Exercice 66

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, montrons que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$:

C'est la formule de Chu-Vandermonde

Soit $x \in \mathbb{R}$: $(x+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j = \sum_{0 \leq k, j \leq n} \binom{n}{k}\binom{n}{j} x^{k+j}$ (1)

$$(x+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k \quad (2)$$

Le coefficient de x^n dans (2) est $\binom{2n}{n}$.

Dans (1), on veut $k+j = n \iff j = n-k$:

- le coefficient devant x^n est $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ avec $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Ainsi, dans (1), le coefficient de x^n dans (1) est $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

Par identification entre ces deux développements, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}}$$

2. $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = (1+1)^{2n} = 4^n$

Or, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, n \geq k, \binom{2n}{k} \geq 0$ donc $\binom{2n}{n} \leq \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = 4^n$

→ Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \leq \frac{4^n}{n+1} \leq 4^n$

· Or, $\sum_{n \geq 0} (4x)^n$ a pour rayon de convergence $R_G = \frac{1}{4}$. Par comparaison entre séries entières, en notant R le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} c_n x^n$, on a $\boxed{R \geq R_G > 0}$

3. $\forall k \in \mathbb{N}, c_{k+1} = \frac{(2k+2)!}{(k+1)!\,(k+2)!}$ donc $(k+2)\,c_{k+1} = \frac{2(k+1)(2k+1)(2k)!}{(k+1)\,k!\,(k+1)!} = 2(2k+1)\,c_k$ $(*)$

On pose $\forall x \in]-R,R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$.

Par produit de Cauchy, $\forall x \in]-R,R[$, $f^2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k} x^n$

Montrons par récurrence sur $\mathbb{N}$ $\mathcal{P}(n)$: "$\sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k} = c_{n+1}$", avec $c_0 = 1$.

Pour $n=0$, $c_1 = \frac{1}{2} \times \binom{2}{1} = 1$

$c_0 \times c_0 = 1 = c_1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie

On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$ par hérédité:

On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} k c_k c_{n-k} = \sum_{j=0}^{n} (n-j) c_j c_{n-j}$ pour $k = n-j$:

$$S_n = n \sum_{j=0}^{n} c_j c_{n-j} - S_n \Rightarrow \underline{2S_n = n \sum_{j=0}^{n} c_j c_{n-j}} \ (')$$

$$S_{n+1} + \sum_{k=0}^{n+1} c_k c_{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n+1} (k+1) c_k c_{n-k+1} = c_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} (k+1) c_k c_{n-k+1}$$

$$= c_{n+2} + \sum_{j=0}^{n} (j+2) c_{j+1} c_{n-j} \text{ pour } k = j+1$$

$$= c_{n+1} + \sum_{j=0}^{n} 2(2j+1) c_j c_{n-j} \text{ avec } (*)$$

$$= c_{n+1} + 4 \sum_{j=0}^{n} j c_j c_{n-j} + 2 \sum_{j=0}^{n} c_j c_{n-j}$$

$$= c_{n+1} + 4 S_n + 2 \sum_{j=0}^{n} c_j c_{n-j}$$

$$= c_{n+2} + \sum_{j=0}^{n} c_j c_{n-j} (2n+2) \text{ avec } (')$$

$$= c_{n+1} (2n+3) \text{ avec l'hypothèse de récurrence}$$

$$S_{n+1} + \sum_{k=0}^{n+1} c_k c_{n-k} = \frac{n+3}{2} \sum_{k=0}^{n+1} c_k c_{n-k} \text{ avec } (')$$

Ainsi, $\sum_{k=0}^{n+1} c_k c_{n-k} = c_{n+1} \frac{2(2n+3)}{n+3} = c_{n+2}$ avec $(*)$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie

$\underline{\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k} = c_{n+1}}$

$\forall x \in]-R;R[,\ f^2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+1} x^n$

$$1 + x f^2(x) = c_0 x^0 + \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+1} x^{n+1} = c_0 x^0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n = f(x)$$

$\forall x \in]-R;R[$, $f(x)$ est solution de (E) $f^2(x)x - f(x) + 1 = 0$ qui a pour discriminant $\Delta = 1 - 4x$

Or, $f : \begin{matrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to f(x) \end{matrix}$ donc $\Delta > 0$ et les deux racines sont :

$f_-(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ et $f_+(x) = \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$, définies $\forall x \in]-R;R[\setminus \{0\}$

On en déduit que $R \leqslant \frac{1}{4}$, donc $\boxed{R = \frac{1}{4}}$ avec la question 2.

En outre, au voisinage de 0, $f_-(x) = \frac{1 - 1 + \frac{1}{2} \times 4x + o(x)}{2x} = 1 + o(1)$

$$f_+(x) = \frac{2 - 2x + o(x)}{2x} \xrightarrow[0]{x} +\infty$$

Or, f est développable en série entière en 0 donc $f = f_-$ nécessairement sur $]-R;R[$

Finalement, $\boxed{\forall x \in]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}[,\ f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}}$ $(f(0) = c_0 0^0 = 1)$