VII. Réduction des endomorphismes et des matrices

3 octobre 2024

Table des matières

c) Diagonalisation en dimension finie

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale.	Une telle base est constituée de vecteurs propres.
Une matrice carrée est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.	Interprétation en termes d'endomorphisme. Application au calcul des puissances d'une matrice diagonalisable, à des exemples de systèmes différentiels à coefficients constants. Dans la pratique des cas numériques, on se limite à $n=2$ ou $n=3$.
Un endomorphisme d'un espace vectoriel E est diagonalisable si et seulement si la somme de ses sous-espaces propres est égale à E.	Exemple des projecteurs et des symétries.
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace.	Traduction matricielle.
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ et si, pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à sa multiplicité.	Traduction matricielle.
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.	Polynôme caractéristique scindé à racines simples. Traduction matricielle.

d) Diagonalisabilité et polynômes annulateurs

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.	La démonstration n'est pas exigible. Traduction matricielle. Le lemme de décomposition des noyaux est hors programme.
L'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace vectoriel stable est diagonalisable.	
Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement s'il admet $\prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} (X-\lambda)$ pour polynôme annulateur.	

e) Trigonalisation en dimension finie

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire.	Expression de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable à l'aide des valeurs propres.
Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.	Interprétation en termes d'endomorphisme.
Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.	La démonstration n'est pas exigible. Traduction matricielle.
Toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.	La technique générale de trigonalisation est hors programme. On se limite dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication.

Dans ce chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

1 Diagonalisation en dimension finie

1.1 Endomorphismes diagonalisables

Définition 1.1.1.
Un endomorphisme de $u \in \mathscr{L}(E)$ est dit ***diagonalisable*** lorsqu'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale.

Remarque 1.1.2.
Une telle base si elle existe est appelée une ***base de diagonalisation*** de u.

Proposition 1.1.3.
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On a équivalence entre les points suivants :

(i) u est diagonalisable ;

(ii) il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u ;

(iii) E est somme directe des sous-espaces propres de u : $E = \bigoplus\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$.

Remarque 1.1.4.

- Puisque les sous-espaces propres de u sont toujours en somme directe, cette dernière condition est équivalente à $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim(E_\lambda(u)) = n$.
- Si u est diagonalisable dans une base $\mathscr{B}$, alors les coefficients diagonaux de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ sont les valeurs propres de u.

Exemple 1.1.5.
Les homothéties, les projecteurs et les symétries sont des endomorphismes diagonalisables.

Exercice 1.1.6.

1. Soit u un endomorphisme de E. Montrer que tout sous-espace propre associé à une valeur propre non nulle est inclus dans $\mathrm{Im}(u)$.
2. Montrer que tout vecteur propre de u est dans $\mathrm{Im}(u)$ ou dans $\mathrm{Ker}(u)$.
3. Montrer que pour que u soit diagonalisable, il est nécessaire que
$$\mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u) = E$$
4. Montrer que si $E = \mathbb{K}_n[X]$ et $u : P \longmapsto P - P'$, alors $\mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u) = E$ mais u n'est pas diagonalisable.

1.2 Matrices diagonalisables

Définition 1.2.1.
Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite ***diagonalisable*** si elle est semblable à une matrice diagonale.

Théorème 1.2.2.
Soit $\mathscr{B}$ une base de E, $u \in \mathscr{L}(E)$ et $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathbb{K})$. Alors u est diagonalisable si et seulement si M est diagonalisable.

1.3 Pratique de la diagonalisation

Pour diagonaliser un endomorphisme u en pratique, il convient d'abord de calculer son polynôme caractéristique et d'en calculer les racines, afin de déterminer les valeurs propres.
Pour savoir si u est diagonalisable, il suffit de déterminer les dimensions des sous-espaces propres, et de vérifier si $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim(E_\lambda(u)) = n$ ou pas.
Si l'on veut en plus obtenir une base de diagonalisation, il faut alors déterminer une base de chaque sous-espace propre, et les concaténer.
Dans le cas d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ on procède de la même manière.
La base de diagonalisation $\mathscr{B}$ permet d'obtenir la matrice de passage P

telle que $A = PDP^{-1}$ où D est diagonale. Si $\mathscr{C}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$, alors $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})$.

Exercice 1.3.1.
Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ? Si oui, déterminer P telle que $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad ; \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 Diagonalisabilité et polynômes annulateurs

Proposition 2.0.1 (Condition nécessaire de diagonalisabilité)**.**
Si u (ou A) est diagonalisable, son polynôme caractéristique est scindé.

Remarque 2.0.2.
Cette condition n'est pas suffisante. Considérer par exemple la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Théorème 2.0.3 (Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité)**.**
$u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est digonalisable si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(i) son polynôme caractéristique est scindé ;

(ii) la multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre.

Corollaire 2.0.4 (Condition suffisante de diagonalisabilité)**.**
Si u (ou A) admet n valeurs propres deux à deux distinctes – ce qui revient

à dire que son polynôme caractéristique est scindé à racines simples – alors u (ou A) est diagonalisable.

3 Trigonalisation en dimension finie