Devoir surveillé n° 2

Durée : 4 heures, calculatrices et documents interdits

I. Somme de projecteurs

Notations

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels et $\mathscr{M}_n$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels.

Dans tout le problème, X est un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ sur le corps des réels et T un endomorphisme non nul de X.

Soit $\mathscr{B}$ une base de X, on note $\mathbb{T}_{\mathscr{B}}$ la matrice représentant T dans cette base. On note $N(T)$ le noyau de T et $R(T)$ l'image de T.
On dit que T est une homothétie si c'est un multiple scalaire de l'identité. On appelle projecteur un endomorphisme P de X idempotent, c'est-a-dire tel que $P^2 = P$. On note I l'endomorphisme identité de X, $\mathbb{I}_n$ la matrice identité de $\mathscr{M}_n$ et $\mathbb{O}_n$ la matrice nulle.

1- Traces et projecteurs

Soit P un projecteur de X.

1) Démontrer que $\operatorname{rg} P = \operatorname{tr} P$.

On pose $P' = I - P$.

2) Montrer que $R(P') = N(P)$ et que $R(P) = N(P')$.

3) Montrer que si l 'endomorphisme S est une somme finie de projecteurs $P_1, \cdots, P_m$, alors $\operatorname{tr} S \in \mathbb{N}$ et $\operatorname{tr} S \geqslant \operatorname{rg} S$.

2-Projecteurs de rang 1

On suppose dans cette partie que le rang du projecteur P est égal à 1.

4) Démontrer qu 'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $PTP = \mu P$.

Soit $\mathscr{C} = \{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ une base de X adaptée à la décomposition $X = R(P) \oplus N(P)$.

5) Montrer que dans la base $\mathscr{C}$ la matrice représentant T s 'écrit

$$(1) \qquad \mathbb{T}_{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} \mu & \mathrm{x} & \cdots & \mathrm{x} \\ \mathrm{x} & & & \\ \vdots & & \mathbb{B} & \\ \mathrm{x} & & & \end{pmatrix},$$

où μ est le nombre réel dont l'existence a été prouvé en question **4)** et $\mathbb{B} \in \mathscr{M}_{n-1}$.

6) Montrer que si $P'TP'$ n'est pas proportionnel à P', alors $\mathbb{B}$, défini en (1), n'est pas la matrice d'une homothétie. On rappelle que $P' = I - P$.

3- Endomorphismes différents d'une homothétie

• On suppose dans cette partie que l'endomorphisme T n'est pas une homothétie.
• L'énoncé initial demandait de démontrer que si T n'est ni une homothétie ni l'endomorphisme nul, il existe $x \in X$ tel que $(x, T(x))$ est libre. Ayant déjà traité cet exercice en cours, vous pourrez utiliser librement ce résultat dans la suite, sans le démontrer.
• Soit $t \in \mathbb{R}$, on admettra aussi qu'en dimension $n \geqslant 3$, il existe un projecteur L de X de rang 1, tel que d'une part $LTL = tL$ et d'autre part $L'TL'$ ne soit pas proportionnel à $L' = I - L$.
• Soit $t_1, \cdots, t_n$ une suite de n nombres réels vérifiant $\operatorname{tr} T = \sum_{i=1}^{n} t_i$.

7) En dimension $n = 2$, démontrer qu'il existe une base $\mathscr{B}''$ dans laquelle $\mathbb{T}_{\mathscr{B}''}$ a pour éléments diagonaux t_1 et t_2.

8) En dimension $n \geqslant 3$, à l'aide des questions **5)** et **6)** démontrer qu'il existe une base $\mathscr{C}$ dans laquelle la matrice représentant T s'écrit

$$\mathbb{T}_{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} t_1 & \mathrm{x} & \cdots & \mathrm{x} \\ \mathrm{x} & & & \\ \vdots & & \mathbb{B} & \\ \mathrm{x} & & & \end{pmatrix},$$

où $\mathbb{B}$ n'est pas une homothétie.

9) En dimension $n \geqslant 3$, démontrer par récurrence qu'il existe une base $\mathscr{B}''$ dans laquelle la diagonale de $\mathbb{T}_{\mathscr{B}''}$ ait pour éléments diagonaux les $t_1, \cdots, t_n$.

4 -Décomposition en somme de projecteurs

On suppose désormais que T est un endomorphisme de X vérifiant $\operatorname{tr} T \in \mathbb{N}$ et $\operatorname{tr} T \geqslant \operatorname{rg} T$. On pose $\rho = \operatorname{rg} T$ et $\theta = \operatorname{tr} T$.

10) Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ dans laquelle $\mathbb{T}_{\mathscr{B}}$ est de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{T}_1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{T}_2 & \mathbb{O} \end{pmatrix}$$

où $\mathbb{T}_1$ est une matrice de taille $\rho \times \rho$.

Supposons tout d'abord que $\mathbb{T}_1$ ne soit pas la matrice d'une homothétie.

11) A l'aide de la question **9)** montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}'$ dans laquelle

$$\mathbb{T}_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} \mathbb{T}'_1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{T}'_2 & \mathbb{O} \end{pmatrix}$$

où $\mathbb{T}'_1$ admet comme termes diagonaux des entiers non nuls $t_1, \cdots, t_\rho$.

12) En déduire que T est la somme d'un nombre fini de projecteurs.

On suppose maintenant que T_1 est la matrice d'une homothétie.

13) Démontrer que là encore, T est la somme d'un nombre fini de projecteurs.

II. Restes ou sommes partielles d'intégrales

Plan du problème

Dans les préliminaires, on établit quelques généralités utiles par la suite sur les applications intégrables. Elles sont illustrées par la partie **A** et utilisées pour établir les résultats de la partie **B**.

Rappels et notations

- Soient f et g deux fonctions de variable réelle et à valeurs réelles ne s'annulant pas au voisinage d'un élément $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, sauf éventuellement en ce point. f et g sont dites équivalentes en b si et seulement si leur quotient tend vers 1 en b. On notera alors $f \sim g$ en b. f est dite négligeable devant g en b si et seulement si le quotient f/g tend vers 0 en b. On notera alors $f = o(g)$ en b.
- Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles de termes non nuls à partir d'un certain rang. Les suites (u_n) et (v_n) sont dites équivalentes si et seulement si la suite (w_n) définie pour n assez grand par $w_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ converge vers 1 ; on note alors $u_n \sim v_n$. La suite (u_n) est dite négligeable devant (v_n) si et seulement si (w_n) converge vers 0 ; on note alors $u_n = o(v_n)$.
- Pour une série $\sum u_n$ de nombres réeles, on note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de ses sommes partielles :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\,.$$

  Si de plus $\sum u_n$ est convergente, on note $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de ses restes :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\,.$$

- ln désigne le logarithme népérien.

Préliminaires

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in]a, +\infty[\cup \{+\infty\}$, f et g deux applications continues par morceaux sur $[a, b[$ à valeurs strictement positives.

1) On suppose que g est intégrable sur $[a, b[$.

a) Montrer qu'en b, la relation $f = o(g)$ entraîne

$$\int_x^b f = o\left(\int_x^b g\right).$$

b) Montrer qu'en b, la relation $f \sim g$ entraîne $\displaystyle\int_x^b f \sim \int_x^b g$
(on justifiera l'intégrabilité de f sur les intervalles $[x, b[$ considérés).

2) On suppose que g n'est pas intégrable sur $[a, b[$.

a) Montrer qu'en b, la relation $f = o(g)$ entraîne

$$\int_a^x f = o\left(\int_a^x g\right).$$

Montrer à l'aide d'exemples que l'on ne peut en général rien dire de l'intégrabilité de f sur $[a, b[$.

b) Montrer qu'en b, la relation $f \sim g$ entraîne $\displaystyle\int_a^x f \sim \int_a^x g$.

Que dire de l'intégrabilité de f sur $[a, b[$?

Partie A.

3)

a) Déterminer un équivalent simple en 0^+ de

$$\int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{\,t}}{\operatorname{Arcsin}(t)}\,\mathrm{d}t\,.$$

b) En déduire un équivalent simple en 0^+ de $\displaystyle\int_{x^3}^{x^2} \frac{\mathrm{e}^{\,t}}{\operatorname{Arcsin}(t)}\,\mathrm{d}t\,.$

4)

a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer qu'en $+\infty$ on a :

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)} \sim \frac{x}{\ln(x)}\,.$$

b) Plus généralement, si n est un entier naturel, établir le développement asymptotique suivant en $+\infty$:

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k!x}{\ln^{k+1}(x)} + o\left(\frac{x}{\ln^{n+1}(x)}\right).$$

5) Justifier le développement asymptotique suivant en $+\infty$:

$$\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{\,t}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{\,x}}{x^2} + \frac{2\mathrm{e}^{\,x}}{x^3} + o\left(\frac{\mathrm{e}^{\,x}}{x^3}\right).$$

Partie B.

Soient a un nombre réel et f une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ à valeurs strictement positives. On suppose que le quotient $\dfrac{xf'(x)}{f(x)}$ tend vers une limite finie α en $+\infty$.

6) Montrer à l'aide des préliminaires que $\dfrac{\ln(f(x))}{\ln(x)}$ tend vers α quand x tend vers $+\infty$ (*on pourra distinguer le cas* $\alpha = 0$.)

7) On suppose dans cette question $\alpha < -1$.

a) Montrer que f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

b) Montrer qu'en $+\infty$ on a $\displaystyle\int_x^{+\infty} f \sim \frac{-xf(x)}{\alpha+1}$ (*on pourra considérer* $\dfrac{xf(x)}{\alpha+1}$ *et utiliser les préliminaires.*)

8) On suppose dans cette question $\alpha > -1$.

a) Étudier l'intégrabilité de f sur $[a, +\infty[$.

b) Montrer qu'en $+\infty$ on a

$$\int_a^x f \sim \frac{xf(x)}{\alpha+1}\,.$$

c) Donner un exemple d'application de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ à valeurs strictement positives telles qu'en $+\infty$ le quotient $\dfrac{\ln(f(x))}{\ln(x)}$ tende vers une limite $\alpha > -1$, mais telle que l'on n'ait pas $\displaystyle\int_a^x f \sim \frac{xf(x)}{\alpha+1}$.

9)

a) Étudier l'intégrabilité sur $[2, +\infty[$ des applications $x \mapsto \dfrac{1}{x(\ln(x))^\beta}$ selon $\beta \in \mathbb{R}$.

b) Étudier, à l'aide des questions précédentes, l'intégrabilité sur $[2, +\infty[$ des applications $x \mapsto \dfrac{1}{x^\gamma(\ln(x))^\beta}$ selon $\beta \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.

10) Que conclure quant à l'intégrabilité de f sur $[a, +\infty[$ dans le cas $\alpha = -1$?

— FIN —