XI. Séries entières

31 octobre 2024

Table des matières

C - Séries entières

Les objectifs de cette section sont les suivants :
- *étudier la convergence d'une série entière et mettre en évidence la notion de rayon de convergence ;*
- *étudier les propriétés de sa somme en se limitant à la continuité dans le cas d'une variable complexe ;*
- *établir les développements en série entière des fonctions usuelles.*

Les séries entières trouveront un cadre d'application dans la notion de fonction génératrice en probabilités et au détour d'exemples de résolution d'équations différentielles linéaires.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Rayon de convergence	
Série entière de la variable réelle, de la variable complexe. Lemme d'Abel : si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $\|z\| < \|z_0\|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.	
Rayon de convergence R défini comme borne supérieure dans $[0,+\infty]$ de l'ensemble des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée.	La série $\sum a_n z^n$ converge absolument si $\|z\| < R$, et elle diverge grossièrement si $\|z\| > R$.
Intervalle ouvert de convergence. Disque ouvert de convergence.	
Avec R_a (resp. R_b) le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, (resp. $\sum b_n z^n$) :	Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $R\left(\sum n^\alpha x^n\right) = 1$.
– si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$; – si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.	Le résultat s'applique en particulier lorsque $a_n = o(b_n)$.
Application de la règle de d'Alembert pour les séries numériques au calcul du rayon.	La limite du rapport $\dfrac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|}$ peut être directement utilisée.
Rayon de convergence de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières.	
b) Régularité de la somme d'une série entière de la variable réelle	
Convergence normale d'une série entière d'une variable réelle sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.	
Continuité de la somme sur l'intervalle ouvert de convergence.	L'étude des propriétés de la somme au bord de l'intervalle ouvert de convergence n'est pas un objectif du programme.
Primitivation d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence.	Relation $R\left(\sum a_n x^n\right) = R\left(\sum n a_n x^n\right)$.
Caractère $\mathscr{C}^\infty$ de la somme d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence et obtention des dérivées par dérivation terme à terme.	
Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif au moyen des dérivées successives en 0 de sa somme.	

Contenus	Capacités & commentaires
c) Développement en série entière au voisinage de 0 d'une fonction d'une variable réelle	
Fonction développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$.	
Série de Taylor d'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$.	Formule de Taylor avec reste intégral.
Unicité du développement en série entière.	
Développements des fonctions usuelles.	Les étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions : exponentielle, cosinus, sinus, cosinus et sinus hyperboliques, Arctan, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto (1+x)^\alpha$. Les étudiants doivent savoir développer une fonction en série entière à l'aide d'une équation différentielle linéaire.
d) Séries géométrique et exponentielle d'une variable complexe	
Continuité de la somme d'une série entière de la variable complexe sur le disque ouvert de convergence.	La démonstration est hors programme.
Développement de $\dfrac{1}{1-z}$ sur le disque unité ouvert.	
Développement de $\exp(z)$ sur $\mathbb{C}$.	

1 Rayon de convergence

1.1 Définition de série entière

Définition 1.1.1 (Série entière)**.**

- On appelle ***série entière complexe*** toute série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ pour laquelle il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto a_n z^n$. Par abus, on écrira cette série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$.
- On appelle ***série entière réelle*** toute série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ pour laquelle il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a_n x^n$. Par abus, on écrira cette série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$.

Remarque 1.1.2.

- Lorsque la suite (a_n) n'est définie qu'à partir du rang n_0, la série entière sera notée $\sum_{n\geqslant n_0} a_n z^n$.
- Les sommes partielles d'une série entière sont des fonctions polynomiales.

La plupart des résultats et définitions qui vont suivre sont valables aussi bien pour les séries entières réelles que complexes. Pour faire plus simple nous ne les donnerons que dans le cas des séries complexes, mais ils s'adaptent directement au cas des séries réelles.
Dans toute la suite, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ sera une suite complexe, et $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ sera la série entière complexe associée.

Définition 1.1.3.
Le ***domaine de convergence*** de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est l'ensemble des complexes z pour lesquels la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge. C'est donc le domaine de défintion de la fonction $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, qui est appelée la ***somme de la série entière***.

Remarque 1.1.4.
0 est toujours dans le domaine de convergence et $f(0) = a_0$.

Exemple 1.1.5.

(i) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ admet $\mathbb{C}$ pour domaine de convergence. Sa somme est alors la fonction $z \mapsto \mathrm{e}^z$.

(ii) $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ admet $\mathscr{B}(0,1) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$ pour domaine de convergence. Sa somme est alors la fonction $z \mapsto \frac{1}{1-z}$.

(iii) $\sum_{n\geqslant 0} n! z^n$ admet $\{0\}$ pour domaine de convergence.

1.2 Rayon et disque de convergence, cercle d'incertitude

Le domaine de convergence d'une série de fonctions quelconque peut être compliqué dans sa forme. Nous allons voir que celui d'une série est très simple : c'est un disque, la seule « liberté » étant qu'individuellement les points du bord de ce disque peuvent être ou pas dans le domaine de convergence.
Le lemme suivant est le point de départ de la définition de rayon de convergence :

Lemme 1.2.1 (Lemme d'Abel)**.**
Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Si la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est absolument convergente.

Démonstration.
Soit M un majorant de $(|a_n z_0^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n z^n| = \left|a_n z_0^n \times \left(\frac{z}{z_0}\right)^n\right| \leqslant M\left|\frac{z}{z_0}\right|^n$. On conclut par majoration de séries à termes réels positifs. □

Remarque 1.2.2.

- S'il existe un $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\sum_{n\geqslant 0} a_n z_0^n$ converge, alors $a_n z_0^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc avec le lemme d'Abel, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est absolument convergente.
- Si la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \geqslant |z_0|$, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

Définition 1.2.3 (Rayon de convergence)**.**
Soit $I = \{r \in \mathbb{R}_+,\ (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$. C'est un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$ contenant 0. Il admet donc une borne supérieure dans $\overline{R}$, appelée ***rayon de convergence*** de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

Remarque 1.2.4.

- Si $R = 0$, $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ ne converge qu'en 0.
- Si $R = +\infty$, $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge sur $\mathbb{C}$.

Commençons par une propriété immédiate :

Proposition 1.2.5 (Module et produit externe)**.**

(i) $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} |a_n| z^n$ ont le même rayon de convergence.

(ii) Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Alors la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \lambda a_n z^n$ a le même rayon de convergence que $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

Théorème 1.2.6 (Disque de convergence)**.**
Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R, et $z \in \mathbb{C}$. Alors

(i) si $|z| < R$, $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument ;

(ii) si $|z| > R$, $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge grossièrement (la suite $(a_n z^n)$ n'est même pas bornée) ;

(iii) si $|z| = R$, on ne peut rien dire *a priori* de la convergence de $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

Démonstration.
Elle repose entièrement sur le lemme d'Abel. □

Exemple 1.2.7.
Concernant le 3ème point, considérer les exemples suivants :

1. $z = 1$ et $\sum_{n\geqslant 0} z_n$
2. $z = -1$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} z_n$
3. $z = 1$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} z_n$

Définition 1.2.8 (Disque de convergence et cercle d'incertitude)**.**
Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.
La boule ouverte de centre 0 et de rayon R est appelée ***disque ouvert de convergence***. Nous le noterons $\mathscr{D}(0, R)$.

La sphère de centre 0 et de rayon R est appellée ***cercle d'incertitude***. Nous le noterons $\mathscr{C}(0,R)$.

Remarque 1.2.9.
Dans le cas d'une série entière réelle, le disque de convergence est $]-R,R[$ et le cercle d'incertitude est la paire $\{R,-R\}$.

Définition 1.2.10 (Somme d'une série entière)**.**
On appelle ***somme*** de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ la fonction

$$S : \begin{array}{ccc} \mathscr{D}(0,R) & \to & \mathbb{K} \\ z & \mapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{array}.$$

Exercice 1.2.11.
Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Montrer que l'on a (les bornes supérieures étant prises dans $\overline{\mathbb{R}}$) :

1. $R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+,\ (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente}\}$.
2. $R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+,\ (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est absolument convergente}\}$.
3. $R = \sup\left\{r \in \mathbb{R}_+,\ a_n r^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right\}$.

Théorème 1.2.12 (Convergence normale)**.**
Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$. Soit $r \in]0,R[$.
Alors $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge normalement sur le disque $\mathscr{D}(0,r)$.

Démonstration.
Par croissance de la fonction réelle $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$, $\sup_{z\in\mathscr{D}(0,r)} |a_n z^n| = |a_n| r^n$. Or par définition du rayon de convergence, $\sum_{n\geqslant 0} |a_n| r^n$ converge. Il y a donc bien convergence normale sur $\mathscr{D}(0,r)$. □

2 Méthodes de détermination du rayon de convergence

La première difficulté lors de l'étude d'une série entière est la déterminantion de son rayon de convergence. Dans les sections suivantes, nous allons explorer quelques méthodes pour répondre à cette problématique.

2.1 Résultats de comparaison

Théorème 2.1.1.
Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

(i) Si à partir d'un certain rang $|a_n| \leqslant |b_n|$, alors $R_a \geqslant R_b$;
(ii) Si $a_n = o(b_n)$ ou $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$;
(iii) Si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.

Démonstration.

(i) Soit $r \in \mathbb{R}_+$ tel que $r < R_b$. Alors $(b_n r^n)$ est bornée, donc $(a_n r^n)$ aussi. Ainsi $r < R_a$. Si $R_a < R_b$, il existe r tel que $R_a < r < R_b$, ce qui est absurde. Ainsi $R_a \geqslant R_b$.
(ii) Dans les deux cas $a_n = O(b_n)$, donc il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel qu'à partir d'un certain rang $|a_n| \leqslant M|b_n|$ et on conclut avec le premier point.
(iii) Si $a_n \sim b_n$, alors $a_n = O(b_n)$ et $b_n = O(a_n)$ et on conclut avec le point précédent. □

Exemple 2.1.2.
On pose $a_n = \sin(n)$. On sait que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ admet 1 pour rayon

de convergence, et pour tout n, $|a_n| \leqslant 1$, donc le rayon de convergence R de $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est supérieur ou égal à 1.
Mais on sait également que (a_n) ne tend pas vers 0, donc $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge pour $z = 1$, donc $R \leqslant 1$.
Finalement $R = 1$.
Question bonus : calculer la somme de cette série entière.

Exercice 2.1.3.
Plus généralement, soit (a_n) une suite complexe bornée ne tendant pas vers 0. Montrer que le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ vaut 1.

Exercice 2.1.4.
Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum \dfrac{z^n}{n^2+n+1}$
2. $\ln(1+n)z^n$

2.2 Règle de d'Alembert

La règle de d'Alembert pour les séries s'adapte au cas des séries entières :

Théorème 2.2.1 (Règle de d'Alembert)**.**
Soit (a_n) une suite ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. S'il existe $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ telle que $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ vaut $\dfrac{1}{\ell}$, avec les conventions habituelles « $\dfrac{1}{+\infty} = 0$ » et « $\dfrac{1}{0^+} = +\infty$ » (car ici $\ell \geqslant 0$).

Remarque 2.2.2.
Cette méthode est efficace dans les cas où a_n est définie uniquement avec des exponentielles et des produits au sens large : puissances, factorielles, fractions... Elle est peu utile dans les autres cas.

Exercice 2.2.3.
Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum \dfrac{n!}{n^n} z^n$
2. $\sum \dfrac{z^{2n}}{n^2+1}$
3. $\sum \dfrac{n}{2^n} z^{3n}$
4. $\sum \dfrac{2^n}{3^n+1} z^{3n}$

2.3 Utilisation de suites bornées

Les exercices les plus délicats de détermination de rayons de convergence se font en utilisant plutôt les suites bornées et les considérations suivantes :

Proposition 2.3.1.
(i) Si la suite $(a_n z^n)$ est bornée, alors $|z| \leqslant R$;
(ii) Si la suite $(a_n z^n)$ est non bornée, alors $|z| \geqslant R$;
(iii) Si la suite $(a_n z^n)$ converge vers 0, alors $|z| \leqslant R$;
(iv) Si la suite $(a_n z^n)$ ne converge pas vers 0 , alors $|z| \geqslant R$.

Exemple 2.3.2.
Déterminons le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ où a_n désigne la n-ième décimale après la virgule dans l'écriture décimale illimitée de $\sqrt{3}$.
On a $a_n \leqslant 9$ pour tout n donc le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est supérieur à celui de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} 9z^n$, qui est égal à 1 (série géométrique de raison z). Donc $R \geqslant 1$.
De plus la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ diverge puisque son terme général ne tend pas vers 0 : en effet, si la suite (a_n) tendait vers 0, comme il s'agit d'une suite d'entiers, elle serait constante égale à 0 à partir d'un certain rang, et le nombre $\sqrt{3}$ serait un nombre décimal. Puisque la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge pour $z = 1$, on a $R \leqslant 1$.
Finalement, $R = 1$.

Exercice 2.3.3.
Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$. Déterminer en fonction de R le rayon de convergence de $\sum a_n^2 z^n$.

2.4 Utilisation du cercle d'incertitude

Dans le même esprit que la section précédente, nous avons le résultat suivant :

Proposition 2.4.1.
S'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que

(i) $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z_0^n$ converge non absolument

ou

(ii) $(a_n z_0^n)$ est bornée mais $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z_0^n$ diverge,

alors le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ vaut $|z_0|$.

Démonstration.
Il suffit d'utiliser **1.2.6** □

Exercice 2.4.2.
Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \sin(n) z^n$ à l'aide du résultat précédent.
Aurait-on pu utiliser la règle de d'Alembert ?

3 Opérations sur les séries entières

Dans toute cette section nous considérons deux séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $d\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

3.1 Somme

Nous avons déjà donné un résultat concernant la multiplication d'une série entière par un scalaire non nul en **1.2.5**.

Définition 3.1.1 (Somme de deux séries entières)**.**
On appelle ***somme*** des deux séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $d\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$, la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} (a_n + b_n) z^n$.

Proposition 3.1.2 (Rayon de convergence de la somme de deux séries entières)**.**
Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $d\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ de rayons de convergence R_a et R_b.

(i) Si $R_a \neq R_b$, la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n$ a pour rayon de convergence $R = \min(R_a, R_b)$.

(ii) Si $R_a = R_b$, la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n$ a un rayon de convergence $R \geqslant R_a$.

(iii) Dans les deux cas, on a, pour tout z tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

Démonstration.
Soit R' le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n$ et $R = \min(R_a, R_b)$.

(i) Soit $r < R$. Les suites $(a_n r^n)$ et $(b_n r^n)$ sont bornées, donc $((a_n + b_n) r^n)$ également, et ainsi $R \leqslant R'$.
Soit $r > R$. Plus précisèment, si par exemple $R_a < R_b$, prenons $r \in]R_a, R_b[$. Alors $(b_n r^n)$ est bornée mais pas $(a_n r^n)$, donc $((a_n + b_n) r^n)$ n'est pas bornée. Par

conséquent $R \geqslant R'$.
Finalement $R = R'$.

(ii) En reprenant la première partie du point précédent, nous avons encore $R \leqslant R'$. Mais nous ne pouvons pas en dire plus, la seconde partie du point précédent n'étant plus valable.

(iii) Si $|z| < R$, les deux séries $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ convergent absolument, donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n$ aussi, et nous avons $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$.

□

Exercice 3.1.3.
Donner un exemple de deux séries entières de même rayon de convergence R, dont la somme a un rayon de convergence strictement supérieur.

3.2 Produit de Cauchy

Définition 3.2.1 (Produit de Cauchy)**.**
La série entière ***produit de Cauchy*** de $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $d \sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ est la série entière $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ où, pour tout entier naturel n, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Proposition 3.2.2 (Convergence du produit de Cauchy)**.**
Notons R_c le rayon de convergence du produit de Cauchy défini en **3.2.1**.
Alors $R_c \geqslant \min(R_a, R_b)$, et $\forall\, z \in D(0, \min(R_a, R_b))$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right).$$

Il s'agit d'une conséquence du résultat sur le produit de Cauchy de deux séries numériques.

Nous pouvons d'ailleurs reprendre les mêmes exemples que dans le chapitre sur les séries :

Exemple 3.2.3.
Établir que si $(z, z') \in \mathbb{C}^3$, $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^{z} \times \mathrm{e}^{z'}$.

Exemple 3.2.4.
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Grâce à un produit de Cauchy, montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n = \dfrac{1}{(1-z)^2} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right)^2$.

4 Régularité

On ne s'intéressera dans cette section qu'à des séries entières réelles. Dans la suite, $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière réelle de rayon de convergence R.

4.1 Convergence pour les séries entières réelles

On rappelle que dans le cas d'une série entière réell, le disque de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est l'intervalle $]-R, R[$. Il est appelé l'***intervalle ouvert de convergence***. L'***intervalle de convergence*** est l'intervalle sur lequel la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge. Si on le note I, il vérifie donc $]-R, R[\subset I \subset [-R, R]$.

Rappelons le théorème **1.2.12**, dans la version « série entière réelle » :

Théorème 4.1.1 (Convergence normale)**.**
Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$. Alors $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge normalement sur tout segment de l'intervalle ouvert de convergence.

Exercice 4.1.2.
Déterminer les domaines de convergence simple, uniforme, normale pour :

1. $\sum x^n$
2. $\sum \frac{x^n}{n}d$
3. $\sum \frac{x^n}{n^2}$

4.2 Continuité

La conséquence directe du théorème **4.1.1** est le résultat suivant :

Théorème 4.2.1 (Continuité d'une série entière)**.**
La somme $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur l'intervalle ouvert de convergence.

4.3 Dérivation

5 Fonctions développables en série entière

6 Exemples de séries entières d'une variable complexe

7 Exercices classiques

7.1 Comparaisons de rayons de convergence

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} n^\alpha z^n$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{P(n)}{Q(n)} z^n$ où $P, Q \in \mathbb{C}[X]$.