IX. Espaces probabilisés : rappels et introduction

31 octobre 2024

Table des matières

1. Rappels : dénombrement **3**
- 1.1. Cardinal d'un ensemble fini . . . 3
- 1.2. Réunion, intersection et complémentaire . . . 4
- 1.3. Produit cartésien . . . 4
- 1.4. Applications entre ensembles finis . . . 4
- 1.5. Parties d'une ensemble fini . . . 5

2. Rappels : espaces probabilisés sur un univers fini **6**
- 2.1. Univers, évènements . . . 6
- 2.2. Variables aléatoires . . . 7
- 2.3. Système complet d'évènements . . . 7
- 2.4. Définition d'espace probabilisé fini . . . 8
- 2.5. Probabilité uniforme . . . 9
- 2.6. Propriétés élémentaires . . . 9
- 2.7. Détermination par les images des évènements élémentaires 9

3. Problèmes posés par un univers infini **10**

4. Ensembles dénombrables, familles sommables **12**
- 4.1. Ensembles dénombrables . . . 12
- 4.2. Familles sommables . . . 13
  - a. Problème de la sommation par paquets . . . 13
  - b. Problème de la permutation des termes d'une somme 14
  - c. Familles sommables de réels positifs . . . 14
  - d. Familles sommables de nombres complexes . . . 16

Programme officiel

Variables aléatoires discrètes

On généralise l'étude des variables aléatoires à valeurs dans un ensemble fini menée en première année aux variables aléatoires discrètes. Ces outils permettent d'aborder, sur des exemples simples, l'étude de procédés stochastiques à temps discret. La mise en place du cadre de cette étude se veut à la fois minimale, pratique et rigoureuse :

- *la notion de tribu n'appelle aucun autre développement que sa définition ;*
- *l'étude de la dénombrabilité d'un ensemble et la construction d'espaces probabilisés sont hors programme ;*
- *les diverses notions de convergences (presque sûre, en probabilité, en loi, etc.) sont hors programme.*

Toutes les variables aléatoires mentionnées dans le programme sont implicitement supposées discrètes.

La notion de variable à densité est hors programme.

La notion d'espérance conditionnelle est hors programme.

A - Ensembles dénombrables, familles sommables

Ce préambule propose une introduction a minima de la dénombrabilité et des familles sommables, afin de poser les bases de vocabulaire, méthodes et résultats qui seront admis, et directement utilisés. Chaque professeur est libre d'en adapter le contenu au niveau de formalisme qu'il juge préférable pour ses étudiants.
Ces notions ne feront l'objet d'aucune évaluation spécifique, et leur usage est strictement réservé au contexte probabiliste.

- Un ensemble est dit (au plus) dénombrable s'il est en bijection avec (une partie de) $\mathbb{N}$, c'est-à-dire s'il peut être décrit en extension sous la forme $\{x_i, i \in I\}$ où $I = \mathbb{N}$ ($I \subset \mathbb{N}$) avec des x_i distincts.

  Sont dénombrables : $\mathbb{Z}$, un produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables, une union au plus dénombrable d'ensembles dénombrables. Une partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.

- En vue de généraliser les sommes finies et les sommes de séries de réels positifs, on admet sans soulever de difficulté qu'on sait associer à toute famille au plus dénombrable $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0, +\infty]$ sa somme $\sum_{i\in I} x_i \in [0, +\infty]$, et que pour tout découpage en paquets $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ de I, $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{i\in I_n} x_i\Big)$.

  La famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0, +\infty]$ est dite sommable si $\sum_{i\in I} x_i < \infty$. En pratique, dans le cas positif, les étudiants peuvent découper, calculer et majorer leurs sommes directement, la finitude de la somme valant preuve de sommabilité.

- Une famille $(x_i)_{i\in I}$ au plus dénombrable de nombres complexes est dite sommable si $(|x_i|)_{i\in I}$ l'est. Pour $I = \mathbb{N}$, la sommabilité d'une suite équivaut à la convergence absolue de la série associée. Si $|x_i| \leqslant y_i$ pour tout $i \in I$, la sommabilité de $(y_i)_{i\in I}$ implique celle de $(x_i)_{i\in I}$.

  En cas de sommabilité, les sommes se manipulent naturellement grâce aux propriétés suivantes : croissance, linéarité, sommation par paquets, théorème de Fubini, produit de deux sommes.

1. Rappels : dénombrement

Soient E, F et G trois ensembles.

1.1. Cardinal d'un ensemble fini

Définition 1.1.1.
On dit que E et F sont *équipotents* s'il existe une bijection de E dans F. Dans ce cas, on notera $E \cong F$ (notation non officielle), et si φ est une bijection de E dans F, on notera $\varphi : E \xrightarrow{\sim} F$.

Définition 1.1.2.
On dit que E est *fini* s'il est vide ou s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $E \cong [\![1, n]\!]$. Dans le cas contraire, E est dit *infini*.

Le résultat qui donne un sens à ce que l'on appelle intuitivement *le nombre d'éléments d'un ensemble fini* est alors le suivant.

Théorème 1.1.3.
(i) Soient n, m deux entiers naturels non nuls. Si $[\![1, n]\!] \cong [\![1, m]\!]$, alors $n = m$.
(ii) Cela assure que si un ensemble est fini et équipotent à $[\![1, n]\!]$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, alors ce n est unique et est appelé le *cardinal* de E, et est noté $\operatorname{Card} E$ ou $|E|$.
Par convention, $\operatorname{Card} \varnothing = 0$.

Remarque 1.1.4.
On trouvera parfois la notation $\#E$.

Exemple 1.1.5. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[\![1, n]\!]$ est évidemment fini et de cardinal n.
2. Soient $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$.
Alors $\operatorname{Card}[\![n, m]\!] = m-n+1$. En effet, l'application $[\![1, m-n+1]\!] \to [\![n, m]\!]$, $a \mapsto a+n-1$ est une bijection.

Dans toute la suite de ce rappel sur le dénombrement on supposera que E est fini de cardinal n.

Théorème 1.1.6.
E est équipotent à F si et seulement si (F est aussi fini et $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F$).

Théorème 1.1.7.
Soit $A \subset E$. Alors A est fini et $\operatorname{Card} A \leqslant \operatorname{Card} E$.
De plus, $\operatorname{Card} A = \operatorname{Card} E$ si et seulement si $A = E$.

Remarque 1.1.8.
Grâce à ce résultat, pour montrer l'égalité de deux ensembles finis, on peut montrer la double inclusion, mais aussi se contenter d'une inclusion et montrer l'égalité des cardinaux.

Ce résultat est à rapprocher du résultat assurant que deux espaces vectoriels de dimension finie sont égaux si et seulement si l'un est inclus dans l'autre et ils ont même dimension.

Théorème 1.1.9.
Soit f une application de F dans G.
(i) Si G est fini et f est injective, alors F est fini également, et $\operatorname{Card} F \leqslant \operatorname{Card} G$.

(ii) Si F est fini et f est surjective, alors G est fini également, et $\operatorname{Card} F \geqslant \operatorname{Card} G$.

(iii) Si F et G sont finis et $\operatorname{Card} F = \operatorname{Card} G$, alors :

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow f \text{ est surjective} \Leftrightarrow f \text{ est bijective.}$$

Corollaire 1.1.10 (Principe des tiroirs, ou *Pigeonhole Principle* en anglais)**.**
Si $m < n$, il est impossible de ranger n paires de chaussettes dans m tiroirs sans en mettre au moins deux dans le même tiroir.

Exercice 1.1.11.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe $0 \leqslant i \neq j \leqslant n$ tels que $n \mid (a_i - a_j)$.

1.2. Réunion, intersection et complémentaire

Définition 1.2.1.
Lorsque deux ensembles A et B sont disjoints, la réunion de A et B est appelée *union disjointe* de A et B, et est notée $A \sqcup B$.

Théorème 1.2.2.
Soient A et B deux parties de E.

(i) Si A et B sont disjoints, alors $\operatorname{Card}(A \sqcup B) = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B$;

(ii) $\operatorname{Card}(A \backslash B) = \operatorname{Card} A - \operatorname{Card}(A \cap B)$;

(iii) $\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - \operatorname{Card}(A \cap B)$.

(iv) $\operatorname{Card}\left(\complement_E^A\right) = \operatorname{Card} E - \operatorname{Card} A$.

Remarque 1.2.3.
Il existe une formule qui généralise le résultat précédent à la réunion d'une famille finie d'ensembles finis : c'est la *formule de Poincaré*, aussi appelée *formule du crible*. Elle est hors-programme.

1.3. Produit cartésien

Théorème 1.3.1.
Soient E et F deux ensembles finis. Alors $E \times F$ est fini et

$$\operatorname{Card}(E \times F) = (\operatorname{Card} E) \times (\operatorname{Card} F).$$

Il existe beaucoup d'analogies entre la dimension d'un espace vectoriel et le cardinal d'un ensemble, mais $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$.

Remarque 1.3.2.
Ce résultat se généralise facilement par récurrence à un produit de q ensembles finis, $q \in \mathbb{N}^*$:

$$\operatorname{Card}\left(\prod_{i=1}^{q} E_i\right) = \prod_{i=1}^{q} \operatorname{Card} E_i.$$

Exercice 1.3.3.
Combien y a-t'il de possibilités de tirer neuf cartes avec remise dans un jeu de 32 cartes ?

1.4. Applications entre ensembles finis

Théorème 1.4.1.
Soient E et F deux ensembles finis. Alors F^E est fini et

$$\operatorname{Card}\left(F^E\right) = (\operatorname{Card} F)^{\operatorname{Card} E}.$$

Définition 1.4.2.
Soit $p \in [\![1, n]\!]$. On appelle *p-arrangement de E* toute injection de $[\![1, p]\!]$ dans E. Autrement dit, un p-arrangement est une manière de choisir p éléments deux à deux distincts de E **en tenant compte de l'ordre dans lequel on choisit ces éléments** ; c'est donc aussi un p-uplet de E, ou encore une liste de p éléments de E.

Exemple 1.4.3.
Si $E = [\![1, 5]\!]$ et $p = 2$, les applications φ et ψ de $[\![1, 2]\!]$ dans E telles que $\varphi(1) = 3$, $\varphi(2) = 5$, $\psi(1) = 5$ et $\psi(2) = 3$, sont deux p-arrangements **différents** de E.

On peut aussi les identifier aux couples $(3, 5)$ et $(5, 3)$.

Théorème 1.4.4.
Si $\operatorname{Card} E = n$, il y a exactement $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ p-arrangements de E.

Démonstration.
Pour construire une injection f de $[\![1, p]\!]$ dans E, il y a n choix possibles pour $f(1)$. Il reste alors $n - 1$ choix possibles pour $f(2)$ et ainsi de suite, jusqu'aux $n - p + 1$ choix possibles pour $f(p)$: il y a donc $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)$ injections possibles. $\square$

Remarque 1.4.5.
Les arrangements sont utilisés pour modéliser des tirages **successifs** et **sans remise**.

Exercice 1.4.6.
Vous jouez « au hasard » au tiercé lors d'une course avec 10 partants : combien avez-vous de chance d'avoir le tiercé dans l'ordre ?

Corollaire 1.4.7.
Le groupe S_n des permutations sur n éléments est fini de cardinal $n!$.

Démonstration.
S_n correspond à l'ensemble des n-arrangements de $[\![1, n]\!]$. $\square$

1.5. Parties d'une ensemble fini

Définition 1.5.1.
Soit $p \in [\![0, n]\!]$. On appelle p-combinaison de E toute partie de E de cardinal p. Autrement dit, une p-combinaison est une manière de choisir p éléments distincts de E **sans tenir compte de l'ordre dans lequel on choisit ces éléments**.
On note alors $\dbinom{n}{p}$ le nombre de p-combinaisons de E ; ce nombre se lit « p parmi n ».

Remarque 1.5.2.
Les combinaisons sont utilisées pour modéliser des tirages **simultanés**.

Remarque 1.5.3.
On étend cette définition à $p \in \mathbb{Z}$ par $\dbinom{n}{p} = 0$ lorsque $p \notin [\![0, n]\!]$.

Théorème 1.5.4.
Si $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, n]\!]$, alors $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{(n-p)!p!}$.

Exercice 1.5.5.
Vous jouez au hasard au tiercé lors d'une course avec 10 partants : combien avez-vous de chance d'avoir le tiercé dans le désordre ?

Proposition 1.5.6 (Formule du triangle de Pascal)**.**
Si $n \in \mathbb{N}$ et si $p \in \mathbb{N}$, $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n-1}{p-1} + \dbinom{n-1}{p}$.

Proposition 1.5.7 (Formule du binôme de Newton).
Soit x et y deux éléments d'un anneau $(A, +, \cdot)$ commutant l'un avec l'autre ($xy = yx$), soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Théorème 1.5.8.
Si E est fini, l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties l'est aussi et

$$\operatorname{Card} \mathscr{P}(E) = 2^{\operatorname{Card} E}.$$

Démonstration.
Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, notons P_i l'ensemble des parties de E ayant i éléments. Nous avons alors $\mathscr{P}(E) = \bigsqcup_{i=0}^{n} P_i$. Or chaque P_i est de cardinal $\binom{n}{i}$, donc $\mathscr{P}(E)$ est fini et :

$$\begin{aligned} \operatorname{Card} \mathscr{P}(E) &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \\ &= (1+1)^n \qquad \text{(binôme de Newton)} \\ &= 2^n. \end{aligned}$$

On peut aussi voir qu'il y a une correspondance bijective entre les parties de E et les applications à variables dans E et à valeurs dans $\{0, 1\}$, par $\mathscr{P}(E) \to \{0, 1\}^E$, $A \mapsto \mathbf{1}_A$. □

Exercice 1.5.9.
Dans une urne, on place quatre boules rouges (numérotées 1 à 4) et trois boules vertes (numérotées 5 à 7). On réalise trois tirages avec remise, un résultat est le triplet des boules tirées.

Combien y a-t-il de résultats contenant exactement une boule rouge ? Au moins une boule rouge ? Au plus deux boules rouges ? Dont les deux dernières boules sont de couleurs différentes ?

Et si les tirages se font sans remise ?

2. Rappels : espaces probabilisés sur un univers fini

2.1. Univers, évènements

Définition 2.1.1 (Univers).
On appelle *univers* un ensemble non vide Ω, que l'on peut voir comme l'ensemble des résultats (ou issues, ou réalisations ...) d'une expérience aléatoire.

Dans ce cas, on appelle *évènement* toute partie de l'univers, c'est-à-dire tout élément de $\mathscr{P}(\Omega)$ et on appelle *évènement élémentaire* ou *éventualité* les évènements singletons, c'est-à-dire de la forme $\{\omega\}$, pour $\omega \in \Omega$ (selon le contexte, le terme évènement élémentaire peut parfois désigner les éléments de Ω et non les singletons).

Un évènement est dit *impossible* s'il désigne la partie vide ($\varnothing$) et *certain* s'il désigne la partie pleine (Ω).

Étant donnés deux évènements A et B, on définit

— l'*évènement contraire de* A : $\Omega \setminus A$, noté $\overline{A}$.

— l'évènement « A et B » (conjonction de A et B) : $A \cap B$.

— l'évènement « A ou B » (disjonction de A et B) : $A \cup B$.

On dit que A et B sont incompatibles si $A \cap B = \varnothing$, autrement dit si leur conjonction est impossible.

On dit que des évènements A_1, ..., A_n sont *mutuellement incompatibles* si leur conjonction est impossible. On dit qu'ils sont *deux à deux incompatibles* si pour tout i et j, $i \neq j$ implique A_i et A_j incompatibles. Dans ce dernier cas, on dit que leur union $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ est une *union disjointe*.

Remarque 2.1.2.
L'incompatibilité deux à deux de n évènements (avec $n \geqslant 2$) implique l'incompatibilité mutuelle mais la réciproque est fausse. Considérons par exemple $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ l'univers des résultats d'un tirage d'un dé à six faces. Alors les trois évènements « le résultat est pair », « le résultat est divisible par 3 » et « le résultat est un nombre premier » ne sont pas deux à deux incompatibles mais sont mutuellement incompatibles.

Exemple 2.1.3.
Pour modéliser les tirages successifs, sans remise, de deux boules dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, on peut utiliser l'univers $[\![1, n]\!]^2$.

Ici, l'évènement $\{(i, k)\}$ modélise « on tire d'abord la boule i, puis la boule k » Les évènements du type $\{(i, i)\}$ n'ont pas d'interprétation dans notre modèle. Ce n'est pas grave : on leur attribuera plus tard une probabilité nulle.

2.2. Variables aléatoires

Définition 2.2.1.
Une *variable aléatoire* (v.a.) X est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E. Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite *réelle*. On appelle parfois *univers image* l'image directe de Ω par X.

Exemple 2.2.2.
Intuitivement, X représente une valeur associée à une expérience aléatoire : si l'on prend l'exemple du cas d'une personne jouant au loto, la valeur X, exprimée en euros, de son gain au loto lors du tirage qui aura lieu à une certaine date peut être modélisée par une variable aléatoire à valeurs réelles (l'univers Ω étant l'ensemble des tirages de loto possible).

Remarque 2.2.3.
Une variable aléatoire modélise donc un « objet aléatoire ». Si l'on considère une matrice aléatoire, on manipulera donc des variables aléatoires à valeurs matricielles, tandis que si l'on considère des triangles aléatoires on manipulera des variables aléatoires à valeurs dans l'ensemble des triangles du plan.

Par exemple, si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires à valeurs dans un ensemble A, si P_n est la (mesure de) probabilité empirique par rapport à $X_1, \dots, X_n$, alors P_n est une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble des (mesures de) probabilités sur A.

Définition 2.2.4.
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble E.

Pour toute partie A de E, on note $\{ X \in A \}$ ou $(X \in A)$, (voire $[X \in A]$) l'évènement $X^{-1}(A)$.

Si $E \subset \mathbb{R}$, et $x \in \mathbb{R}$, X est dite *réelle* et on note $(X = x)$, $(X \leqslant x)$, $(X < x)$, $(X \geqslant x)$, $(X > x)$ respectivement les évènements $X^{-1}(\{ x \})$, $X^{-1}(]-\infty, x])$, ...

On note $P(X \in A)$, $P(X = x)$, $P(X \leqslant x)$, ... les probabilités de ces évènements.

Exemple 2.2.5.
Pour reprendre l'exemple précédent, $(X \geqslant 1000)$ représente l'évènement « le gain du joueur au loto est supérieur ou égal à mille euros » et $P(X \geqslant 1000)$ représente la probabilité de cet évènement.

2.3. Système complet d'évènements

Définition 2.3.1.
On dit qu'une famille $(A_i)_{i \in I}$ d'évènements dans un univers Ω est un *système complet d'évènements* si ces évènements sont deux à deux incompatibles et que leur union (disjointe) est certaine : $\Omega = \bigsqcup_{i \in I} A_i$.

Proposition 2.3.2.
Si A est un évènement, $\left(A, \overline{A}\right)$ est un système complet d'évènements, appelé *système complet d'évènements associé à A*.

Proposition 2.3.3.
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble fini E. Alors $([X = x])_{x \in E}$ est un système complet d'évènements, appelé *système complet d'évènements associé à X*.

Remarque 2.3.4.
On utilisera presque tout le temps un de ces deux types de systèmes complets d'évènements.

Exercice 2.3.5.
On lance un dé à 6 faces, on note X le numéro obtenu. Montrer que les évènements $[X = 1]$, $[X = 2]$ et $[X \geqslant 3]$ forment un système complet.

Remarque 2.3.6.
La notion de système complet d'évènements est très proche de celle de partition. Les différences sont les suivantes :

1. un système complet d'évènements est une famille de parties de Ω alors qu'une partition est un ensemble de parties de Ω ;
2. la notion de système complet d'évènements ne s'utilise qu'en probabilités ;
3. rien dans la définition de système complet d'évènements n'impose aux A_i d'être non vides.

Proposition 2.3.7.
Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'évènements sur un univers Ω, soit B un évènement. Alors, B peut s'écrire comme l'union disjointe suivante :

$$B = \bigsqcup_{i\in I} B \cap A_i.$$

Remarque 2.3.8.
Cette écriture est typique des énoncés en probabilités. Il faut bien voir qu'elle dissimule deux résultats : l'égalité ensembliste et le fait que l'union écrite est disjointe.

2.4. Définition d'espace probabilisé fini

Définition 2.4.1.
Une *probabilité* (ou *mesure de probabilité*) sur un univers fini Ω est une application P de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

1. Pour tout évènement A, $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. Pour tout couple (A, B) d'évènements, si A et B sont incompatibles alors $P(A \sqcup B) = P(A) + P(B)$.

Un *espace probabilisé fini* est un couple (Ω, P), où Ω est un univers fini et P une probabilité.

Pour tout évènement A d'un espace probabilisé (Ω, P), la valeur $P(A)$ est appelée probabilité de l'évènement A.

On dit qu'un évènement A est *presque sûr* (ou *quasi certain*) si $P(A) = 1$ et est *négligeable* (ou *quasi impossible*) si $P(A) = 0$.

Remarque 2.4.2.
1. L'intérêt de la notion de quasi certitude ou quasi impossibilité n'est pas évidente quand il s'agit de probabilités sur un univers fini. Donnons un exemple intuitif dans le cas d'un univers infini : si on tire un réel au hasard dans $[0, 1]$, il n'est pas impossible d'obtenir exactement le réel $1/3$ mais la probabilité de cet évènement est nulle (la probabilité d'obtenir un réel situé dans un intervalle donné est proportionnelle au diamètre de cet intervalle). C'est donc un évènement quasi-impossible mais non impossible.
2. Il est important de retenir que la notion de quasi impossibilité ne veut pas dire « probabilité faible ». Un physicien dirait qu'un évènement de probabilité 10^{-100} est impossible (le nombre d'atomes dans l'univers est de l'ordre de 10^{80}) mais pour un mathématicien, un tel évènement n'est même pas un évènement quasi impossible.

Définition 2.4.3.
Un prédicat défini sur Ω vrai sur un évènement de probabilité 1 sera dit « presque-sûr ».

Exemple 2.4.4.
Reprenons l'exemple 2.1.3 : on tire successivement, sans remise, deux boules dans une urne contenant $n \geqslant 2$ boules numérotées de 1 à n. Il est pratique de considérer comme univers $\Omega = [\![1, n]\!]^2$. On prend alors une probabilité P telle que l'évènement $\{ (i,i) \mid 1 \leqslant i \leqslant n \}$ est négligeable.

Sur cet univers, presque-sûrement on aura « $i \neq k$ » pour $1 \leqslant i, k \leqslant n$.

2.5. Probabilité uniforme

Définition 2.5.1 (probabilité uniforme)**.**
Soit Ω un univers fini. L'application

$$\begin{array}{rccc} P: & \mathscr{P}(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ & A & \mapsto & \frac{\operatorname{Card} A}{\operatorname{Card} \Omega} \end{array}$$

est une probabilité, appelée *probabilité uniforme*.

Remarque 2.5.2.
Cette probabilité modélise souvent l'expression « au hasard », prise dans son acceptation courante (tirer une boule au hasard dans une urne, etc.).

Exercice 2.5.3.
On modélise le tirage d'une boule dans une urne (qui en contient n). On pose $\Omega = [\![1, n]\!]$, si $1 \leqslant k \leqslant n$, l'évènement $\{k\}$ modélise « le numéro k a été tiré ». Si $A \subset [\![1, n]\!]$, on définit

$$P(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Vérifier que P définit bien une probabilité sur Ω. Quelle est la situation modélisée ?

Exemple 2.5.4.
Continuons l'exemple 2.4.4 : la probabilité que l'on considérera sur Ω n'est pas uniforme, mais sa restriction à $\{ (i,k) \mid 1 \leqslant i, k \leqslant n \text{ et } i \neq k \}$ le sera.

2.6. Propriétés élémentaires

Proposition 2.6.1.
Soit (Ω, P) un espace probabilisé. Soit A et B deux évènements. Alors on a

1. $P(\varnothing) = 0$;
2. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$;
3. $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$;
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
5. $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

Proposition 2.6.2.
Soit (Ω, P) un espace probabilisé. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A_1, \ldots, A_n$ des évènements *deux à deux incompatibles*. Alors la probabilité de leur union (appelée union disjointe) est la somme de leurs probabilités :

$$P\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Proposition 2.6.3 (Formule des probabilités totales, première forme)**.**
Soit (Ω, P) un espace probabilisé, $n \in \mathbb{N}^*$, $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ un système complet d'évènements et B un évènement. Alors

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B).$$

2.7. Détermination par les images des évènements élémentaires

Dans cette partie, on considère un univers fini $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 2.7.1.
Soit P une probabilité sur Ω. Alors pour tout évènement A, on a

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\ \omega\ \}). \tag{1}$$

Corollaire 2.7.2.
En particulier, des réels p_1, ..., p_n étant donnés, il existe au plus une probabilité sur Ω vérifiant $\forall i \in [\![1, n]\!] \quad P(\{\ \omega_i\ \}) = p_i$.

Remarque 2.7.3.
Remarquons que pour qu'une probabilité vérifiant cette condition existe, il est nécessaire que les p_i soit tous positifs ou nuls (car ce sont des probabilités) et que leur somme soit égale à 1 (car d'après l'égalité (1) c'est la probabilité de Ω). La proposition suivante montre que ces deux conditions sont suffisantes.

Proposition 2.7.4.
Soit p_1, ..., p_n, n réels positifs ou nuls de somme égale à 1. Alors il existe une (unique) fonction P de probabilité sur Ω telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $P(\{\ \omega_i\ \}) = p_i$.

Exemple 2.7.5.
Nous pouvons maintenant définir des mesures de probabilités de la manière suivante : « la probabilité P est définie sur $[\![0, 5]\!]$ par

k	0	1	2	3	4	5
$P(\{k\})$	1/4	0	1/2	1/12	1/12	1/12

».

Exemple 2.7.6.
Étant donné des points $A_1, \ldots, A_n$ dans un ensemble (fini) Ω, on définit la (mesure de) probabilité empirique par rapport à $A_1, \ldots, A_n$ par

$$\forall x \in \Omega,\ P_n(\{x\}) = \frac{1}{n}\mathrm{Card}\left\{\ i \in [\![1, n]\!] \mid A_i = x\ \right\}.$$

3. Problèmes posés par un univers infini

... et surtout, non dénombrable ... (d'après le cours de M. Arsac, en classe de MP* au lycée La Martinière Monplaisir).

On lance une pièce, jusqu'à ce qu'on obtienne Pile. Les tirages sont « évidemment » considérés indépendants. Si la pièce est équilibrée, on a une chance sur deux d'obtenir Pile dès le premier lancer. Mais il n'est pas tout-à-fait impossible de lancer 1000 fois la pièce et de tomber 1000 fois sur Face. Si on s'intéresse à la loi de la variable aléatoire « numéro du premier tirage où on obtient Pile », aucun univers fini ne va convenir : pour tout N, un univers décrivant le lancer N fois d'une pièce sera insuffisant.
On va donc assez naturellement s'intéresser à l'univers suivant :

$$\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$$

(ensemble des suites de 0 et de 1, 0 désignant par exemple Face et 1 désignant Pile). On indexe les suites à partir du rang 1, le terme de rang k étant l'issue du k-ième lancer.

Remarquons que non seulement Ω est infini, mais il est « gros » : il n'est pas dénombrable.

Si $\omega = (\omega_n)_{n \geqslant 1} \in \Omega$, la seule probabilité raisonnable (intuitivement, mais on va étayer cette intuition plus loin) donnerait

$$P(\{\omega\}) = 0.$$

Et pourtant l'évènement $\{\omega\}$ n'est pas impossible (on suppose que la pièce a bien un côté Pile et un côté Face, et que la probabilité de tomber sur Pile est $p \in]0, 1[$. Mais définir (comme dans le cas d'un univers fini) la probabilité d'un évènement comme somme des probabilités d'évènements élémentaires semble voué à l'échec (en ajoutant des 0, on n'obtient pas grand chose d'intéressant) : on ne prend pas les choses par le bon bout.

Qu'est ce alors quele « bon bout » ? S'il n'est pas judicieux de considérer les « petits » évènements, on peut essayer de partir des « gros ». Par exemple, si la probabilité d'obtenir Pile (c'est-à-dire 1) vaut p, si

$$A=\{\omega\in\Omega,\ \omega_1=1\}$$

il est naturel de définir $P(A)=p$ (probabilité pour que le premier lancer donne 1). Et, bien sûr, $P(\overline{A})=1-p$.

Plus généralement, si $\varepsilon=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m)\in\{0,1\}^m$, si

$$A_\varepsilon=\{\omega\in\Omega,\ \omega_1=\varepsilon_1,\omega_2=\varepsilon_2,\dots,\omega_m=\varepsilon_m\}$$

on aimerait bien avoir

$$P\left(A_\varepsilon\right)=p^s(1-p)^{m-s}$$

où s désigne le nombre de ε_i égaux à 1 (ou encore $s=\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_m$).

On appelle « cylindre » ou « évènement de type fini » un évènement défini par une condition ne portant que sur un nombre fini de lancers ; par exemple « parmi les 100 premiers lancers on obtient au moins 40 fois face ». Ou « entre les lancers 10000 et 10999 on obtient au moins une fois 5 "Pile" successifs ». Il n'est pas si compliqué de définir une probabilité satisfaisante sur ces évènements, c'est-à-dire une probabilité qui vérifie (1) et les propriétés traditionnelles :

$$\begin{aligned}
&P(\Omega)=1\\
&0\leqslant P(A)\leqslant 1\\
&\text{Si } A\cap B=\varnothing, P(A\cup B)=P(A)+P(B)
\end{aligned}$$

(A et B désignant des évènements de type fini).
Par exemple, si la pièce est équilibrée, la probabilité d'obtenir exactement 5 Pile et 5 Face entre le 31-ème et le 40-ème lancer vaut $\binom{5}{10}\times\dfrac{1}{2^{10}}$.

Pour la variable aléatoire

$$X=\text{« rang du premier tirage où on obtient Pile »}$$

ces définitions suffisent : pour tout $k\geqslant 1$,

$$P(X=k)=\frac{1}{2^k}.$$

Remarque sur la dénomination « cylindre » : un cylindre de révolution d'axe Oz dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$ a pour équation $x^2+y^2=R^2$, équation qui ne porte que sur les premières coordonnées ...

Mais des évènements qu'on peut qualifier de « simples » ne sont pas de type fini. Par exemple, l'évènement « tous les tirages de rang pair donnent Pile, tous les tirages de rang impair donnent Face » ou « la première séquence Pile-Face précède la première séquence Face-Face ». Pour le premier de ces deux évènements, la probabilité, si elle peut être définie, ne peut qu'être nulle. Pour le second, c'est autre chose ...
Notons donc $B=$ « la première séquence Pile-Face précède la première séquence Face-Face ». Et remarquons que

$$B=\bigcup_{n=1}^{+\infty}B_n$$

où B_n est l'évènement « on obtient Pile au n-ième tirage, Face au $n+1$-ième, et il n'y a pas de séquence Face-Face ni Pile-Face avant ce n-ième tirage ». On calcule

$$P\left(B_n\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{4} & \text{si } n=1\\[2mm] \dfrac{1}{2^{n-2}}\times\dfrac{1}{4} & \text{si } n>1.\end{cases}$$

et, remarquant que les évènements B_n sont deux-à-deux disjoints, on en déduit :

$$P(B)=\frac{1}{4}\left(1+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\right)=\frac{3}{4}$$

à condition d'admettre que $P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n)$.
Ce faisant, on introduit une condition supplémentaire que doit vérifier une probabilité (la « sigma-additivité », qui n'est pas la simple additivité), qui n'a un sens que si une réunion dénombrable d'évènements qui ont une probabilité a une probabilité. Nous allons donner un cadre à ces choses.

4. Ensembles dénombrables, familles sommables

Pour pouvoir étudier des univers infinis, nous avons besoin de quelques outils supplémentaires : les ensembles dénombrables et les familles sommables.
Le programme est très clair sur cette section : « ces notions ne feront l'objet d'aucune évaluation spécifique, et leur usage est strictement réservé au contexte probabiliste ».
Cette section contient des résultats qu'il est bon de connaître pour sa culture mathématique mais nous irons assez vite.

4.1. Ensembles dénombrables

Définition 4.1.1 (Ensemble dénombrable)**.**
Un ensemble est dit ***dénombrable*** s'il peut être mis en bijection avec $\mathbb{N}$.

Remarque 4.1.2.
Un ensemble est dénombrable si l'on peut numéroter ses éléments avec des entiers naturels, en les comptant tous une et une seule fois.

Proposition 4.1.3.

(i) Si E et F sont deux ensembles équipotents et E est dénombrable, alors F l'est aussi.

(ii) S'il existe une injection de E dans F et F est dénombrable, alors E l'est aussi.

(iii) S'il existe une surjection de E dans F et E est dénombrable, alors F l'est aussi.

Démonstration. 1. Soit φ une bijection de $\mathbb{N}$ dans E, et ψ une bijection de E dans F. Alors $\psi \circ \varphi$ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans F.

2. Les deux derniers points constituent une généralisation du principe des tiroirs, tout à fait hors programme. Chacun d'eux implique le premier point.

□

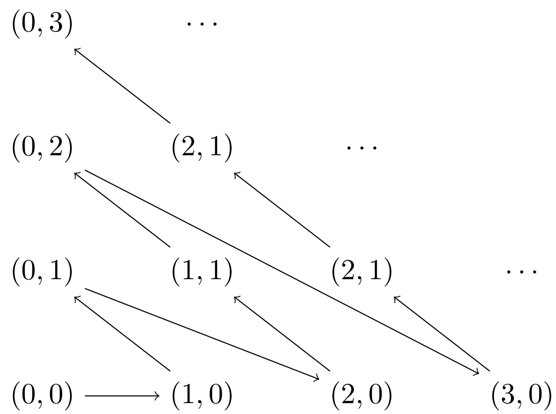

Figure 1 – Dénombrabilité de $\mathbb{N}^2$

Exemple 4.1.4.

- $\mathbb{N}$ est bien sûr dénombrable.
- Les ensembles finis ne sont pas dénombrables, mais il sont encore « plus petits ». On dira qu'un ensemble est ***au plus dénombrable*** s'il est fini ou dénombrable.

- $\mathbb{Z}$ est dénombrable. Considérons en effet la fonction suivante :

$$\varphi : \begin{array}{ccl} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \begin{cases} 2n & \text{si } n \geqslant 0 \\ -1-2n & \text{si } n < 0 \end{cases} \end{array}.$$

  On peut montrer que φ est une bijection.
- $\mathbb{N}^2$ est dénombrable. Une énumération de ses éléments est représentée figure **1**.
  On peut aussi remarquer que $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(n,p) \mapsto 2^n(2p+1)$ est une bijection.
  Sans donner une bijection, on peut plus simplement montrer que $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(n,p) \mapsto 2^n 3^p$ est une injection, par unicité de la décomposition en facteurs premiers.
- $\mathbb{Q}$ est dénombrable (voir plus loin).
- $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.
  Démontrons-le en utilisant le ***procédé diagonal de Cantor***.

  Il suffit de montrer que $[0,1[$ n'est pas dénombrable. En effet si $\mathbb{R}$ était dénombrable, toute partie de $\mathbb{R}$ le serait aussi.
  On procède par l'absurde et on suppose que $[0,1[$ est dénombrable. Il existe donc une suite (x_n) d'éléments de $[0,1[$ telle que $[0,1[= \{x_n,\ n \geqslant 1\}$. On écrit chaque x_n en écriture décimale propre (c'est-à-dire dont la partie décimale ne finit pas par une infinité de 9) :

$$x_n = 0, a_1(n)a_2(n)\cdots a_k(n)\cdots$$

  où les $a_i(n)$ sont des entiers de $[\![0,9]\!]$.
  Pour tout entier $n \geqslant 1$, on choisit un entier $a_n \in [\![0,8]\!]$ tel que $a_n \neq a_n(n)$ (c'est-à-dire que a_n est différent du n-ème chiffre après la virgule de x_n). On considère alors le réel

$$x = a_1 a_2 \cdots a_n$$

  Alors x est bien dans $[0,1[$, et il est différent de tous les x_n puisque son n-ème chiffre après la virgule est différent de x_n : il y a une contradiction avec le fait que $[0,1[= \{x_n,\ n \geqslant 1\}$ et donc $[0,1[$ n'est pas dénombrable.

  Ce procédé diagonal est très utile pour montrer qu'un ensemble n'est pas dénombrable. Il permet par exemple de montrer aussi que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.
- $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ ne sont pas non plus dénombrables.

  Finissons par quelques résultats utiles :

Proposition 4.1.5.
(i) Toute partie d'un ensemble dénombrable est dénombrable.
(ii) Toute réunion finie d'ensembles dénombrables est dénombrable.
(iii) Toute intersection quelconques d'ensembles dénombrables est dénombrable.
(iv) Tout produit cartésien d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Exemple 4.1.6.
- $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est donc dénombrable. Et donc $\mathbb{Q}$ l'est aussi car $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$, $(p,q) \mapsto \dfrac{p}{q}$ est surjective.
- Tous les $\mathbb{N}^k$, $\mathbb{Z}^k$ et $\mathbb{Q}^k$ sont dénombrables.

4.2. Familles sommables

a. Problème de la sommation par paquets

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
Si nous écrivons :

$$(1-1)+(1-1)+\ldots = 0$$

et

$$1+(1-1)+(1-1)+\ldots = 1$$

nous voyons qu'en sommant tous les termes de la suite (u_n) mais en les regroupant par paquets de manières différentes, nous obtenons des résultats différents.

b. Problème de la permutation des termes d'une somme

Considérons maintenant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
Les termes de cette suite se répartissent en deux sous-suites : celle des termes positifs, et celle des termes négatifs, c'est-à-dire $(v_n) = (u_{2n})$ et $w_n = (u_{2n+1})$.
Choisissons un réel quelconque, par exemple 16, et mettons en oeuvre le procédé suivant : sommons dans l'ordre tous les termes de (v_n) jusqu'à obtenir plus que 16. Ensuite, ajoutons à cette somme les termes de (w_n) dans l'ordre jusqu'à repasser en-dessous de 16. Reprenons alors les termes de (v_n) là où nous les avons laissés, et continuons de les additionner à la somme précédente jusqu'à repasser au-dessus de 16. Puis l'on revient à (w_n) jusqu'à retomber sous 16, et ainsi de suite. On peut montrer que la suite des sommes obtenues converge vers 16.

Ce procédé a pour nom ***théorème de réarrangement de Riemann***. Ce théorème s'énonce ainsi : si (u_n) est une suite telle que la série $\sum u_n$ est semi-convergente, alors pour tout réel ℓ il existe une bijection φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $\sum_{k=0}^{n} u_{\varphi(k)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. On parle de permutation des termes de (u_n), mais $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ n'est ici pas une sous-suite de (u_n) car φ n'est pas strictement croissante, et est surjective. On ne « prélève » pas des termes de (u_n) en les gardant dans l'ordre, on les conserve tous et on les mélange.

Ces deux problèmes prouvent que l'on ne peut pas faire n'importe quoi avec les sommes infinies, même dans le cas de séries convergentes.
Nous allons donc introduire une notion de « série » plus stricte, avec laquelle on pourra faire « n'importe quoi ».

c. Familles sommables de réels positifs

Notation 4.2.1.
On note $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, que l'on pourra aussi noter $[0, +\infty]$.

On se placera dans cette partie dans la droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, avec son ordre usuel et les conventions de calcul habituelles.

Si $A \subset \mathbb{R}$ est une partie non vide et non majorée, on se permettra de plus d'écrire $\sup(A) = +\infty$.

Dans toute cette sous-partie, $(u_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}_+$, indicée par I.

Remarque 4.2.2.
On se permet donc d'avoir un $i \in I$ vérifiant $u_i = +\infty$.

Définition 4.2.3 (somme)**.**
On appelle ***somme*** de la famille $(u_i)_{i\in I} \in (\overline{\mathbb{R}}_+)^I$ l'élément de $\overline{\mathbb{R}}_+$ défini par

$$\sum_{i\in I} u_i = \sup\left\{ \sum_{i\in F} u_i \;\middle|\; F \subset I \text{ t.q. } F \text{ est fini} \right\}.$$

Exemple 4.2.4.
On a $\displaystyle\sum_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{ij} = +\infty$.
En effet, si pour $n \in \mathbb{N}^*$, si l'on considère $F_n = \{ (i,1) \mid 1 \leqslant i \leqslant n \}$, qui est bien une partie finie de $(\mathbb{N}^*)^2$, alors

$$\sum_{(i,j)\in F_n} \frac{1}{ij} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Ainsi,

$$\sup\left\{ \sum_{i\in F} u_i \;\middle|\; F\subset (\mathbb{N}^*)^2 \text{ t.q. } F \text{ est fini} \right\} = +\infty.$$

Remarque 4.2.5.
On a donc toujours, pour toute $F\subset I$ finie,

$$\sum_{i\in F} u_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i.$$

Définition 4.2.6 (famille sommable)**.**
Une famille $(u_i)_{i\in I}\in(\overline{\mathbb{R}}_+)^I$ est dite ***sommable*** si l'ensemble des $\sum_{i\in F} u_i$, pour F parcourant les parties finies de I, est majoré.

La ***nature*** d'une famille est son caractère sommable ou non.

Remarque 4.2.7.
Pour une famille de réels positifs, la famille $(u_i)_{i\in I}\in(\overline{\mathbb{R}}_+)^I$ est sommable si et seulement si $\sum_{i\in I} u_i<+\infty$.

Exemple 4.2.8 (sommes finies)**.**
Dans le cas où $I=\{i_1,\dots,i_p\}$ est un ensemble fini, alors

$$\sum_{i\in I} u_i = u_{i_1}+\cdots+u_{i_p},$$

et la famille $(u_i)_{i\in I}\in(\overline{\mathbb{R}}_+)^I$ est sommable si et seulement si tous les u_i sont réels.

Exemple 4.2.9 (séries numériques)**.**
Si $I=\mathbb{N}$ et si $(u_i)\in(\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$, alors la famille $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\sum_{i\geqslant 0} u_i$ converge. On a alors

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} u_i = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i.$$

En cas de divergence de la série, on a toujours l'écriture

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} u_i = +\infty.$$

On se permet donc d'écrire

$$\sum_{i=0}^{+\infty} u_i = +\infty.$$

Théorème 4.2.10 (invariance de la somme par permutation)**.**
Soit $(u_i)_{i\in I}\in(\overline{\mathbb{R}}_+)^I$, soit $\sigma\in S_I$ une permutation de I. Alors,

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_{\sigma(i)}.$$

Notamment, les familles $(u_i)_{i\in I}$ et $(u_{\sigma(i)})_{i\in I}$ ont même nature.

Bien entendu, les opérations usuelles sont toujours valides sur cette notion de somme.

Proposition 4.2.11 (opérations)**.**
Soit $(u_i)_{i\in I},(v_i)_{i\in I}\in(\overline{\mathbb{R}}_+)^I$, soit $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$, alors

1. $\sum_{i\in I}(u_i+v_i) = \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i$.
2. $\sum_{i\in I}\lambda u_i = \lambda\sum_{i\in I} u_i$.

Proposition 4.2.12 (comparaison)**.**
Soit $(u_i)_{i\in I},(v_i)_{i\in I}\in(\overline{\mathbb{R}}_+)^I$.

Si pour tout $i\in I$, $u_i\leqslant v_i$, alors

$$\sum_{i\in I} u_i \leqslant \sum_{i\in I} v_i.$$

Remarque 4.2.13.
Si on a $\forall i \in I$, $u_i \leqslant v_i$, et si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $(u_i)_{i\in I}$ est aussi sommable.

Proposition 4.2.14 (sous-famille)**.**
Soit $(u_i)_{i\in I} \in (\overline{\mathbb{R}}_+)^I$, soit $J \subset I$. Alors,

$$\sum_{j\in J} u_j \leqslant \sum_{i\in I} u_i.$$

Notamment, si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $(u_j)_{j\in J}$ l'est aussi.

L'outil principal de calcul de somme est le théorème de sommation par paquets. En pratique, il conviendra de procéder à un regroupement par paquets judicieux pour calculer les sommes en jeu.

Théorème 4.2.15 (sommation par paquets)**.**
Soit J un ensemble. Pour chaque $j \in J$, on considère $I_j \subset I$ et l'on suppose que I est la réunion disjointe des I_j :

$$I = \bigsqcup_{j\in J} I_j.$$

Soit $(u_i)_{i\in I} \in (\overline{\mathbb{R}}_+)^I$.
Alors,

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right).$$

Lemme 4.2.16.
Soit A, B deux parties disjointes de I, soit $(u_i)_{i\in I} \in (\overline{\mathbb{R}}_+)^I$. Alors,

$$\sum_{i\in A\sqcup B} u_i = \sum_{i\in A} u_i + \sum_{i\in B} u_i.$$

Remarque 4.2.17.
Par récurrence, on généralise le lemme à une somme finie sur des parties disjointes deux à deux.

Remarque 4.2.18.
Ce théorème, fondamental, a deux usages principaux : montrer qu'une famille est sommable, et calculer la somme d'une famille.

Exercice 4.2.19.
On sait que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2}$.

Corollaire 4.2.20 (théorème de Fubini positif)**.**
Soit I, J deux ensembles, soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J} \in (\overline{\mathbb{R}}_+)^{I\times J}$. Alors,

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right).$$

Démonstration.
Il suffit de considérer les paquets $I_j = \{\,(i,j) \mid i \in I\,\}$ et $J_i = \{\,(i,j) \mid j \in I\,\}$, puis d'appliquer le théorème de sommation par paquets. □

Remarque 4.2.21.
Bien entendu, ce résultat s'étend à tous les produits cartésiens finis.

Exercice 4.2.22.
On sait que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer $\displaystyle\sum_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{i^2 2^j}$.

d. Familles sommables de nombres complexes

L'extension de la notion de somme à un ensemble quelconque est bien plus délicate, dès lors que l'on abandonne l'hypothèse de positivité des nombres sommés, comme nous l'avons avec les deux problèmes exposés au début de cette section.

Définition 4.2.23 (famille sommable)**.**
Une famille $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ est sommable si $\sum_{i\in I} |u_i| < +\infty$, *i.e.* si la famille positive $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable.

Notation 4.2.24.
On note $\ell^1(I)$ l'ensemble des familles sommables de nombres complexes indicées par I.

Définition 4.2.25 (somme d'une famille réelle)**.**
Soit $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$ sommable. Si $i \in I$, on définit

$$\begin{aligned} u_i^+ &= \max(0, u_i), \\ u_i^- &= \max(0, -u_i). \end{aligned}$$

Alors, $(u_i^+)_{i\in I}$ et $(u_i^-)_{i\in I}$ sont sommables et l'on définit la somme de la famille $(u_i)_{i\in I}$ comme

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^-.$$

Définition 4.2.26 (somme d'une famille complexe)**.**
Soit $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ sommable. Alors, $(\mathrm{Re}(u_i))_{i\in I}$ et $(\mathrm{Im}(u_i))_{i\in I}$ sont sommables et l'on définit la somme de la famille $(u_i)_{i\in I}$ comme

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} \mathrm{Re}(u_i) + i \sum_{i\in I} \mathrm{Im}(u_i).$$

Remarque 4.2.27.
Sous réserve de sommabilité, on a donc par définition

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{i\in I} u_i\right) = \sum_{i\in I} \mathrm{Re}(u_i)$$

et

$$\mathrm{Im}\left(\sum_{i\in I} u_i\right) = \sum_{i\in I} \mathrm{Im}(u_i)$$

Remarque 4.2.28 (séries et convergence absolues)**.**
Dans le cas d'une suite $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge absolument. En cas de convergence absolue, on a alors

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Remarque 4.2.29 (sommes finies)**.**
Une famille finie de nombres complexes est toujours sommable.

Proposition 4.2.30.
Soit $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ une famille sommable. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $F \subset I$ finie telle que

$$\left|\sum_{i\in I} u_i - \sum_{i\in F} u_i\right| \leqslant \varepsilon.$$

Théorème 4.2.31 (invariance de la somme par permutation)**.**
Soit $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ sommable, soit $\sigma \in S_I$ une permutation de I. Alors,

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_{\sigma(i)}.$$

Notamment, les familles $(u_i)_{i\in I}$ et $(u_{\sigma(i)})_{i\in I}$ ont même nature.

Une conséquence intéressante de ce résultat est le point suivant.

Exemple 4.2.32.
Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série complexe convergeant absolument. Alors, quelque soit la permutation σ de $\mathbb{N}$, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_{\sigma(n)}$ converge absolument et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Théorème 4.2.33 (argument de comparaison)**.**
Soit $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ et $(v_i)_{i\in I} \in (\mathbb{R}_+)^I$ vérifiant

$$\forall i \in I,\ |u_i| \leqslant v_i.$$

Alors, si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est sommable, la famille $(u_i)_{i\in I}$ l'est aussi.

Proposition 4.2.34 (linéarité de la somme)**.**
Soit $(u_i)_{i\in I}, (v_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ deux familles sommables, soit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Alors, la famille $(\lambda u_i + \mu v_i)_{i\in I}$ est sommable et

$$\sum_{i\in I}(\lambda u_i + \mu v_i) = \lambda \sum_{i\in I} u_i + \mu \sum_{i\in I} v_i.$$

Lemme 4.2.35 (sous-famille)**.**
Soit $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ une famille sommable, soit $J \subset I$. Alors, $(u_j)_{j\in J}$ est une famille sommable.

Un résultat important est le théorème de sommation par paquets. Remarquons toutefois que, contrairement au cas des réels positifs, ce théorème ne peut s'appliquer qu'après avoir démontré que la famille étudiée est sommable.

Théorème 4.2.36 (sommation par paquets)**.**
Soit J un ensemble. Pour chaque $j \in J$, on considère $I_j \subset I$ et l'on suppose que I est la réunion disjointe des I_j :

$$I = \bigsqcup_{j\in J} I_j.$$

Soit $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ une famille sommable.
Alors,

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right).$$

Corollaire 4.2.37 (théorème de Fubini)**.**
Soit I, J deux ensembles, soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J} \in \mathbb{C}^{I\times J}$ une famille sommable. Alors,

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} u_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} u_{i,j}.$$

Le théorème de regroupement par paquets, et donc le théorème de Fubini, ne s'appliquent qu'une fois la sommabilité démontrée. Cette sommabilité s'obtient en étudiant une famille de réels positifs, étude pour laquelle nous disposons d'outils puissants (voir la partie précédente).

Exercice 4.2.38.
Pour $x \in \mathbb{C}$, étudier la somme

$$\sum_{n,p\in\mathbb{N}} \frac{x^n p^n}{n!p!}.$$

Dans le cas particulier (et courant) d'une somme double factorisée, on a toutefois une réciproque, qui permet d'appliquer le théorème de Fubini automatiquement.

Théorème 4.2.39.
Soit I, J deux ensembles, soit $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ et $(v_j)_{j\in J} \in \mathbb{C}^J$ deux familles sommables.

Alors, la famille $(u_i v_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable et

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_i v_j = \left(\sum_{i\in I} u_i\right)\left(\sum_{j\in J} v_j\right).$$

Remarque 4.2.40.
Cela se généralise par récurrence des sommes doubles aux sommes multiples.

Exemple 4.2.41.
Si $q \in]-1,1[$, alors la famille $\left(\dfrac{q^{n+p}}{n!}\right)_{n,p\in\mathbb{N}}$ est sommable et

$$\sum_{n,p\in\mathbb{N}} \frac{q^{n+p}}{n!} = \frac{\mathrm{e}^{\,q}}{1-q}.$$

Une utilisation importante de tous ces résultats concerne le produit de Cauchy de deux séries.

Corollaire 4.2.42 (produit de Cauchy)**.**
Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n$, $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ deux séries absolument convergentes. On définit pour $n \geqslant 0$:

$$c_n = \sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p}.$$

Alors, $\sum_{n\geqslant 0} c_n$ converge absolument et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).$$

Exercice 4.2.43.
Pour $x \in \mathbb{C}$, montrer que les deux séries $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ et $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ convergent absolument.

On note alors

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$
$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Montrer que $2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$.