<u>Ex 101</u>

1) Soit $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{N} P(X=k) = \sum_{k=1}^{N} \frac{k-1}{2^k}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} (k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= \sum_{k=1}^{N} k\left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \underbrace{\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^k}_{\text{série géometrique : CV si } N \to +\infty \text{ car } \frac{1}{2}<1}$$

or $\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$

dérivation terme à terme car série entière :

$\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} k x^{k-1}$

donc $\sum_{k=1}^{N} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ CV si $N \to +\infty$

par somme, $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)$ existe

et $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2} \times 4 - \frac{1}{2} \times 2 = 2-1 = 1$

dc $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) = 1}$

2) Soit R rayon de convergence de la serie generatrice de X, à determiner plus tard.

Soit $t \in]-R, R[$

$G_X(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) t^k$

$= \sum_{k=1}^{+\infty} (k-1) \left(\frac{t}{2}\right)^k$

avec raisonnement Q1), il y a convergence ssi $\frac{t}{2} \in]-1,1[$, ie $t \in]-2,2[$

donc $\boxed{R = 2}$

et $\forall t \in]-2,2[$, $G_X(t) = \frac{\cancel{1}^{\,t}}{2} \times \frac{1}{\left(1-\frac{t}{2}\right)^2} - \frac{t}{2} \times \frac{1}{1-\frac{t}{2}}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{t}{2}} \left(\frac{\cancel{1}^{\,t}}{1-\frac{t}{2}} - t \right) = \frac{t^2}{(2-t)^2}$

$= \cancel{\frac{1}{2-t} \left(\frac{2-t(2-t)}{2-t} \right)}$

$= \cancel{\frac{t^2-2t+2}{(t-2)^2}}$

$= \frac{(t-2)^2 + 2t - 2}{(t-2)^2}$

$= 1 + 2 \frac{t-1}{(t-2)^2}$

$\boxed{\forall t \in]-2,2[, \quad \cancel{G_X(t) = 1 + 2 \frac{t-1}{(t-2)^2}}}$

3) G_X est derivable en 1 par operation : $\boxed{E(X) \text{ existe}}$

Soit $t \in]-2,2[$

$$G_X'(t) = 2 \cdot \frac{(t-2)^2 - (t-1)2(t-2)}{(t-2)^4}$$

$$= 2 \cdot \frac{t-2-2(t-1)}{(t-2)^3} \qquad = \frac{4t}{(2-t)^3}$$

$$= 2 \cdot \frac{-t}{(t-2)^3}$$

alors $\boxed{E(X) = G_X'(1) = \cancel{2}}$ 4