

Valeurs propres et vecteurs propres

I. Spectres de matrices qui commutent

Il suffit de montrer que si λ est valeur propre de AB , alors c'est aussi une valeur propre de BA .

Soit X non nul vérifiant $ABX = \lambda X$. Alors $BABX = \lambda BX$.

- Si $BX \neq 0$, λ est bien valeur propre de BA .
- Si $BX = 0$, alors X est dans le noyau de B , donc de AB , donc $\lambda = 0$.

Alors, AB n'est pas inversible, donc (déterminant) BA non plus. Donc $0 = \lambda$ est valeur propre de BA .

II. Détermination du spectre d'un endomorphisme de polynômes

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

$$\varphi(P) = \lambda P \Leftrightarrow XP'(X) = \lambda P(X).$$

- Analyse : Si cette équation possède une solution $P \neq 0$ alors en posant $n = \deg P$, on peut écrire $P = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$ avec $a_n \neq 0$. L'équation $XP'(X) = \lambda P(X)$ donne

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \lambda a_k = n a_k.$$

Sachant $a_n \neq 0$, on obtient $\lambda = n$ et $a_{n-1} = \dots = a_1 = a_0 = 0$. Ainsi

$$\lambda \in \mathbb{N} \text{ et } P = a_\lambda X^\lambda$$

- Synthèse : Soit $\lambda \in \mathbb{N}$. On remarque tout de suite que $\varphi(X^n) = nX^n$, donc λ est bien une valeur propre de φ .
- Conclusion : l'ensemble des valeurs propres de φ est \mathbb{N} .

III. Éléments propres d'une matrice

$\text{rg } J = 1$ donc $\dim \text{Ker } J = n - 1$. On remarque que $v_1 = (1, -1, 0, \dots, 0)$, $v_2 = (0, 1, -1, 0, \dots, 0)$, $v_{n-1} = (0, \dots, 0, 1, -1)$ sont dans le noyau de J , et ils forment une famille libre car échelonnée. Ainsi, par raison de cardinal, ils forment une base de $\text{Ker } J$.

Enfin, si $v_n = (1, \dots, 1)$, alors $Jv_n = nv_n$, donc c'est un vecteur propre de J pour la valeur propre 1. Ainsi $\dim E_n(J) \geq 1$. Mais les sous-espaces propres sont en somme directe et $\dim E_0(J) + \dim E_n(J) \geq n$. Donc nécessairement $\dim E_n(J) = 1$, et il ne peut y avoir d'autre valeur propre.

Finalement, J a deux valeurs propres : 0 et n . Et $E_0(J) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_{n-1})$, et $E_n(J) = \text{Vect } v_n$.

IV. Polynôme caractéristique d'une matrice diagonale par blocs

En notant m_1, \dots, m_p les ordres de A_1, \dots, A_p , nous avons $\chi_A =$

$$\begin{vmatrix} XI_{m_1} - A_1 & & 0 \\ & XI_{m_2} - A_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & XI_{m_p} - A_p \end{vmatrix} = \prod_{j=1}^p \chi_{A_j}.$$

V. Matrice compagne

1) Pour montrer cela, on développe $\chi_{\mathcal{C}(P)} =$

$$\begin{vmatrix} X & & a_0 \\ -1 & \ddots & \vdots \\ & \ddots & X & a_{n-2} \\ & & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix} \text{ se-}$$

lon sa dernière colonne.

Si l'on note M_i obtenue à partir de $\mathcal{C}(P)$ en supprimant la dernière colonne et la ligne $i + 1$, il vient $\chi_{\mathcal{C}(P)} = \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^{n+i+1} a_i \det(M_i) + (X + a_{n-1}) \det M_{n-1}$.

On remarque alors que $M_i =$

$$\begin{pmatrix} X & & & & \\ -1 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & X & \\ & & & -1 & X \\ & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & \ddots & X \\ & & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

où la premier bloc contient i lignes, et le second $n - 1 - i$ lignes. Ainsi $\det M_i = (-1)^{n-1-i} X^i$.

$$\text{Alors } \chi_{\mathcal{C}(P)} = \sum_{i=0}^{n-2} a_i X^i + (X + a_{n-1}) X^{n-1} = P$$

On pourrait également profiter de la présence des zéros et développer selon la première ligne ; le résultat s'obtiendrait aisément par récurrence.

2) Si λ est racine de P, on note $\mu_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \end{pmatrix}$. On calcule :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(P)^\top \mu_\lambda &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & \dots & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \\ -a_0 - a_1\lambda & \dots & -a_{n-1}\lambda^{n-1} \end{pmatrix} = \lambda \mu_\lambda \end{aligned}$$

donc μ_λ est vecteur propre associé à la valeur propre λ .

S'il y a n valeurs propres deux à deux distinctes, il y a n vecteurs propres $\mu_{\lambda_1}, \dots, \mu_{\lambda_n}$ formant une famille libre, donc une base de \mathbb{R}^n . Appelons \mathcal{B} cette base, \mathcal{C} la base canonique.

$$\text{Alors } Q = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} = \text{Vdm}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \text{ et}$$

$$\mathcal{C}(P) = Q D Q^{-1}.$$