Série de fonctions

I. La fonction ζ de Riemann

1) Par comparaison à des séries de Riemann, ζ converge simplement sur $]1,+\infty[$.

2) S'il y avait convergence uniforme en 1, alors $\sum \lim_{x\to 1} \frac{1}{n^x}$ convergerait, ce qui n'est pas le cas.

3) Posons $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$.
Les fonctions f_n sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{(-\ln n)^k}{n^x}.$$

Sur $[a,b] \subset]1,+\infty[$,

$$\forall s \in [a,b],\ \left|f_n^{(k)}(x)\right| \leqslant \frac{(\ln n)^k}{n^a}.$$

Soit $\rho \in]1,a[$, on a

$$n^\rho \times \frac{(\ln n)^k}{n^a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et il y a donc convergence de la série $\sum \frac{(\ln n)^k}{n^a}$.
Par majoration uniforme, la série de fonctions $\sum u_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a,b]$.
Par convergence uniforme sur tout segment de $]1,+\infty[$, on peut affirmer que ζ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et

$$\zeta^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln n)^p}{n^x}.$$

4) Monotonie :

$$\zeta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\ln n}{n^x} \leqslant 0$$

donc ζ est décroissante.
Convexité :

$$\zeta''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^x} \geqslant 0$$

donc ζ est convexe.

5) Limite en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n^x} = \begin{cases} 0 & \text{si } n > 1 \\ 1 & \text{si } n = 1 \end{cases}.$$

Pour appliquer le théorème de la double limite, observons la convergence uniforme au voisinage de $+\infty$.
Pour $x \geqslant 2$

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc $\sum u_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[2,+\infty[$. Par le théorème de la double limite

$$\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n^x} = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1.$$

6) La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est décroissante donc

$$\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x} \leqslant \int_{n-1}^n \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$$

On en déduit

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$$

i.e.

$$\frac{1}{x-1} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}.$$

Par suite

$$\zeta(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{x-1}.$$

II. Tableau de variation d'une série de fonctions

Introduisons les fonctions $f_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définies par

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}.$$

Elles sont toutes définies sur $\mathbb{R}_+^*$, mais pas plus pour la fonction f_0, donc S ne peut être définie en dehors de $\mathbb{R}_+^*$.
Soit $x > 0$. La série numérique $\sum f_n(x)$ converge en vertu du CSSA.

La série de fonctions $\sum f_n$ converge alors simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa somme S est donc bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
De plus f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}.$$

Soit $x > 0$. La série numérique $\sum f_n'(x)$ converge en vertu du CCSA.
On a

$$|R_n(t)| \leqslant \frac{1}{(n+1+x)^2} \leqslant \frac{1}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi la série de fonctions $\sum f_n'$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.
On peut alors affirmer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}$$

Par le CSSA, $S'(x)$ est du signe de son premier terme $\dfrac{(-1)^{0+1}}{x^2} \leqslant 0$.
La fonction S est donc décroissante.
Pour compléter le tableau de variation de S, exploitons le CSSA pour encadrer S par deux sommes partielles consécutives :

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \leqslant S(x) \leqslant \frac{1}{x}$$

On peut alors affirmer que $S \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $S \underset{0^+}{\longrightarrow} +\infty$.

III. Interversion somme/intégrale

Commençons par observer que

$$\begin{aligned}\frac{\sin t}{\mathrm{e}^t - 1} &= \sin t \times \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1 - \mathrm{e}\ -t} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sin t \times \mathrm{e}^{-nt}.\end{aligned}$$

De plus $t \mapsto \sin t \times \mathrm{e}^{-nt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ par comparaison à une série exponentielle, et

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} |\sin t|\mathrm{e}^{-nt}\ \mathrm{d}t &\leqslant \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-nt}\ \mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

et ce dernier terme est le terme général d'une série convergente, donc $t \mapsto \dfrac{\sin t}{\mathrm{e}^t - 1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
Enfin, nous pouvons utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque, et ainsi

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{e}^t - 1}\ \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin t . \mathrm{e}^{-nt}\ \mathrm{d}t.$$

$$\text{Or} \quad \begin{aligned}\int_0^{+\infty} \sin t . \mathrm{e}^{-nt}\ \mathrm{d}t &= \mathrm{Im} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-n+i)t}\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{n^2+1}.\end{aligned}$$

Finalement

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{e}^t - 1}\ \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

IV. Utilisation du théorème de convergence dominée

Commençons par remarquer que $\dfrac{\pi}{4} = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Par sommation géométrique on peut écrire $\dfrac{1}{1+t^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n}$ sur $[0, 1[$.

Par suite $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_{[0,1[} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ avec $f_n(t) = (-1)^n t^{2n}$ définie sur $[0, 1[$.

Ici $\sum f_n$ ne converge pas en 1 donc on ne peut pas utiliser **??**, et $\sum \displaystyle\int_{[0,1[} |f_n| = \sum \frac{1}{2n+1}$ diverge et on ne peut pas appliquer **??** non plus. Transitons alors par les sommes partielles.

On pose $S_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k}$.

On a $S_n \xrightarrow{CS} S$ sur $[0, 1[$, avec $S(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$.
Les fonctions S_n et S sont continues par morceaux, et

$$|S_n(t)| = \frac{\left|1 - (-1)^{n+1} t^{2n+2}\right|}{1+t^2} \leqslant \frac{2}{1+t^2} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable.

Par convergence dominée $\displaystyle\int_0^1 S_n(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 S(t)\mathrm{d}t$. Or

$$\begin{aligned}\int_0^1 S_n(t)\mathrm{d}t &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k}\ \mathrm{d}t\\ &= \sum_{k=0}^{n}\int_0^1 (-1)^k t^{2k}\ \mathrm{d}t\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\end{aligned}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$