

Capítulo

3

Cinemática 2D/ 3D

Paula Ferreira: psfer@pos.if.ufrj.br

3.1. Aula Passada

- Aceleração de uma trajetória curva:

$$\vec{a} = \vec{a}_{tangencial} + \vec{a}_{normal} \quad (1)$$

- MUA:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2 \quad (2)$$

$$\vec{v} = v_{0x}\hat{\mathbf{i}} + (v_{0y} + a(t - t_0))\hat{\mathbf{j}} \quad (3)$$

3.2. Trajetória da partícula

$$\frac{x(t) - x_0}{v_{0x}} \quad (4)$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}\left(\frac{x(t) - x_0}{v_{0x}}\right) + \frac{1}{2}a\left(\frac{x(t) - x_0}{v_{0x}}\right)^2 \quad (5)$$

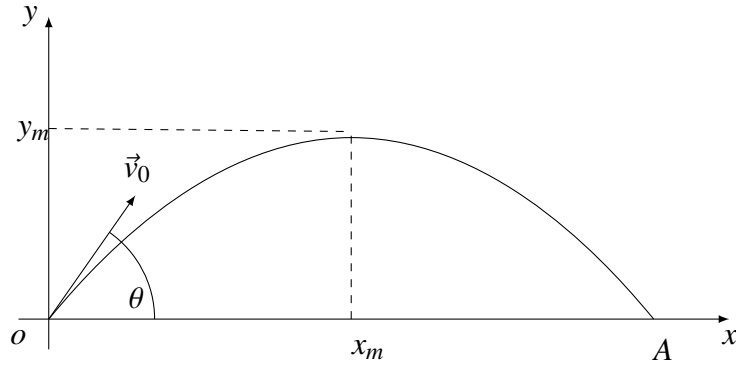
A trajetória de uma partícula se movimentando com aceleração constante vertical é:

$$y - y_0 = \left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}}\right)(x - x_0) + \frac{1}{2}\frac{a}{v_{0x}^2}(x - x_0)^2 \quad (6)$$

3.3. Movimento de projéteis

Vamos analisar o caso de movimento de um projétil sem resistência do ar.

$$\vec{a} = -g\hat{\mathbf{j}} \quad (7)$$



$$x_0 = y_0 = 0 \quad (8)$$

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta \quad (9)$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta \quad (10)$$

$$\vec{v}_0 = v_0 \cos \theta \hat{\mathbf{i}} + v_0 \sin \theta \hat{\mathbf{j}} \quad (11)$$

$$v_y(t) = v_0 \sin \theta - gt \quad (12)$$

$$v_x(t) = v_0 \cos \theta \quad (13)$$

$$y = v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (14)$$

$$x = v_0 \cos \theta t \quad (15)$$

Trajetória:

$$y = \tan(\theta)x - g \frac{x^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \quad (16)$$

3.3.1. Altura máxima

Quando $v_y(t_m) = 0$. Descobrimos t_m a partir de (12):

$$t_m = \frac{v_0 \sin \theta}{g} \quad (17)$$

A altura máxima é obtida com (17) em (14).

$$\begin{aligned} y_m &= v_0 \sin \theta t_m - \frac{1}{2} g t_m^2 \\ y_m &= v_0 \sin \theta (v_0 \sin \theta - g t) - \frac{1}{2} g (v_0 \sin \theta - g t)^2 \\ y_m &= \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} \end{aligned} \quad (18)$$

3.3.2. Posição x da altura máxima

Com (15) e (17):

$$\begin{aligned} x_m &= v_0 \cos \theta t_m \\ \therefore x_m &= v_0 \cos \theta [v_0 \sin \theta - g t] \end{aligned}$$

3.3.3. Quanto tempo até alcançar o chão?

$x=A$

(14), onde $y(\text{no instante que alcança } A) = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2 \\ \Rightarrow t_A &= \frac{2 v_0 \sin \theta}{g} = 2 t_m \end{aligned} \quad \begin{matrix} (19) \\ (20) \end{matrix}$$

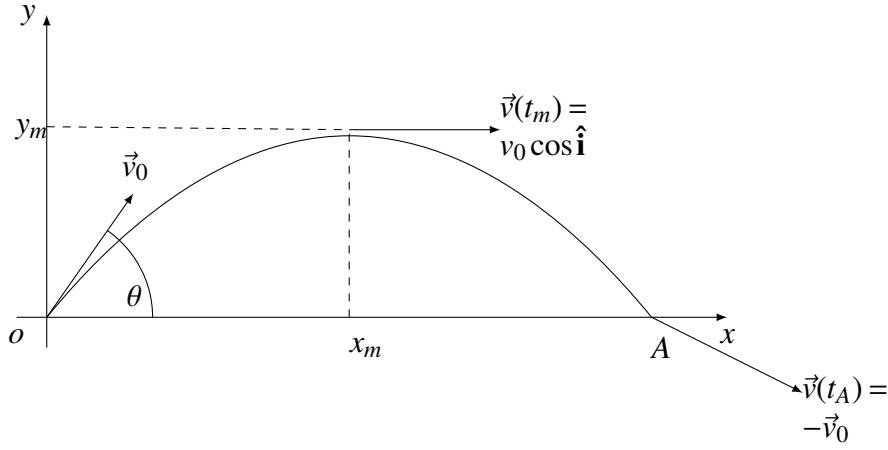
3.3.4. Com que velocidade atinge o solo?

Temos que descobrir $\vec{v}(t_A)$.

$$v_y(t_A) = v_0 \sin \theta - g t_A = -v_0 \sin \theta \quad (21)$$

$$v_x(t_A) = v_0 \cos \theta \quad (22)$$

$$\vec{v}(t_A) = v_0 \sin \theta (-\hat{j}) + v_0 \cos \theta \hat{i} = -\vec{v}_0 \quad (23)$$



$$\tan \theta_0 = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} \quad (24)$$

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} \quad (25)$$

3.3.5. $v_y(y)$

Usando (12) com (14):

$$v_y^2 = v_0^2 \sin^2 \theta - 2gy \quad (26)$$

$$v_y = \pm (v_0^2 \sin^2 \theta - 2gy)^{1/2} \quad (27)$$

Em x , não temos essa relação, pois a aceleração é só vertical.

3.3.6. Quanto é A em termos de θ , v_0 e g ?

Usando (20) em (15):

$$Av_0 \cos \theta t_A \quad (28)$$

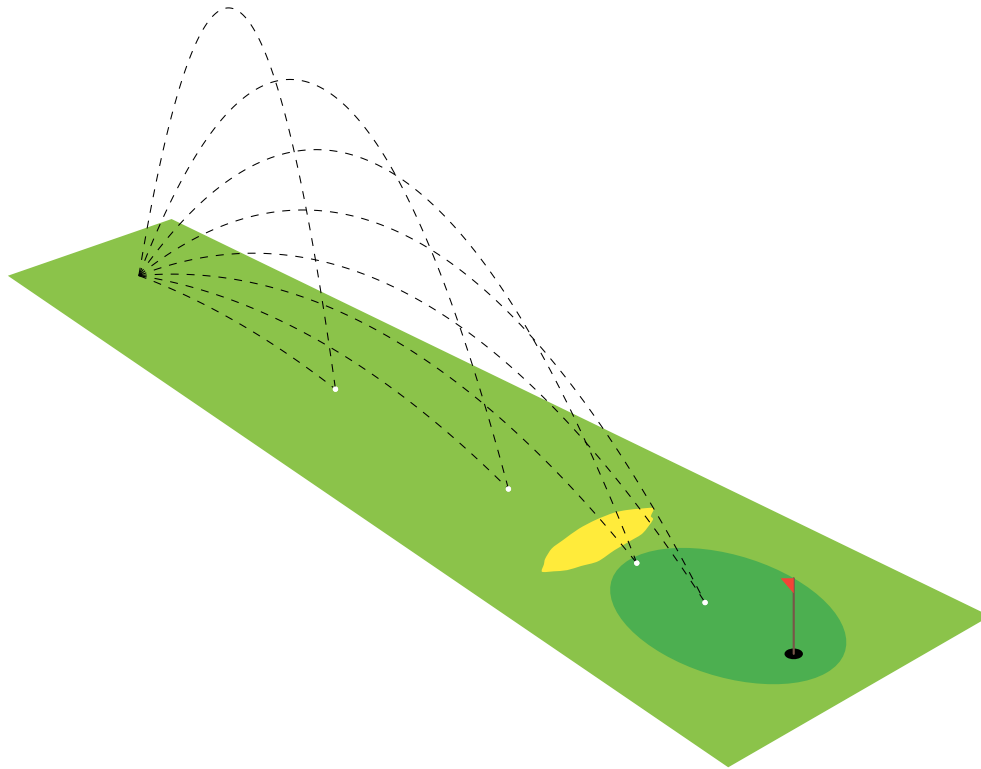
$$A = v_0 \cos \theta \frac{2v_0 \sin \theta}{g} \quad (29)$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos b \sin a$$

$$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\therefore A = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta) \quad (30)$$

3.3.7. Ângulo de lançamento



A equação (30) é fundamental para entender a relação entre alcance e ângulo de lançamento. A comparação entre ângulos é feita considerando a mesma velocidade inicial, como a equação tem $\sin(2\theta)$, o ângulo que dá o maior alcance é 45° .

3.4. Exemplo de exercício

Exemplo 3.9 Young & Freedman: feito em aula.

Referências

- [1] Herch Moysés Nussenzveig. *Curso de física básica: Mecânica (vol. 1)*. Vol. 394. Editora Blucher, 2013.
- [2] Hugh D Young, A Lewis Ford e Roger A Freedman. *Física I Mecânica*. 2008.