

## II – Séries numériques

### I. Révision sur les suites : le théorème de Césaro

- 1) Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $k \geq N$ ,  $|u_k| \leq \varepsilon$ . Pour  $n \geq N$ ,

$$|v_n| = \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq \frac{1}{n+1} \left( \sum_{k=0}^{N-1} |u_k| + \sum_{k=N}^n |u_k| \right) \leq \frac{A}{n+1} + \frac{n-N+1}{n+1} \varepsilon,$$

où  $A = \sum_{k=0}^{N-1} |u_k|$ . Choisissons  $n$  assez grand pour avoir  $\frac{A}{n+1} \leq \varepsilon$  (par exemple  $n+1 \geq A/\varepsilon$ ). Alors

$$|v_n| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Comme  $\varepsilon > 0$  est arbitraire, on en déduit  $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

- 2) **(Théorème de Césaro)** Si  $u_n$  converge, alors  $v_n$  converge et  $\lim v_n = \lim u_n$ .

Supposons  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{C}$ . Posons  $w_n = u_n - \ell$ , alors  $w_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . On écrit

$$v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (\ell + w_k) = \ell + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n w_k.$$

Grâce à la première question, comme  $w_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , on a  $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n w_k \rightarrow 0$ .

Donc  $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ , d'où le résultat.

- 3) Considérons  $u_n = (-1)^n$ , qui n'admet pas de limite. Pourtant,

$$v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (-1)^k = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \frac{1}{n+1} & \text{si } n \text{ est pair,} \end{cases}$$

donc  $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Ainsi,  $(v_n)$  peut converger sans que  $(u_n)$  ne converge.

### II. Révision sur les suites : irrationalité de e

- 1) —  $(u_n)$  est croissante. En effet,  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$ .

—  $(v_n)$  est décroissante à partir de  $n \geq 1$ . En effet, on a

$$v_{n+1} - v_n = \left( u_n + \frac{1}{(n+1)!} \right) + \frac{1}{(n+1)!} - \left( u_n + \frac{1}{n!} \right) = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = -\frac{n-1}{(n+1)!} \leq 0$$

(et strictement négatif pour  $n \geq 2$ ).

— Pour tout  $n$ ,

$$v_n - u_n = \frac{1}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ainsi,  $(u_n)$  est croissante,  $(v_n)$  est décroissante et  $v_n - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  : les deux suites sont adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite, que l'on note  $\ell$ .

- 2) On raisonne par l'absurde. Supposons  $\ell = \frac{p}{q}$  avec  $p, q \in \mathbb{Z}$ ,  $q \geq 1$ , irréductible.

Alors  $q! \ell = \frac{q! p}{q} = (q-1)! p \in \mathbb{Z}$  et, comme  $q! u_q = \sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!} \in \mathbb{Z}$ , on obtient

$$q! (\ell - u_q) \in \mathbb{Z}.$$

D'un autre côté, comme  $\ell \in ]u_q, v_q[$  car pour tout  $n$ ,  $u_n < v_n$  et les suites sont adjacentes, on a

$$0 < \ell - u_q < \frac{1}{q!} \quad \text{donc} \quad 0 < q! (\ell - u_q) < 1.$$

On a donc un entier strictement compris entre 0 et 1, ce qui constitue une contradiction. Par conséquent,  $\ell$  est irrationnel.

Bien sûr, il est connu que  $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ , donc  $\ell = e$  et  $e$  est irrationnel.

### III. Série harmonique et constante d'Euler

a. Comparaison série-intégrale et série télescopique :

1. Pour  $x \in [k, k+1]$  avec  $k \geq 1$ , on a  $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$ . En intégrant sur  $[k, k+1]$  puis en sommant pour  $k = 1$  à  $n-1$ , on obtient

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{dx}{x} \leq H_{n-1},$$

soit

$$\int_1^{n+1} \frac{dx}{x} \leq H_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x},$$

d'où

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n.$$

Puisque  $\ln(n+1) \sim 1 + \ln n \sim \ln n$ ,  $H_n \sim \ln n$ .

2. On calcule

$$u_{n+1} - u_n = (H_{n+1} - \ln(n+1)) - (H_n - \ln n) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Or

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \end{aligned}$$

$$\text{donc } u_{n+1} - u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

3. Posons  $v_n = u_{n+1} - u_n$ . Alors  $v_n = O(1/n^2)$ , donc la série  $\sum_{n \geq 1} v_n$  est absolument convergente. Or

$$\sum_{n=1}^N v_n = \sum_{n=1}^N (u_{n+1} - u_n) = u_{N+1} - u_1$$

par télescopage. Le fait que  $\sum v_n$  converge implique que  $(u_{N+1})_{N \in \mathbb{N}}$  converge : ainsi  $(u_n)$  est convergente. On note sa limite  $\gamma$  (c'est la *constante d'Euler*).

- b. Méthode des deux suites adjacentes :

Posons, pour  $n \geq 1$ ,

$$w_n = u_n + \ln n - \ln(n+1) = H_n - \ln(n+1).$$

Alors

$$u_n - w_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0 \quad \text{et} \quad u_n - w_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

De plus,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0,$$

donc  $(u_n)$  est décroissante, tandis que

$$w_{n+1} - w_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) > 0,$$

donc  $(w_n)$  est croissante. Les suites  $(w_n)$  et  $(u_n)$  sont adjacentes, elles convergent donc vers la même limite  $\gamma$ . On retrouve ainsi la convergence de  $(u_n)$ .

#### IV. Une décomposition de somme

Déjà,  $S_k$  est bien définie, car c'est une série de Riemann avec  $k > 1$ .

De plus, pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^k} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{(2n)^k} + \sum_{n=0}^N \frac{1}{(2n+1)^k}$ . Par passage à la limite concernant trois séries à termes réels positifs quand  $N \rightarrow +\infty$ , les réels  $T_k$  et  $V_k = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^k}$  sont bien définis et  $S_k = T_k + V_k$ .  
De plus  $V_k = \frac{1}{2^k} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{2^k} S_k$ .  
Ainsi  $S_k = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^k}} T_k$ .

#### V. Natures de deux séries

Si  $(S_n)$  converge, notons  $\ell$  sa limite. Alors  $\ell > 0$  donc  $S_n \sim \ell$ , et donc  $v_n \sim \frac{u_n}{\ell}$ , donc  $\sum v_n$  converge aussi.  
Si  $(S_n)$  diverge, alors soit  $(v_n)$  ne tend pas vers 0 et  $\sum v_n$  diverge grossièrement. Ou alors  $\vec{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  auquel cas  $w_n \sim v_n$ . Donc  $\sum v_n$  et  $\sum w_n$  nt la même nature. Mais  $w_n = \ln \left( \frac{S_n - u_n}{S_n} \right) = \ln(S_{n-1}) - \ln S_n$ . Alors  $\sum w_n$  a la même nature que  $(S_n)$  : elle diverge.  
Dans tous les cas,  $\sum u_n$  et  $\sum w_n$  ont la même nature.

#### VI. Transformation d'Abel

Remarque : on compare souvent la transformation d'Abel à l'intégration par parties.

- 1) Soit  $M$  un majorant de  $(|S_n|)$ . Alors  $0 \leq |(a_n - a_{n+1})S_n| \leq a_n - a_{n+1}$ . Or  $\sum a_n - a_{n+1}$  a même nature que la suite  $(a_n)$ , donc elle cv. Donc  $\sum |(a_n - a_{n+1})S_n|$  aussi, donc  $\sum (a_n - a_{n+1})S_n$  cv absolument.
- 2)  $\sum_{n=0}^N a_{n+1}(S_{n+1} - S_n) = -\sum_{n=0}^N a_{n+1}S_n + \sum_{n=0}^N a_{n+1}S_{n+1} = -\sum_{n=0}^N a_{n+1}S_n + \sum_{n=1}^{N+1} a_n S_n = -a_0 S_0 + a_{N+1} S_{N+1} + \sum_{n=0}^N (a_n - a_{n+1})S_n$ . Or  $\sum_{n=0}^N (a_n - a_{n+1})S_n$  cv et  $a_{N+1} S_{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ , donc  $\sum a_{n+1}(S_{n+1} - S_n)$  cv.
- 3) Appliquer ce qui précède avec  $a_n = \frac{1}{n}$  et  $S_n = \sum_{k=0}^n \cos(kx) = \text{Re} \left( \sum_{k=0}^n e^{ikx} \right) = \text{Re} \left( \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} \right)$ . On vérifiera bien les hypothèses !