Semaine 12 du 6 janvier 2025 (S2)

X Topologie des espace vectoriels normés

Le chapitre X reste au programme :

1 Intérieur et adhérence

1.1 Rappels sur l'intersection et la réunion

1.2 Parties ouvertes

1.3 Parties fermées

1.4 Point adhérent et adhérence

1.5 Caractérisation séquentielle des fermés et de l'adhérence

1.6 Normes équivalentes

2 Densité

3 Limite et continuité d'une fonction entre deux espaces vectoriels normés

3.1 Limite et continuité en un point

3.2 Caractérisations séquentielles

3.3 Opérations sur les limites

3.4 Continuité sur une partie

3.5 Fonctions lipschitziennes

4 Limite et continuité en dimension finie

4.1 Utilisation des fonctions coordonnées

4.2 Continuité des applications linéaires, multilinéaires et polynomiales

4.3 Théorème des bornes atteintes

5 Continuité, ouverts et fermés

6 Exercices à connaître

6.1 Un peu de topologie dans $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$

1) Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|.\|_\infty$ et $F = \left\{ f \in E,\ \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x > 0 \right\}$. Proposer deux méthodes pour montrer que F est un ouvert de E.

2) On note $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ que l'on munit des deux normes en posant :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} (|f(x)|) \text{ et } \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$$

On considère $A = \{f \in E, f(0) = 0\}$ et $g : x \mapsto 1$.

a) Est-ce que g est adhérent à A pour la norme $\|\cdot\|_\infty$?

b) Est-ce que g est adhérent à A pour la norme $\|\cdot\|_1$?

6.2 Deux exercices : densité des matrices inversibles et distance à un fermé borné

1) Montrer que $\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Soit E un evn de dimension finie et A est une partie non vide, fermée et bornée de E. Soit $x \in E$. Montrer que $\inf\limits_{y \in A} \|x-y\|$ existe et qu'il existe $a \in A$ tel que $\|x-a\| = \inf\limits_{y \in A} \|x-y\|$.
Ce réel est appelé ***distance de** x **à** A* et noté $\mathrm{d}(x, A)$.

6.3 Densité et continuité

1) Trouver toutes les fonctions g continues sur $\mathbb{R}$, vérifiant $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x+y) = g(x)+g(y)$.

2) Même question pour $g(x+y) = g(x)g(y)$.

6.4 Norme subordonnée

Soit u une application linéaire continue de E dans F, deux espaces vectoriels normés non nuls. On définit :

$$M_1 = \sup\left\{\frac{\|u(x)\|}{\|x\|},\ x \in E\backslash\{0\}\right\}$$
$$M_2 = \sup\left\{\|u(x)\|,\ x \in E \text{ t.q. } \|x\| = 1\right\}$$
$$M_3 = \inf\left\{k \geqslant 0 \text{ t.q. } \forall\, x \in E,\ \|u(x)\| \leqslant k\|x\|\right\}$$

1) Justifier l'existence de ces nombres.

2) Montrer que $M_1 = M_2 = M_3$.

Remarque : On note en général $|||u|||$ ce nombre, et on peut montrer que $|||.|||$ définit sur $\mathscr{L}(E,F)$ une norme. Cette norme s'appelle la ***norme subordonnée*** à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$, et elle satisfait :

$$\forall\, x \in E,\ \|u(x)\|_F \leqslant |||u|||\, \|x\|_E.$$

S'y ajoute :

XI Séries entières

1 Rayon de convergence

1.1 Définition de série entière

1.2 Rayon et disque de convergence, cercle d'incertitude

2 Méthodes de détermination du rayon de convergence

2.1 Résultats de comparaison

2.2 Règle de d'Alembert

2.3 Utilisation de suites bornées

2.4 Utilisation du cercle d'incertitude

2.5 Quelques exemples fréquents, séries entières dérivée et primitive

2.6 Somme

2.7 Produit de Cauchy

3 Régularité des séries entières réelles

3.1 Convergence pour les séries entières réelles

3.2 Continuité

3.3 Dérivation

3.4 Intégration

4 Fonctions développables en série entière

4.1 Développement en série entière au voisinage de 0

4.2 Série de Taylor

4.3 Développement et formule de Taylor avec reste intégral

4.4 Développement par dérivation et primitivation

4.5 Développement par opérations

4.6 Développement et équation différentielle

4.7 Une application : régularité d'un prolongement continu

5 Exemples de séries entières d'une variable complexe

5.1 Série géométrique complexe

5.2 Exponentielle complexe

5.3 Continuité sur le disque ouvert de convergence

6 Formulaire

7 Exercices à connaître

7.1 Comparaisons de rayons de convergence

Soit (a_n) une suite complexe.

1) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} n^\alpha a_n z^n$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

2) En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} \frac{P(n)}{Q(n)} a_n z^n$ où $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ sont deux polynômes non nuls.

7.2 Calculs de rayons de convergence (Banque CCP MP)

1) Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.

2) Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :

a) $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$ **b)** $\sum n^{(-1)^n} z^n$ **c)** $\sum \cos n z^n$

7.3 Une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ (Banque CCP MP)

1) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$.

On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.

2) Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ et préciser le rayon de convergence.

3) **a)** Déterminer $S(x)$.

b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(0) = 1, \quad f(x) = \mathrm{ch}\sqrt{x} \text{ si } x > 0, \quad f(x) = \cos\sqrt{-x} \text{ si } x < 0 .$$

Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

7.4 Une équation différentielle (Banque CCP MP)

Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

1) Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ de $\mathbb{R}$, avec $r > 0$.
Déterminer la somme des séries entières obtenues.

2) Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ sur $]0; 1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1, 1[$?

Pour la dernière question on admettra que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients non constants est un espace vectoriel de dimension 2.

7.5 Calculs de sommes de séries entières (Banque CCP MP)

Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivantes, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence :

1) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$.

2) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ avec $\begin{cases} a_{2n} = 4^n \\ a_{2n+1} = 5^{n+1} \end{cases}$

7.6 Développements en série entière (Banque CCP MP)

1) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$ converge.

On se propose de calculer la somme de cette série.

2) Donner le développement en série entière en 0 de $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.
Remarque : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.

3) En déduire le développement en série entière en 0 de $x \longmapsto \operatorname{Arcsin} x$ ainsi que son rayon de convergence.

4) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$.