Ex71 :

• Sur D :

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ -1 < x < y < 1\}$

$f(x,y) = (y-x)^3 + 6xy$

f est C^2 sur $]-1;1[$ ouvert

donc les extremums sont des points critiques

Recherche des pts critiques :

$\frac{\partial f}{\partial x} = -3(y-x)^2 + 6y$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 3(y-x)^2 + 6x$

6/3=2 ...

$\vec{grad} f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -(y-x)^2 + \cancel{3}y = 0 \\ (y-x)^2 + 3x = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ (2y)^2 - 3y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ 4y = 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{4} \\ x = -\frac{3}{4} \end{cases}$

→ 2 pts critiques : $A = \left(-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right)$

$B = \left(\frac{3}{4}; -\frac{3}{4}\right)$

Dérivées 2nd :

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6(y-x)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -6(y-x)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6(y-x)$

Étude au pt A : $A = \left(\frac{-3}{4}; \frac{3}{4}\right)$

$H_f(A) = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad tr(A) = 6 > 0$, $\det(A) > 0$

↳ 2 valeurs propres >0 donc f admet un $\boxed{\text{min. local}}$

Étude au pt B : $B = \left(\frac{3}{4}; -\frac{3}{4}\right)$

$H_f(B) = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad \to tr(A) = -6 < 0$, $\to \det(A) < 0$

une valeur propre positive et une négative

↳ $\boxed{\text{point col en B}}$

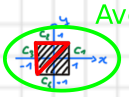
cohérent

• Sur $D' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ -1 \leq x \leq y \leq 1\}$:

→ fermé

↳ étude aux bords

Avec la condition x<y, le domaine est un triangle



• En C_1 :

On paramètre C_1 par $\begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases}$

$f(1,t) = (t-1)^3 + 6t$

$\frac{df}{dt} = 3(t-1)^2 + 6$
$= 3t^2 + 3 - 6t + 6$
$= 3t^2 + 9 - 6t$
$= 3(t^2 + 3 - 2t)$

$\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$

t	−1	1
f	−14 ↗	6

• C_2 :

On paramètre C_2 par : $\begin{cases} x = t \\ y = 1 \end{cases}$

$f(t,1) = (1-t)^3 + 6t$

$\frac{df}{dt} = -3(1-t)^2 + 6$
$= -3 - 3t^2 + 6t + 6$
$= -3t^2 + 6t + 3$
$= 3(-t^2 + 2t + 1)$

$\Delta = 4 + 4 = 8$

$t = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{-2} = 1 \pm \sqrt{2}$

t	−1		$1-\sqrt{2}$		1
f'		−	0	+	
f	2	↘	$6-4\sqrt{2} \approx 0{,}3$	↗	6

• C_3 :

On paramètre C_3 par $\begin{cases} x = -1 \\ y = t \end{cases}$

$f(-1,t) = (t+1)^3 - 6t$

$\frac{df}{dt} = 3(t+1)^2 - 6$
$= 3t^2 + 3 + 6t - 6$
$= 3t^2 - 3 + 6t$
$= 3(t^2 - 1 + 2t)$

$\Delta = 4 + 4 = 8$

$t = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$

t	−1		$-1+\sqrt{2}$		1
f'		−	0	+	
f	6	↘	$-1-\sqrt{2}$, $\approx -2{,}4$	↗	2

• C_4 :

On paramètre C_4 par : $\begin{cases} x = t \\ y = -1 \end{cases}$

$f(t,-1) = (-1-t)^3 - 6t$

$\frac{df}{dt} = -3(-1-t)^2 - 6$
$= -3 - 3t^2 + 6t - 6$
$= -3t^2 + 6t - 9$
$= 3(-t^2 + 2t - 3)$
$= -3(t^2 - 2t + 3)$

On retrouve les même min et max

que pour le paramétrage de C_1.

On a donc −14 comme minimum au bord

et 6 comme maximum.

$\boxed{\text{Les extremas de f sur D' sont } -14 \text{ et } 6.}$

Ex68 :

1) $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt \qquad f_n(t) = \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n$ est cpm sur $[0;1]$

$a_0 = \int_0^1 dt = 1$

$a_1 = \int_0^1 \frac{1+t^2}{2} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ~~≈0,67~~

Étude cv simple : t fixé

• $t = 0$: $f_n(0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

• $t \neq 0$: $f_n(t) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ faux si t=1

Domination :

$|f_n(t)| = \left|\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n\right|$

$\leq \frac{1+t^2}{2}$ ind. de n intégrable sur $[0;1]$

convergence dominée

Par le théorème de ~~la domination~~

$a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 0\, dt = 0$

$\boxed{a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}$

2) a. On a $\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \geq \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1}$

$f_n(t) \geq f_{n+1}(t)$

De plus les bornes de l'intégrale sont dans le bon sens.

Donc $a_n \geq a_{n+1}$

$\boxed{\text{Donc la suite } (a_n) \text{ est décroissante}}$ $\forall t \in [0;1[$

La suite (a_n) est décroissante, de limite nulle et positive

donc d'après le TSA, la série $\boxed{\sum (-1)^n a_n \text{ converge}}$

b. $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{(1+t^2)^n}{2^n} dt$

On pose $f_n(t) = (-1)^n \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n$

- f_n est cpm sur [0;1[
- $\sum f_n$ cv simplement sur [0;1[d'après le TSSA
- On pose $S_n = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n$

dominons :

$$\left|\sum_{n=0}^{N} (-1)^n \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n\right| = \left|\frac{1-\left(-\frac{1+t^2}{2}\right)^{N+1}}{1-\left(-\frac{1+t^2}{2}\right)}\right|$$

$$\le \frac{2}{2+\frac{1+t^2}{2}}$$

$$\le \frac{4}{3+t^2}$$ indépendant de n, intégrable sur [0;1[

on peut aussi majorer par |f_0(t)| grâce au TSSA

On a $\sum_{n=0}^{N} \int_0^1 (-1)^n \times \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{(1+t^2)^n}{2^n} dt$

$\downarrow N\to+\infty$: $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$

$\downarrow N\to+\infty$ par convergence dominée : $\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-1-t^2}{2}\right)^n dt = \int_0^1 \frac{1}{1-\frac{-1-t^2}{2}}dt = \int_0^1 \frac{2}{3+t^2}dt$

unicité

Par ~~continuité~~ de la limite

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n = \int_0^1 \frac{2}{3+t^2}dt}$$

Or

$$2\int_0^1 \frac{dt}{3+t^2} = \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{\sqrt3}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{\cancel{3}}\left[\mathrm{Arctan}\left(\frac{t}{\sqrt3}\right)\right]_0^1$$ 2/sqrt(3)

$$= \frac{2}{3}\left[\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt3}\right) - \mathrm{Arctan}(0)\right]$$

$$= \frac{2\pi}{18}$$

$$= \frac{\pi}{9}$$

Donc $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n = \frac{\pi}{9}}$ x sqrt(3)

3) a. $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt$

$$\ge \int_0^1 t^{2n}dt$$

$$= \frac{1}{2n+1}$$

Donc $\boxed{a_n \ge \frac{1}{2n+1}}$

On pose $S_n = \frac{x^n}{2n+1}$

$$\left|\frac{S_{n+1}}{S_n}\right| = \left|\frac{2n+1}{2n+3}x\right|$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|$$

- Si $|x|<1$: $\sum a_n x^n$ converge, $1<R$
- Si $|x|>1$: $\sum a_n x^n$ diverge, $1>R$

pour la somme des x^n/(2n+1) seulement, donc R<=1 car a_n>= 1/(2n+1)

Comme on sait par ailleurs que a_n<= 1 APCR, alors R>= 1 donc finalement R=1.

Donc $\boxed{\cancel{R=1}}$

b. D'après ce qui précède $\sum a_n x^n = \sum \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n x^n dt$

On pose $f_n(t) = (-1)^n \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n x^n$ $\forall x\in]-1;1[$

- f_n est cpm sur [0;1]
- $\sum f_n$ cv simplement sur [0;1[d'après le TSSA car $\left(\frac{(1+t^2)x}{2}\right)^n$ est $\searrow$, $\to 0$, ≥ 0
- montrons que $\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 |f_n(t)|dt$ converge

$$\int_0^1 \left|\frac{(1+t^2)^n x^n}{2^n}\right| dt = \frac{x^n}{2^n}\int_0^1 (1+t^2)^n dt$$

$$\le \frac{x^n}{2^n}\int_0^1 \cancel{2}\,dt$$ 1 <= 1+t^2 <= 2

$$= \frac{x^n}{2^n}$$ terme général d'une série convergente

Ainsi $\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 \left|\left(\frac{1+t^2}{2}x\right)^n\right| dt$ converge

D'après le théorème d'interversion série/intégrale :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}x\right)^n dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1+t^2}{2}x\right)^n dt$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{2-(1+t^2)x}dt$$

On pose $g(x) = \int_0^1 \frac{2}{2-(1+t^2)x}dt$

On pose $h(t,x) = \frac{2}{2-(1+t^2)x}$

- $x\mapsto h(t,x)$ est de classe C^2 sur]-1;1[
- $t\mapsto h(t,x)$ est continue par morceaux sur [0;1]
- Dominons :

$$\left|\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right| = \left|\frac{-4(1+t^2)^2}{(2-(1+t^2)x)^2}\right|$$ 4

$$\le \cancel{4(1+t^2)^2}$$ indépendant de x, intégrable sur [0;1]

le dénominateur peut être >1

Ainsi g est de classe C^2 sur]-1;1[d'après le théorème de convergence

On peut ~~donc~~ écrire $\forall x\in]-1;1[$,

$$g'(x) = \int_0^1 \frac{-2(1+t^2)}{(2-(1+t^2)x)^2}dt$$

$$g''(x) = \int_0^1 \frac{-2(1+t^2)\times 2 \quad (1+t^2)(2-(1+t^2)x)}{(2-(1+t^2)x)^3}dt$$

$$= \int_0^1 \frac{-4(1+t^2)^2}{(2-(1+t^2)x)^2}dt$$

$$\boxed{\cancel{g''(x) = 2(1+t^2)g'(x)}}$$