Semaine 17 du 23 février 2026 (S9)

XV – Espérance, variance, covariance etc

1 Espérance

1.1 Définition

1.2 Propriétés

1.3 Formule de transfert

1.4 Variables indépendantes

1.5 Lois usuelles

2 Variance

2.1 Définition

2.2 Propriétés

2.3 Lois usuelles

3 Covariance

4 Inégalités probabilistes

4.1 Inégalité de Markov

4.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

4.3 Loi faible des grands nombres

5 Fonctions génératrices

5.1 Fonctions génératrices des lois usuelles

5.2 Fonction génératrice, espérance et variance

5.3 Fonction génératrice d'une somme de variables aléatoires

6 Exercices à connaître

6.1 Calculs d'espérance et de variance (banque CCINP MP)

Un secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.
On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0,1[$).
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1) Donner la loi de X. Justifier.

2) Le secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'il n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.

- **a)** Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P_{(X=i)}(Y = k)$.
- **b)** Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.
  Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.
- **c)** Déterminer l'espérance et la variance de Z.

6.2 Un couple de variables aléatoires (banque CCP MP)

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par :
$\forall\,(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P((X=i)\cap(Y=j)) = \dfrac{1}{\mathrm{e}\,2^{i+1}j!}$

1) Déterminer les lois de X et de Y.

2) **a)** Prouver que $1+X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.

b) Déterminer l'espérance et la variance de Y.

3) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

4) Calculer $P(X=Y)$.

6.3 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (banque CCINP MP)

1) Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

2) Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi et et telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, Y_n admet une variance.
On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.

Prouver que : $\forall\, a \in\,]0,+\infty[,\ P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \dfrac{V(Y_1)}{na^2}$.

3) **Application** : On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0,35$ et $0,45$?
Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i^{\text{ème}}$ tirage.

6.4 Calculs d'espérance et de variance grâce à la fonction génératrice

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la fonction génératrice est
$$G_X(t) = \frac{t}{2-t^2} \qquad \text{pour tout } t \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$$

1) Calculer la loi de X.

2) Reconnaître la loi de $Y = \dfrac{1}{2}(X+1)$. En déduire l'espérance et la variance de X.

6.5 Détermination d'une fonction génératrice (banque CCINP MP)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi de probabilité donnée par : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(X=n) = p_n$.
La fonction génératrice de X est notée G_X et elle est définie par $G_X(t) = E[t^X] = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$.

1) Prouver que l'intervalle $]-1,1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de G_X.

2) Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On pose $S = X_1 + X_2$.
Démontrer que $\forall t \in]-1,1[,\ G_S(t) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)$:

a) en utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières.

b) en utilisant uniquement la définition de la fonction génératrice par $G_X(t) = E[t^X]$.

Remarque : on admettra, pour la question suivante, que ce résultat est généralisable à n variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

3) Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans ce sac.
On note S_n la somme des numéros tirés.
Soit $t \in]-1, 1[$.
Déterminer $G_{S_n}(t)$ puis en déduire la loi de S_n.

S'y ajoute :

XV - Espaces vectoriels préhilbertiens et euclidiens

1 Produit scalaire et norme associée

1.1 Produit scalaire

1.2 Norme associée à un produit scalaire

2 Orthogonalité

2.1 Premières définitions.

2.2 Familles orthogonales.

3 Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

4 Sous-espaces vectoriels orthogonaux

5 Formes linéaires et hyperplans d'un espace euclidien.

5.1 Rappels de première année : hyperplans en dimension finie

5.2 Théorème de représentation et hyperplans dans un espace euclidien

6 Symétries et projecteurs orthogonaux

6.1 Rappels de première année sur les projecteurs et les symétries

6.2 Symétries et projecteurs orthogonaux

7 Distance à un sous ev

7.1 Distance et projection sur un hyperplan

8 Exercices à connaître

8.1 Inégalité de Cauchy-Schwarz et application (banque CCINP MP)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$.
On pose $\forall\, x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.

1) **a)** Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.

2) Soit $A = \{f \in \mathscr{C}([a,b], \mathbb{R}),\ \forall\, x \in [a,b]\ f(x) > 0\}$.
Prouver que l'ensemble $\left\{ \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\ ,\ f \in A \right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

8.2 Polynômes de Legendre

On note $E = \mathbb{R}_n[X]$, où $n \geqslant 1$.

1) Vérifier que :

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\mathrm{d}x$$

définit un produit scalaire sur E. On note $(e_0, e_1, \dots, e_n)$ la base obtenue par orthonormalisation de la base $(1, X, \dots, X^n)$.

2) Pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$, on définit :

$$f_k(X) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}X^k}\left(\left(X^2-1\right)^k\right)$$

a) Déterminer le degré de f_k.

b) Calculer $\langle X^i, f_k\rangle$ pour $k \in \{1, \dots, n\}$ et $i \in \{0, \dots, k-1\}$.

c) En déduire que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, il existe un λ_k tel que $f_k = \lambda_k e_k$.

8.3 Une projection orthogonale

Soit P le plan d'équation $x + y + z = 0$ et D la droite d'équation $x = y = z$.

1) Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.

2) Soit p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur P.
Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

3) Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

8.4 Une distance (banque CCINP MP)

On définit dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A, A') = \operatorname{tr}\left(A^T A'\right)$, où $\operatorname{tr}\left(A^T A'\right)$ désigne la trace du produit de la matrice A^T par la matrice A'.
On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
On note $\mathscr{F} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

1) Démontrer que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2) Déterminer une base de $\mathscr{F}^\perp$.

3) Déterminer le projeté orthogonal de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathscr{F}^\perp$.

4) Calculer la distance de J à $\mathscr{F}$.

8.5 Une autre distance

Pour $k \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$, justifier l'existence de :

$$m_k = \inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^{+\infty} \left(t^k - at - b\right)^2 \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$$

et calculer sa valeur.