Exercice 95 : On travaille sur (Ω, T, P)

il faut

1) X^+ et X^- sont des applications de Ω vers $\mathbb{Z}$

$X^+(\Omega) = \mathbb{Z}$ et $X^-(\Omega) = \mathbb{Z}$ expliquer que

Or $\mathbb{Z}$ est dénombrable $(X^+ = n) = \begin{cases} (X=n) & \text{si } n \geq 0 \\ \emptyset & \text{si } n < 0 \end{cases}$

enfin, $\forall x_+ \in X^+(\Omega)$ (resp $\forall x_- \in X^-(\Omega)$) $(X^+)^{-1}(\{x_+\}) \in T$
(resp $(X^-)^{-1}(\{x_-\}) \in T$)

pourquoi ??

$$\boxed{\text{Donc } X^+ \text{ et } X^- \text{ sont des variables aléatoires}}$$

2)

$P(X^+ = 0 \cap X^- = 0) = P(X=0)$

$(X=k)$ si $k \geq 0$, $\emptyset$ si $k < 0$

$(X^+ = k \cap X^- = 0) = \cancel{(X=k, k>0)} = \cancel{(X>0)}$

et $P(X^+ = k, X^- = \ell)$??

$P(X^+ = k \cap X^- = 0) \begin{cases} P(X=k) \cancel{k>0} & \text{si } k \geq 0 \\ 0 & \text{si } k < 0 \end{cases}$

$P(X^+ = 0 \cap X^- = n) = \begin{cases} P(X=n) \cancel{n<0} & \text{si } n \leq 0 \\ 0 & \text{si } n > 0 \end{cases}$

Montrons que X^+ et X^- ne sont pas indépendantes.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$,

$P(X^+ = k \cap X^- = -k) = \cancel{0}$ pas si $k = 0$!!

Or $P(X^+ = k) = \cancel{P(X=k) \neq 0}$ pas si $k < 0$

et $P(X^- = -k) = \cancel{P(X=-k) \neq 0}$ pas si $k > 0$

donc $P(X^+ = k)P(X^- = -k) \neq 0$

$$\boxed{\text{donc } X^+ \text{ et } X^- \text{ ne sont pas indépendantes}}$$

2) $X^+(\Omega) = \mathbb{N}$, $X^-(\Omega) = -\mathbb{N}$

si $X(x) \geq 0$, $X^-(x) = 0$

si $X(x) \leq 0$, $X^+(x) = 0$

dc (X^+, X^-) est à valeurs dans

$\mathbb{N} \times \{0\} \cup \{0\} \times (-\mathbb{N})$.

$\rightarrow$ si $n \in \mathbb{N}$,

$P(X^+ = n, X^- = 0) = P(X = n)$

$P(X^+ = 0, X^- = -n) = P(X = -n)$

<u>indépendance</u>:

s'il existe $i, j \in \mathbb{N}^{*2}$.

$P(X = i) \neq 0$ et $P(X = -j) \neq 0$,

alors $P(X^+ = i, X^- = -j) = 0$

mais $P(X^+ = i) \times P(X^- = -j) \neq 0$

dc $X \cancel{\perp\!\!\!\perp} Y$.

Sinon X est de signe constant

presque sûrement.

donc $P(X \geq 0) = 1$

ou $P(X \leq 0) = 1$.

Ds le 1er cas, si $n > 0$

$P(X^+ = n, X^- = 0)$

$= P(X = n)$

$= P(X^+ = n) \times \underbrace{P(X^- = 0)}_{= 1}$

et $P(X^+ = 0, X^- = -n)$

$= 0 = P(X^+ = 0)$

$\times \underbrace{P(X^- = -n)}_{= 0}$

et $P(X^+ = 0, X^- = 0)$

$= P(X = 0)$

$= \underbrace{P(X^+ = 0)}_{= P(X = 0)} \times \underbrace{P(X^- = 0)}_{= 1}$

donc $X \perp\!\!\!\perp Y$. Idem si $P(X \leq 0) = 1$