NOMENCLATURA ALGEBRAICA

Definición 1 (Término)**.** Es una expresión algebraica que consta de un solo símbolo o de varios símbolos *no separados entre sí por el signo + o -*. Por ejemplo

$$a,\ 3b,\ 2xy,\ \frac{4a}{3x},$$

son términos.
Los *elementos de un término* son cuatro: el signo, el coeficiente, la parte variable y el grado.
En el producto de dos factores, cualquiera de los factores es llamado *coeficiente* del otro factor. Así, en el producto $3a$, el factor 3 es coeficiente (numérico) del factor a e indica que el factor a se toma como sumando tres veces, o sea $3a = a + a + a$; por otra parte, en el producto ab, el factor a es coeficiente (literal) del factor b, e indica que el factor b se toma como sumando a veces, o sea $ab = b + b + b + \dots,\ a$ veces.

Definición 2 (El grado de un término con relación a una literal o variable)**.** Es el exponente de la literal o variable. Por ejemplo, el término bx^3 es de *primer grado* con relación a b y de *tercer grado* con relación a x.

CLASIFICACIÓN DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Definición 3 (Monomio)**.** Es una expresión algebraica que consta de un sólo término, como

$$3a,\ -5b,\ \frac{x^2y}{4a^3}$$

Definición 4 (Polinomio)**.** Es una expresión algebraica que consta de más de un término, como

$$a+b,\ a+x-y,\ x^3+2x^2+x+7$$

Binomio es un polinomio que consta de dos términos, como $a+b, x-y, \frac{1}{3}a^3 - \frac{5mx^4}{6b^2}$
Trinomio es un polinomio que consta de tres términos, como $a+b+c$

Definición 5 (Grado de un polinomio con relación a una literal o variable)**.** Es el mayor exponente de dicha literal en el polinomio. Así, el polinomio $a^2x^4 - a^4x^2 + a^6$ es de *cuarto grado* con relación a la x y de *sexto grado* con relación a la a.

Definición 6 (Término independiente de un polinomio con relación a una literal o variable)**.** Es el término que no tiene dicha literal. Así, en el polinomio
$x^4 - 6x^3 + 3bx^3 - 9x + 20$ el término independiente con relación a la x es 20; en $a^3 - ba^2 + 3b^2a + b^3$ el término independiente con relación a la a es b^3.

Definición 7 (Términos semejantes)**.** Dos o más términos son semejantes cuanto tienen *la misma parte literal*, o sea, cuando tienen *letras iguales* afectadas de *iguales exponentes.* Por ejemplo

$$2a \text{ y } a; \ -2x^{m+1} \text{ y } 8x^{m+1}$$

$4ab$ y $-6a^2b$ no son semejantes, porque las letras no tienen los mismos exponentes.

Definición 8 (Reducción de términos semejantes)**.** Es una operación que tiene por objeto convertir en un solo término dos o más términos semejantes.

Regla 1. Se suman (algebraicamente) los coeficientes y a continuación se escribe la parte literal.

Ejemplos:

1. $3a + 2a = 5a$
2. $3x^{m+1} + 5x^{m+1} - 9xm + 1 = -x^{m+1}$
3. $-\dfrac{1}{2}a^2b + 2a^2b = \dfrac{3}{2}a^2b$
4. $x^4 + \dfrac{5}{2}x^3y + 3x^4 - \dfrac{3}{2}x^3y = 4x^4 + x^3y$

EJERCICIO 1.

Reducir (los términos semejantes de) los siguientes polinomios:

1. $7a - 9b + 6a - 4b.$
2. $a + b - c - b - c + 2c - a.$
3. $5x - 11y - 9 + 20x - 1 - y.$
4. $-6m + 8n + 5 - m - n - 6m - 11.$
5. $-1 + b + 2b - 2c + 3a + 2c - 3b.$
6. $-81x + 19y - 30z + 6y + 80x + x - 25y.$
7. $15a^2 - 6ab - 8a^2 + 20 - 5ab - 31 + a^2 - ab.$
8. $-3a + 4b - 6a + 81b - 114b + 31a - a - b.$
9. $-71a^3b - 84a^4b^2 + 50a^3b + 84a^4b^2 - 45a^3b + 18a^3b.$
10. $-a + b - c + 8 + 2a + 2b - 19 - 2c - 3a - 3 - 3b + 3c.$
11. $a^{m+2} - x^{m+3} - 5 + 8 - 3a^{m+2} + 5x^{m+3} - 6 + a^{m+2} - 5x^{m+3}.$
12. $\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b + 2a - 3b - \frac{3}{4}a - \frac{1}{6}b + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}.$
13. $\frac{3}{25}a^{m-1} - \frac{7}{50}b^{m-1}\frac{3}{5}a^{m-1} - \frac{1}{25}b^{m-1} - 0.2a^{m-1} + \frac{1}{5}b^{m-1}.$

AXIOMAS DE LOS NÚMEROS REALES

A. IGUALDAD

1. Identidad: $a = a$.
2. Reciprocidad: si $a = b$, entonces $a = b$.
3. Transitividad: si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.

B. SUMA

1. Conmutatividad: $a + b = b + a$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$
2. Asociativatividad: $a + (b + c) = (a + b) + c$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$
3. Neutro: $\exists!\ 0 \in \mathbb{R}$, tal que $a + 0 = a$, $\forall a, \in \mathbb{R}$, (el signo de exclamación después del símbolo de existencia significa único).
4. Inverso: $\forall a, \in \mathbb{R}$, $\exists! - a \in \mathbb{R}$, tal que $a + (-a) = 0$.

C. MULTIPLICACIÓN (O PRODUCTO)

1. Conmutatividad: $a \cdot b = b \cdot a$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$
2. Asociativatividad: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$
3. Neutro: $\exists!\ 1 \in \mathbb{R}$, tal que $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$, $\forall a, \in \mathbb{R}$
4. Inverso: $\forall a, \in \mathbb{R}$, tal que $a \neq 0$, $\exists!\ a^{-1} \in \mathbb{R}$, tal que $a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot x$

D. DISTRIBUTIVIDAD (del producto con respecto a la suma, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$)

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, y de forma equivalente $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

E. AXIOMAS DE ORDEN

1. Tricotomía: si $a, b \in \mathbb{R}$, se cumple una y solo una de las siguientes relaciones:

$$a > b \quad \text{o} \quad a = b \quad \text{o} \quad a < b$$

2. Transitividad: si $a < b$ y $b < c \Rightarrow a < c$
3. Monotonía, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$
   a) De la suma: si $a > b \Rightarrow a + c > b + c$
   b) De la multiplicación: si $a > b$, y $c > 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$

F. AXIOMA DE CONTINUIDAD

Si tenemos dos conjuntos de números reales A y B, de modo que todo número de A es menor que cualquier número de B, existirá siempre un número real c con el que se verifique $a \leq c \leq b$, para todo $a \in A$, y $b \in B$.

SIGNOS DE AGRUPACIÓN

Los signos de agrupación (generalmente paréntesis o corchetes), se emplean para indicar que las cantidades encerradas en ellos deben considerarse como *un todo*, o sea, como *una sola cantidad*.
Así, $a + (b - c)$, indica que la diferencia $b - c$ debe sumarse con a, y sabemos que para efectuar esta suma escribimos a continuación de a las demás cantidades *con su propio signo*, tendremos:

$$a + (b - c) = a + b - c.$$

Por otra parte, la expresión $a - (b + c)$, indica que de a hay que restar la suma $b + c$ y como para restar escribimos el *sustraendo con los signos cambiados* a continuación del minuendo, tendremos:

$$a - (b + c) = a - b - c.$$

Regla 2 (Para suprimir signos de agrupación)**.**

1. Para suprimir signos de agrupación precedidos del signo $+$ se deja el mismo signo que tengan a cada una de las cantidades que se hallan dentro de él.

2. Para suprimir signos de agrupación precedidos del signo $-$ se cambia el signo a cada una de las cantidades que se hallan dentro de él.

Ejemplo:

1. $a + (b - c) + 2a - (a + b) = a + b - c + 2a - a - b = 2a - c.$

2. $3a + [-5x - (-a + [9x - (a + x)])].$

   Cuando unos signos de agrupación están incluidos dentro de otros, como en este ejemplo, se suprime uno en cada paso empezando por *el más interior*. Así, en este caso, suprimimos primero el paréntesis que agrupa al binomio $a + x$, y se obtiene,

   $$3a + [-5x - (-a + [9x - a - x])]$$

   después, tenemos: $3a + [-5x - (-a + 9x - a - x)]$
   luego, $3a + [-5x + a - 9x + a + x]$
   por último, $3a - 5x + a - 9x + a + x$
   reduciendo términos semejantes, se obtiene: $5a - 13x$.

EJERCICIO 2.
Simplificar, suprimiendo los signos de agrupación y reduciendo términos semejantes:

1. $x-(x-y)$.
2. $x^2+(-3x-x^2+5)$.
3. $a+b-(-2a+3)$.
4. $4m-(-2m-n)$.
5. $2x+3y-(4x+3y)$.
6. $a+(a-b)+(-a+b)$.
7. $a-(b+a)+(-a+b)-(-a+2b)$.
8. $-(a+b)+(-a-b)-(-b+a)+(3a+b)$.
9. $2a+[a-(a+b)]$.
10. $3x-[x+y-(2x+y)]$.
11. $2m-[(m-n)-(m+n)]$.
12. $4x^2+[-(x^2-xy)+(-3y^2+2xy)-(-3x^2+y^2)]$.
13. $a+[(-2a+b)-(-a+b-c)+a]$.
14. $4m-[2m+(n-3)]+[-4n-(2m+1)]$.
15. $2x+[-5x-(-2y+[-x+y])]$.
16. $x^2-[-7xy+(-y^2+[-x^2+3xy-2y^2])]$.
17. $-(a+b)+(-3a+b-[-2a+b-(a-b)]+2a)$.
18. $(-x+y)-(4x+2y+[-x-y-(x+y)])$.

Regla 3 (Para introducir cantidades en signos de agrupación)**.**

1. Para introducir cantidades dentro de un signo de agrupación precedido del signo $+$ se deja a cada una de las cantidades con el mismo signo que tengan.
2. Para suprimir signos de agrupación precedidos del signo $-$ se cambia el signo a cada una de las cantidades que se hallan dentro de él.

Ejemplo:

1. $x^3-2x^2+3x-4=x^3+(-2x^2+3x-4)$.
2. $x^2-a^2+2ab-b^2=x^2-(a^2-2ab+b^2)$.

MULTIPLICACIÓN

El orden de los factores no altera el producto. Así, el producto ab puede escribirse ba; el producto abc puede escribirse también bac o acb. Esta es la *Ley conmutativa* de la multiplicación.

Los factores de un producto pueden agruparse de cualquier modo. Así, en el producto $abcd = a(bcd) = (ab)(cd) = (abc)d$. Esta es la *Ley asociativa* de la multiplicación.

LEYES DE SIGNOS

Regla 4.

$$\begin{array}{ll} +\text{ por } + \text{ da } + & \quad +\text{ por } - \text{ da } - \\ -\text{ por } - \text{ da } + & \quad -\text{ por } + \text{ da } - \end{array}$$

Por el axioma C-4. (existencia del inverso multiplicativo), a todo número real $a \neq 0$, corresponde un número real, y sólo uno, a^{-1}, de modo que $aa^{-1} = 1$, este número a^{-1} se llama *inverso* o *recíproco* de a, y también se representa como $1/a$.
El inverso o recíproco de un número (cualquiera distinto de cero), tiene su mismo signo y por el mismo axioma de existencia del inverso, se puede deducir lo siguiente,

$$\begin{array}{ll} +\text{ entre } + \text{ da } + & \quad +\text{ entre } - \text{ da } - \\ -\text{ entre } - \text{ da } + & \quad -\text{ entre } + \text{ da } - \end{array}$$

El signo del producto de varios factores es $+$ cuando tiene un número par de factores negativos o ninguno. Así, $(-a)(-b)(-c)(-d) = abcd$
El signo del producto de varios factores es $-$ cuando tiene un número impar de factores negativos. Así, $(-a)(-b)(-c)) - abc$.

LEYES DE EXPONENTES

Definición 9 (Potencia de un número)**.** Llamamos potencia de un número real al producto de tomarlo como factor tantas veces como se quiera. Si a es un número real cualquier y $n > 1$ es un número natural, tendremos la notación a^n, que se lee a elevado a la enésima potencia, e indica que a debe tomarse como factor n veces.

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots a \qquad (n \text{ veces})$$

En la notación a^n, llamamos base al número a, y exponente a n, que nos indica las veces que debemos tomar como factor a.
Conviene distinguir dos casos:

1. Si un número $a \neq 0$, se eleva a la potencia 0 es igual a 1. Así

$$a^0 = 1; \quad 3^0 = 1$$

2. Si un número $a \neq 0$, se eleva a un exponente negativo cualquiera $-m$, es igual al recíproco de la potencia a^m (de exponente positivo). Así

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}; \quad 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

Regla 5 (Producto de dos potencias de igual base)**.** Para multiplicar dos potencias de igual base, se eleva dicha base a la potencia que resulte de la suma de los exponentes respectivos. Por ejemplo:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$2^2 \cdot 2^4 = 2^{2+4} = 2^6 = 64$$

Regla 6 (División de dos potencias de igual base)**.** La división de dos potencias de igual base es igual a la base elevada a la potencia que dé la diferencia de ambos exponentes. Así:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\frac{3^4}{3^2} = 3^{4-2} = 3^2 = 9$$

Regla 7 (Potencia de una potencia)**.** Para hallar la potencia de una potencia se multiplican los exponentes y se mantiene la base. Por ejemplo:

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$\left(2^2\right)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6 = 64$$

Hay que tener cuidado en no confundir la potencia de una potencia, con la elevación de un número a una potencia cuyo exponente, a la vez esté afectado por otro exponente. Así, no es lo mismo $(4^2)^3$ que 4^{2^3}. Ejemplo:

$$\left(4^2\right)^3 = 4^{2 \cdot 3} = 4^6 = 4096 \quad \text{y por otra parte} \quad 4^{2^3} = 4^{2 \cdot 2 \cdot 2} = 4^8 = 65536$$

LEY DE LOS COEFICIENTES

Regla 8. El coeficiente del producto de dos factores es el producto de los coeficientes de los factores. Así $(3a)(4b) = 12ab$. En efecto, como el orden de los factores no altera el producto, tenemos:

$$(3a)(4b) = 3 \cdot 4 \cdot a \cdot b = 12ab$$

MULTIPLICACIÓN DE MONOMIOS

Regla 9. Se multiplican los coeficientes y a continuación de este producto se escriben las letras de los factores en orden alfabético, poniéndole a cada letra un exponente igual a la suma de los exponentes que tenga en los factores. El signo del producto vendrá dado por la Ley de los signos.

Ejemplos:

1. $(2a^2)(3a^3) = 2 \cdot 3 \cdot a^{2+3} = 6a^5$.
2. $(-xy^2)(-5mx^4y^3) = 5mx^{1+4}y^{2+3} = 5mx^5y^5$.
3. $(-ab^2)(4a^mb^nc^3) = (-1)(4)a^{1+m}b^{2+n}c^3 = -4a^{m+1}b^{n+2}c^3$.

EJERCICIO 3.
Multiplicar:

1. 2 por -3.
2. -4 por -8.
3. -15 por 16.
4. ab por $-ab$.
5. $2x^2$ por $-3x$.
6. $-4a^2b$ por $-ab^2$.
7. $-5x^3y$ por xy^2.
8. a^2b^3 por $3a^2x$.
9. $-4m^2$ por $-5mn^2p$.
10. $5a^2y$ por $-6x^2$.
11. $-x^2y^3$ por $-4y^3z^4$.
12. abc por cd.
13. $-15x^4y^3$ por $-16a^2x^3$.
14. $3a^2b^3$ por $-4x^2y$.
15. $3a^2bx$ por $7b^3x^5$.
16. $-8m^2n^3$ por $-9a^2mx^4$.
17. a^mb^n por $-ab$.
18. $-5a^mb^n$ por $-6a^2b^3x$.
19. x^my^nc por $-x^my^nc^x$.
20. $-m^xn^a$ por $-6m^2n$.

Ejemplos:

4. $(a^{x+1}b^{x+2})(-3a^{x+2}b^3) = -3a^{x+1+x+2}b^{x+2+3} = -3a^{2x+3}b^{x+5}$.
5. $(-a^{m+1}b^{n-2})(-4a^{m-2}b^{2n+4}) = 4a^{2m-1}b^{3n+2}$.

EJERCICIO 4.

Multiplicar:

1. a^m por a^{m+1}.
2. $-x^a$ por $-x^{a+2}$.
3. $4a^nb^x$ por $-ab^{x+1}$.
4. $-a^{n+1}b^{n+2}$ por $a^{n+2}b^n$.
5. $-3a^{n+4}b^{n+1}$ por $-4a^{n+2}b^{n+3}$.
6. $3x^2y^3$ por $4x^{m+1}y^{m+2}$.
7. $4x^{a+2}b^{a+4}$ por $-5x^{a+5}b^{a+1}$.
8. a^mb^nc por $-a^mb^{2n}$.
9. $-x^{m+1}y^{a+2}$ por $-4x^{m-3}y^{a-5}c^2$.
10. $-5m^an^{b-1}c$ por $-7m^{2a-3}n^{b-4}$.

Ejemplos:

6. $\left(\frac{2}{3}a^2b\right)\left(-\frac{3}{4}a^3m\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)a^5bm = -\frac{1}{2}a^5bm$
7. $\left(-\frac{5}{6}x^2y^3\right)\left(-\frac{3}{10}x^my^{n+1}\right) = \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{3}{10}\right)x^{m+2}y^{n+1+3} = \frac{1}{4}x^{m+2}y^{n+4}$

EJERCICIO 5.

Multiplicar:

1. $\frac{1}{2}a^2$ por $\frac{4}{5}a^3b$.
2. $-\frac{3}{7}m^2n$ por $-\frac{7}{14}a^2m^3$.
3. $\frac{2}{3}x^2y^3$ por $-\frac{3}{5}a^2x^4y$.
4. $-\frac{1}{8}m^3n^4$ por $-\frac{4}{5}a^3m^2n$.
5. $-\frac{7}{8}abc$ por $\frac{2}{7}a^3$.
6. $-\frac{3}{5}x^3y^4$ por $-\frac{5}{6}a^2by^5$.
7. $\frac{1}{3}a$ por $\frac{3}{5}a^m$.
8. $-\frac{3}{4}a^m$ por $-\frac{2}{5}ab^3$.
9. $\frac{5}{6}a^mb^n$ por $-\frac{3}{10}ab^2c$.
10. $-\frac{2}{9}a^xb^{m+1}$ por $-\frac{3}{5}a^{x-1}b^m$.
11. $\frac{3}{8}a^mb^n$ por $-\frac{4}{5}a^{2m}b^n$.
12. $-\frac{2}{11}a^{x+1}b^{x-3}c^2$ por $-\frac{44}{7}a^{x-3}b^2$.

Multiplicación de más de dos monomios

Ejemplos:

1. $(2a)(-3a^2b)(-ab^3) = 6a^4b^4$. El signo del producto es positivo porque hay un número par de factores negativos.
2. $(-x^2y)\left(-\frac{2}{3}x^m\right)\left(-\frac{3}{4}a^2y^n\right)) - \frac{1}{2}a^2x^{m+2}y^{n+1}$. El signo del producto es negativo porque tiene un número impar de factores negativos.

EJERCICIO 6.

Multiplicar:

1. $(a)(-3a)(a^2)$.
2. $(3x^2)(-x^3y)(-a^2x)$.
3. $(-m^2n)(-3m^2)(-5mn^3)$.
4. $(4a^2)(-5a^3x^2)(-ay^2)$.
5. $(-a^m)(-2ab)(-3a^2b^x)$.
6. $\left(\frac{1}{2}x^3\right)\left(-\frac{2}{3}a^2x\right)\left(-\frac{3}{5}a^4m\right)$
7. $\left(\frac{2}{3}a^m\right)\left(\frac{3}{4}a^2b^4\right)\left(-3a^4b^{x+1}\right)$.
8. $\left(-\frac{3}{5}m^3\right)\left(-5a^2m\right)\left(-\frac{1}{10}a^xm^a\right)$
9. $(2a)(-a^2)(-3a^3)(4a)$.
10. $(-3b^2)(-4a^3b)(ab)(-5a^2x)$.
11. $(a^mb^x)(-a^2)(-2ab)(-3a^2x)$.
12. $\left(-\frac{1}{2}x^2y\right)\left(-\frac{3}{5}xy^2\right)\left(-\frac{3}{4}x^2y\right)$.

MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS POR MONOMIOS

Multiplicar $(a+b)$ por c equivale a tomar la suma $(a+b)$ como sumando c veces, así:

$$\begin{aligned}(a+b)c&=(a+b)+(a+b)+(a+b)+\cdots+(a+b), \quad c \text{ veces}\\ &=(a+a+\cdots+a)+(b+b+\cdots+b), \quad c \text{ veces en cada caso}\\ &=ac+bc.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a-b)c&=(a-b)+(a-b)+(a-b)+\cdots+(a-b), \quad c \text{ veces}\\ &=(a+a+\cdots+a)-(b+b+\cdots+b), \quad c \text{ veces en cada caso}\\ &=ac-bc.\end{aligned}$$

Podemos, pues, enunciar la siguiente:

Regla 10 (Multiplicación de un polinomio por un monomio)**.** Se multiplica el monomio por cada uno de los términos del polinomio, teniendo en cuenta en cada caso la Ley de los signos, y se separan los productos parciales con sus propios signos. Esta es la *Ley distributiva* de la multiplicación.

Ejemplos:

1. $(3x^2-6x+7)(4ax^2)=3x^2(4ax^2)-6x(4ax^2)+7(4ax^2)=12ax^4-24ax^3+28ax^2$.
2. $(x^{a+1}y-3x^ay^2+2x^{a-1}y^3-x^{a-2}y^4)(-3x^2y^m) = -3x^{a+3}y^{m+1}+9x^{a+2}y^{m+2}-6x^{a+1}y^{m+3}+3x^ay^{m+4}$
3. $(\frac{2}{3}x^4y^2-\frac{3}{5}x^2y^4+\frac{5}{6}y^6)(-\frac{2}{9}a^2x^3y^2)=-\frac{4}{27}a^2x^7y^4+\frac{2}{15}a^2x^5y^6-\frac{5}{27}a^2x^3y^8$.

EJERCICIO 7.

Multiplicar:

1. $3x^3 - x^2$ por $-2x$.
2. $8x^2y - 3y^2$ por $2ax^3$.
3. $x^2 - 4x + 3$ por $-2x$.
4. $a^3 - 4a^2 + 6a$ por $3ab$.
5. $a^2 - 2ab + b^2$ por $-ab$.
6. $x^5 - 6x^3 - 8x$ por $3a^2x^2$.
7. $m^4 - 3m^2n^2 + 8n^4$ por $-4m^3x$.
8. $x^3 - 4x^2y + 6xy^2$ por ax^3y.
9. $a^3 - 5a^2b - 8ab^2$ por $-4a^4m^2$.
10. $a^m - a^{m-1} + a^{m-2}$ por $-2a$.
11. $x^{m+1} + 3x^m - x^{m-1}$ por $3x^{2m}$.
12. $a^mb^n + a^{m-1}b^{n+1} - a^{m-2}b^{n+2}$ por $3a^2b$.
13. $x^3 - 3x^2 + 5x - 6$ por $-4x^2$.
14. $a^4 - 6a^3x + 9a^2x^2 - 8$ por $3bx^3$.
15. $a^{n+3} - 3a^{n+2} - 4a^{n+1} - a^n$ por $-a^nx^2$.
16. $x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 7x + 5$ por $-3a^2x^3$.
17. $-3x^3 + 5x^2y - 7xy^2 - 4y^3$ por $5a^2xy^2$.
18. $x^{a+5} - 3x^{a+4} + x^{a+3} - 5x^{a+1}$ por $-2x^2$.

EJERCICIO 8.

Multiplicar:

1. $\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b$ por $\frac{2}{5}a^2$.
2. $\frac{2}{3}a - \frac{3}{4}b$ por $-\frac{2}{3}a^3b$.
3. $\frac{3}{5}a - \frac{1}{6}b + \frac{2}{5}c$ por $-\frac{5}{3}ac^2$.
4. $\frac{2}{5}a^2 + \frac{1}{3}ab - \frac{2}{9}b^2$ por $3a^x$.
5. $\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{5}xy - \frac{1}{4}y^2$ por $\frac{3}{2}y^3$.
6. $3a - 5b + 6c$ por $-\frac{3}{10}a^2x^3$.
7. $\frac{2}{9}x^4 - x^2y^2 + \frac{1}{3}y^4$ por $\frac{3}{7}x^3y^4$.
8. $\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{5}y^2$ por $-\frac{5}{8}a^2m$.
9. $\frac{2}{3}m^3 + \frac{1}{2}m^2n - \frac{5}{6}mn^2 - \frac{1}{9}n^3$ por $\frac{3}{4}m^2n^3$.
10. $\frac{2}{5}x^6 - \frac{1}{3}x^4y^2 + \frac{3}{5}x^2y^4 - \frac{1}{10}y^6$ por $-\frac{5}{7}a^3x^4y^3$.

MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS POR POLINOMIOS

Sea el producto $(a+b-c)(m+n)$. Haciendo $m+n=y$, tendremos:

$$\begin{aligned}(a+b-c)(m+n) &= (a+b-c)y = ay + by - cy, \quad \text{(sustituyendo } y \text{ por su valor } m+n)\\ &= a(m+n) + b(m+n) - c(m+n)\\ &= am + an + bm + bn - cm - cn\\ &= am + bm - cm + an + bn - cn.\end{aligned}$$

Podemos, pues, enunciar la siguiente:

Regla 11 (Multiplicación de dos polinomios)**.** Se multiplican todos los términos del primer factor por cada uno de los términos del segundo factor, teniendo en cuenta la Ley de los signos, y se reducen los términos semejantes.

Ejemplos:

1. $(a-4)(3+a) = a^2 - 4a + 3a - 12 = a^2 - a - 12.$
2. $(4x-3y)(-2y+5x) = 20x^2 - 15xy - 8xy + 6y^2 = 20x^2 - 23xy + 6y^2.$

EJERCICIO 9.
Multiplicar:

1. $a+3$ por $a-1$.
2. $a-3$ por $a+1$.
3. $x+5$ por $x-4$.
4. $m-6$ por $m-5$.
5. $-x+3$ por $-x+5$
6. $-a-2$ por $-a-3$.
7. $3x-2y$ por $y+2x$.
8. $-4y+5x$ por $-3x+2y$.
9. $5a-7b$ por $a+3b$.
10. $8n-9m$ por $4n+6m$.

Ejemplos:

3. $(2+a^2-2a-a^3)(a+1) = -a^4 - a^2 + 2.$
4. $(6y^2+2x^2-5xy)(3x^2-4y^2+2xy) = 6x^4 - 11x^3y + 32xy^3 - 24y^4.$
5. $(x-4x^2+x^3-3)(x^3-1+4x^2) = x^6 - 15x^4 - 8x^2 - x + 3.$
6. $(2x-y+3z)(x-3y-4z) = 2x^2 - 7xy - 5xz + 3y^2 - 5yz - 12z^2.$

EJERCICIO 10.
Multiplicar:

1. x^2+xy+y^2 por $x-y$.
2. a^2+b^2-2ab por $a-b$.
3. a^2+b^2+2ab por $a+b$.
4. x^3-3x^2+1 por $x+3$.
5. a^2-a+a^2 por $a-1$.
6. $m^4+m^2n^2+n^4$ por m^2-n^2.
7. x^3-2x^2+3x-1 por $2x+3$.
8. $3y^3+5-6y$ por y^2+2.
9. m^3-m^2+m-2 por $am+a$.
10. $3a^2-5ab+2b^2$ por $4a-5b$.

11. $5m^4 - 3m^2n^2 + n^4$ por $3m - n$.
12. $a^2 + a + 1$ por $a^2 - a - 1$.
13. $x^3 + 2x^2 - x$ por $x^2 - 2x + 5$.
14. $m^3 - 3m^2n + 2mn^2$ por $m^2 - 2mn$.
15. $x^2 + 1 + x$ por $x^2 - x - 1$.
16. $2 - 3x^2 + x^4$ por $x^2 - 2x + 3$.
17. $m^3 - 4m + m^2 - 1$ por $m^3 + 1$.
18. $a^3 - 5a + 2$ por $a^2 - a + 5$.
19. $x^2 - 2xy + y^2$ por $xy - x^2 + 3y^2$.
20. $n^2 - 2n + 1$ por $n^2 - 1$.

Multiplicación de polinomios con exponentes literales
Ejemplos:

7. $(a^{m+2} - 4a^m - 2a^{m+1})(a^2 - 2a) = a^{m+4} - 4a^{m+3} + 8a^{m+1}$.
8. $(x^{a+2} - 3x^a - x^{a+1} + x^{a-1})(x^{a+1} + x^a + 4x^{a-1}) = x^{2a+3} - 6x^{2a} - 11x^{2a-1} + 4x^{2a-2}$.

EJERCICIO 11.
Multiplicar:

1. $a^x - a^{x+1} + a^{x+2}$ por $a + 1$.
2. $x^{n+1} + 2x^{n+2} - x^{n+3}$ por $x^2 + x$.
3. $m^{a-1} + m^{a+1} + m^{a+2} - m^a$ por $m^2 - 2m + 3$.
4. $a^{n+2} - 2a^n + 2a^{n+1}$ por $a^n + a^{n+1}$.
5. $x^{a+2} - x^a + 2x^{a+1}$ por $x^{a+3} - 2x^{a+1}$.
6. $3a^{x-2} - 2a^{x-1} + a^x$ por $a^2 + 2a - 1$.
7. $3a^{x-1} + a^x - 2a^{x-2}$ por $a^x - a^{x-1} + a^{x-2}$.
8. $m^{a+1} - 2m^{a+2} - m^{a+3} + m^{a+4}$ por $m^{a-3} - m^{a-1} + m^{a-2}$.
9. $x^{a-1} + 2x^{a-2} - x^{a-3} + x^{a-4}$ por $-x^{a-3} + x^{a-1} - x^{a-2}$.
10. $a^nb - a^{n-1}b^2 + 2a^{n-2}b^3 - a^{n-3}b^4$ por $a^nb^2 - a^{n-2}b^4$.
11. $a^x + b^x$ por $a^m + b^m$.
12. $a^{x-1} - b^{n-1}$ por $a - b$.
13. $a^{2m+1} - 5a^{2m+2} + 3a^{2m}$ por $a^{3m-3} + 6a^{3m-1} - 8a^{3m-2}$.
14. $x^{a+2}y^{x-1} + 3x^ay^{x+1} - 4x^{a+1}y^x$ por $-2x^{2a-1}y^{x-2} - 10x^{2a-3}y^x - 4x^{2a-2}y^{x-1}$.

Multiplicación de polinomios con coeficientes fraccionarios
Ejemplos:

7. $\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}xy\right)\left(\frac{2}{3}x - \frac{4}{5}y\right) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{28}{45}x^2y + \frac{4}{15}xy^2$.
8. $\left(\frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{5}ab\right)\left(\frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{4}b^2\right) = \frac{1}{4}a^4 - \frac{19}{60}a^3b + \frac{47}{120}a^2b^2 - \frac{1}{5}ab^3 - \frac{1}{8}b^4$.

EJERCICIO 12.
Multiplicar:

1. $\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}$ por $\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b$.
2. $x - \frac{2}{5}y$ por $\frac{5}{6}y + \frac{1}{3}x$.
3. $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}xy + \frac{1}{4}y^2$ por $\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}y$.
4. $\frac{1}{4}a^2 - ab + \frac{2}{3}b^2$ por $\frac{1}{4}a - \frac{3}{2}b$.
5. $\frac{2}{5}m^2 + \frac{1}{3}mn - 1\frac{1}{2}n^2$ por $\frac{3}{2}m^2 + 2n^2 - mn$.
6. $\frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{2}{5}$ por $2x^3 - \frac{1}{3}x + 2$.
7. $\frac{1}{3}ax - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}a^2$ por $\frac{3}{2}x^2 - ax + \frac{2}{3}a^2$.
8. $\frac{2}{7}x^3 + \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{5}x^2y$ por $\frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{3}xy + \frac{5}{6}y^2$.

Producto continuado de polinomios
Ejemplo:
Desarrollar y simplificar $3x(x+3)(x-2)(x+1)$
Observación: al poner los factores entre paréntesis la multiplicación está indicada.
La operación se desarrolla efectuando el producto de dos factores cualesquiera; este producto se multiplica por el tercer factor y este nuevo producto por el factor que queda.
Así, en este caso efectuamos el producto $3x(x+3) = 3x^2 + 9x$. Este producto lo multiplicamos por $x-2$ y tendremos, $(3x^2+9x)(x-2) = 3x^3+3x^2-18x$, este producto se multiplica por $x+1$, y se obtiene, $(3x^3+3x^2-18x)(x+1) = 3x^4+6x^3-15x^2-18x$.
Por lo tanto,
$$3x(x+3)(x-2)(x+1) = 3x^4 + 6x^3 - 15x^2 - 18x$$

EJERCICIO 13.
Desarrollar y simplificar:

1. $4(a+5)(a-3)$.
2. $3a^2(x+1)(x-1)$
3. $2(a-3)(a-1)(a+4)$.
4. $(x^2+1)(x^2-1)(x^2+1)$.
5. $m(m-4)(m-6)(3m+2)$.
6. $(a-b)(a^2-2ab+b^2)(a+b)$.
7. $(a^m-3)(a^{m-1}+2)(a^{m-1}-1)$.
8. $a^x(a^{x+1}+b^{x+2})(a^{x+1}-b^{x+2})b^x$.

Multiplicación combinada con suma y resta

Ejemplos:

1. Desarrollar y simplificar $(x+3)(x-4)+3(x-1)(x+2)$
   Efectuaremos el primer producto $(x+3)(x-4)$, después el segundo producto $3(x-1)(x+2)$ y sumaremos este segundo producto con el primero.
   Del primer producto, se obtiene: $(x+3)(x-4)=x^2-x-12$
   Del segundo: $3(x-1)(x+2)=3(x^2+x-2)=3x^2+3x-6$.
   Sumando este segundo producto con el primero:
   $$(x^2-x-12)+(3x^2+3x-6)=4x^2+2x-18$$

2. Desarrollar y simplificar $x(a-b)^2-4x(a+b)$
   Elevar una cantidad al cuadrado equivale a multiplicarla por sí misma; así $(a-b)^2$ equivale a $(a-b)(a-b)$.
   Desarrollando $x(a-b)^2$, se obtiene:
   $$x(a-b)^2=x(a^2-2ab+b^2)=a^2x-2abx+b^2x$$
   Desarrollando $4x(a+b)^2$, se obtiene:
   $$4x(a+b)^2=4x(a^2+2ab+b^2)=4a^2x+8abx+4b^2x$$
   Restando este segundo producto del primero primero:
   $$(a^2x-2abx+b^2x)-(4a^2x+8abx+4b^2x)=-3a^x-10abx-3b^2x$$

EJERCICIO 14.

Desarrollar y simplificar:

1. $4(x+3)+5(x+2)$.
2. $6(x^2+4)-3(x^2+1)+5(x^2+2)$.
3. $a(a-x)+3a(x+2a)-a(x-3a)$.
4. $x^2(y^2+1)+y^2(x^2+1)-3x^2y^2$.
5. $4m^3-5mn^2+3m^2(m^2+n^2)-3m(m^2-n^2)$.
6. $y^2+x^2y^3-y^3(x^2+1)+y^2(x^2+1)-y^2(x^2-1)$.

7. $5(x+2)-(x+1)(x+4)-6x$.
8. $(a+5)(a-5)-3(a+2)(a-2)+5(a+4)$.
9. $(a+b)(4a-3b)-(5a-2b)(3a+b)-(a+b)(3a-6b)$.
10. $(a+c)^2-(a-c)^2$.
11. $3(x+y)^2-4(x-y)^2+3x^2-3y^2$.
12. $(m+n)^2-(2m+n)^2+(m-4n)^2$.
13. $x(a+x)+3x(a+1)-(x+1)(a+2x)-(a-x)^2$.
14. $(a+b-c)^2+(a-b+c)^2-(a+b+c)^2$.
15. $(x^2+x-3)^2-(x^2-2+x)^2+(x^2-x-3)^3$
16. $(x+y+z)^2-(x+y)(x-y)+3(x^2+xy+y^2)$.
17. $[x+(2x-3)][3x-(x+1)]+4x-x^2$.
18. $[3(x+1)-4(x+1)][3(x+4)-2(x+2)]$.
19. $[(m+n)(m-n)-(m+n)(m+n)][2(m+n)-3(m-n)]$.
20. $[(x+y)^2-3(x-y)^2][(x+y)(x-y)+x(y-x)]$.

Supresión de signos de agrupación con productos indicados

Ejemplos:

1. Desarrollar y simplificar $5a+(a-2\,(a+3b-4\,(a+b)))$.
   Un coeficiente colocado junto a un signo de agrupación nos indica que hay que multiplicarlo por cada uno de los términos encerrados en el signo de agrupación. Así, en este caso multiplicamos -4 por $a+b$, para obtener

   $$5a+(a-2\,(a+3b-4a-4b))\,.$$

   En el curso de la operación podemos (y es aconsejable) reducir términos semejantes. Así, reduciendo los términos semejantes dentro del paréntesis interior, tenemos:

   $$5a+(a-2\,(-3a-b))\,.$$

   Efectuando la multiplicación de -2 por $(-3a-b)$, se obtiene,

   $$5a+(a+6a+2b)=5a+(7a+2b)=5a+7a+2b=12a+2b.$$

2. Desarrollar y simplificar $-3(x+y)-4(-x+2(-x+2y-3(x-(y+2)))-2x)$.

$$\begin{aligned}
&-3(x+y)-4(-x+2(-x+2y-3(x-y-2))-2x)\\
=&-3x-3y-4(-x+2(-x+2y-3x+3y+6)-2x)\\
=&-3x-3y-4(-x+2(-4x+5y+6)-2x)\\
=&-3x-3y-4(-x-8x+10y+12-2x)\\
=&-3x-3y-4(-11x+10y+12)\\
=&-3x-3y+44x-40y+48\\
=&41x-43y-48.
\end{aligned}$$

EJERCICIO 15.

Desarrollar y simplificar:

1. $x-(3a+2(-x+1))$.
2. $-(a+b)-3(2a+b(-a+2))$.
3. $-(3x-2y+(x-2y)-2(x+y)-3(2x+1))$.
4. $4x^2-(-3x+5-(-x+x(2-x)))$.
5. $2a-(-3x+2(-a+3x-2(-a+b-(2+a))))$.
6. $a-(x+y)-3(x-y)+2(-(x-2y)-2(-x-y))$.
7. $m-(m+n)-3(-2m+(-2m+n+2(-1+n)-(m+n-1)))$.
8. $-2(a-b)-3(a+2b)-4(a-2b+2(-a+b-1+2(a-b)))$.
9. $-5(x+y)-(2x-y+2(-x+y-3-(x-y-1)))+2x$.
10. $m-3(m+n)+(-(-(-2m+n-2-3(m-n+1))+m))$.
11. $-3(x-2y)+2(-4(-2x-3(x+y)))-(-(-(x+y)))$.
12. $5(-(a+b)-3(-2a+3b-(a+b)+(-a-b)+2(-a+b))-a)$.
13. $-3(-(+(-a+b)))-4(-(-(-a-b)))$.
14. $-(a+b-2(a-b)+3(-(2a+b-3(a+b-1)))-3(-a+2(-1+a)))$.