

## Capítulo

# 2

## Cinemática 1D

Paula Ferreira: psfer@pos.if.ufrj.br

### 2.1. Aceleração

Aceleração é a taxa de variação da velocidade com o tempo cuja unidade é  $m/s^2$ .

Aceleração média:

$$a_{mx} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_{2x} - t_{1x}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Aceleração instantânea:

$$a_x = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{v_x(t_0 + \Delta t) - v_x(t_0)}{t - t_0} = \frac{dv_x}{dt} \quad (1)$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (2)$$

Então, agora a inclinação da reta que corta a curva  $v_x(t)$  em um dado tempo  $t$  representa a aceleração nesse instante.

Na figura 2.1, vemos a posição da partícula em vários intervalos de tempo que na verdade se trata da queda-livre que veremos depois. Vamos só olha para as figuras.

Olhando para posição e velocidade vemos que onde a inclinação é nula a velocidade é nula. A partir do meio da curva, a inclinação é positiva e portanto a velocidade é positiva.

Agora olhando apenas para a velocidade e aceleração: Como a velocidade cresce linearmente com o tempo (é uma reta), a aceleração é constante.

Na figura 2.2, temos uma trajetória nada intuitiva. Vamos supor que cada quadradinho vale 1. Da mesma forma, vamos analisar primeiro a posição e a velocidade. Em  $t = 1$ , a velocidade é negativa, pois a inclinação na curva azul nesse ponto é negativa. Em  $t = 2$ , a inclinação é quase nula, então a velocidade é quase zero, mas ainda negativa. Logo

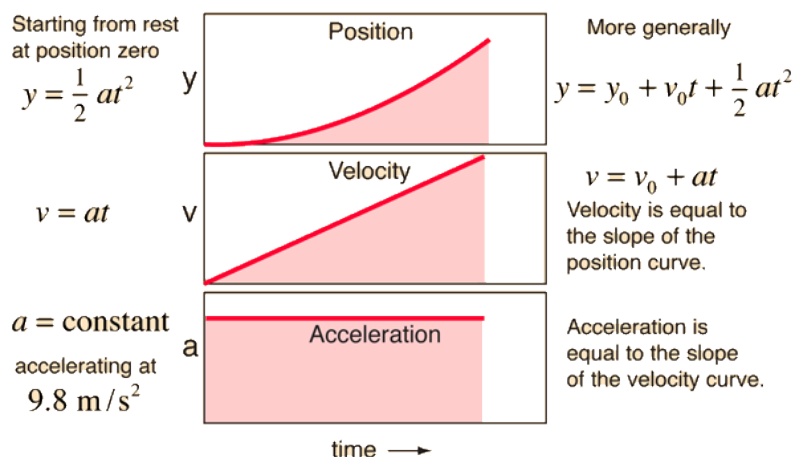


Figura 2.1: Posição, velocidade e aceleração. <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/hph.html>

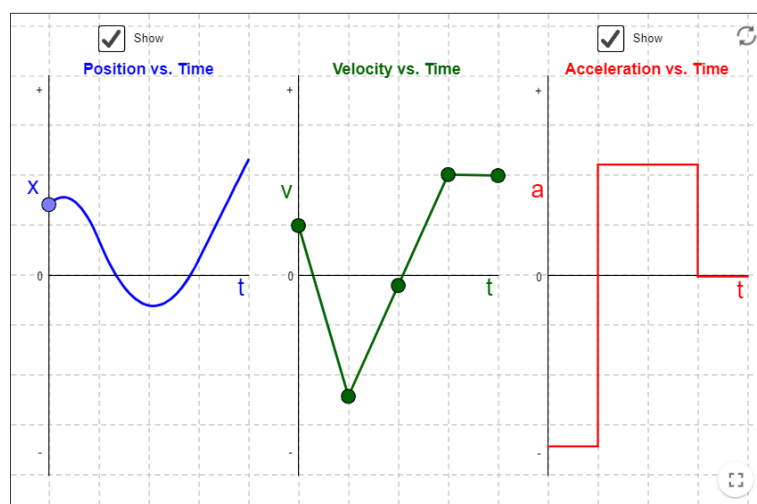


Figura 2.2: Posição, velocidade e aceleração. <https://www.geogebra.org/m/pdNj3DgD>

depois, a partícula volta para  $x+$  e sobe com inclinação positiva constante. O gráfico da velocidade fica constante a partir de  $t = 3$ .

Olhando para a velocidade e aceleração, até  $t = 1$ , a velocidade tem inclinação negativa. Portanto, a aceleração é negativa. Entre  $t = 1$  e  $t = 3$ , a inclinação da velocidade é positiva, vemos  $a > 0$ . Por fim, entre  $t = 3$  e  $t = 4$ , a velocidade é constante, inclinação nula. Então,  $a = 0$ .

## 2.2. Interpretação geométrica da aceleração com a posição

Concavidade ou curvatura para baixo da função horária  $x(t)$ :  $a < 0$ .

Concavidade ou curvatura para cima da função horária  $x(t)$ :  $a > 0$ .

Veja pelas figuras acima e também as figuras em Young & Freedman e no Moysés onde fala de aceleração.

### 2.3. O problema inverso

Conhecendo a velocidade(figura 2.3) entre dois instantes  $t_1$  e  $t_2$ , como calcular  $x(t_1)$  e  $x(t_2)$ ?

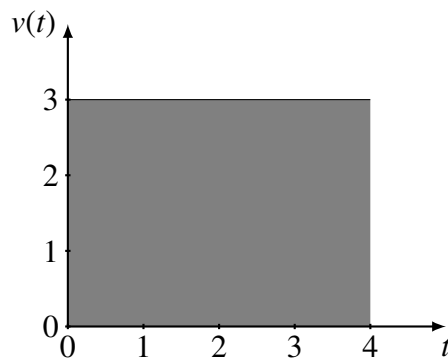


Figura 2.3

É possível ver que  $v \cdot \Delta t = \Delta x$  indica  $\frac{m}{s} \cdot s$ . A área entre o gráfico e o eixo das abscissas (ou área embaixo da curva) dá o valor de  $\Delta x$ .

E quando  $v(t)$  for uma função muito complicada como na figura 2.4?

$$v(t_1) \cdot \Delta t_1 + v(t'_1) \cdot \Delta t_2 + \dots = x(t_2) - x(t_1) \quad (3)$$

$$x(t_2) - x(t_1) \approx \sum_i v(t'_i) \Delta t'_i \quad (4)$$

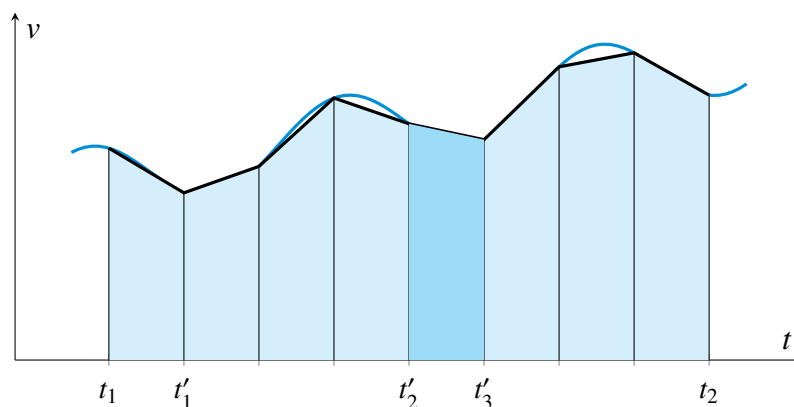


Figura 2.4

Então,

$$x(t_2) - x(t_1) = \lim_{\Delta t'_i \rightarrow 0} \sum_i v(t'_i) \Delta t'_i$$

$$\lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum_i v(t_i) \Delta t_i := \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

### 2.3.1. Integral de um polinômio

Dado  $f(x) = x^n$ , a integral de  $f(x)$  é:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (5)$$

## 2.4. MRUA

Agora podemos descrever o Movimento Retilíneo Uniformemente Acelerado, sabendo sua aceleração constante  $a$ :

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = a = cte. \quad (6)$$

Considerando os instantes  $[t_0, t]$ :

$$v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^t a dt = a(t - t_0) \quad (7)$$

$$\therefore v(t) = v_0 + a(t - t_0) \quad (8)$$

Onde  $v(t_0) = v_0$  que é constante.

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t v(t') dt' \quad (9)$$

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t \{v_0 + at'\} dt' = \quad (10)$$

$$= \int_{t_0}^t v_0 dt' + \int_{t_0}^t at' dt' = \quad (11)$$

$$= v_0(t - t_0) + a \frac{(t - t_0)^2}{2} \quad (12)$$

Temos então a le horária de MRUA:

$$x(t) = x(t_0) + v_0(t - t_0) + a \frac{(t - t_0)^2}{2} \quad (13)$$

Vamos escrever a velocidade em função da posição:

$$\frac{v(t) - v_0}{a} = t - t_0 \quad (14)$$

Colocando a equação 14 na 13, temos:

$$\begin{aligned} x(t) - x(t_0) &= \left\{ \frac{v(t) - v_0}{a} \right\} + \frac{a}{2} \left\{ \frac{v(t) - v_0}{a} \right\}^2 \\ a(x(t) - x(t_0)) &= 2v_0(v - v_0) + \frac{1}{2}(v(t) - v_0)^2 \\ 2a(x - x_0) &= 2v_0(v - v_0) + v^2 - 2vv_0 + v_0^2 \\ 2a(x - x_0) &= \cancel{2v_0v} - 2v_0^2 + v^2 - \cancel{2vv_0} + v_0^2 \\ 2a(x - x_0) &= v^2 - v_0^2 \end{aligned}$$

$$\therefore v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \quad (15)$$

## 2.5. Queda livre

Movimento vertical com aceleração para baixo  $\vec{g} = g(-\hat{j})$  cujo módulo é  $g \simeq 9.8m \cdot s^2$ .

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} \quad (16)$$

$$v^2(t) = v_0^2 - 2g(y - y_0) \quad (17)$$

$$v(t) = v_0 - gt \quad (18)$$

## Referências

- [1] Herch Moysés Nussenzveig. *Curso de fisica básica: Mecânica (vol. 1)*. Vol. 394. Editora Blucher, 2013.
- [2] Hugh D Young, A Lewis Ford e Roger A Freedman. *Física I Mecânica*. 2008.