Devoir à la maison n° 7

À rendre le 10 mars

Présentation Ce problème s'intéresse dans la **partie I** à des propriétés des matrices de rang 1. Certaines de ces matrices sont ensuite utilisées dans la **partie II** pour construire des matrices orthogonales permettant dans la **partie III** de prouver l'existence d'une factorisation QR pour une matrice carrée quelconque.

Notations

Pour tous n, $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on note $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des matrices réelles carrées de taille n est noté $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$: on note également A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui à X associe AX.
Pour tout $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, A^T désigne la matrice transposée de A.
Une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est dite nilpotente s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ tel que : $A^k = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})}$.
L'ensemble $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\| \cdot \|$. En identifiant $\mathrm{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$, on a pour tous $X, Y \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\langle X, Y \rangle = X^T Y, \quad \text{et :} \quad \|X\|^2 = \langle X, X \rangle.$$

On suppose dans tout ce problème que $n \in \mathbb{N}$ est un entier naturel vérifiant $n \geqslant 2$.

La partie I a été déjà été traitée dans les exercices à connaître, vous pouvez la passer, ou en profiter pour réviser.

Partie I – Matrices de rang 1

I.1 – Une expression des matrices de rang 1

1) Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. Montrer qu'il existe $X, Y \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$ tels que : $A = XY^T$.

2) Réciproquement, soient $X, Y \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$. Montrer que la matrice XY^T est de rang 1.

I.2 – Quelques propriétés

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

3) Montrer que $A^2 = \mathrm{tr}(A)A$.

4) En déduire, par récurrence sur k, une expression de A^k en fonction de A pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

5) Donner une condition nécessaire et suffisante sur la trace de A pour que A soit nilpotente.

6) Donner une condition nécessaire et suffisante sur la trace de A pour que A soit diagonalisable.

Partie II – Matrices de Householder

II.1 – Un exemple

On définit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}).$$

7) Calculer A^2. En déduire un polynôme annulateur de A.

8) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

9) Montrer que les sous-espaces propres de A sont orthogonaux.

10) Déterminer une matrice $P \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, telles que : $P^T AP = D$.

11) Interpréter géométriquement l'endomorphisme A de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

II.2 – Matrices de Householder

Soit $V \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$. On définit P_V, $Q_V \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$P_V = \frac{1}{\|V\|^2} VV^T, \qquad \text{et :} \qquad Q_V = \mathrm{I}_n - 2\frac{1}{\|V\|^2} VV^T. \tag{1}$$

12) Montrer que $\mathrm{im}(P_V) = \mathrm{Vect}(V)$ et que $\ker(P_V) = \mathrm{Vect}(V)^\perp$.

13) Montrer que P_V est la projection orthogonale sur la droite $\mathrm{Vect}(V)$.
Préciser le rang et la trace de la matrice P_V.

14) Montrer que Q_V est symétrique et orthogonale.

15) Montrer que Q_V est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}(V)^\perp$.

Partie III – Factorisation QR

III.1 – Un résultat préliminaire

Soient $U, V \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, tels que : $\|U\| = \|V\|$. On note : $D = \mathrm{Vect}(U - V)$.

16) Montrer que $D^\perp$ est l'ensemble des $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, tels que : $\|X - U\| = \|X - V\|$.

17) Donner la décomposition de U sur la somme directe $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = D \oplus D^\perp$.

18) On suppose U et V non colinéaires. Calculer $Q_{U-V}U$ où Q_{U-V} est définie en (1).

19) En déduire que pour tous $\tilde{U}$, $\tilde{V} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe une matrice orthogonale Q, telle que $Q\tilde{U}$ soit colinéaire à $\tilde{V}$.

III.2 – Factorisation QR

20) Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale Q_1, telle que $Q_1 A$ soit de la forme :

$$Q_1 A = \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } C_1 \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{R}).$$

21) En raisonnant par récurrence sur n, montrer que pour tout $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice Q orthogonale, telle que QA soit triangulaire supérieure.

— FIN —