Devoir à la maison n° 4

À rendre le 2 décembre

Il est utile en physique, notamment pour étudier des spectres d'énergie ou pour décomposer un signal périodique en harmoniques, de pouvoir écrire une fonction périodique en somme d'une série de fonctions trigonométriques.

Nous allons nous intéresser à l'aspect mathématique de cette décomposition pour les fonctions de période 2π.

Dans ce qui suit, on appelle « série trigonométrique » une série de fonctions du type

$$\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

où (a_n) et (b_n) sont deux suites de réels.

On s'intéresse aux séries trigonométriques qui convergent normalement sur $\mathbb{R}$.
On notera $\mathscr{C}_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{N}$, on notera

$$\alpha_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \beta_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x$$

Une condition suffisante

1) Démontrer que si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, alors la série trigonométrique $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Une condition nécessaire

2) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ quelconques. Démontrer que le maximum de la fonction $x \mapsto |a\cos(x) + b\sin(x)|$ est $\sqrt{a^2+b^2}$.

3) Démontrer que si la série trigonométrique $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, alors les suites (a_n) et (b_n) convergent vers 0 et les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes.

Autres propriétés

4) On note f la somme d'une série trigonométrique $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ qui converge normalement sur $\mathbb{R}$. Justifier que $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$.

5) Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\,\mathrm{d}x$ pour $n \neq 0$ et donner la valeur de $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x$ pour k et n entiers.

6) On note f la somme d'une série trigonométrique $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ qui converge normalement sur $\mathbb{R}$: pour tout réel x, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$.

Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $\alpha_n(f) = a_n$ puis exprimer $\alpha_0(f)$ en fonction de a_0.

On pourra utiliser sans démonstration que pour $k \neq n$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0$.

On admettra, pour la suite du problème, que pour tout entier naturel n non nul $\beta_n(f) = b_n$ et $\beta_0(f) = 0$ (la démonstration n'est pas demandée).

7) Soit $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$. Pour tout réel x, on pose $u_0(x) = \dfrac{\alpha_0(f)}{2}$.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $u_n(x) = \alpha_n(f)\cos(nx) + \beta_n(f)\sin(nx)$.
On suppose ici que la série trigonométrique $\sum(u_n(x))$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction notée g :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(\alpha_k(f)\cos(kx) + \beta_k(f)\sin(kx))$$

Quelles relations a-t-on dans ce cas entre $\alpha_n(g)$ et $\alpha_n(f)$? $\beta_n(g)$ et $\beta_n(f)$?

8) Il est admis que si une fonction $h \in \mathscr{C}_{2\pi}$ vérifie : pour tout entier naturel n, $\alpha_n(h) = \beta_n(h) = 0$, alors h est la fonction nulle.
Démontrer que pour tout réel x, $g(x) = f(x)$.

En résumé, lorsque la série trigonométrique $\sum(\alpha_n(f)\cos(nx) + \beta_n(f)\sin(nx))$ d'une fonction $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$ converge normalement que $\mathbb{R}$ alors pour tout réel x, on a

$$f(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_n(f)\cos(nx) + \beta_n(f)\sin(nx))$$

9) Si $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$ est une fonction paire, que vaut $\beta_n(f)$? Exprimer, sans démonstration, $\alpha_n(f)$ en fonction de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x$.

10) Exemple. Soit $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$ définie ainsi : pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = x^2$ et f est 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.
Construire la courbe de cette fonction paire f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$ puis déterminer, pour tout entier naturel, les coefficients $\alpha_n(f)$ et $\beta_n(f)$.
Donner une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f.

11) En déduire les sommes

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

Déduire alors de la seconde somme la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

12) Application. Justifier que la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ est intégrable sur l'intervalle $]0,1[$ puis démontrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}$.
Indication : On pourra utiliser librement que

$$\forall x \in]0,1[,\ \frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}.$$

— **FIN** —