

Mathématiques 2

Présentation du sujet

Le sujet est consacré à l'étude de systèmes évolutifs périodiques. Envisageant des cas divers, discrets, continus, il met en avant un phénomène commun : l'influence du spectre d'un opérateur associé sur l'existence ou non de solutions périodiques ou non bornées.

Il fait appel à des notions variées du programme de seconde année mais aussi de première année.

Analyse globale des résultats

Le sujet est d'une longueur raisonnable avec des parties très indépendantes qui ont toutes été abordées. Les tous meilleurs candidats traitent correctement la quasi totalité de l'énoncé. Mais, en majorité, les bonnes notes récompensent plus ceux qui répondent bien que ceux qui écrivent beaucoup.

Dans l'ensemble les candidats ont reconnu les théorèmes à utiliser et en connaissent les grandes lignes. Mais cette connaissance est souvent trop approximative ou entachée de confusion. La plus fréquente étant de confondre les solutions exponentielles d'une équation différentielle linéaire avec les suites géométriques vérifiant une relation de récurrence linéaire.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Le jury souhaite insister sur quatre conseils particuliers illustrés par un certain nombre de réponses ou d'erreurs relevées dans les copies.

Bien prendre conscience de la nature des objets manipulés

- Pour des suites de complexes ne pas parler de monotonie et pas d'inégalités sans module.
- Les suites ne sont pas des fonctions définies sur un espace vectoriel normé : les théorèmes de Rolle, Weierstrass, des valeurs intermédiaires étaient complètement hors sujet en partie I.
- Matrices carrées, colonnes et scalaires ne se multiplient pas dans n'importe quel ordre. Le produit matriciel n'étant pas commutatif l'usage de la notation Π est dangereux et déconseillé.

Choisir des notations adaptées à la nature de ces objets facilite la réflexion du candidat et la compréhension du correcteur.

Distinguer également les données de l'énoncé de celles que l'on doit construire ou dont on doit démontrer l'existence :

- on devait prouver la convergence des suites (Y_n) avant de « passer à la limite » ou d'écrire « $\lim(Y_n) =$ » ;
- de nombreuses questions (I.A.4, II.C, II.E, III.B, III.C) nécessitaient la construction d'une quantité nouvelle, ce sont les plus mal traitées. Aucune réponse ne peut être acceptée si elle ne comporte pas la mention explicite on *pose* $A =$ ou on *construit* (Y_n) de la façon suivante.

Être précis quant aux résultats utilisés

Nous invitons les candidats à bien se remémorer l'intégralité du théorème utilisé, voire à le réciter, plutôt que de tenter d'en inventer une version permettant d'obtenir le résultat mentionné dans l'énoncé. Puis à ne pas oublier d'en vérifier les hypothèses.

Quelques exemples rencontrés :

- une partie bornée n'a pas forcément de maximum ;
- un polynôme annulateur d'une matrice n'est pas forcément son polynôme caractéristique et peut avoir d'autres racines que ses valeurs propres ;
- peu de candidats comprennent qu'il fallait utiliser l'unicité de Cauchy Lipschitz pour établir en **IV** qu'une solution s'annulant en un point est nulle partout, rares sont ceux qui précisent que la fonction nulle était aussi solution et personne ne cite alors la continuité des coefficients du système.

Être cohérent et soigneux

Que de récurrences « immédiates », « évidentes », « triviales », etc. Rappelons qu'avant d'utiliser ces qualificatifs il est nécessaire :

- d'énoncer clairement le prédicat à démontrer ;
- de préciser sur quelle variable porte la récurrence ;
- d'avoir en amont déjà rédigé correctement au moins une démonstration par récurrence.

En question **I.A.3** le jury attendait une rédaction soignée de la récurrence demandée. Il fallait en particulier non seulement préciser que la récurrence portait sur k mais aussi faire clairement le choix entre fixer n au départ ou déclarer comme prédicat la proposition « pour tout entier n on a $u(n + kp) = u(n)$ »

De nombreux candidats, après avoir donné une forme générale erronée ou incomplète des suites du **II.A.1** proposent en **II.A.3** et **II.A.4** des solutions périodiques ou non bornées n'appartenant pas à leur propre ensemble de solutions.

Le jury souhaite que les candidats fassent preuve de cohérence et n'hésitent pas à critiquer leurs résultats où à revenir en arrière.

Utiliser les connecteurs logiques à bon escient

À part le début de la question **II.E.2**, aucune des questions d'algèbre linéaire ne se traitait directement par équivalence. Les raisonnements utilisés dans les sens direct et indirect étaient vraiment différents.

Trop de candidats ne traitent que le sens le plus facile mais en utilisant des équivalences erronées. Même si le jury fait souvent preuve de mansuétude en accordant quand même les points prévus pour l'implication simple, la répétition de ce type d'erreurs de logique est sanctionnée.

Il est frappant de constater que les meilleurs candidats n'utilisent pratiquement jamais les symboles \Rightarrow ou \Leftrightarrow tandis que les plus mauvaises copies en sont truffées !

Conclusion

Le jury a apprécié la qualité de certaines copies à la fois concises et rigoureuses. Il a sanctionné le flou et l'approximatif.

Le programme de mathématiques de classe préparatoire est vaste et les candidats ont manifestement fait des efforts pour tenter de l'assimiler. Nous encourageons les futurs candidats à intensifier ces efforts sur l'apprentissage du cours. Si une vision globale des phénomènes aide à la compréhension et si un vernis culturel est enrichissant ils ne doivent pas passer avant la maîtrise des outils du programme.