

XX. Fonctions de plusieurs variables

17 décembre 2025

Table des matières

1	Rappels	4	7	Applications géométriques	12
1.1	Topologie et fonctions partielles	4	7.1	Lignes de niveau	12
1.2	Continuité	4	7.2	Courbes dans le plan	13
2	Dérivation	6	7.3	Surfaces dans l'espace	15
2.1	Dérivée suivant un vecteur	6	8	Fonctions de classe \mathcal{C}^2	16
2.2	Dérivées partielles	6	8.1	Dérivées secondes	16
2.3	Opérations	7	8.2	Matrice hessienne	17
3	Fonctions de classe \mathcal{C}^1	7	8.3	Formule de Taylor-Young à l'ordre 2	17
3.1	Définition et opérations	7	9	Extremums	17
3.2	Développement limité d'ordre 1	8	9.1	Définitions	17
4	Différentielle	9	9.2	Extremum et point critique	18
5	Gradient	9	9.3	Extremum et matrice hessienne	19
6	Règle de la chaîne	10	9.4	Cas $p = 2$	19
6.1	Dérivation le long d'un arc de classe \mathcal{C}^1	10	10	Exercices classiques	20
6.2	Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert convexe	11	10.1	Fonctions positivement homogènes	20
6.3	Dérivation d'une composition de fonctions de plusieurs variables	11	10.2	Calcul d'une différentielle	20
			10.3	Des plans tangents	20
			10.4	Une équation aux dérivées partielles	20
			10.5	Une étude de points critiques et d'extremums	20

Programme officiel

C - Fonctions de plusieurs variables

Les dérivées partielles d'une fonction numérique définie sur un ouvert de \mathbb{R}^2 ont été introduites en première année. L'objectif de cette section est d'approfondir et de généraliser cette étude aux fonctions de $p \geq 2$ variables. L'étude d'une fonction de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n se ramenant à celle de ses coordonnées, cette section se consacre à l'étude des fonctions de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R} . Elle est axée sur la mise en place d'outils permettant de traiter des applications du calcul différentiel à l'analyse et la géométrie. On se limite en pratique au cas $p = 2$ ou $p = 3$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Fonctions de classe \mathcal{C}^1	
Dérivée en un point selon un vecteur.	Notation $D_v f(a)$.
Dérivées partielles d'ordre 1 en un point d'une fonction définie sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^p à valeurs dans \mathbb{R} .	Notation $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. On peut aussi utiliser $\partial_i f(a)$.
Une fonction est dite de classe \mathcal{C}^1 sur Ω si ses dérivées partielles d'ordre 1 existent et sont continues sur Ω .	
Opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^1 .	
Une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur Ω admet en tout point a de Ω un développement limité d'ordre 1.	La démonstration n'est pas exigible. Une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur Ω est continue sur Ω .
Différentielle de f en a .	Elle est définie comme la forme linéaire sur \mathbb{R}^p : $df(a) : (h_1, \dots, h_p) \mapsto \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i.$
	Notation $df(a) \cdot h$.
b) Règle de la chaîne	
Dérivée de $t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_p(t))$.	Interprétation géométrique.
Application au calcul des dérivées partielles de : $(u_1, \dots, u_n) \mapsto f(x_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_p(u_1, \dots, u_n))$.	En pratique, on se limite à $n \leq 3$ et $p \leq 3$. Les étudiants doivent connaître le cas particulier des coordonnées polaires.
Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert convexe.	
c) Gradient	
Dans \mathbb{R}^p muni de sa structure euclidienne canonique, gradient d'une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Coordonnées du gradient.	Le gradient est défini par la relation $df(a) \cdot h = \langle \nabla f(a), h \rangle$ pour $h \in \mathbb{R}^p$. Notation $\nabla f(a)$.
d) Applications géométriques	
Courbe du plan définie par une équation $f(x, y) = 0$ où f est de classe \mathcal{C}^1 . Point régulier. Le gradient est normal à la tangente en un point régulier.	Lignes de niveau de f . On admet que la courbe admet un paramétrage local de classe \mathcal{C}^1 . Détermination d'une équation de la tangente en un point régulier. Lorsqu'il est non nul, le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau et orienté dans le sens des valeurs croissantes de f .
Surface définie par une équation $f(x, y, z) = 0$ où f est de classe \mathcal{C}^1 . Point régulier. Le plan tangent en un point régulier est défini comme orthogonal au gradient. Courbe tracée sur une surface.	 Dans le cas d'une courbe régulière, la tangente à la courbe est incluse dans le plan tangent à la surface.

e) Fonctions de classe \mathcal{C}^2

Dérivées partielles d'ordre 2 d'une fonction définie sur un ouvert de \mathbb{R}^p à valeurs dans \mathbb{R} .

Fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un ouvert de \mathbb{R}^p .

Théorème de Schwarz.

Matrice hessienne en un point a d'une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un ouvert de \mathbb{R}^p à valeurs dans \mathbb{R} .

Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 :

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + \nabla f(a)^\top h + \frac{1}{2} h^\top H_f(a) h + o(\|h\|^2).$$

Notations $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

La démonstration est hors programme.

Notation $H_f(a)$.

La démonstration est hors programme.

Expression en termes de produit scalaire.

f) Extremums d'une fonction de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}

Extremum local, global.

Point critique d'une application de classe \mathcal{C}^1 .

Si une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert de \mathbb{R}^p admet un extremum local en un point a , alors a est un point critique.

Si f est une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un ouvert de \mathbb{R}^p et a un point critique de f :

- si $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{p++}(\mathbb{R})$, alors f atteint un minimum local strict en a ;
- si $H_f(a) \notin \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$, alors f n'a pas de minimum en a .

Adaptation à l'étude d'un maximum local.

Explicitation pour $p = 2$ (trace et déterminant).

Exemples de recherche d'extremums globaux sur une partie de \mathbb{R}^p .

Dans tout ce chapitre, p est un entier naturel supérieur ou égal à 2, U est un ouvert de \mathbb{R}^p , $a \in U$ et f est une fonction de U dans \mathbb{R} . On notera $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de \mathbb{R}^p .

1 Rappels

1.1 Topologie et fonctions partielles

Généralisons des résultats vus en dimension 2 :

Proposition 1.1.1.

Soit $(x_1, \dots, x_p) \in U$. Alors, il existe p intervalles ouverts I_1, \dots, I_p tels que

- $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, x_k \in I_k$;
- $I_1 \times \dots \times I_p \subset U$.

Définition 1.1.2 (Fonctions partielles).

Soit $(x_1, \dots, x_p) \in U$. Alors le lemme 1.1.1 assure qu'il existe p intervalles ouverts I_1, \dots, I_p tels que $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, x_k \in \mathcal{I}_k$ et $I_1 \times \dots \times I_p \subset U$.

Si $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket \setminus \{k\}$ on fixe $x_j \in I_j$ et on définit alors la k -ème **fonction partielle** de f comme étant la fonction $f_k : I_k \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x_1, \dots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \dots, x_p)$.

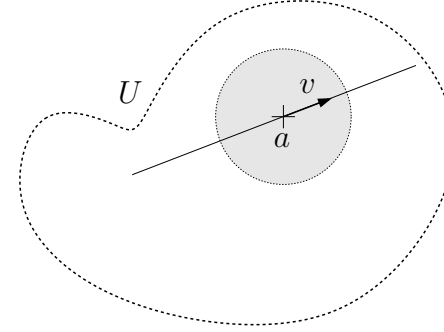
Il est possible de définir une fonction partielle **directionnelle** :

Définition 1.1.3.

Soit $a \in U$ et $v \in \mathbb{R}^p$. Comme U est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que la fonction $f_v : t \mapsto f(a + tv)$ soit bien définie sur $] -\varepsilon, \varepsilon[$. Cette fonction est à valeurs dans \mathbb{R} .

Remarque 1.1.4.

Si f_k est la k -ème fonction partielle de f et $a = (x_1, \dots, x_p)$, alors $f_{e_k}(t) = f_k(x_k + t)$.



Remarque 1.1.5.

Dans le cas où $p = 2$, le graphe de f est une surface de \mathbb{R}^3 . Si (x, y) est un point du plan horizontal, alors $(x, y, f(x, y))$ est un point du graphe de f . Cette surface se trouve donc « au-dessus » de U .

Les graphes des fonctions partielles, directionnelle ou pas, sont des courbes du plan.

Si l'on considère le plan \mathcal{P} engendré par (v, e_3) , d'axe des abscisses orienté par v et d'axe des ordonnées orienté par e_3 , alors le graphe de f_v dans ce plan est l'intersection de \mathcal{P} et du graphe de f dans \mathbb{R}^3 .

1.2 Continuité

Définition 1.2.1.

Soit $a \in U$, la fonction f est **continue en** a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in U, \|x - a\| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

La fonction f est **continue sur** U si elle est continue en tout point a de U .

Proposition 1.2.2 (Opérations).

Soit $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur U .

1. Si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f + \mu g$ est continue sur U .
2. Les fonctions fg , $|f|$, $\min(f, g)$ et $\max(f, g)$ sont continues sur U .

Démonstration.

C'est la même chose que pour les fonctions réelles. \square

Proposition 1.2.3 (composition à gauche).

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur U , soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Alors, $\varphi \circ f$ est continue sur U .

Démonstration.

C'est la même chose que pour les fonctions réelles. \square

Proposition 1.2.4 (composition à droite).

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continues sur U , soit I_1, \dots, I_p p intervalles ouverts de \mathbb{R} , et pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ soit $u_k : I_k \rightarrow \mathbb{R}$ continue, telles que $u_1(I_1) \times \dots \times u_p(I_p) \subset U$.

Alors, $(x_1, \dots, x_p) \mapsto f(u_1(x_1), \dots, u_p(x_p))$ est continue sur $u_1(I_1) \times \dots \times u_p(I_p)$.

Proposition 1.2.5 (composition à droite, bis).

Supposons pour cet énoncé seulement que $p = 2$.

Soit V un ouvert de \mathbb{R}^2 . Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur U , et soit $u, v : V \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $u(V) \times v(V) \subset U$.

Alors, $(x, y) \mapsto f(u(x, y), v(x, y))$ est continue sur V .

Démonstration.

C'est la même chose que pour les fonctions réelles. \square

Remarque 1.2.6.

Cette proposition se généralise aux cas où $p > 2$.

Lemme 1.2.7 (continuité des projections).

Soit $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$. La fonction $\pi_k : (x_1, \dots, x_p) \mapsto x_k$ est continue sur \mathbb{R}^p .

Démonstration.

Il suffit de voir que pour tout $a, b \in \mathbb{R}^p$ et pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$,

$$|\pi_k(a) - \pi_k(b)| = |\pi_k(a - b)| \leq \|a - b\|.$$

\square

Définition 1.2.8 (Fonction polynomiale).

Soit $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$. On dit que f est une **fonction polynomiale** si elle est une combinaison linéaire de produits de puissances des coordonnées des variables.

Exemple 1.2.9.

$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto 3x^2y - 5xyz + z^3$ est une fonction polynomiale.

Proposition 1.2.10.

Toute fonction polynomiale de p variables est continue sur \mathbb{R}^p .

Démonstration.

Il suffit d'utiliser le résultat du lemme 1.2.7, puis la stabilité de l'ensemble des fonctions continues par combinaison linéaire et produit. \square

Exercice 1.2.11. 1. Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$$

Démontrer que les deux limites itérées

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$$

n'existent pas, et que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$$

existe et est égale à 0.

2. Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}.$$

Démontrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$$

et que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ n'existe pas.

2 Dérivation

2.1 Dérivée suivant un vecteur

Définition 2.1.1.

Soit $v \in \mathbb{R}^p$. On dit que f est **dérivable en a selon le vecteur v** si la fonction partielle directionnelle $f_v : t \mapsto f(a + tv)$ est dérivable en 0, i.e.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} \text{ existe et est finie - elle vaut alors } f'_v(0).$$

On note alors $D_v f(a)$ cette limite, et on l'appelle **nombre dérivé, ou dérivée de f en a selon v** .

Exemple 2.1.2.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

D'une part $f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) \rightarrow \frac{1}{2}$ donc f n'est pas continue en $(0, 0)$.

D'autre part, soit $h = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$: $\frac{f(t\alpha, t\beta) - f(0, 0)}{t} =$

$$\frac{t^2 \alpha^2 \beta}{t^4 \alpha^4 + t^2 \beta^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & \text{si } \beta = 0 \\ \alpha^2 / \beta & \text{sinon} \end{cases}$$

f admet donc des dérivées dans toutes les directions en 0, mais n'est pas continue en 0.

2.2 Dérivées partielles

Définition 2.2.1.

Soit $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Nous gardons la notation précédente f_k pour la k -ème fonction partielle de f .

On dit que la fonction f est **dérivable en un point (x_1, \dots, x_p) par rapport à sa k -ème variable** si la fonction partielle $f_k : x \mapsto f(x_1, \dots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \dots, x_p)$ est dérivable en x_k . On note alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_p) &= f'_k(x_k) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_k} \frac{f(x_1, \dots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \dots, x_p) - f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_p)}{x - x_k}. \end{aligned}$$

La fonction f est dite **dérivable par rapport à sa k -ème variable sur U** si elle l'est en tout point de U .

La fonction $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ peut aussi être notée $\partial_k(f)$.

Remarque 2.2.2. 1. $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ n'est rien d'autre que $D_{e_k}(f)$. Dans cette première notation, x_k représente plus la direction du k -ème vecteur de la base canonique qu'une variable.

2. Dans le cas $p = 2$, si $a = (x_0, y_0)$,
 $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t}$.

2.3 Opérations

Théorème 2.3.1.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^p$ et $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions admettant une dérivée en a selon v . Alors

1. $f + \lambda g$ admet une dérivée en a selon v , et $D_v(f + \lambda g)(a) = D_v(f)(a) + \lambda D_v(g)(a)$;
2. $f \times g$ admet une dérivée en a selon v , et $D_v(fg)(a) = g(a)D_v(f)(a) + f(a)D_v(g)(a)$;
3. si $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en $f(a)$, alors $\varphi \circ f$ admet une dérivée en a selon v , et $D_v(\varphi \circ f)(a) = D_v(f)(a) \times \varphi'(f(a))$;
4. Si g ne s'annule pas sur U , la fonction $\frac{1}{g}$ admet une dérivée en a selon v , et $D_v\left(\frac{1}{g}\right)(a) = -\frac{1}{g^2(a)}D_v(g)(a)$;
5. Si g ne s'annule pas sur U , la fonction $\frac{f}{g}$ admet une dérivée en a selon v , et $D_v\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{1}{g^2(a)}(g(a)D_v(f)(a) - f(a)D_v(g)(a))$.

Démonstration.

Dans cette démonstration, nous allons utiliser f_v et g_v , les fonctions partielles directionnelles de f et g selon v .

1. Remarquons que la fonction partielle directionnelle de $f + \lambda g$ selon v est $h(t) = (f + \lambda g)(a + tv) = f(a + tv) + \lambda g(a + tv) = f_v(t) + \lambda g_v(t)$. Comme f_v et g_v sont dérivables en 0, h également et $D_v(f + \lambda g)(a) = h'(0) = f'_v(0) + \lambda g'_v(0) = D_v(f)(a) + \lambda D_v(g)(a)$.
2. Même principe : $(fg)(a + tv) = f_v(t) \times g_v(t)$ donc $D_v(fg)(a) = f'_v(0)g_v(0) + f_v(0)g'_v(0) = g(a)D_v(f)(a) + f(a)D_v(g)(a)$.
3. Toujours pareil : $(\varphi \circ f)(a + tv) = \varphi \circ f_v(t)$ donc $D_v(\varphi \circ f)(a) = (\varphi \circ f_v)'(0) = f'_v(0)\varphi'(f_v(0)) = D_v(f)(a) \times \varphi'(f(a))$.
4. On peut réutiliser le même principe, ou le point précédent avec $\varphi(t) = \frac{1}{t}$.
5. On combine le point précédent et le second.

□

3 Fonctions de classe \mathcal{C}^1

3.1 Définition et opérations

Définition 3.1.1.

La fonction f est dite **de classe \mathcal{C}^1 sur U** si f est dérivable par rapport à ses p variables sur U et si pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ sont continues sur U .

Proposition 3.1.2.

Toute fonction polynomiale de p variables est de classe \mathcal{C}^1 .

Démonstration.

Une fonction polynomiale de deux variables est dérivable par rapport à chacune de ses variables, et ses dérivées partielles sont polynomiales, donc continues. □

Théorème 3.1.3 (Opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^1).

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 en a . Alors

1. $f + \lambda g$ est de classe \mathcal{C}^1 en a ;
2. $f \times g$ est de classe \mathcal{C}^1 en a ;
3. si $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 en $f(a)$, alors $\varphi \circ f$ est de classe \mathcal{C}^1 en a ;
4. Si g ne s'annule pas sur U , alors $\frac{f}{g}$ est de classe \mathcal{C}^1 en a .

Démonstration.

Il suffit d'appliquer 2.3.1 à ces fonctions, puis d'appliquer à leurs dérivées partielles les résultats de la section 1.2 concernant les opérations sur les fonctions continues. □

3.2 Développement limité d'ordre 1

Définition 3.2.1 (notation \mathcal{o}).

Soit $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$, soit $a \in U$.

On dit que f est *négligeable devant g au voisinage de a* s'il existe une fonction $\varepsilon : U \rightarrow \mathbb{R}$ continue en a et vérifiant $\varepsilon(a) = 0$ telle que, pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in U$,

$$f(x_1, \dots, x_p) = g(x_1, \dots, x_p)\varepsilon(x_1, \dots, x_p).$$

On note ceci

$$f(x_1, \dots, x_p) \underset{(x_1, \dots, x_p) \rightarrow a}{=} \mathcal{o}(g(x_1, \dots, x_p)).$$

Théorème 3.2.2 (DL à l'ordre 1).

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur U , soit $a \in U$. Alors pour tout $h = (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p$,

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + \sum_{k=1}^p h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) + \mathcal{o}(\|h\|).$$

Démonstration (non exigible).

Nous ne démontrons ce résultat que dans le cas $p = 2$, les autres cas se traitant de manière similaire.

On note $a = (x_0, y_0)$.

Soit I et J deux intervalles ouverts vérifiant $I \times J \subset U$, et tels que $x_0 \in I$ et $y_0 \in J$. Il existe notamment $\alpha_0 > 0$ tel que, pour tout $h \in U$, si $\|a - h\| \leq \alpha_0$, alors $h \in I \times J$. Notons B la boule ouverte de centre 0 et de rayon α_0 .

On définit $\varepsilon : B \rightarrow \mathbb{R}$ par $\varepsilon(0, 0) = 0$ et si $(h_1, h_2) \neq (0, 0)$:

$$\varepsilon(h_1, h_2) = \frac{1}{\|(h_1, h_2)\|} \left(f(a + (h_1, h_2)) - f(a) - h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) - h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right)$$

Montrons que la fonction ε est continue en $(0, 0)$. Considérons $\eta > 0$.

Pour $h = (h_1, h_2)$ suffisamment petit, on a

$$\begin{aligned} \Delta &= \left| f(a+h) - f(a) - h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) - h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right| \\ &= \left| f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0 + h_2) - h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) \right. \\ &\quad \left. + f(x_0, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) - h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right| \\ &\leq \underbrace{\left| f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0 + h_2) - h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) \right|}_{\Delta_1} \\ &\quad + \underbrace{\left| f(x_0, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) - h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right|}_{\Delta_2} \end{aligned}$$

Comme $f(\cdot, y_0 + h_2)$ est dérivable sur I , par le théorème des accroissements finis, il existe t_1 entre x_0 et $x_0 + h_1$ vérifiant

$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0 + h_2) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(t_1, y_0 + h_2).$$

On a donc

$$\Delta_1 = |h_1| \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t_1, y_0 + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right|.$$

Comme $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $a = (x_0, y_0)$, il existe $\alpha_1 > 0$ tel que pour tout $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$, si $\|(h_1, h_2)\| \leq \alpha_1$, alors

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(t_1, y_0 + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right| \leq \eta,$$

ce qui donne $|\Delta_1| \leq \eta \|(h_1, h_2)\|$.

On procède de même pour Δ_2 , et il existe donc $\alpha_2 > 0$ tel que pour tout $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$, si $\|(h_1, h_2)\| \leq \alpha_2$, alors $|\Delta_2| \leq \eta \|(h_1, h_2)\|$.

Ainsi, pour tout $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$, si $\|(h_1, h_2)\| \leq \min(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$, alors $|\varepsilon(h_1, h_2)| \leq 2\eta$, ce qui est bien le résultat demandé. \square

Corollaire 3.2.3.

Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 , alors f est continue.

4 Différentielle

Définition 4.0.1 (Différentielle).

Si f est de classe \mathcal{C}^1 sur U , pour tout $a \in U$, on note

$$\begin{aligned} df(a) : \mathbb{R}^p &\rightarrow \mathbb{R} \\ h = (h_1, \dots, h_p) &\mapsto \sum_{k=1}^p h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \end{aligned} .$$

Cette fonction $df(a)$ est une forme linéaire sur \mathbb{R}^p nommée **différentielle de f en a** .

On note $df(a).h = \sum_{k=1}^p h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ (plutôt que $df(a)(h)$).

Remarque 4.0.2.

Avec cette notation, le développement limité de f en a s'écrit donc

$$f(a+h) = f(a) + df(a).h + o(\|h\|).$$

Proposition 4.0.3.

Si f est de classe \mathcal{C}^1 sur U , alors pour tout $a \in U$ et pour tout vecteur v non nul de \mathbb{R}^p , f admet une dérivée en a selon v et

$$D_v f(a) = df(a).v$$

Démonstration.

En effet, $f(a+tv) = f(a) + df(a).(tv) + o(\|tv\|) = f(a) + t df(a).v + o(t)$ donc

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = df(a).v.$$

Ou encore : $f_v(t) = f(a+tv) = f(a) + df(a).(tv) + o(\|tv\|) = f(a) + t df(a).v + o(t)$ donc $D_v(f)(a)$ existe car f_v est dérivable en 0, et $D_v(f)(a) = f'_v(0) = df(a).v$. \square

Exemple 4.0.4.

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M^2$.

Justifions que f est \mathcal{C}^1 et déterminons la différentielle de f en tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

L'application $M \mapsto M^2$ est \mathcal{C}^1 car polynomiale. Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$f(M+H) - f(M) = MH + HM + H^2 = \varphi(H) + o(\|H\|) \text{ avec}$$

$$\varphi : H \mapsto MH + HM \text{ linéaire. Par suite } df(M) : H \mapsto MH + HM.$$

Remarque 4.0.5.

La réciproque est fautive : une fonction peut admettre une dérivée en un point selon n'importe quel vecteur sans être même continue en ce point, comme le montre l'exemple 2.1.2.

Les opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^1 se réécrivent grâce à la notion de différentielle :

Théorème 4.0.6.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 en a . Alors

1. $f + \lambda g$ est de classe \mathcal{C}^1 en a et $d(f + \lambda g)(a) = df(a) + \lambda dg(a)$;
2. $f \times g$ est de classe \mathcal{C}^1 en a et $d(fg)(a) = g(a) df(a) + f(a) dg(a)$;
3. si $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 en $f(a)$, alors $\varphi \circ f$ est de classe \mathcal{C}^1 en a et $d(\varphi \circ f)(a) = \varphi'(f(a)) \times df(a)$;
4. Si g ne s'annule pas sur U , alors $\frac{f}{g}$ est de classe \mathcal{C}^1 en a et $d\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{g(a) df(a) - f(a) dg(a)}{g^2(a)}$.

5 Gradient

Munissons \mathbb{R}^p de son produit scalaire canonique noté $\langle ., . \rangle$.

Définition 5.0.1 (Gradient).

Si f est de classe \mathcal{C}^1 sur U , l'application $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, $h \mapsto df(a).h$ est une forme linéaire.

Par application du théorème de représentation, il existe un unique vecteur nommé **gradient de f en a** et noté $\nabla f(a)$ tel que

$$\forall h \in \mathbb{R}^p, df(a).h = \langle \nabla f(a), h \rangle.$$

Proposition 5.0.2 (Coordonnées du gradient).

Si f est de classe \mathcal{C}^1 sur U , $\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \right)$.

Démonstration.

Il suffit de rappeler que pour tout $h = (h_1, \dots, h_p)$, $df(a).h = \sum_{k=1}^p h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$. \square

6 Règle de la chaîne

6.1 Dérivation le long d'un arc de classe \mathcal{C}^1

Théorème 6.1.1 (Règle de la chaîne).

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 , soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et x_1, \dots, x_p des fonctions de classe \mathcal{C}^1 de I dans \mathbb{R} telles que pour tout $t \in I$, $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_p(t)) \in U$.

Alors la fonction $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto f(\gamma(t))$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned} g'(t) &= \sum_{k=1}^p x'_k(t) \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1(t), \dots, x_p(t)) \\ &= \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \\ &= df(\gamma(t)).\gamma'(t). \end{aligned}$$

Démonstration.

Pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, x_k admet un DL d'ordre 1 en tout $t \in I$, pour h au voisinage de 0 : $x_k(t+h) = x_k(t) + hx'_k(t) + h\varepsilon_k(h)$ où $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_k(h) = 0$.

En notant v le vecteur de coordonnées $(h(x'_1(t) + \varepsilon_1(h)), \dots, h(x'_p(t) + \varepsilon_p(h)))$ et $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_p(t))$, nous avons donc

$$\begin{aligned} g(t+h) &= f(x_1(t) + h(x'_1(t) + \varepsilon_1(h)), \dots, x_p(t) + h(x'_p(t) + \varepsilon_p(h))) \\ &= f(\gamma(t) + v) \\ &= f(\gamma(t)) + h \sum_{k=1}^p (x'_k(t) + \varepsilon_k(h)) \frac{\partial f}{\partial x_k}(\gamma(t)) + o(\|v\|) \\ &= f(\gamma(t)) + h \sum_{k=1}^p x'_k(t) \frac{\partial f}{\partial x_k}(\gamma(t)) + h \sum_{k=1}^p \varepsilon_k(h) \frac{\partial f}{\partial x_k}(\gamma(t)) + o(\|v\|) \\ &= f(\gamma(t)) + h \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle + h \sum_{k=1}^p \varepsilon_k(h) \frac{\partial f}{\partial x_k}(\gamma(t)) + o(\|v\|) \end{aligned}$$

Or $\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^p \varepsilon_k(h) \frac{\partial f}{\partial x_k}(\gamma(t)) = 0$ donc $h \sum_{k=1}^p \varepsilon_k(h) \frac{\partial f}{\partial x_k}(\gamma(t)) = o(h)$.

De plus $\|v\| = |h| \cdot \|(x'_1(t) + \varepsilon_1(h), \dots, x'_p(t) + \varepsilon_p(h))\| = \mathcal{O}(h)$ car les ε_k et les x'_k sont bornées au voisinage de 0 : les premières sont de limite nulle en 0, et les secondes sont des fonctions continues au voisinage de 0 donc ont également une limite finie en 0. Ainsi $o(\|v\|) = o(h)$ et finalement

$$g(t+h) = f(\gamma(t)) + h \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle + o(h)$$

donc g est dérivable en 0 et $g'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = df(\gamma(t)).\gamma'(t)$. \square

Exemple 6.1.2.

Soit $f : \mathbb{R}^t \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto xy + e^{yz}$ et $x_1, x_2, x_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x_1(t) = 2t$, $x_2(t) = e^t$ et $x_3(t) = -t^2$.

Alors avec les notations de l'énoncé, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g'(t) &= x'_1(t) \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)) + x'_2(t) \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t)) + x'_3(t) \frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t)) \\ &= 2x_2(t) + e^t \left(x_1(t) + x_3(t)e^{x_2(t)x_3(t)} \right) - 2tx_2(t)e^{x_2(t)x_3(t)} \\ &= 2e^t + 2te^t - t^2e^{-t^2e^t+t} - 2te^{-t^2e^t+t}. \end{aligned}$$

6.2 Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert convexe

Proposition 6.2.1.

On suppose ici que U est **convexe**, et que f est une fonction de classe \mathcal{C}^1 définie sur U et à valeurs dans \mathbb{R} .

Alors f est constante sur U si et seulement si sa différentielle est nulle sur U .

Démonstration.

(\Rightarrow) immédiat.

(\Leftarrow) Supposons que pour tout $x \in U$, $df(x) = 0$.

Soit $a, b \in U$. Par convexité de U , pour tout $t \in [0, 1]$, $ta + (1-t)b \in U$. Nous pouvons alors considérer la fonction $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto f(ta + (1-t)b)$.

La règle de la chaîne assure alors que φ est de classe \mathcal{C}^1 et que pour tout $t \in [0, 1]$, $\varphi'(t) = df(ta + (1-t)b) \cdot [a - b]$, qui est donc nulle puisque $df = 0$. La fonction φ est donc constante sur l'intervalle I . En particulier $\varphi(0) = \varphi(1)$, ce qui assure que $f(a) = f(b)$, et donc f est constante. \square

6.3 Dérivation d'une composition de fonctions de plusieurs variables

Théorème 6.3.1.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, V un ouvert de \mathbb{R}^n , et $g : V \rightarrow U$, dont on notera (u_1, \dots, u_p) les fonctions coordonnées. Ainsi pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $u_k : V \rightarrow \mathbb{R}$ et pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in V$, $g(x_1, \dots, x_n) = (u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_p(x_1, \dots, x_n))$.

Par abus, on notera (u_1, \dots, u_p) les coordonnées dans \mathbb{R}^p , ce qui rend la formule plus facilement mémorisable.

Posons $\varphi = f \circ g : V \rightarrow \mathbb{R}$.

Si f et g sont de classe \mathcal{C}^1 , alors φ aussi, et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $b \in V$,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(b) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial u_j}{\partial x_k}(b) \cdot \frac{\partial f}{\partial u_j}(g(b)).$$

Remarque 6.3.2.

Sans donner de noms aux coordonnées de \mathbb{R}^p et \mathbb{R}^p et en notant ∂_i la dérivée d'une fonction selon la i -ème coordonnée, la formule s'écrit :

$$\partial_k \varphi(b) = \sum_{j=1}^p \partial_j f(g(b)) \cdot \partial_k u_j(b).$$

Démonstration.

Fixons $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, et pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, notons v_j la k -ème fonction partielle de u_j , c'est-à-dire $v_j : t \mapsto u_j(x_1, \dots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \dots, x_n)$.

Notons $\varphi_k : t \mapsto \varphi(x_1, \dots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \dots, x_n) = f(v_1(t), \dots, v_p(t))$.

Il s'agit alors d'appliquer la règle de la chaîne à φ_k :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(b) = \varphi'_k(b) = \sum_{j=1}^p v'_j(b) \cdot \frac{\partial f}{\partial u_j}(g(b)) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial u_j}{\partial x_k}(b) \cdot \frac{\partial f}{\partial u_j}(g(b)).$$

\square

Exemple 6.3.3 (Gradient en coordonnées polaires).

Soit f définie sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_-$. Tout point de U admet un unique couple de coordonnées polaires de la forme (r, θ) où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$. Et même plus, $p : \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[\rightarrow U$, $(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$ est une bijection. On notera x et y ses fonctions coordonnées.

On considère alors la fonction $g : \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$, $(r, \theta) \mapsto f(r \cos \theta, r \sin \theta) = f(x(r, \theta), y(r, \theta))$.

Nous poserons également les vecteurs $\vec{u}_\theta = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$ et $\vec{v}_\theta = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$. On observe que $(\vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$ est une b.o.n.d.

Alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) &= \frac{\partial x}{\partial r}(r, \theta) \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \frac{\partial y}{\partial r}(r, \theta) \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ &= \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) &= \frac{\partial x}{\partial \theta}(r, \theta) \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \frac{\partial y}{\partial \theta}(r, \theta) \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ &= -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta). \end{aligned}$$

Ainsi, si $r \neq 0$, on obtient par opérations de Gauss

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) &= \frac{1}{r} \left(r \cos \theta \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) - \sin \theta \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) \right) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) &= \frac{1}{r} \left(r \sin \theta \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) + \cos \theta \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) \right)\end{aligned}$$

d'où l'on déduit que

$$\begin{aligned}\nabla f(r \cos \theta, r \sin \theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \vec{j} \\ &= \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) \vec{v}_\theta.\end{aligned}$$

Exemple 6.3.4.

Soit $\mathcal{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$. Résolvons l'équation aux dérivées partielles (EDP)

$$\forall (x, y) \in \mathcal{U}, \quad x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\mathcal{E}),$$

d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$.

Soit $\mathcal{V} = \mathbb{R}_+^* \times]-\pi/2, \pi/2[$ et $p : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}, (r, \theta) \mapsto (x = r \cos \theta, y = r \sin \theta)$.

L'application p est de classe \mathcal{C}^1 , bijective de \mathcal{V} dans \mathcal{U} .

Ainsi, si $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}f \text{ est solution de } (\mathcal{E}) &\Leftrightarrow \forall (x, y) \in \mathcal{U}, \quad x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \\ &\Leftrightarrow \forall (r, \theta) \in \mathcal{V}, \quad r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ &\quad + r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) = r.\end{aligned}$$

Mais nous avons montré précédemment que, si $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$, alors $\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta)$.

Donc

$$\begin{aligned}f \text{ est solution de } (\mathcal{E}) &\Leftrightarrow \forall (r, \theta) \in \mathcal{V}, \quad \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = 1 \\ &\Leftrightarrow \exists \varphi \in \mathcal{C}^1(]-\pi/2, \pi/2[, \mathbb{R}), \quad \forall (r, \theta) \in \mathcal{V}, \\ &\quad g(r, \theta) = r + \varphi(\theta) \\ &\Leftrightarrow \exists \varphi \in \mathcal{C}^1(]-\pi/2, \pi/2[, \mathbb{R}), \quad \forall (x, y) \in \mathcal{U}, \\ &\quad f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \varphi(\arctan(y/x)) \\ &\Leftrightarrow \exists \psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), \quad \forall (x, y) \in \mathcal{U}, \\ &\quad f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \psi(y/x).\end{aligned}$$

7 Applications géométriques

7.1 Lignes de niveau

Définition 7.1.1 (Ligne de niveau).

Si $z \in \mathbb{R}$, on appelle **ligne de niveau de f d'altitude z** la partie

$$\{a \in \mathbb{R}^2 \mid f(a) = z\}.$$

Remarque 7.1.2.

La ligne de niveau d'altitude z est donc $f^{-1}(\{z\})$.

Exemple 7.1.3.

On a tracé dans la figure 7.1 les lignes de niveau correspondant à la fonction $f : (x, y) \mapsto (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$.

Exemple 7.1.4.

Vous trouverez dans la figure 7.2 un exemple de carte IGN, faisant figurer les lignes de niveau du terrain. Avec un peu d'habitude, on arrive très bien à se représenter le terrain !

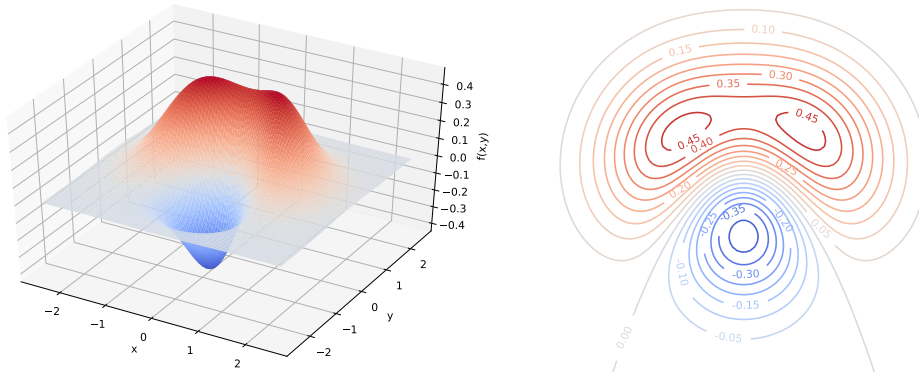


FIGURE 7.1 – Représentation et lignes de niveau de $f : (x, y) \mapsto (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$.

Proposition 7.1.5.

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $\gamma : I \rightarrow U$ un arc de classe \mathcal{C}^1 tel que $\gamma(I)$ est inclus dans une ligne de niveau de f .

Alors, pour tout $t \in I$, $\nabla f(\gamma(t))$ est orthogonal à $\gamma'(t)$.

Démonstration.

Nous écrivons $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, et nous supposons qu'il existe $z \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in I$, $f(x(t), y(t)) = z$.

La règle de la chaîne assure alors que $x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) = 0$, i.e. $\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0$. \square

Remarque 7.1.6.

La propriété précédente est souvent résumée sous la locution « le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau de f ». En effet, $\gamma'(t)$ dirige la droite tangente à l'arc γ au point $\gamma(t)$ (voir figure 7.3).

Remarque 7.1.7.

Puisque $D_v f(a) = \langle \nabla f(a), v \rangle$, le théorème de Cauchy-Schwarz assure que cette dérivée est maximale quand v et $\nabla f(a)$ sont colinéaires de même sens : on dit que le gradient indique la direction de plus grande pente, et

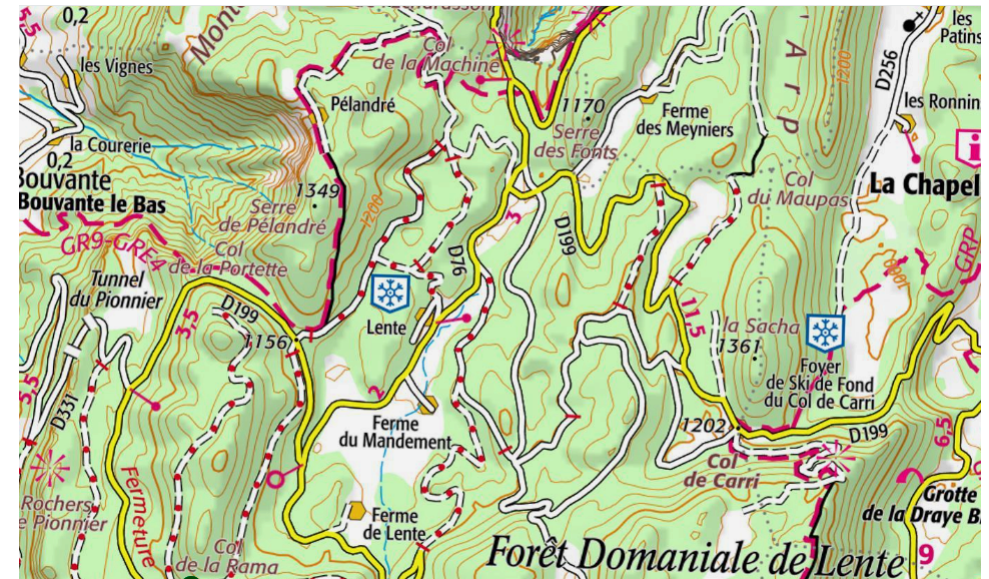


FIGURE 7.2 – Exemple de carte IGN.

qu'il est orienté dans le sens des valeurs croissantes de f .

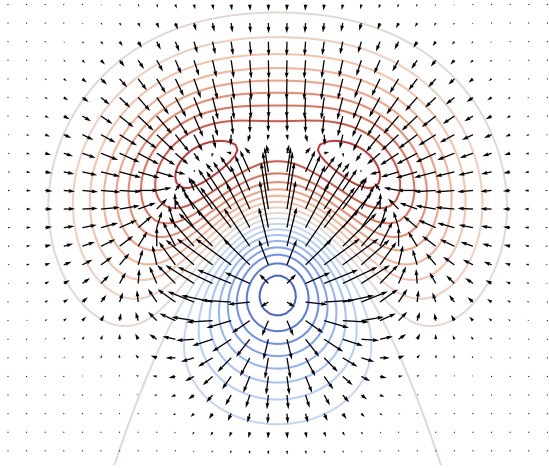
7.2 Courbes dans le plan

Définition 7.2.1 (Courbe plane).

On appelle *courbe plane définie par une équation cartésienne* tout ensemble de points du plan vérifiant une équation de la forme $f(x, y) = 0$ où f est une application de classe \mathcal{C}^1 définie sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 et à valeurs dans \mathbb{R} .

Remarque 7.2.2.

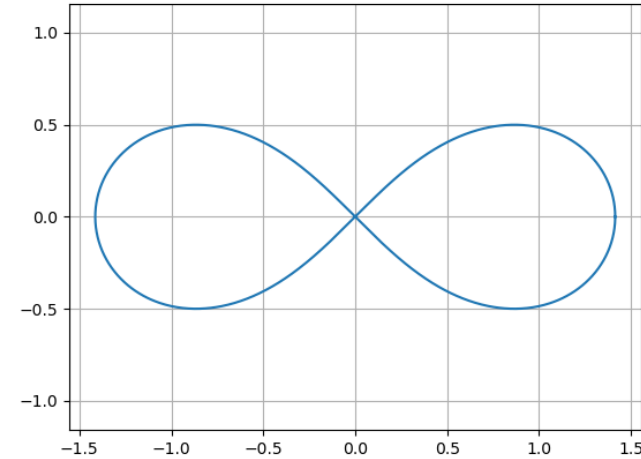
Sans hypothèse supplémentaire, une telle courbe \mathcal{C} n'est pas une courbe au sens usuel. Par exemple si f est la fonction nulle, \mathcal{C} n'est pas une

FIGURE 7.3 – Champ de vecteurs de ∇f , et lignes de niveau de f .

courbe mais le plan tout entier.

Une courbe est donc une ligne de niveau 0.

- Exemple 7.2.3.** 1. La droite du plan de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et passant par $(1, 2)$ est une courbe plane d'équation cartésienne $f(x, y) = 0$ avec $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$;
 $(x, y) \mapsto x + 3y - 7$
2. Le cercle trigonométrique usuel est une courbe plane d'équation cartésienne $f(x, y) = 0$ avec $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$;
 $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$
3. La **lemniscate de Bernoulli** représentée figure 7.4 est une courbe plane d'équation cartésienne $f(x, y) = 0$ avec $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$;
 $(x, y) \mapsto (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$.

FIGURE 7.4 – Lemniscate de Bernoulli de paramètre $d = 1$

Définition 7.2.4 (Point régulier, point critique).

Si f est de classe \mathcal{C}^1 , soit \mathcal{C} la courbe d'équation $f(x, y) = 0$.

1. Un point $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$ est dit **régulier** si $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$;
2. Il est dit **critique** si $\nabla f(x_0, y_0) = 0$, i.e. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$;
3. La courbe \mathcal{C} est dite **régulière** si tous ses points sont réguliers.

Théorème 7.2.5 (Tangente en un point régulier).

Avec les notations précédentes, si (x_0, y_0) est un point régulier de \mathcal{C} , alors \mathcal{C} admet une tangente en ce point, de vecteur normal $\nabla f(x_0, y_0)$ et

d'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Démonstration.

Pour démontrer ce résultat, nous avons besoin d'en admettre un autre : qu'il existe un paramétrage local régulier de \mathcal{C} . Cela signifie que l'on admet qu'il existe une fonction $\gamma :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe \mathcal{C}^1 telle que $\gamma(0) = (x_0, y_0)$, pour tout $t \in]-1, 1[$, $\gamma(t) \in \mathcal{C}$, $\gamma'(t) \neq 0$, et dans un voisinage de (x_0, y_0) , pour chaque point de $(x, y) \in \mathcal{C}$ il existe $t \in]-1, 1[$ tel que $(x, y) = \gamma(t)$.

Nous savons déjà, d'après la partie sur les courbes paramétrées du chapitre sur la dérivabilité des fonctions vectorielles, que f admet une tangente en $\gamma(t)$ car $\gamma'(t) \neq 0$, et que $\gamma'(t)$ est un vecteur directeur de cette tangente.

Grâce à la proposition 7.1.5, $\nabla f(\gamma(t))$ est orthogonal à $\gamma'(t)$, qui dirige justement la tangente à f en $\gamma(t)$.

L'équation de la tangente en découle. \square

Exercice 7.2.6.

Former l'équation de la tangente à l'hyperbole d'équation $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ au point de coordonnées $(\sqrt{3}, 2)$.

7.3 Surfaces dans l'espace

Définition 7.3.1 (Surface dans l'espace).

On appelle *surface définie par une équation cartésienne* tout ensemble de points de \mathbb{R}^3 vérifiant une équation de la forme $f(x, y, z) = 0$ où f est une application de classe \mathcal{C}^1 définie sur un ouvert U de \mathbb{R}^3 et à valeurs dans \mathbb{R} .

Remarque 7.3.2.

Sans hypothèse supplémentaire, une telle surface \mathcal{C} n'est pas une surface au sens usuel. Par exemple si f est la fonction nulle, \mathcal{C} n'est pas une courbe mais l'espace tout entier.

Exemple 7.3.3. 1. La sphère de centre 0 et de rayon 1 est une surface d'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$ avec $f :$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 1 \end{aligned} ;$$

2. L'*hyperboloïde à une nappe* représenté figure 7.5 est une surface d'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$ avec $f :$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x^2 + y^2 - z^2 - 1 \end{aligned} .$$

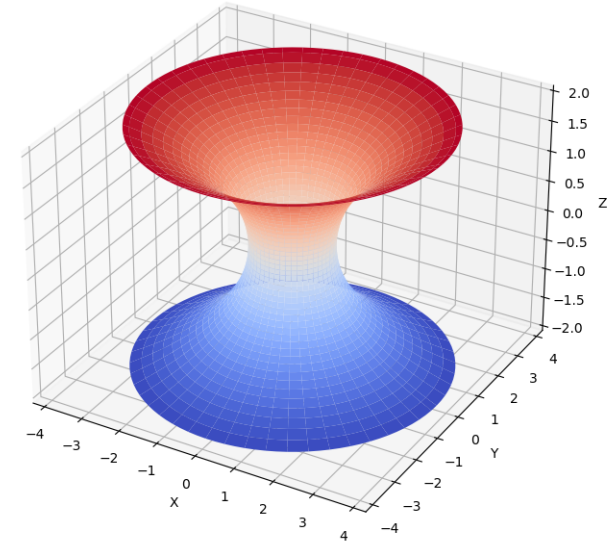


FIGURE 7.5 – Hyperboloïde à une nappe

Définition 7.3.4 (Point régulier, point critique).

Si f est de classe \mathcal{C}^1 , soit \mathcal{S} la surface d'équation $f(x, y, z) = 0$.

1. Un point $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S}$ est dit **régulier** si $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$;
2. Il est dit **critique** si $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = 0$, i.e. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$;
3. La surface \mathcal{S} est dite **régulière** si tous ses points sont réguliers.

Théorème 7.3.5 (Plan tangents en un point régulier).

Avec les notations précédentes, si (x_0, y_0, z_0) est un point régulier de \mathcal{S} , alors \mathcal{S} admet un plan tangent en ce point, de vecteur normal $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ et d'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Exercice 7.3.6.

Déterminer une équation du plan tangent à l'ellipsoïde d'équation $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ au point de coordonnées $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, 0\right)$.

Définition 7.3.7 (Courbe tracée sur une surface).

On appelle **courbe tracée sur la surface \mathcal{S} d'équation $f(x, y, z) = 0$** tout arc paramétré (I, γ) où I est un intervalle de \mathbb{R} et où $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une application de classe \mathcal{C}^1 à valeurs dans U telle que $\forall t \in I, f(\gamma(t)) = 0$, c'est-à-dire que pour tout t le point $\gamma(t)$ appartient à \mathcal{S} .

Proposition 7.3.8.

La tangente en un point régulier M_0 d'une courbe tracée sur une surface \mathcal{S} est incluse dans le plan tangent à \mathcal{S} en M_0 .

Démonstration.

Soit γ un paramétrage d'une courbe \mathcal{C} tracée sur la surface \mathcal{S} d'équation $f(x, y, z) = 0$. En dérivant la relation $f(\gamma(t)) = 0$ à l'aide de la règle de la chaîne on obtient $\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0$ donc en tout point régulier (de la courbe et de la surface), la tangente à la courbe est orthogonale au gradient. Or le plan tangent à \mathcal{S} en M_0 est exactement le plan normal $\nabla f(M_0)$ et passant par M_0 . Il contient donc la tangente à \mathcal{C} en M_0 . \square

8 Fonctions de classe \mathcal{C}^2

8.1 Dérivées secondes

Définition 8.1.1 (Dérivées partielles d'ordre 2).

Soit $k, j \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

Si f admet une k -ème dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_k}$, qui elle-même admet une j -ème dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)$, cette dernière est notée $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$, et nommée **dérivée partielle d'ordre 2** ou **dérivée partielle seconde** de f par rapport aux variables x_j, x_k .

La dérivée partielle d'ordre 2 $\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)$ est notée $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$.

Définition 8.1.2.

On dit que f est **de classe \mathcal{C}^2 sur U** si toutes ses dérivées partielles secondes existent et sont continues.

Théorème 8.1.3 (Théorème de Schwarz).

Si f est de classe \mathcal{C}^2 , pour tout $j, k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$.

Démonstration.

Elle est hors-programme. \square

Remarque 8.1.4.

Montrer qu'il existe j, k tels que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$ est une méthode pour montrer que f n'est pas de classe \mathcal{C}^2 .

Exercice 8.1.5.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } x = y = 0 \end{cases}$.

Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 mais qu'elle n'est pas de classe \mathcal{C}^2 en $(0, 0)$.

8.2 Matrice hessienne

Définition 8.2.1 (Matrice hessienne).

Si f est de classe \mathcal{C}^2 , on définit sa **matrice hessienne en a** comme étant la matrice $H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} (a)$.

Remarque 8.2.2.

En vertu du théorème de Schwarz, $H_f(a) \in \mathcal{S}_p(\mathbb{R})$.

Exemple 8.2.3.

Si $p = 2$, $H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$.

8.3 Formule de Taylor-Young à l'ordre 2

Proposition 8.3.1.

Si f est de classe \mathcal{C}^2 , nous avons pour h au voisinage de 0

$$f(a + h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(a).h, h \rangle + o(\|h\|^2),$$

que l'on peut également écrire, en confondant comme d'habitude éléments de \mathbb{R}^n et éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$f(a + h) = f(a) + \nabla f(a)^\top h + \frac{1}{2} h^\top H_f(a) h + o(\|h\|^2).$$

Démonstration.

Elle est hors-programme. \square

Exercice 8.3.2.

Calculer le développement limité à l'ordre 2 de $f(x, y) = x^2 + y^2 + e^{xy}$ en $(0, 1)$

9 Extremums

9.1 Définitions

Définition 9.1.1 (Extremum global).

Soit $a \in U$.

1. On dit que a est le lieu d'un **maximum global** de f si $\forall u \in U$, $f(u) \leq f(a)$.
2. On dit que a est le lieu d'un **minimum global** de f si $\forall u \in U$, $f(u) \geq f(a)$.
3. On dit que a est le lieu d'un **extremum global** de f si c'est le lieu d'un minimum ou d'un maximum global de f .

Remarque 9.1.2.

On dit aussi que f admet un maximum global en a (*idem* pour minimum et extremum).

Définition 9.1.3 (Extremum local).

Soit $a \in U$.

1. On dit que a est le lieu d'un **maximum local** de f s'il existe $r > 0$ tel que

$$\forall u \in U, \|a - u\| \leq r \Rightarrow f(u) \leq f(a).$$

2. On dit que a est le lieu d'un **minimum local** de f s'il existe $r > 0$ tel que

$$\forall u \in U, \|a - u\| \leq r \Rightarrow f(u) \geq f(a).$$

3. On dit que a est le lieu d'un **extremum local** de f si c'est le lieu d'un minimum ou d'un maximum local de f .

Remarque 9.1.4.

On dit aussi que f admet un maximum local en a (*idem* pour minimum et extremum).

Remarque 9.1.5.

Tout extremum global est aussi un extremum local, la réciproque étant bien évidemment fausse.

Définition 9.1.6 (Extremum strict).

Soit a un point intérieur à U .

Un minimum ou maximum local en a est dit **strict** si dans un voisinage de a sa valeur n'est atteinte qu'en a .

9.2 Extremum et point critique**Théorème 9.2.1** (Condition du premier ordre).

Si f admet un extremum local en a , alors a est un point critique de f .

Démonstration.

Notons $a = (x_0, y_0)$. Les deux fonctions partielles de f en a admettent chacune un extremum local en x_0 pour la première, et en y_0 pour la seconde, intérieur à leur ensemble de définition. Elles y admettent donc chacune un point critique, donc les dérivées partielles de f sont nulles en a , d'où le résultat. \square

Remarque 9.2.2.

Il est ici primordial que U soit un ouvert.

Ce théorème ne donne qu'une condition *nécessaire* pour qu'un point soit un extremum local (et *a fortiori* global) d'une fonction.

Cette condition n'est pas suffisante, comme on le peut le voir sur la figure 9.1.

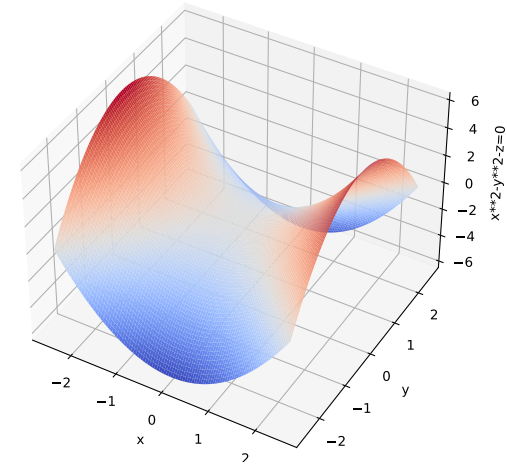


FIGURE 9.1 – Représentation d'un point selle.

9.3 Extremum et matrice hessienne

Théorème 9.3.1 (Hessienne et minimum).

On suppose que f est de classe \mathcal{C}^2 et que a est un point critique de f .

1. Si $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$, alors f atteint un minimum local strict en a ;
2. Si $H_f(a) \notin \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$, alors f n'admet pas de minimum local en a .

Démonstration.

Notons $Q_a(h) = h^\top H_f(a)h$, ainsi appelée car il s'agit d'une **forme quadratique** (terminologie hors-programme).

Nous avons alors, pour h au voisinage de $0_{\mathbb{R}^p}$,

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2}Q_a(h) + o(\|h\|^2).$$

1. Si $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$, alors l'application $(x, y) \mapsto x^\top H_f(a)y$ est un produit scalaire sur \mathbb{R}^p . Ainsi Q_a est toujours positive et la norme euclidienne associée à ce produit scalaire est $\sqrt{Q_a}$.

De plus l'équivalence des normes (nous sommes bien en dimension finie) permet d'affirmer

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2}Q_a(h) + \underset{h \rightarrow 0}{o}(Q_a(h))$$

D'où l'équivalent, au voisinage de $h = 0_{\mathbb{R}^p}$:

$$f(a+h) - f(a) \sim \frac{1}{2}Q_a(h)$$

Deux termes équivalents ont strictement même signe au voisinage du point considéré, on peut donc affirmer que f atteint un minimum local strict en a .

2. Si $H_f(a) \notin \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$, alors $H_f(a)$ a une valeur propre $\lambda < 0$. Soit $u \in \mathbb{R}^p$ non nul tel que $H_f(a)u = \lambda u$.

Appliquons la formule de Taylor-Young à $h = tu$, faire tendre h vers $0_{\mathbb{R}^p}$ revient à faire tendre t vers 0 :

$$\begin{aligned} f(a+tu) &= f(a) + \frac{1}{2}(tu)^\top H_f(a)(tu) + o(\|h\|^2) \\ &= f(a) + \lambda \frac{t^2}{2} \|u\|^2 + o(\|h\|^2) \end{aligned}$$

donc $f(a+tu) - f(a) \sim \lambda \frac{t^2}{2} \|u\|^2 < 0$, et on conclut que f n'atteint pas un minimum local en a .

□

Le théorème s'adapte bien sûr de la manière suivante pour un maximum :

Théorème 9.3.2 (Hessienne et maximum).

On suppose que f est de classe \mathcal{C}^2 et que a est un point critique de f .

1. Si $-H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$, alors f atteint un maximum local strict en a ;
2. Si $-H_f(a) \notin \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$, alors f n'admet pas de maximum local en a .

Remarque 9.3.3.

Si f atteint un minimum local en a , alors a est un point critique de f et $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$.

9.4 Cas $p = 2$

On suppose dans cette section que $p = 2$.

Théorème 9.4.1.

Si f est de classe \mathcal{C}^2 et a est un point critique de f , alors

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} \quad \text{où } r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a), \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a).$$

Alors $\det H_f(a) = rt - s^2$ et $\text{tr } H_f(a) = r + t$.

1. Si $rt - s^2 > 0$, alors soit f atteint un minimum strict en a (et dans ce cas $r + t > 0$), soit f atteint un maximum strict en a (et dans ce cas $r + t < 0$).
2. Si $rt - s^2 < 0$, f ne présente pas d'extremum en a , il s'agit d'un **point col** ou **selle**, comme représenté figure 9.1.
3. Si $rt - s^2 = 0$, on ne peut rien dire, tout peut arriver.

Démonstration.

Dans tous les cas, $H_f(a) \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, donc elle est diagonalisable à valeurs propres réelles. Notons λ_1 et λ_2 ces deux valeurs propres. Alors $\lambda_1 \lambda_2 = \det H_f(a) = rt - s^2$ et $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr } H_f(a) = r + t$.

1. Si $rt - s^2 > 0$, alors λ_1 et λ_2 sont non nulles et de même signe, donc $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$ ou $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$. Dans le premier cas $H_f(a) \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$, dans le second $-H_f(a) \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$. On conclut avec les théorèmes **9.3.1** et **9.3.2**.
2. Si $rt - s^2 < 0$, alors λ_1 et λ_2 sont non nulles de signe opposé, donc $H_f(a) \notin \mathcal{S}_2^+(\mathbb{R})$ et $-H_f(a) \notin \mathcal{S}_2^+(\mathbb{R})$. On conclut à nouveau avec **9.3.1** et **9.3.2**.
3. Se reporter à l'exemple qui suit.

□

Exemple 9.4.2.

Dans le cas où $rt - s^2 = 0$, tout peut arriver :

1. Soit $f : (x, y) \mapsto x^4 + y^4$. Alors évidemment f atteint un minimum strict en 0, car $f(0, 0) = 0$ et si $(x, y) \neq 0$, $f(x, y) > 0$.
De plus $\nabla f(0) = 0$ et $H_f(0) = 0$.
Mais $-f$ atteint un maximum strict en 0, et elle a le même gradient et la même hessienne en 0 que f .
2. Soit $g : (x, y) \mapsto x^4 - y^4$. Là encore $g(0) = 0$, $\nabla g(0) = 0$ et $H_f g(0) = 0$.
Mais pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $g(t, 0) > 0$ donc g n'atteint pas de maximum en 0, et $g(0, t) < 0$ donc g n'atteint pas non plus de minimum en 0.
Le graphe de g est similaire à celui de la figure **9.1**.

10 Exercices classiques**10.1 Fonctions positivement homogènes**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 , soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction f est dite *positivement homogène de degré α* si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y).$$

1. Donner un exemple de fonction positivement homogène (avec son degré), et un exemple de fonction non homogène.

2. Montrer que si f est positivement homogène de degré α , alors ses dérivées partielles sont positivement homogènes de degré $\alpha - 1$.
3. Montrer que f est positivement homogène de degré α si et seulement si f vérifie la relation d'Euler :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y).$$

Indication : étudier $\varphi : t \mapsto f(tx, ty)$.

10.2 Calcul d'une différentielle

Soit E un espace euclidien de norme $\| \cdot \|$ et f l'application de $E \setminus \{0\}$ dans lui-même définie par $f(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$. Montrer que f est différentiable et déterminer $df(x)$.

10.3 Des plans tangents

Soit (S) la surface d'équation $z^3 = xy$.
Déterminer les plans tangents à (S) qui contiennent la droite (D) d'équation :

$$\begin{cases} x &= 2 \\ y &= 3z - 3 \end{cases}.$$
10.4 Une équation aux dérivées partielles

Trouver toutes les applications $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 telles que :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

en utilisant les coordonnées polaires.

10.5 Une étude de points critiques et d'extremums

Déterminer les points critiques puis les extremums de $(x, y) \mapsto x^3 - y^2 - x$.