

## Feuille d'exercice n° 04 : Intégrales généralisées

### I. Révision de 1ère année

**Exercice 1** Soit  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  continue.

- 1) Montrer que si  $\int_0^\pi f(t) \sin t \, dt = 0$  alors il existe  $a \in ]0, \pi[$  tel que  $f$  s'annule en  $a$ .
- 2) Montrer que si  $\int_0^\pi f(t) \sin t \, dt = \int_0^\pi f(t) \cos t \, dt = 0$  alors  $f$  s'annule 2 fois sur  $]0, \pi[$ .  
(indice : on pourra regarder  $\int_0^\pi f(t) \sin(t-a) \, dt$ ).

**Exercice 2** (▲) [Irrationalité du nombre  $\pi$ ]

- 1) Pour  $a, b \in \mathbb{N}^*$ , montrer que la fonction polynomiale  $P_n(x) = \frac{1}{n!} x^n (bx - a)^n$  et ses dérivées successives prennent en 0 et en  $\frac{a}{b}$  des valeurs entières.
- 2) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $I_n = \int_0^\pi P_n(t) \sin t \, dt$ . Montrer que  $I_n \rightarrow 0$ .
- 3) En supposant  $\pi = \frac{a}{b}$ , montrer que  $I_n \in \mathbb{Z}$ . Conclure.

**Exercice 3** Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $a < b$ .

- 1) Trouver toutes les fonctions  $f$ , continues sur  $[a, b]$  et à valeurs réelles telles que  $\left| \int_a^b f(t) \, dt \right| = \int_a^b |f(t)| \, dt$ .
- 2) Même question pour des fonctions à valeurs complexes.

**Exercice 4** (✎) Déterminer les primitives suivantes :

- |                                   |                                 |                                   |
|-----------------------------------|---------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $\int \frac{\ln t}{t} \, dt$   | 3) $\int \frac{t}{1+t^4} \, dt$ | 6) $\int \cos^3 t \, dt$          |
|                                   | 4) $\int \tan t \, dt$          | 7) $\int \cos^2 t \sin^3 t \, dt$ |
| 2) $\int \frac{t^2}{1+t^3} \, dt$ | 5) $\int \frac{dt}{t \ln t}$    |                                   |

**Exercice 5** (✎) Déterminer les primitives suivantes :

- |                       |   |                                     |
|-----------------------|---|-------------------------------------|
| 1) $\int \ln t \, dt$ | 2) $\int t \operatorname{Arctan} t \, dt$ | 3) $\int (t^2 - t + 1)e^{-t} \, dt$ |
|-----------------------|---|-------------------------------------|

**Exercice 6** (✎) Calculer les intégrales suivantes :

- |   |  |   |
|---|--|---|
| 1) $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} \, dt$        | 3) $\int_0^1 \frac{dt}{e^t + 1}$           | 5) $\int_0^\pi \frac{\sin t}{3 + \cos^2 t} \, dt$ |
| 2) $\int_1^e \frac{dt}{t + t(\ln t)^2}$ | 4) $\int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} \, dt$ |   |

**Exercice 7** (✎) Calculer  $I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos(mt) \cos(nt) \, dt$  pour  $m, n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 8** (🚲) Pour tout entier  $n$  on pose  $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} \, dx$ . Calculer  $I_0$  et  $I_1$ . Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (3+2n)I_n = 2nI_{n-1}.$$

**Exercice 9** (▲) On définit la fonction  $F$  de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}$  par  $\forall x \in \mathbb{R}_+$ ,  

$$F(x) = \int_0^\pi \frac{|\sin(tx)|}{t} dt.$$

- 1) Justifier proprement la définition de  $F$ .
- 2) Montrer que  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et calculer sa dérivée.
- 3) Nous étudions à présent le comportement asymptotique de  $F$ .

a) Montrer que  $\forall x > 1$ , 
$$F(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor - 1} \left( \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \right) + \int_{\pi \lfloor x \rfloor}^{\pi x} \frac{|\sin t|}{t} dt.$$

b) On rappelle que  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$ . En déduire que  $F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \ln x$ .

**Exercice 10** (✎)

Montrer que :  $\forall x \in [0, \pi/2]$ ,  $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ .

**Exercice 11** Déterminer les limites des suites définies par le terme général suivant :

$$1) \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}} \quad 2) \left( \frac{(2n)!}{n^n n!} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

## II. Convergence et intégrabilité

**Exercice 12** (✎) Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \neq 0$ . On pose  $I(\alpha, \beta) = \int_0^1 \frac{dx}{|1 - x^\alpha|^\beta}$ . Représenter l'ensemble des points du plan  $M(\alpha, \beta)$  où  $I(\alpha, \beta)$  converge.

**Exercice 13** (✎) Donner une CNS sur  $\alpha \in \mathbb{R}$  pour que  $\int_0^{+\infty} \frac{t - \sin t}{t^\alpha} dt$  existe.

**Exercice 14** (✎) Étudier l'intégrabilité des applications suivantes :

- 1)  $x \mapsto \frac{1+x}{\sqrt{x}+x^2}$  sur  $]0; 1]$
- 2)  $x \mapsto \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{x^3+1}}$  sur  $[0; +\infty[$
- 3)  $x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x^3+1}}$  sur  $[1; +\infty[$
- 4)  $x \mapsto \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+x}}$  sur  $]0; 1]$
- 5)  $x \mapsto \frac{\ln x}{x^3+x^2}$  sur  $]0; 1]$
- 6)  $x \mapsto \frac{1}{x} \left( \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1} \right)$  sur  $[1; +\infty[$
- 7)  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^6}}$  sur  $] -1; 1[$
- 8)  $x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^4}}$  sur  $]0; +\infty[$
- 9)  $x \mapsto \frac{1+x^2 e^{-x}}{x^2 + e^{-2x}}$  sur  $] -\infty; +\infty[$ .

**Exercice 15** Soit  $f \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$ . On suppose que  $f$  et  $f'$  sont intégrables sur  $[0, +\infty[$ . Montrer que  $f$  tend vers 0 en  $+\infty$ .

**Exercice 16** Soient  $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ . On suppose que  $y$  et  $y''$  sont de carré intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  : montrer que  $y'$  l'est également.

**Exercice 17**

Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

- 1) Prouver que  $\int_0^{+\infty} f$  converge si et seulement si la suite  $n \mapsto \int_0^n f$  converge et que dans ces conditions :

$$\int_0^{+\infty} f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f.$$

- 2) Que se passe-t-il si on enlève l'hypothèse  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  ?

**Exercice 18 (▲)**

Soient  $\alpha > 0$  et  $f \in \mathcal{C}^0([1, +\infty[, \mathbb{R}_+^*)$ .

- 1) On suppose que  $f$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ . On pose  $R(x) = \int_x^{+\infty} f(t) dt$  pour  $x \geq 1$ . Étudier l'intégrabilité de  $x \mapsto \frac{f(x)}{R(x)^\alpha}$  sur  $[1, +\infty[$ .
- 2) On suppose que  $f$  n'est pas intégrable sur  $[1, +\infty[$ . On pose  $S(x) = \int_1^x f(t) dt$  pour  $x \geq 1$ . Étudier l'intégrabilité de  $x \mapsto \frac{f(x)}{S(x)^\alpha}$  sur  $[2, +\infty[$ .

**Exercice 19** Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  continue, décroissante et de limite nulle. On pose pour tout  $n \geq 0$  :

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t) \sin(t) dt.$$

- 1) Montrer que  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge.
- 2) Montrer que  $\int_0^{+\infty} f(t) \sin(t) dt$  converge. Quel est son signe ?
- 3) On suppose que  $f(x) \geq \frac{1}{x}$  au voisinage de  $+\infty$ . Montrer que  $t \mapsto f(t) \sin(t)$  n'est pas intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

**Exercice 20**

Soit  $f : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Montrer que si  $\int_1^{+\infty} f(t) dt$  converge, alors  $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$  converge.

**III. Calculs, limites et équivalents d'intégrales généralisées**

**Exercice 21** (✎) Existence et calcul des intégrales suivantes :

- 1)  $\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{x^{10} + 1} dx$
- 3)  $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$
- 5)  $\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1-3x+2x^2) dx$ .
- 2)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} 2x} dx$
- 4)  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx$

**Exercice 22** (✎) Existence et calcul des intégrales suivantes :

- 1)  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}} dx$
- 3)  $\int_0^{+\infty} \frac{x - \operatorname{Arctan} x}{x^3} dx$
- 2)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+x+1)^2} dx$
- 4)  $\int_0^1 \frac{1+x}{\sqrt{x(1-x)}} dx$ .

**Exercice 23** On veut étudier la convergence de  $I = \int_0^{+\infty} \left( \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \right) dx$ , et calculer cette intégrale.

- 1) Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ . Majorer  $\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$  en fonction de  $x$  (on distinguera deux cas :  $x < 1$  et  $x \geq 1$ ).
- 2) En déduire que  $I$  converge.
- 3) Calculer  $I$  grâce à une intégration par parties.

**Exercice 24** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}$ .

- 1) Existence de  $I_n$  ?
- 2) Donner une relation entre  $I_n$  et  $I_{n+1}$  (on pourra utiliser une intégration par parties).
- 3) Calculer  $I_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 25** Pour  $x > 0$ , on pose  $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ .

- 1) Donner un équivalent simple de  $f(x)$  en 0.
- 2) Donner un équivalent simple de  $f(x)$  en  $+\infty$  (on pourra utiliser une intégration par parties et écrire que  $f(x) = \int_x^{+\infty} u'(t)v(t) dt = [uv]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} u(t)v'(t) dt$ , et montrer que  $\int_x^{+\infty} u(t)v'(t) dt \leq \frac{1}{x}f(x)$ ).

**Exercice 26** On pose :  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) dx$ ,  $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$  et  $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x) dx$ .

- 1) Justifier l'existence de  $I$ ,  $J$  et  $K$ .
- 2) Démontrer que  $I = J = K$ .
- 3) Calculer  $I$ .

**Exercice 27**

- 1) Montrer que  $\int_0^1 x \ln(x) dx$  converge.
- 2) Soit  $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x \ln(x)}{(1+x^2)^\alpha} dx$ 
  - a) Déterminer la nature de  $I(\alpha)$  en fonction de  $\alpha$ .
  - b) Effectuer le changement de variable  $y = \frac{1}{x}$  dans  $I(2)$ . En déduire la valeur de  $I(2)$ .

**Exercice 28** Considérons  $I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^a)}$  où  $a \in \mathbb{R}_+$ .

- 1) Montrer que  $I$  converge.
- 2) Via un changement de variable, calculer  $I$ .

**Exercice 29** Convergence de la suite  $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t^n} dt$  ? Limite ?

**Exercice 30** Soit  $f$  une application continue de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$  et  $F$  de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :


$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

- 1) Montrer que si  $f$  admet une limite  $\ell$  non nulle en  $+\infty$ , alors  $F$  admet aussi  $\ell$  pour limite en  $+\infty$ .
- 2) Montrer que si  $f$  admet 0 pour limite en  $+\infty$ , alors  $F$  également.
- 3) Donner un exemple où  $f$  n'a pas de limite en  $+\infty$  mais où  $F$  tend vers 0.
- 4) Montrer que si  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ , alors  $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ .

**Exercice 31** Le but de cet exercice est de montrer la convergence de l'intégrale généralisée suivante :  $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4 \sin^2 x}$ .  
Pour cela, on considère la série de terme général

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{1+x^4 \sin^2 x}.$$

- 1) Par un changement de variable, transformer  $u_n$  en  $u_n = \int_0^\pi \frac{dx}{1+(n\pi+x)^4 \sin^2 x}$ .
- 2) Encadrer ensuite  $u_n$  par les termes de la suite  $v_n$  où  $v_n = \int_0^\pi \frac{dx}{1+(n\pi)^4 \sin^2 x}$ .
- 3) Calculer explicitement l'intégrale  $v_n$  (*indication* : considérer le changement de variable  $t = \tan x$ ).
- 4) En déduire un équivalent de  $u_n$ .
- 5) Conclure.

**Exercice 32** () Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $A_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x} dx$  et  $B_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{x} dx$ .

- 1) Question préliminaire : soit  $g$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  telle que  $g(0) = 0$ . Montrer que  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t) \sin((2n+1)t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .
- 2) Étudier  $A_n - A_{n-1}$  puis calculer  $A_n$ .
- 3) Étudier  $B_n - A_n$  puis montrer que  $(B_n)$  admet une limite finie, et la donner.
- 4) En déduire la valeur de  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ .

**Exercice 33** Soit  $a \in ]0, 1[$ . Déterminer la nature de la série  $\sum_{n \geq 0} a^{\sqrt{n}}$ .

