Capítulo
3

Cinemática 2D/ 3D

Paula Ferreira: psfer@pos.if.ufrj.br

3.1. Aula Passada

- Aceleração de uma trajetória curva:

$$\vec{a} = \vec{a}_{tangencial} + \vec{a}_{normal} \tag{1}$$

- MUA:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2 \tag{2}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_{0x}\hat{\mathbf{i}} + \Big(v_{0y} + a(t - t_0)\Big)\hat{\mathbf{j}} \tag{3}$$

3.2. Trajetória da partícula

$$\frac{x(t) - x_0}{v_{0x}} \tag{4}$$

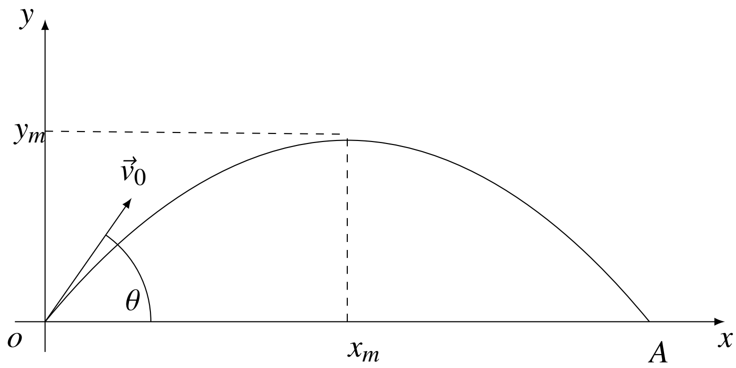
$$y(t) = y_0 + v_{0y}\left(\frac{x(t) - x_0}{v_{0x}}\right) + \frac{1}{2}a\left(\frac{x(t) - x_0}{v_{0x}}\right)^2 \tag{5}$$

A trajetória de uma partícula se movimentando com aceleração constante vertical é:

$$y - y_0 = \left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}}\right)(x - x_0) + \frac{1}{2}\frac{a}{v_{0x}^2}(x - x_0)^2 \tag{6}$$

3.3. Movimento de projéteis

$$\vec{a} = -g\hat{\mathbf{j}} \tag{7}$$



$$x_0 = y_0 = 0 \tag{8}$$

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta \tag{9}$$
$$v_{0y} = v_0 \sin\theta \tag{10}$$

$$\vec{v}_0 = v_0 \cos\theta \hat{\mathbf{i}} + v_0 \sin\theta \hat{\mathbf{j}} \tag{11}$$

$$v_y(t) = v_0 \sin\theta - gt \tag{12}$$
$$v_x(t) = v_0 \cos\theta \tag{13}$$

$$y = v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{14}$$
$$x = v_0 \cos\theta t \tag{15}$$

Trajetória:

$$y = \tan(\theta)x - g\frac{x^2}{2v_0^2 \cos^2\theta} \tag{16}$$

3.3.1. Altura máxima

Quando $v_y(t_m) = 0$. Descobrimos t_m a partir de (12):

$$t_m = v_0 \sin\theta - gt \tag{17}$$

A altura máxima é obtida com (17) em (14).

$$\begin{aligned} y_m &= v_0 \sin\theta\, t_m - \frac{1}{2} g t_m^2 \\ y_m &= v_0 \ \sin\theta (v_0 \sin\theta - gt) - \frac{1}{2} g (v_0 \sin\theta - gt)^2 \end{aligned}$$

$$y_m = \frac{v_0^2 \sin\theta}{2g} \tag{18}$$

3.3.2. Posição x da altura máxima

Com (15) e (17):

$$\begin{aligned} x_m &= v_0 \cos\theta\, t_m \\ \therefore\ x_m &= v_0 \cos\theta [v_0 \sin\theta - gt] \end{aligned}$$

3.3.3. Quanto tempo até alcançar o chão?

x=A

(14), onde y(no instante que alcança A) = 0:

$$0 = v_0 \ \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{19}$$

$$\Rightarrow t_A = \frac{2A \sin\theta}{g} = 2t_m \tag{20}$$

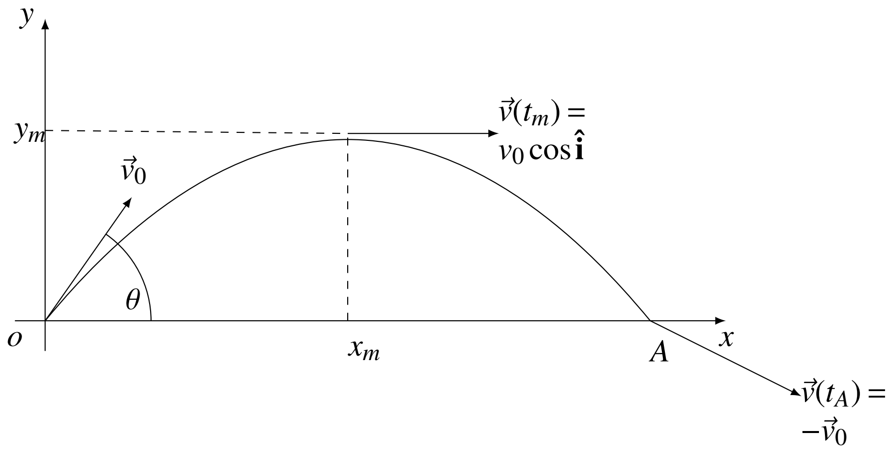
3.3.4. Com que velocidade atinge o solo?

Temos que descobrir $\vec{v}(t_A)$.

$$v_y(t_A) = v_0 \sin\theta - g t_A = -v_0 \sin\theta \tag{21}$$

$$v_x(t_A) = v_0 \cos\theta \tag{22}$$

$$\vec{v}(t_A) = v_0 \sin\theta(-\hat{\mathbf{j}}) + v_0 \cos\theta\hat{\mathbf{i}} = -\vec{v}_0 \tag{23}$$



$$\tan\theta_0 = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} \tag{24}$$

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} \tag{25}$$

3.3.5. $v_y(y)$

Usando (12) com (14):

$$v_y^2 = v_0^2 \sin^2\theta - 2gy \tag{26}$$

$$v_y = \pm(v_0^2 \sin^2\theta - 2gy)^{1/2} \tag{27}$$

Em x, não temos essa relação, pois a aceleração é só vertical.

3.3.6. Quanto é A em termos de θ, v_0 e g?

Usando (20) em (15):

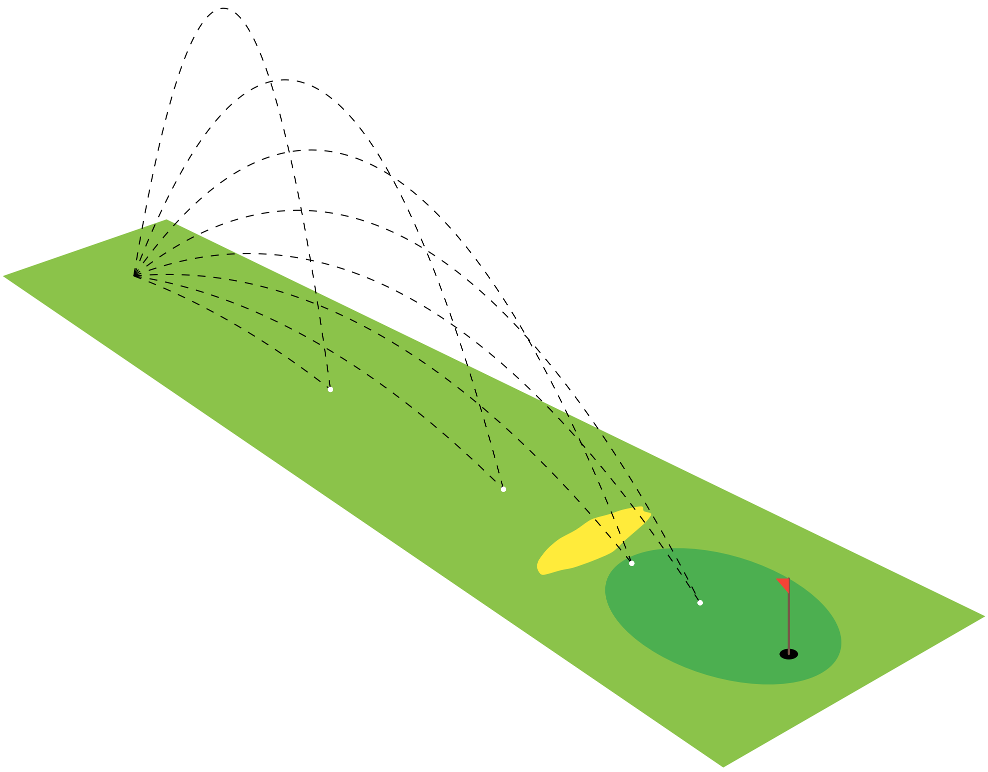
$$A v_0 \cos\theta t_A \tag{28}$$

$$A = v_0 \cos\theta \frac{2v_0 \sin\theta}{g} \tag{29}$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos b \sin a$$
$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\therefore A = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\theta) \quad (30)$$

3.3.7. Ângulo de lançamento



A equação (30) é fundamental para entender a relação entre alcance e ângulo de lançamento. A comparação entre ângulos é feita considerando a mesma velocidade inicial, como a equação tem $\sin(2\theta)$, o ângulo que dá o maior alcance é 45^o.

3.4. Exemplo de execício

Exemplo 3.9 Young & Freedman: feito em aula.

Referências

[1] Herch Moysés Nussenzveig. *Curso de fisica básica: Mecânica (vol. 1)*. Vol. 394. Editora Blucher, 2013.

[2] Hugh D Young, A Lewis Ford e Roger A Freedman. *Fısica I Mecânica*. 2008.