III. Rappels et compléments d'algèbre linéaire, 2nde partie

17 août 2025

Table des matières

Programme officiel

Algèbre linéaire

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

A - Compléments sur les espaces vectoriels, les endomorphismes et les matrices

Le programme est organisé autour de trois objectifs :

- *consolider les acquis de la classe de première année ;*
- *introduire de nouveaux concepts préliminaires à la réduction des endomorphismes : somme de plusieurs sous-espaces vectoriels, somme directe, sous-espaces stables, matrices par blocs, trace, polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées, polynômes interpolateurs de Lagrange ;*
- *passer du point de vue vectoriel au point de vue matriciel et inversement.*

Le programme valorise les interprétations géométriques et préconise l'illustration des notions et résultats par de nombreuses figures.

Contenus	Capacités & commentaires
c) Trace	
Trace d'une matrice carrée. Linéarité, trace d'une transposée. Relation $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. Invariance de la trace par similitude. Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie.	Notation $\mathrm{tr}(A)$.
d) Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées	
Polynôme d'un endomorphisme, d'une matrice carrée. Polynôme annulateur. Deux polynômes de l'endomorphisme u commutent. Adaptation de ces résultats aux matrices carrées.	Relation $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$. Application au calcul de l'inverse et des puissances. Le noyau de $P(u)$ est stable par u.
e) Interpolation de Lagrange	
Base de $\mathbb{K}_n[X]$ constituée des polynômes interpolateurs de Lagrange en $n+1$ points distincts de $\mathbb{K}$.	Expression d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base. La somme des polynômes interpolateurs de Lagrange en $n+1$ points est le polynôme constant égal à 1.
Déterminant de Vandermonde.	Lien avec le problème d'interpolation de Lagrange.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Trace d'un endomorphisme, trace d'une matrice

1.1 Définition.

Définition 1.1.1 (Trace d'une matrice)**.**
Soit A une matrice carrée de taille n. Alors la ***trace de*** A, notée $\operatorname{tr}(A)$ (ou $\operatorname{Tr}(A)$), est la somme des éléments diagonaux de A.

En notant $(a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,n]\!]}$ les coefficients de A :

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Remarque 1.1.2.
Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$\operatorname{tr}\left(A^\top\right) = \operatorname{tr}(A).$$

Démonstration.
Les matrices $A^\top$ et A ont les mêmes éléments diagonaux. □

1.2 Linéarité.

Proposition 1.2.1.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application trace est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration.
Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Posons $C = \lambda A + B$ et montrons $\operatorname{tr}(\lambda A + B) = \lambda \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$. Notons (a_{ij}), (b_{ij}) et c_{ij} les coefficients respectivement de A, de B et de C.

Alors, on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(C) &= \sum_{i=1}^{n} c_{ii} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_{ii} + b_{ii}) \\
&= \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} \\
&= \lambda \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B).
\end{aligned}$$

□

1.3 Propriété fondamentale de la trace.

Proposition 1.3.1.
Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$, alors,

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

$\operatorname{tr}(A \times B) \neq \operatorname{tr} A \times \operatorname{tr} B$; par exemple, dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, $0 = \operatorname{tr}(E_{11} \times E_{22}) \neq 1 = \operatorname{tr}(E_{11}) \times \operatorname{tr}(E_{22})$.

Démonstration.
Posons $C = AB$ et $D = BA$. Notons (a_{ij}), (b_{ij}), (c_{ij}) et (d_{ij}) les coefficients respectifs de A, B, C et D.

On a, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad \text{et} \quad d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj}.$$

D'où, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} \quad \text{et} \quad d_{ii} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{ki}.$$

D'où :

$$\operatorname{tr}(C) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} \quad \text{et} \quad \operatorname{tr}(D) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}b_{ik}.$$

Ainsi,

$$\operatorname{tr}(C) = \sum_{1\leqslant \alpha,\beta\leqslant n} a_{\alpha\beta}b_{\beta\alpha} \quad \text{et} \quad \operatorname{tr}(D) = \sum_{1\leqslant \alpha,\beta\leqslant n} a_{\alpha\beta}b_{\beta\alpha},$$

d'où l'égalité recherchée. □

Remarque 1.3.2. 1. On peut déduire de cette égalité que la trace d'un produit de matrices est invariant par permutations circulaires : pour toutes matrices A_1, …, A_k de taille n, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(A_1A_2\dots A_{k-1}A_k) &= \operatorname{tr}(A_2\dots A_kA_1)\\ &= \operatorname{tr}(A_3\dots A_kA_1A_2)\\ &\dots\end{aligned}$$

2. En revanche, la trace d'un produit de matrice n'est **pas** invariant par n'importe quelle permutation. Par exemple, dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, en notant (E_{ij}) les matrices de la base canonique :

$$\operatorname{tr}(E_{21}E_{11}E_{12}) = 1 \neq 0 = \operatorname{tr}(E_{11}E_{21}E_{12}).$$

1.4 Invariance par similitude.

Proposition 1.4.1.
Deux matrices semblables ont même trace (on dit que la trace est un ***invariant de similitude***) : soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, deux matrices semblables. Alors $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$.

Démonstration.
Il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A = P^{-1}BP$. Alors on a

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(A) &= \operatorname{tr}\left(P^{-1}(BP)\right)\\ &= \operatorname{tr}\left((BP)P^{-1}\right)\\ &= \operatorname{tr}(B).\end{aligned}$$

□

Remarque 1.4.2.
La réciproque de ce résultat est fausse. Par exemple, montrez que $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et I_2 ne sont pas semblables.

1.5 Trace d'un endomorphisme en dimension finie.

Définition 1.5.1 (Trace d'un endomorphisme)**.**
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. La ***trace de l'endomorphisme*** u et on note $\operatorname{tr}(u)$ (ou $\operatorname{Tr}(u)$) est le scalaire défini par

$$\operatorname{tr}(u) = \operatorname{tr}(\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u)),$$

où $\mathscr{B}$ est une base quelconque de E. Cette valeur ne dépend pas du choix de la base $\mathscr{B}$.

Démonstration.
On a vu d'une part que deux matrices d'un même endomorphisme sont nécessairement semblables et d'autre part que la trace de matrices est un invariant de similitude. La valeur de $\operatorname{tr}(u)$ ne dépend donc pas du choix de la base $\mathscr{B}$. □

Exemple 1.5.2.
L'endomorphisme Id_E a pour trace $\dim(E)$.

Exercice 1.5.3.
Déterminer la trace de l'endomorphisme de dérivation dans $\mathbb{K}_n[X]$.

1.6 Propriétés.

Proposition 1.6.1.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. La trace est une forme linéaire sur $\mathscr{L}(E)$.

Démonstration.
Il suffit de choisir une base de $\mathscr{B}$ de E et constater que pour tous endomorphismes u

et v, de matrices respectives A et B, et pour tout scalaire λ, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\,(\lambda u+v)&=\mathrm{tr}\,(\lambda A+B)\\&=\lambda\mathrm{tr}\,(A)+\mathrm{tr}\,(B)\\&=\lambda\mathrm{tr}\,(u)+\mathrm{tr}\,(v).\end{aligned}$$

□

Proposition 1.6.2.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et v et u deux endomorphismes de E. Alors,

$$\mathrm{tr}\,(v\circ u)=\mathrm{tr}\,(u\circ v).$$

Démonstration.
Il suffit de choisir une base $\mathscr{B}$ de E. En notant A et B les matrices respectives de u et v, la matrice de $v\circ u$ est BA, celle de $u\circ v$ est AB et on sait que $\mathrm{tr}\,(AB)=\mathrm{tr}\,(BA)$, d'où le résultat. □

Exemple 1.6.3.
Vérifier ce résultat sur deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$.

1.7 Trace d'un projecteur.

Ce résultat hors-programme est tout de même à connaître.

Proposition 1.7.1.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et p un projecteur. Alors, la trace de p est la dimension de $\mathrm{Im}\,p$:

$$\mathrm{tr}\,(p)=\mathrm{rg}\,p.$$

Démonstration.
Notons n la dimension de E, q celle de $\mathrm{Im}\,p$. p étant un projecteur, on a $E=\mathrm{Im}\,p\oplus\mathrm{Ker}\,p$. Soit $(e_1,\dots,e_q)$ une base de $\mathrm{Im}\,p$. On a $\dim\mathrm{Ker}\,p=n-q$, donc on peut trouver une base $(e_{q+1},\dots,e_n)$ de $\mathrm{Ker}\,p$. La famille $(e_1,\dots,e_n)$ est alors une base $\mathscr{B}$ de E et relativement à cette base, la matrice de p est une matrice diagonale dont les q premiers coefficients valent 1 et tous les autres sont nuls. Sa trace est donc q. □

Remarque 1.7.2.
Ce résultat est faux pour d'autres endomorphismes que les projecteurs. Considérer par exemple un endomorphisme de matrice E_{12}.

2 Déterminant

2.1 Déterminant d'une matrice carrée

Définition 2.1.1.
L'application déterminant est l'unique application $\det\ :\mathscr{M}_n(\mathbb{K})\to\mathbb{K}$ vérifiant :

1. det est linéaire par rapport aux colonnes de sa variable ;
2. det est alternée par rapport aux colonnes de sa variable ;
3. $\det \mathrm{I}_n=1$.

Lorsque $A=(a_{ij})_{ij}$, on note $\det A=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$.

Théorème 2.1.2 (Règles de calcul)**.**
Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Ajouter à une ligne ou une colonne de A une combinaison linéaire des autres lignes ou colonnes ne change pas le déterminant de A ;
2. Multiplier une ligne ou une colonne de A par une constante $\lambda\in\mathbb{K}$, change le déterminant de A en $\lambda\det A$;
3. Échanger deux lignes ou deux colonnes de A change le déterminant de A en $-\det A$;
4. Si A a une ligne ou une colonne nulle, ou combinaison linéaire des autres, alors $\det A=0$.

Théorème 2.1.3 (Déterminant d'une matrice triangulaire)**.**
Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice triangulaire. Alors,

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Remarque 2.1.4.
Avec ce résultat on retrouve facilement qu'une matrice triangulaire est inversible si et seulement si elle n'a pas de zéro sur la diagonale.

Définition 2.1.5 (Mineur et cofacteur)**.**
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. On appelle ***mineur d'ordre*** (i, j) de A le scalaire $\Delta_{i,j} = \det A_{i,j}$ où $A_{i,j}$ est la matrice de $\mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue à partir de A en supprimant la i^{e} ligne et la j^{e} colonne.
2. On appelle ***cofacteur d'ordre*** (i, j) de A le scalaire $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.

Théorème 2.1.6 (Développement par rapport à une ligne ou une colonne)**.**
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $A = (a_{i,j})$, soit $i, j \in [\![1, n]\!]$.

1. Développement par rapport à la i^{e} ligne :

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{i,k} \Delta_{i,k}.$$

2. Développement par rapport à la j^{e} colonne :

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{k,j} \Delta_{k,j}.$$

Remarque 2.1.7.
Le résultat **2.1.2** est le plus important, car il permet de calculer des déterminants par pivot de Gauss, ce qui est la méthode la plus efficace.
Pour plus d'efficacité, on combinera pivot de Gauss et développement : grâce à un pivot, on annule tous les coefficients d'une ligne ou d'une colonne sauf un (deux au pire), puis on développe par rapport à cette ligne ou cette colonne. On obtient alors un déterminant dont la dimension a diminué de un. Puis on réitère jusqu'à obtenir une matrice 2×2, ou une matrice triangulaire.
Tout développement par rapport à une ligne ou une colonne contenant deux ou plus coefficients non nuls est tout à fait inefficace et devra être évité.

Proposition 2.1.8 (Propriétés du déterminant d'une matrice)**.**
Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. $\det\left(A^\top\right) = \det A$;
2. $\det(AB) = \det A \times \det B$;
3. A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$, et dans ce cas, $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det A}$.

Remarque 2.1.9.
On définit aussi le déterminant d'un endomorphisme (resp. d'une famille de vecteurs) comme étant le déterminant d'une matrice représentant cet endomorphisme (resp. cette famille de vecteurs). Il est bien indépendant du choix de la base.

2.2 Déterminant « par blocs »

Proposition 2.2.1 (Déterminant par blocs)**.**
Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & \mathrm{I}_p \end{pmatrix}$ une matrice par blocs de $\mathscr{M}_{n+p}(\mathbb{K})$, avec $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

et $B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors
$$\det M = \det A.$$

Démonstration.
Considérons l'application $f\ :\ (\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}))^n \to \mathbb{K}$ telle que $f(x_1, \dots, x_n) = \det M$, avec $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & \mathrm{Id}_p \end{pmatrix}$ et B fixée, où A est la matrice de $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base canonique. Avec un léger abus de notation, on notera ceci $f(A)$. Cette application est n-linéaire alternée, donc il existe $k \in \mathbb{K}$ telle que pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $f(A) = k \det A$. Or pour $A = \mathrm{I}_p$, M est une matrice triangulaire de déterminant 1, donc $k = 1$, et le résultat est démontré. □

Remarque 2.2.2.

Nous avons bien sûr de la même manière $\det \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det C$.

Théorème 2.2.3.
[Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs] Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ une matrice triangulaire par blocs. Alors,
$$\det M = \det A \times \det C.$$

Démonstration.
Il suffit d'écrire
$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & \mathrm{I}_p \end{pmatrix}.$$
□

Remarque 2.2.4.
Le résultat s'adapte évidemment dans le cas des matrices triangulaire inférieures par blocs, ainsi que dans le cas de matrices triangulaires par blocs avec plus de deux blocs sur la diagonale.

⚠ La formule ne se généralise pas aux matrices par blocs non triangulaires. Ainsi, $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$.

2.3 Déterminant de Vandermonde

Proposition 2.3.1 (Déterminant de Vandermonde)**.**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, \dots, x_n$ $n+1$ scalaires. On définit le *déterminant de Vandermonde* par :
$$V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}.$$
Alors,
$$V(x_0, \dots, x_n) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

Démonstration.
Ce déterminant est un classique parmi les classiques. Il est possible de le calculer directement par pivot de Gauss. Ici, on le démontre par récurrence.

Les cas $n = 0$ ou $n = 1$ sont évidents : $V(x_0) = 1$ et $V(x_0, x_1) = x_1 - x_0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que le résultat soit vrai au rang n. Considérons le polynôme $V(x_0, \dots, x_n, X)$. En le développant par rapport à la dernière ligne, on voit qu'il est de degré au plus $n+1$, et que le terme en X^{n+1} a pour coefficient $V(x_0, \dots, x_n)$. Or il est aisé de voir qu'il a pour racines $x_0, \dots, x_n$. Il existe donc un scalaire $k \in \mathbb{K}$ tel que
$$V(x_0, \dots, x_n, X) = k \prod_{i=0}^{n} (X - x_i).$$
Ce scalaire k est le coefficient dominant de $V(x_0, \dots, x_n, X)$, c'est donc en développant sur la dernière ligne : $V(x_0, \dots, x_n)$. Ainsi, en évaluant ce polynôme en x_{n+1}, il vient

:

$$V(x_0,\dots,x_n,x_{n+1}) = V(x_0,\dots,x_n)\prod_{i=0}^{n}(x_{n+1}-x_i)$$

ce qui, en utilisant l'hypothèse de récurrence, est bien le résultat recherché. □

3 Polynômes d'endomorphismes

Dans toute cette section, E est un $\mathbb{K}$-ev, $P,Q\in\mathbb{K}[X]$, $u,v\in\mathscr{L}(E)$, $n\in\mathbb{N}$ et $A,B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Le point important de cette section est celui-ci : puisque $u\in\mathscr{L}(E)$, on peut composer u avec elle-même, et donc définir u^k pour tout $k\in\mathbb{N}$ (avec la convention $u^0=\mathrm{Id}_E$). Comme $\mathscr{L}(E)$ est stable par combinaisons linéaires, alors toute combinaison linéaire de puissances de u est encore un endomorphisme de E.
Le même raisonnement s'applique aux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

3.1 Définitions

Définition 3.1.1 (Polynôme d'endomorphisme)**.**
Soit $P\in\mathbb{K}[X]$, que l'on écrit $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$.
On note alors $P(u)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_ku^k$. C'est un endomorphimse, et l'on dit que c'est un ***polynôme de l'endomorphimse*** u.
L'ensemble des polynômes en u est noté $\mathbb{K}[u]$.

De même, si $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note $P(A)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kA^k$, qui est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. C'est un polynôme de la matrice A.
L'ensemble des polynômes en A est noté $\mathbb{K}[A]$.

Remarque 3.1.2.
Attention aux termes constants : si $P=X+1$, $P(u)=u+\mathrm{Id}_E$, et $P(A)=A+\mathrm{I}_n$. Les expressions $u+1$ et $A+1$ ne sont pas homogènes et n'ont pas de sens.

Proposition 3.1.3.
Soit $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$. Alors :

1. $(\lambda P+\mu Q)(u)=\lambda P(u)+\mu Q(u)$;
2. $(P\times Q)(u)=P(u)\circ Q(u)$;
3. Comme $PQ=QP$, les polynômes de l'endomorphisme u commutent entre eux.

Démonstration. 1. Simple écriture de la définition.

2. On procède par étapes :
• Si $P=X^n$ et $Q=X^m$, alors $(PQ)(u)=(X^{n+m})(u)=u^{n+m}$ et $P(u)\circ Q(u)=u^n\circ u^m=u^{n+m}$.
• Si $P=X^n$ et $Q=\displaystyle\sum_{k=0}^{m}b_kX^k$, alors $PQ=\displaystyle\sum_{k=0}^{m}b_kX^{k+n}$ donc

$$\begin{aligned}(PQ)(u)&=\sum_{k=0}^{m}b_ku^{n+k}\\&=\sum_{k=0}^{m}b_k(u^n\circ u^k)\\&=u^n\circ\left(\sum_{k=0}^{m}b_ku^k\right)\\&=P(u)\circ Q(u).\end{aligned}$$

- Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$:

$$\begin{aligned}(PQ)(u) &= \sum_{k=0}^{n} a_k \left[(X^k Q)(u)\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \left[u^k \circ Q(u)\right] \text{ avec le point précédent} \\ &= \left[\sum_{k=0}^{n} a_k u^k\right] \circ Q(u) \text{ par linéarité} \\ &= P(u) \circ Q(u).\end{aligned}$$

$P(u) \circ Q(u) = (PQ)(u) = (QP(u) = Q(u) \circ P(u)$. □

Remarque 3.1.4.
Les polynômes PQ et $P \circ Q$ n'ont rien à voir. De même, ne confondez pas $P(u) \circ Q(u) = (PQ)(u)$, et $(P \circ Q)(u) = P(Q(u))$.

Exercice 3.1.5.
Soit $x \in E$. Parmi les expressions suivantes, lesquelles ont un sens ?

1. $u^2(x)$
2. $(u(x))^2$
3. $P(u(x))$
4. $(P(u))(x)$
5. $(P \circ u)(x)$
6. $P(Q(u))(x)$
7. $P(u) \circ Q(u)(x)$
8. $P(u)(Q(u)(x))$
9. $(PQ)(u)(x)$
10. $P(u)(x)Q(u)(x)$.

Proposition 3.1.6.
Si u et v commutent, alors $P(u)$ et $Q(v)$ aussi.
De plus, $\operatorname{Ker} P(u)$ et $\operatorname{Im} P(u)$ sont stables par $Q(v)$.

Démonstration.
Avec le premier point, le second est direct car nous savons que si deux endomorphismes commutent, ils stabilisent leurs noyaux et images.
La démonstration du premier point est pénible, donnons-en les étapes :

- on montre par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u \circ v^n = v^n \circ u$;
- on en déduit par inversion des rôles que pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, $u^m \circ v^n = v^n \circ u^m$, ce qui signifie que $(X^m)(u)$ et $(X^n)(v)$ commutent ;
- par linéarité on en déduit que $P(u)$ et v^n commutent ;
- par inversion des rôles on en déduit que $P(u)$ et $Q(v)$ commutent.

□

Proposition 3.1.7 (Matrice d'un polynôme d'endomorphisme)**.**
Soit $\mathscr{B}$ une base de E. Alors $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(P(u)) = P(\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u))$.

Démonstration.
On sait que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u^k) = (\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u))^k$, et ensuite par linéarité $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k u^k\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}\left(u^k\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k (\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u))^k$. □

Cela permet de montrer que les polynômes de matrices vérifient les mêmes propriétés que les polynômes d'endomorphisme : les propositions **3.1.3** et **3.1.6** sont valables en remplaçant u et v par deux matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Corollaire 3.1.8.
Si deux matrices A et B sont semblables, alors $P(A)$ et $P(B)$ aussi.

Démonstration.
Soit $A, M, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que M est inversible et $A = MBM^{-1}$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = MB^kM^{-1}$. Ainsi, par une simple factorisation, pour tout $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$, $\sum_{k=0}^{n} a_k A^k = M\left(\sum_{k=0}^{n} a_k A^k\right)M^{-1}$, donc $P(A) = MP(B)M^{-1}$. □

3.2 Polynômes annulateurs

Définition 3.2.1 (Polynôme annulateur)**.**
On dit que P ***annule*** ou est un ***polynôme annulateur*** de u (resp. A) si $P(u) = 0$ (resp. $P(A) = 0$).

Exercice 3.2.2.
Soit p un projecteur et s une symétrie. Trouvez des polynômes annulateurs de p et s.

Proposition 3.2.3.
En dimension finie, tout endomorphisme possède un polynôme annulateur non nul.
De même, toute matrice possède un polynôme annulateur non nul.

Démonstration.
Montrons-le pour un endomorphimse $u \in \mathscr{L}(E)$ avec $\dim E = n$, la démonstration étant similaire pour une matrice.
Nous savons que $\dim \mathscr{L}(E) = n^2$. Or la famille $(\mathrm{Id}_E, u, u^2, \ldots, u^{n^2})$ est de cardinal n^2+1 donc elle est liée. Ainsi il existe $a_0, \ldots, a_{n^2}$ non tout nuls tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n^2} a_k u^k = 0$. □

Exercice 3.2.4.
Montrer que

1. si deux matrices carrées A et B sont semblables, A et B ont les mêmes polynômes annulateurs ;
2. si A est une matrice carrée, A et $A^\top$ ont les mêmes polynômes annulateurs.

3.3 Exemples d'utilisations d'un polynôme annulateur

• Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, possédant un polynôme annulateur $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ tel que $\underline{a_0 \neq 0}$.

On a alors : $a_0 \mathrm{Id}_E + u \circ \left(\sum_{k=1}^n a_i u^{i-1}\right) = 0$, ce qui prouve que u est inversible et permet d'exprimer u^{-1} à l'aide des puissances de u.
• Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, possédant un polynôme annulateur (non nul) P. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la division euclidienne de X^n par P s'écrit : $X^n = PQ_n + R_n$ (où $\deg(R_n) < \deg(P)$). On a alors : $u^n = P(u) \circ Q_n(u) + R_n(u) = R_n(u)$, ce qui permet d'exprimer u^n à l'aide des puissances de u.

Exercice 3.3.1.
Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Trouver une relation entre A^2, A et I_3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que A est inversible, calculer A^{-1}.
3. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

4 Interpolation de Lagrange

4.1 Définition du problème

Dans cette partie, on considère un entier n et (x_0, y_0), …, (x_n, y_n) des couples d'éléments de $\mathbb{K}$.

On aimerait savoir s'il existe un polynôme P vérifiant

$$\forall\, i \in [\![0, n]\!] \quad P(x_i) = y_i, \tag{1}$$

dit autrement, on cherche s'il existe une fonction polynomiale dont le graphe passe par tous les points (x_i, y_i) pour $i \in [\![0, n]\!]$.

Il est bien évident que s'il existe i et j distincts tels que $x_i = x_j$ et $y_i = y_j$, on peut supprimer le couple (x_j, y_j) de la liste des couples considérés sans changer le problème.

Il est évident également que s'il existe i et j distincts tels que $x_i = x_j$ et $y_i \neq y_j$, il n'existe pas de solution.

C'est pourquoi, par la suite, **on suppose que x_0, …, x_n sont deux à deux distincts**.

4.2 Polynômes de Lagrange

Définition 4.2.1 (Base de Lagrange)**.**
On appelle ***base de Lagrange associée aux points*** x_0***, . . . ,*** x_n le $(n+1)$-uplet $(L_0, \dots, L_n)$ vérifiant pour tout $i \in [\![0, n]\!]$:

$$L_i = \frac{1}{\alpha_i} \prod_{\substack{j \in [\![0,n]\!] \\ j \neq i}} (X - x_j)$$

où

$$\alpha_i = \prod_{\substack{j \in [\![0,n]\!] \\ j \neq i}} (x_i - x_j).$$

Proposition 4.2.2.
Pour tout $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$, on a $L_i(x_i) = 1$ et $L_i(x_j) = 0$ si $j \neq i$.
Autrement dit, dans tous les cas, on a

$$L_i(x_j) = \delta_{i,j}.$$

Corollaire 4.2.3 (Expression d'un polynôme dans la base de Lagrange)**.**
Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$. Alors, en posant

$$P = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i,$$

on a pour tout $i \in [\![0, n]\!]$:

$$P(x_i) = \lambda_i.$$

Théorème 4.2.4.
(Résolution du problème de Lagrange dans $\mathbb{K}_n[X]$)**.**
Il existe un unique polynôme P de degré au plus n vérifiant l'équation (1).
Il s'agit du polynôme

$$\sum_{i=0}^{n} y_i L_i.$$

Démonstration. **Unicité sous réserve d'existence** Soit P et Q deux polynômes de degré au plus n vérifiant la propriété demandée. Alors P et Q coïncident en $n+1$ points distincts et sont de degré au plus n donc P et Q sont égaux.

Existence Le polynôme donné dans l'énoncé vérifie évidemment l'équation (1). Par ailleurs, il s'agit d'une combinaison linéaire de polynômes qui sont tous de degré n. Il est donc de degré au plus n.

□

Exercice 4.2.5.
Montrer que pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, il existe un existe un unique $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $P = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i$.

Exercice 4.2.6.
Déterminer l'unique polynôme P de degré au plus 3 vérifiant $P(-1) = -9$, $P(0) = -1$, $P(1) = 5$ et $P(2) = 21$.

Corollaire 4.2.7.
(Résolution du problème de Lagrange dans $\mathbb{K}[X]$)**.**
L'ensemble des polynômes vérifiant l'équation (1) est

$$\{\, P \times D + P_0 \mid P \in \mathbb{K}[X] \,\}$$

où

$$D = \prod_{i=0}^{n}(X - x_i),$$

$$P_0 = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i.$$

Démonstration.
Remarquons tout d'abord que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on a $D(x_i) = 0$.

Analyse Soit Q un polynôme vérifiant l'équation (1). En effectuant la division euclidienne de Q par D, on peut écrire Q sous la forme $P \times D + R$ où $P \in \mathbb{K}[X]$ et $R \in \mathbb{K}[X]$ avec $\deg R < n + 1$. On a donc $\deg R \leqslant n$.
De plus, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on a $R(x_i) = Q(x_i) - P(x_i)D(x_i) = y_i - P(x_i) \times 0 = y_i$. Donc R est nécessairement le polynôme P_0 et P s'écrit sous la forme $P \times D + P_0$.

Synthèse Réciproquement, soit P un polynôme. Posons $Q = P \times D + P_0$. Alors pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on a $Q(x_i) = P(x_i) \times 0 + P_0(x_i) = y_i$. Donc Q vérifie l'équation (1).

Conclusion L'ensemble des polynômes vérifiant l'équation (1) est

$$\{\, P \times D + P_0 \mid P \in \mathbb{K}[X] \,\}.$$

□

Remarque 4.2.8.
En exprimant l'équation (1) sous la forme

$$(P(x_0), \dots, P(x_n)) = (y_0, \dots, y_n),$$

cet ensemble de solutions est encore un ensemble de la forme solution particulière plus l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.

4.3 Lien avec le déterminant de Vandermonde

L'existence et l'unicité d'une solution de degré inférieur ou égal à n au problème posé aurait aussi pu être vue de la manière suivante :
Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

L'équation $P(x_i) = y_i$ s'écrit alors $\sum_{k=0}^{n} a_k x_i^k = y_i$. On peut la mettre sous forme matricielle, ce qui donne

$$\begin{pmatrix} 1 & x_i & x_i^2 & \cdots & x_i^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = y_i.$$

Ainsi P est solution si et seulement si les a_k sont solution de l'équation matricielle suivante :

$$M \times \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } M = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}.$$

Mais $\det M$ est un déterminant de Vandermonde, et il est non nul car les x_i sont distincts. La matrice M est donc inversible, et donc $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ est l'unique solution.

Cette méthode a l'inconvénient de ne pas donner d'expression exacte exploitable de la solution, car on ne sait pas calculer M^{-1} de manière exacte. Elle se prêt par contre a des calculs approchés.

La base de Lagrange n'est pas idéale non plus : si on change un des x_i, ou si l'on rajoute un point, tous les polynômes de Lagrange changent.
Il existe aussi la base de Newton, qui contourne ce problème. Ses vecteurs sont les $\left(\prod_{i=1}^{k}(X - x_i)\right)_{k \in [\![1,n]\!]}$.

Exercice 4.3.1.
Calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange P vérifiant $P(0) = 2$, $P(1) = -1$, $P(2) = 3$ et $P(-1) = -2$, sans utiliser les polynômes de Lagrange. On cherchera une solution sous la forme $a + bX + cX(X-1) + dX(X-1)(X-2) + eX(X-1)(X-2)(X+1)$. Cette méthode est appelée ***méthode d'interpolation de Newton***.

5 Exercices classiques

5.1 Expression et éléments caractéristiques d'un projecteur ou d'une symétrie

1. Donner les éléments caractéristiques de l'application f définie sur $\mathbb{R}^3$ par :
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3x & - & y & + & 2z \\ -x & + & 3y & + & 2z \\ x & + & y & + & 2z \end{pmatrix} \end{array} \right. .$$
2. Donner l'expression de la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}(1, 0, -1)$ et parallèlement à $\mathrm{Vect}\left((1, 2, 0), (1, 1, -1)\right)$.

5.2 Endomorphismes de rang 1

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1.

1. Montrer qu'il existe $C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $L \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ vérifiant $A = CL$.
2. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que pour tout entier naturel non nul n, $A^n = \alpha^{n-1}A$.
3. Montrer que $A^2 = \mathrm{tr}\,(A)A$.
4. Après avoir calculé $(1 + \mathrm{tr}\,A)(A + \mathrm{I}_n) - (1 + \mathrm{tr}\,A)\mathrm{I}_n$, déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $A + \mathrm{I}_n$ soit inversible. Le cas échéant, déterminer $(A + \mathrm{I}_n)^{-1}$.

5.3 Matrice à diagonale dominante

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ à coefficients diagonaux dominants, c'est-à-dire telle que :
$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|.$$
Montrer que A est inversible.

5.4 Une caractérisation de la trace

Trouver toutes les formes linéaires f sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant :
$$\forall\, A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ f(AB) = f(BA).$$
Indication : pour deux matrices élémentaires $E_{i,j}$ et $E_{k,\ell}$, calculer le produit $E_{i,j}E_{k,\ell}$.