Exercice 9 :

m boules noires
n boules blanches

· On tire les boules de l'urne deux par deux, le tirage se fait donc sans remise et sans ordre.

Soit BN_i l'évènement : " on tire une boule blanche et une boule noire au i-ième tirage

Montrons par récurrence que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $P(k)$: " La probabilité de tirer une boulle blanche et une boule noire au k-ième tirage vaut : $P(BN_k) = \dfrac{2(n+1-k)^2}{(2n+1-k)(2n-k)}$ "

important ! sachant $BN_1, \dots, BN_{k-1}$

Initialisation :

~~Le nombre~~ On tire une boule parmi ~~une~~ n blanches et une autre parmi ~~les~~ n noires simultanément.

Le nombre de possibilités de tirages est donc $\binom{n}{1} \times \binom{n}{1}$

Le nombre de tirage total vaut $\binom{2n}{2}$ car on tire deux boules parmi 2n

Mais tu ne peux pas laisser cette expression ainsi !!

Donc $P(BN_1) = \dfrac{\binom{n}{1} \times \binom{n}{1}}{\binom{2n}{2}} = \dfrac{(n!)^2 \times 2! \times (2n-2)!}{((n-1)!)^2 \times (1!)^2 \times (2n)!}$

$=n/(2n-1)$!!!!! $= \dfrac{2(n+1-1)^2}{(2n-1+1)(2n-1)}$

donc $\mathcal{P}(1)$

<u>Hérédité :</u> Soit $k \in [\![1; n-1]\!]$, supposons $\mathcal{P}(k)$

$$P(BN_{k+1}) = \frac{\binom{n-k}{1}\binom{n-k}{1}}{\binom{2(n-k)}{2}} =(n-k)/(2(n-k)-1)$$

• Il y a eu k tirages où l'on a tiré une boule blanche et une boule noire.
Il reste donc $n-k$ boules de chaque couleur et donc $2(n-k)$ au total.

$$\text{donc } P(BN_{k+1}) = \frac{((n-k)!)^2 \times 2! \times (2(n-k-1))!}{((n-k-1)!)^2 \times (1!)^2 \times (2(n-k))!}$$

$$= \frac{2(n-k)^2}{(2n-k)(2n-k-1)}$$

$$P(BN_{k+1}) = \frac{2(n-(k+1)+1)^2}{(2n-(k+1)+1)(2n-(k+1))}$$

donc $\mathcal{P}(k+1)$

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, } \forall k \in [\![1; n]\!], \mathcal{P}(k)}$$

• La probabilité de tirer ~~que~~ une boule noire et une blanche à chaque tirage vaut alors

$$\prod_{k=1}^{n} P(BN_k) = \prod_{k=1}^{n} \frac{2(n-k+1)^2}{(2n-k)(2n+1-k)}$$

$$= 2^n \times \prod_{k=1}^{n} (n-k+1)^2 \times \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{(2n-k)} \times \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{(2n+1-k)}$$

$$= 2^n \left((n+1)!\right)^2 \times \frac{(n-1)!}{(2n-1)!} \times \frac{n!}{(2n)!}$$

horrible

$$\boxed{= \frac{2^n \left((n+1)!\right)^2 \, n!\,(n-1)!}{(2n)!\,(2n-1)!}}$$

=2^n / (n parmi 2n)