XX. Fonctions de plusieurs variables

2 février 2026

Table des matières

C - Fonctions de plusieurs variables

Les dérivées partielles d'une fonction numérique définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ont été introduites en première année. L'objectif de cette section est d'approfondir et de généraliser cette étude aux fonctions de $p \geqslant 2$ variables.
L'étude d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ se ramenant à celle de ses coordonnées, cette section se consacre à l'étude des fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$. Elle est axée sur la mise en place d'outils permettant de traiter des applications du calcul différentiel à l'analyse et la géométrie. On se limite en pratique au cas $p = 2$ ou $p = 3$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$	
Dérivée en un point selon un vecteur.	Notation $D_v f(a)$.
Dérivées partielles d'ordre 1 en un point d'une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.	Notation $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. On peut aussi utiliser $\partial_i f(a)$.
Une fonction est dite de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω si ses dérivées partielles d'ordre 1 existent et sont continues sur Ω.	
Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.	
Une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω admet en tout point a de Ω un développement limité d'ordre 1.	La démonstration n'est pas exigible. Une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω est continue sur Ω.
Différentielle de f en a.	Elle est définie comme la forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$: $$\mathrm{d}f(a) : (h_1, \dots, h_p) \mapsto \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, h_i.$$ Notation $\mathrm{d}f(a) \cdot h$.
b) Règle de la chaîne	
Dérivée de $t \mapsto f\big(x_1(t), \dots, x_p(t)\big)$. Application au calcul des dérivées partielles de : $(u_1, \dots, u_n) \mapsto f\big(x_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_p(u_1, \dots, u_n)\big)$.	Interprétation géométrique. En pratique, on se limite à $n \leqslant 3$ et $p \leqslant 3$. Les étudiants doivent connaître le cas particulier des coordonnées polaires.
Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert convexe.	
c) Gradient	
Dans $\mathbb{R}^p$ muni de sa structure euclidienne canonique, gradient d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Coordonnées du gradient.	Le gradient est défini par la relation $\mathrm{d}f(a) \cdot h = \langle \nabla f(a), h \rangle$ pour $h \in \mathbb{R}^p$. Notation $\nabla f(a)$.
d) Applications géométriques	
Courbe du plan définie par une équation $f(x, y) = 0$ où f est de classe $\mathscr{C}^1$.	Lignes de niveau de f.
Point régulier. Le gradient est normal à la tangente en un point régulier.	On admet que la courbe admet un paramétrage local de classe $\mathscr{C}^1$. Détermination d'une équation de la tangente en un point régulier. Lorsqu'il est non nul, le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau et orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.
Surface définie par une équation $f(x, y, z) = 0$ où f est de classe $\mathscr{C}^1$. Point régulier. Le plan tangent en un point régulier est défini comme orthogonal au gradient.	
Courbe tracée sur une surface.	Dans le cas d'une courbe régulière, la tangente à la courbe est incluse dans le plan tangent à la surface.

e) Fonctions de classe $\mathscr{C}^2$

Contenus	Capacités & commentaires
Dérivées partielles d'ordre 2 d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.	Notations $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.
Fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$.	
Théorème de Schwarz.	La démonstration est hors programme.
Matrice hessienne en un point a d'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.	Notation $H_f(a)$.
Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 : $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + \nabla f(a)^\top h + \frac{1}{2} h^\top H_f(a) h + \mathrm{o}(\lVert h \rVert^2)$.	La démonstration est hors programme. Expression en termes de produit scalaire.

f) Extremums d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$

Contenus	Capacités & commentaires
Extremum local, global.	
Point critique d'une application de classe $\mathscr{C}^1$.	
Si une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ admet un extremum local en un point a, alors a est un point critique.	
Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et a un point critique de f : – si $H_f(a) \in \mathscr{S}_p^{++}(\mathbb{R})$, alors f atteint un minimum local strict en a; – si $H_f(a) \notin \mathscr{S}_p^{+}(\mathbb{R})$, alors f n'a pas de minimum en a.	Adaptation à l'étude d'un maximum local. Explicitation pour $p = 2$ (trace et déterminant).
	Exemples de recherche d'extremums globaux sur une partie de $\mathbb{R}^p$.

Dans tout ce chapitre, p est un entier naturel supérieur ou égal à 2, U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $a \in U$ et f est une fonction de U dans $\mathbb{R}$.
On notera $\mathscr{C} = (e_1, \ldots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

1 Rappels

1.1 Topologie et fonctions partielles

Généralisons des résultats vus en dimension 2 :

Proposition 1.1.1.
Soit $(x_1, \ldots, x_p) \in U$. Alors, il existe p intervalles ouverts $I_1, \ldots, I_p$ tels que

— $\forall\, k \in [\![1, p]\!]$, $x_k \in I_k$;

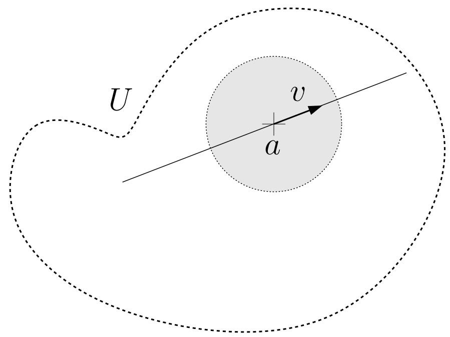
— $I_1 \times \ldots \times I_p \subset U$.

Définition 1.1.2 (Fonctions partielles)**.**
Soit $(x_1, \ldots, x_p) \in U$. Alors le lemme **1.1.1** assure qu'il existe p intervalles ouverts $I_1, \ldots, I_p$ tels que $\forall\, k \in [\![1, p]\!]$, $x_k \in \mathscr{I}_k$ et $I_1 \times \ldots \times I_p \subset U$.
Si $k \in [\![1, p]\!]$, pour tout $j \in [\![1, p]\!] \backslash \{k\}$ on fixe $x_j \in I_j$ et on définit alors la k-ème ***fonction partielle*** de f comme étant la fonction $f_k \ : I_k \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \ldots, x_p)$.

Il est possible de définir une fonction partielle ***directionnelle*** :

Définition 1.1.3.
Soit $a \in U$ et $v \in \mathbb{R}^p$. Comme U est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que la fonction $f_v \ : t \mapsto f(a + tv)$ soit bien définie sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$. Cette fonction est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Remarque 1.1.4.
Si f_k est la k-ème fonction partielle de f et $a = (x_1, \ldots, x_p)$, alors $f_{e_k}(t) = f_k(x_k + t)$.



Remarque 1.1.5.
Dans le cas où $p = 2$, le graphe de f est une surface de $\mathbb{R}^3$. Si (x, y) est un point du plan horizontal, alors $(x, y, f(x, y))$ est un point du graphe de f. Cette surface se trouve donc « au-dessus » de U.
Les graphes des fonctions partielles, directionnelle sou pas, sont des courbes du plan.
Si l'on considère le plan $\mathscr{P}$ engendré par (v, e_3), d'axe des abscisses orienté par v et d'axe des ordonnées orienté par e_3, alors le graphe de f_v dans ce plan est l'intersection de $\mathscr{P}$ et du graphe de f dans $\mathbb{R}^3$.

1.2 Continuité

Définition 1.2.1.
Soit $a \in U$, la fonction f est ***continue en*** a si

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall\, x \in U,\ \|x - a\| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon.$$

La fonction f est ***continue sur*** U si elle est continue en tout point a de U.

Proposition 1.2.2 (Opérations)**.**
Soit $f, g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur U.

1. Si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f + \mu g$ est continue sur U.
2. Les fonctions fg, $|f|$, $\min(f, g)$ et $\max(f, g)$ sont continues sur U.

Démonstration.
C'est la même chose que pour les fonctions réelles. $\square$

Proposition 1.2.3 (composition à gauche)**.**
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur U, soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.
Alors, $\varphi \circ f$ est continue sur U.

Démonstration.
C'est la même chose que pour les fonctions réelles. $\square$

Proposition 1.2.4 (composition à droite)**.**
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction continues sur U, soit $I_1, \dots, I_p$ p intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, et pour tout $k \in [\![1, p]\!]$ soit $u_k : I_k \to \mathbb{R}$ continue, telles que $u_1(I_1) \times \ldots \times u_p(I_p) \subset U$.
Alors, $(x_1, \dots, x_p) \mapsto f(u_1(x_1), \dots, u_p(x_p))$ est continue sur $u_1(I_1) \times \ldots \times u_p(I_p)$.

Proposition 1.2.5 (composition à droite, bis)**.**
Supposons pour cet énoncé seulement que $p = 2$.
Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur U, et soit $u, v : V \to \mathbb{R}$ continues telles que $u(V) \times v(V) \subset U$.
Alors, $(x, y) \mapsto f(u(x, y), v(x, y))$ est continue sur V.

Démonstration.
C'est la même chose que pour les fonctions réelles. $\square$

Remarque 1.2.6.
Cette proposition se généralise aux cas où $p > 2$.

Lemme 1.2.7 (continuité des projections)**.**
Soit $k \in [\![1, p]\!]$. La fonction $\pi_k : (x_1, \dots, x_p) \mapsto x_k$ est continue sur $\mathbb{R}^p$.

Démonstration.
Il suffit de voir que pour tout $a, b \in \mathbb{R}^p$ et pour $k \in [\![1, p]\!]$,

$$|\pi_k(a) - \pi_k(b)| = |\pi_k(a - b)| \leqslant \|a - b\|\,.$$

$\square$

Définition 1.2.8 (Fonction polynomiale)**.**
Soit $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$. On dit que f est une ***fonction polynomiale*** si elle est une combinaison linéaire de produits de puissances des coordonnées des variables.

Exemple 1.2.9.
$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto 3x^2y - 5xyz + z^3$ est une fonction polynomiale.

Proposition 1.2.10.
Toute fonction polynomiale de p variables est continue sur $\mathbb{R}^p$.

Démonstration.
Il suffit d'utiliser le résultat du lemme **1.2.7**, puis la stabilité de l'ensemble des fonctions continues par combinaison linéaire et produit. $\square$

Exercice 1.2.11. 1. Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} (x + y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$$

Démontrer que les deux limites itérées

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) \quad \text{et} \quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$$

n'existent pas, et que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

existe et est égale à 0.

2. Soit

$$f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}, \quad f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}.$$

Démontrer que

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=0$$

et que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.

2 Dérivation

2.1 Dérivée suivant un vecteur

Définition 2.1.1.
Soit $v\in\mathbb{R}^p$. On dit que f est ***dérivable en*** a ***selon le vecteur*** v si la fonction partielle directionnelle $f_v \ : t\mapsto f(a+tv)$ est dérivable en 0, *i.e.* $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(a+tv)-f(a)}{t}$ existe et est finie – elle vaut alors $f_v'(0)$.
On note alors $D_vf(a)$ cette limite, et on l'appelle ***nombre dérivé, ou dérivée de*** f ***en*** a ***selon*** v.

Exemple 2.1.2.
Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2} \text{ si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$.
D'une part $f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\right)\to\frac{1}{2}$ donc f n'est pas continue en $(0,0)$.

D'autre part, soit $h=(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$: $\dfrac{f(t\alpha,t\beta)-f(0,0)}{t}=\dfrac{t^2\alpha^2\beta}{t^4\alpha^4+t^2\beta^2}\xrightarrow[t\to 0]{}\begin{cases}0 \text{ si } \beta=0\\ \alpha^2/\beta \text{ sinon}\end{cases}$
f admet donc des dérivées dans toutes les directions en 0, mais n'est pas continue en 0.

2.2 Dérivées partielles

Définition 2.2.1.
Soit $k\in[\![1,p]\!]$. Nous gardons la notation précédente f_k pour la k-ème fonction partielle de f.
On dit que la fonction f est ***dérivable en un point*** $(x_1,\ldots,x_p)$ ***par rapport à sa*** k***-ème variable*** si la fonction partielle $f_k \ : x\mapsto f(x_1,\ldots,x_{k-1},x,x_{k+1},\ldots,x_p)$ est dérivable en x_k. On note alors

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1,\ldots,x_p)=f_k'(x_k)$$
$$=\lim_{x\to x_k}\frac{f(x_1,\ldots,x_{k-1},x,x_{k+1},\ldots,x_p)-f(x_1,\ldots,x_{k-1},x_k,x_{k+1},\ldots,x_p)}{x-x_k}.$$

La fonction f est dite ***dérivable par rapport à sa*** k***-ème variable sur*** U si elle l'est en tout point de U.
La fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ peut aussi être notée $\partial_k(f)$.

Remarque 2.2.2. 1. $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ n'est rien d'autre que $D_{e_k}(f)$. Dans cette première notation, x_k représente plus la direction du k-ème vecteur de la base canonique qu'une variable.

2. Dans le cas $p=2$, si $a=(x_0,y_0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+t)-f(x_0,y_0)}{t}$.

2.3 Opérations

Théorème 2.3.1.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^p$ et $f, g \ : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions admettant une dérivée en a selon v. Alors

1. $f+\lambda g$ admet une dérivée en a selon v, et $D_v(f+\lambda g)(a) = D_v(f)(a) + \lambda D_v(g)(a)$;
2. $f \times g$ admet une dérivée en a selon v, et $D_v(fg)(a) = g(a)D_v(f)(a) + f(a)D_v(g)(a)$;
3. si $\varphi \ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable en $f(a)$, alors $\varphi \circ f$ admet une dérivée en a selon v, et $D_v(\varphi \circ f)(a) = D_v(f)(a) \times \varphi'(f(a))$;
4. Si g ne s'annule pas sur U, la fonction $\dfrac{1}{g}$ admet une dérivée en a selon v, et $D_v\left(\frac{1}{g}\right)(a) = -\dfrac{1}{g^2(a)} D_v(g)(a)$;
5. Si g ne s'annule pas sur U, la fonction $\dfrac{f}{g}$ admet une dérivée en a selon v, et $D_v\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \dfrac{1}{g^2(a)}(g(a)D_v(f)(a) - f(a)D_v(g)(a))$.

Démonstration.
Dans cette démonstration, nous allons utiliser f_v et g_v, les fonctions partielles directionannelles de f et g selon v.

1. Remarquons que la fonction partielle directionannelle de $f + \lambda g$ selon v est $h(t) = (f+\lambda g)(a+tv) = f(a+tv) + \lambda g(a+tv) = f_v(t) + \lambda g_v(t)$. Comme f_v et g_v sont dérivables en 0, h également et $D_v(f+\lambda g)(a) = h'(0) = f_v'(0) + \lambda g_v'(0) = D_v(f)(a) + \lambda D_v(g)(a)$.
2. Même principe : $(fg)(a+tv) = f_v(t) \times g_v(t)$ donc $D_v(fg)(a) = f_v'(0)g_v(0) + f_v(0)g_v'(0) = g(a)D_v(f)(a) + f(a)D_v(g)(a)$.
3. Toujours pareil : $(\varphi \circ f)(a+tv) = \varphi \circ f_v(t)$ donc $D_v(\varphi \circ f)(a) = (\varphi \circ f_v)'(0) = f_v'(0)\varphi(f_v(0)) = D_v(f)(a) \times \varphi'(f(a))$.
4. On peut réutiliser le même principe, ou le point précédent avec $\varphi(t) = \dfrac{1}{t}$.
5. On combine le point précédent et le second.

$\square$

3 Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

3.1 Définition et opérations

Définition 3.1.1.
La fonction f est dite ***de classe $\mathscr{C}^1$ sur*** U si f est dérivable par rapport à ses p variables sur U et si pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ sont continues sur U.

Proposition 3.1.2.
Toute fonction polynomiale de p variables est de classe $\mathscr{C}^1$.

Démonstration.
Une fonction polynomiale de deux variables est dérivable par rapport à chacune de ses variables, et ses dérivées partielles sont polynomiales, donc continues. $\square$

Théorème 3.1.3 (Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$)**.**
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f, g \ : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ en a. Alors

1. $f + \lambda g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ en a ;
2. $f \times g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ en a ;
3. si $\varphi \ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ en $f(a)$, alors $\varphi \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ en a ;
4. Si g ne s'annule pas sur U, alors $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ en a.

Démonstration.
Il suffit d'appliquer **2.3.1** à ces fonctions, puis d'appliquer à leurs dérivées partielles les résultats de la section **1.2** concernant les opérations sur les fonctions continues. $\square$

3.2 Développement limité d'ordre 1

Définition 3.2.1 (notation o)**.**
Soit $f, g : U \to \mathbb{R}$, soit $a \in U$.
On dit que f est ***négligeable devant*** g ***au voisinage de*** a s'il existe une fonction $\varepsilon : U \to \mathbb{R}$ continue en a et vérifiant $\varepsilon(a) = 0$ telle que, pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in U$,

$$f(x_1, \dots, x_p) = g(x_1, \dots, x_p)\varepsilon(x_1, \dots, x_p).$$

On note ceci

$$f(x_1, \dots, x_p) \underset{(x_1,\dots,x_p)\to a}{=} o(g(x_1, \dots, x_p)).$$

Théorème 3.2.2 (DL à l'ordre 1)**.**
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, soit $a \in U$. Alors pour tout $h = (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p$,

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + \sum_{k=1}^{p} h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) + o(\|h\|).$$

Démonstration (non exigible)**.**
Nous ne démontrons ce résultat que dans le cas $p = 2$, les autres cas se traitant de manière similaire.
On note $a = (x_0, y_0)$.
Soit I et J deux intervalles ouverts vérifiant $I \times J \subset U$, et tels que $x_0 \in I$ et $y_0 \in J$. Il existe notamment $\alpha_0 > 0$ tel que, pour tout $h \in U$, si $\|a - h\| \leqslant \alpha_0$, alors $h \in I \times J$. Notons B la boule ouverte de centre 0 et de rayon α_0.
On définit $\varepsilon : B \to \mathbb{R}$ par $\varepsilon(0,0) = 0$ et si $(h_1, h_2) \neq (0,0)$:

$$\varepsilon(h_1, h_2) = \frac{1}{\|(h_1,h_2)\|}\Big(f(a + (h_1,h_2)) - f(a) - h_1\frac{\partial f}{\partial x}(a) - h_2\frac{\partial f}{\partial y}(a)\Big)$$

Montrons que la fonction ε est continue en $(0,0)$. Considérons $\eta > 0$.

Pour $h = (h_1, h_2)$ suffisamment petit, on a

$$\begin{aligned}
\Delta &= \left|f(a+h) - f(a) - h_1\frac{\partial f}{\partial x}(a) - h_2\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right| \\
&= \left|f(x_0+h_1, y_0+h_2) - f(x_0, y_0+h_2) - h_1\frac{\partial f}{\partial x}(a)\right. \\
&\qquad \left. + f(x_0, y_0+h_2) - f(x_0,y_0) - h_2\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right| \\
&\leqslant \underbrace{\left|f(x_0+h_1, y_0+h_2) - f(x_0, y_0+h_2) - h_1\frac{\partial f}{\partial x}(a)\right|}_{\Delta_1} \\
&\qquad + \underbrace{\left|f(x_0, y_0+h_2) - f(x_0,y_0) - h_2\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right|}_{\Delta_2}
\end{aligned}$$

Comme $f(\cdot, y_0 + h_2)$ est dérivable sur I, par le théorème des accroissements finis, il existe t_1 entre x_0 et $x_0 + h_1$ vérifiant

$$f(x_0+h_1, y_0+h_2) - f(x_0, y_0+h_2) = h_1\frac{\partial f}{\partial x}(t_1, y_0+h_2).$$

On a donc

$$\Delta_1 = |h_1|\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t_1, y_0+h_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right|.$$

Comme $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $a = (x_0, y_0)$, il existe $\alpha_1 > 0$ tel que pour tout $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$, si $\|(h_1,h_2)\| \leqslant \alpha_1$, alors

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t_1, y_0+h_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right| \leqslant \eta,$$

ce qui donne $|\Delta_1| \leqslant \eta \|(h_1,h_2)\|$.
On procède de même pour Δ_2, et il existe donc $\alpha_2 > 0$ tel que pour tout $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$, si $\|(h_1,h_2)\| \leqslant \alpha_2$, alors $|\Delta_1| \leqslant \eta \|(h_1,h_2)\|$.
Ainsi, pour tout $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$, si $\|(h_1,h_2)\| \leqslant \min(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$, alors $|\varepsilon(h_1,h_2)| \leqslant 2\eta$, ce qui est bien le résultat demandé. ☐

Corollaire 3.2.3.
Si $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, alors f est continue.

4 Différentielle

Définition 4.0.1 (Différentielle)**.**
Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, pour tout $a \in U$, on note

$$\mathrm{d}f(a) \ : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R} \\ h=(h_1,\dots,h_p) & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{p} h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \end{array}.$$

Cette fonction $\mathrm{d}f(a)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$ nommée ***différentielle de f en a***.

On note $\mathrm{d}f(a).h = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ (plutôt que $\mathrm{d}f(a)(h)$).

Remarque 4.0.2.
Avec cette notation, le développement limité de f en a s'écrit donc

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a).h + o(\|h\|).$$

Proposition 4.0.3.
Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, alors pour tout $a \in U$ et pour tout vecteur v non nul de $\mathbb{R}^p$, f admet une dérivée en a selon v et

$$D_v f(a) = \mathrm{d}f(a).v$$

Démonstration.
En effet, $f(a+tv) \underset{t\to 0}{=} f(a) + \mathrm{d}f(a).(tv) + o(\|tv\|) = f(a) + t\,\mathrm{d}f(a).v + o(t)$ donc $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t} = \mathrm{d}f(a).v$.
Ou encore : $f_v(t) = f(a+tv) \underset{t\to 0}{=} f(a) + \mathrm{d}f(a).(tv) + o(\|tv\|) = f(a) + t\,\mathrm{d}f(a).v + o(t)$ donc $D_v(f)(a)$ existe car f_v est dérivable en 0, et $D_v(f)(a) = f_v'(0) = \mathrm{d}f(a).v$. □

Exemple 4.0.4.
Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M^2$.

Justifions que f est $\mathscr{C}^1$ et déterminons la différentielle de f en tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
L'application $M \mapsto M^2$ est $\mathscr{C}^1$ car polynomiale. Soient $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$$f(M+H) - f(M) = MH + HM + H^2 = \varphi(H) + o(\|H\|) \text{ avec}$$

$\varphi : H \mapsto MH + HM$ linéaire. Par suite $\mathrm{d}f(M) : H \mapsto HM + MH$.

Remarque 4.0.5.
La réciproque est fausse : une fonction peut admettre une dérivée en un point selon n'importe quel vecteur sans être même continue en ce point, comme le montre l'exemple **2.1.2**.

Les opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ se réécrivent grâce à la notion de différentielle :

Théorème 4.0.6.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f, g \ : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ en a. Alors

1. $f + \lambda g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ en a et $\mathrm{d}(f+\lambda g)(a) = \mathrm{d}f(a) + \lambda\,\mathrm{d}g(a)$;
2. $f \times g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ en a et $\mathrm{d}(fg)(a) = g(a)\,\mathrm{d}f(a) + f(a)\,\mathrm{d}g(a)$;
3. si $\varphi \ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ en $f(a)$, alors $\varphi \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ en a et $\mathrm{d}(\varphi \circ f)(a) = \varphi'(f(a)) \times \mathrm{d}f(a)$;
4. Si g ne s'annule pas sur U, alors $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ en a et $\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \dfrac{g(a)\,\mathrm{d}f(a) - f(a)\,\mathrm{d}g(a)}{g^2(a)}$.

5 Gradient

Munissons $\mathbb{R}^p$ de son produit scalaire canonique noté $\langle .,. \rangle$.

Définition 5.0.1 (Gradient)**.**
Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, l'application $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $h \mapsto \mathrm{d}f(a).h$ est une forme linéaire.
Par application du théorème de représentation, il existe un unique vecteur nommé ***gradient de f en a*** et noté $\nabla f(a)$ tel que

$$\forall\, h \in \mathbb{R}^p,\ \ \mathrm{d}f(a).h = \langle \nabla f(a), h\rangle\,.$$

Proposition 5.0.2 (Coordonnées du gradient)**.**
Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, $\nabla f(a) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_p}(a)\right)$.

Démonstration.
Il suffit de rappeler que pour tout $h = (h_1, \dots, h_p)$, $\mathrm{d}f(a).h = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$. ☐

6 Règle de la chaîne

6.1 Dérivation le long d'un arc de classe $\mathscr{C}^1$

Théorème 6.1.1 (Règle de la chaîne)**.**
Soit $f\ : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $x_1, \dots, x_p$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de I dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout $t \in I$, $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_p(t)) \in U$.
Alors la fonction $g\ : I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(\gamma(t))$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned} g'(t) &= \sum_{k=1}^{p} x_k'(t) \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1(t), \dots, x_p(t)) \\ &= \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \\ &= \mathrm{d}f(\gamma(t)).\gamma'(t). \end{aligned}$$

Démonstration.
Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, x_k admet un DL d'ordre 1 en tout $t \in I$, pour h au voisinage de $0\ : x_k(t+h) = x_k(t) + h x_k'(t) + h\varepsilon_k(h)$ où $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon_k(h) = 0$.
En notant v le vecteur de coordonnées $\big(h(x_1'(t) + \varepsilon_1(h)), \dots, h(x_p'(t) + \varepsilon_p(h))\big)$ et $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_p(t))$, nous avons donc

$$\begin{aligned} g(t+h) &= f\left(x_1(t) + h(x_1'(t) + \varepsilon_1(h)), \dots, x_p(t) + h(x_p'(t) + \varepsilon_p(h))\right) \\ &= f(\gamma(t) + v) \\ &= f(\gamma(t)) + h \sum_{k=1}^{p} (x_k'(t) + \varepsilon_k(h)) \frac{\partial f}{\partial x_k}(\gamma(t)) + o(\|v\|) \\ &= f(\gamma(t)) + h \sum_{k=1}^{p} x_k'(t) \frac{\partial f}{\partial x_k}(\gamma(t)) + h \sum_{k=1}^{p} \varepsilon_k(t) \frac{\partial f}{\partial x_k}(\gamma(t)) + o(\|v\|) \\ &= f(\gamma(t)) + h \left\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\right\rangle + h \sum_{k=1}^{p} \varepsilon_k(h) \frac{\partial f}{\partial x_k}(\gamma(t)) + o(\|v\|) \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{h\to 0} \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \varepsilon_k(h) \frac{\partial f}{\partial x_k}(\gamma(t)) = 0$ donc $h \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \varepsilon_k(h) \frac{\partial f}{\partial x_k}(\gamma(t)) = o(h)$.
De plus $\|v\| = |h|.\left\|(x_1'(t) + \varepsilon_1(h), \dots, x_p'(t) + \varepsilon_p(h))\right\| = \mathscr{O}(h)$ car les ε_k et les x_k' sont bornées au voisinage de 0 : les premières sont de limite nulle en 0, et les secondes sont des fonctions continues au voisinage de 0 donc ont également une limite finie en 0. Ainsi $o(\|v\|) = o(h)$ et finalement

$$g(t+h) = f(\gamma(t)) + h \left\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\right\rangle + o(h)$$

donc g est dérivable en 0 et $g'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle = \mathrm{d}f(\gamma(t)).\gamma'(t)$. ☐

Exemple 6.1.2.
Soit $f\ : \mathbb{R}^t \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto xy + \mathrm{e}^{yz}$ et $x_1, x_2, x_3\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x_1(t) = 2t$, $x_2(t) = \mathrm{e}^{t}$ et $x_3(t) = -t^2$.
Alors avec les notations de l'énoncé, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g'(t) &= x_1'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)) + x_2'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t)) + x_3'(t) \frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t)) \\ &= 2x_2(t) + \mathrm{e}^{t}\Big(x_1(t) + x_3(t)\mathrm{e}^{x_2(t)x_3(t)}\Big) - 2t x_2(t) \mathrm{e}^{x_2(t)x_3(t)} \\ &= 2\mathrm{e}^{t} + 2t\mathrm{e}^{t} - t^2 \mathrm{e}^{-t^2\mathrm{e}^{t} + t} - 2t\mathrm{e}^{-t^2\mathrm{e}^{t}+t}. \end{aligned}$$

6.2 Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert convexe

Proposition 6.2.1.
On suppose ici que U est **convexe**, et que f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ définie sur U et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Alors f est constante sur U si et seulement si sa différentielle est nulle sur U.

Démonstration.
($\Rightarrow$) immédiat.
($\Leftarrow$) Supposons que pour tout $x \in U$, $\mathrm{d}f(x) = 0$.
Soit $a, b \in U$. Par convexité de U, pour tout $t \in [0,1]$, $ta + (1-t)b \in U$. Nous pouvons alors considérer la fonction $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(ta + (1-t)b)$.
La règle de la chaîne assure alors que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ et que pour tout $t \in [0,1]$, $\varphi'(t) = \mathrm{d}f(ta + (1-t)b).[a-b]$, qui est donc nulle puisque $\mathrm{d}f = 0$. La fonction φ est donc constante sur l'intervalle I. En particulier $\varphi(0) = \varphi(1)$, ce qui assure que $f(a) = f(b)$, et donc f est constante. □

6.3 Dérivation d'une composition de fonctions de plusieurs variables

Théorème 6.3.1.
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, V un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $g : V \to U$, dont on notera $(u_1, \dots, u_p)$ les fonctions coordonnées. Ainsi pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $u_k : V \to \mathbb{R}$ et pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in V$, $g(x_1, \dots, x_n) = (u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_p(x_1, \dots, x_n))$.
Par abus, on notera $(u_1, \dots, u_p)$ les coordonnées dans $\mathbb{R}^p$, ce qui rend la formule plus facilement mémorisable.
Posons $\varphi = f \circ g : V \to \mathbb{R}$.
Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$, alors φ aussi, et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et $b \in V$,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(b) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}(b).\frac{\partial f}{\partial u_j}(g(b)).$$

Remarque 6.3.2.
Sans donner de noms aux coordonnées de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^p$ et en notant ∂_i la dérivée d'une fonction selon la i-ème coordonnée, la formule s'écrit :

$$\partial_k \varphi(b) = \sum_{j=1}^{p} \partial_j f(g(b)).\partial_k u_j(b).$$

Démonstration.
Fixons $k \in [\![1, n]\!]$, et pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, notons v_j la k-ème fonction partielle de u_j, c'est-à-dire $v_j : t \mapsto u_j(x_1, \dots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \dots, x_n)$.
Notons $\varphi_k : t \mapsto \varphi(x_1, \dots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \dots, x_n) = f(v_1(t), \dots, v_p(t))$.
Il s'agit alors d'appliquer la règle de la chaîne à φ_k :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(b) = \varphi_k'(b) = \sum_{j=1}^{p} v_j'(b).\frac{\partial f}{\partial u_j}(g(b)) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}(b).\frac{\partial f}{\partial u_j}(g(b)).$$

□

Exemple 6.3.3 (Gradient en coordonnées polaires)**.**
Soit f définie sur $U = \mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{R}_-$. Tout point de U admet un unique couple de coordonnées polaires de la forme (r, θ) où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$. Et même plus, $p : \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[\to U$, $(r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est une bijection. On notera x et y ses fonctions coordonnées.
On considère alors la fonction $g : \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[\to \mathbb{R}$, $(r, \theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta) = f(x(r,\theta), y(r,\theta))$.
Nous poserons également les vecteurs $\overrightarrow{u}_\theta = \cos\theta \overrightarrow{i} + \sin\theta \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v}_\theta = -\sin\theta \overrightarrow{i} + \cos\theta \overrightarrow{j}$. On observe que $(\overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{v}_\theta)$ est une b.o.n.d.
Alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) &= \frac{\partial x}{\partial r}(r,\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \frac{\partial y}{\partial r}(r,\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \\
&= \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \\
\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) &= \frac{\partial x}{\partial \theta}(r,\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \frac{\partial y}{\partial \theta}(r,\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \\
&= -r\sin\theta \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta).
\end{aligned}$$

Ainsi, si $r \neq 0$, on obtient par opérations de Gauss

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) &= \frac{1}{r}\left(r\cos\theta\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) - \sin\theta\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\right)\\
\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) &= \frac{1}{r}\left(r\sin\theta\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \cos\theta\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\right)
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit que

$$\begin{aligned}
\nabla f(r\cos\theta, r\sin\theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\vec{j}\\
&= \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\vec{v}_\theta.
\end{aligned}$$

Exemple 6.3.4.
Soit $\mathscr{U} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ x > 0\right\}$. Résolvons l'équation aux dérivées partielles (EDP)

$$\forall (x,y) \in \mathscr{U},\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\quad (\mathscr{E}),$$

d'inconnue $f \in \mathscr{C}^1(\mathscr{U}, \mathbb{R})$.
Soit $\mathscr{V} = \mathbb{R}_+^* \times]-\pi/2, \pi/2[$ et $p : \mathscr{V} \to \mathscr{U},\ (r,\theta) \mapsto (x = r\cos\theta, y = r\sin\theta)$.
L'application p est de classe $\mathscr{C}^1$, bijective de $\mathscr{V}$ dans $\mathscr{U}$.
Ainsi, si $f \in \mathscr{C}^1(\mathscr{U}, \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
f \text{ est solution de } (\mathscr{E}) &\Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathscr{U}, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\\
&\Leftrightarrow \forall (r,\theta) \in \mathscr{V}, \quad r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\\
&\qquad\qquad + r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) = r.
\end{aligned}$$

Mais nous avons montré précédemment que, si $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$, alors $\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Donc

$$\begin{aligned}
f \text{ est solution de } (\mathscr{E}) &\Leftrightarrow \forall (r,\theta) \in \mathscr{V},\ \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 1\\
&\Leftrightarrow \exists \varphi \in \mathscr{C}^1(]-\pi/2, \pi/2[, \mathbb{R}),\ \forall (r,\theta) \in \mathscr{V},\\
&\qquad g(r,\theta) = r + \varphi(\theta)\\
&\Leftrightarrow \exists \varphi \in \mathscr{C}^1(]-\pi/2, \pi/2[, \mathbb{R}),\ \forall (x,y) \in \mathscr{U},\\
&\qquad f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \varphi(\arctan(y/x))\\
&\Leftrightarrow \exists \psi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}),\ \forall (x,y) \in \mathscr{U},\\
&\qquad f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \psi(y/x).
\end{aligned}$$

7 Applications géométriques

7.1 Lignes de niveau

Définition 7.1.1 (Ligne de niveau)**.**
Si $z \in \mathbb{R}$, on appelle ***ligne de niveau de f d'altitude*** z la partie

$$\{\, a \in \mathbb{R}^2 \mid f(a) = z \,\}.$$

Remarque 7.1.2.
La ligne de niveau d'altitude z est donc $f^{-1}(\{z\})$.

Exemple 7.1.3.
On a tracé dans la figure **7.1** les lignes de niveau correspondant à la fonction $f : (x,y) \mapsto (x^2+y)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$.

Exemple 7.1.4.
Vous trouverez dans la figure **7.2** un exemple de carte IGN, faisant figurer les lignes de niveau du terrain. Avec un peu d'habitude, on arrive très bien à se représenter le terrain !

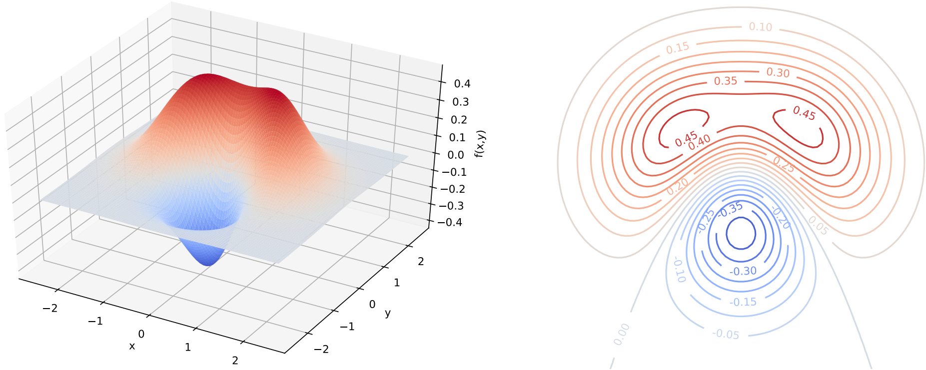


FIGURE 7.1 – Représentation et lignes de niveau de $f : (x,y) \mapsto (x^2 + y)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$.

Proposition 7.1.5.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\gamma : I \to U$ un arc de classe $\mathscr{C}^1$ tel que $\gamma(I)$ est inclus dans une ligne de niveau de f.
Alors, pour tout $t \in I$, $\nabla f(\gamma(t))$ est orthogonal à $\gamma'(t)$.

Démonstration.
Nous écrirons $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, et nous supposons qu'il existe $z \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in I$, $f(x(t), y(t)) = z$.
La règle de la chaîne assure alors que $x'(t)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) = 0$, *i.e.* $\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle = 0$. □

Remarque 7.1.6.
La propriété précédente est souvent résumée sous la locution « le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau de f ». En effet, $\gamma'(t)$ dirige la droite tangente à l'arc γ au point $\gamma(t)$ (voir figure **7.3**).

Remarque 7.1.7.
Puisque $D_v f(a) = \langle \nabla f(a), v\rangle$, le théorème de Cauchy-Schwarz assure que cette dérivée est maximale quand v et $\nabla f(a)$ sont colinéaires de même sens : on dit que le gradient indique la direction de plus grande pente, et

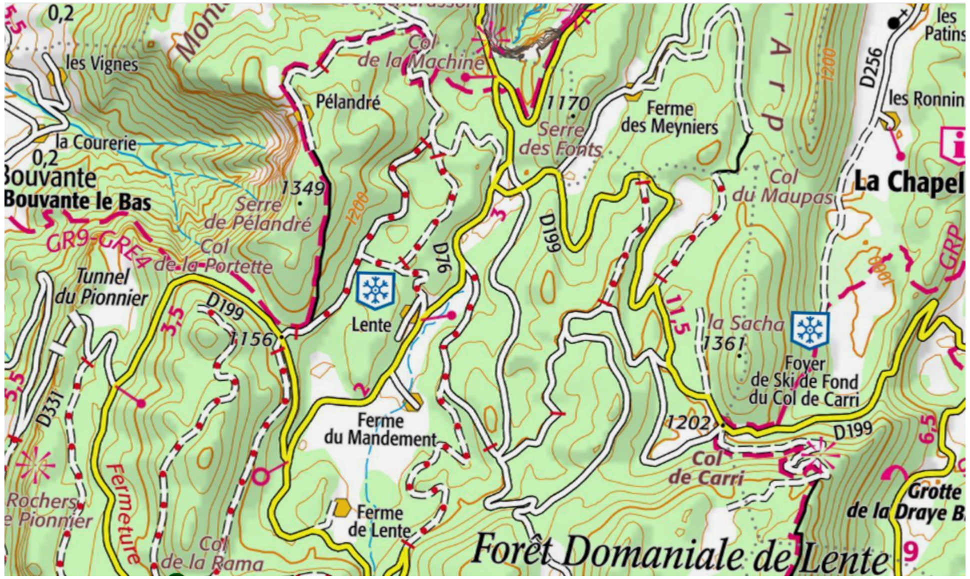


FIGURE 7.2 – Exemple de carte IGN.

qu'il est orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.

7.2 Courbes dans le plan

Définition 7.2.1 (Courbe plane)**.**
On appelle ***courbe plane définie par une équation cartésienne*** tout ensemble de points du plan vérifiant une équation de la forme $f(x,y) = 0$ où f est une application de classe $\mathscr{C}^1$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Remarque 7.2.2.
Sans hypothèse supplémentaire, une telle courbe $\mathscr{C}$ n'est pas une courbe au sens usuel. Par exemple si f est la fonction nulle, $\mathscr{C}$ n'est pas une

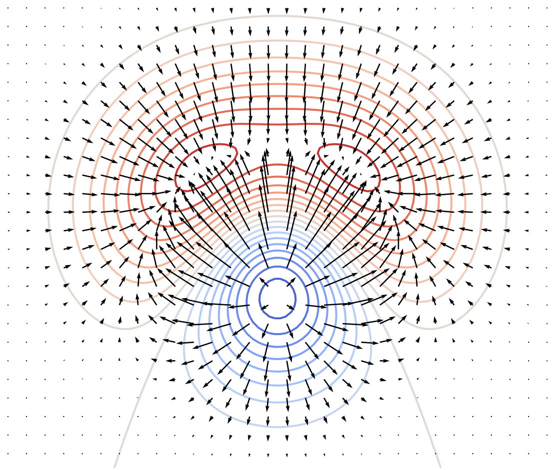


FIGURE 7.3 – Champ de vecteurs de ∇f, et lignes de niveau de f.

courbe mais le plan tout entier.
Une courbe est donc une ligne de niveau 0.

Exemple 7.2.3. 1. La droite du plan de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et passant par $(1, 2)$ est une courbe plane d'équation cartésienne $f(x, y) = 0$ avec $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x + 3y - 7 \end{array}$;

2. Le cercle trigonométrique usuel est une courbe plane d'équation cartésienne $f(x, y) = 0$ avec $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y & \mapsto & x^2 + y^2 - 1 \end{array}$;

3. La ***lemniscate de Bernoulli*** représentée figure **7.4** est une courbe plane d'équation cartésienne $f(x, y) = 0$ avec $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) \end{array}$.

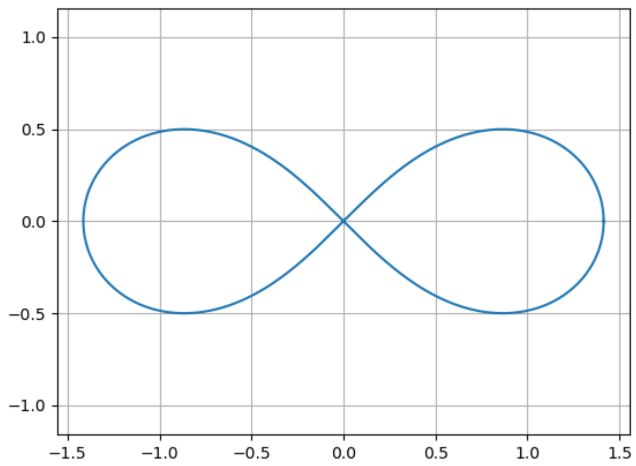


FIGURE 7.4 – Lemniscate de Bernoulli de paramètre $d = 1$

Définition 7.2.4 (Point régulier, point critique)**.**
Si f est de classe $\mathscr{C}^1$, soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $f(x, y) = 0$.

1. Un point $(x_0, y_0) \in \mathscr{C}$ est dit ***régulier*** si $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$;
2. Il est dit ***critique*** si $\nabla f(x_0, y_0) = 0$, *i.e.* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$;
3. La courbe $\mathscr{C}$ est dite ***régulière*** si tous ses points sont réguliers.

Théorème 7.2.5 (Tangente en un point régulier)**.**
Avec les notations précédentes, si (x_0, y_0) est un point régulier de $\mathscr{C}$, alors $\mathscr{C}$ admet une tangente en ce point, de vecteur normal $\nabla f(x_0, y_0)$ et

d'équation
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)=0.$$

Démonstration.
Pour démontrer ce résultat, nous avons besoin d'en admettre un autre : qu'il existe un paramétrage local régulier de $\mathscr{C}$. Cela signifie que l'on admet qu'il existe une fonction $\gamma\ :\ ]-1,1[\to\mathbb{R}^2$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\gamma(0)=(x_0,y_0)$, pour tout $t\in]-1,1[$, $\gamma(t)\in\mathscr{C}$, $\gamma'(t)\neq 0$, et dans un voisinage de (x_0,y_0), pour chaque point de $(x,y)\in\mathscr{C}$ il existe $t\in]-1,1[$ tel que $(x,y)=\gamma(t)$.
Nous savons déjà, d'après la partie sur les courbes paramétrées du chapitre sur la dérivabilité des fonctions vectorielles, que f admet une tangente en $\gamma(t)$ car $\gamma'(t)\neq 0$, et que $\gamma'(t)$ est un vecteur directeur de cette tangente.
Grâce à la proposition **7.1.5**, $\nabla f(\gamma(t))$ est orthogonal à $\gamma'(t)$, qui dirige justement la tangente à f en $\gamma(t)$.
L'équation de la tangente en découle. □

Exercice 7.2.6.
Former l'équation de la tangente à l'hyperbole d'équation $x^2-\frac{y^2}{2}=1$ au point de coordonnées $(\sqrt{3},2)$.

7.3 Surfaces dans l'espace

Définition 7.3.1 (Surface dans l'espace)**.**
On appelle ***surface définie par une équation cartésienne*** tout ensemble de points de $\mathbb{R}^3$ vérifiant une équation de la forme $f(x,y,z)=0$ où f est une application de classe $\mathscr{C}^1$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Remarque 7.3.2.
Sans hypothèse supplémentaire, une telle surface $\mathscr{C}$ n'est pas une surface au sens usuel. Par exemple si f est la fonction nulle, $\mathscr{C}$ n'est pas une courbe mais l'espace tout entier.

Exemple 7.3.3. 1. La sphère de centre 0 et de rayon 1 est une surface d'équation cartésienne $f(x,y,z)=0$ avec $f:\begin{array}{rcl}\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}\\ (x,y) & \mapsto & x^2+y^2+z^2-1\end{array}$;

2. L'***hyperboloïde à une nappe*** représenté figure **7.5** est une surface d'équation cartésienne $f(x,y,z)=0$ avec $f:\begin{array}{rcl}\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}\\ (x,y) & \mapsto & x^2+y^2-z^2-1\end{array}$.

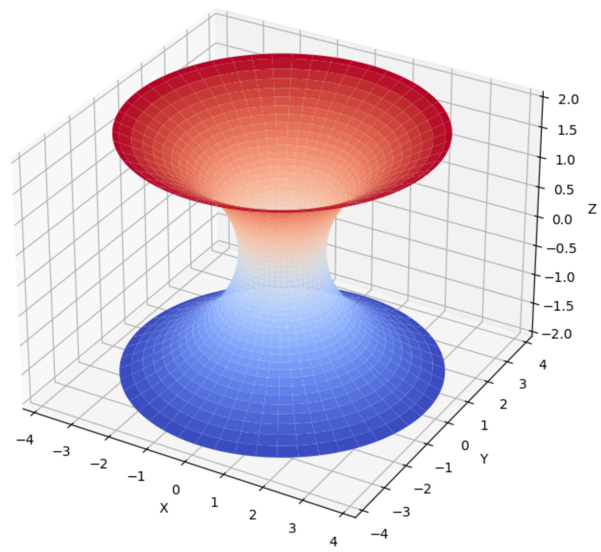


FIGURE 7.5 – Hyperboloïde à une nappe

Définition 7.3.4 (Point régulier, point critique)**.**
Si f est de classe $\mathscr{C}^1$, soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation $f(x,y,z)=0$.

1. Un point $(x_0,y_0,z_0)\in\mathscr{S}$ est dit ***régulier*** si $\nabla f(x_0,y_0,z_0)\neq 0$;
2. Il est dit ***critique*** si $\nabla f(x_0,y_0,z_0)=0$, *i.e.* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)=\dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)=0$;
3. La surface $\mathscr{S}$ est dite ***régulière*** si tous ses points sont réguliers.

Théorème 7.3.5 (Plan tangents en un point régulier)**.**
Avec les notations précédentes, si (x_0,y_0,z_0) est un point régulier de $\mathscr{S}$, alors $\mathscr{S}$ admet un plan tangent en ce point, de vecteur normal $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$ et d'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0.$$

Exercice 7.3.6.
Déterminer une équation du plan tangent à l'ellipsoïde d'équation $x^2+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=1$ au point de coordonnées $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2},0\right)$.

Définition 7.3.7 (Courbe tracée sur une surface)**.**
On appelle ***courbe tracée sur la surface $\mathscr{S}$ d'équation*** $f(x,y,z)=0$ tout arc paramétré (I,γ) où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et où $\gamma\ :I\to\mathbb{R}^3$ est une application de classe $\mathscr{C}^1$ à valeurs dans U telle que $\forall\, t\in I,\ f(\gamma(t))=0$, c'est-à-dire que pour tout t le point $\gamma(t)$ appartient à $\mathscr{S}$.

Proposition 7.3.8.
La tangente en un point régulier M_0 d'une courbe tracée sur une surface $\mathscr{S}$ est incluse dans le plan tangent à $\mathscr{S}$ en M_0.

Démonstration.
Soit γ un paramétrage d'une courbe $\mathscr{C}$ tracée sur la surface $\mathscr{S}$ d'équation $f(x,y,z)=0$. En dérivant la relation $f(\gamma(t))=0$ à l'aide de la règle de la chaîne on obtient $\langle\nabla f(\gamma(t)),\gamma'(t)\rangle=0$ donc en tout point régulier (de la courbe et de la surface), la tangente à la courbe est orthogonale au gradient. Or le plan tangent à $\mathscr{S}$ en M_0 est exactement le plan normal $\nabla f(M_0)$ et passant par M_0. Il contient donc la tangente à $\mathscr{C}$ en M_0. $\square$

8 Fonctions de classe $\mathscr{C}^2$

8.1 Dérivées secondes

Définition 8.1.1 (Dérivées partielles d'ordre 2)**.**
Soit $k,j\in[\![1,p]\!]$.
Si f admet une k-ème dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$, qui elle-même admet une j-ème dérivée partielle $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_k}\right)$, cette dernière est notée $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_k}$, et nommée ***dérivée partielle d'ordre 2*** ou ***dérivée partielle seconde*** de f par rapport aux variables x_j,x_k.
La dérivée partielle d'ordre 2 $\dfrac{\partial}{\partial x_k}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_k}\right)$ est notée $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$.

Définition 8.1.2.
On dit que f est ***de classe $\mathscr{C}^2$ sur U*** si toutes ses dérivées partielles secondes existent et sont continues.

Théorème 8.1.3 (Théorème de Schwarz)**.**
Si f est de classe $\mathscr{C}^2$, pour tout $j, k \in [\![1, p]\!]$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$.

Démonstration.
Elle est hors-programme. □

Remarque 8.1.4.
Montrer qu'il existe j, k tels que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$ est une méthode pour montrer que f n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$.

Exercice 8.1.5.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy\left(x^2 - y^2\right)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } x = y = 0 \end{cases}$.
Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ mais qu'elle n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$ en $(0, 0)$.

8.2 Matrice hessienne

Définition 8.2.1 (Matrice hessienne)**.**
Si f est de classe $\mathscr{C}^2$, on définit sa ***matrice hessienne en*** a comme étant la matrice $H_f(a) = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{1 \leqslant i, j \leqslant n}(a)$.

Remarque 8.2.2.
En vertu du théorème de Schwarz, $H_f(a) \in \mathscr{S}_p(\mathbb{R})$.

Exemple 8.2.3.
Si $p = 2$, $H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$.

8.3 Formule de Taylor-Young à l'ordre 2

Proposition 8.3.1.
Si f est de classe $\mathscr{C}^2$, nous avons pour h au voisinage de 0

$$f(a + h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(a).h, h \rangle + o\left(\|h\|^2\right),$$

que l'on peut également écrire, en confondant comme d'habitude éléments de $\mathbb{R}^n$ et éléments de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$f(a + h) = f(a) + \nabla f(a)^\top h + \frac{1}{2} h^\top H_f(a) h + o\left(\|h\|^2\right).$$

Démonstration.
Elle est hors-programme. □

Exercice 8.3.2.
Calculer le développement limité à l'ordre 2 de $f(x, y) = x^2 + y^2 + \mathrm{e}^x y$ en $(0, 1)$

9 Extremums

9.1 Définitions

Définition 9.1.1 (Extremum global)**.**
Soit $a \in U$.

1. On dit que a est le lieu d'un ***maximum global*** de f si $\forall u \in U$, $f(u) \leqslant f(a)$.
2. On dit que a est le lieu d'un ***minimum global*** de f si $\forall u \in U$, $f(u) \geqslant f(a)$.
3. On dit que a est le lieu d'un ***extremum global*** de f si c'est le lieu d'un minimum ou d'un maximum global de f.

Remarque 9.1.2.
On dit aussi que f admet un maximum global en a (*idem* pour minimum et extremum).

Définition 9.1.3 (Extremum local)**.**
Soit $a \in U$.

1. On dit que a est le lieu d'un ***maximum local*** de f s'il existe $r > 0$ tel que
$$\forall\, u \in U,\ \|a-u\| \leqslant r \Rightarrow f(u) \leqslant f(a).$$
2. On dit que a est le lieu d'un ***minimum local*** de f s'il existe $r > 0$ tel que
$$\forall\, u \in U,\ \|a-u\| \leqslant r \Rightarrow f(u) \geqslant f(a).$$
3. On dit que a est le lieu d'un ***extremum local*** de f si c'est le lieu d'un minimum ou d'un maximum local de f.

Remarque 9.1.4.
On dit aussi que f admet un maximum local en a (*idem* pour minimum et extremum).

Remarque 9.1.5.
Tout extremum global est aussi un extremum local, la réciproque étant bien évidemment fausse.

Définition 9.1.6 (Extremum strict)**.**
Soit a un point intérieur à U.
Un minimum ou maximum local en a est dit ***strict*** si dans un voisinage de a sa valeur n'est atteinte qu'en a.

9.2 Extremum et point critique

Théorème 9.2.1 (Condition du premier ordre)**.**
Si f admet un extremum local en a, alors a est un point critique de f.

Démonstration.
Notons $a = (x_0, y_0)$. Les deux fonctions partielles de f en a admettent chacune un extremum local en x_0 pour la première, et en y_0 pour la seconde, intérieur à leur ensemble de définition. Elles y admettent donc chacune un point critique, donc les dérivées partielles de f sont nulles en a, d'où le résultat. □

Remarque 9.2.2.
Il est ici primordial que U soit un ouvert.

Ce théorème ne donne qu'une condition *nécessaire* pour qu'un point soit un extremum local (et *a fortiori* global) d'une fonction.

Cette condition n'est pas suffisante, comme on le peut voir sur la figure **9.1**.

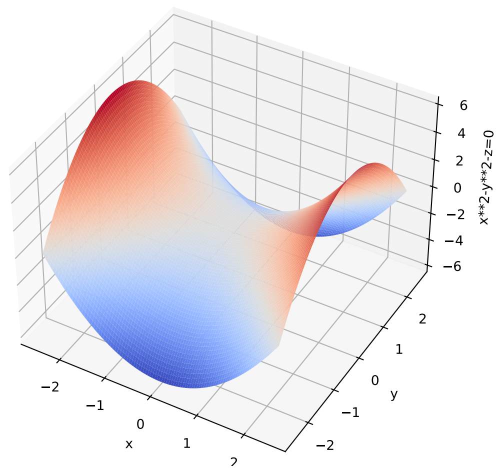


FIGURE 9.1 – Représentation d'un point selle.

9.3 Extremum et matrice hessienne

Théorème 9.3.1 (Hessienne et minimum)**.**
On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^2$ et que a est un point critique de f.

1. Si $H_f(a) \in \mathscr{S}_p^{++}(\mathbb{R})$, alors f atteint un minimum local strict en a ;
2. Si $H_f(a) \notin \mathscr{S}_p^{+}(\mathbb{R})$, alors f n'admet pas de minimum local en a.

Démonstration.
Notons $Q_a(h) = h^\top H_f(a)h$, ainsi appelée car il s'agit d'une ***forme quadratique*** (terminologie hors-programme).
Nous avons alors, pour h au voisinage de $0_{\mathbb{R}^p}$,

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2}Q_a(h) + o\left(\|h\|^2\right).$$

1. Si $H_f(a) \in \mathscr{S}_p^{++}(\mathbb{R})$, alors l'application $(x,y) \mapsto x^T H_f(a)y$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^p$. Ainsi Q_a est toujours positive et la norme euclidienne associée à ce produit scalaire est $\sqrt{Q_a}$.
   De plus l'équivalence des normes (nous sommes bien en dimension finie) permet d'affirmer
   $$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2}Q_a(h) + \underset{h\to 0}{o}(Q_a(h))$$
   D'où l'équivalent, au voisinage de $h = 0_{\mathbb{R}^p}$:
   $$f(a+h) - f(a) \sim \frac{1}{2}Q_a(h)$$
   Deux termes équivalents ont strictement même signe au voisinage du point considéré, on peut donc affirmer que f atteint un minimum local strict en a.
2. Si $H_f(a) \notin \mathscr{S}_p^{+}(\mathbb{R})$, alors $H_f(a)$ a une valeur propre $\lambda < 0$. Soit $u \in \mathbb{R}^p$ non nul tel que $H_f(a)u = \lambda u$.
   Appliquons la formule de Taylor-Young à $h = tu$, faire tendre h vers $0_{\mathbb{R}^p}$ revient à faire tendre t vers 0 :
   $$\begin{aligned} f(a+tu) &= f(a) + \frac{1}{2}(tu)^\top H_f(a)(tu) + o\left(\|h\|^2\right) \\ &= f(a) + \lambda\frac{t^2}{2}\|h\|^2 + o\left(\|h\|^2\right) \end{aligned}$$
   donc $f(a+tu) - f(a) \sim \lambda\frac{t^2}{2}\|h\|^2 < 0$, et on conclut que f n'atteint pas un minimum local en a.

$\square$

Le théorème s'adapte bien sûr de la manière suivante pour un maximum :

Théorème 9.3.2 (Hessienne et maximum)**.**
On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^2$ et que a est un point critique de f.

1. Si $-H_f(a) \in \mathscr{S}_p^{++}(\mathbb{R})$, alors f atteint un maximum local strict en a ;
2. Si $-H_f(a) \notin \mathscr{S}_p^{+}(\mathbb{R})$, alors f n'admet pas de maximum local en a.

Remarque 9.3.3.
Si f atteint un minimum local en a, alors a est un point critique de f et $H_f(a) \in \mathscr{S}_p^{+}(\mathbb{R})$.

9.4 Cas $p = 2$

On suppose dans cette section que $p = 2$.

Théorème 9.4.1.
Si f est de classe $\mathscr{C}^2$ et a est un point critique de f, alors

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} \quad \text{où } r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a),\ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a),\ t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a).$$

Alors $\det H_f(a) = rt - s^2$ et $\operatorname{tr} H_f(a) = r + t$.

1. Si $rt - s^2 > 0$, alors soit f atteint un minimum strict en a (et dans ce cas $r + t > 0$), soit f atteint un maximum strict en a (et dans ce cas $r + t < 0$).
2. Si $rt - s^2 < 0$, f ne présente pas d'extremum en a, il s'agit d'un ***point col*** ou ***selle***, comme représenté figure **9.1**.
3. Si $rt - s^2 = 0$, on ne peut rien dire, tout peut arriver.

Démonstration.
Dans tous les cas, $H_f(a) \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R})$, donc elle est diagonalisable à valeurs propres réelles. Notons λ_1 et λ_2 ces deux valeurs propres. Alors $\lambda_1\lambda_2 = \det H_f(a) = rt - s^2$ et $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} H_f(a) = r + t$.

1. Si $rt - s^2 > 0$, alors λ_1 et l_2 sont non nulles et de même signe, donc $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$ ou $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$. Dans le permier cas $H_f(a) \in \mathscr{S}_2^{++}(\mathbb{R})$, dans le second $-H_f(a) \in \mathscr{S}_2^{++}(\mathbb{R})$. On conclut avec les théorèmes **9.3.1** et **9.3.2**.
2. Si $rt-s^2 < 0$, alors λ_1 et λ_2 sont non nulles de signe opposé, donc $H_f(a) \notin \mathscr{S}_2^{+}(\mathbb{R})$ et $-H_f(a) \notin \mathscr{S}_2^{+}(\mathbb{R})$. On conclut à nouveau avec **9.3.1** et **9.3.2**.
3. Se reporter à l'exemple qui suit.

□

Exemple 9.4.2.
Dans le cas où $rt - s^2 = 0$, tout peut arriver :

1. Soit $f : (x, y) \mapsto x^4 + y^4$. Alors évidemment f atteint un minimum strict en 0, car $f(0, 0) = 0$ et si $(x, y) \neq 0$, $f(x, y) > 0$.
   De plus $\nabla f(0) = 0$ et $H_f(0) = 0$.
   Mais $-f$ atteint un maximum strict en 0, et elle a le même gradient et la même hessienne en 0 que f.

2. Soit $g : (x, y) \mapsto x^4 - y^4$. Là encore $g(0) = 0$, $\nabla g(0) = 0$ et $H_f g0) = 0$.
   Mais pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $g(t, 0) > 0$ donc g n'atteint pas de maximum en 0, et $g(0, t) < 0$ donc g n'atteint pas non plus de minimum en 0.
   Le graphe de g est similaire à celui de la figure **9.1**.

10 Exercices classiques

10.1 Fonctions positivement homogènes

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction f est dite *positivement homogène de degré* α si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y).$$

1. Donner un exemple de fonction positivement homogène (avec son degré), et un exemple de fonction non homogène.
2. Montrer que si f est positivement homogène de degré α, alors ses dérivées partielles sont positivement homogènes de degré $\alpha - 1$.
3. Montrer que f est positivement homogène de degré α si et seulement si f vérifie la relation d'Euler :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y).$$

Indication : étudier $\varphi : t \mapsto f(tx, ty)$.

10.2 Calcul d'une différentielle

Soit E un espace euclidien de norme $\|.\|$ et f l'application de $E \backslash \{0\}$ dans lui-même définie par $f(x) = \dfrac{x}{\|x\|^2}$. Montrer que f est différentiable et déterminer $\mathrm{d}f(x)$.

10.3 Des plans tangents

Soit (S) la surface d'équation $z^3 = xy$.
Déterminer les plans tangents à (S) qui contiennent la droite (D) d'équation : $\begin{cases} x &= 2 \\ y &= 3z - 3 \end{cases}$.

10.4 Une équation aux dérivées partielles

Trouver toutes les applications $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

en utilisant les coordonnées polaires.

10.5 Une étude de points critiques et d'extremums

Déterminer les points critiques puis les extremums de $(x, y) \mapsto x^3 - y^2 - x$.