Ex 94.

1. Supposons X décomposable.

Soit Y et Z deux variables aléatoires indépendantes tel que $X \sim Y+Z$.

Y et Z sont indépendantes, donc $G_X = G_{Y+Z} = G_Y G_Z$.

Finalement, $\boxed{G_X = G_Y G_Z}$.

2. Supposons que $X \sim \mathcal{B}(n,p)$

Par définition de la loi Binomiale, pour tout ~~$k \in \mathbb{N}$, il~~ $k \in [\![1, n]\!]$, il existe X_k une variable aléatoire suivant une loi Binomiale de paramètre p telle que $X \sim \sum_{k=0}^{n} X_k$ (les $(X_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ sont mutuellements indépendants).

Soit des telles X_k. et si n est

~~Si n est pair~~, posons $\ell = \frac{n}{2}$. impair ?

Posons $Y \sim \sum_{k=1}^{\ell} X_k$ et $Z \sim \sum_{k=\ell+1}^{n} X_k$.

Les $(X_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ sont mutuellements indépendantes, par le lemme des coalitions, Y et Z sont indépendantes.

Donc : $X \sim Y+Z$ avec Y et Z indépendantes, donc

$\boxed{X \text{ est décomposable}}$

3. n est non premier, donc il existe r et s dans $\mathbb{N}\setminus\{0;1\}$ tel que $n = rs$.

$X \sim \mathcal{U}([\![0, n-1]\!])$, donc $G_X(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} t^k$ avec $t \in \mathbb{R}$

~~Donc $G_X(t)$~~

Si $t=1$: $G_X(1) = 1$ et $\left(\frac{1}{r}\sum_{i=0}^{r-1} t^i\right)\left(\frac{1}{s}\sum_{j=0}^{s-1} t^{rj}\right) = 1$.

Si $t \neq 1$.

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} t^k$$ somme géométrique

$$= \frac{1}{rs} \frac{1-t^n}{1-t}$$

$$= \frac{1}{rs} \frac{(1-t^r)}{(1-t)} \frac{(1-(t^r)^s)}{(1-t^r)}$$

$$= \left(\frac{1}{r} \sum_{i=0}^{r-1} t^i\right)\left(\frac{1}{s} \sum_{j=0}^{s-1} (t^r)^j\right)$$

Dans tous les cas, il existe r et s dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ tel que :

$$G_X(t) = \left(\frac{1}{r} \sum_{i=0}^{r-1} t^i\right)\left(\frac{1}{s} \sum_{j=0}^{s-1} (t^r)^j\right)$$

En posant $Y \sim \mathcal{U}([\![0; r-1]\!])$ et $Z \sim \mathcal{U}([\![r; r+s-1]\!])$,

deux V.A indépendantes, On a : $G_X(t) = G_Y(t) \, G_Z(t)$

Donc : $G_X(t) = G_{Y+Z}(t)$.

Donc, $\forall k \in X(\Omega)$, $P(X=k) = P(Y+Z=k)$.

Donc $X \sim Y+Z$

Finalement, $\boxed{X \text{ est décomposable}}$.