Exercice 93.

a_n = probabilité que le joueur A gagne à partir d'un état où il possède n bille $n \in [\![0, N]\!]$

A l'étape n les joueurs réalisent une partie dans laquelle le joueur A a la probabilité p de gagner

Posons la variable aléatoire X_n qui vaut 1 si le joueur A gagne la partie et 0 sinon.

$P(X = 1) = p$ $\qquad P(X=0) = 1-p$.

Formule des probabilités totales sur le SCE $\{(X=0), (X=1)\}$ à l'étape où le joueur A possède n billes :

Peu clair, détaille, en utilisant des probas conditionnelles entre autres

$$a_n = P(X=0)\, a_{n-1} + P(X=1)\, a_{n+1}$$

$$\boxed{a_n = (1-p)\, a_{n-1} + p\, a_{n+1}} \qquad \boxed{\begin{matrix} a_0 = 0 \\ a_N = 1 \end{matrix}}$$

L'équation caractéristique est : $r^2 p - r + 1-p = 0$

$\Delta = 1 - 4(1-p) = (1-2p)^2$

- 1er cas $p \in [0, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, 1]$ $\quad \Delta > 0$

donc il y a 2 racines réelles :

$$r_1 = \frac{1+1-2p}{2p} = \frac{1-p}{p} \qquad r_2 = \frac{1-1+2p}{2p} = 1$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists (\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^2$ $\quad a_n = \mu + \lambda \left(\frac{1-p}{p}\right)^n$

Avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_N = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = -\lambda \\ \mu = \dfrac{1}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^N} \end{cases}$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad \boxed{a_n = \dfrac{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^n}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^N}}$

• $2^{\text{ème}}$ cas : $p = \frac{1}{2}$ $\quad \Delta = 0$

1 racine double $\quad r_0 = \frac{1}{2p} = 1$.

donc $\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad a_n = (A + Bn)1^n$

$$= A + Bn$$

Avec les conditions initiales : $\begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{1}{N} \end{cases}$

donc $\boxed{a_n = \frac{n}{N}}$

Conclusion :

$$\boxed{a_n = \begin{cases} \dfrac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^n}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^N} & \text{si } p \neq \frac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{n}{N} & \text{si } p = \frac{1}{2} \end{cases}}$$