Capítulo 7

Colisões

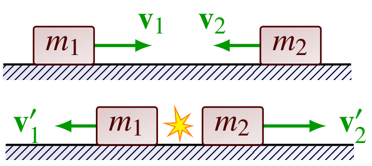
Paula Ferreira: psfer@pos.if.ufrj.br

7.1. Colisões elásticas e inelásticas

- Colisões elásticas: quando forças entre corpos forrem conservativas, a energia cinética (K) total do sistema se conserva.

  $\Delta K = 0,\ \frac{dK}{dt} = 0$

  $\Delta \vec{p} = 0,\ \frac{d\vec{p}}{dt} = 0$

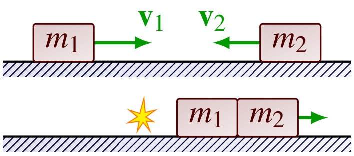


- Colisão inelástica: a energia cinética não se conserva.

  Colisão perfeitamente inelástica: quando corpos ficam unidos após a colisão.

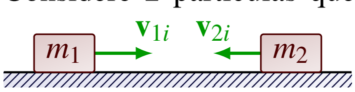
  $\Delta K \neq 0,\ \frac{dK}{dt} \neq 0$

  $\Delta \vec{p} = 0,\ \frac{d\vec{p}}{dt} = 0$



7.2. Colisões elásticas unidimensionais

Considere 2 partículas que se movem ao longo de uma reta e colidem elasticamente.



Apenas forças internas atuam na colisão, então:

$$\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{1}$$

$$p_{1i} + p_{2i} = p_{1f} + p_{2f} \tag{2}$$

Como é uma colisão elástica:

$$K_{1i} + K_{2i} = K_{1f} + K_{2f} \tag{3}$$

Vamos tentar reescrever L em termos de $p = mv$:

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\frac{p}{m}\right)^2 \tag{4}$$

$$K = \frac{p^2}{2m} \tag{5}$$

(5) $\rightarrow$ (3)

$$\frac{p_{1i}^2}{2m_1} + \frac{p_{2i}^2}{2m_2} = \frac{p_{1f}^2}{2m_1} + \frac{p_{2f}^2}{2m_2} \tag{6}$$

Temos um sistema com (6) e (2). Reescrevendo (2):

$$p_{1i} - p_{1f} = p_{2f} - p_{2i} \tag{7}$$

e reescrevendo (6):

$$\frac{p_{1f}^2}{\cancel{2}m_1} - \frac{p_{1i}^2}{\cancel{2}m_1} = \frac{p_{2f}^2}{\cancel{2}m_2} - \frac{p_{2i}^2}{\cancel{2}m_2} \tag{8}$$

$$p_{2f}^2 - p_{2i}^2 = \frac{m_2}{m_1}(p_{1f}^2 - p_{1i}^2) \tag{9}$$

$$p_{2f}^2 - p_{2i}^2 = \lambda(p_{1f}^2 - p_{1i}^2) \tag{10}$$

onde,

$$\lambda = \frac{m_2}{m_1} \tag{11}$$

Dividindo (10) por (7):

$$p_{2f} + p_{2i} = \lambda(p_{1f} + p_{1i}) \tag{12}$$
$$m_2(v_{2f} + v_{2i}) = \lambda m_1(v_{1f} + v_{1i}) \tag{13}$$
$$m_2(v_{2f} + v_{2i}) = m_2(v_{1f} + v_{1i}) \tag{14}$$
$$v_{2f} + v_{2i} = v_{1f} + v_{1i} \tag{15}$$
$$\tag{16}$$

A velocidade relativa entre as partículas se inverte:

$$v_{2f} - v_{1f} = -(v_{2i} - v_{1i}) \tag{17}$$

$$p_{2f} + p_{2i} = \lambda(p_{1f} + p_{1i}) \tag{18}$$
$$p_{2f} - p_{2i} = p_{1i} - p_{1f} \tag{19}$$

(18) - (19):

$$2p_{2i} = (\lambda + 1)p_{1f} + (\lambda - 1)p_{1i} \tag{20}$$
$$2p_{2i} + (1 - \lambda)p_{1i} = (1 + \lambda)p_{1f} \tag{21}$$
$$p_{1f} = \frac{2p_{2i}}{1 + \lambda} + \left(\frac{1 - \lambda}{1 + \lambda}\right)p_{1f} \tag{22}$$

(22) → (19)

$$p_{2f} = p_{2i} + p_{1i} - \left\{\frac{2p_{2i}}{1 + \lambda} + \left(\frac{1 - \lambda}{1 + \lambda}\right)p_{1f}\right\} \tag{23}$$
$$p_{2f} = \frac{(1 + \lambda)p_{2i} - 2p_{2i}}{1 + \lambda} + \frac{(1 + \lambda) - (1 - \lambda)}{1 + \lambda}p_{1i} \tag{24}$$
$$p_{2f} = \frac{(\lambda - 1)}{(1 + \lambda)}p_{2i} + \frac{2\lambda}{1 + \lambda}p_{1i} \tag{25}$$

Reescrevendo (22) e (25) em termos de v_{1i}, v_{2i}, m_1 e m_2:

$$m_1 v_{1f} = \frac{2m_2 v_{2i}}{1 + \frac{m_2}{m_1}} + \left(\frac{1 - m_2/m_1}{1 + m_2/m_1}\right) \tag{26}$$
$$v_{1f} = \frac{2m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} + \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) \tag{27}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1 v_{1i}}{m_1 + m_2} - \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}v_{2i} \tag{28}$$

7.2.1. Casos particulares

(a) Massas iguais:

$$p_{1f} = \frac{2p_{2i}}{1+1} + 0p_{1i} \Rightarrow p_{1f} = p_{2i} \tag{29}$$

$$v_{1f} = v_{2i} \tag{30}$$

$$p_{2f} = p_{1i} \Rightarrow v_{2f} = v_{1i} \tag{31}$$

As partículas trocam momento e velocidade.

(b) Alvo em repouso:

$$v_{2i} = 0 = p_{2i} \tag{32}$$

$$p_{2f} = \left(\frac{2\lambda}{\lambda+1}\right) \tag{33}$$

$$p_{1f} = \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)p_{1i} \tag{34}$$

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_{1i} \tag{35}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1 v_{1i}}{m_1 + m_2} \tag{36}$$

Se $m_1 \ll m_2$: $v_{2f} \ll v_{1i}$:

$$v_{1f} = -v_{1i} \tag{37}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_2}v_{1i} \ll v_{1i} \tag{38}$$

quase não mexe.

(b) $m_1 \ll m_2$

$$v \simeq v_{1i} \tag{39}$$

$$v_{2f} \simeq 2v_{1i} \tag{40}$$

A partícula massiva quase não muda sua velocidade, enquanto a menor é arrastada com o dobro da velocidade.

7.3. Colisões unidimensionais totalmente inelásticas

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_f \tag{41}$$

$$v_f = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} = v_{CM} \tag{42}$$

- CM se move com MRU
- partículas se movem juntas com v_{CM}

Exemplo: Pêndulo Balístico Bala de massa m_1 colide com tronco de massa m_2, pendurado por fios ao teto. A colisão é totalmente inelástica e após a colisão o sistema alcança uma altura h acima da posição mais baixa do pêndulo. Qual a velocidade inicial da bala?

Por conservação de momento linear

$$m_1 v_{1i} + 0 = (m_1 + m_2) v_f \tag{43}$$

Após eles colidirem, podemos aplicar a conservação de energia do sistema até atingir a altura h.

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{44}$$

$$(m_1 + m_2)\frac{v_f^2}{2} = (m_1 + m_2) g h \tag{45}$$

$$v_f = \sqrt{2gh} \tag{46}$$

(44) → (43):

$$v_{1i} = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2gh} \tag{47}$$

Referências

[1] Herch Moysés Nussenzveig. *Curso de fisica básica: Mecânica (vol. 1)*. Vol. 394. Editora Blucher, 2013.

[2] Hugh D Young, A Lewis Ford e Roger A Freedman. *Física I Mecânica*. 2008.