Exercice 67

Soit $R \in \mathbb{R}_+^*$ le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_m x^m$, $\forall x \in]-R, R[$,

$$\sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^m = \sum_{m=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(xt)^m}{1+t^2}\, dt$$

On a $0 \leqslant t \leqslant 1$

alors $1 \leqslant 1+t^2 \leqslant 2$

alors $1 \geqslant \frac{1}{1+t^2} \geqslant \frac{1}{2}$

alors $t^m \geqslant \frac{t^m}{1+t^2} \geqslant \frac{t^m}{2}$ car $\forall m \in \mathbb{N}$ et $\forall t \in [0,1]$, $t^m \geqslant 0$

alors $\int_0^1 t^m\, dt \geqslant a_m \geqslant \frac{1}{2}\int_0^1 t^m\, dt$

alors $\frac{1}{m+1} \geqslant a_m \geqslant \frac{1}{2(m+1)}$

Or le rayon de convergence de $\sum_{m \geqslant 0} \frac{x^m}{m+1}$ et $\sum_{m \geqslant 0} \frac{x^m}{2(m+1)}$ vaut 1 et comme $|a_m| = a_m$, $R \geqslant 1$ et $R \leqslant 1$.

Donc $\boxed{R = 1}$.

On pose $\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]-1, 1[$, $f_m : t \longmapsto \frac{(xt)^m}{1+t^2}$

- $\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]-1,1[$ $f_m \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ comme quotient de fonctions $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$
- Le rayon de convergence de $\sum_{m \geqslant 0} \frac{(xt)^m}{1+t^2}$ vaut 1 donc $\sum_{m \geqslant 0} f_m$ converge simplement sur $[0,1]$

De plus, si $t \in [0,1]$, $x \in]-1,1[$ et $m \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{(xt)^k}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2} \sum_{k=m+1}^{+\infty} (xt)^k = \frac{1}{1+t^2} \times \frac{(xt)^{m+1}}{1-t} \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0$

Donc $\sum f_m$ ~~converge~~ uniformément sur $[0,1]$.

Attention : si le reste tend vers 0, alors la série converge, et c'est tout ! Ça n'est que la cv simple.

Donc avec le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, $\forall x \in]-1, 1[$

$$\sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^m = \int_0^1 \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(xt)^m}{1+t^2}\, dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} \sum_{m=0}^{+\infty} (xt)^m\, dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} \times \frac{1}{1-xt}\, dt$$

Pour la cv uniforme, il faut majorer le reste INDÉPENDAMMENT de x, et montrer que cela (i.e. la norme infinie du reste) tend vers 0.

Or on remarque que $\frac{1}{(1+t^2)(1-xt)} = \frac{x^2}{1+x^2}\frac{1}{1-xt} + \frac{1}{1+x^2}\frac{1+tx}{1+t^2}$

Alors $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^m = \frac{x^2}{1+x^2}\int_0^1 \frac{dt}{1-xt} + \frac{1}{1+x^2}\int_0^1 \frac{1+tx}{1+t^2}\, dt$

$$= \frac{-x}{1+x^2} \ln|x-1| + \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x \ln 2}{2}\right)$$

Donc $\boxed{\sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^m = \frac{1}{1+x^2}\left[-x\ln(x-1) + \frac{\pi}{4} + \frac{x \ln 2}{2}\right]}$