Zestaw 6, rozwiązania

Przemysław Simajchel

1. (a) Niech X to liczba k-luk. Niech X_i to indykator, czy w i-tym kubełku zaczyna się k-luka. Mamy $X = \sum_{i=0}^{n-k} X_i$. Mamy

$$P(X_i = 1) = P(\text{w kubkach od i do i+k-1 nie ma kulek})$$

$$P(\text{w kubkach od i do i+k-1 nie ma kulek}) = \prod_{j=1}^{m} P(\text{j-ta kulka znajdzie sie w pozostalych n-k kubkach})$$

$$\prod_{j=1}^{m} P(\text{j-ta kulka znajdzie sie w pozostalych n-k kubkach}) = \left(\frac{n-k}{n}\right)^m$$

Zatem $E(X) = (n-k+1)\left(\frac{n-k}{n}\right)^m$.

2. Pokażemy, że Y jest Poissonem z parametrem $p\mu$. Rozpisujemy:

$$P(Y = k) = \lim_{i\to\infty} P(Y = k|X = i)P(X = i) = \lim_{i\to\infty} \binom{i}{k} p^k(1-p)^{i-k}\frac{e^{-\mu}\mu^i}{i!} = \frac{p^k e^{-\mu}\mu^k}{k!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\mu(1-p))^j}{j!}$$

$$\frac{p^k e^{-\mu}\mu^k}{k!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\mu(1-p))^j}{j!} = \frac{(p\mu)^k e^{-\mu}}{k!}e^{(1-p)\mu} = \frac{e^{-p\mu}(p\mu)^k}{k!}$$

Analogicznie pokazujemy dla Z. Są niezależne, bo:

$$P(Y = a \cap Z = b) = P(Y = a \cap Z = b|X = a+b)P(X = a+b) = \binom{a+b}{a} p^a(1-p)^b\frac{e^{-\mu}\mu^{a+b}}{(a+b)!}$$

$$\binom{a+b}{a} p^a(1-p)^b\frac{e^{-\mu}\mu^{a+b}}{(a+b)!} = \frac{e^{-p\mu}(p\mu)^a}{a!}\cdot\frac{e^{-(1-p)\mu}((1-p)\mu)^b}{b!} = P(Y = a)P(Z = b)$$

Co było do pokazania.

3. (a) Rozpisujemy prawdopodobieństwa z definicji Poissona. Trywialne pozbycie się tych samych wyrazów pozostawia tylko udowodnienie nierówności

$$\mu^{2h+1} \geq (\mu+h)(\mu+h-1)\dots(\mu+1)(\mu)(\mu-1)\dots(\mu-h+1)(\mu-h)$$

Którą dowodzi znany fakt, że iloczyn liczb o stałej sumie jest maksymalny, gdy liczby te są równe.

(b)

$$P(X \geq \mu) = \sum_{h=0}^{\infty} P(X = \mu+h) \geq \sum_{h=0}^{\mu-1} P(X = \mu-h-1) = P(X < \mu)$$

Ale $P(X \geq \mu) + P(X < \mu) = 1$, co w połączeniu z powyższą nierównością dowodzi tezę zadania.

4. Niech X to liczba koszulek sprzedanych danego dnia. X jest Poissonem, bo wyraża liczbę wydarzeń (sprzedaży koszulki) w przedziale (dniu). Zatem mamy

$$P(X = 3) = \frac{e^{-5}5^3}{3!}$$

5. X analogicznie jak w poprzednim zadaniu.

$$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{13}{e^3}$$

6. (a) Niech $X_1, \dots X_n$ to liczby kul w kubełkach, $Y_1, \dots, Y_n$ to odpowiadające im (przy założeniu sumowania do n) niezależne zmienne Poissona z parametrem $\frac{n}{n} = 1$. Niech $f(x_1, \dots x_n)$ równe 1 jeżeli $x_1 = \dots = x_n = 1$, w.p.w. zero. Dodatkowo kładziemy $(X_1, \dots X_n) = X$, $(Y_1, \dots, Y_n) = Y$. f nieujemna, zatem z aproksymacji Poissona

$$P(f(X) = 1) = E(f(X)) \leq e\sqrt{n}E(f(Y)) = e\sqrt{n}P(f(Y) = 1) = e\sqrt{n}\prod_i P(Y_i = 1) = e\sqrt{n}(\frac{1}{e})^n$$

(b) Każdy rozrzut kul po jednej do każdego kubełka możemy traktować jako permutację liczb od 1 do n. Zatem wynik to $\frac{n!}{n^n}$

(c) Mamy

$$\frac{P(f(Y)=1)}{P(f(X)=1)} = \frac{e^{-n}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{e^{-n}n^n}{n!}$$

Czyli to, co chcieliśmy.

7. (a) Zauważmy, że zdarzenia, że ta pojedyncza kulka wyląduje w pierwszym, drugim albo trzecim kubełku są symetryczne, zatem szukane prawdopodobieństwo to $\frac{1}{3}$.

(b) Niech X_i to liczby kulek w odpowiednich wiaderkach. Policzymy $E(X_1|X_2=0)$. Ze względu na symetrię

$$E(X_1|X_2=0) = E(X_3|X_2=0) = \ldots = E(X_n|X_2=0)$$

Oraz oczywiście

$$E(\sum_{i=1}^{n} X_i|X_2=0) = n$$

Zatem z liniowości wartości oczekiwanej mamy

$$E(X_1|X_2=0) = \frac{n}{n-1}$$

(c) Niech $X_1, \ldots X_n$ to liczby kulek w odpowiadających kubełkach, $Y_1, \ldots, Y_n$ odpowiadające im (przy założeniu sumowania do n) zmienne z rozkładu Poissona z parametrem n. Zauważmy, że

$$P(X_1 > X_2) = P(X_2 > X_1) = \frac{1 - P(X_1 = X_2)}{2}$$

Zatem wystarczy policzyć $P(X_1 = X_2)$, równe dokładnie $\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} P(X_1 = i \cap X_2 = i)$. Ustalamy i i wyprowadzamy

$$P(X_1 = i \cap X_2 = i) = P(Y_1 = i \cap Y_2 = i | \sum_{i=1}^{n} Y_i = n)$$

$$P(Y_1 = i \cap Y_2 = i | \sum_{i=1}^{n} Y_i = n) = \frac{P(Y_1 = i \cap Y_2 = i \cap \sum_{i=1}^{n} Y_i = n)}{P(\sum_{i=1}^{n} Y_i = n)}$$

$$\frac{P(Y_1 = i \cap Y_2 = i \cap \sum_{i=1}^{n} Y_i = n)}{P(\sum_{i=1}^{n} Y_i = n)} = \frac{P(Y_1 = i) \cdot P(Y_2 = i) \cdot P(\sum_{i=3}^{n} Y_i = n - 2i)}{P(\sum_{i=1}^{n} Y_i = n)}$$

Zmienne Y_i są Poissona, więc wyliczamy z definicji cały ostatni ułamek. Wychodzi

$$P(X_1 = i \cap X_2 = i) = \frac{n!(n-2)^{n-2i}}{(i!)^2(n-2i)!n^n}$$

Zatem ostatecznie

$$P(X_1 > X_2) = \frac{1}{2} - \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \frac{n!(n-2)^{n-2i}}{2(i!)^2(n-2i)!n^n}$$

8. (a) Mamy

$$E[f(Y_1^{(m)}, \cdots, Y_n^{(m)})] = \sum_{k=0}^{\infty} E\left[f(Y_1^{(m)}, \cdots, Y_n^{(m)}) | \sum Y_i^{(m)} = k\right] P\left(\sum Y_i^{(m)} = k\right)$$

$$\geq \sum_{k=m}^{\infty} E\left[f(Y_1^{(m)}, \cdots, Y_n^{(m)}) | \sum Y_i^{(m)} = k\right] P\left(\sum Y_i^{(m)} = k\right) = \sum_{k=m}^{\infty} E\left[f(X_1^{(k)}, \cdots, X_n^{(k)})\right] P\left(\sum Y_i^{(m)} = k\right)$$

$$\geq E[f(X_1^{(m)}, \cdots, X_n^{(m)})] \sum_{k=m}^{\infty} P\left(\sum Y_i^{(m)} = k\right) = E[f(X_1^{(m)}, \cdots, X_n^{(m)})] Pr\left(\sum Y_i^{(m)} \geq m\right)$$

Gdzie pierwsza nierówności wynika z nieujemności f, a druga z jego monotoniczności. Druga równość wynika z lematu o aproksymacji Poissona z wykładu.

(b) Powołamy się na fakt, że dla X z rozkładem Poissona z parametrem μ zachodzi $P(X \geq \mu) \geq \frac{1}{2}$ oraz $P(X \leq \mu) \geq \frac{1}{2}$. Dowód pierwszej nierówności jest wcześniej w zestawie, a druga występuje jako ćwiczenie $5.14(c)$ w naszej książce (tam błędnie nierównośc jest w drugą stronę), którego dowód jest nieciekawy, więc zamiast spisywać zlinkuję paper, w którym on jest: https://projecteuclid.org/euclid.aoms/1177728608
Zatem dla f rosnącego fakt w połączeniu z poprzednim podpunktem od razu daje dowód.
Jeżeli f maleje, to w sposób zupełnie analogiczny do pierwszego podpunktu pokazujemy

$$E[f(Y_1^{(m)}, \cdots, Y_n^{(m)})] \geq E[f(X_1^{(m)}, \cdots, X_n^{(m)})]Pr\left(\sum Y_i^{(m)} \leq m\right)$$

Co znów w połączeniu z faktem kończy dowód.