V. Valeurs propres et vecteurs propres

7 septembre 2024

Table des matières

Programme officiel

La réduction des endomorphismes et des matrices carrées permet d'approfondir les notions étudiées en première année. Il est attendu des étudiants qu'ils maîtrisent les deux points de vue suivants :

- *l'aspect géométrique (sous-espaces stables, éléments propres) ;*
- *l'aspect algébrique (utilisation de polynômes annulateurs).*

L'étude des classes de similitude est hors programme ainsi que la notion de polynôme minimal.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Éléments propres	
Droite stable par un endomorphisme.	
Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre d'un endomorphisme.	Équation aux éléments propres $u(x) = \lambda x$. Si u et v commutent, les sous-espaces propres de u sont stables par v.
Spectre d'un endomorphisme en dimension finie.	Notation $\mathrm{Sp}(u)$. La notion de valeur spectrale est hors programme.
La somme d'une famille finie de sous-espaces propres d'un endomorphisme est directe.	Toute famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
Si un polynôme P annule u, toute valeur propre de u est racine de P.	Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.
Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre et spectre d'une matrice carrée.	Équation aux éléments propres $AX = \lambda X$.
b) Polynôme caractéristique	
Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.	Par convention le polynôme caractéristique est unitaire. Notations χ_A, χ_u. Coefficients de degrés 0 et $n-1$.
Les valeurs propres d'un endomorphisme sont les racines de son polynôme caractéristique.	Spectre complexe d'une matrice carrée réelle.
Multiplicité d'une valeur propre. Majoration de la dimension d'un sous-espace propre par la multiplicité.	Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, donc les mêmes valeurs propres avec mêmes multiplicités.
Théorème de Cayley-Hamilton.	La démonstration n'est pas exigible.

Dans tout ce chapitre E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$.

1 Élements propres d'un endomorphisme et d'une matrice

1.1 Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme

Définition 1.1.1 (Valeur propre, vecteur propre, spectre d'un endomorphisme)**.**
On appelle *valeur propre* de u tout scalaire λ pour lequel il existe $x \in E \setminus \{0\}$ vérifiant

$$u(x) = \lambda x.$$

Dans ce cas le vecteur x est appelé un *vecteur propre* de u, associé à la valeur propre λ.

Remarque 1.1.2.

- λ est une valeur propre de u ssi $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_E) \neq \{0\}$, ssi $(u - \lambda \mathrm{id}_E)$ n'est pas injective.
- Un vecteur x est un vecteur propre de u si
  (i) $x \neq 0$;
  (ii) $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $u(x) = \lambda x$.
  Étant non nul, un vecteur propre ne peut être associé qu'à une unique valeur propre.

Exemple 1.1.3.

- Une homothétie de rapport λ a une seule valeur propre : λ. Tous les vecteurs de E sont propres, sauf 0.
- Soit F et G deux sev supplémentaires de E, tels que F et G ne sont ni nuls ni égaux à E.
  Alors le projecteur sur F parallélement à G a deux valeurs propres : 0 et 1.
  Et la symétrie par rapport à F parallélement à G a deux valeurs propres : -1 et 1.

Exercice 1.1.4.
Quels sont les valeurs propres des endomorphismes de $\mathbb{K}[X]$ définis par $P \mapsto XP$, et $P \mapsto P'$?
Même question avec $f \mapsto f'$ sur $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Proposition 1.1.5 (Droite stable)**.**
Une droite $\mathscr{D}$ de vecteur directeur x est stable par u si et seulement si x est un vecteur propre de u.

Proposition 1.1.6 (Propriétés des valeurs propres)**.**
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. u est injectif si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de u ;
2. Si u est bijectif, les valeurs propres de u^{-1} sont les inverses des valeurs propres de u ;
3. Si x est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(x) = \lambda^k(x)$;
4. Si λ est valeur propre de u, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, λ^n est valeur propre de u^n.

Démonstration. 1. C'est la simple définition de valeur propre.

2. Soit λ valeur propre de u, où u est bijective. Soit x un vecteur propre associé à λ. Alors $u(x) = \lambda x$ donc $x = \frac{1}{\lambda} u(x)$, et enfin $u^{-1}(x) = \frac{1}{\lambda} x$.
3. Se démontre sans difficulté par récurrence à partir de $u(x) = \lambda x$ (on n'oubliera pas le cas $k = 0$, qui se traite à part).
4. Avec le point précédent et ses notations, $u^n(x) = \lambda^n x$, d'où le résultat.

□

1.2 Sous-espaces propres d'un endomorphisme

Définition 1.2.1 (Sous-espace propre).
Si λ est une valeur propre de u, on appelle ***sous-espace propre*** de u associé à λ le sev

$$E_\lambda(u) = \{x \in E,\ u(x) = \lambda x\} = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_E).$$

Remarque 1.2.2.

- $E_\lambda(u)$ est l'ensemble des vecteurs propres de u auxquels on ajoute 0.
- Tout sous-espace propre est au moins de dimension 1.
- u induit une homothétie de rapport λ sur $E_\lambda(u)$.

Exemple 1.2.3.
Reprenons le second point de **1.1.3**. Soit p le projecteur sur F parallélement à G et s la symétrie par rapport à F parallélement à G.
Alors $E_1(p) = F$, $E_0(p) = G$, $E_1(s) = F$ et $E_{-1}(s) = G$.

Proposition 1.2.4 (Noyau et valeur propre nulle).
Si 0 est valeur propre de u, alors u n'est pas injective et $\mathrm{Ker}\, u = E_0(u)$.

Proposition 1.2.5 (Commutativité et stabilité des sous-espaces propres).
Soit $u, v \in \mathscr{L}(E)$. Si u et v commutent, alors les sous-espaces propres de u sont stables par v.

Remarque 1.2.6.
En particulier les sous-espaces propres de u sont stables par u.

Théorème 1.2.7 (Les sous-espaces propres sont en somme directe).
Des sous-espaces propres de u associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont en somme directe.

Démonstration 1.
Par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^*$, montrons que la somme de m sous-espace propres de u est directe.
• Initialisation : pour le cas $m = 1$ il n'y a rien à démontrer.
• Hérédité : Supposons la propriété établie au rang $m \geqslant 1$.
Soit $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_m}(u), E_{\lambda_{m+1}}(u)$ des sous-espaces propres de u associés à des valeurs propres deux à deux distinctes.
Supposons $x_1 + \cdots + x_m + x_{m+1} = 0_E$ avec $x_k \in E_{\lambda_k}(u)$.
En appliquant u, on obtient $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m + \lambda_{m+1} x_{m+1} = 0_E$.
En soustrayant $\lambda_{m+1} \times$(la 1ère équation) à la 2nde, il vient $(\lambda_1 - \lambda_{m+1})\, x_1 + \cdots + (\lambda_m - \lambda_{m+1})\, x_m = 0_E$.
Cette équation est de la forme $y_1 + \cdots + y_m = 0_E$ avec $y_k = (\lambda_k - \lambda_{m+1})\, x_k \in E_{\lambda_k}(u)$.
Par hypothèse de récurrence, les espaces $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_m}(u)$ sont en somme directe donc

$$\forall\, k \in [\![1, m]\!],\ y_k = 0_E$$

ce qui fournit

$$\forall\, k \in [\![1, m]\!],\ x_k = 0_E$$

car

$$\lambda_k - \lambda_{m+1} \neq 0$$

Enfin, en reprenant l'équation initiale, on a aussi $x_{m+1} = 0_E$.
La récurrence est ainsi établie. □

Démonstration 2.
Soit $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_m}(u), E_{\lambda_m}(u)$ des sous-espaces propres de u associés à des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ deux à deux distinctes.
Supposons $x_1 + \cdots + x_m = 0_E$ avec $x_k \in E_{\lambda_k}(u)$.
En appliquant u, on obtient $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m + \lambda_{m+1} x_{m+1} = 0_E$.
On applique également $u^2, \dots, u^{m-1}$ à cette première équation, et on obtient le système :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 0 \\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_m = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1^{m-1} x_1 + \lambda_2^{m-1} x_2 + \cdots + \lambda_m^{m-1} x_m = 0 \end{cases}$$

qui peut sé réécrire sous forme matricielle $AX = 0$, avec

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{m-1} & \cdots & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix}.$$

A est une matrice de Vandermonde, et elle est inversible car les λ_k sont deux à deux distinctes. Par conséquent 0 est la seule solution du système, *i.e.* $x_1 =_c dots = x_m$, et les $E_{\lambda_k}(u)$ sont en somme directe. □

Corollaire 1.2.8 (Famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes)**.**
Soient $x_1, \ldots, x_p$ des vecteurs propres d'un endomorphisme u, associés à des valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$.
Alors la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre.

Exercice 1.2.9.

1. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des complexes distincts deux à deux. Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, on définit $f_k \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{\lambda_k x} \end{array}$. Montrer que la famille $(f_1, \ldots, f_p)$ est libre.

2. Montrer de même que si les λ_i sont supposés réels positifs (et toujours distincts deux à deux), alors la famille constituée des $g_k \;:\; x \mapsto \cos(\lambda_k x)$ est libre.

1.3 Éléments propres d'un endomorphisme en dimension finie

Définition 1.3.1 (Spectre d'un endomorphisme)**.**
On appelle ***spectre*** de u l'ensemble des valeurs λ pour lesquelles $u - \lambda\mathrm{id}_E$ n'est pas inversible. Il est noté $\mathrm{Sp}\,(u)$.

Remarque 1.3.2.
Si E est de dimension finie, l'ensemble des valeurs propres de u est égal au spectre de u.
Ce n'est pas forcément le cas en dimension quelconque.
Le programme ne définit le spectre de u que dans le cas où E est de dimension finie.

Proposition 1.3.3 (Caractérisation des valeurs propres en dimension finie)**.**
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et E de dimension finie. Alors

$$\begin{array}{cl} & \lambda \text{ est une valeur propre de } u \\ \Leftrightarrow & \mathrm{Ker}(u - \lambda\mathrm{id}_E) \neq \{0\} \\ \Leftrightarrow & (u - \lambda\mathrm{id}_E) \text{ n'est pas injective} \\ \Leftrightarrow & (u - \lambda\mathrm{id}_E) \text{ n'est pas bijective} \\ \Leftrightarrow & \det(u - \lambda\mathrm{id}_E) = 0. \end{array}$$

Remarque 1.3.4.
$\lambda \mapsto \det(u - \lambda\mathrm{id}_E)$ est un polynôme en λ. Il n'a donc pas forcément les mêmes racines dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$. Ainsi on peut distinguer $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u)$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(u)$.

Exercice 1.3.5.
Soit $u \;:\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$. Que valent $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u)$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(u)$?

Le résultat **1.2.7** a la conséquence suivante en dimension finie :

Proposition 1.3.6 (Majoration du nombre de valeurs propres et des dimensions des vecteurs propres)**.**
Soit $n = \dim E$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des valeurs propres deux à deux distinctes de u. Alors :

$$p \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim E_{\lambda_i}(u) \leqslant n$$

En particulier, $\mathrm{Card}(\mathrm{Sp}\,(u)) \leqslant n$.

1.4 Éléments propres d'une matrice

Dans cette section, A est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 1.4.1 (Éléments propres d'une matrice)**.**
On appelle ***valeur propre*** de A tout scalaire λ pour lequel il existe un vecteur colonne X vérifiant

$$X \neq 0 \text{ et } AX = \lambda X.$$

Dans ce cas le vecteur X est appelé un ***vecteur propre*** de A, associé à la valeur propre λ.
L'ensemble des valeurs propres de A est appelé ***spectre*** de A, et est noté $\mathrm{Sp}\,(A)$.
Si λ est une valeur propre de A, le ***sous-espace propre*** de A associé à λ est $E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda \mathrm{I}_n)$.

Le résultat suivant assure que les éléments propres d'une matrice sont les mêmes que ceux de tout endomorphisme représenté par A dans une base donnée :

Proposition 1.4.2 (Lien avec les endomorphismes)**.**
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n et $\mathscr{B}$ une base de E. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $x \in E$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ et $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$. Alors $\mathrm{Sp}\,(u) = \mathrm{Sp}\,(A)$ et x est vecteur propre de u pour une valeur propre λ si et seulement si X est vecteur propre de A pour λ.

Ainsi tous les résultats établis pour les endomorphismes en dimension finie se transmettent aux matrices.

Proposition 1.4.3 (Caractérisation du spectre par le déterminant)**.**
$\mathrm{Sp}\,(A)$ est l'ensemble des scalaires λ tels que $\det(A - \lambda \mathrm{I}_n) = 0$.

Remarque 1.4.4 (Équation aux éléments propres)**.**
L'équation $AX = \lambda X$ est appelée ***équation aux éléments propres*** de A. La résoudre revient à trouver à la fois λ et X non nul satisfaisant à cette relation. En pratique on détermine d'abord les valeurs propres, le plus souvent en résolvant l'équation $\det(A - \lambda \mathrm{I}_n) = 0$, et pour une valeur propre λ fixée, on cherche ensuite les vecteurs propres.

Exercice 1.4.5.
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

Remarque 1.4.6.

- Là encore on peut distinguer $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.
- Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et λ est une valeur propre complexe non réelle de A, alors $\bar{\lambda}$ est aussi une valeur propre de A. De plus, X est un vecteur propre pour λ si et seulement si $\bar{X}$ est un vecteur propre pour $\bar{\lambda}$. Par conséquent, si $\mathscr{B}$ est une base de $E_\lambda(A)$, alors $\bar{\mathscr{B}}$ est une base de $E_{\bar{\lambda}}(A)$. Ces deux sous-espaces propres ont donc la même dimension.

Exercice 1.4.7.
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Donner une base de $E_i(A)$ et une base de $E_{-i}(A)$.

Proposition 1.4.8 (Inversibilité et spectre)**.**
A est inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de A.
Si 0 est valeur propre de A, alors $\mathrm{Ker}\, A = E_0(A)$.

Proposition 1.4.9 (Spectre d'une matrice triangualaire)**.**
Le spectre d'une matrice triangulaire est l'ensemble de ses coefficients digonaux.

Proposition 1.4.10 (Spectre et similitude)**.**
Deux matrices semblables ont le même spectre.

Exemple 1.4.11.
$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables.
On aurait aussi pu le voir très rapidement avec un autre outil : lequel ?
$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?
Et $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$?

2 Lien avec les polynômes d'endomorphisme

On rappelle que tous les résultats s'énonçant sur des endomorphismes en dimension finie se traduisent en un énoncé équivalent sur les matrices, et inversement. Les résultats qui suivent ne seront la plupart du temps donnés que dans un seul de ces contextes, mais se traduisent dans l'autre.

2.1 Valeur propre et racines d'un polynôme annulateur

Théorème 2.1.1 (Valeurs propres d'un polynôme d'endomorphisme)**.**
Si x est un vecteur propre de u pour la valeur propre λ, alors pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, x est vecteur propre de $P(u)$ pour la valeur propre $P(\lambda)$.

Démonstration.
On utilise **1.1.6** : si $P = \sum_{k=0}^{r} a_k X^k$, alors $P(u)(x) = \sum_{k=0}^{r} a_k u^k(x) = \sum_{k=0}^{r} a_k \lambda^k x = P(\lambda).x$. □

Remarque 2.1.2.
Nous avons donc $P(\mathrm{Sp}\,(u)) \subset \mathrm{Sp}\,(P(u))$. Cette inclusion peut être stricte : si u est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ on a $\mathrm{Sp}\,(u) = \varnothing$ alors que $u^2 = -\mathrm{Id}_E$ donc $\mathrm{Sp}\,(u^2) = \{-1\}$.

On peut cependant montrer que cette inclusion est bien une égalité dans le cas où est un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie.

Proposition 2.1.3.
Si P est un polynôme annulateur de u, alors les valeurs propres de u sont parmi les racines de P.

Exemple 2.1.4.
Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors $X^2 - 1$ est un poynôme annulateur de A, donc les valeurs propres de A sont dans $\{-1, 1\}$.
Cependant, $P = X(X^2 - 1)$ est aussi un polynôme annulateur de A : 0 est racine de P mais n'est pas valeur propre de A.

2.2 Polynôme caractéristique

Définition 2.2.1 (Polynôme caractéristique)**.**
1. Soit E de dimension finie. Le ***polynôme caractéristique*** de l'endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est le polynôme
$$\chi_u : \begin{array}{ccl} \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ \lambda & \mapsto & \det(\lambda \mathrm{id}_E - u) \end{array}.$$
2. Le ***polynôme caractéristique*** de la matrice A est le polynôme
$$\chi_A : \begin{array}{ccl} \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ \lambda & \mapsto & \det(\lambda \mathrm{I}_n - A) \end{array}.$$

Remarque 2.2.2.
- Le polynôme caractéristique est bien un polynôme, nous y reviendrons très vite dans **2.2.3**.

- Le programme demande d'utiliser $\det(\lambda \mathrm{I}_n - A)$ et non $\det(A - \lambda \mathrm{I}_n)$ afin que le polynôme caractéristique soit unitaire.
- Si A est la matrice de u dans une base $\mathscr{B}$, alors $\chi_A = \chi_u$. Les résultats concernant les polynômes caractéristiques sont donc les mêmes concernant les matrices ou les endomorphismes en dimension finie.

Proposition 2.2.3 (Propriétés polynomiales du polynôme caractéristique)**.**
Le polynôme caractéristique χ_A d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (ou χ_u d'un endomorphisme u en dimension n) vérifie les points suivants :

(i) c'est un polynôme unitaire de degré n ;
(ii) son coefficient constant vaut $(-1)^n \det A$ (ou $(-1)^n \det u$) ;
(iii) son coefficient de degré $n-1$ vaut $-\operatorname{tr} A$ (ou $-\operatorname{tr} u$).

Anisi
$$\chi_A = X^n - \operatorname{tr}(A) X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det(A).$$

Démonstration 1.
Par la formule des déterminants
$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I}_n - A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \left(\lambda \delta_{\sigma(i),i} - a_{\sigma(i),i}\right)$$

Pour tout $\sigma \in S_n$, posons
$$P_\sigma(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \left(\lambda \delta_{\sigma(i),i} - a_{\sigma(i),i}\right)$$

Ainsi P_σ est bien une fonction polynômiale, de degré au plus n.
Si $\sigma = \mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}$, alors $\forall\, i \in [\![1,n]\!]$, $\sigma(i) = i$. Par négation, si $\sigma \neq \mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}$ il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $\sigma(i) \neq i$. Si on note $j = \sigma(i)$, alors $\sigma(j) \neq j$ sinon on aurait $\sigma(i) = \sigma(j)$. D'où l'existence d'au moins deux indices i, j tels que $\sigma(i) \neq i$ et $\sigma(j) \neq j$. La fonction polynômiale P_σ est alors de degré au plus $n-2$.
Si $\sigma = \mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}$,
$$P_{\mathrm{Id}}(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - a_{i,i}) = \lambda^n - (a_{1,1} + \cdots + a_{n,n})\, \lambda^{n-1} + \cdots$$

Ainsi
$$\det(\lambda I_n - A) = \lambda^n - \operatorname{tr}(A) \lambda^{n-1} + \cdots$$
Enfin, le coefficient constant de χ_A est $\chi_A(0) = (-1)^n \det(A)$. □

Démonstration 2.
Pour justifier que $\chi_A(X) = X^n - \operatorname{tr}(A) X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$, notons $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de la matrice A, $(E_1, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})$. On a donc :
$$\begin{aligned}
\chi_A(X) =& \det(XE_1 - C_1, XE_2 - C_2, \ldots, XE_n - C_n) \\
=& X \det(E_1, XE_2 - C_2, \ldots, XE_n - C_n) \\
& - \det(C_1, XE_2 - C_2, \ldots, XE_n - C_n) \\
& \text{en développant par linéarité} \\
& \text{par rapport à la première colonne} \\
=& X^n \det(E_1, \ldots, E_n) \\
& - X^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \det(E_1, \ldots, E_{k-1}, C_k, E_{k+1}, \ldots, E_n) \\
& + \cdots + (-1)^n \det(C_1, \ldots, C_n) \\
& \text{en développant par } n\text{-linéarité et en} \\
& \text{regroupant les termes selon les puissances de } X \\
=& X^n \det(\mathrm{I}_n) - X^{n-1} \sum_{k=1}^{n} a_{kk} + \cdots + (-1)^n \det(A) \\
& \text{en développant les déterminants par rapport} \\
& \text{aux colonnes contenant les } E_i, i \neq k \\
=& X^n - X^{n-1} \operatorname{tr}(A) + \cdots + (-1)^n \det(A).
\end{aligned}$$
□

Exercice 2.2.4.
Quel est le polynôme caractéristique d'une matrice diagonale ? et d'une matrice triangulaire ?

Proposition 2.2.5.
(Invariance du polynôme caractéristique par similitude et transposition)**.**

1. Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.
2. $\chi_{A^\top} = \chi_A$.

Démonstration. 1. Si $A = PBP^{-1}$ on a

$$\begin{aligned}\chi_A &= \det(X\mathrm{I}_n - PBP^{-1})\\ &= \det(P(X\mathrm{I}_n)P^{-1} - PBP^{-1})\\ &= \det(P(X\mathrm{I}_n - B)P^{-1})\\ &= \det(P)\det(X\mathrm{I}_n - B)\det(P^{-1})\\ &= \chi_B.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\chi_{A^\top} &= \det(X\mathrm{I}_n - A^\top)\\ &= \det((X\mathrm{I}_n - A)^\top)\\ &= \det(X\mathrm{I}_n - A)\\ &= \chi_A.\end{aligned}$$

□

Théorème 2.2.6 (Sous-espace stable et polynôme caractéristique)**.**
Si E est de dimension finie et F est un sev de E stable par u, alors le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par u sur F divise le polynôme caractéristique de u.

Démonstration.
Si G est un supplémentaire de E, alors dans une base adaptée à $F \oplus G = E$ la matrice de u est de la forme $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$. Alors, avec $r = \dim F$, $M - \lambda\mathrm{I}_n = \begin{pmatrix} A - \lambda\mathrm{I}_r & B \\ 0 & C - \mathrm{I}_{n-r} \end{pmatrix}$. En calculant le déterminant par blocs, nous avons donc bien $\chi_M = \chi_A \times \chi_C$. □

2.3 Polynôme caractéristique et valeurs propres

Théorème 2.3.1.
Les valeurs propres d'une matrice sont les racines de son polynôme caractéristique.
Il en est de même pour un endomorphisme en dimension finie.

Démonstration.
Il suffit d'utiliser **1.4.3**. □

Corollaire 2.3.2.
(Bornes du nombre de valeurs propres)**.**
1. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, elle a au plus n valeurs propres ;
2. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, elle a au moins une valeur propre complexe ;
3. Si $A \in \mathscr{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$, elle a au moins une valeur propre réelle.

Ces résultats s'adaptent au cas des endomorphismes en dimension finie.

Exemple 2.3.3.
Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminons ses éléments propres.

On a

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= (-1)^3 \det(A-\lambda I_3) \\
&= -\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & -1 \\ -1-\lambda & -1-\lambda & 0 \\ -1-\lambda & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -(\lambda+1)^2 \begin{vmatrix} -(2+\lambda) & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda+1)^2(\lambda+2)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\chi_A(X) = (X+1)^2(X+2) \text{ et } \mathrm{Sp}(A) = \{-1,-2\}.$$

Étudions $E_{-2}(A)$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
X \in E_{-2}(A) &\Leftrightarrow AX = -2X \\
&\Leftrightarrow (A+2I_3)X = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y-z=0 \\ x+z=0 \\ x-y+2z=0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $E_{-2}(A) = \mathrm{Vect}(1,-1,-1)$.
Étudions $E_{-1}(A)$.

$$\begin{aligned}
X \in E_{-1}(A) &\Leftrightarrow (A+I_3)X = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -x+y-z=0 \\ x-y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}
\end{aligned}$$

donc $E_{-1} = \mathrm{Vect}\left((1,1,0),(0,1,1)\right)$.

2.4 Multiplicité et dimension des espaces propres

Rappel 2.4.1 (Multiplicité d'une racine)**.**
Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme non nul, on appelle ordre de multiplicité de λ en tant que racine de P le plus grand $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que

$$(X-\lambda)^\alpha \mid P.$$

Ceci équivaut encore à

$$P(\lambda) = P'(\lambda) = \ldots = P^{(\alpha-1)}(\lambda) = 0 \text{ et } P^{(\alpha)}(\lambda) \neq 0$$

Définition 2.4.2 ((Multiplicité d'une valeur propre)**.**
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. On appelle multiplicité de la valeur propre λ de u son ordre de multiplicité comme racine de χ_u.

Remarque 2.4.3.
Deux matrices semblables ayant le même polynôme caractéristique, elles ont les mêmes valeurs propres, avec les mêmes multiplicités. Il en est de même pour A et $A^\top$.
Les sous-espaces propres ne sont en général pas les mêmes.

Exercice 2.4.4.
Déterminer les éléments propres (avec multiplicité) de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et de sa transposée.

Nous pouvons donc maintenant préciser le corollaire **2.3.2** :

Proposition 2.4.5.
A (et u) a au plus n valeurs propres comptées avec leur multiplicité.

Rappel 2.4.6.
Un polynôme P non constant est dit ***scindé*** dans $\mathbb{K}[X]$ si, et seulement si, on peut le factoriser sous la forme

$$P = \mu \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$$

où les λ_i sont les racines de P, non forcément distinctes, et μ est le coefficient dominant de P.
Si on regroupe les racines égales, on obtient l'écriture

$$P = \mu \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)^{\beta_i}$$

où les α_i sont les racines deux à deux distinctes de P, et les β_i leurs multiplicités.

Proposition 2.4.7 (Dimension de E et multiplicité des valeurs propres)**.**
La somme des multiplicités des valeurs propres de $u \in \mathscr{L}(E)$ (resp. $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$) est inférieure ou égale à la dimension de E (resp. n), avec égalité si et seulement si le polynôme caractéristique est scindé.

Démonstration.
Soit P le polynôme caractéristique, n son degré, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes et $m_1, \dots, m_r$ leurs multiplicités.
Alors $\displaystyle\prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{m_i} | P$ donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} m_i \leqslant \deg P$.
En notant μ le coefficient dominant de P, si $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} m_i = \deg P$ alors P n'a pas d'autres racines que les λ_i et $\mu \displaystyle\prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{m_i} = P$. Ainsi P est scindé.
Réciproquement, si P est scindé, il s'écrit sous la forme $\mu \displaystyle\prod_{i=1}^{r}(X - \alpha_i)^{m_i}$, où les α_i sont ses racines, deux à deux distinctes et de multiplicité m_i. Par définition ce sont ses valeurs propres, et la somme des multiplicités des valeurs propres est donc bien égale à n. □

Remarque 2.4.8.
Le théorème de d'Alembert-Gauss assure que tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont scindés. Donc un endomorphisme ou une matrice complexe a toujours n valeurs propres comptées avec multiplicité.

Corollaire 2.4.9.
Si le polynôme caractéristique de A (ou u) est scindé, et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ en sont les n racines (non forcément distinctes), alors $\det(A) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \lambda_k$ et $\operatorname{tr}(A) = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k$.

Démonstration.
Il suffit d'utiliser les relations coefficients-racines vues en sup, et **2.2.3**. □

Théorème 2.4.10 (Dimension des sous-espaces propres)**.**
La dimension d'un sous-espace propre est inférieure ou égale à la dimension de la valeur propre associée.

Démonstration.
Traitons le cas d'un endomorphisme u en dimension finie. On peut toujours s'y ramener pour démontrer ce résultat pour une matrice.
Les sous-espaces propres étant stables par u, il suffit d'utiliser **2.2.6** :soit $F = E_\lambda(u)$ un sous-espace propre, r sa dimension et $v = u|_F$. Alors $\chi_v | \chi_u$. Or v est une homothétie de rapport λ, donc $\chi_v = (X - \lambda)^r$. Puisque $(X - \lambda)^r | \chi_u$, alors r est inférieure ou égale à la multiplicité de λ dans χ_u : c'est le résultat voulu. □

Corollaire 2.4.11 (Cas d'une valeur propre simple)**.**
Si λ est une valeur propre simple alors le sous-espace propre associé est de dimension 1.

2.5 Théorème de Cayley-Hamilton

Finissons par énoncer un des théorèmes principaux du cours d'algèbre linéaire, dont la démonstration est hors-programme :

Théorème 2.5.1 (Théorème de Cayley-Hamilton)**.**
Soit E de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors le polynôme caractéristique de u est un polynôme annulateur de u.
Cet énoncé se transpose aux matrices.

Une preuve est jointe juste à la fin de cette section. Elle repose sur le calcul du polynôme caractéristique d'une matrice compagne, ce qui fait l'objet de l'exercice **3.8**.

Corollaire 2.5.2 (Théorème de Cayley-Hamilton en dimension 2)**.**
Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. Alors $A^2 - \mathrm{tr}\,(A)A + \det(A)\mathrm{I}_2 = 0$.

Corollaire 2.5.3 (Inverse d'une matrice d'ordre 2)**.**
Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$, et dans ce cas

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Démonstration (Théorème de Cayley-Hamilton)**.**
Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et $u \in \mathscr{L}(E)$.
On fixe un vecteur v dans $\mathbb{K}^n$, et on va montrer que $\chi_u(u)(v) = 0$. En faisant varier v dans E, on obtiendra ainsi $\chi_u(u) = 0$ comme voulu.
Pour $v = 0$, c'est évident par linéarité.
Pour $v \neq 0$, i.e. (v) libre, on considère

$$r = \min\left\{k \geqslant 2,\ \big(v, u(v), \dots, u^k(v)\big) \text{ liée } \right\}.$$

Ce minimum existe car l'ensemble précédent est inclus dans $\mathbb{N}$, et il n'est pas vide : n y appartient car une famille de E de $n+1$ éléments est toujours liée.
Ainsi $u^r(v)$ est lié avec $\big(v, \dots, u^{r-1}(v)\big)$, qui est libre, donc il se décompose en

$$u^r(v) = a_0 v + a_1 u(v) + \ldots + a_{r-1}u^{r-1}(v).$$

On complète ensuite la famille libre $\big(v, u(v), \dots, u^{r-1}(v)\big)$ en une base $\mathscr{B}$ de K^n, dans laquelle la matrice de u s'écrit

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & & & & a_0 & * \\ 1 & \ddots & & & \vdots & * \\ & \ddots & & 0 & a_{r-2} & * \\ & & & 1 & a_{r-1} & * \\ 0 & \cdots & \cdots & & 0 & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathscr{C}(P) & * \\ 0 & M \end{pmatrix}$$

où l'on a noté $P = v^r - a_{r-1}v^{r-1} - \ldots - a_1 v - a_0$. Observer que $P(u)(v) = 0$. En utilisant le résultat sur la matrice compagne, on obtient

$$\chi_u = \chi_{\begin{pmatrix} \mathscr{C}(P) & * \\ 0 & M \end{pmatrix}} = \chi_{\mathscr{C}(P)} \times \chi_M = P \times \chi_M,$$

d'où en appliquant en v :

$$\chi_u(u)(v) = \big[\chi_M \times P\big](u)(v) = \chi_M(\underbrace{P(u)(v)}_{=0}) = 0,$$

d'où le résultat voulu. $\square$

3 Exercices classiques

3.1 Spectres de matrices qui commutent

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que AB et BA on le même spectre.

3.2 Détermination du spectre d'un endomorphisme de polynômes

Soit $E = \mathbb{K}[X]$ et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ défini par $\varphi\ : P \mapsto XP'(X)$. Déterminer $\mathrm{Sp}\,(\varphi)$.

3.3 Éléments propres d'une matrice

Donner les éléments propres de

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).$$

3.4 Détermination du spectre d'un endomorphisme de polynômes

Soit $E = \mathbb{K}[X]$ et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ défini par $\varphi \ : P \mapsto XP'(X)$. Déterminer $\mathrm{Sp}\,(\varphi)$.

3.5 Polynôme caractéristique d'une matrice diagonale par blocs

Soit $A_1, \dots, A_p$ des matrices carrées. Exprimer le polynôme caractéristique de $A = \mathrm{diag}(A_1, \dots, A_p)$ en fonction de ceux des A_i.

3.6 Encore des matrices nilpotentes

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n, et $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Soit N un endomorphisme nilpotent de E. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle de matrice de N est triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale.
2. Montrer l'équivalence des trois propositions suivantes :
   (i) il existe N nilpotent tel que $u = \mathrm{Id}_E + N$;
   (ii) il existe une base dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale ;
   (iii) le polynôme caractéristique de u a toutes ses racines dans $\mathbb{C}$ égales à 1.

3.7 Encore des matrices de rang 1

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de rang 1.

1. Montrer qu'il existe $C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $L \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{C})$ vérifiant $A = CL$.
2. Montrer que $A^2 = \mathrm{tr}\,(A)A$.
3. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $A + I_n$ soit inversible. Le cas échéant, déterminer $(A + I_n)^{-1}$.

3.8 Matrice compagne

Pour $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$ polynôme unitaire, on définit la matrice compagne de P :

$$\mathscr{C}(P) = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Pour $n = 1$, P s'écrit $X + a_0$ et $\mathscr{C}(P) = \mathscr{C}\,(X + a_0) = (-a_0)$.

1. Montrer que P est le polynôme caractéristique de $\mathscr{C}(P)$.
2. On suppose dans cette question que P est scindé à racines simples, notées $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Montrer que :

$$\mathscr{C}(P)^\top = V \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) V^{-1}$$

   où V désigne la matrice de Vandermonde de $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.