

# Topologie des evns

## I. Un peu de topologie dans $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$

- 1) a) Soit  $f \in F$ . Alors la boule ouverte de centre  $f$ , de rayon  $\frac{1}{2} \int_0^1 f$  (qui est bien strictement positif) est incluse dans  $F$ . En effet, si  $g \in B\left(f, \frac{1}{2} \int_0^1 f\right)$  alors  $\|g - f\|_\infty < \frac{1}{2} \int_0^1 f$  donc  $f - \frac{1}{2} \int_0^1 f \leq g \leq f + \frac{1}{2} \int_0^1 f$ .

Donc par croissance de l'intégrale,  $\int_0^1 g \geq \int_0^1 f - \frac{1}{2} \int_0^1 f = \frac{1}{2} \int_0^1 f > 0$  donc  $g \in F$ .

- b) La fonction  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_0^1 f$  vérifie : pour tout  $f, g \in E$ ,

$$|\varphi(f) - \varphi(g)| \leq \int_0^1 \|f - g\|_\infty = \|f - g\|_\infty. \text{ Elle est donc 1-lipschitzienne, et ainsi elle est continue.}$$

Or  $F = \varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$  et  $\mathbb{R}_+^*$  est un ouvert, donc  $F$  aussi.

- 2) a) Soit  $f \in A$ . Alors  $|f(0) - g(0)| = 1$  donc  $\|f - g\|_\infty \geq 1$ . Donc  $\mathcal{B}(g, \frac{1}{2}) \cap A = \emptyset$  :  $g$  n'est pas adhérent à  $A$  pour  $\|\cdot\|_\infty$ .

- b) Soit  $f_n$  telle que  $f_n(x) = 1$  si  $x > \frac{1}{n}$  et  $f_n(x) = nx$  si  $x \in [0, \frac{1}{n}]$ . Alors

$$f_n \in A \text{ et } \|g - f_n\|_1 = \int_0^{1/n} (1 - nx) dx = \frac{1}{2n}. \text{ Donc } g \text{ est limite d'une suite d'éléments de } A : \text{c'est un point adhérent à } A \text{ pour } \|\cdot\|_1.$$

## II. Deux exercices : densité des matrices inversibles et distance à un fermé borné

- 1)  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$  est un ouvert car image réciproque de l'ouvert  $\mathbb{R}^*$  par l'application continue  $\det$ .

L'application  $\lambda \mapsto \det(A - \lambda I_n)$  est polynomiale non nulle en  $\lambda$  donc possède un nombre fini de racines.

Fixons  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $r \in \mathbb{R}_+^*$ . Si l'on considère la norme  $\|\cdot\|_\infty$  sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , alors pour tout  $\alpha \in ]-r, r[$ ,  $\|\alpha I_n\|_\infty = |\alpha|$  donc  $\alpha I_n \in \mathcal{B}(0, r)$ , et ensuite  $A - \alpha I_n \in \mathcal{B}(A, r)$ . Or avec le point précédent, il existe une infinité de  $\alpha \in ]-r, r[$  tels que  $\det(A - \alpha I_n) \neq 0$ , donc il existe une infinité de matrices de  $\mathcal{B}(A, r)$  qui sont inversibles.

Par suite :  $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall r > 0, \mathcal{B}(A, r) \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ , d'où la densité de  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ .

- 2) Soit l'application  $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto \|x - y\|$ .

Soit  $y, z \in A$ . Alors

$$\begin{aligned} |\varphi(y) - \varphi(z)| &= \left| \|y - x\| - \|x - z\| \right| \\ &\leq \|(y - x) + (x - z)\| \quad \text{par inégalité triangulaire} \\ &\leq \|y - z\|. \end{aligned}$$

La fonction  $\varphi$  est ainsi 1-lipschitzienne, et donc continue.

Puisque  $A$  est fermée et bornée et que  $E$  est de dimension finie,  $\varphi$  est bornée et atteint ses bornes. En particulier elle a un minimum, ce qui répond aux deux questions.

## III. Densité et continuité

- 1) Analyse : Soit  $g$  solution.

•  $g(0) = g(0 + 0) = g(0) + g(0)$ , donc  $g(0) = 0$ .

• Soit  $y \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $(H_n) : g(ny) = ng(y)$ .

$(H_0)$  a été démontrée.

Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $(H_n)$  est vraie. Alors  $g((n+1)y) = g(ny) + g(y) = ng(y) + g(y) = (n+1)g(y)$ , et ainsi par récurrence  $(H_n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . En particulier, nous avons montré, en posant  $y = 1$ , que

$$\forall x \in \mathbb{N}, g(x) = xg(1).$$

• Soit  $n \in \mathbb{N}, 0 = g(0) = g(n - n) = g(n) + g(-n)$  et donc  $g(-n) = -g(n) = -ng(1)$ , ce qui prouve que

$$\forall x \in \mathbb{Z}, g(x) = xg(1).$$

• Soit  $q \in \mathbb{Q}$ . Il existe  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  tel que  $q = \frac{a}{b}$ . Alors  $bg(q) = g(bq) = g(a) = ag(1)$  donc  $g(q) = \frac{a}{b}g(1)$  donc

$$\forall x \in \mathbb{Q}, g(x) = xg(1).$$

• Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Par densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ , il existe une suite de rationnels  $(q_n)$  qui converge vers  $x$ . D'une part  $g(q_n) = q_n g(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} xg(1)$  et d'autre part, par continuité de  $g$ ,  $g(q_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g(x)$ . Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = xg(1).$$

#### IV. Norme subordonnée

Par conséquent il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $g = \lambda \text{id}_{\mathbb{R}}$ .

Synthèse : Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ , il est immédiat que  $\lambda \text{id}_{\mathbb{R}}$  est solution.

L'ensemble des solutions est donc  $\{\lambda \text{id}_{\mathbb{R}}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

#### 2) Analyse : Soit $g$ solution.

S'il existe  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $g(x) = 0$ , alors pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $g(t) = g(x + t - x) = g(x)g(t - x) = 0$  donc  $g = 0$  – et la fonction nulle est bien solution.

Sinon,  $g$  ne s'annule pas, et comme elle est continue, elle est de signe constant. Si  $g < 0$ , pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $g(x + y) < 0$  et  $g(x)g(y) > 0$ , ce qui est absurde.

Donc  $g > 0$ .

Alors pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $\ln \circ g(x + y) = \ln(g(x)g(y)) = \ln \circ g(x) + \ln \circ g(y)$ .

Grâce à la première question, il existe donc  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\ln \circ g = \lambda \text{id}_{\mathbb{R}}$ , donc  $g = \exp \circ (\lambda \text{id}_{\mathbb{R}})$ .

Synthèse : Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ , il est immédiat que  $\exp \circ (\lambda \text{id}_{\mathbb{R}})$  est solution, ainsi que la fonction nulle.

L'ensemble des solutions est donc  $\{\exp \circ (\lambda \text{id}_{\mathbb{R}}), \lambda \in \mathbb{R}\} \cup \{0\}$ .

1)  $u$  étant continue, il existe  $k \in \mathbb{R}_+^*$  tel que pour tout  $x$ ,  $\|u(x)\| \leq k \|x\|$ . Donc  $\left\{ \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}, x \in E \setminus \{0\} \right\}$  est majoré. Comme il est non vide,  $M_1$  existe.

De plus,  $\left\{ \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}, x \in E \setminus \{0\} \right\} = \{\|u(x/\|x\|)\|, x \in E \setminus \{0\}\} = \{\|u(x)\|, x \in E \text{ t.q. } \|x\| = 1\}$ , donc  $M_2$  existe, et vaut d'ailleurs  $M_1$ .

Le dernier ensemble est inclus dans  $\mathbb{R}_+$ , non vide car  $u$  est continue, et minoré par 0, donc  $M_3$  existe.

2) Nous avons déjà remarqué que  $M_1 = M_2$ .

$M_1$  majore  $\left\{ \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}, x \in E \setminus \{0\} \right\}$  donc pour tout  $x$ ,  $\|u(x)\| \leq M_1 \|x\|$ .

Donc  $M_1 \in \{k \geq 0 \text{ t.q. } \forall x \in E, \|u(x)\| \leq k \|x\|\}$ , donc  $M_3 \leq M_1$ .

Réciproquement, soit  $k \in \{k \geq 0 \text{ t.q. } \forall x \in E, \|u(x)\| \leq k \|x\|\}$ . Donc si  $x \neq 0$ ,  $\frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \leq k$ . Ainsi  $k$  est un majorant de  $\left\{ \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}, x \in E \setminus \{0\} \right\}$ ,

et donc  $M_1 \leq k$ . Par conséquent  $M_1$  est un minorant de  $\{k \geq 0 \text{ t.q. } \forall x \in E, \|u(x)\| \leq k \|x\|\}$ , donc  $M_1 \leq M_3$ .

Finalement  $M_1 = M_2 = M_3$ .