III – Rappels et compléments d'algèbre linéaire, 2ème partie

I. Expression et éléments caractéristiques d'un projecteur ou d'une symétrie

1) On calcule p^2 : on trouve $p^2 = p$, donc p est un projecteur.
On trouve $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big((1,1,1),(-1,3,1)\big)$ et $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(1,1,-1)$.

2) On pose $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, et $e1$, e_2 et e_3 les vecteurs de la base canonique.
Alors $e_1 = 2f_1 + f_2 - 2f_3$, $e_2 = -f_1 + f_3$ et $e_3 = f_1 + f_2 - 2f_3$. Donc si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (2x - y + z)f_1 + (x+z)f_2 + (-2x + y - 2z)f_3$, donc
$s\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (2x-y+z)f_1 - (x+z)f_2 - (-2x+y-2z)f_3 = \begin{pmatrix} 3x - 2y + 2z \\ -y \\ -4x + 2y - 3z \end{pmatrix}$.

II. Endomorphismes de rang 1

1) Puisque A est de rang 1, elle comporte au moins une colonne non nulle. Appelons-la C. Toutes les autres colonnes de A de lui sont alors proportionnelles, *i.e.* si les colonnes de A sont $C_1, \dots, C_n$, alors pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, il existe λ_j tel que $C_j = \lambda_j C$. Posons alors la matrice ligne $L = (\lambda_1 \dots \lambda_n)$. Alors $A = CL$.

2) On remarque que $A^2 = CLCL$. Posons $\alpha = LC$, qui est une matrice 1×1, que l'on assimile donc à un scalaire. D'où $A^2 = \alpha CL = \alpha A$. On peut alors conjecturer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \alpha^{n-1}A$, ce qui se démontre facilement par récurrence.

3) En revenant aux notations de la première question, si l'on note $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, alors le coefficient (i,i) de A est $\lambda_i c_i$, donc $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i$. Or la formule du produit de deux matrices assure que $\alpha = LC = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i$, d'où le résultat.

4) $(1 + \operatorname{tr} A)(A + \mathrm{I}_n) - (1 + \operatorname{tr} A)\mathrm{I}_n = (1 + \operatorname{tr} A)A = A + A^2 = A(A + \mathrm{I}_n)$. Donc $(A + \mathrm{I}_n)^2 = (A + \mathrm{I}_n) + A(A + \mathrm{I}_n) = (2 + \operatorname{tr} A)(A + \mathrm{I}_n) - (1 + \operatorname{tr} A)\mathrm{I}_n$. Un polynôme annulateur de $A + \mathrm{I}_n$ est donc $X^2 - (2 + \operatorname{tr} A)X + (1 + \operatorname{tr} A)$.
Si $\operatorname{tr} A \neq 1$, alors $\mathrm{I}_n = \dfrac{1}{1 + \operatorname{tr} A}(A + \mathrm{I}_n)(A + \mathrm{I}_n(\operatorname{tr} A - 1))$. $A + \mathrm{I}_n$ est donc inversible et $(A + \mathrm{I}_n)^{-1} = A + \mathrm{I}_n(\operatorname{tr} A - 1)$.
Si $\operatorname{tr} A = -1$, il existe une matrice $B = A + \mathrm{I}_n(\operatorname{tr} A - 1)$ telle que $AB = 0$. Mais $\operatorname{tr} B = -1 - 2n \neq 0$ donc $B \neq 0$, donc A n'est pas inversible.

III. Matrice à diagonale dominante

A est inversible si et seulement si $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\, A$, supposons que $X \neq 0$. Il existe donc $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_j| \neq 0$. On peut donc prendre $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_i|$ est maximal. Notamment, $|x_i| > 0$. Considérons la i^{e} ligne de AX :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = 0,$$

donc

$$a_{i,i} x_i = -\sum_{j \neq i} a_{i,j} x_j.$$

Par l'inégalité triangulaire,

$$|a_{i,i}| \cdot |x_i| \leqslant \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \cdot |x_j|.$$

Par maximalité de $|x_i|$, on a alors

$$|a_{i,i}| \cdot |x_i| \leqslant |x_i| \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

Comme $|x_i| > 0$, on a

$$|a_{i,i}| \leqslant \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|,$$

ce qui est absurde.

Ainsi, $\boxed{A \text{ est inversible.}}$

IV. Une caractérisation de la trace

Analyse : soit f une telle fonction. Soit $i, j, k \in [\![1, n]\!]$.
Notons $\lambda = f(E_{1,1})$. Puisque $E_{i,1}E_{1,i} = E_{i,i}$ et $E_{1,i}E_{i,1} = E_{1,1}$, il vient $f(E_{i,i}) = \lambda = \lambda \mathrm{tr}\, E_{i,i}$. Si $i \neq j$, alors $E_{i,k}E_{k,j} = E_{i,j}$ et $E_{k,j}E_{i,k} = 0$, donc $f(E_{i,j}) = 0 = \lambda \mathrm{tr}\, E_{i,j}$.
Finalement, pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, $f(E_{i,j}) = \lambda \mathrm{tr}\, E_{i,j}$. Puisque les $E_{i,j}$ forment une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, il vient $f = \lambda \mathrm{tr}$.
Synthèse : on sait que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \mathrm{tr}$ vérifie la propriété étudiée.
Conclusion : l'ensemble des formes linéaires f sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $\forall\, A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ f(AB) = f(BA)$ est

$$\{\lambda \mathrm{tr}\,,\ \lambda \in \mathbb{K}\}\,.$$