exo 8

1) $|z_n^n| = \left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} = e^{\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)}$

$\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2}\times\frac{a^2}{n^2} = \frac{a^2}{2n} \longrightarrow 0$

par continuité de exp en 0

$|z_n^n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

il faut d'abord justifier que $\arg(z_n)$ est dans]-pi/2,pi/2[.

$\arg(z_n) = n\arctan\left(\frac{\frac{a}{n}}{1}\right)$ → faux sans modulo

$= n.\arctan\left(\frac{a}{n}\right)$ préférer z_n^n=

$\underset{n\to+\infty}{\sim} n\times\frac{a}{n} = a$ e^(i n arctan(a/n))

-> e^(ia)

donc $\arg(z_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$

finalement $\boxed{z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{ia}}$

2) $\chi_{A_n} = \det(A_n - XI_d)$

$= \begin{vmatrix} 1-X & \frac{a}{n} \\ -\frac{a}{n} & 1-X \end{vmatrix}$

$= (1-X)^2 + \frac{a^2}{n^2}$

$= \left(X - i\frac{a}{n} - 1\right)\left(X + i\frac{a}{n} - 1\right)$

$Sp(A_n) = \left\{1+i\frac{a}{n}, 1-i\frac{a}{n}\right\}$ et en posant

$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & i \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -1 & -i \end{pmatrix}$, on a

$\boxed{A_n = P\begin{pmatrix} 1+i\frac{a}{n} & 0 \\ 0 & 1-i\frac{a}{n} \end{pmatrix}P^{-1}}$

3) $A_n^n = P \begin{pmatrix} 1+i\frac{a}{n} & 0 \\ 0 & 1-i\frac{a}{n} \end{pmatrix}^n P^{-1}$

$= P \begin{pmatrix} z_n^n & 0 \\ 0 & \bar{z}_n^n \end{pmatrix} P^{-1}$ donc

$\lim\limits_{n \to +\infty} A_n^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{ia} & 0 \\ 0 & e^{-ia} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -1 & -i \end{pmatrix}$

justifier avec la continuité du produit matriciel

$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{ia} & -e^{-ia} \\ ie^{ia} & ie^{-ia} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -1 & -i \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{ia}+e^{-ia} & -i(e^{ia}-e^{-ia}) \\ ie^{ia}-ie^{-ia} & -i(ie^{ia}+ie^{-ia}) \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{ia}+e^{-ia} & -i(e^{ia}-e^{ia}) \\ i(e^{ia}-e^{-ia}) & e^{ia}+e^{-ia} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} Re(e^{ia}) & Im(e^{ia}) \\ -Im(e^{ia}) & Re(e^{ia}) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \cos(a) & \sin(a) \\ -\sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}$

Finalement

$$\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} A_n^n = \begin{pmatrix} \cos(a) & \sin(a) \\ -\sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}}$$