Exercice 36

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \end{cases}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$: " $u_n \in [1, +\infty[$ "

Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie

Initialisation

$u_0 = 1 \in [1, +\infty[$ donc $P(0)$ est vraie

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$ vraie

$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ or $u_n \geq 1 > 0$

donc $\frac{1}{u_n} > 0$ donc $u_{n+1} > u_n \geq 1$

donc $u_{n+1} \in [1, +\infty[$ donc $P(n+1)$ est vraie

Conclusion Par principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1, +\infty[$

donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et minorée par 0.

- soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}_+^*$
- soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$

Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}_+^*$

On a alors par continuité de $f : x \mapsto x + \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$l = l + \frac{1}{l}$ donc $\frac{1}{l} = 0$, c'est absurde

$\boxed{\text{Finalement } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge vers } +\infty}$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, on sait que $u_n \geq 1$

donc $\frac{1}{u_n} \leq 1$ donc $\boxed{\frac{1}{u_n^2} \leq \frac{1}{u_n}}$

Or $u_{n+1}^2 = (u_n + \frac{1}{u_n})^2 = u_n^2 + \frac{1}{u_n^2} + 2$

avec $0 \leq \frac{1}{u_n^2} \leq \frac{1}{u_n}$

donc $2 \leq u_{n+1}^2 \leq u_n^2 + \frac{1}{u_n} + 2$

donc $2 \leq u_{n+1}^2 - u_n^2 \leq \frac{1}{u_n} + 2$

or $u_{n+1} = \frac{1}{u_n} + u_n$ donc $\frac{1}{u_n} = u_{n+1} - u_n$

donc $2 \leq u_{n+1}^2 - u_n^2 \leq u_{n+1} - u_n + 2$

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{2 \leq u_{n+1}^2 - u_n^2 \leq u_{n+1} - u_n + 2}$$

3) Soit $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq k$

$$2 \leq u_{k+1}^2 - u_k^2 \leq u_{k+1} - u_k + 2$$

donc $\sum_{k=0}^{n-1} 2 \leq \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^2 - u_k^2) \leq \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) + 2$

donc

$$2n \leq u_n^2 - u_0^2 \leq 2n + u_n - u_0$$

donc d'une part $\frac{2n}{u_n^2} \leq 1 - \frac{u_0^2}{u_n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

d'autre part $\frac{2n}{u_n^2} \geq \underbrace{-\frac{u_0^2}{u_n^2} + 1}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 1} - \underbrace{\frac{u_n}{u_n^2}}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0} + \underbrace{\frac{u_0}{u_n^2}}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}$

~~et comme $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \geq 1$~~

~~$u_n^2 \geq u_n$~~

~~donc $\frac{u_n}{u_n^2} \leq 1$~~

par théorème d'encadrement $\frac{2n}{u_n^2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$

donc $u_n^2 \underset{n \to +\infty}{\sim} 2n$

donc $u_n^2 \underset{+\infty}{=} 2n + o(n)$

donc $u_n \underset{n \to +\infty}{=} \sqrt{2n} + o(\sqrt{n})$

$\boxed{\text{finalement } u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2n}}$