Semaine 14 du 12 janvier 2026 (S3)

XIII - Variables aléatoires discrètes

Le chapitre XIII reste au programme :

1 Variables aléatoires discrètes

1.1 Définition

1.2 Évènements associés à une variable aléatoire

1.3 Fonction d'une variable aléatoire

2 Loi d'une variable aléatoire discrète

2.1 Définition

2.2 Loi conditionnelle

3 Lois usuelles

3.1 Rappels : lois usuelles finies

3.2 Loi géométrique

3.3 Loi de Poisson

4 Couples de variables aléatoires

4.1 Définition, loi conjointe, lois marginales

4.2 Extension aux n-uplets de variables aléatoires

5 Variables aléatoires indépendantes

5.1 Définition

5.2 Évènements indépendants et variables aléatoires indépendantes

5.3 Extension au cas de n variables aléatoires

5.4 Fonctions de variables aléatoires indépendantes

5.5 Familles infinies de variables aléatoires indépendantes

6 Exercices à connaître

6.1 Premier tirage d'une boule (Banque CCP MP)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.
On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1) Déterminer la loi de X.

2) Déterminer la loi de Y.

6.2 Loi d'un couple et lois marginales

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie

$$\forall\,(j,k) \in \mathbb{N}^2,\ P(X=j, Y=k) = a\frac{j+k}{2^{j+k}} \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$

1) Déterminer la valeur de a.

2) Déterminer les lois marginales X et Y.

3) Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

4) Calculer $P(X = Y)$.

6.3 Max et min de deux lois géométriques (Banque CCP MP)

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Elles suivent la même loi définie par : $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = P(Y = k) = pq^k$ où $p \in]0,1[$ et $q = 1 - p$.
On considère alors les variables U et V définies par $U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$.

1) Déterminer la loi du couple (U, V).

2) Déterminer la loi marginale de U.
On admet que $V(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(V = n) = pq^{2n}(1 + q)$.

3) Prouver que $W = V + 1$ suit une loi géométrique.

4) U et V sont-elles indépendantes ?

6.4 Couples de variables aléatoires de Poisson (Banque CCP MP)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.

1) Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in (]0, +\infty[)^2$.
Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent des lois de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.

2) Soit $p \in]0, 1]$. Soit $\lambda \in]0, +\infty[$.
Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ.
On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi binomiale de paramètre (m, p).
Déterminer la loi de X.

S'y ajoute :

XI Séries entières

1 Rayon de convergence

1.1 Définition de série entière

1.2 Rayon et disque de convergence, cercle d'incertitude

2 Méthodes de détermination du rayon de convergence

2.1 Résultats de comparaison

2.2 Règle de d'Alembert

2.3 Utilisation de suites bornées

2.4 Utilisation du cercle d'incertitude

2.5 Quelques exemples fréquents, séries entières dérivée et primitive

2.6 Somme

2.7 Produit de Cauchy

3 Régularité des séries entières réelles

3.1 Convergence pour les séries entières réelles

3.2 Continuité

3.3 Dérivation

3.4 Intégration

4 Fonctions développables en série entière

4.1 Développement en série entière au voisinage de 0

4.2 Série de Taylor

4.3 Développement et formule de Taylor avec reste intégral

4.4 Développement par dérivation et primitivation

4.5 Développement par opérations

4.6 Développement et équation différentielle

4.7 Une application : régularité d'un prolongement continu

5 Exemples de séries entières d'une variable complexe

5.1 Série géométrique complexe

5.2 Exponentielle complexe

5.3 Continuité sur le disque ouvert de convergence

6 Formulaire

7 Exercices à connaître

7.1 Comparaisons de rayons de convergence

Soit (a_n) une suite complexe.

1) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n^\alpha a_n z^n$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

2) En déduire le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{P(n)}{Q(n)} a_n z^n$ où $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ sont deux polynômes non nuls.

7.2 Calculs de rayons de convergence (Banque CCP MP)

1) Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.

2) Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :

a) $\displaystyle\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$ **b)** $\displaystyle\sum n^{(-1)^n} z^n$ **c)** $\displaystyle\sum \cos n z^n$

7.3 Une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ (Banque CCP MP)

1) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum \frac{x^n}{(2n)!}$.

On pose $\displaystyle S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.

2) Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$ et préciser le rayon de convergence.

3) **a)** Déterminer $S(x)$.

b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(0) = 1, \quad f(x) = \operatorname{ch}\sqrt{x} \text{ si } x > 0, \quad f(x) = \cos\sqrt{-x} \text{ si } x < 0 .$$

Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

7.4 Une équation différentielle (Banque CCP MP)

Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

1) Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ de $\mathbb{R}$, avec $r > 0$.
Déterminer la somme des séries entières obtenues.

2) Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ sur $]0; 1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1, 1[$?

Pour la dernière question on admettra que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients non constants est un espace vectoriel de dimension 2.

7.5 Calculs de sommes de séries entières (Banque CCP MP)

Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivantes, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence :

1) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$.

2) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ avec $\begin{cases} a_{2n} = 4^n \\ a_{2n+1} = 5^{n+1} \end{cases}$

7.6 Développements en série entière (Banque CCP MP)

1) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$ converge.

On se propose de calculer la somme de cette série.

2) Donner le développement en série entière en 0 de $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.
Remarque : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.

3) En déduire le développement en série entière en 0 de $x \longmapsto \operatorname{Arcsin} x$ ainsi que son rayon de convergence.

4) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$.