Semaine 12 du 15 décembre 2025 (S51)

XI - Intégrales à paramètre

Le chapitre XI reste au programme :

1 Cadre

1.1 Fonctions dont la variable intervient dans les bornes d'une intégrale (et pas ailleurs)

1.2 Fonctions définies par une intégrale, dont la variable n'intervient pas dans les bornes

1.3 Et si la variable intervient à la fois dans les bornes et dans l'intégrande ?

2 Continuité

2.1 Théorème de continuité par domination

2.2 Limite

3 Dérivation

3.1 Rappels de première année : dérivées partielles

3.2 Dérivation par domination

3.3 Dérivées d'ordres supérieurs

4 Exercices à connaître

4.1 La fonction Γ (banque CCINP MP)

On pose : $\forall\, x \in]0,+\infty[,\ \forall\, t \in]0,+\infty[,\ f(x,t) = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$.

1) Démontrer que : $\forall x \in]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

On pose alors : $\forall\, x \in]0,+\infty[,\ \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t.$

2) Pour tout $x \in]0,+\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

4) Démontrer que Γ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

4.2 Produit de convolution

On note E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}, 2\pi$ périodiques, à valeurs complexes. On munit E de la norme N_∞.
On étudie la loi $*$ qui, à deux fonctions f et g de E, fait correspondre la fonction $f*g$ définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ (f*g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t$$

et appelée ***produit de convolution*** de f et g.

1) Montrer qu'une fonction continue périodique est bornée.

2) Démontrer que la fonction $f*g$ est définie sur $\mathbb{R}$, bornée et donner un majorant de $N_\infty(g*f)$ en fonction de $N_\infty(f)$ et $N_\infty(g)$.

3) Démontrer que $*$ est une loi de composition interne sur E.

4) Montrer que la fonction $f*g$ est égale à la fonction $g*f$.

5) Soit $k,l \in \mathbb{Z}$, $e_k : t \mapsto \mathrm{e}^{ikt}$ et $e_l : t \mapsto \mathrm{e}^{ilt}$. Calculer $e_k * e_l$.

4.3 L'intégrale de Gauss

Soient $f(x) = \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2$ et $g(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

1) Montrer que f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$et déterminer leur dérivée.

2) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, on a $f(x)+g(x) = \frac{\pi}{4}$.

3) En déduire $I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.

4.4 Transformée de Laplace et intégrale de Dirichlet

On utilisera directement ici que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

On définit, si $s \in \mathbb{R}_+$,

$$F(s) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}_+$, et est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Calculer $F(s)$ pour $s \in \mathbb{R}_+^*$.

3) Montrer que F est continue en 0.

4) Déduire de ce qui précède la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.

S'y ajoute :

XII - Topologie des espace vectoriels normés

1 Intérieur et adhérence

1.1 Rappels sur l'intersection et la réunion

1.2 Parties ouvertes

1.3 Parties fermées

1.4 Point adhérent et adhérence

1.5 Caractérisation séquentielle des fermés et de l'adhérence

1.6 Normes équivalentes

2 Densité

3 Limite et continuité d'une fonction entre deux espaces vectoriels normés

3.1 Limite et continuité en un point

3.2 Caractérisations séquentielles

3.3 Opérations sur les limites

3.4 Continuité sur une partie

3.5 Fonctions lipschitziennes

4 Limite et continuité en dimension finie

4.1 Utilisation des fonctions coordonnées

4.2 Continuité des applications linéaires, multilinéaires et polynomiales

4.3 Théorème des bornes atteintes

5 Continuité, ouverts et fermés

6 Exercices à connaître

6.1 Un peu de topologie dans $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$

1) Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|.\|_\infty$ et $F = \left\{f \in E,\ \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x > 0\right\}$. Proposer deux méthodes pour montrer que F est un ouvert de E.

2) On note $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ que l'on munit des deux normes en posant :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} (|f(x)|) \text{ et } \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$$

On considère $A = \{f \in E, f(0) = 0\}$ et $g : x \mapsto 1$.

a) Est-ce que g est adhérent à A pour la norme $\|\cdot\|_\infty$?

b) Est-ce que g est adhérent à A pour la norme $\|\cdot\|_1$?

6.2 Deux exercices : densité des matrices inversibles et distance à un fermé borné

1) Montrer que $\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Soit E un evn de dimension finie et A est une partie non vide, fermée et bornée de E. Soit $x \in E$. Montrer que $\inf\limits_{y\in A} \|x-y\|$ existe et qu'il existe $a \in A$ tel que $\|x-a\| = \inf\limits_{y\in A} \|x-y\|$.

Ce réel est appelé ***distance de*** x ***à*** A et noté $\mathrm{d}(x, A)$.

6.3 Densité et continuité

1) Trouver toutes les fonctions g continues sur $\mathbb{R}$, vérifiant $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x+y) = g(x) + g(y)$.

2) Même question pour $g(x+y) = g(x)g(y)$.

6.4 Norme subordonnée

Soit u une application linéaire continue de E dans F, deux espaces vectoriels normés non nuls. On définit :

$$M_1 = \sup\left\{\frac{\|u(x)\|}{\|x\|},\ x \in E\backslash\{0\}\right\}$$
$$M_2 = \sup\{\|u(x)\|,\ x \in E \text{ t.q. } \|x\| = 1\}$$
$$M_3 = \inf\{k \geqslant 0 \text{ t.q. } \forall\, x \in E,\ \|u(x)\| \leqslant k\|x\|\}$$

1) Justifier l'existence de ces nombres.

2) Montrer que $M_1 = M_2 = M_3$.

Remarque : On note en général $|||u|||$ ce nombre, et on peut montrer que $|||.|||$ définit sur $\mathscr{L}(E,F)$ une norme. Cette norme s'appelle la ***norme subordonnée*** à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$, et elle satisfait :

$$\forall\, x \in E,\ \|u(x)\|_F \leqslant |||u|||\ \|x\|_E.$$