

Série de fonctions

I. La fonction ζ de Riemann

- 1) Par comparaison à des séries de Riemann, ζ converge simplement sur $]1, +\infty[$.
- 2) S'il y avait convergence uniforme en 1, alors $\sum \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{n^x}$ convergerait, ce qui n'est pas le cas.

- 3) Posons $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$.

Les fonctions f_n sont de classe \mathcal{C}^∞ sur $]1, +\infty[$ et

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{(-\ln n)^k}{n^x}.$$

Sur $[a, b] \subset]1, +\infty[$,

$$\forall s \in [a, b], \left| f_n^{(k)}(x) \right| \leq \frac{(\ln n)^k}{n^a}.$$

Soit $\rho \in]1, a[$, on a

$$n^\rho \times \frac{(\ln n)^k}{n^a} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et il y a donc convergence de la série $\sum \frac{(\ln n)^k}{n^a}$.

Par majoration uniforme, la série de fonctions $\sum u_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a, b]$.

Par convergence uniforme sur tout segment de $]1, +\infty[$, on peut affirmer que ζ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]1, +\infty[$ et

$$\zeta^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln n)^p}{n^x}.$$

- 4) Monotonie :

$$\zeta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\ln n}{n^x} \leq 0$$

donc ζ est décroissante.

Convexité :

$$\zeta''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^x} \geq 0$$

donc ζ est convexe.

- 5) Limite en $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^x} = \begin{cases} 0 & \text{si } n > 1 \\ 1 & \text{si } n = 1 \end{cases}.$$

Pour appliquer le théorème de la double limite, observons la convergence uniforme au voisinage de $+\infty$.

Pour $x \geq 2$

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$$

Or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge normalement, donc $\sum u_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[2, +\infty[$. Par le théorème de la double limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^x} = 1 + 0 + 0 + \dots = 1.$$

- 6) La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est décroissante donc

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^x}$$

On en déduit

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} \leq \zeta(x) \leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x}$$

i.e.

$$\frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}.$$

Par suite

$$\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{x-1}.$$

II. Tableau de variation d'une série de fonctions

Introduisons les fonctions $f_n : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}.$$

Elles sont toutes définies sur \mathbb{R}_+^* , mais pas plus pour la fonction f_0 , donc S ne peut être définie en dehors de \mathbb{R}_+^* .

Soit $x > 0$. La série numérique $\sum f_n(x)$ converge en vertu du CSSA.

La série de fonctions $\sum f_n$ converge alors simplement sur \mathbb{R}_+^* et sa somme S est donc bien définie sur \mathbb{R}_+^* .
De plus f_n est de classe C^1 et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}.$$

Soit $x > 0$. La série numérique $\sum f'_n(x)$ converge en vertu du CCSA.
On a

$$|R_n(t)| \leq \frac{1}{(n+1+x)^2} \leq \frac{1}{(n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi la série de fonctions $\sum f'_n$ converge uniformément sur \mathbb{R}_+^* .
On peut alors affirmer que S est de classe \mathcal{C}^1 et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}$$

Par le CSSA, $S'(x)$ est du signe de son premier terme $\frac{(-1)^{0+1}}{x^2} \leq 0$.

La fonction S est donc décroissante.

Pour compléter le tableau de variation de S , exploitons le CSSA pour encadrer S par deux sommes partielles consécutives :

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \leq S(x) \leq \frac{1}{x}$$

On peut alors affirmer que $S \xrightarrow{+\infty} 0$ et $S \xrightarrow{0^+} +\infty$.

III. Intersion somme/intégrale

Commençons par observer que

$$\begin{aligned} \frac{\sin t}{e^t - 1} &= \sin t \times \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sin t \times e^{-nt}. \end{aligned}$$

De plus $t \mapsto \sin t \times e^{-nt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ par comparaison à une série exponentielle, et

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |\sin t| e^{-nt} dt &\leq \int_0^{+\infty} t e^{-nt} dt \\ &\leq \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

et ce dernier terme est le terme général d'une série convergente, donc $t \mapsto \frac{\sin t}{e^t - 1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
Enfin, nous pouvons utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque, et ainsi

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1} dt &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin t \cdot e^{-nt} dt. \\ \text{Or } \int_0^{+\infty} \sin t \cdot e^{-nt} dt &= \text{Im} \int_0^{+\infty} e^{(-n+i)t} dt \\ &= \frac{1}{n^2 + 1}. \end{aligned}$$

Finalement

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}.$$

IV. Utilisation du théorème de convergence dominée

Commençons par remarquer que $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$.

Par sommation géométrique on peut écrire $\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n}$ sur $[0, 1[$.

Par suite $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_{[0,1[} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ avec $f_n(t) = (-1)^n t^{2n}$ définie sur $[0, 1[$.

Ici $\sum f_n$ ne converge pas en 1 donc on ne peut pas utiliser $??$, et $\sum \int_{[0,1[} |f_n| = \sum \frac{1}{2n+1}$ diverge et on ne peut pas appliquer $??$ non plus. Transitons alors par les sommes partielles.

On pose $S_n(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k}$.

On a $S_n \xrightarrow{CS} S$ sur $[0, 1[$, avec $S(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

Les fonctions S_n et S sont continues par morceaux, et

$$|S_n(t)| = \frac{|1 - (-1)^{n+1} t^{2n+2}|}{1+t^2} \leq \frac{2}{1+t^2} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable.

Par convergence dominée $\int_0^1 S_n(t)dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 S(t)dt$. Or

$$\begin{aligned}\int_0^1 S_n(t)dt &= \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} dt \\ &= \sum_{k=0}^n \int_0^1 (-1)^k t^{2k} dt \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}\end{aligned}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$