

问题一【30 分】

试证明下述命题：

1. 设 n 阶完全图 $G = (V, E)$, $V_1 \subset V$, $|V_1| = n_1$, 且 $T_1 = (V_1, E_1)$ 是以 V_1 为顶点集的树, 则在图 $G = (V, E)$ 中以 T_1 为其子树的生成树数目为 $n_1 \cdot n^{n-n_1-1}$ 。
2. 假设 $G = (V, E)$ 是不可分离的平面图, 且每个面都不是三角形, 则图 G 的顶点连通性 $C(G) < 4$ 。

问题二【30 分】

试回答下述问题：

1. 求解图上最短路问题的狄克斯特拉 (Dijkstra) 算法, 对有向图弧的权函数之值有什么要求? 试举例说明这种要求的必要性? 最小生成树算法也有这样要求吗? 为什么?
2. 假设 $G = (V, E)$ 为二分图, 其中 $V = X \cup Y, X \cap Y = \emptyset$ 。若 G 中无关于顶点集 X 的完全匹配, 试找出一顶点子集 $A \subset X$, 满足 $|A| > |N(A)|$, 其中 $N(A)$ 为顶点子集的邻域。并举例说明之。

问题三【20 分】

试构造前缀三元 $(0, 1, 2)$ 优化代码, 使其代码字具有概率为:

$$\{0.2, 0.18, 0.12, 0.1, 0.1, 0.08, 0.06, 0.06, 0.06, 0.04\}.$$

问题四【20 分】

设 $G = (V, E)$ 不是完全图, 对任意俩顶点 $u, v \in V$, $P(u, v)$ 表示图 G 中连接顶点 u 和 v 且内部顶点互不相交的通路的最大条数。试证明: $P(u, v)$ 的最小值在 G 中两个不邻接顶点上达到, 即

$$\min_{u, v \in G} P(u, v) = \min_u \min_{u \text{ not adj } v} P(u, v).$$