Dupré Nicolas PSI*

Exercice 12 :

1/ On a : $A = \begin{pmatrix} 0 & -a & b \\ a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{pmatrix}$

donc $A^2 = \begin{pmatrix} -a^2-b^2 & bc & ac \\ bc & -a^2-c^2 & ab \\ ac & ab & -b^2-c^2 \end{pmatrix}$

donc $A^3 = \begin{pmatrix} -abc+bca & a(a^2+c^2)+ab^2 & -a^2b-b(b^2+c^2) \\ -a(a^2+b^2)-c^2a & abc-cab & a^2c+c(b^2+c^2) \\ b(a^2+b^2)+bc^2 & -b^2c-c(a^2+c^2) & -bac+cab \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & a(a^2+c^2+b^2) & -b(a^2+b^2+c^2) \\ -a(a^2+b^2+c^2) & 0 & c(a^2+b^2+c^2) \\ b(a^2+b^2+c^2) & -c(b^2+a^2+c^2) & 0 \end{pmatrix}$

$= -(a^2+b^2+c^2)\,A$

Ainsi $A^3 + (a^2+b^2+c^2)A = 0$

donc $\boxed{\text{il existe bien } d \text{ tel que } A^3 + dA = 0}$

2/ Selon 1/, $\boxed{d = a^2+b^2+c^2}$

On a : $A^3 = -dA$ donc $A^4 = -dA^2$

donc $A^5 = -dA^3$ donc $A^6 = d^2A^2$

donc $A^7 = d^2A^3$ donc $A^8 = -d^3A^2$

Ainsi on conjecture : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n)$: " $A^{2n} = (-d)^{n-1}A^2$ "

Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n)$

→ On a $(-d)^0 \times A^2 = A^2$ donc $P(0)$

→ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $P(n)$

On a : $A^{2(n+1)} = A^{2n} \times A^2$

$= (-d)^{n-1} A^2 \times A^2$ avec l'hypothèse de récurrence

$= (-d)^{n-1} \times A^3 \times A$

$= (-d)^{n-1} \times (-d) A \times A$

$= (-d)^n A^2$ donc $P(n+1)$

Ainsi par principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^{2n} = (-d)^{n-1} A^2}$

3/ On a si $d \neq 0$ donc $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = I_3 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

$$= I_3 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Il est interdit d'écrire
tout cela tant que tu n'as
pas prouvé la convergence
de ces séries !!

$$= I_3 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= I_3 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-d)^{k-1} A}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-d)^{k-1} A^2 \times A}{(2k+1)!}$$

$$= I_3 + A^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-d)^{k-1}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-d)^{k-1} \times A^3}{(2k+1)!}$$

$$= I_3 + A^2 \times \frac{(-1)}{d} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-d)^k}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-d)^k A}{(2k+1)!}$$

$$= I_3 + A^2 \left(\frac{(-1)}{d} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (\sqrt{d})^{2k}}{(2k)!} + \frac{1}{d} \right) + A \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (\sqrt{d})^{2k}}{(2k+1)!}$$

$$= I_3 + A \times \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (\sqrt{d})^{2k+1}}{(2k+1)!} + A^2 \times \left(\frac{(-1)}{d} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (\sqrt{d})^{2k}}{(2k)!} + \frac{1}{d} \right)$$

$$= I_3 + A \frac{\sin(\sqrt{d})}{\sqrt{d}} + A^2 \frac{1 - \cos(\sqrt{d})}{d}$$

donc $\boxed{\alpha = \frac{\sin(\sqrt{d})}{\sqrt{d}} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1-\cos(\sqrt{d})}{d} \quad \text{si } d \neq 0}$

Si $d=0$, alors comme $d = a^2+b^2+c^2$ et $a, b, c \in \mathbb{R}$
on a donc $a=b=c=0$ et $A = O_3$

donc $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = \frac{A^0}{0!} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = I_3 + 0$

et $I_3 = I_3 + \alpha O_3 + \beta O_3^2$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

donc $\boxed{\text{si } d=0,\ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = I_3 + \alpha A + \beta A^2 \text{ est vérifiée pour tout } \alpha, \beta \in \mathbb{C}}$