Feuille d'exercice n° 13 : **Variables aléatoires discrètes**

I. Variables aléatoires et lois usuelles

Exercice 1 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes à valeurs dans un ensemble E et N une variable aléatoire à valeurs naturelles toutes définies sur un même espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$. On définit une fonction Y par

$$\forall\, \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = X_{N(\omega)}(\omega).$$

Justifier que Y est une variable aléatoire discrète.

Exercice 2 Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que $P(T \geqslant n) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et l'on pose

$$\theta_n = P_{(T\geqslant n)}(T = n)$$

1) Justifier que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\theta_n \in [0, 1[$.

2) Exprimer la probabilité $P(T \geqslant n)$ en fonction des termes de la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
En déduire la divergence de la série $\sum \theta_n$.

3) Inversement, soit $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \theta_n \in [0, 1[\quad \text{et} \quad \sum \theta_n \text{ diverge.}$$

Montrer qu'il existe une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle $P(T \geqslant n) > 0$ et $P_{(T\geqslant n)}(T = n) = \theta_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ P(X \geqslant n) > 0$$

On définit le taux de panne de X par la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ avec

$$x_n = P_{(X\geqslant n)}(X = n).$$

1) Montrer que si l'on pose $P(Y = n) = \frac{1}{n(n+1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit une loi de probabilité. Déterminer le taux de panne de Y.

2) Dans le cas général, établir

$$\forall\, n \geqslant 2,\ P(X \geqslant n) = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - x_k)$$

3) En déduire une expression de $P(X = n)$ en fonction des x_k valable pour tout $n \geqslant 1$.

4) Déterminer les variables aléatoires discrètes à taux de panne constant.

Exercice 4 Une urne contient $n \geqslant 2$ boules numérotées de 1 à n. Avec remise, on tire les boules de cette urne une à une et l'on note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour tirer une boule différente de la première.

Calculer la loi de X puis identifier la loi de $Y = X - 1$.

Exercice 5

Soient $\lambda > 0$ et $p \in]0, 1[$. On modélise le nombre d'œufs pondus par un poisson par une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$. On modélise l'éclosion d'un œuf indépendamment des autres par une loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$. Déterminer la loi du nombre d'œufs éclos.

Exercice 6 Soit X une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1) Pour quelle valeur de $n \in \mathbb{N}$, la probabilité de l'évènement $(X = n)$ est-elle maximale ?

2) Inversement, n étant fixé, pour quelle valeur du paramètre λ, la probabilité de $(X = n)$ est-elle maximale ?

II. Lois conjointes et marginales

Exercice 7 **– Les urnes de Pólya**
On considère une urne contenant une boule noire et une boule blanche. On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne. A chaque tirage, on replace la boule obtenue accompagnée d'une boule de même couleur. Soit X_n le nombre de boules noires obtenues au cours des n premiers tirages.

1) Déterminer la loi de X_1 et X_2.

2) Montrer que X_n suit une loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$.

3) On note B_n l'événement « tirer une boule blanche au n-ème tirage ». Calculer la probabilité de B_{n+1} à l'aide de la loi de X_n. Que remarque-ton ?

On suppose désormais que l'urne contient initialement a boules noires et b boules blanches.

4) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Montrer que, pour tout k dans $[\![0, n]\!]$,

$$P\left(X_n = k\right) = \frac{\binom{a+k-1}{k}\binom{b+n-k-1}{n-k}}{\binom{a+b+n-1}{n}}$$

5) On note N_n l'événement « tirer une boule noire au n-ème tirage ». Montrer que

$$P\left(N_n\right) = \frac{a}{a+b}.$$

Exercice 8 Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $p \in]0, 1[$. On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie

$$\mathrm{P}(X = k, Y = n) = \begin{cases} \binom{n}{k} a^n p(1-p)^n & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}.$$

1) Déterminer la valeur de a.

2) Déterminer la loi marginale de Y.

3) Sachant

$$\forall\, x \in]-1, 1[, \ \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}.$$

Reconnaître la loi de X

4) Les variables X et Y sont elle indépendantes ?

III. Indépendance

Exercice 9 Déterminer la loi d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes, suivant chacune une loi géométrique de même paramètre $p \in]0, 1[$.

Exercice 10 Déterminer la loi d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes, suivant chacune une loi géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètres différents.

Exercice 11 Soient X une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ et f une application définie sur $X(\Omega)$. À quelle condition les variables aléatoires X et $Y = f(X)$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 12 Soient X, Y, Z des variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

1) Calculer $P(X = Y)$. En déduire $P(X \leqslant Y)$.

2) Calculer la loi de $X + Y$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(X + Y = n) \neq 0$. Identifier la loi de X sachant $(X + Y = n)$.

4) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $P(X > n)$ et en déduire $P(Z > X + Y)$.

Exercice 13 **– Loi de Pascal**
Soient $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant chacune une même loi géométrique de paramètre $p > 0$. Pour $r \in \mathbb{N}^*$, on étudie la variable aléatoire $S_r = X_1 + \cdots + X_r$.

1) En terme de temps d'attente, comment interpréter la loi de S_r ?

2) Vérifier $\forall\, n \geqslant r,\ \displaystyle\sum_{k=r}^{n} \binom{k-1}{r-1} = \binom{n}{r}$.

3) Établir $\forall\, n \geqslant r,\ P\left(S_r = n\right) = \binom{n-1}{r-1}(1-p)^{r-n}p^r$.

Exercice 14
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé. Soient X, Y deux variables aléatoires de $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ à valeurs dans $(\mathbb{N}^*, \mathscr{P}(\mathbb{N}^*))$, indépendantes, et telles que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $P(\mathrm{X} = i) = P(\mathrm{Y} = i) = \dfrac{1}{2^i}$.

1) Calculer $P(\mathrm{X} = \mathrm{Y})$.

2) Calculer $P(\mathrm{X} > \mathrm{Y})$.

3) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(\min(X, Y) \leqslant N)$.

Exercice 15 Soit X et Y deux v.a. indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p et q. Quelle est la probabilité que la matrice $A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable ?