IX – Séries de fonctions

I. Convergence uniforme de $\sum f_n$ et limite de $\|f_n\|_\infty$ (banque CCP MP)

1) On suppose que $\sum f_n$ converge uniformément sur A.
On en déduit que $\sum f_n$ converge simplement sur A.
On pose alors, $\forall\, x \in A$, $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$.
$\sum f_n$ converge uniformément sur A, c'est-à-dire (S_n) converge uniformément vers S sur A, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} ||S_n - S||_\infty = 0$, avec $||S_n - S||_\infty = \sup\limits_{x\in A} |S_n(x) - S(x)|$.
On a $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in A$, $|f_n(x)| = |S_n(x) - S_{n-1}(x)| \leqslant |S_n(x) - S(x)| + |S(x) - S_{n-1}(x)|$.
Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in A$,$|f_n(x)| \leqslant ||S_n - S||_\infty + ||S_{n-1} - S||_\infty$ (majoration indépendante de x).
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} ||S_n - S||_\infty = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (||S_n - S||_\infty + ||S_{n-1} - S||_\infty) = 0$.
Donc (f_n) converge uniformément vers 0 sur A.

2) On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in [0; +\infty[$, $f_n(x) = nx^2 \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.
Soit $x \in [0; +\infty[$.
Si $x = 0$:
$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 0$ donc $\sum f_n(0)$ converge.
Si $x \neq 0$:
$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 f_n(x) = 0$, donc au voisinage de $+\infty$, $f_n(x) = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
Or $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge absolument donc, par critère de domination, $\sum f_n(x)$ converge absolument.
On en déduit que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0; +\infty[$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $[0; +\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$, donc f_n est bornée sur $[0; +\infty[$.
Comme f_0 est bornée ($f_0 = 0$), on en déduit que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, f_n est bornée sur $[0, +\infty[$.
De plus, la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction f définie par : $\forall x \in [0, +\infty[$, $f(x) = 0$.
En effet :
Soit $x \in [0, +\infty[$.
si $x = 0$ alors $f_n(0) = 0$ et si $x \neq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$
si $x \neq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ par croissances comparées.
De plus, f_n est bornée sur $[0, +\infty[$ donc $f_n - f = f_n$ est bornée sur $[0, +\infty[$.
Par ailleurs, on a $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \mathrm{e}^{-1}$.
Or, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) - f\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)| = f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \sup\limits_{t\in[0;+\infty[} |f_n(t) - f(t)|$;
donc $\sup\limits_{t\in[0;+\infty[} |f_n(t) - f(t)| \geqslant \mathrm{e}^{-1}$.
Ainsi, $\sup\limits_{t\in[0;+\infty[} |f_n(t) - f(t)| \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$.
On en déduit que (f_n) ne converge pas uniformément vers $f$sur $[0; +\infty[$.
Donc, d'après 1., $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $[0; +\infty[$.

II. La fonction ζ de Riemann

1) Par comparaison à des séries de Riemann, ζ converge simplement sur $]1,+\infty[$.

2) S'il y avait convergence uniforme en 1, alors $\sum \lim_{x\to 1} \frac{1}{n^x}$ convergerait, ce qui n'est pas le cas.

3) Posons $f_n \ : x \mapsto \frac{1}{n^x}$.
Les fonctions f_n sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{(-\ln n)^k}{n^x}.$$

Sur $[a,b] \subset]1,+\infty[$,

$$\forall\, s \in [a,b],\ \left|f_n^{(k)}(x)\right| \leqslant \frac{(\ln n)^k}{n^a}.$$

Soit $\rho \in]1,a[$, on a

$$n^\rho \times \frac{(\ln n)^k}{n^a} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et il y a donc convergence de la série $\sum \frac{(\ln n)^k}{n^a}$.
Par majoration uniforme, la série de fonctions $\sum u_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a,b]$.
Par convergence uniforme sur tout segment de $]1,+\infty[$, on peut affirmer que ζ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et

$$\zeta^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln n)^p}{n^x}.$$

4) Monotonie :

$$\zeta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\ln n}{n^x} \leqslant 0$$

donc ζ est décroissante.
Convexité :

$$\zeta''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^x} \geqslant 0$$

donc ζ est convexe.

5) Limite en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n^x} = \begin{cases} 0 & \text{si } n>1 \\ 1 & \text{si } n=1 \end{cases}.$$

Pour appliquer le théorème de la double limite, observons la convergence uniforme au voisinage de $+\infty$.
Pour $x \geqslant 2$

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc $\sum u_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[2,+\infty[$. Par le théorème de la double limite

$$\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n^x} = 1+0+0+\cdots = 1.$$

6) La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est décroissante donc

$$\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$$

l'inégalité de gauche étant valvble pour $n \geqslant 1$, celle de droite pour $n \geqslant 2$.
En sommant on en déduit

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$$

i.e.

$$\frac{1}{x-1} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}.$$

Par suite

$$\zeta(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{x-1}.$$

III. Tableau de variation d'une série de fonctions

1) Les fonctions $f_n \ : x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n+x}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ et $f_n'(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$.

Par le CSSA $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ CS sur $]0,+\infty[$ vers S.

$\forall\, a>0$, sur $[a,+\infty[$, $\|f_n'\|_{\infty,[a,+\infty[} \leqslant \dfrac{1}{(n+a)^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+a)^2} < +\infty$ donc $\sum f_n'$ CN sur $[a,+\infty[$ puis CU sur tout segment de $[a,+\infty[$. Par théorème, S est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty\,[$ et $S'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$.

2) On peut appliquer le CSSA à la série de somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$. Celle-ci est donc du signe de son premier terme $\dfrac{-1}{x^2}$. Ainsi $S'(x) \leqslant 0$ et S est décroissante.

3) $S(x+1)+S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = \frac{1}{x}$.

4) Quand $x \to 0$: $S(x) = \dfrac{1}{x} - S(x+1)$ et $S(x+1) \to S(1)$ donc $S(x) \sim \dfrac{1}{x}$.

5) Quand $x \to +\infty$: $\dfrac{1}{2}(S(x)+S(x+1)) \leqslant S(x) \leqslant \dfrac{1}{2}(S(x)+S(x-1))$ et $\dfrac{1}{x} \sim \dfrac{1}{x-1}$ d'où $S(x) \sim \dfrac{1}{2x}$.

IV. Interversion somme/intégrale

Commençons par observer que

$$\begin{aligned}\frac{\sin t}{\mathrm{e}^t - 1} &= \sin t \times \frac{\mathrm{e}^{\,-t}}{1-\mathrm{e}^{\,-t}}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sin t \times \mathrm{e}^{-nt}.\end{aligned}$$

De plus $t \mapsto \sin t \times \mathrm{e}^{-nt}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ par comparaison à une série exponentielle, et

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} |\sin t| \mathrm{e}^{-nt}\ \mathrm{d}t &\leqslant \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-nt}\ \mathrm{d}t\\ &\leqslant \frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

et ce dernier terme est le terme général d'une série convergente, donc $t \mapsto \dfrac{\sin t}{\mathrm{e}^t - 1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
Enfin, nous pouvons utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque, et ainsi

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{e}^t - 1}\ \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin t.\mathrm{e}^{-nt}\ \mathrm{d}t.$$

$$\text{Or} \quad \begin{aligned}\int_0^{+\infty} \sin t.\mathrm{e}^{-nt}\ \mathrm{d}t &= \operatorname{Im} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-n+i)t}\ \mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{n^2+1}.\end{aligned}$$

Finalement

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{e}^t - 1}\ \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

V. Utilisation du théorème de convergence dominée

Commençons par remarquer que $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Par sommation géométrique on peut écrire $\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{2n}$ sur $[0,1[$.

Par suite $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_{[0,1[} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ avec $f_n(t) = (-1)^n t^{2n}$ définie sur $[0,1[$.

Ici $\sum f_n$ ne converge pas en 1 donc on ne peut pas utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, et $\sum \int_{[0,1[} |f_n| = \sum \frac{1}{2n+1}$ diverge et on ne peut pas appliquer le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque non plus. Transitons alors par les sommes partielles.

On pose $S_n(t) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k}$.

On a $S_n \xrightarrow{CS} S$ sur $[0,1[$, avec $S(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

Les fonctions S_n et S sont continues par morceaux, et

$$|S_n(t)| = \frac{\left|1-(-1)^{n+1}t^{2n+2}\right|}{1+t^2} \leqslant \frac{2}{1+t^2} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable.

Par convergence dominée $\int_0^1 S_n(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 S(t)\mathrm{d}t$. Or

$$\begin{aligned}\int_0^1 S_n(t)\mathrm{d}t &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k}\ \mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n}\int_0^1 (-1)^k t^{2k}\ \mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\end{aligned}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$