Semaine 6 du 3 novembre 2025 (S45)

V Espaces vectoriels normés

Le chapitre V reste au programme :

1 Espaces vectoriels normés

1.1 Définition de norme

1.2 Normes sur $\mathbb{K}^n$ et certains ensembles de fonctions

1.3 Comparaison de normes

1.4 Distance associée à une norme

2 Topologie élémentaire

2.1 Boules ouvertes et fermées, sphères

2.2 Parties bornées

2.3 Parties convexes

3 Suites d'un espace vectoriel normé

3.1 Convergence

3.2 Suites extraites

3.3 Convergence d'une suite en dimension finie

4 Exercices à connaître

4.1 Produit d'espaces vectoriels normés

Soit $E_1, \dots, E_p$ des $\mathbb{K}$-ev, munis respectivement des normes $N_1, \dots, N_p$. On considère l'espace vectoriel produit $E = E_1 \times \dots \times E_p$. Sur E, on pose l'application

$$N : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_p) & \mapsto & \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant p} N_k(x_k) \end{array}.$$

Montrer que N est une norme sur E.
(E, N) est appelé *espace vectoriel normé produit* des $(E_k, N_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$.

4.2 Comparaison de deux normes

Sur $\mathbb{R}[X]$, on définit N_1 et N_2 par :

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left| P^{(k)}(0) \right| \text{ et } N_2(P) = \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)|$$

1) Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.

2) On considère la suite de terme général $P_n = \dfrac{1}{n} X^n$. Est-elle bornée pour la norme N_1 ? pour la norme N_2 ?

3) Les deux normes sont-elles équivalentes ?

4.5 Norme d'algèbre sur les matrices et convergence d'une suite

Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

1) Montrer que $(A, B) \mapsto \operatorname{tr}(A^\top B)$ est un produit scalaire sur E.

2) Montrer que la norme associée à ce produit scalaire est en fait la norme $\|.\|_2$ de E muni de la base canonique. On l'appelle aussi *norme de Frobenius.*

3) Montrer que pour tout $A, B \in E$, $\|AB\|_2 \leqslant \|A\|_2 \|B\|_2$.

4) Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|A\|_2 < 1$. Montrer que $A^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

S'y ajoute :

VI Valeurs propres et vecteurs propres

1 Élements propres d'un endomorphisme et d'une matrice

1.1 Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme

1.2 Sous-espaces propres d'un endomorphisme

1.3 Éléments propres d'un endomorphisme en dimension finie

1.4 Éléments propres d'une matrice

2 Lien avec les polynômes d'endomorphisme

2.1 Valeur propre et racines d'un polynôme annulateur

2.2 Polynôme caractéristique

2.3 Polynôme caractéristique et valeurs propres

2.4 Multiplicité et dimension des espaces propres

2.5 Théorème de Cayley-Hamilton

La démonstration est hors-programme.

3 Exercices à connaître

3.1 Le spectre « commute » et polynôme caractéristique d'une matrice diagonale par blocs

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que AB et BA ont le même spectre.

2) Soit $A_1, \dots, A_p$ des matrices carrées. Exprimer le polynôme caractéristique de $A = \operatorname{diag}(A_1, \dots, A_p)$ en fonction de ceux des A_i.

3.2 Détermination du spectre d'un endomorphisme de polynômes

Soit $E = \mathbb{K}[X]$ et $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ défini par $\varphi : P \mapsto XP'(X)$. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de φ.

3.3 Éléments propres d'une matrice

Donner les éléments propres de

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).$$

3.5 Matrice compagne

Pour $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$ polynôme unitaire, on définit la matrice compagne de P :

$$\mathscr{C}(P) = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Pour $n = 1$, P s'écrit $X + a_0$ et $\mathscr{C}(P) = \mathscr{C}(X + a_0) = (-a_0)$.

1) Montrer que P est le polynôme caractéristique de $\mathscr{C}(P)$.

2) On suppose dans cette question que P est scindé à racines simples, notées $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Montrer que :

$$\mathscr{C}(P)^\top = V \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) V^{-1}$$

où V désigne la matrice de Vandermonde de $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.