


Soit $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ un repère orthonormé direct de \mathbb{R}^2 . Soit M un point du cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon 1. On construit les points H et K , projections orthogonales respectives de M sur les droites (OA) et (OB) , et le point L , intersection, si elle existe, de la droite (OM) et de la perpendiculaire à (OA) passant par A . On oriente la droite (OA) (resp. (OB) , (OL)) par le vecteur \overrightarrow{OA} (resp. \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OL}). Si α désigne une mesure de l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$, on sait que :

$$\cos(\alpha) = \overline{OH} \quad , \quad \sin(\alpha) = \overline{OK}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \overline{AL}$$

La tangente de α est définie si et seulement si L existe, c'est-à-dire si et seulement si le point M n'est pas sur la droite (OB) .

Angles remarquables

α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\cos(\alpha)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1
$\sin(\alpha)$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0
$\tan(\alpha)$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

Propriétés élémentaires

Les fonctions sin et cos sont 2π -périodiques sur \mathbb{R} . La fonction tan est π -périodique sur $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Pour tout réel α on a :

- $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
- $\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin(\alpha)$
- $\cos(\pi/2 + \alpha) = -\sin(\alpha)$
- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$
- $\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$
- $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$
- $\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos(\alpha)$
- $\sin(\pi/2 + \alpha) = \cos(\alpha)$
- $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$
- $\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$

Équations trigonométriques

Soient x et y deux réels. Alors :

- $\cos(x) = \cos(y)$ ssi $(x = y \ [2\pi] \text{ ou } x = -y \ [2\pi])$
- $\sin(x) = \sin(y)$ ssi $(x = y \ [2\pi] \text{ ou } x = \pi - y \ [2\pi])$

Soient x et y deux réels non congrus à $\pi/2$ modulo π . Alors :

$$\bullet \tan(x) = \tan(y) \quad \text{si et seulement si} \quad x = y \pmod{\pi}$$

Formulaire trigonométrique

Soient x et y deux réels. Lorsque les réels considérés sont dans les domaines de définition des fonctions mises en jeu, les formules suivantes sont valides :

$$\begin{aligned} \bullet \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) & \bullet \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \\ \bullet \cos(x-y) &= \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) & \bullet \sin(x-y) &= \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y) \\ \bullet \tan(x+y) &= \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)} & \bullet \tan(x-y) &= \frac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x)\tan(y)} \\ \bullet \cos(x) + \cos(y) &= 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) & \bullet \sin(x) + \sin(y) &= 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \bullet \cos(x) - \cos(y) &= -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) & \bullet \sin(x) - \sin(y) &= 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \bullet \cos(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)) & \bullet \sin(x)\sin(y) &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)) \\ \bullet \sin(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y)) & & \\ \bullet \sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x) = \frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)} & \bullet \tan(2x) &= \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)} \\ \bullet \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) = \frac{1-\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)} & & \end{aligned}$$

Équations paramétriques du cercle unité

On reprend les notations de l'introduction. Un paramétrage du cercle \mathcal{C} en coordonnées cartésiennes dans le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est :

$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi[$$

Un paramétrage de \mathcal{C} privé du point D de coordonnées $(-1, 0)$, en coordonnées cartésiennes dans le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, est :

$$\begin{cases} x = \frac{2t}{1+t^2} \\ y = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

On trouve ce dernier paramétrage appelé paramétrage rationnel de $\mathcal{C} \setminus \{D\}$, en utilisant les formules trigonométriques exprimant le sinus et le cosinus du réel x en fonction de la tangente du réel $x/2$ (lorsqu'elle existe).