suffisante sur la fonction g pour que N_g soit une norme sur E.

2) Dans ce cas, à quelle condition sur g les normes N_g et N_∞ sont-elles équivalentes ?

Exercice 3 Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on note : $N(x,y) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \dfrac{|x+ty|}{1+t^2}$.

1) Montrer que l'application $(x,y)\mapsto N(x,y)$ est une norme de $\mathbb{R}^2$.

2) On cherche à comparer cette norme à la norme euclidienne. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

(i) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, majorer $N(x,y)$ à l'aide de $\|(x,y)\|$.

(ii) Montrer que $N(x,y) \geqslant \max\left(\dfrac{|x+y|}{2}, \dfrac{|x-y|}{2}\right)$, et en déduire une minoration de $N(x,y)$ à l'aide de $\|(x,y)\|$.

(iii) Calculer $N(x,y)$ pour $(x,y)=(0,1)$ et $(x,y)=(1,0)$.

(iv) Conclure.

Exercice 4 Pour une suite $L=(\ell_k)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on associe à un polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$ écrit sous forme développée-réduite $P=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ la valeur

$$N_L(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k\ell_k|.$$

1) Donner une CNS sur L pour que N_L soit une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

2) Soit $L, M \in (\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}}$. Donner une CNS sur (L,M) pour que N_L et N_M soient équivalentes.

Exercice 5 Soit $E=\mathbb{R}[X]$.

1) Montrer que l'on définit deux normes sur E, en posant pour $P = \sum_{i=0}^{p} a_i X^i$:

$$\|P\| = \int_0^1 |P(t)|\mathrm{d}t \qquad \|P\|_1 = \sum_{i=0}^{p} |a_i|$$

2) Montrer qu'il existe $\alpha>0$ tel que $\forall\, P\in\mathbb{R}[X]$, $\|P\| \leqslant \alpha\,\|P\|_1$.

3) Existe-t-il $\beta>0$ tel que $\forall\, P\in\mathbb{R}[X]$, $\|P\|_1 \leqslant \beta\,\|P\|$?

Exercice 6 Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. Pour $f \in E$, on note :

$$N(f)=|f(0)|+\int_0^1\left|f'(t)\right| \mathrm{d}t \text{ et } \|f\|_{\infty}=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|.$$

1) Montrer que N est une norme sur E.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, on pose :

$$f_n(x)=\frac{1}{n}\sin(\pi n x).$$

a) Calculer $\|f_n\|_{\infty}$ et $N(f_n)$.

b) Vérifier que la suite $(f_n)_n$ converge vers 0 pour la norme $\|.\|_{\infty}$ et ne converge pas vers 0 pour la norme N.

3) Montrer qu'il n'existe pas de constante C telle que :

$$\forall f \in E,\ N(f) \leqslant C\|f\|_{\infty}.$$

4) Montrer que :

$$\forall f \in E,\ \|f\|_{\infty} \leqslant N(f).$$

Exercice 7 On note L le $\mathbb{R}$-e.v. des applications lipschitziennes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, et $E_1=\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.

1) Montrer que $\|.\|$: $L \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\|f\|=|f(0)|+\sup_{\substack{x,y\in[0,1]\\ x\neq y}}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}$$

est une norme sur L, et qu'elle n'est pas équivalente à $\|.\|_{\infty}$.

2) Montrer que N_1 : $E_1 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$N_1(f)=|f(0)|+\sup_{t\in[0,1]}\left|f'(t)\right|$$

est une norme sur E_1, et qu'elle coïncide avec $\|.\|$.

Exercice 8 Soit E un espace normé, x et x' dans E, r et r' dans $\mathbf{R}^+, B$ (resp. B') la boule fermée de centre x et de rayon r (resp. de centre x' et de rayon r'). Caractériser à l'aide de x, x', r, r' l'inclusion $B \subset B'$.

II. Convexité

Exercice 9 Soit C_1, C_2 deux parties convexes d'un espace vectoriel réel E et soit $s \in [0,1]$. On pose $C = sC_1+(1-s)C_2 = \{sx+(1-s)y; x\in C_1, y \in C_2\}$. Démontrer que C est convexe.

Exercice 10 Soit C une partie convexe d'un ev E. Montrer :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall\,(z_1,\ldots,z_p)\in C^p,\ \forall\,(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)\in\mathbb{R}^{+p},$$
$$\lambda_1+\cdots+\lambda_p=1 \Longrightarrow \sum_{k=1}^{p}\lambda_k z_k \in C.$$

III. Suites à valeurs dans un espace vectoriel normé

Exercice 11 Soit $A, B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$. On suppose que : $(AB)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Montrer que : $(BA)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Exercice 12 Soit (A_n) une suite de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $A_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$

(ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n est inversible

(iii) $A_n^{-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$

1) Montrer que A est inversible et que $A^{-1}=B$.

2) Peut-on enlever la propriété (iii) ?

Exercice 13 On considère, dans $\mathbb{R}^3$, $(Z_n) = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ définie par :

$$Z_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \text{ et } \forall\, n \left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - \frac{1}{6}w_n + \frac{1}{2} \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{6}v_n - \frac{1}{3}w_n - \frac{2}{3} \\ w_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}v_n + \frac{1}{6}w_n - \frac{7}{6} \end{array} \right. .$$

1) Montrer que la suite (Z_n) vérifie une relation matricielle de la forme : $Z_{n+1} = AZ_n + B$.

2) Montrer $\exists k \in]0,1[$ t.q. $\forall\, X \in \mathbb{R}^3$, $\|AX\|_\infty \leqslant k\,\|X\|_\infty$.

3) Montrer que l'équation $X = AX + B$ admet une unique solution L dans $\mathbb{R}^3$.

4) En déduire une inégalité concernant $\|Z_n - L\|_\infty$, $\|Z_0 - L\|_\infty$, n et k. Conclure quant à la convergence de la suite (Z_n).

Exercice 14 Soit E un espace-vectoriel réel normé et (u_n) et (v_n) deux suites de vecteurs de E telles que :

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n sont colinéaires ;

(ii) il existe $u \in E$ tel que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} u$;

(iii) il existe $v \in E$ tel que $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} v$.

Montrer que u et v sont colinéaires.