Devoir surveillé n° 6 - Remarques

Barème.

Toutes les questions sont notées sur 4 points , le total est de 136 points.

Statistiques descriptives.

	Note brute	Note finale
Note maximale	55	$19,5$
Note minimale	6	6
Moyenne	$\approx 23,80$	$\approx 10,91$
Écart-type	$\approx 10,51$	$\approx 2,89$

Concours Commun Mines-Ponts 2021 - Mathématiques II PC

Gloablement la rédaction et la présentation sont bonnes, vous serez prêts pour les écrits, bravo !

2. Avant de multiplier des inégalités, il faut s'assurer que tous les termes sont strictement positifs.

5. On trouve $Q = a_0 X^n + \cdots$ (mais il faut détailler le calcul). Vous ne pouvez affirmer que $\deg Q = n$: a_0 peut être nul.
De plus, avant de calculer $Q(1/\lambda)$, il faut supposer que $\lambda \neq 0$.

6. Ne confondez pas « discriminant » et « déterminant ».

7. Une somme de polynômes à racines toutes réelles n'a aucune raison d'être aussi à racines toutes réelles.
Considérez par exemple $(X^2 - X) \ + \ (X+1)$.

9. On ne peut pas parler de la matrice d'une matrice dans une base. En particulier, si A est diagonalisable dans une base $\mathscr{B}$, on ne peut pas écrire « dans $\mathscr{B}$, $A = D$ ». Mais cela signifie que si P est la matrice de passage de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{B}$, $A = PDP^{-1}$.
Pour répondre à cette question, vous avez souvent été flous et indirects dans vos raisonnements. Il n'y avait que peu d'arguments à donner.

10.a. Même remarque.
La symétrie de A n'a rien à voir avec le problème. Tout ce qui compte c'est que P est la matrice de passage d'une base orthonormale dans une autre.
Attention, $(P^{-1})^\top AP^\top = PAP^{-1}$ n'implique pas $P^{-1} = P^\top$.
Ne confondez pas $\top$ et $\perp$.

11. Il fallait commencer par se poser la question de la convergence de ces intégrales.
$\varphi(P,P) = 0 \Rightarrow P = 0$ a été mal traité, en particulier les hypothèses ont été oubliées. C'est juste dingue vu le nombre de fois où on a fait cet exercice en cours, et sachant qu'à chaque fois j'ai insisté lourdement sur ces hypothèses ! Vous me posez très souvent la question « que puis-je faire pour m'améliorer ? ». Et bien voilà : faites ce qu'il faut pour savoir refaire les exercices faits en cours, et quand je répète 10 fois le même avertisemeent, ne refaites pas l'erreur. Vous auriez évité de perdre des points ici (et ailleurs).

13. Ce n'est pas parce qu'il y a un symbole de Kronecker et des polynômes qu'il est question des polynômes de Lagrange ...
Il s'agissait d'utiliser le procédé de Gram-Schmidt mais avec une récurrence (ce qui n'est pas fait dans le corrigé), car ici la base de départ est de cardinal infini, ce qui n'est pas au porgramme.

17.c. Il fallait bien utiliser un déterminant de Vandermonde, mais on ne pouvait pas le faire directement car la matrice n'était pas carrée. Cf. corrigé. Attention aussi à l'hypothèse pour que le déterminant de Vandermonde soit non nul.

Je joins le rapport de jury de cette épreuve.

1.5 Mathématiques 2 - filière PC

1.5.1 Généralités et présentation du sujet

Le sujet tourne autour d'un théorème de Polya sur les polynômes réels à racines toutes réelles. On dispose pour les polynômes[5] de deux écritures, l'une additive sous la forme $\sum_k a_k X^k$ et l'autre multiplicative $\prod_k (X - a_k)$ et alors que les relations coefficients-racines permettent de passer de l'écriture multiplicative à l'additive, on sait depuis Galois que le passage dans l'autre sens n'est en général pas possible.

Partant de l'observation aisée découlant d'une application directe du théorème de Rolle, que le polynôme dérivé d'un polynôme à racines toutes réelles est encore à racines toutes réelles, et de la linéarité de la dérivation la rendant transparente dans l'écriture additive des polynômes (il suffit, à décalage près, de multiplier la suite des coefficients par les éléments de la suite $(1, 2, 3, \cdots)$), suivant Polya, on s'intéresse alors aux suites réelles, $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la propriété suivante : à chaque fois qu'on dispose d'un polynôme réel à racines toutes réelles, écrit sous sa forme additive $\sum_k a_k X^k$, alors le polynôme $\sum_k \gamma_k a_k X^k$ est aussi à racines toutes réelles.

Afin de ne pas rallonger encore un sujet déjà très long, le théorème de Schur est admis et le lecteur curieux pourra en trouver une preuve, reposant notamment sur le résultat de la **Q8**, dans le livre de B. Levin *Distribution of Zeros of Entire Functions*, au chapitre VIII section 2.

Avant d'attaquer le coeur de la démonstration, on parcourt une partie du programme de PC où l'on peut trouver des polynômes réels à racines toutes réelles :

— en algèbre linéaire avec les polynômes caractéristiques des matrices symétriques,

— les polynômes orthogonaux,

— les séries génératrices de certaines variables aléatoires,
— les formes quadratiques.

On définit enfin les suites multiplicatives au sens de Polya-Schur et on commence par en étudier les premières propriétés notamment en utilisant le théorème de Rolle : annulation et changements de signe.

La dernière partie, nettement plus difficile, s'intéresse alors au théorème de Polya-Schur, i.e. à donner une caractérisation des suites multiplicatives au sens de Polya-Schur.

1.5.2 Analyse détaillée des questions

Dans le détail des questions :
Q1 - Log-concavité de la suite binomiale : la question a été généralement bien traitée, il faut cependant éviter de donner à lire au correcteur des inégalités forcément justes puisque l'énoncé le propose, sans que la justification ne saute aux yeux !

Q2 - Question plutôt bien traitée par l'ensemble des candidats mais il faut veiller aux signes lorsqu'on multiplie une inégalité.

Q3 - L'unimodularité mentionne un j qu'il s'agit, à priori, de caractériser, visiblement il s'agit ici de l'indice où la suite est maximale. On trouve de nombreuses copies qui raisonnent sur tous les indices à la fois sans savoir où aller. Ainsi une solution naturelle consiste à partir de a_j pris maximal parmi les éléments de la suite, ou alors d'utiliser la monotonie de a_{j+1}/a_j et de regarder l'indice où on franchit 1.

Q4 - Les multiplicités n'ont été étudiées que dans la moitié des copies, les autres se contentant de construire les racines données par le théorème de Rolle.

Q5 - Le jury a été désagréablement surpris par les réponses à cette question pourtant très simple. Par négligence le degré a souvent été donné comme étant égal à n, quand il n'était pas nul ! Il s'agissait dans un premier temps de remarquer que 0 ne pouvait pas être racine, puis de remarquer que $Q(z) = 0$ si et seulement si $P(1/z) = 0$ et que donc toutes les racines de Q devaient être réelles.

Q6 - Quelques copies ont réussi à mener les calculs jusqu'au bout, les autres se sont contentées de suggérer de prendre le discriminant d'un polynôme de degré 2 qu'ils ont renoncé à calculer, ce qui est bien dommage.

Q7 - La stratégie de la question 4 menait à donner toutes les racines sauf une, qu'on pouvait alors obtenir soit par le théorème de Rolle dit infini, ou simplement en disant que les racines complexes non réelles viennent en couple avec leur conjugué complexe.

Q8 - La question a été abordée via l'écriture additive de P ce qui ne pouvait pas donner le résultat.

Q9 - Le jury conseille aux candidats de ne pas perdre inutilement du temps à redémontrer que les valeurs propres d'une matrice symétrique sont réelles, mais simplement d'invoquer le théorème du cours. Le jury signale par ailleurs que, conformément au théorème de Galois, des manipulations sur les lignes et colonnes ne peuvent pas, en général, permettre de calculer les valeurs propres.

Q10 - Il s'agissait essentiellement de bien rappeler que la matrice de passage pour obtenir une matrice diagonale, peut être prise orthogonale.
Q11 - La question était plus difficile. On pouvait utiliser que les polynômes caractéristiques de AB et BA étaient identiques (connaissance hors programme), éventuellement se limiter au cas où A est inversible, ou alors reprendre la preuve classique du fait qu'une matrice symétrique a toutes ses valeurs propres réelles.

Q12 - Il fallait veiller à utiliser la continuité pour prouver la séparation et invoquer le fait qu'un polynôme nul sur une partie infinie est nécessairement nul.

Q13 - Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt est connu mais il faut bien préciser la base de départ pour que la construction vérifie les conditions demandées. Par ailleurs une proportion notable des candidats ont mentionné les polynômes de Lagrange, certainement en désespoir de cause !

Q14 - Seules quelques rares copies sont parvenues à résoudre cette question qui visiblement n'est plus si classique, sur les racines des polynômes orthogonaux.

Q15 - La question a été très mal traitée, certains candidats ont pensé qu'on avait des variables de Bernouilli de même paramètre. Souvent le jury a observé des formules mentionnant un indice i non défini ce qui ne pouvait pas avoir de sens.

Q16 - Cette question délicate a été très rarement abordée correctement.

Q17 - La matrice de Vandermonde est souvent apparue mais il fallait soit écrire un système d'équations qui y était associé, soit préciser quelle base était utilisée pour écrire la famille considérée (la notion de base duale est hors programme à priori). Il s'agissait par ailleurs de bien remarquer que la matrice n'était pas nécessairement carrée.

Q18 - Il s'agissait essentiellement de savoir développer correctement le carré d'une somme, puis de rassembler les différents termes.

Q19 - Il fallait bien préciser que le carré d'un nombre *réel* est positif.

Q20 - Question assez mal traitée, il fallait partir d'une relation linéaire entre les applications données pour se ramener, en suivant l'indication, à la **Q17**.

Q21 - Quelques candidats ont su exploiter l'indication qui suggérait d'annuler tous les termes d'une somme sauf un à valeur négative.

Q22 - Question souvent bien traitée sauf par des copies qui s'essayaient à raisonner sur les coefficients sans penser à utiliser la **Q4**.

Q23 - Il fallait considérer $\Gamma(X^kP)$ puis factoriser par X^k, argument qui n'a été repéré que par de trop rares candidats.

Q24 - Question pas très difficile mais nécessitant des calculs assez longs qui ont découragé les étudiants plutôt à la recherche de points vite gagnés à ce stade de la copie.

Q25 - Question bien traitée par les rares copies qui s'y sont essayé.

Q26 - Il s'agissait de reconnaitre $\Gamma((X+1)^n)$ et de remarquer qu'une somme de termes positifs non tous nuls ne pouvait pas être nulle. Une proportion non négligeable des copies a su repérer ces points faciles à gagner.

Q27 - Question plus difficile et pas abordée : il s'agissait d'appliquer le théorème de Schur à $P(X) = a_0 + \cdots + a_m X^m$ et au polynôme P_n de la question précédente, puis de donner un argument justifiant que la limite d'une suite de polynômes de degré fixe dont toutes les racines sont réelles, ne posséde que des racines réelles.

Q28 - Il fallait simplement remarquer que $\sum_k \gamma_k \binom{n}{k} X^k$ était à racines toutes réelles de sorte que d'après la question 6, $(\gamma_k \binom{n}{k})_k$ est ultra log-concave et donc $(\gamma_k)_k$ est concave. La question n'a pas été abordée (le sujet étant relativement long, ce n'est pas étonnant).

Q29 - De rares étudiants ont su détecter une question vite résolue et ont pu gagner un point facilement.

Q30 - Le calcul du rayon de convergence a été bien vu par quelques rares copies. La convergence de la suite $(P_n)_n$ vers $\sum_n \gamma_n x^n$ n'a pas été traitée.

Q31 - Il s'agissait de montrer la réciproque dans le théorème de Polya via des arguments de convergence dont le jury ne s'attendait pas vraiment à lire une rédaction correcte vue la longueur du sujet.

1.5.3 Conclusion

Le jury note que les questions d'existence (en particulier, les **Q3**, **Q10** et **Q13**) posent des difficultés notamment parce que beaucoup de candidats ne commencent pas par construire l'objet dont on impose les contraintes et se contentent de phrases répétant plus ou moins l'énoncé. Dans ce genre de situation, un raisonnement de type Analyse-Synthèse se révèle souvent efficace.

Enfin le jury tient à signaler la proportion bien trop importante de copies où de manière répétée dans les questions dites fermées, où la réponse est indiquée, sont donnés à lire des arguments longs et vides de sens où la formule demandée finit par apparaitre. Cette stratégie non seulement n'apporte aucun point mais dessert au final le candidat qui sera ensuite plus sévèrement jugé lors de chacune des questions suivantes. L'honnêteté intellectuelle, notamment d'un scientifique, est une qualité grandement appréciée, et pas seulement des correcteurs.