I. Rappels et compléments d'algèbre linéaire, 1ère partie

17 août 2025

Table des matières

Algèbre linéaire

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

A - Compléments sur les espaces vectoriels, les endomorphismes et les matrices

Le programme est organisé autour de trois objectifs :
- *consolider les acquis de la classe de première année ;*
- *introduire de nouveaux concepts préliminaires à la réduction des endomorphismes : somme de plusieurs sous-espaces vectoriels, somme directe, sous-espaces stables, matrices par blocs, trace, polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées, polynômes interpolateurs de Lagrange ;*
- *passer du point de vue vectoriel au point de vue matriciel et inversement.*

Le programme valorise les interprétations géométriques et préconise l'illustration des notions et résultats par de nombreuses figures.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Produit d'espaces vectoriels, somme de sous-espaces vectoriels	
Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels ; dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie.	
Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.	
En dimension finie, base adaptée à un sous-espace vectoriel, à une décomposition $E = \bigoplus E_i$.	Décomposition en somme directe obtenue par partition d'une base.
Si $F_1, \ldots, F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie, $$\dim\Big(\sum_{i=1}^{p} F_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$$ avec égalité si et seulement si la somme est directe.	
b) Matrices par blocs et sous-espaces stables	
Matrices définies par blocs, opérations par blocs de tailles compatibles (combinaison linéaire, produit, transposition).	
Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.	
Sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme, endomorphisme induit.	Traduction matricielle de la stabilité d'un sous-espace vectoriel par un endomorphisme et interprétation en termes d'endomorphismes d'une matrice triangulaire ou diagonale par blocs.
Si u et v commutent alors le noyau de u est stable par v.	

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Produits et espaces vectoriels d'applications

1.1 Espaces vectoriels produits

Théorème 1.1.1 (Espace vectoriel produit)**.**
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(E_1, +_1, \cdot_1) \dots (E_n, +_n, \cdot_n)$ des $\mathbb{K}$-ev. On considère l'ensemble produit $E = E_1 \times \dots \times E_n$ que l'on munit des deux lois $+ : E \times E \to E$ et $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$ définies, par les relations suivantes pour toutes familles $(x_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ et $(y_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) &= (x_1 +_1 y_1, \dots, x_n +_n y_n)\\ \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) &= (\lambda \cdot_1 x_1, \dots, \lambda \cdot_n x_n)\end{aligned}$$

Alors, $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-ev appelé ***espace vectoriel produit***.

Démonstration.
Il suffit de vérifier les 5 points de la définition d'espace vectoriel :

(i) La loi $+$ est facilement une lci. Elle est associative : soit $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n), (z_1, \dots, z_n) \in E$:

$$\begin{aligned}&[(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)] + (z_1, \dots, z_n)\\ =&(x_1 +_1 y_1, \dots, x_n +_n y_n) + (z_1, \dots, z_n)\\ =&((x_1 +_1 y_1) +_1 z_1, \dots, (x_n +_n y_n) +_n z_n)\\ =&(x_1 +_1 (y_1 +_1 z_1), \dots, x_n +_n (y_n +_n z_n))\\ &\qquad\qquad \text{par associativité des } (E_i, +_i)\\ =&(x_1, \dots, x_n) + (y_1 +_1 z_1, \dots, y_n +_n z_n)\\ =&(x_1, \dots, x_n) + [(y_1, \dots, y_n) + (z_1, \dots, z_n)]\end{aligned}$$

On vérifie ensuite sans peine que le n-uplet $(0_1, \dots, 0_n)$ est le neutre pour $+$ et que $(-x_1, \dots, -x_n)$ est l'inverse de $(x_1, \dots, x_n)$ pour $+$. Enfin, toutes les $+_i$ sont commutatives donc $+$ aussi.
Ainsi $(E, +)$ est un groupe commutatif.

(ii) Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E$, on a $1 \cdot (x_1, \dots, x_n) = (1 \cdot_1 x_1, \dots, 1 \cdot_n x_n) = (x_1, \dots, x_n)$.

(iii) Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $(x_1, \dots, x_n) \in E$. En posant

$$z = (\lambda + \mu) \cdot (x_1, \dots, x_n)$$

on a successivement :

$$\begin{aligned}z &= ((\lambda + \mu) \cdot_1 x_1, \dots, (\lambda + \mu) \cdot_n x_n)\\ &= (\lambda \cdot_1 x_1 + \mu \cdot_1 x_1, \dots, \lambda \cdot_n x_n + \mu \cdot_n x_n)\\ &= (\lambda \cdot_1 x_1, \dots, \lambda \cdot_n x_n) + (\mu \cdot_1 x_1, \dots, \mu \cdot_n x_n)\\ &= \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) + \mu \cdot (x_1, \dots, x_n).\end{aligned}$$

(iv) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $(x_1, \dots, x_n) \in E$ et $(y_1, \dots, y_n) \in E$. En posant

$$z = \lambda \cdot (x_1 +_1 y_1, \dots, x_n +_n y_n)$$

on a successivement :

$$\begin{aligned}z &= (\lambda \cdot (x_1 +_1 y_1), \dots, \lambda.(x_n +_n y_n))\\ &= (\lambda \cdot_1 x_1 +_1 \lambda \cdot_1 y_1, \dots, \lambda \cdot_n x_n +_n \lambda \cdot_n y_n)\\ &= (\lambda \cdot_1 x_1, \dots, \lambda \cdot_n x_n) + (\lambda \cdot_1 y_1, \dots, \lambda \cdot_n y_n)\\ &= \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) + \lambda \cdot (y_1, \dots, y_n).\end{aligned}$$

(v) Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E$. On a successivement :

$$\begin{aligned}(\lambda \times \mu) \cdot (x_1, \dots, x_n) &= ((\lambda \times \mu) \cdot_1 x_1, \dots, (\lambda \times \mu) \cdot_n x_n)\\ &= (\lambda \cdot_1 (\mu \cdot_1 x_1), \dots, \lambda \cdot_n (\mu \cdot_n x_n))\\ &= \lambda \cdot (\mu \cdot_1 x_1, \dots, \mu \cdot_n x_n)\\ &= \lambda \cdot [\mu \cdot (x_1, \dots, x_n)] .\end{aligned}$$

□

Proposition 1.1.2 (Base d'un ev produit)**.**
Si E et F sont de dimension finie, alors $E \times F$ aussi et sa dimension vaut $\dim E + \dim F$.
Plus précisément, si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et $(f_1, \dots, f_p)$ une base de F, alors $\mathscr{B} = ((e_1, 0), \dots, (e_n, 0), (0, f_1), \dots, (0, f_p))$ est une base de $E \times F$.

Démonstration.
Soit $v \in E \times F$. Alors il existe $(\alpha_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $(\beta_j)_{j\in[\![1,p]\!]}$ tels que $v = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^{p} \beta_j f_j\right)$.

Donc

$$\begin{aligned} v &= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, 0\right) + \left(0, \sum_{j=1}^{p} \beta_j f_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (e_i, 0) + \sum_{j=1}^{p} \beta_j (0, f_j) \end{aligned}$$

donc $\mathscr{B}$ engendre $E \times F$.

De plus, soit $(\alpha_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $(\beta_j)_{j\in[\![1,p]\!]}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (e_i, 0) + \sum_{j=1}^{p} \beta_j (0, f_j) = 0$. Par le même calcul on obtient $\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^{p} \beta_j f_j\right) = 0$, donc $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0$ et $\sum_{j=1}^{p} \beta_j f_j = 0$.

Par liberté de ces deux familles, tous les α_i et les β_j sont nuls, et $\mathscr{B}$ est libre □

Remarque 1.1.3.
De la même manière on montre que si $E_1, \ldots, E_n$ sont de dimension finie, alors $E_1 \times \ldots \times E_n$ aussi, on peut en donner une base, et $\dim(E_1 \times \ldots \times E_n) = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i$.

1.2 Applications à valeurs dans un ev

Théorème 1.2.1 (Espaces d'applications)**.**
Soit X un ensemble non vide et E un $\mathbb{K}$-ev. On considère $\mathscr{F} = E^X$, que l'on munit de deux lois :

$$+ : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{F} \times \mathscr{F} & \longrightarrow & \mathscr{F} \\ (f,g) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} X & \to & E \\ x & \mapsto & f(x) + g(x) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

et

$$\cdot : \left\{ \begin{array}{ccc} K \times \mathscr{F} & \longrightarrow & \mathscr{F} \\ (\lambda, f) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} X & \to & E \\ x & \mapsto & \lambda \cdot (f(x)) \end{array} \right. \end{array} \right. .$$

Alors $(\mathscr{F}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-ev.

Démonstration.
Il suffit de vérifier les 5 points de la définition d'ev, ce qui est laissé au lecteur. □

Exemple 1.2.2.
1. Soit I un intervalle, alors $(\mathbb{R}^I, +, \times)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $(\mathbb{C}^I, +, \times)$ est à la fois un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
2. L'ensemble des suites à valeurs réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, celui des suites à valeurs complexes est à la fois un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

2 Sommes d'espaces vectoriels

2.1 Rappels de première année : sommes, sommes directes, supplémentaires

Définition 2.1.1 (Somme de deux sev)**.**
On appelle ***somme de*** F ***et*** G l'ensemble de E noté $F + G$ défini par $F + G = \{ x + y \mid x \in F,\ y \in G \}$.

Théorème 2.1.2.
1. $F + G$ est un sev de E.
2. $F + G$ est le plus petit sev qui contient F et G :

$$F + G = \mathrm{Vect}(F \cup G).$$

Définition 2.1.3 (Somme directe)**.**
Soit F, G deux sev de E, on dit que la somme $F+G$ est ***directe*** si

$$\forall\, x \in F+G,\ \exists!(f,g) \in F \times G,\ x = f+g.$$

Dans ce cas, le sous-espace vectoriel $F+G$ est noté

$$F \oplus G.$$

Proposition 2.1.4 (Caractérisation d'une somme directe de deux sev)**.**
Soit F, G deux sev de E. Les trois propositions suivantes sont équivalentes.

1. $F+G$ est directe.
2. $\forall\, f \in F,\ \forall\, g \in G, f+g = 0_E \Rightarrow f = g = 0_E$.
3. $F \cap G = \{0_E\}$.

Définition 2.1.5 (Supplémentaire)**.**
On dit que F est ***UN supplémentaire*** de G (ou que F et G sont ***supplémentaires***) si

$$E = F \oplus G,$$

i.e. si les deux conditions suivantes sont remplies :

1. la somme $F+G$ est directe ;
2. $E = F+G$.

Proposition 2.1.6.
F et G sont supplémentaires si et seulement si tout élément de E s'écrit *de manière unique* comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.

Théorème 2.1.7.
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Alors toute concaténation d'une famille génératrice de F et d'une famille génératrice de G est une famille génératrice de $F+G$.
2. $F+G$ est directe si et seulement si toutes les concaténations d'une famille libre de F et d'une famille libre de G sont des familles libres de $F+G$.
3. Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ une base de F et de G respectivement.
   $F+G$ est directe si et seulement si la concaténation de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ est une base de $F+G$.
   Notamment, F et G sont supplémentaires si et seulement si la concaténation de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ est une base de E.

Théorème 2.1.8.
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev, soit E_1, E_2 deux sev supplémentaires de E (*i.e.* $E = E_1 \oplus E_2$).
Soit $f_1 \in \mathscr{L}(E_1, F)$ et $f_2 \in \mathscr{L}(E_2, F)$.
Alors, il existe une unique $f \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $f|_{E_1} = f_1$ et $f|_{E_2} = f_2$.

Théorème 2.1.9 (Existence de supplémentaires)**.**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E.
Alors F admet un supplémentaire S dans E.

⚠ Ne parlez jamais **du** supplémentaire : en effet tout sev non trivial admet en fait une infinité de supplémentaires !

Proposition 2.1.10 (Formule de Grassmann)**.**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit F et G deux sous-espaces de dimensions finies de E. Alors $F+G$ est de dimension finie et

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F\cap G).$$

En particulier

$$\dim(F+G) \leqslant \dim F + \dim G$$

et l'égalité a lieu si et seulement si F et G sont en somme directe.

Proposition 2.1.11 (Caractérisation des supplémentaires)**.**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies.

Alors si F et G sont supplémentaires, les trois propositions suivantes sont vraies :

1. $F\cap G = \{ 0 \}$,
2. $F+G = E$,
3. $\dim E < +\infty$ et $\dim F + \dim G = \dim E$.

Réciproquement il suffit que deux de ces propositions soient vraies pour que F et G soient supplémentaires.

Corollaire 2.1.12.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors tous les supplémentaires de F ont même dimension : $\dim E - \dim F$.

2.2 Généralisation à plus de deux sev

Dans la suite de cette partie, n désigne un entier naturel et F_1, ..., F_n des sous-espaces vectoriels de E.

Définition 2.2.1 (Somme de plusieurs sev)**.**
La somme $F_1+\ldots+F_n$ est l'ensemble des vecteurs x de E pouvant s'écrire d'au moins une façon sous la forme $x_1+\ldots+x_n$ avec, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $x_i\in F_i$.
On dit que cette somme est ***directe*** si pour tout $x\in F_1+\ldots+F_n$ l'écriture précédente est unique. La somme $F_1+\ldots+F_n$ est alors notée $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^n F_i$.

Proposition 2.2.2 (Caractérisation d'une somme directe)**.**
Les propositions suivantes sont équivalentes.

(i) F_1, ..., F_n sont en somme directe.

(ii) La seule décomposition possible du vecteur nul sous la forme $x_1+\ldots+x_n$ avec $x_i\in F_i$ pour $i\in[\![1,n]\!]$ est la décomposition triviale $0+\ldots+0$.

(iii) Tout élément de E s'écrit d'au plus une façon sous la forme $x_1+\ldots+x_n$ avec $x_i\in F_i$ pour $i\in[\![1,n]\!]$.

Démonstration.(i)⇒ (ii) Supposons que F_1, ..., F_n sont en somme directe. Le vecteur nul appartient à $F_1\oplus\ldots\oplus F_n$, donc se décompose d'une et une seule façon comme somme d'éléments de F_1, ..., F_n. Or il s'écrit sous la forme $0+\ldots+0$, qui est donc la seule décomposition possible de x.

(ii)⇒ (iii) Supposons que la seule décomposition du vecteur nul sous la forme d'une somme d'éléments de F_1, ..., F_n est la décomposition triviale $0+\ldots+0$.
Soit alors x un élément de E. Supposons que x s'écrive à la fois $x_1+\ldots+x_n$ et sous la forme $y_1+\ldots+y_n$ où, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$ $x_i\in F_i$ et $y_i\in F_i$. Alors on a

$$0 = x - x = (x_1-y_1)+\ldots+(x_n-y_n).$$

Or pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $x_i-y_i\in F_i$, donc on a trouvé une décomposition du vecteur nul. Or on sait que cette décomposition est nécessairement la décomposition triviale, donc pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, on a $x_i-y_i=0$.
On a donc $x_i=y_i$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, c'est-à-dire $(x_1,\ldots,x_n)=(y_1,\ldots,y_n)$.
Donc x se décompose d'au plus une façon.
Donc tout élément de E s'écrit au plus d'une façon sous la forme $x_1+\ldots+x_n$ avec $x_i\in F_i$ pour $i\in[\![1,n]\!]$.

(iii)⇒(i) Supposons (iii) et montrons (i). Soit $x \in F_1 + \ldots + F_n$. Alors x se décompose d'au moins une façon sous la forme $x_1 + \ldots + x_n$ avec, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i \in F_i$.
De plus, d'après (iii), x se décompose au plus d'une façon sous cette forme.
Il se décompose donc de façon unique sous cette forme.
Donc la somme $F_1 + \ldots + F_n$ est directe.

□

Remarque 2.2.3.
La somme $F_1 + \cdots + F_n$ est donc directe si et seulement si l'application

$$\begin{array}{ccc} F_1 \times \cdots \times F_n & \to & E \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & x_1 + \cdots + x_n \end{array}$$

est injective. C'est évidemment un morphisme (de groupes, mais aussi d'ev. comme nous le verrons plus tard).
La proposition précédente revient à étudier le noyau de ce morphisme.

Remarque 2.2.4.
⚠ Le résultat **2.1.4** n'est valable que pour la somme de **deux** sous-espaces vectoriels, pas plus.

Exercice 2.2.5.
Trouver trois sous-espaces vectoriels F, G, H de $\mathbb{R}^2$ tels qu'on a $F \cap G \cap H = \{ 0 \}$ (ou même tels que $F \cap G = G \cap H = H \cap F = \{ 0 \}$) bien que F, G et H ne soient pas en somme directe.

En revanche, nous avons les résultats suivants :

Proposition 2.2.6 (Somme directe par paquets)**.**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1, n[\![$, soit F_1, …, F_n n sous-espaces vectoriels de E. On pose $F = F_1 + \ldots + F_p$ et $G = F_{p+1} + \ldots + F_n$.
Alors la somme $F_1 + \ldots + F_n$ est directe si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

1. la somme $F_1 + \ldots + F_p$ est directe ;
2. la somme $F_{p+1} + \ldots + F_n$ est directe ;
3. la somme $F + G$ est directe.

Démonstration.
Montrons la double implication.

Sens direct Supposons que la somme $F_1 + \ldots + F_n$ est directe. Alors :

1. Montrons que la somme $F_1 + \ldots + F_p$ est directe. Considérons une décomposition du vecteur nul sous la forme $x_1 + \ldots + x_p$ où $x_i \in F_i$ pour $i \in [\![1, p]\!]$. En posant, pour $i \in [\![p+1, n]\!]$, $x_i = 0_E$, on a
$$0_E = x_1 + \ldots + x_p + x_{p+1} + \ldots + x_n.$$
Or la somme $F_1 + \ldots + F_n$ est directe, donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = 0$, donc pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $x_i = 0$.
2. De même, la somme $F_{p+1} + \ldots + F_n$ est directe.
3. Montrons que la somme $F + G$ est directe. Supposons que 0_E s'écrive sous la forme $x + y$ avec $x \in F$ et $y \in G$. On a $x \in F$, donc x s'écrit sous la forme $x_1 + \ldots + x_p$ où pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $x_i \in F_i$. De même y s'écrit sous la forme $x_{p+1} + \ldots + x_n$ où pour tout $i \in [\![p+1, n]\!]$, $x_i \in F_i$.
On a donc
$$0_E = x_1 + \ldots + x_p + x_{p+1} + \ldots + x_n.$$
Or la somme $F_1 + \ldots + F_n$ est directe, donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = 0$. Ainsi, $x = 0$ et $y = 0$.
La seule décomposition de 0_E comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est donc la décomposition triviale. Donc la somme $F + G$ est directe.

Sens indirect Supposons que les trois conditions sont vérifiées et montrons que la somme $F_1 + \ldots + F_n$ est directe.
Considérons une décomposition de 0_E sous la forme
$$0_E = x_1 + \ldots + x_p + x_{p+1} + \ldots + x_n,$$
où $x_i \in F_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
Alors, en posant $x = x_1 + \ldots + x_p$ et $y = x_{p+1} + \ldots x_n$, on a $0_E = x + y$ et $x \in F$ et $y \in G$. Or F et G sont en somme directe donc $x = 0_E$ et $y = 0_E$. On a donc
$$0_E = x_1 + \ldots + x_p.$$
Or F_1, …, F_p sont en somme directe donc pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $x_i = 0_E$. De même pour tout $i \in [\![p+1, n]\!]$, $x_i = 0_E$.
Donc 0_E admet la décomposition triviale pour seule décomposition comme somme d'éléments de F_1, …, F_n. Donc la somme $F_1 + \ldots + F_n$ est directe.

□

On peut donc mettre en place de nombreuses stratégies pour montrer qu'une somme de n sous-espaces vectoriels est directe. En pratique, on raisonne de proche en proche en ajoutant les sous-espaces vectoriels, le plus souvent un à un, en utilisant le résultat suivant.

Corollaire 2.2.7 (Somme directe « par récurrence »)**.**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $F_1, \ldots, F_{n+1}$ $n+1$ sous-espaces vectoriels de E. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1. la somme $F_1 + \ldots + F_{n+1}$ est directe ;
2. la somme $F_1 + \ldots + F_n$ est directe et la somme de $F_1 \oplus \ldots \oplus F_n$ et de F_{n+1} est directe ;
3. la somme $F_1 + \ldots + F_n$ est directe et

$$(F_1 \oplus \ldots \oplus F_n) \cap F_{n+1} = \{ 0_E \}.$$

Démonstration.
L'équivalence des deux premiers points découle de la propriété précédente (avec $p = n$). Celle des deux derniers, de la caractérisation de la somme directe de deux sous-espaces vectoriels. □

Proposition 2.2.8 (Formule de Grassmann faible généralisée)**.**
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $F_1, \ldots, F_n$, n sous-espaces vectoriels de dimension finie. Alors

$$\dim\left(\sum_{k=1}^{n} F_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \dim F_k$$

et on a l'égalité si et seulement si la somme des F_k pour $k = 1, \ldots, n$ est directe.

Démonstration.
L'inégalité se déduit directement de la formule de Grassmann par récurrence, en utilisant que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} F_k = \left(\sum_{k=1}^{n} F_k\right) + F_{n+1}$.

Montrons le cas de l'égalité.
Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ l'assertion « Soit $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie. Alors

$$\dim\left(\sum_{k=1}^{n} F_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \dim F_k$$

si et seulement si les F_i sont en somme directe » et montrons $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(n)$.

On pourrait montrer $P(0)$ ou $P(1)$: le plus long est de comprendre ce que dit l'énoncé dans ces cas, qui ne sont pas intéressants, et que l'on laisse de côté.
La propriété $P(2)$ est déjà connue depuis la première année, grâce à la formule de Grassmann.
Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$. Soit $F_1, \ldots, F_{n+1}$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie.
• S'ils vérifient

$$\dim\left(\sum_{k=1}^{n+1} F_k\right) = \sum_{k=1}^{n+1} \dim F_k, \tag{1}$$

on a

$$\dim\left(\sum_{k=1}^{n+1} F_k\right) \leqslant \dim\left(\sum_{k=1}^{n} F_k\right) + \dim F_{n+1}$$
$$\text{et } \dim\left(\sum_{k=1}^{n} F_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \dim F_k.$$

Si l'une au moins de ces inégalités était stricte, on ne pourrait avoir l'égalité (1). On a donc

$$\dim \sum_{k=1}^{n} F_k = \sum_{k=1}^{n} \dim F_k.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, les F_k pour $k \in [\![1, n]\!]$ sont en somme directe. De plus

$$\dim\left(\bigoplus_{k=1}^{n} F_k + F_{n+1}\right) = \dim \bigoplus_{k=1}^{n} F_k + \dim F_{n+1},$$

donc $\bigoplus_{k=1}^{n} F_k$ et F_{n+1} sont en somme directe, donc $F_1, \ldots, F_{n+1}$ sont en somme directe.

• Réciproquement, supposons les F_i en somme directe. Alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} F_k$ et F_{n+1} sont en somme directe, donc $\dim\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} F_k\right) = \dim\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} F_k\right) + \dim F_{n+1}$.
Mais $F_1, \ldots, F_n$ sont en somme directe, donc par hypothèse de récurrence

$\dim\left(\sum_{k=1}^{n} F_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \dim F_k$.

Finalement nous avons bien $\dim\left(\sum_{k=1}^{n+1} F_k\right) = \sum_{k=1}^{n+1} \dim F_k$.

On a donc $P(n+1)$.
On a donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n)$. □

Le théorème suivant prouve qu'il revient au même de décomposer un $\mathbb{K}$-ev en sev en somme directe ou de découper une base.

Théorème 2.2.9 (Base adaptée à une somme directe de n sev)**.**
Soit E un $\mathbb{K}$-ev.

1. Soit $F_1, \ldots, F_n$ des sev de E tels que $\bigoplus_{i=1}^{n} F_i = E$. Si pour chaque i la famille $\mathscr{B}_i$ est une base de F_i, alors la concaténation de $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_n$ est une base de E, dite ***adaptée*** à la somme directe des F_i.
2. Réciproquement, si une base $\mathscr{B}$ de E est découpée en n parties notées $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_n$, et si l'on note pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, $F_i = \operatorname{Vect} \mathscr{B}_i$, alors $\bigoplus_{i=1}^{n} F_i = E$.

Démonstration.
1. Avec la proposition **2.2.8**, si n_i est la dimension de F_i, alors $\dim E = \sum_{i=1}^{n} n_i$, qui est aussi le cardinal de la concaténation des bases $\mathscr{B}_i$. Il suffit donc de montrer que cette concaténation est une famille génératrice de E. Or tout élément x de E s'écrit comme une somme d'éléments des F_i, et chaque élément de F_i s'écrit comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathscr{B}_i$. Ainsi x est une combinaison linéaire des éléments de la concaténation des $\mathscr{B}_i$, d'où le résultat.
2. Là encore, $\dim E$ est égale à la somme des dimension des F_i, car $\operatorname{Card} \mathscr{B} = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Card} \mathscr{B}_i$. Toujours avec **2.2.8**, il suffit de montrer que $E = \sum_{i=1}^{n} F_i$. Pour cela, si $x \in E$, il s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{B}$. Dans cette combinaison linéaire, on regroupe les vecteurs appartenant à $\mathscr{B}_i$, et on note x_i la valeur de cette sous-combinaison linéaire. Alors $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$, ce qui est le résultat voulu.

□

Finissons cette partie avec un dernier résultat analogue à celui sur deux sev :

Proposition 2.2.10 (Décomposition d'une application linéaire suivant des sev supplémentaires)**.**
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev. Soit $E_1, \ldots, E_n$ des sev de E tels que $\bigoplus_{i=1}^{n} E_i = E$.
Pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, introduisons $u_i \in \mathscr{L}(E_i, F)$. Alors il existe un unique $u \in \mathscr{L}(E, F)$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u|_{E_i} = u_i$.

Démonstration.
• Analyse : soit u une telle application. Soit $x \in E$, qui s'écrit de manière unique $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$, où pour chaque i nous avons $x_i \in E_i$.

Alors $u(x) = u\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} u(x_i) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x_i)$, d'où l'unicité de u sous réserve d'existence, grâce à l'unicité des x_i.

• Synthèse : Soit $x \in E$, qui s'écrit de manière unique $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$, où pour chaque i nous avons $x_i \in E_i$. Posons $u(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x_i)$.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Si $x \in E_i$, alors $x = x_i$ donc $u(x) = u_i(x_i) = u_i(x)$. Ceci étant vérifié pour tout i, nous avons bien $u|_{E_i} = u_i$.

Montrons enfin que u est linéaire : soit $y = \sum_{i=1}^{n} y_i$ avec $y_i \in E_i$, et $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} u(x+\lambda y) &= u\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \lambda y_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} u_i(x_i + \lambda y_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} u_i(x_i) + \lambda u_i(y_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} u_i(x_i) + \lambda \sum_{i=1}^{n} u_i(y_i) \\ &= u(x) + \lambda u(y). \end{aligned}$$

□

3 Matrices par blocs

3.1 Définition

Définition 3.1.1 (Écriture par blocs)**.**
Soit $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On peut écrire la matrice sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1p} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{np} \end{pmatrix}.$$

En traçant $q-1$ lignes horizontales distinctes et $r-1$ lignes verticales distinctes dans le tableau représentant M, on peut décomposer M en $q \times r$ matrices extraites M_{ij} pour $(i,j) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,r]\!]$:

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1r} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{q1} & M_{q2} & \cdots & M_{qr} \end{pmatrix}.$$

Cette décomposition est appelée ***décomposition par blocs*** de M en $q \times r$ blocs.

Formellement, une décomposition par bloc de M est la donnée de $q \times r$ matrices M_{ij} pour $(i,j) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,r]\!]$ telles que

1. Pour tout $i \in [\![1,q]\!]$, les matrices M_{i1}, …, M_{ir} ont un même nombre de lignes n_i (toutes les matrices d'une même ligne ont même nombre de lignes).
2. Pour tout $j \in [\![1,r]\!]$, les matrices M_{1j}, …, M_{qj} ont un même nombre de colonnes p_j (toutes les matrices d'une même colonne ont même nombre de colonnes).
3. En notant a_{hk}^{ij} le coefficient de la ligne h, colonne k de la matrice M_{ij} pour $(i,j) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,r]\!]$ et $(h,k) \in [\![1,n_i]\!] \times [\![1,p_j]\!]$, on a $a_{hk}^{ij} = m_{(s+h)(t+k)}$ où $s = n_1 + \ldots + n_{i-1}$ et $t = p_1 + \ldots + p_{j-1}$.

On dira que la décomposition précédente est ***triangulaire supérieure par blocs*** si $n = p$ et que :

1. pour tout $i \in [\![1,q]\!]$, M_{ii} est carrée ;
2. pour tout $(i,j) \in [\![1,q]\!]^2$ avec $i > j$, M_{ij} est nulle.

On définit de même les décompositions ***triangulaires inférieures par blocs***.

Enfin, les décompositions ***diagonales par blocs*** sont celles dont tous les blocs M_{ij} tels $i \neq j$ sont nuls et tous les blocs M_{ii} sont carrés.

Exemple 3.1.2.
En posant

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\ 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 \end{pmatrix},$$

A peut se décomposer par bloc en

$$\begin{pmatrix} B & C & D \\ E & F & G \\ H & I & J \end{pmatrix},$$

où

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix},$$
$$D = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 13 & 14 \end{pmatrix},$$
$$F = \begin{pmatrix} 15 \end{pmatrix}, \qquad G = \begin{pmatrix} 16 & 17 & 18 \end{pmatrix},$$
$$H = \begin{pmatrix} 19 & 20 \\ 25 & 26 \\ 31 & 32 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 21 \\ 27 \\ 33 \end{pmatrix},$$
$$J = \begin{pmatrix} 22 & 23 & 24 \\ 28 & 29 & 30 \\ 34 & 35 & 36 \end{pmatrix}.$$

Remarque 3.1.3.

Lorsqu'on parle de décomposition triangulaire supérieure (resp. triangulaire inférieure, diagonale) par bloc, c'est bien la décomposition qui est triangulaire supérieure (resp. triangulaire inférieure, diagonale). Toute matrice carrée admet en effet une décomposition (triviale) triangulaire supérieure (resp. triangulaire inférieure, diagonale) par blocs.

3.2 Opérations par blocs

Proposition 3.2.1 (Combinaison linéaire par blocs)**.**
Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$, admettant des décompositions par blocs

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{q1} & A_{q2} & \cdots & A_{qr} \end{pmatrix},$$
$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{q1} & B_{q2} & \cdots & B_{qr} \end{pmatrix},$$

où pour tout $(i, j) \in [\![1, q]\!] \times [\![1, r]\!]$, A_{ij} et B_{ij} sont de même taille. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors $A + \lambda B$ vaut

$$\begin{pmatrix} A_{11} + \lambda B_{11} & A_{12} + \lambda B_{12} & \cdots & A_{1r} + \lambda B_{1r} \\ A_{21} + \lambda B_{21} & A_{22} + \lambda B_{22} & \cdots & A_{2r} + \lambda B_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{q1} + \lambda B_{q1} & A_{q2} + \lambda B_{q2} & \cdots & A_{qr} + \lambda B_{qr} \end{pmatrix}.$$

Démonstration.
Notons, pour tout $i \in [\![1, q]\!]$ (resp. pour tout $j \in [\![1, r]\!]$), n_i (resp. p_j) le nombre de lignes (resp. de colonnes) des matrices de la ligne i (resp. de la colonne j) de ces décompositions par bloc.

Posons $C = A + \lambda B$ et pour tout $(i, j) \in [\![1, q]\!] \times [\![1, r]\!]$, $C_{ij} = A_{ij} + \lambda B_{ij}$.

Notons a_{ij} pour $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$ les coefficients de la matrice A, b_{ij} ceux de B, c_{ij} ceux de C et pour tout $(i, j) \in [\![1, q]\!] \times [\![1, r]\!]$ et tout $(k, h) \in [\![1, n_i]\!] \times [\![1, p_j]\!]$, a^{ij}_{hk} (resp. b^{ij}_{hk}, resp. c^{ij}_{hk}) ceux de A_{ij} (resp. B_{ij}, resp. C_{ij}). On a alors, en posant $s = n_1 + \ldots + n_{i-1} + h$ et $t = p_1 + \ldots + p_{j-1} + k$.

$$c_{st} = a_{st} + \lambda b_{st} = a^{ij}_{hk} + \lambda b^{ij}_{hk} = c^{ij}_{hk}$$

On a donc

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{q1} & C_{q2} & \cdots & C_{qr} \end{pmatrix}$$

D'où le résultat. □

Proposition 3.2.2 (Transposition par blocs)**.**
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$, admettant une décomposition par blocs

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{q1} & A_{q2} & \cdots & A_{qr} \end{pmatrix}.$$

Alors $A^\top$ vaut

$$\begin{pmatrix} A_{11}^\top & A_{21}^\top & \cdots & A_{q1}^\top \\ A_{12}^\top & A_{22}^\top & \cdots & A_{q2}^\top \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^\top & A_{2r}^\top & \cdots & A_{qr}^\top \end{pmatrix}.$$

Démonstration.
Laissée au lecteur. □

Proposition 3.2.3 (Multiplication par blocs)**.**
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
On considère des décompositions de A en $r \times s$ blocs et de B en $s \times t$ blocs,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{st} \end{pmatrix},$$

telles que pour tout pour tout $(i,k,j) \in [\![1,r]\!] \times [\![1,s]\!] \times [\![1,t]\!]$, les matrices A_{ik} et B_{kj} aient des tailles compatibles par la multiplication.
Alors le produit $A \times B$ s'écrit par blocs :

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1t} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{r1} & C_{r2} & \cdots & C_{rt} \end{pmatrix},$$

où pour tout $(i,j) \in [\![1,r]\!] \times [\![1,t]\!]$, on a

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{s} A_{ik} \times B_{kj}$$

Démonstration.
Technique et pénible, sans intérêt. □

Remarque 3.2.4.
Comme toujours avec le produit matriciel, il convient de toujours s'assurer que les blocs ont les tailles adéquates pour pouvoir être mulitpliés entre eux.

Exercice 3.2.5.

Calculer A^2, avec
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4 Matrices semblables

Dans cette section, E et F sont des $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n et p, $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ sont des bases de E et $\mathscr{C}, \mathscr{C}'$ des bases de F.

Définition 4.0.1.
On appelle *matrice de passage de $\mathscr{B}$ dans $\mathscr{B}'$* la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$. On la note parfois $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$.

Théorème 4.0.2 (Changement de base)**.**
Il en existe plusieurs :

Pour un vecteur Soit $x \in E$. On note $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$, et $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$. Alors $X = PX'$.

Pour une application linéaire Avec les mêmes notations, $u \in \mathscr{L}(E, F)$, et enfin $Q = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{C}')$, nous avons $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u) = Q^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)P$.

La formule de changement de base pour un vecteur s'écrit $X = PX'$, et non $X' = PX$ (c'est une source d'erreur fréquente). Au moindre doute, n'hésitez pas à tracer le schéma correspondant.

Remarque 4.0.3.
Le premier point correspond au schéma de la figure 4.1.

Remarque 4.0.4.
Le second point correspond au schéma de la figure 4.2.

$$\begin{array}{ccc} x & & x \\ E, \mathscr{B} & \xleftarrow[P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}]{\mathrm{Id}_E} & E, \mathscr{B}' \\ X & & X' \end{array}$$

FIGURE 4.1 – Illustration de la relation de changement de bases pour un vecteur.

$$\begin{tikzcd}
E, \mathscr{B} \arrow[r, "\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)", "f"'] & F, \mathscr{C} \arrow[d, "\mathrm{Id}_F"', "{\left[P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}'}\right]^{-1} = P_{\mathscr{C}'}^{\mathscr{C}}}"] \\
E, \mathscr{B}' \arrow[u, "P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}", "\mathrm{Id}_E"'] \arrow[r, "f", "\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)"'] & F, \mathscr{C}'
\end{tikzcd}$$

FIGURE 4.2 – Illustration de la relation de changement de bases pour une application linéaire.

Proposition 4.0.5 (Changement de base pour un endomorphisme)**.**
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E et $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors,
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}').$$

Définition 4.0.6 (Matrices semblables)**.**
Soit A et B deux matrices carrées de taille n. Deux matrices A et B sont dites semblables si et seulement s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ vérifiant

$A = P^{-1}BP$.

La relation « A est semblable à B » est appelée relation de ***similitude***.

Proposition 4.0.7 (Caractérisation de la similitude par des endomorphismes)**.**
Soit A et B deux matrices carrées de taille n. A et B sont semblables si et seulement si ce sont les matrices d'un même endomorphisme u exprimées dans deux bases différentes.

Plus exactement, A et B sont semblables si et seulement s'il existe un espace vectoriel E de dimension n, deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ et un endomorphisme u tel que $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = A$ et $\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) = B$.

Démonstration.
Le sens indirect est une conséquence de la formule de changement de base pour un endomorphisme (proposition 4.0.5).

Montrons le sens direct. Supposons que A et B sont semblables, c'est-à-dire qu'il existe P tel que $A = P^{-1}BP$. Choisissons un espace vectoriel E de dimension n et une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de cet espace (on peut par exemple prendre $E = \mathbb{K}^n$ et $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$). Notons e'_1, …, e'_n les vecteurs de E dont les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ sont les colonnes de P. Alors $P = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$.

Notons enfin u l'endomorphisme de E vérifiant $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = B$.

Alors,

$$\begin{aligned}\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) &= \text{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')^{-1}\text{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\text{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')\\ &= P^{-1}BP\\ &= A,\end{aligned}$$

donc A et B sont les deux matrices d'un même endomorphisme relativement aux bases respectives $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}$. □

Remarque 4.0.8.
Deux matrices semblables ont donc même rang et même déterminant.

Proposition 4.0.9.
Considérons deux matrices A et B semblables de taille n. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k et B^k sont des matrices semblables.

Démonstration.
Ce résultat peut être démontré au moins des deux manières suivantes :

Par le calcul On montre par récurrence sur k que pour tout k, on a $A^k = P^{-1}B^kP$. Pour montrer que ce prédicat est héréditaire, il suffit de constater que pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que le prédicat est vérifié, on a également $A^{k+1} = A^kA = P^{-1}B^kPP^{-1}BP$.

Géométriquement A et B sont deux matrices d'un même endomorphisme u, donc A^k et B^k sont deux matrices de u^k.

□

5 Sous-espaces vectoriels stables

Dans cette section, E est un $\mathbb{K}$-ev, et $u \in \mathscr{L}(E)$.

5.1 Définitions et premières propriétés

Définition 5.1.1 (Sev stable par une application linéaire)**.**
On dit qu'un sev F de E est stable par u si $u(F) \subset F$, i.e. pour tout $x \in F$, $u(x) \in F$.

Proposition 5.1.2 (Endomorphisme induit)**.**
Si F est stable par u, soit $u_F\ : F \to F$, $x \mapsto u(x)$. Alors u_F est un endomorphisme de F. On l'appelle ***endomorphisme induit par*** u ***sur*** F.

Démonstration.
u_F est bien une application définie sur F, et par stabilité de F, elle est à valeurs dans F.
La linéarité est directe puisque u est linéaire. □

Proposition 5.1.3.
Si F et G sont deux sev stables par u, alors $F + G$ et $F \cap G$ le sont aussi.

Démonstration.
Direct. □

Théorème 5.1.4 (Commutativité et stabilité)**.**
Soit $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tels que u et v commutent. Alors $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par v.

Démonstration.
• Soit $x \in \operatorname{Ker} u$. Alors $u(v(x)) = u \circ v(x) = v \circ u(x) = v(0) = 0$, donc $v(x) \in \operatorname{Ker} u$.
• Soit $y \in \operatorname{Im} u$. Il existe alors $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Alors $v(x) = v \circ u(x) = u \circ v(x) = u(v(x)) \in \operatorname{Im} u$. □

Lemme 5.1.5 (Matrices triangulaires et stabilité)**.**
Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $E_k = \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $M = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.

Alors M est triangulaire supérieure si et seulement si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, E_k est stable par u.

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Pour que E_k soit stable par u, il faut que $u(e_k) \in E_k$, c'est-à-dire que seuls les k premières lignes de la matrice colonne des coordonnées de $u(e_k)$ dans $\mathscr{B}$ soient non nulles.

Or la matrice M de u est la matrice formée de ces colonnes. Pour que tous les E_k, pour $k \in [\![1, n]\!]$ soient stables par u, il est donc nécessaire qu'elle soit triangulaire supérieure.

Réciproquement, supposons que cette matrice soit triangulaire supérieure. Alors pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et tout $i \in [\![1, k]\!]$, on a $u(e_i) \in E_i \subset E_k$. Donc pour tout $k \in [\![1, k]\!]$, $u(E_k) \subset \operatorname{Vect} u(e_1), \ldots, u(e_k) \subset E_k$. □

Remarque 5.1.6.
Ce résultat s'adapte aux matrices triangulaires inférieures, en posant $E_1 = \operatorname{Vect}(e_k)$, $E_2 = \operatorname{Vect}(e_{k-1}, e_k)$, ...

5.2 Stabilité et matrices triangulaires par blocs

Proposition 5.2.1 (Stabilité et écriture par blocs)**.**
Soit E un espace vectoriel de dimension n, F un sous-espace vectoriel de dimension p. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ une base de E adaptée à F. Soit enfin $u \in \mathscr{L}(E)$. On a la caractérisation suivante : F est stable par u si et seulement si la matrice de u dans $\mathscr{B}$ est triangulaire supérieure par blocs :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

où $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ est la matrice de l'endormophisme induit u_F.

Démonstration.
• Supposons que F est stable par u.
u a de toutes façons une décompositon de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ D & C \end{pmatrix}$, où A est carrée d'ordre p et C carrée d'ordre $n - p$.
Puisque F est stable par u, alors pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $u(e_i) \in F$, et donc les composantes de $u(e_i)$ sur $e_{p+1}, \ldots, e_n$ sont nulles. Ceci assure par définition que $D = 0$. De plus, $u|_F$ est une application linéaire de F dans E. Si l'on note $\mathscr{B}' = (e_1, \ldots, e_p)$, alors $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}', \mathscr{B}}(u|_F) = \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}$. Mais on voit facilement qu'en considérant u_F, qui n'est autre que $u|_F$ pour laquelle l'ensemble d'arrivée est F, alors $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'}(u_F)$ n'est autre que $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}', \mathscr{B}}(u|_F)$ à laquelle on a ôté toutes les coordonnées que $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$, qui sont nulles : c'est exactement A.
• Réciproquement, suppposons que $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$. Alors cela signifie que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $u(e_i) \in F$, les coordonnées de $u(e_i)$ sur $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ sont nulles, et donc $u(e_i) \in \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$, i.e. $u(e_i) \in F$. Par linéarité, on a donc $u(\operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_p)) \subset F$, donc $u(F) \subset F$. □

Proposition 5.2.2 (Stabilité de sev supplémentaires et écriture par blocs)**.**
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $F_1, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Les F_i sont tous stables

par u si et seulement si la matrice de u dans une base $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_p)$ adaptée à la somme directe est diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix}$$

où $A_i \in \mathscr{M}_{n_i}(\mathbb{K})$ est la matrice de l'endomorphisme induit u_{F_i}.

Démonstration.
On remarque que dans la proposition précédente, en appliquant exactement le même rainsonnement que pour F, $G = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ est stable par u si et seulement si $B = 0$. Or G est un supplémentaire de F. Nous avons donc exactement montré le résultat voulu dans le cas $p = 2$.
Le cas général se démontre de la manière, par récurrence en écrivant que $E = \bigoplus_{i=1}^{p+1} F_i = \left(\bigoplus_{i=1}^{p} F_i\right) \oplus F_{p+1}$. □

Corollaire 5.2.3.
Soit E un espace de dimension finie n, de base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme laissant stable les n droites vectorielles $F_i = \mathrm{Vect}\,(e_i)$. Alors, la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$ est diagonale :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où chaque $\lambda_i \in \mathbb{K}$.

6 Exercices classiques

6.1 Image d'une base par un endomorphisme

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un endomorphisme u tel que $\mathrm{Ker}(u) = F$ et $\mathrm{Im}(u) = G$.
2. Construire un tel endomorphisme u avec $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \}$ dans $\mathbb{R}^3$ et $G = \{ \lambda(2, -1, -1) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$.

6.2 Une caractérisation des homothéties

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, où E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

1. Déterminer l'ensemble des endomorphismes de E laissant stables tous les sev de dimension 1.

   Cette question est archi-classique, et n'est pas toujours présentée sous cette forme.
   On pourra se demander le lien entre
   $$\forall x \in E, \exists \lambda \in \mathbb{K}, f(x) = \lambda x$$
   et
   $$\exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, f(x) = \lambda x.$$
2. Déterminer l'ensemble des endomorphismes de E laissant stables tous les sev de dimension 2.
3. Si E est de dimension finie, en déduire le "centre" de $\mathscr{L}(E)$, c'est-à-dire l'ensemble endomorphismes qui commutent avec tous les endomorphismes (on pourra remarquer qu'un tel endomorphisme commute nécessairement avec les projections sur toutes les droites vectorielles).
4. Quel est le centre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$?
5. Retrouver le résultat précédent en utilisant la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

6.3 Noyaux itérés

Soit f un endomorphisme d'un espace de dimension finie n non nulle. On définit, pour tout entier naturel p :

$$F_p = \operatorname{Ker}(f^p) \quad \text{et} \quad G_p = \operatorname{Im}(f^p)$$

(f^p désigne l'itérée d'ordre p de f : $f^0 = \mathrm{Id}$ et, $f^{p+1} = f \circ f^p$).

1. Démontrer que, des deux suites de s.e.v. (F_p) et (G_p), l'une est croissante et l'autre décroissante (pour l'inclusion).
2. Démontrer qu'il existe un plus petit entier naturel r tel que $F_r = F_{r+1}$, et démontrer qu'alors, pour tout entier naturel p supérieur ou égal à r, $F_p = F_{p+1}$.
3. Démontrer qu'il existe un plus petit entier naturel s tel que $G_s = G_{s+1}$, et démontrer qu'alors, pour tout entier naturel p supérieur ou égal à s, $G_p = G_{p+1}$. Y-a-t-il un lien entre r et s ?
4. Démontrer que G_s et F_r sont supplémentaires dans E.

6.4 « Inégalité triangulaire » et une autre inégalité autour du rang

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et $u, v \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. a) Montrer que $\operatorname{rg}(u+v) \leqslant \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$.
   b) En déduire que $|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leqslant \operatorname{rg}(u+v)$.
2. On suppose que $E = F$, et $\dim E = n$. Montrer l'encadrement :

$$\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) - n \leqslant \operatorname{rg}(u \circ v) \leqslant \inf(\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v)).$$

6.5 Endomorphismes nilpotents

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$. On dit que $f \in \mathscr{L}(E)$ est nilpotent lorsqu'il existe $k \geqslant 1$ tel que $f^k = 0$.

1. Montrer qu'il existe un unique entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{p-1} \neq 0$ et $f^p = 0$. Cet entier est appelé *indice de nilpotence* de f.

Dans cet énoncé, on considère $f \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice p.

2. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\mathscr{F} = (x, f(x), \cdots, f^{p-1}(x))$ est une famille libre.
3. En déduire que $p \leqslant n$.
4. On suppose dans cette question que $p = n$. Déterminer $\operatorname{Mat}_{\mathscr{F}}(f)$ et $\operatorname{rg}(f)$.
5. Donner un exemple d'espace vectoriel E de dimension n et d'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice n.