IV. Espaces vectoriels normés

7 septembre 2024

Table des matières

Programme officiel

Espaces vectoriels normés

Cette section vise les objectifs suivants :

- *généraliser au cas des espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ certaines notions (convergence de suites, limite et continuité de fonctions) étudiées en première année dans le cadre de l'analyse réelle, indispensables pour aborder l'étude des suites de matrices, des fonctions à valeurs vectorielles et du calcul différentiel ;*
- *fournir un cadre topologique à la convergence des suites et séries de fonctions.*

Les notions seront illustrées par des exemples concrets et variés.
Il convient de souligner l'aspect géométrique des concepts topologiques à l'aide de nombreuses figures.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Normes	
Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe. Espace vectoriel normé. Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel.	Normes usuelles $\\| \ \\|_1$, $\\| \ \\|_2$ et $\\| \ \\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$. Norme $\\| \ \\|_\infty$ sur un espace de fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$. L'égalité $\sup(kA) = k\sup(A)$ pour A partie non vide de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}^+$ peut être directement utilisée.
Distance associée à une norme. Boule ouverte, boule fermée, sphère. Partie convexe. Partie bornée, suite bornée, fonction bornée.	 Convexité des boules.
b) Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé	
Convergence et divergence d'une suite.	Exemples dans des espaces de matrices, dans des espaces de fonctions.
Unicité de la limite. Opérations sur les limites. Une suite convergente est bornée. Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente.	
c) Comparaison des normes	
Normes équivalentes.	Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite. Utilisation de suites pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes. La comparaison effective de deux normes n'est pas un objectif du programme. On se limite en pratique à des exemples élémentaires.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E un $\mathbb{K}$-ev.
Si X et Y sont deux ensembles ; on rappelle la notation Y^X, qui désigne l'ensemble des fonctions de X dans Y. En particulier $Y^{\mathbb{N}}$ désigne l'ensemble des suites à valeurs dans Y (nous y reviendrons plus loin dans ce chapitre).

1 Espaces vectoriels normés

1.1 Définition de norme

Définition 1.1.1 (Norme)**.**
On appelle ***norme*** sur E toute application $N\ : E \to \mathbb{R}$ vérifiant :

1. $\forall\, x \in E,\ N(x) \geqslant 0$ [positivité] ;
2. $\forall\, x \in E,\ N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$ [séparation] ;
3. $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \forall\, x \in E,\ N(\lambda.x) = |\lambda| N(x)$ [homogénéité] ;
4. $\forall\, x, y \in E,\ N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$ [inégalité triangulaire].

On dit alors que le couple (E, N) est un espace normé.

Remarque 1.1.2.
- Les normes sont souvent notées $\|.\|$.
- Un vecteur de norme 1 est dit ***unitaire*** ou ***normé***.

Exemple 1.1.3.
- La valeur absolue sur $\mathbb{R}$ et le module sur $\mathbb{C}$ sont des normes.
- Les normes découlant d'un produit scalaire sont bien heureusement des normes. C'est donc le cas des normes euclidiennes usuelles sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, mais aussi de la norme sur les polynômes $\left\|\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} a_k^2}$.

Rappel 1.1.4.
- Les normes découlant d'un produit scalaire vérifient en plus l'***identité du parallélogramme*** :

$$\forall\, x, y \in E,\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\Big(\|x\|^2 + \|y\|^2\Big).$$

- Si $(E, \langle ., . \rangle)$ est un espace préhilbertien, l'***inégalité de Cauchy-Schwarz*** assure que

$$\forall\, x, y \in E,\ |\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\, \|y\|$$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Exercice 1.1.5.
Montrer que $N\ : P \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} |P(t)|\, \mathrm{d}t$ est une norme sur $\mathbb{K}[X]$.

Remarque 1.1.6.
Si (E, N) est un evn, l'inégalité triangulaire permet de montrer que pour tout $x, y \in E$ nous avons l'encadrement suivant :

$$|N(x) - N(y)| \leqslant N(x+y) \leqslant N(x) + N(y).$$

1.2 Normes sur $\mathbb{K}^n$ et certains ensembles de fonctions

Il existe sur $\mathbb{K}^n$ une famille de normes importantes :

Proposition 1.2.1.
Soit $x \in \mathbb{K}^n$ de coordoonées $(x_1, \ldots, x_n)$. Alors :

1. $\|.\|_1\ : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k|$,
2. $\|.\|_2\ : x \mapsto \sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$,
3. $\|.\|_\infty\ : x \mapsto \displaystyle\max_{k \in [\![1,n]\!]} |x_k|$

sont des normes de $\mathbb{K}^n$.

Remarque 1.2.2.
- Plus généralement, on peut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|.\|_n\ : x \mapsto \sqrt[n]{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k|^n}$ est une norme. Seuls les cas $n = 1$ et 2 sont au

programme. On peut également montrer que pour $x_1, \dots, x_k$ fixés, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^n} = \max_{k\in[\![1,n]\!]} |x_k|$, d'où la notation $\|.\|_\infty$.

- Attention, ce ne sont pas les seules normes sur $\mathbb{K}^n$, loin s'en faut ! Par exemple, sur $\mathbb{R}^2$, montrer que l'application définie par $\|(x,y)\| = \int_0^1 |x+ty|\mathrm{d}t$ est une norme.
- On s'aperçoit que ces normes peuvent être définies sur tout $\mathbb{K}$-ev de dimension n, en passant par les coordoonées dans une base $\mathscr{B}$ fixée. C'est par exemple le cas sur l'ensemble des matrices de taille $n \times p$.
- Bien que $\mathbb{K}[X]$ ne soit pas de dimension finie, il est tout de même possible d'y définir les normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$.

De même, si $[a,b]$ est un segment de $\mathbb{R}$, il existe une famille analogue de normes sur $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{K})$:

Proposition 1.2.3.
Les applications suivantes définies sur $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{K})$:

1. $\|.\|_1 : f \mapsto \int_a^b |f|$,
2. $\|.\|_2 : f \mapsto \sqrt{\int_a^b |f|^2}$,
3. $\|.\|_\infty : f \mapsto \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$

sont des normes.

Remarque 1.2.4.

De même on peut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|.\|_n : f \mapsto \sqrt[n]{\int_a^b |f|^n}$ est une norme. On peut également montrer que pour f fixée, $\lim_{n\to\infty} f \mapsto \sqrt[n]{\int_a^b |f|^n} = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$, d'où la notation $\|.\|_\infty$.
Là encore, il existe beaucoup d'autres normes.

La définition de la norme $\|.\|_\infty$, dite ***norme « infini »*** ou ***uniforme***, peut être étendue de la manière suivante :

Proposition 1.2.5.
Soit X un ensemble et A un sev de $(\mathbb{K}^X, +, .)$ constitué de fonctions bornées. Alors $\|.\|_\infty : f \mapsto \sup_{x\in X} ||f(x)|$ est une norme sur A.

Remarque 1.2.6.
Les suites étant des cas particuliers de fonctions, on peut donc définir cette norme uniforme sur l'ensemble des suites bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1.3 Comparaison de normes

Définition 1.3.1 (Normes équivalentes)**.**
Deux normes N_1 et N_2 sur E sont dites ***équivalentes*** si et seulement s'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que :

$$\forall x \in X, \quad \alpha N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta N_1(x).$$

Proposition 1.3.2 (Comparaison des normes usuelles)**.**
Dans $\mathbb{K}^n$, les normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sont deux à deux équivalentes.
Plus précisément, pour tout $x \in \mathbb{K}^n$,

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\,\|x\|_2 \leqslant n\,\|x\|_\infty.$$

Le théorème suivant est important, bien que sa démonstration soir hors-programme :

Théorème 1.3.3 (Équivalence des normes en dimension finie)**.**
Si E est de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes.

Cela implique qu'en pratique toutes les normes sur un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie ont les mêmes propriétés, on peut donc choisir une norme indifféremment.

Ce résultat est faux en dimension infinie.

Exercice 1.3.4.
Soit $E = \mathbb{K}[X]$, sur lequel on considère les deux normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = 1 + X + \ldots + X^n$.

1. En étudiant les limites quand $n \to +\infty$ de $\|P_n\|_1$, $\|P_n\|_2$ et $\|P_n\|_\infty$, montrer que $\|.\|_\infty$ n'est équivalente à aucune des deux autres normes.
2. En étudiant les limites quand $n \to +\infty$ de $\left\|\frac{1}{n}P_n\right\|_1$, $\left\|\frac{1}{n}P_n\right\|_2$ et $\|P_n\|_\infty$, montrer que $\|.\|_1$ n'est pas équivalente à $\|.\|_2$.

Remarque 1.3.5.
Il faut savoir utiliser des suites comme dans l'exercice précédent pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes.

1.4 Distance associée à une norme

Définition 1.4.1 (Distance)**.**
Soit X un ensemble. On appelle ***distance*** sur X toute application $\mathrm{d} : X^2 \to \mathbb{R}$ telle que

1. $\forall\, x, y \in X,\ \mathrm{d}(x, y) \geqslant 0$ [positivité] ;
2. $\forall\, x, y \in X,\ \mathrm{d}(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ [séparation] ;
3. $\forall\, x, y \in X,\ \mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, x)$ [symétrie] ;
4. $\forall\, x, y, z \in X,\ \mathrm{d}(x, z) \leqslant \mathrm{d}(x, y) + d(y, z)$ [inégalité triangulaire] ;
5. $\forall\, x, y, z \in X,\ \mathrm{d}(x + z, y + z) = \mathrm{d}(x, y)$ [invariance par translation].

Proposition 1.4.2 (Distance découlant d'une norme)**.**
Soit (E, N) un evn. L'application

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{d} : & E^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & N(x - y) \end{array}$$

est une distance, appelée ***distance associée à la norme*** N.

Remarque 1.4.3.
Toutes les distances ne découlent pas d'une norme.

2 Topologie élémentaire

2.1 Boules ouvertes et fermées, sphères

Définition 2.1.1 (Boules et sphères)**.**
Soit $(E, \|.\|)$ un evn, soit $a \in E$ et $r_i n \mathbb{R}_+$.

(i) On appelle ***boule ouverte de centre*** a ***et de rayon*** r l'ensemble $\mathscr{B}(a, r) = \{x \in E,\ \|x - a\| < r\}$;

(ii) On appelle ***boule fermée de centre*** a ***et de rayon*** r l'ensemble $\bar{\mathscr{B}}(a, r) = \{x \in E,\ \|x - a\| \leqslant r\}$;

(iii) On appelle ***sphère de centre*** a ***et de rayon*** r l'ensemble $\mathscr{S}(a, r) = \{x \in E,\ \|x - a\| = r\}$. On remarque que $\mathscr{S}(a, r = \bar{\mathscr{B}}(a, r) \backslash \mathscr{B}(a, r)$.

Exemple 2.1.2.

- Dans $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue, $\mathscr{B}(a, r) =]a - r, a + r[$, $\bar{\mathscr{B}}(a, r) = [a - r, a + r]$ et $\mathscr{S}(a, r) = \{a - r, a + r\}$.

- Dans $\mathbb{C}$ muni du module, $\bar{\mathscr{B}}(a,r)$ est le disque fermé (bord inclus) de centre a et de rayon r. Son bord est la sphère $\mathscr{S}(a,r)$. Privée de ce bord, il reste la boule ouverte $\mathscr{B}(a,r)$.

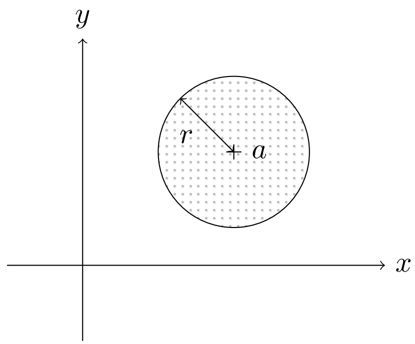

FIGURE 1 – La boule fermée de centre a et de rayon r

Exercice 2.1.3.
Déterminer la boule unité (c'est-à-dire la boule de centre 0 et de rayon 1) de $\mathbb{R}^2$ pour la norme $\|.\|_1$, pour la norme $\|.\|_2$ et pour la norme $\|.\|_\infty$.

Remarque 2.1.4.

- Une boule fermée ou un sphère n'est jamais vide : si elle est de rayon nul, c'est un singleton.
- Une boule ouverte n'est vide que si son rayon est nul.

2.2 Parties bornées

Définition 2.2.1 (Partie bornée)**.**
Soit $(E, \|.\|)$ un evn. On dit qu'une partie A de E est ***bornée*** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall a \in A,\ \|a\| \leqslant M.$$

Une fonction à valeurs dans un E est ***bornée*** si son image l'est.
Plus précisément, une fonction $f\ : X \to E$ où X est un ensemble, est bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in X,\ \|f(x)\| \leqslant M.$$

Exercice 2.2.2.
Soit X un ensemble et (E, N) un evn. On note $\mathscr{B}(X, E)$ l'ensemble des fonctions bornées de X dans E. Montrer que c'est un sev de $(E^X, +, .)$.

Proposition 2.2.3 (Caractérisation de la bornitude par des boules)**.**
Une partie A de E est bornée si et seulement s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $A \subset \bar{\mathscr{B}}(0, M)$, si et seulement s'il existe $M' \in \mathbb{R}_+$ tel que $A \subset \mathscr{B}(0, M')$.

Proposition 2.2.4.
1. Les boules et sphères sont toutes bornées ;
2. Une partie d'une partie bornée est encore bornée ;
3. Un espace vectoriel n'est borné que s'il est réduit à $\{0\}$;
4. Une union finie de parties bornées est encore bornée.

Remarque 2.2.5.
La propriété « être bornée » dépend de la norme choisie sur E. Une partie peut être bornée pour une norme mais pas pour une autre.
Par exemple, considérons $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, et pour chaque $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n\ : t \mapsto (n+1)t^n$. Soit $A = \{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. La partie A est-elle bornée pour la norme $\|.\|_1$? Et pour la norme $\|.\|_\infty$?

Proposition 2.2.6 (Invariance de la bornitude pour des normes équivalentes)**.**

Remarque 2.2.7.
En dimension finie, une partie est donc bornée pour toutes les normes, ou pour aucune.

Exercice 2.2.8.
Soit (E, N) un evn et d la norme associée à N.
On appelle diamètre d'une partie non vide et bornée A de E le réel

$$\sup\left\{d(x,y),(x,y)\in A^2\right\}.$$

1. Justifier ce diamètre est bien défini.
2. Déterminer le diamètre d'une boule ou sphère non vide de rayon r.

2.3 Parties convexes

Commençons par définir ce qu'est un segment d'un evn (E, N) :

Définition 2.3.1 (Segment)**.**
Soit $M, N \in E$. On appelle ***segment*** $[M, N]$ l'ensemble $\{tM + (1-t)N,\ t \in [0,1]\}$.

Remarque 2.3.2.
- Faites un dessin avec quelques valeurs de t pour visualiser cet ensemble ;
- Il s'agit de l'ensemble des barycentres de M et N à poids positifs ;
- Dans $\mathbb{R}$, les convexes sont exactement les intervalles.

Nous pouvons alors définir ce qu'est une partie convexe de E :

Définition 2.3.3 (Partie convexe)**.**
Une partie A de E est dite ***convexe*** si pour tout $M, N \in E$, $[M, N] \subset A$.

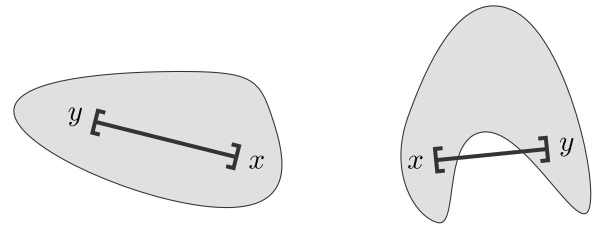

FIGURE 2 – Une partie convexe et une partie non convexe

Exemple 2.3.4.
- E et $\varnothing$ sont convexes ;
- Tout sev de E est convexe.

Proposition 2.3.5.
Les boules ouvertes et fermées d'un evn sont des convexes.

Exercice 2.3.6.
Les sphères sont-elles convexes ?

3 Suites d'un espace vectoriel normé

Rappel 3.0.1.
- Une ***suite à valeurs dans un ensemble*** Y est un fonction u de $\mathbb{N}$ dans Y : $u : n \mapsto u_n$.
  L'ensemble des suites à valeurs dans Y est donc noté $Y^{\mathbb{N}}$.

- Une suite (u_n) à valeurs dans un evn $(E, \|.\|)$ est donc bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \|u_n\| \leqslant M.$$

Remarque 3.0.2.
On notera $\ell^\infty(E)$ l'ensemble des suites bornées à valeurs dans E.

3.1 Convergence

Définition 3.1.1 (Convergence d'une suite à valeurs dans un evn)**.**
Soit un evn $(E, \|.\|)$ et $\ell \in E$.
On dit qu'une suite (u_n) à valeurs dans E ***converge vers*** ℓ, ou qu'elle ***admet*** ℓ ***pour limite***, si

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},$$
$$(n \geqslant n_0 \Rightarrow \|u_n - \ell\| < \varepsilon).$$

Dans ce cas on note $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, et on dit que (u_n) est ***convergente***.
Si (u_n) n'admet aucune limite, on dit qu'elle ***diverge***, ou qu'elle est ***divergente***.

Remarque 3.1.2.

- On appelle ***nature*** d'une suite sa convergence ou sa divergence.
- Dans un evn autre que $\mathbb{R}$, la notion de limite infinie n'a pas de sens. Les suites divergentes sont donc exactement les suites sans limite (ce n'est pas le cas dans $\mathbb{R}$!).
- La notion de convergence dépend de la norme choisie : une suite peut être convergente pour une norme, mais divergente pour une autre. Si deux normes équivalentes, une suite à la même nature vis-à-vis de ces deux normes. Ainsi en dimension finie, la nature d'une suite est intrinsèque et ne dépend pas de la norme utilisée.
Afin d'éviter toute ambiguïté, on pourra remplacer $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ par l'écriture plus précise $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|} \ell$.

Exercice 3.1.3. 1. Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $f_n\ : t \mapsto t^n$. Montrer que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_1} 0$ mais $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\|\cdot\|_\infty}{\not\longrightarrow}} 0$. Et pour $\|.\|_2$?

2. Montrer que la suite de $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ définie par $M_n = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{n}} & \frac{1}{n} \\ e^{-n} & n\sin\frac{1}{n} \end{pmatrix}$ tend vers la matrice nulle. On pourra réfléchir à la norme utilisée pour le montrer.

Deux résultats fondamentaux sur les suites réelles sont toujours valables :

Proposition 3.1.4 (Unicité de la limite)**.**
Si une suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est convergente, alors cette limite est unique.

Remarque 3.1.5.
Cette dernière proposition justifie la notation $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$. Cette notation est toutefois problématique car il n'est pas permis de l'utiliser tant que la convergence de (u_n) n'a pas été prouvée. L'utilisation de cette notation est à l'origine de fréquentes erreurs de rédaction. Elle est de plus tout à fait dispensable et je vous conseille fortement de l'éviter, et de favoriser l'écriture $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Proposition 3.1.6.
Toute suite convergente est bornée.

la réciproque est fausse, trouver un contre-exemple.

Proposition 3.1.7.
Avec les notations précédentes, les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$;

(ii) $\|u_n - \ell\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (il s'agit de la limite d'une suite réelle) ;

(iii) pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, APCR (à partir d'un certain rang) $u_n \in \mathscr{B}(\ell, \varepsilon)$.

Un dernier résultat concernant les opérations sur les limites de suites :

Proposition 3.1.8 (Opérations sur les suites convergentes)**.**
Soit (E, N) un evn et $u, v \in E^{\mathbb{N}}$.

1. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1$, $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $u_n + \lambda v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1 + \lambda \ell_2$.
2. L'ensemble des suites convergentes à valeurs dans E est un sev de $E^{\mathbb{N}}$.
3. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors $\|u_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|\ell\|$.

Remarque 3.1.9.
Il n'y a en général aucun produit défini sur un evn. Les opérations sur les limites ne concernent donc que la somme et le produit par un scalaire.

3.2 Suites extraites

Rappel 3.2.1 (Extractrice)**.**
On appelle ***extractrice*** toute fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissante.

Définition 3.2.2 (Suite extraite)**.**
Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. On appelle ***suite extraite*** ou ***sous-suite*** de (u_n) toute suite de la forme $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ où φ est une extractrice.

Exercice 3.2.3.
Si $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ est une sous-suite de (u_n), une sous-suite de $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ est-elle de la forme $\left(u_{\varphi\circ\psi(n)}\right)$ ou de la forme $\left(u_{\psi\circ\varphi(n)}\right)$?

Théorème 3.2.4 (Sous-suites d'une suite convergnete)**.**
Si une suite admet une limite, alors toutes ses sous-suites convergent également vers cette limite.

La réciproque est fausse, trouver un contre-exemple.

Proposition 3.2.5.
Si $u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

ce résultat est en général faux si l'on considère d'autres sous-suites. Tout autre critère étendant cette proposition est hors-programme.

Exercice 3.2.6.
Soit B une matrice antisymétrique, telle que la suite des puissances $(B^n)_n$ converge vers une matrice C. Montrer que $C = 0$.

3.3 Convergence d'une suite en dimension finie

Soit $(E, \|.\|)$ un evn de dimension finie. Fixons une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$, de cardinal p. Alors tout vecteur de E possède un p-uplet de coordonnées dans cette base.

Définition 3.3.1 (Suites coordonnées)**.**
Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $(u_{n,1}, \ldots, u_{n,p})$ les coordonnées de u_n dans $\mathscr{B}$.
Les p suites $(u_{n,1})_{n\in\mathbb{N}}$, ..., $(u_{n,p})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites réelles appelées ***suites coordonnées*** de la suite (u_n).

Proposition 3.3.2 (Caractérisation de la convergence par les suites coordonnées)**.**
Soit $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_p)$. Alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ si et seulement si pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $u_{n,k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_k$.

Exemple 3.3.3.
Reprendre **3.1.3.2**.

4 Exercices classiques

4.1 Produit d'espaces vectoriels normés

Soit $E_1, \ldots, E_p$ des $\mathbb{K}$-ev, munis respectivement des normes $N_1, \ldots, N_p$. On considère l'espace vectoriel produit $E = E_1 \times \ldots \times E_p$. Sur E, on pose l'application

$$N : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_p) & \mapsto & \max\limits_{1\leqslant k\leqslant p} N_k(x_k) \end{array}.$$

Montrer que N est une norme sur E.
(E, N) est appelé *espace vectoriel normé produit* des $(E_k, N_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$.

4.2 Comparaison de deux normes

Sur $\mathbb{R}[X]$, on définit N_1 et N_2 par :

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left|P^{(k)}(0)\right| \text{ et } N_2(P) = \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)|$$

1. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
2. On considère la suite de terme général $P_n = \dfrac{1}{n}X^n$. Est-elle bornée pour la norme N_1 ? pour la norme N_2 ?
3. Les deux normes sont-elles équivalentes ?

4.3 Opérations sur les convexes

Une réunion finie de convexes est-elle convexe ? Et une intersection ? Et pour des réunions et intersections quelconques ?

4.4 Limite d'une suite de matrices

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que (A^k) converge vers une matrice P.
Montrer que P est une matrice de projection.

4.5 Norme d'algèbre sur les matrices et convergence d'une suite

Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

1. Montrer que $(A, B) \mapsto \operatorname{tr}(A^\top B)$ est un produit scalaire sur E.
2. Montrer que la norme associée à ce produit scalaire est en fait la norme $\|.\|_2$ de E muni de la base canonique. On l'appelle aussi *norme de Frobenius*.
3. Montrer que pour tout $A, B \in E$, $\|AB\|_2 \leqslant \|A\|_2 \|B\|_2$.
4. Soit (A_n) une suite de matrices telle que $\|A\|_2 < 1$. Montrer que $A^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.