

Feuille d'exercice n° 04 : Espaces vectoriels normés

I. Normes et distances

Exercice 1 (✎) Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$ telles que $f(0) = 0$.

- 1) On pose pour tout $f \in E$, $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Montrer que N est une norme sur E .
- 2) Montrer que, si $f \in E$ alors, pour tout $x \in [0, 1]$:
$$f(x) = e^{-x} \int_0^x e^t (f(t) + f'(t)) dt.$$
- 3) On pose, pour tout $f \in E$, $N'(f) = \|f + f'\|_\infty$. Montrer que N' est une norme sur E , équivalente à N .

Exercice 2 Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des applications continues de $[0, 1]$ vers \mathbb{R} , muni de la norme N_∞ :

$$N_\infty(f) = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|.$$

Soit $g \in E$. Pour toute fonction f de E , on pose $N_g(f) = N_\infty(fg)$.

- 1) Donner une condition nécessaire et suffisante sur la fonction g pour que N_g soit une norme sur E .
- 2) Dans ce cas, à quelle condition sur g les normes N_g et N_∞ sont-elles équivalentes ?

Exercice 3 (✎) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on note : $N(x, y) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|x + ty|}{1 + t^2}$.

- 1) Montrer que l'application $(x, y) \mapsto N(x, y)$ est une norme de \mathbb{R}^2 .
- 2) On cherche à comparer cette norme à la norme euclidienne. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
 - (i) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, majorer $N(x, y)$ à l'aide de $\|(x, y)\|$.
 - (ii) Montrer que $N(x, y) \geq \max\left(\frac{|x+y|}{2}, \frac{|x-y|}{2}\right)$, et en déduire une minoration de $N(x, y)$ à l'aide de $\|(x, y)\|$.
 - (iii) Calculer $N(x, y)$ pour $(x, y) = (0, 1)$ et $(x, y) = (1, 0)$.
 - (iv) Conclure.

Exercice 4 Pour une suite $L = (\ell_k) \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$, on associe à un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ écrit sous forme développée-réduite $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ la valeur

$$N_L(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k \ell_k|.$$

- 1) Donner une CNS sur L pour que N_L soit une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
- 2) Soit $L, M \in (\mathbb{R}^*)^\mathbb{N}$. Donner une CNS sur (L, M) pour que N_L et N_M soient équivalentes.

Exercice 5 (✎) Soit $E = \mathbb{R}[X]$.

- 1) Montrer que l'on définit deux normes sur E , en posant pour $P = \sum_{i=0}^p a_i X^i$:

$$\|P\| = \int_0^1 |P(t)| dt \quad \|P\|_1 = \sum_{i=0}^p |a_i|$$

- 2) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X], \|P\| \leq \alpha \|P\|_1$.
- 3) Existe-t-il $\beta > 0$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X], \|P\|_1 \leq \beta \|P\|$?

Exercice 6 (🚲) Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$. Pour $f \in E$, on note :

$$N(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| dt \text{ et } \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

- 1) Montrer que N est une norme sur E .
- 2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$, on pose :

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(\pi n x).$$

- a) Calculer $\|f_n\|_\infty$ et $N(f_n)$.
- b) Vérifier que la suite $(f_n)_n$ converge vers 0 pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ et ne converge pas vers 0 pour la norme N .
- 3) Montrer qu'il n'existe pas de constante C telle que :

$$\forall f \in E, N(f) \leq C \|f\|_\infty.$$

- 4) Montrer que :

$$\forall f \in E, \|f\|_\infty \leq N(f).$$

Exercice 7 On note L le \mathbb{R} -e.v. des applications lipschitziennes de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} , et $E_1 = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$.

- 1) Montrer que $\|\cdot\| : L \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\|f\| = |f(0)| + \sup_{\substack{x, y \in [0,1] \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$$

est une norme sur L , et qu'elle n'est pas équivalente à $\|\cdot\|_\infty$.

- 2) Montrer que $N_1 : E_1 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$N_1(f) = |f(0)| + \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)|$$

est une norme sur E_1 , et qu'elle coïncide avec $\|\cdot\|$.

Exercice 8 Soit E un espace normé, x et x' dans E , r et r' dans \mathbb{R}^+ , B (resp. B') la boule fermée de centre x et de rayon r (resp. de centre x' et de rayon r'). Caractériser à l'aide de x, x', r, r' l'inclusion $B \subset B'$.

II. Convexité

Exercice 9 Soit C_1, C_2 deux parties convexes d'un espace vectoriel réel E et soit $s \in [0, 1]$. On pose $C = sC_1 + (1 - s)C_2 = \{sx + (1 - s)y; x \in C_1, y \in C_2\}$. Démontrer que C est convexe.

Exercice 10 Soit C une partie convexe d'un ev E . Montrer :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall (z_1, \dots, z_p) \in C^p, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^{+p}, \\ \lambda_1 + \dots + \lambda_p = 1 \implies \sum_{k=1}^p \lambda_k z_k \in C.$$

III. Suites à valeurs dans un espace vectoriel normé

Exercice 11 Soit $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On suppose que : $(AB)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

$$\text{Montrer que : } (BA)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Exercice 12 Soit (A_n) une suite de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) $A_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$
- (ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n est inversible
- (iii) $A_n^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$

- 1) Montrer que A est inversible et que $A^{-1} = B$.
- 2) Peut-on enlever la propriété (iii) ?

Exercice 13 On considère, dans \mathbb{R}^3 , $(Z_n) = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ définie par :

$$Z_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \text{ et } \forall n \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - \frac{1}{6}w_n + \frac{1}{2} \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{6}v_n - \frac{1}{3}w_n - \frac{2}{3} \\ w_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}v_n + \frac{1}{6}w_n - \frac{7}{6} \end{cases}.$$

- 1) Montrer que la suite (Z_n) vérifie une relation matricielle de la forme : $Z_{n+1} = AZ_n + B$.
- 2) Montrer $\exists k \in]0, 1[$ t.q. $\forall X \in \mathbb{R}^3, \|AX\|_\infty \leq k \|X\|_\infty$.
- 3) Montrer que l'équation $X = AX + B$ admet une unique solution L dans \mathbb{R}^3 .
- 4) En déduire une inégalité concernant $\|Z_n - L\|_\infty, \|Z_0 - L\|_\infty, n$ et k . Conclure quant à la convergence de la suite (Z_n) .

Exercice 14 Soit E un espace-vectoriel réel normé et (u_n) et (v_n) deux suites de vecteurs de E telles que :

- (i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n sont colinéaires ;
- (ii) il existe $u \in E$ tel que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u$;
- (iii) il existe $v \in E$ tel que $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} v$.

Montrer que u et v sont colinéaires.

