Feuille d'exercice n° 15 : **Espérance, variance etc**

I. Espérance

Exercice 1 (✎) Soit X une variable aléatoire réelle admettant une variance.

1) Justifier

$$X = X\mathbb{1}_{(X\neq 0)}$$

2) En déduire

$$\mathrm{E}(X)^2 \leqslant \mathrm{E}\left(X^2\right) P(X \neq 0)$$

Exercice 2 (🚲)

1) Si $X \sim \mathscr{G}(p)(0<p<1)$, calculer $\mathrm{E}\left(\frac{1}{X}\right)$

2) Si X et Y sont indépendantes de même loi $\mathscr{G}(p)$, montrer que $|X-Y|$ et $\min(X,Y)$ sont indépendantes.

3) Si X et Y sont indépendantes de même loi $\mathscr{G}(p)$, calculer

$$\mathrm{E}\left(\frac{|X-Y|}{\min(X,Y)}\right).$$

Exercice 3 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que X^2 est d'espérance finie. Établir $\mathrm{E}\left(X^2\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)P(X>n)$.

Exercice 4 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ d'espérance finie. Établir $\sum_{k=1}^{n} P(X<k) \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

Exercice 5 (🚲)

Une urne contient deux boules blanches et une boule noire. On effectue une succession de tirages selon la procédure suivante :

— si la boule tirée est noire alors on la remet dans l'urne

— si la boule tirée est blanche alors on l'écarte et on remet à sa place dans l'urne une boule noire.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le nombre de boules blanches à l'issue du n-ème tirage. On définit également $u_n = P\left(X_n = 1\right)$.

1) Calculer u_1.

2) Montrer que $P\left(X_n = 2\right) = \dfrac{1}{3^n}$.

3) Montrer que $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{2}{3^{n+1}}$.

On pose, pour $n \geqslant 1, v_n = u_n + \dfrac{2}{3^n}$. Montrer que $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite géométrique puis en déduire l'expression de u_n en fonction de n.

4) Calculer $P\left(X_n = 0\right)$ puis déterminer l'espérance de X_n.

5) On note Z la variable aléatoire égale au numéro du tirage où pour la première fois, il n'y a plus que des boules noires. Déterminer la loi de Z et calculer son espérance.

Exercice 6 ( ) Soit deux v.a. X et Y définies sur un même espace probabilisé et à valeurs entières. La loi du couple (X, Y) est définie par

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2 \ , \ P(X = n, Y = m) = p^2 q^{n+m},$$

avec $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$.

1) **a)** Déterminer les lois marginales du couple (X, Y).

b) Calculer $\mathrm{E}(X + Y)$.

c) Déterminer la fonction de répartition F_X de la v.a. X.

2) On définit $Z = \max(X, Y)$ et $T = \min(X, Y)$.

a) Pour tout entier k, exprimer l'événement $(Z = k)$ en fonction des événements $(X = k)$, $(Y = k)$, $(X \leqslant k)$ et $(Y \leqslant k)$. En déduire la loi de probabilité de Z et son espérance.

b) Calculer l'espérance de $|X - Y|$. On pourra exprimer $|X - Y|$ en fonction de Z et $X + Y$.

c) Déterminer la loi de T et reconnaître la loi de $T + 1$.

3) Déterminer la loi conjointe du couple (X, Z) et retrouver la loi de Z.

4) Déterminer la loi de $X + Y$.

II. Variance et covariance

Exercice 7 ( ) Pour X dont le carré admet une espérance finie, on note $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$ l'écart-type de la variable X.
Pour X, Y dont le carré admet une espérance finie, comparer $\sigma(X + Y)$ et $\sigma(X) + \sigma(Y)$.

Exercice 8 ( ) Soient X et Y deux variables aléatoires réelles dont les carrés sont d'espérances finies. On suppose $\mathrm{V}(X) > 0$. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ minimisant la quantité

$$\mathrm{E}\left((Y - (aX + b))^2\right)$$

Exercice 9 ( ) On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Pascal de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$si

$$X(\Omega) = n + \mathbb{N} \quad \text{et} \quad P(X = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$$

1) Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi géométrique de paramètre p. Montrer que $X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi de Pascal de paramètres n et p.

2) En déduire l'espérance et la variance d'une loi de Pascal de paramètres n et p.

Exercice 10 Dans un grand magasin le nombre de client présents un certain jour suit une loi de Poisson de paramètre λ. D'autre part chaque client a la probabilité p de se faire voler son portefeuille, et on suppose les différents tentatives de vol indépendantes. On note :
• X la variable aléatoire égale au nombre de clients fréquentant le magasin un jour donné ;
• Y la variable aléatoire égale au nombre de clients qui se font voler leur portefeuille ce même jour.

1) Déterminer pour tout $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $k \leqslant n$, la probabilité $P_{[X=n]}(Y = k)$, puis la loi conjointe de (X, Y).

2) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.

3) On note Z la variable aléatoire égale au nombre de clients qui se ne se font pas voler leur portefeuille. Quelle est la loi de Z ?

4) Montrer que Y et Z sont indépendantes.

Exercice 11 Un dispositif de comptage dénombre les visiteurs qui entrent dans un musée.
On note $X_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit la variable aléatoire X_n qui donne le nombre de visiteurs ayant passé le portail entre les instants 0 et n.
On admet que la variable $X_{n+1} - X_n$ suit une loi de Poisson de paramètre α et que les différentes variables $X_{n+1} - X_n$ pour $n \geqslant 0$ sont indépendantes.
Soient $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ avec $0 \leqslant m \leqslant n$.

1) Déterminer la loi de $X_n - X_m$.

2) Calculer $\mathrm{E}\left(X_m\left(X_n - X_m\right)\right)$ puis la covariance des variables aléatoires X_m et X_n

3) Quelle est la loi du couple (X_m, X_n) ?

4) Pour $n \neq 0$, on pose $p = m/n$. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer la loi de probabilité de X_m sachant que $X_n = k$ puis identifier cette loi.

On note N la variable aléatoire qui prend pour valeur le plus petit entier $n > 0$ tel qu'Il soit entré au moins un visiteur entre les instants 0 et n.

5) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer l'évènement $(N = n)$ en fonction de X_{n-1} et X_n, puis déterminer la loi de N et donner son espérance.

Exercice 12 Un écolier collectionne des images. Il y a en tout n images différentes.
L'écolier achète chaque jour une pochette ; chaque pochette contient une image, qui augmente sa collection d'une unité s'il ne la possédait pas déjà. On suppose bien sûr que lorsqu'on achète une pochette, la probabilité d'y trouver l'image i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ est $1/n$.

1) Supposons que la collection de l'écolier contienne déjà $k - 1$ images $(2 \leqslant k \leqslant n)$. On note L_k le nombre de pochettes que l'écolier va devoir acheter pour augmenter sa collection d'une unité (et ainsi posséder k images). Quelle est la loi de L_k ?

2) On note $T_n = L_1 + L_2 + \ldots + L_n$ le nombre total de pochettes que l'écolier va acheter pour avoir la collection complète (pour des raisons évidentes, L_1 désigne la variable aléatoire constante égale à 1).
Calculer $\mathrm{E}\left(T_n\right)$. En donner un équivalent quand $n \to +\infty$.

3) Calculer $\mathrm{V}\left(T_n\right)$, en donner un équivalent. On rappelle $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 13 On joue à Pile ou Face ; la probabilité d'obtenir Pile est p, celle d'obtenir Face est $1 - p$. On appellera ***séquence*** une suite de tirages consécutifs identiques précédés et suivis de tirages différents. Voici deux issues :

PFFPPPFPFFF... FFFPFPPFPFPPP...

Dans la première issue, la première séquence est P, la seconde est FF. Dans la deuxième issue, la première séquence est FFF, la seconde est P.

1) Donner la loi de la longueur L_1 de la première séquence, son espérance et sa variance.

2) Donner la loi de la longueur L_2 de la deuxième séquence, son espérance et sa variance.

3) Montrer que $\mathrm{E}\left(L_1\right) \geqslant \mathrm{E}\left(L_2\right)$ et $\mathrm{V}\left(L_1\right) \geqslant \mathrm{V}\left(L_2\right)$.

4) Calculer $\mathrm{Cov}\left(L_1, L_2\right)$.

5) Calculer $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} P_{[L_1 = m]}\left(L_2 = n\right)$.

Exercice 14 Soient X et Y deux variables aléatoires dont le carré admet une espérance finie. Établir

$$(\mathrm{Cov}(X, Y))^2 \leqslant \mathrm{V}(X)\mathrm{V}(Y)$$

Exercice 15 Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes réelles admettant une variance. On appelle matrice de covariance de la famille $(X_1, \ldots, X_n)$ la matrice

$$\Sigma = \left(\mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right)\right)_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$$

1) Soit $X = a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n$ avec $a_i \in \mathbb{R}$. Exprimer la variance de X en fonction de la matrice Σ.

2) En déduire que les valeurs propres de la matrice Σ sont toutes positives.

III. Inégalités

Exercice 16 Une inégalité de déviation - Inégalité de Paley-Zygmund

Soit X une variable aléatoire positive admettant une variance, telle que $\mathrm{E}\left(X^2\right) > 0$. Soit $\lambda \in [0,1]$. Montrer que

$$P(X \geqslant \lambda \mathrm{E}(X)) \geqslant \frac{(1-\lambda)^2 \mathrm{E}(X)^2}{\mathrm{E}\left(X^2\right)}.$$

Exercice 17 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes mutuellement indépendantes et strictement positives, toutes d'espérance finie égale à 1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Z_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$. Montrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

(i) Pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n\to+\infty} P\left(Z_n \geqslant \varepsilon\right) = 0$.

(ii) $\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} E\left(\sqrt{X_k}\right) = 0$.

Exercice 18 Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.
Pour $n \geqslant 1$, on pose $Y_n = X_n X_{n+1}$ et $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$.

1) Identifier la loi de Y_n.

2) Calculer l'espérance et la variance de S_n.

3) Soit $\varepsilon > 0$. Justifier

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p^2\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Exercice 19 () Soient X une variable aléatoire réelle et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$une fonction strictement croissante. Montrer

$$\forall a > 0, \mathrm{P}(|X| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathrm{E}(f(|X|))}{f(a)}$$

Exercice 20 ()

1) Soit X une variable aléatoire réelle centrée et vérifiant presque sûrement $|X| \leqslant 1$, soit $t \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que $E\left[\mathrm{e}^{tX}\right] \leqslant \mathrm{ch}(t)$.

b) En déduire que $E\left[\mathrm{e}^{tX}\right] \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$.

2) En déduire l'inégalité de Hoeffding, qui s'énonce comme suit. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et centrées. On suppose qu'il existe (c_n) vérifiant : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n > 0$ et p.s. $|X_n| \leqslant c_n$. Notons $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P(|S_n| > \varepsilon) \leqslant 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{i=1}^{n} c_i^2}\right).$$

IV. Fonctions génératrices

Exercice 21 () Soit X et Y deux v.a. indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres λ et μ.

1) Déterminer la loi de $X+Y$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi de X sachant $X+Y=n$.

Exercice 22 (🚲) Soient $n \in \mathbb{N}$, $p \in]0,1[$ et X une variable aléatoire à valeurs naturelles dont la loi est donnée par

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ P(X=k) = a\binom{n+k}{k}p^k.$$

En employant la fonction génératrice de X, déterminer a et calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 23 (⛰) On considère une expérience aléatoire ayant la probabilité $p > 0$ de réussir et $(1-p)$ d'échouer.
On répète l'expérience indépendamment jusqu'à obtention de m succès et l'on note T_m le nombre d'essais nécessaires à l'obtention de ces m succès.

1) Reconnaître la loi de T_1.

2) Déterminer la loi de T_m dans le cas général $m \in \mathbb{N}^*$.

3) Exprimer le développement en série entière de $\dfrac{1}{(1-t)^m}$.

4) Déterminer la fonction génératrice de T_m et en déduire son espérance.

Exercice 24 Dés truqués :

1) On jette deux dés indépendants non pipés. Calculer la loi suivie par la somme des points (pour changer (ou pas), le faire en utilisant des fonctions génératrices).

2) Est-il possible de truquer les deux dés, toujours indépendants, de manière à ce que la somme des deux dés suive une loi uniforme ?

Exercice 25 (🚲) Soient X, Y des variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

1) Déterminer les fonctions génératrices de X et $3Y$.

2) En déduire la fonction génératrice de $Z = X + 3Y$.

3) Calculer $\mathrm{E}(Z)$ et $\mathrm{V}(Z)$.

4) Les variables X et Z sont-elles indépendantes ?

5) Trouver le minimum de la fonction $t \mapsto \mathrm{V}(X+tY)$.

Exercice 26

Soient $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ iid et indépendantes d'une autre variable aléatoire N également à valeurs dans $\mathbb{N}$. On définit alors la variable aléatoire S par :

$$S = \sum_{k=1}^{N} X_k$$

1) Montrer que pour tout $t \in [-1,1]$, on a :

$$G_S(t) = G_N\left(G_{X_1}(t)\right)$$

2) Montrer que si N suit une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ et la suite (X_n) est iid de loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$, alors S suit une loi de Poisson $\mathscr{P}(p\lambda)$.

3) Montrer que si X_1 et N sont d'espérances finies, alors il en est de même pour S et on a la formule de Wald :

$$\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}(N)\mathrm{E}\left(X_1\right)$$