Niezmienniki i kolorowania

Przemysław Simajchel, warsztaty PWSZ 2018

I. Niezmienniki i (i półniezmienniki)

1. Na kartce zapisane jest 10 liczb 1 oraz 15 liczb -1. W każdym kroku Jaś wybiera dwie spośród tych liczb, jedną zmazuje, a drugą zastępuje ich iloczynem. Powtarza tą czynność dopóki nie zostanie tylko jedna liczba. Jaka to liczba?
2. Zadany jest ciąg liczb $1, 2, \ldots, 2018$. W każdym kroku wybieramy dowolne dwie liczby z tego ciągu, usuwamy je i dostawiamy do naszego ciągu wartość bezwzględną ich różnicy. Czy jest możliwe, aby po pewnej liczbie kroków otrzymać ciąg złożony z pojedynczego zera?
3. Mamy 4 kawałki papieru. W każdym kroku wybieramy jakiś z kawałków i rozrywamy go na 4 kolejne. Czy jest możliwe, aby po pewnej liczbie kroków posiadać dokładnie 2018 kawałków papieru?
4. (Aut na Neugebauerze) W punktach $\{(0,0),(1,0),(0,1)\}$ układu współrzędnych siedzą trzy pchły. W każdym kroku pewna pchła A przeskakuje nad inną pchłą B w taki sposób, że B jest środkiem odcinka wyznaczonego przez punkty wyskoku i lądowania A. Czy pchły mogą tak wybrać kolejne skoki, aby po ich wykonaniu znajdowały się w punktach $\{(0,0),(2,0),(0,2)\}$ albo $\{(1,1),(1,0),(0,1)\}$?
5. Koło podzielono na 6 części. W pierwszej i trzeciej części wpisano liczbę 1, w pozostałe 0. W każdym kroku możemy powiększyć liczby w dwóch sąsiednich ćwiartkach o 1. Czy po pewnej liczbie kroków możemy zrównać wszystkie liczby na kole?
6. Wyobraźmy sobie, że na każdym punkcie na osi liczb naturalnych kładziemy pewną liczbę monet (być może zerową). W każdym ruchu możemy wybrać dowolny punkt $n > 0$ na osi, na którym znajdują się co najmniej 2 monety, a następnie przełożyć jedną monetę z n na $n-1$ i jedną na $n+1$. Załóżmy, że wykonaliśmy przynajmniej jeden ruch. Czy możemy wrócić do stanu początkowego po pewnej skończonej liczbie ruchów?
7. Dane jest n liczb całkowitych nieujemnych $a_1, \ldots a_n$. W pierwszym kroku Jaś wybiera liczbę a_i, nazywa ją *sporą*, a następnie wybiera dowolną inną liczbę a_j i zmienia jej wartość na dowolną całkowitą nieujemną mniejszą od *sporej* liczby. W każdym kolejnym kroku jak wybiera nową *sporą* liczbę, ale tym razem zmienia wartość już nie dowolnie wybranej liczby, a takiej, która była *spora* w poprzednim kroku. Czy Jaś może się bawić w ten sposób w nieskończoność?
8. Każda z liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jest równa 1 albo -1. Wiadomo, że $a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \ldots + a_na_1a_2a_3 = 0$. Udowodnij, że n jest podzielne przez 4.
9. W bloku o 120 apartamentach mieszka 119 osób. Powiemy, że apartament jest *przepeniony*, jeżeli mieszka w nim co najmniej 15 osób. Każdego dnia mieszkańcy jednego z *przepenionych* apartamentów kłócą się i każdy przeprowadza się do innego mieszkania. Czy po pewnej liczbie dni żaden apartament nie będzie przepełniony?
10. Dane są liczby $(3, 4, 12)$. W każdym kroku możemy wybrać dwie z nich, a oraz b, i zastąpić je liczbami odpowiednio $\frac{3}{5}a - \frac{4}{5}b$, $\frac{4}{5}a + \frac{3}{5}b$. Czy po pewnej liczbie kroków możemy uzyskać liczby $(4, 6, 12)$?
11. Na każdej godzinie na tarczy zegara wkręcono żarówkę. W każdym kroku możemy wybrać 6 kolejnych żarówek i odwrócić stan (zgaszona/zapalona) każdej z nich. Na początku świeci się tylko żarówka na godzinie 12. Czy jest możliwe, aby po pewnej liczbie kroków świeciła się tylko żarówka na godzinie 11?
12. Dana jest szachownica 8×8 ze skoczkiem w lewym górnym rogu. W każdym kroku wykonujemy nim ruch na pole, którego jeszcze nie odwiedziliśmy. Czy jest możliwe, aby zakończyć ten proces w prawym dolnym rogu szachownicy po odwiedzeniu wszystkich pól?
13. Dana jest szachownica 8×8, w której każdym polu znajduje się liczba rzeczywista. W każdym kroku możemy wybrać jeden wiersz lub kolumnę i odwrócić znaki wszystkich liczb, które się w niej znajdują. Pokaż, że za pomocą takich kroków można doprowadzić do sytuacji, kiedy suma wszystkich liczb na polach szachownicy będzie nieujemna.
14. Dana jest szachownica 4×4, na której jedno pole w pierwszym wierszu nie będące narożnikiem jest czarne, a reszta pól biała. W każdym kroku możemy wybrać dowolny wiersz, kolumnę lub prostą równoległą do przekątnej i odwrócić kolory na wszystkich jej polach. Czy jest możliwe, by po pewnej liczbie kroków otrzymać całą białą planszę?

II. Kolorowania (i niezmienniki)

1. Dzielimy okrąg na 10 sektorów za pomocą 5 różnych przekątnych. Początkowo w każdym sektorze kładziemy po monecie. W każdym kroku wybieramy dwa sektory. Najpierw z pierwszego przenosimy jedną monetę do kolejnego sektora zgodnie z kierunkiem wskazówek zegara, a następnie z drugiego przenosimy do kolejnego sektora przeciwnie do kierunku wskazówek zegara. Rozstrzygnij, czy po pewnej liczbie kroków można przenieść wszystkie monety do jednego sektora.
2. Czy planszę 8×8 z wyciętymi dwoma przeciwległymi rogami da się pokryć standardowymi dominami 1×2?
3. Prostokątną podłogę pokryto pewną liczbą płytek 2×2 i 1×4. Niestety po jakimś czasie jedna z nich została rozbita, a jedyna płytka, jaką mamy w zapasie jest typu przeciwnego do rozbitej płytki. Czy jest możliwe, aby tak poprzestawiać płytki, by znów pokryć całą podłogę?
4. Czy planszę 10×10 da się pokryć 4-blokowymi dominami w kształcie litery L?
5. Na nieskończonej szachownicy wydzielony jest prostokąt 10×9, na którego każdym polu stoi pionek. Pionki nie mogą normalnie się poruszać, a jedynie zbijać poprzez przeskoczenie z aktualnego pola na pole za pionkiem sąsiadującym w pionie lub poziomie. Czy jest możliwe, aby po pewnym czasie na planszy pozostał tylko jeden pionek?
6. Czy można pokryć szachownicę 13×13 z wyciętym środkowym polem za pomocą bloków o wymiarach 1×4?
7. Niech p będzie liczbą pierwszą. Pokaż, że planszę $a \times b$ da się pokryć prostokątami $1 \times p$ wtedy i tylko wtedy, gdy p dzieli a lub p dzieli b.