Réduction des endomorphismes

I. Deux diagonalisations – bête et méchante et plus théorique

1)

$$\begin{vmatrix} X & -3 & -2 \\ 2 & X-5 & -2 \\ -2 & 3 & X \end{vmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1+L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2+L_3}}{=} \begin{vmatrix} X-2 & 0 & X-2 \\ 0 & X-2 & X-2 \\ -2 & 3 & X \end{vmatrix}$$

$$= (X-2)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 15 & 1 \\ -2 & 3 & X \end{vmatrix}$$

$$= (X-2)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & X+2 \end{vmatrix}$$

$$= (X-2)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & X+2 \end{vmatrix}$$

$$= (X-2)^2(X-1).$$

Ensuite $A - 2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$, dont on observe que le noyau contient $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, qui en constituent une base.

Et $A - \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} - & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, dont on observe que le noyau est engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ainsi $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2) On observe que le noyau est de dimension $n-1$, et on en trouve facilement $n-1$ vecteurs formant une famille libre : $(e_i - e_{i+1})_{i \in [\![e1, n-1]\!]}$.
Enfin, $(1, \ldots, 1)$ est un vecteur propre pour la valeur propre n.
Finalement $J = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(0, \ldots, 0, n)$ et $P =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

II. Deux applications de la trigonalisation

1) $(\Rightarrow)$: soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A. Supposons qu'il admette une valeur propre non nulle λ. Soit x non nul tel que $u(x) = \lambda x$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(x) = \lambda^k x \neq 0$, ce qui est absurde car u est nilpotent. Ainsi, par trigonalisation, il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle $T = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est triangulaire supérieure à diagonale nulle, puisque cette diagonale est constituée des valeurs propres de u. Alors toutes les puissances de M sont à diagonales nulles, donc toutes leurs traces sont nulles. Comme M et A sont semblables, toutes leurs puissances aussi, et elles ont donc les mêmes traces, d'où le résultat.
$(\Leftarrow)$: soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A. Supposons qu'il admette au moins une valeur propre non nulle. Il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle $T = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est triangulaire supérieure. Si $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ sont les valeurs propres non nulles deux à deux distinctes de u, de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_p$, alors les coefficients diagonaux de T sont les α_i, qui apparaissent chacune m_i fois, et éventuellement des 0 si 0 est valeur propre de u.
Alors pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $\mathrm{tr}\, M^k = 0$ et nous obtenons ainsi le système

$$(S) \ : \begin{cases} m_1\alpha_1 + \ldots + m_p\alpha_p = 0 \\ m_1\alpha_1^2 + \ldots + m_p\alpha_p^2 = 0 \\ \qquad \vdots \\ m_1\alpha_1^p + \ldots + m_p\alpha_p^p = 0 \end{cases}$$

qui s'écrit sous forme matricielle

$$W \times (m_1, \ldots, m_p)^\top = 0$$

avec

$$W = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \ldots & \alpha_p \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^p & \ldots & \alpha_p^p \end{pmatrix}.$$

Mais en factorisant chaque colonne j par α_j, il vient $\det W = \left(\prod_{j=1}^{p} \alpha_j\right) \det V$ où V est la matrice de Van der Monde associée aux α_j. Or ces dernières sont deux à deux distinctes, donc $\det V \neq 0$, et donc $\det W \neq 0$ car les α_j ne sont pas nulles.
Alors W est inversible et ainsi (S) n'a que 0 comme solution et donc toutes les m_i sont nulles, ce qui est absurde.
Par conséquent u n'a pas de valeur propre non nulle. Son polynôme caractéristique vaut donc X^n et avec le théorème de Cayley-Hamilton, u et donc A sont nilpotentes.

2) Il existe une base dans laquelle la matrice M de u est triangulaire supérieure avec les valeurs propres de u, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, sur la digonale. Alors par récurrence et propriété du produit des matrices triangualaires, pour tout $k \in \mathbb{N}$ les coefficients diagonaux de M^k sont les $(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)$. Et ensuite, par linéarité, si $P \in \mathbb{C}[X]$, les coefficients diagonaux de $P(M)$ sont les $(P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n))$. Ainsi le spectre de $P(u)$ est $\{P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n)\}$, c'est-à-dire $P(\mathrm{Sp}\,(u))$.

III. Diagonalisation simultanée

1) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, u et $\lambda \mathrm{Id}_E - v$ commutent, donc u stabilise $\mathrm{Ker}(\lambda \mathrm{Id}_E - v)$.

2) Puisque u est diagonalisable, il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples. Nécessairement, si F est un sous-espace propre de v, ce même polynôme annule aussi $u|_F$, qui est donc diagonalisable.

3) Pour chacun des sous-espaces propres E_i de v on choisit une base $\mathscr{B}_i$ dans laquelle l'endomrphisme enduit par u admet une matrice diagonale. La concaténation de toutes ces bases est une base $\mathscr{B}$ de E car E est égal à la somme directe des sous-espaces propres de v.
Les vecteurs de toutes les $\mathscr{B}_i$ étant des vecteurs propres de v, la matrice de v dans $\mathscr{B}$ est diagonale.
La matrice de u dans $\mathscr{B}$ est diagonale par blocs, le bloc i étant la matrice de $u|_{E_i}$ dans $\mathscr{B}_i$. Tous ces blocs étant diagonaux par construction, la matrice de u dans $\mathscr{B}$ est donc diagonale également.

IV. Racine carrée d'une matrice

1) On note $M = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice commutant avec M. Soit $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i \neq j$. Le coefficient (i, j) de AM vaut $\lambda_j a_{ij}$, tandis que celui de MA vaut $\lambda_i a_{ij}$. Puisque $\lambda_i \neq \lambda_j$, alors a_{ij}, et A est diagonale.
Réciproquement, on sait que deux matrices diagonales commutent.

2) $\mathrm{sp}(A) = \{1, 3, -4\}$.

3) Il existe une matrice P inversible tel que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(1, 3, -4)$. Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est solution de l'équation $M^2 = A$ alors $\left(P^{-1}MP\right)^2 = D$ et donc $P^{-1}MP$ commute avec la matrice D. Or celle-ci est diagonale à coefficient diagonaux distincts donc $P^{-1}MP$ est diagonale de coefficients diagonaux a, b, c vérifiant $a^2 = 1, b^2 = 3$ et $c^2 = -4$. La réciproque est immédiate. Il y a 8 solutions possibles pour (a, b, c) et donc autant de solutions pour M. Les solutions réelles sont a fortiori des solutions complexes or toutes les solutions complexes vérifient $\mathrm{tr}\, M = a+b+c \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$. Il n'existe donc pas de solutions réelles.