Raisonnement par récurrence

17 décembre 2025

Table des matières

L'objectif de cette partie est de montrer comment rédiger une récurrence, à partir d'exemples, en présentant en particulier quelques erreurs courantes, mais aussi de présenter une autre technique de démonstration, extrêmement puissante, appelée principe du minimum.

Il y a plusieurs façons possibles de rédiger une récurrence. Néanmoins l'expérience montre que les étudiants qui essaient de l'écrire de façon originale l'écrivent rarement correctement.

En d'autres termes : nous vous conseillons *très fortement* de suivre les modèles donnés ici, mais vous êtes absolument libres de ne pas suivre les conseils ci-dessous. Pour mémoire, dans 9 cas sur dix, ceux qui n'ont pas suivi le modèle donné ici rédigent mal leurs raisonnements par récurrence et perdent en conséquence les points correspondants dans leurs DS.

Pour fixer les idées, nous travaillerons essentiellement sur des exemples, et parfois sur des exemples très simples.

0.1. Principe de récurrence simple.

Définition 0.1.1.
Soit P un prédicat sur les entiers naturels. Pour $n \in \mathbb{N}$, on dit que P est *héréditaire au rang* n si on a $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ (autrement dit, P n'est pas héréditaire au rang n si et seulement si on a $P(n)$ et $\neg P(n+1)$)

On dit que P est *héréditaire* sur $\mathbb{N}$ si P est héréditaire à tout rang, c'est-à-dire si et seulement si on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (P(n) \Rightarrow P(n+1))$$

Exemple 0.1.2.
Le prédicat : $P(n)$: $\sum_{k=0}^{n} k = n^2$ est-il héréditaire ?
Et le prédicat $Q(n)$: $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$?
Et le prédicat $R(n)$: $\sum_{k=0}^{n} k = 2 + \frac{n(n+1)}{2}$?

Théorème 0.1.3 (Principe de récurrence simple)**.**
Soit P un prédicat sur les entiers naturels. Supposons qu'on a $P(0)$ et que P est héréditaire. Alors P est vraie pour tout entier naturel n.

Exemple 0.1.4.
Soit n un entier naturel. Montrons que $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ l'assertion

$$«\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}».$$

Montrons $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$ par récurrence.

— Montrons $P(0)$.
On a

$$\sum_{k=0}^{0} k = 0 = \frac{0(0+1)}{2},$$

donc on a $P(0)$.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.
Alors, on a

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k &= \left(\sum_{k=0}^{n} k\right) + n + 1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2},\end{aligned}$$

donc on a $P(n+1)$.

On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n).$$

0.2. Erreurs classiques.

Nous listons ici des erreurs fréquemment trouvées dans les copies.

Mauvaise définition de l'assertion Forme classique de cette erreur :

Notons $P(n)$ l'assertion

$$«\forall n \in \mathbb{N}\ \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}»$$

Explications : cette définition, mathématiquement, signifie exactement la même chose que :

Notons $P(n)$ l'assertion

$$«\forall p \in \mathbb{N}\ \sum_{k=0}^{p} k = \frac{p(p+1)}{2}»$$

Autrement dit, $P(n)$ ne dépend pas de n. Inutile alors de tenter une démonstration par récurrence…

Variante 1 :

Notons $P(n)$ l'assertion
$$«\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{p} k = \frac{n(n+1)}{2}».$$

Variante 2 :

Notons $P(n)$ l'assertion $«\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}»$.

En revanche, la formulation suivante est acceptable, bien qu'à éviter :

Notons $P(n)$ l'assertion $«\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}»$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Mauvaise énonciation de l'objectif Forme classique de cette erreur :

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ l'assertion
$$«\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}».$$
Montrons $P(n)$ par récurrence.

Explications : on ne précise pas ici ce qu'est n. De plus, le principe de récurrence ne montre pas $P(n)$ pour un n donné mais pour tout n. Il convient donc d'écrire

Montrons $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$ par récurrence

ou une variante, comme

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n on a $P(n)$.

Mauvaise démonstration de l'hérédité Forme classique de cette erreur :

Supposons $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$.
Montrons $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n+1)$.

Explications : une fois que l'on a supposé $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$, il n'y a pas beaucoup de travail à fournir pour montrer $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$ ...

Variante 1 :

Supposons $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$.
Montrons $P(n+1)$.

Variante 2 :

Supposons, pour tout entier naturel n, $P(n)$ et montrons $P(n+1)$

Variante 3 :

Supposons, pour tout entier naturel n, $P(n)$ et montrons pour tout entier naturel n, $P(n+1)$.

0.3. Bonne définition d'une suite définie par récurrence.

Notons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ \text{et } \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = 2 + \sqrt{u_n - 1} \end{cases}$$

Montrer que la suite u est bien définie.

Ici, le terme «bien définie» signifie non seulement que pour tout n, on a bien donné une expression pour définir u_n mais aussi que cette expression est définie, c'est-à-dire qu'elle a mathématiquement un sens.

Pour n donné, montrer que u_n est bien définie est un préalable à la démonstration de toute propriété de u_n.

Ici, il s'agit de montrer que pour tout n l'expression $2 + \sqrt{u_n - 1}$ est bien définie, c'est-à-dire que $u_n - 1$ est positif ou nul, autrement dit $u_n \geqslant 1$.

Pour n donné, on voit alors que d'une part, pour montrer que u_{n+1} est bien défini, il va falloir montrer tout d'abord $u_n \geqslant 1$ et d'autre part, pour montrer $u_n \geqslant 1$, on va avoir besoin au préalable de s'assurer que u_n est bien défini.

Autrement dit : on va avoir besoin de démontrer simultanément ces deux propriétés.
Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ l'assertion

$$\text{«}u_n \text{ est bien défini et } u_n \geqslant 1\text{»}$$

Montrons $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$ par récurrence :

— On a clairement $P(0)$.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.
u_n est bien défini et $u_n \geqslant 1$.
Donc $u_n - 1 \geqslant 0$.
Donc $\sqrt{u_n - 1}$ est bien défini.
Donc u_{n+1} est bien défini, et de plus

$$u_{n+1} \geqslant 2 + \sqrt{u_n - 1} \geqslant 2 \geqslant 1$$

Donc on a $P(n+1)$.

On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$$

La suite u est donc bien définie (et de plus pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$).

Problème de définition non étudié On trouve parfois la réponse erronée suivante :

> Pour tout entier naturel n, $n = 0$ ou n est de la forme $k+1$. On a donné une définition à u_n dans chacun de ces deux cas, donc u est bien définie.

Manifestement, l'auteur du texte ci-dessus n'a pas compris que la définition $u_{n+1} = 2 + \sqrt{u_n - 1}$ pouvait poser problème.

0.4. Récurrence double.

a. Exemple : suite définie par récurrence.

Notons u la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 1 + \sqrt{u_n + u_{n+1} - 2} \end{cases}$$

Montrer que u est bien définie.

On s'aperçoit vite qu'il va falloir montrer simultanément que u_n est bien défini et qu'on a $u_n \geqslant 1$.
On va donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, définir $P(n)$ comme l'assertion

$$\text{«}u_n \text{ est bien défini et } u_n \geqslant 1\text{»}$$

De plus, pour montrer cette P à un rang donné, il va falloir supposer qu'elle est vérifiée au deux rangs précédents.
Il ne suffit donc pas de chercher à démontrer P par récurrence. Pour répondre à cette question on va utiliser un principe de récurrence double, dans lequel l'initialisation consiste à montrer $P(0)$ et $P(1)$ et la démonstration de l'hérédité consiste à montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \Big((P(n) \text{ et } P(n+1)) \Rightarrow P(n+2)\Big)$$

b. Énoncé du principe.

Théorème 0.4.1 (Principe de récurrence double)**.**
Soit P un prédicat portant sur $\mathbb{N}$. Si :

- $P(0)$ et $P(1)$ sont vrais,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vrais alors $P(n+2)$ est vrai,

alors $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$.

c. Rédaction par récurrence double.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ la propriété

$$\text{«}u_n \text{ est bien défini et } u_n \geqslant 1\text{»}$$

Montrons $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$ par récurrence double.

— On a clairement $P(0)$.

— On a clairement $P(1)$.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et $P(n+1)$ et montrons $P(n+2)$.
  u_n et u_{n+1} sont bien définis et de plus $u_n \geqslant 1$ et $u_{n+1} \geqslant 1$.
  Donc $u_n + u_{n+1} - 2 \geqslant 0$.
  Donc u_{n+2} est bien défini et de plus, $u_{n+2} = 1 + \sqrt{u_n + u_{n+1} - 2} \geqslant 1$.
  Donc on a $P(n+2)$.

On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$$

En particulier la suite u est bien définie.

Exercice 0.4.2.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + 1$.

0.5. Récurrence triple, etc.

On peut, de la même façon, avoir besoin de principes de récurrence triple, quadruple, ...
Si cela s'avère nécessaire, on pourra les utiliser sans démonstration.
Ainsi, appliquer le principe de récurrence triple pour démontrer $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$ consistera à démontrer d'une part $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$, et d'autre part à démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si on a $P(n)$ et $P(n+1)$ et $P(n+2)$ alors on a $P(n+3)$.
Là encore, si l'on préfère, on pourra se passer d'une récurrence triple et utiliser simplement la récurrence ordinaire. Il suffira pour cela de définir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q(n)$ comme

$$\text{«}P(n) \text{ et } P(n+1) \text{ et } P(n+2)\text{»}$$

et de montrer $\forall n \in \mathbb{N}\ Q(n)$ par récurrence simple.
Enfin, on peut évidemment là aussi se passer de tout principe de récurrence en utilisant le principe du minimum.

0.6. Récurrence forte.

Enfin, il existe des cas où ni une récurrence simple, ni une récurrence double, ni une récurrence triple ne semblent suffire.
Dans ces cas, on pourra utiliser le principe de récurrence forte.

a. Exemple : suite définie par récurrence.

Notons u la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1 \\ \text{et } \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = -1 + \sqrt{\dfrac{3}{2} + n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k} \end{cases}$$

Montrez que u est bien définie.

On s'aperçoit assez vite qu'on peut espérer montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geqslant -1$. Mais pour montrer la propriété pour n donné, il va falloir supposer qu'elle est vraie pour toutes les entiers naturels strictement inférieurs.
On va donc utiliser le principe de récurrence forte.
Celui-ci peut s'énoncer comme suit :

1. Étant donné un entier naturel n, on dit qu'une propriété P est *fortement héréditaire au rang* n si

$$\Big(\forall m \in [\![0, n]\!]\ P(m)\Big) \Rightarrow P(n+1)$$

   (ou de façon équivalente, si $P(0)$ et $P(1)$ et ... et $P(n)$ implique $P(n+1)$)

2. On dit qu'une propriété P est *fortement héréditaire* si pour tout entier naturel n, P est fortement héréditaire au rang n.
3. Le principe de récurrence forte dit simplement qu'une propriété P vraie en 0 et fortement héréditaire est vraie pour tout entier naturel.

Remarque 0.6.1.
Dire que P est fortement héréditaire au rang n est équivalent à dire que $n+1$ ne peut pas être l'entier minimum pour lequel P est faux.

Exemple 0.6.2.
On peut montrer que tout prédicat héréditaire est fortement héréditaire. La réciproque est fausse comme le montre le prédicat P défini comme suit : pour $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est l'assertion «$n(n-2) \neq 0$».

b. Énoncé du principe.

Théorème 0.6.3 (Principe de récurrence forte)**.**
Soit P un prédicat portant sur $\mathbb{N}$. Si :
- $P(0)$ est vrai,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $P(0)$, $P(1)$, ..., $P(n)$ sont vrais, alors $P(n+1)$ est vrai,

alors $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$.

c. Rédaction par récurrence forte.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ la propriété

$$\text{«}u_n \text{ est bien défini et } u_n \geqslant -1\text{»}$$

Montrons par récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P(n)$.

— On a clairement $P(0)$.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que pour tout $m \in \mathbb{N}$ vérifiant $m \leqslant n$, on a $P(m)$.
Montrons $P(n+1)$.
Pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, u_k est bien défini, donc la somme $\sum_{k=0}^{n} u_k$ est bien définie.
En outre, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, $u_k \geqslant -1$, donc

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \geqslant \sum_{k=0}^{n} -1 = -n-1$$

Donc

$$1/2 + n + 1 + \sum_{k=0}^{n} u_k \geqslant 0$$

Donc u_{n+1} est bien défini, et de plus, on a

$$u_{n+1} = -1 + \sqrt{\frac{3}{2} + n + \sum_{k=0}^{n} u_k} \geqslant -1$$

Donc on a $P(n+1)$

Par le principe de récurrence forte, on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$$

Donc u est bien définie.

Exercice 0.6.4.
Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists p, q \in \mathbb{N},\ n = 2^p(2q+1).$$

0.7. Méthodologie : choix du type de récurrence.

Le plus difficile dans la démonstration par récurrence d'un prédicat $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est souvent d'identifier le type de raisonnement à appliquer.
Pour cela, il convient de commencer à travailler *au brouillon* et de chercher à montrer la propriété P_n, n étant fixé. Quatre cas de figures peuvent alors survenir.

— Si vous arrivez à montrer P_n directement, c'est qu'il n'y a pas de récurrence en jeu !

— Si, pour montrer P_n, vous observez que vous devez utiliser P_{n-1}, alors vous pouvez rédiger une récurrence simple.
— Si, pour montrer P_n, vous observez que vous devez utiliser P_{n-1} et P_{n-2}, alors vous pouvez rédiger une récurrence double (*idem* pour triple, quadrupe *etc.*).
— Si, pour montrer P_n, vous observez que vous devez utiliser P_{n-1},..., P_0, alors vous pouvez rédiger une récurrence forte.

Après ce travail, vous pouvez rédiger proprement votre récurrence.

0.8. Récurrence à partir d'un certain rang.

Il s'agit maintenant de faire démarrer une récurrence (simple, multiple ou forte) à un autre rang que le rang 0.

Exemple. Soit u une suite, n_0 un entier et α un réel strictement positif.
On suppose que pour tout $n \geqslant n_0$, on a

$$|u_{n+1}| \leqslant \alpha |u_n|$$

Montrer

$$\forall n \geqslant n_0 \quad |u_n| \leqslant \alpha^{n-n_0} |u_{n_0}|$$

Modèle de rédaction proposé. Pour tout $n \geqslant n_0$, notons $P(n)$ la propriété $|u_n| \leqslant \alpha^{n-n_0}$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant n_0$, $P(n)$ est vraie.

— On a $|u_{n_0}| = \alpha^{n_0-n_0}|u_{n_0}|$. Donc on a $P(n_0)$.
— Soit $n \geqslant n_0$. Supposons $P(n)$.
Montrons $P(n+1)$.
On a $|u_{n+1}| \leqslant \alpha|u_n|$ car $n \geqslant n_0$.
Par ailleurs $|u_n| \leqslant \alpha^{n-n_0}|u_{n_0}|$.
Donc $\alpha|u_n| \leqslant \alpha^{n+1-n_0}|u_{n_0}|$.
Donc $|u_{n+1}| \leqslant \alpha^{n+1-n_0}|u_{n_0}|$.
On a donc $P(n+1)$

On a donc

$$\forall n \geqslant n_0 \ P(n)$$

0.9. Récurrence sur un intervalle fini d'entiers

Il s'agit de démontrer un résultat valable pour un ensemble fini d'entiers seulement, de la forme $[\![a, b]\!]$, où $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a < b$. Il faudra faire attention à initialiser la propriété pour $n = a$, et lors de l'hérédité, il faudra supposer que cette propriété est vraie pour un certain $n \in [\![a, b-1]\!]$ et montrer qu'elle est vraie au rang $n+1$.

Exemple 0.9.1.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n \ : \ x \mapsto x^n$. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n^{(k)}(x) = \dfrac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$.

0.10. Récurrence descendante

On cherche à montrer un résultat valable sur un intervalle $[\![a, b]\!]$ comme précédemment, mais cette fois-ci on initialise pour $n = b$, et on montre que la propriété P à un rang n implique cette même propriété au rang $n-1$. Cela se démontre en posant $Q(n) = P(b-n)$. On montre alors par récurrence que $Q(0)$ est vraie et que $Q(n)$ implique $Q(n+1)$.

Exemple 0.10.1.
Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer que pour tout $k \in [\![2, N]\!]$, $\sqrt{k\sqrt{(k+1)\sqrt{(k+2)\sqrt{\dots\sqrt{(N-1)\sqrt{N}}}}}} < k+1$.

0.11. Quelques récurrences fausses.

Exercice : chercher l'erreur dans les pseudo-démonstrations ci-dessous.

a. Suite négative minorée par un réel positif...

Notons u la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{\pi}{4} \\ \forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} = 6u_n - 4 \end{cases}$$

(il est clair que u est bien définie)

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \frac{4}{5}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ la propriété

$$«u_n \geqslant \frac{4}{5}»$$

Montrons $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$ par récurrence.

— On a $P(0)$.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$. Montrons $P(n+1)$.
  On a :

$$\begin{aligned} & & u_n &\geqslant \frac{4}{5} \\ &\text{donc} & 6u_n &\geqslant \frac{24}{5} \\ &\text{donc} & 6u_n - 4 &\geqslant \frac{24 - 5 \times 4}{5} \\ &\text{donc} & u_{n+1} &\geqslant \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

  Ainsi, on a $P(n+1)$.

Donc on a $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$

Calculons les valeurs approchées des premiers termes de la suite avec Python :

```
def f(x) :
  """Calcule 6*x-4, précondition  : x réel"""
  return 6 * x - 4

from math import pi
x = pi / 4 # u_0
u = [x] # Contient u_0
for i in range(5) :
  x = f(x) # Calcule le terme suivant de u
  u.append(x) # Ajoute le nouveau terme
print(u) # Affiche les valeurs calculées
```

On obtient les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} u_0 &\approx 0.7853982 \\ u_1 &\approx 0.7123890 \\ u_2 &\approx 0.2743339 \\ u_3 &\approx -2,3539967 \\ u_4 &\approx -18.12398 \\ u_5 &\approx -112.74388 \end{aligned}$$

Autrement dit, u_5 est négatif et devrait être supérieur à $\frac{4}{5}$...

b. n valeurs sont égales

Montrons que pour tout entier n non nul, et tout n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$, on a

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n$$

Autrement dit : toutes les composantes d'un n-uplet sont égales.

Pour tout $n \geqslant 1$, notons $P(n)$ la propriété

$$«\text{pour tout } n\text{-uplet } (x_1, \dots, x_n), \text{ on a } x_1 = x_2 = \dots = x_n.»$$

Montrons $\forall n \geqslant 1\ P(n)$ par récurrence.

— On a clairement $P(1)$.

— Soit $n \geqslant 1$.
  Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.
  Soit $(x_1, \dots, x_{n+1})$ un $n+1$-uplet.
  $(x_1, \dots, x_n)$ est un n-uplet donc on a

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n$$

  $(x_2, \dots, x_{n+1})$ est un n-uplet donc on a

$$x_2 = \dots = x_{n+1}$$

  Donc on a

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{n+1}$$

  Donc on a $P(n+1)$.

On a donc $\forall n \geqslant 1\ P(n)$.

c. Toutes les puissances valent 1

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Montrons que pour tout entier naturel non nul n, on a $a^{n-1} = 1$.

Notons $P(n)$ la propriété «$a^{n-1} = 1$».

Montrons $\forall n \geqslant 1 \quad P(n)$ par récurrence forte.

- On a clairement $P(1)$.
- Soit $n \geqslant 1$.

  Supposons $\forall m \in [\![1, n]\!] \quad P(m)$.

  Montrons $P(n+1)$.

  On a

$$\begin{aligned} a^{n+1-1} &= a^n \\ &= \frac{a^{n-1} \times a^{n-1}}{a^{(n-1)-1}} \end{aligned}$$

  Or par hypothèse de récurrence, $P(m)$ est vraie pour tout $m \leqslant n$, donc $P(n)$ et $P(n-1)$ sont vraies.

  Donc $a^{n-1} = 1$ et $a^{(n-1)-1} = 1$.

  D'où :

$$a^{n+1-1} = \frac{1 \times 1}{1}$$

  Donc on a $P(n+1)$.

On a donc

$$\forall n \geqslant 1 \quad P(n)$$