

VII. Réduction des endomorphismes et des matrices

8 septembre 2024

Table des matières

1	Diagonalisation en dimension finie	3
2	Polynômes annulateurs	3
3	Trigonalisation en dimension finie	3

Programme officiel

c) Diagonalisation en dimension finie

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale.

Une matrice carrée est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Une telle base est constituée de vecteurs propres.

Interprétation en termes d'endomorphisme.

Application au calcul des puissances d'une matrice diagonalisable, à des exemples de systèmes différentiels à coefficients constants.

Dans la pratique des cas numériques, on se limite à $n = 2$ ou $n = 3$.

Exemple des projecteurs et des symétries.

Traduction matricielle.

Traduction matricielle.

Polynôme caractéristique scindé à racines simples.
Traduction matricielle.

d) Diagonalisabilité et polynômes annulateurs

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

La démonstration n'est pas exigible.

Traduction matricielle.

Le lemme de décomposition des noyaux est hors programme.

L'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace vectoriel stable est diagonalisable.

Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement s'il admet $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)$ pour polynôme annulateur.

e) Trigonalisation en dimension finie

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire.

Expression de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable à l'aide des valeurs propres.

Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.

Interprétation en termes d'endomorphisme.

La démonstration n'est pas exigible.

son polynôme caractéristique est scindé sur \mathbb{K} .

Traduction matricielle.

La technique générale de trigonalisation est hors programme. On se limite dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication.

- 1 Diagonalisation en dimension finie**
- 2 Polynômes annulateurs**
- 3 Trigonalisation en dimension finie**