Curso Internacional de Desagregación de Estimaciones en Áreas Pequeñas usando R

Método jerárquico de Bayes y método basado en modelos generalizados lineales mixtos

División de Estadísticas
Comisión Económica para América Latina y el Caribe

2020

References

- (2018) Molina, Isabel. *Estudio de los límites de desagregación de dates en encuestas de hogares para subgrupos de población y áreas geográficas y los requerimientos para superarlos: Fase II*. CEPAL.
- (2015) Rao, J.N.K y Isabel Molina. *Small Area Estimation*. Second ed.Wiley Series in Survey Methodology.

Introducción

- De nuevo, estimadores para áreas basados en modelos se consideran modelos indirectos porque usan información de otras áreas
- Estimadores basados en modelos incorporan la heterogeneidad que no puede ser explicada por las variables auxiliares coleccionadas
- Esto se realiza incorporando efectos aleatorios de las áreas en los modelos de interés

Método jerárquico de Bayes

Método jeráquico Bayes bajo el modelo BHF

- Molina, Nandrum, y Rao (2014) propusieron el método jerárquico Bayes (*hierarchical Bayes*, HB), que no requiere el uso del bootstrap
- El método reparametriza el modelo de errores anidados en términos del coeficiente de correlación intraclase $\rho = \sigma_u^2/(\sigma_u^2 + \sigma_e^2)$
- Considera distribuciones *a priori* para los parámetros $(\boldsymbol{\beta}, \rho, \sigma_e^2)$

Método jeráquico Bayes bajo el modelo BHF

El modelo HB viene dado por:

1)

$$Y_{di}|u_d, \beta, \sigma_e^2 \overset{ind}{\sim} N(\mathbf{x}'_{di}\beta + u_d, \sigma_e^2 k_{di}^2), \quad i = 1, \ldots, N_d,$$

2)

$$u_d|\rho, \sigma_e^2 \overset{iid}{\sim} N\left(0, \frac{\rho}{1-\rho}\sigma_e^2\right), \quad d = 1, \ldots, D,$$

3)

$$\pi(\beta, \rho, \sigma_e^2) \propto \frac{1}{\sigma_e^2}, \quad \epsilon \leq \rho \leq 1 - \epsilon,\ \sigma_e^2 > 0, \beta \in \mathbb{R}^p$$

donde $\epsilon > 0$ refleja la falta de información

Método jeráquico Bayes bajo el modelo BHF

- La distribución a priori de los parámetros del modelo se puede calcular en función de las distribuciones condicionadas usando la regla de cadena
- La densidad conjunta del parámetros $\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{u}', \beta', \sigma_e^2, \rho)'$ viene dada por
- $\pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}, \sigma_e^2, \rho | \mathbf{y}_s) = \pi_1(\mathbf{u} | \boldsymbol{\beta}, \sigma_e^2, \rho, \mathbf{y}_s) \pi_2(\boldsymbol{\beta} | \sigma_e^2, \rho, \mathbf{y}_s) \pi_3(\sigma_e^2 | \rho, \mathbf{y}_s) \pi_4(\rho | \mathbf{y}_s)$
- Todas las distribuciones tienen forma conocida excepto π_4, y generamos esos valores usando un método de rejilla

Método jeráquico Bayes bajo el modelo BHF

- Así, se pueden generar muestras de $\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{u}', \beta', \sigma_e^2, \rho)'$ directamente de la distribución a posteriori
- Dado $\boldsymbol{\theta}$, las variables Y_{di} para todos los individuos verifican

$$Y_{di}|\boldsymbol{\theta} \overset{ind}{\sim} N(\mathbf{x}'_{di}\beta + u_d, \sigma_e^2 k_{di}^2), \quad i = 1, \ldots, N_d,\ d = 1, \ldots, D$$

- La densidad predictiva de $\mathbf{y}_d r$ viene dada por

$$f(\mathbf{y}_{dr}|\mathbf{y}_s) = \int \prod_{i \in r_d} f(Y_{di}|\boldsymbol{\theta})\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}_s)d\boldsymbol{\theta},$$

Método jeráquico Bayes bajo el modelo BHF

- Finalmente, el estimador HB viene dado por

$$\hat{\delta}_d^{HB} = E_{\mathbf{y}_{dr}}(\delta_d|\mathbf{y}_s) = \int \delta_d(\mathbf{y}_d) f(\mathbf{y}_{dr}|\mathbf{y}_s) d\mathbf{y}_{dr}$$

lo que estimamos usando una simulación Monte Carlo

- Generamos muestras de la distribución a posteriori $\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}_s)$

Método jeráquico Bayes bajo el modelo BHF: proceso Monte Carlo

- Primero, generamos un valor $\rho^{(a)}$ de $\pi_4(\rho|\mathbf{y}_s)$ con un método de Rejilla
- Después, generamos $\sigma_e^{2(a)}$ de $\pi_3(\sigma_e^2|\rho^{(a)}, \mathbf{y}_s)$, $\boldsymbol{\beta}^{(a)}$ de $\pi_2(\boldsymbol{\beta}|\sigma_e^{2(a)}, \rho^{(a)}, \mathbf{y}_s)$ y $\mathbf{u}^{(a)}$ de $\pi_1(\mathbf{u}|\boldsymbol{\beta}^{(a)}, \sigma_e^{2(a)}, \rho^{(a)}, \mathbf{y}_s)$
- Para cada de los A valores del vector $\boldsymbol{\theta}$, generamos los valores de los individuos afuera de la muestra $\mathbf{y}_{dr}^{(a)}$, y creamos el vector censal $\mathbf{y}_d^{(a)} = (\mathbf{y}_{ds}', (\mathbf{y}_{dr}^{(a)})')'$

Método jeráquico Bayes bajo el modelo BHF:

- Para cada vector censal, producimos $\delta_d^{(a)} = \delta_d(\mathbf{y}_d^{(a)})$
- Se aproxima El estimador HB por

$$\hat{\delta}_d^{HB} = E_{\mathbf{y}_{dr}}(\delta_d|\mathbf{y}_s) \approx \frac{1}{A}\sum_{a=1}^{A}\delta_d^{(a)}$$

- La varianza se aproxima por

$$V(\delta_d|\mathbf{y}_s) \approx \frac{1}{A}\sum_{a=1}^{A}\left(\delta_d^{(a)} - \hat{\delta}_d^{HB}\right)^2$$

- Para un indicador FGT, el estimador HB se aproxima en la forma:

$$\hat{F}_{\alpha d}^{HB} \approx \frac{1}{A}\sum_{a=1}^{A}F_{\alpha d}^{(a)}$$

Resumen del estimador del método HB:

- Indicadores objetivos: Parámetros generales
- Requerimientos de datos:
  - Microdatos de las p variables auxiliares de la misma de la variable de interés
  - Área de interés obtenida de la misma encuesta
  - Microdatos de las p covariables a partir de un censo o registro administrativo

Resumen del estimador del método HB:

- Ventajas:
  - Basado en datos a nivel de individuo, lo que provee información más detallada
  - Se puede estimar cualquier indicador que es una función de la variable Y_{di}
  - Es insesgado bajo el modelo si los parámetros son conocidos
  - Minimiza la varianza a posteriori

Resumen del estimador del método HB:

- Ventajas:
  - Resulta prácticamente igual al estimador EB
  - Una vez se ajusta el modelo, se puede estimar en subáreas sin reajustar el modelo
  - Una vez se ajusta el modelo, se puede estimar cualquier indicador sin reajustar el modelo

Resumen del estimador del método HB:

- Ventajas:
  - No se usa el procedimiento *Markov Chain Monte Carlo*, MCMC, al contrario de muchos procesos bayesianos
  - No requiere el uso de métodos bootstrap para estimar ECM, lo que disminuye el tiempo computacional
  - El cálculo de intervalos creíbles o cualquier otro resumen de la distribución es automático

Resumen del estimador del método HB:

- Desventajas:
  - Es basado en un modelo, por tanto es necesario comprobar dicho modelo
  - No tiene en cuenta el diseño muestral
  - Puede ser seriamente afectado por atípicos aislados
  - El método no se puede extender a un modelo más complejos sin perder algunas ventajas mencionadas, como el evitar los métodos MCMC por ejemplo

Métodos basados en modelos lineales generalizados mixtos

Métodos basados en modelos lineales generalizados mixtos

- Los modelos mixtos hasta ahora no dan predicciones entre $[0, 1]$
- Para estimar proporciones, sería útil usar un modelo que proporciona valores en ese rango
- Esto incluye la incidencia de pobreza F_{0d}, pero no la brecha de pobreza, F_{1d}
- Para hacer eso, es habitual usar un modelo lineal generalizado mixto (*generalized linear mixed models*, GLMM)

Métodos basados en modelos lineales generalizados mixtos

- Asumimos que

$$Y_{di}|v_d \sim \text{Bern}(p_{di}),\ g(p_{di}) = \mathbf{x}'_{di}\boldsymbol{\alpha} + v_d$$

y

$$v_d \overset{iid}{\sim} N(0, \sigma_v^2), \quad i = 1, \ldots, N_d,\ d = 1, \ldots, D$$

- v_d es el efecto de área d y $\boldsymbol{\alpha}$ es el vector de coeficientes de la regresión
- $g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ es la función link (biyectiva, con derivada continua)
- El link logístico, $g(p) = \log(p/(1-p))$, el más utilizado

Métodos basados en modelos lineales generalizados mixtos: Método mejor predictor

- El mejor predictor, el que minimiza el ECM bajo el modelo, viene dado por

$$\tilde{P}_d^B(\boldsymbol{\theta}) = E(P_d|\mathbf{y}_{ds};\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{N_d}\left\{\sum_{i\in s_d} Y_{di} + \sum_{i\in r_d} E(Y_{di}|\mathbf{y}_{ds};\boldsymbol{\theta})\right\}$$

- En la práctica, obtenemos el predictor EB reemplazando θ por estimaciones consistentes, es decir

$$\hat{P}_d^{EB} = \tilde{P}_d^B(\hat{\boldsymbol{\theta}})$$

donde $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ se encuentra ajustando el modelo GLMM a los datos muestrales $\mathbf{y}_s = (\mathbf{y}_{1s}', \ldots, \mathbf{y}_{Ds}')'$

Métodos basados en modelos lineales generalizados mixtos: Método mejor predictor

- Una manera de estimar $E(Y_{di}|\mathbf{y}_{ds};\boldsymbol{\theta})$ sería utilizar el Teorema de Bayes y que las variables Y_{di} son independientes dado v_d
- En este caso,

$$E(Y_{di}|\mathbf{y}_{ds};\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{E\{h(\mathbf{x}'_{di}\boldsymbol{\alpha} + v_d)f(\mathbf{y}_{ds}|v_d);\hat{\boldsymbol{\theta}}\}}{E\{f(\mathbf{y}_{ds}|v_d);\hat{\boldsymbol{\theta}}\}}, \quad i \in r_d,$$

donde $h = g^{-1}$ es el link inverso
$h(\mathbf{x}'_{di}\boldsymbol{\alpha} + v_d) = \exp(\mathbf{x}'_{di}\boldsymbol{\alpha} + v_d)/\left\{1 + \exp(\mathbf{x}'_{di}\boldsymbol{\alpha} + v_d)\right\}$ y

$$f(\mathbf{y}_{ds}|v_d) = \prod_{i \in s_d} p_{di}^{Y_{di}}(1 - p_{di})^{(1-Y_{di})}$$

Métodos basados en modelos lineales generalizados mixtos: Método mejor predictor

- Podemos usar un proceso Monte Carlo para generar $v_d^{(r)} \sim N(0, \hat{\sigma}_v^2)$, $r = 1, \ldots, R$
- Después, calculamos

$$E(Y_{di}|\mathbf{y}_{ds};\hat{\boldsymbol{\theta}}) \approx \frac{R^{-1}\sum_{r=1}^{R} h(\mathbf{x}_{di}'\hat{\boldsymbol{\alpha}} + v_d^{(r)})\hat{f}(\mathbf{y}_{ds}|v_d^{(r)})}{R^{-1}\sum_{r=1}^{R} \hat{f}(\mathbf{y}_{ds}|v_d^{(r)})}, \quad i \in r_d,$$

donde $\hat{f}$ es la distribución condicionada $f(\mathbf{y}_{ds}|v_d)$ en $\hat{\boldsymbol{\theta}}$

Métodos basados en modelos lineales generalizados mixtos: Método mejor predictor

- $$\tilde{P}_d^B(\boldsymbol{\theta}) = E(P_d|\mathbf{y}_{ds};\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{N_d}\left\{\sum_{i\in s_d} Y_{di} + \sum_{i\in r_d} E(Y_{di}|\mathbf{y}_{ds};\boldsymbol{\theta})\right\}$$

  tiene ECM mínimo y es insesgado bajo el modelo linear generalizado mixto
- Sin embargo, el proceso que se ha descrito es computacionalmente intensivo debido a las réplicas Monte Carlo

Métodos basados en modelos lineales generalizados mixtos: método plug-in

- Existen estimadores que se obtienen directamente de la salida del software que estima el GLMM
- Cuando se hace la regresión, el software estima $\hat{\alpha}$ y $\hat{v}_d$
- Se puede crear un estimador por el método de la analogía (*plug-in estimator*) que viene dado por:

$$\hat{P}_d^{PI} = \frac{1}{N_d}\left(\sum_{i\in s_d} Y_{di} + \sum_{i\in r_d} \hat{p}_{di}\right)$$

donde

$$\hat{p}_{di} = h(\mathbf{x}'_{di}\hat{\alpha} + \hat{v}_d)$$

- El estimador plug-in no es insesgado a menos que la función link es lineal

Métodos basados en modelos lineales generalizados mixtos: método plug-in

- Aunque es más fácil calcular, el estimador plug-in no es insesgado a menos que la función link es lineal
- Sin embargo, el link logístico $g(p) = log(p/(1-p))$ es aproximadamente lineal para $p \in (02, 08)$
- Debido a esta propiedad, se puede comprobar que el EB y plug-in de la proporción $P_d = \overline{Y}_d$ se parecen al EBLUP, $\hat{P}_d^{EBLUP} = \hat{\overline{Y}}_d^{EBLUP}$, basado en el modelo con errores anidados (BHF)

Métodos basados en modelos lineales generalizados mixtos: ECM bootstrap

El ECM del estimador EB o plug-in se puede estimar con un procedimiento bootstrap 1) Ajustar el modelo GLMM $Y_{di}|v_d \sim \text{Bern}(p_{di}),\ g(p_{di}) = \mathbf{x}'_{di}\boldsymbol{\alpha} + v_d$ a los datos de la muestra para obtener los estimadores $\hat{\sigma}_v^2$ y $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 2) Generar efectos aleatorios bootstrap

$$v_d^{*(b)} \overset{iid}{\sim} N(0, \hat{\sigma}_v^2), \quad d = 1, \ldots, D$$

Métodos basados en modelos lineales generalizados mixtos: ECM bootstrap

3) Generar el censo bootstrap $\mathbf{y}_d^{*(b)} = (Y_{d1}, \ldots, Y_{dN_d})'$ en la siguiente forma:

$$Y_{di}^{*(b)} \stackrel{ind}{\sim} \text{Bern}(p_{di}^{*(b)}),$$

y

$$p_{di}^{*(b)} = h(\mathbf{x}'_{di}\hat{\alpha} + v_d^{*(b)}), \quad i = 1, \ldots, N_d,\ d = 1, \ldots, D,$$

Calcular los verdaderos valores de los indicadores para el censo $P_d^{*(b)} = \bar{Y}_d^{*(b)}$, $d = 1, \ldots, D$.

4) Para cada área, extraer del censo los elementos de la muestra Y_{di}, $i \in s_d^{*(b)}$ para construir el vector $\mathbf{y}_{ds}^{*(b)}$ y, después, $\mathbf{y}_s^{*(b)} = ((\mathbf{y}_{1s}^{*(b)})', \ldots, (\mathbf{y}_{Ds}^{*(b)})')'$ el vector con los valores en la muestra de todas las áreas

Métodos basados en modelos lineales generalizados mixtos: ECM bootstrap

5) Ajustar el modelo GLMM a los datos bootstrap $\mathbf{y}_s^{*(b)}$ y calcular $\hat{P}_d^{EB*(b)}$, $d = 1, \ldots, D$
6) Repetir pasos 2-5 B veces. El estimador bootstrap de ECM viene dado por

$$mse_B(\hat{P}_d^{EB}) = B^{-1} \sum_{b=1}^{B} (\hat{P}_d^{EB*(b)} - P_d^{*(b)})^2$$

Resumen del predictor EB/plug-in basado en GLMM

- Indicadores objetivos: Proporciones o totales de una variable binaria (e.g.carencia o no de determinado bien o servicio)
- Requerimientos de datos:
    - Microdatos de las p covariables obtenidas de la misma encuesta de la variable de interés
    - Áreas de interés obtenidas de la misma encuesta
    - Microdatos de las p covariables de un censo o registro. Esto es necesario para calcular la esperanza $E(Y_{di}|\mathbf{y}_{ds};\boldsymbol{\theta})$

Resumen del predictor EB/plug-in basado en GLMM

- Ventajas:
  - El número de observaciones usadas es el tamaño muestral, mucho mayor que el número de áreas
  - El modelo GLMM incorpora heterogeneidad no explicada entre las áreas
  - No se necesita conocer ninguna varianza, al contrario que para el modelo FH

Resumen del predictor EB/plug-in basado en GLMM

- Ventajas:
  - El estimador del ECM bajo el modelo es un estimador estable y insesgado bajo el diseño (y bajo el diseño cuando el número de áreas es grande)
  - Se puede estimar en cualquier subárea sin reajustar el modelo
  - Se puede estimar en áreas no muestreadas

Resumen del predictor EB/plug-in basado en GLMM

- Desventajas:
  - Es basado en un modelo y por tanto es necesario analizar el modelo (a través de los residuos, por ejemplo)
  - No tiene en cuenta el diseño muestral y, por eso, no es insesgado bajo el diseño
  - El uso de microdatos de un censo puede conllevar problemas de confidencialidad
  - El estimador ECM bootstrap *no* es insesgado bajo el modelo para el ECM bajo el modelo para un área concreta

Resumen del predictor EB/plug-in basado en GLMM

- Desventajas:
  - El predictor EB (no el plug-in) es computacionalmente intensivo
  - El ECM del estimador EB usando un proceso bootstrap es excesivamente intensivo, pero se puede cortar usando el plug-in
  - Requiere un reajuste para verificar la propiedad "benchmarking"

Aplicación

Antecedentes

- La ENDES 2018 permite la estimación a nivel nacional, departamental y por zona (urbano/rural) de indicadores demográficos relacionados con salud, natalidad, planificación familiar, etc.
- Las estimaciones están limitadas al alcance del diseño de muestreo de la encuesta, por lo que la precisión de dichas estimaciones disminuye con el número de desagregaciones.
- Perú cuenta con 25 departamentos y 196 provincias donde se incluye la provincia constitucional del Callao.
- El proyecto fue financiado conjuntamente por UNFPA y CEPAL.

Indicadores de planificación familiar

- La información sobre prácticas de prevención y autocuidado se enmarcan en la noción de que la salud sexual y reproductiva constituye un derecho de los hombres y las mujeres a lo largo de todo su ciclo vital.
- Las parejas y los individuos tienen derecho a decidir de manera libre y responsable sobre el número de hijos que desean tener, el espaciamiento de los nacimientos, etc., además de disponer de la información y los medios necesarios para ello.

Indicadores de planificación familiar

Tomando como base la propuesta de indicadores del Consenso de Montevideo (Cepal, 2018), se propone la estimación de los siguientes indicadores:

- Proporción de mujeres que hace uso de métodos anticonceptivos.
- Proporción de mujeres que cubren sus necesidades de planificación familiar con métodos modernos.
- Proporción de mujeres en edad reproductiva (o con pareja) cuyas necesidades de planificación familiar no están cubiertas.

Estimaciones SAE con modelos de unidad

Cada respuesta dentro de la encuesta se transforma en una variable binaria. Por ejemplo, en el caso del uso de métodos anticonceptivos modernos en mujeres en edad fértil para el área d, se tiene que y_{di} es la respuesta binaria de la i-ésima mujer en el área d medida como

$$y_{di} = \begin{cases} 1, & \text{si el individuo usa anticonceptivos moderno} \\ 0, & \text{si el individuo no usa anticonceptivos modernos} \end{cases}$$

Modelo lineal generalizado

Como $y_{di} \in \{0, 1\}$ es posible definir un modelo lineal generalizado mixto para cada área como

$$y_{di}|\nu_d \sim \text{Ber}(\theta_{di}), \quad d = 1, \cdots, D, i = 1, \cdots, N_d$$

En donde $g(\theta_{di}) = \mathbf{x}_{di}^T \boldsymbol{\beta} + \nu_d$, siendo $\boldsymbol{\beta}$ los coeficientes de regresión del modelo, $g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ el enlace logit dado por $g(\theta) = \log(\frac{\theta}{1-\theta})$ y $\nu_1, \cdots, \nu_D \overset{\text{i.i.d}}{\sim} N(0, \sigma_\nu^2)$ representan los efectos de área.

Predicción

Una vez ajustado el modelo lineal generalizado mixto, se predicen los valores para todo el censo a través del modelo, de la siguiente manera:

$$\hat{\theta}_d^{PI} = \frac{1}{N_d} \sum_{i \in U_d} \hat{\theta}_{di}$$

En donde

$$\hat{\theta}_{di} = g^{-1}(\mathbf{x}_{di}^T \hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\nu}_d) = \frac{\exp(\mathbf{x}_{di}^T \hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\nu}_d)}{1 + \exp(\mathbf{x}_{di}^T \hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\nu}_d)}$$

es el valor predicho de las observaciones obtenidas del censo, siendo $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ y $\hat{\nu_d}$ las estimaciones correspondientes de $\boldsymbol{\beta}$ y ν_d.

Predicción en áreas no muestreadas

Para el caso en que existan areas no muestreadas, y por tanto no sea posible obtener el efecto aleatorio $\hat{\nu}_d$, la estimación correspondiente del valor predicho para el individuo i del área está dada por

$$\hat{\theta}_{di} = g^{-1}(\mathbf{x}_{di}^T \beta)$$

De manera analoga fue posible calcular los estimadores respectivos para los otros indicadores de interés.

Estimación del ECM

El ECM de los predictores se estima mediante un procedimiento bootstrap a partir del modelo propuesto. Para ello es necesario seguir el siguiente procedimiento (I. Molina 2019):

1. Ajustar el modelo $y_{di}|\nu_d \sim \text{Ber}(\theta_{di}), \quad d = 1, \cdots, D, i = 1, \cdots, n_d$ a los datos de la encuesta Endes para obtener los estimadores $\hat{\sigma}_\nu$ y $\hat{\beta}$.

2. generar $\hat{\nu}_d^{*(b)} \overset{\text{i.i.d}}{\sim} N(0, \hat{\sigma}_\nu)$ para $d = 1, \cdots, D$

3. Generar para cada área d un censo $\boldsymbol{Y}_d^{*(b)} = (y_{d1}^{*(b)}, \cdots, y_{dN_d}^{*(b)})^T$ de la forma

$$y_{di}^{*(b)} \overset{\text{i.i.d}}{\sim} Ber(\theta_{di}^{*(b)}), \; \theta_{di}^{*(b)} = \frac{\exp\left(x_{di}^T\hat{\beta} + \hat{\nu}_d^{*(b)}\right)}{1 + \exp\left(x_{di}^T\hat{\beta} + \hat{\nu}_d^{*(b)}\right)}$$

y con estos valores calcular $\theta_d^{*(b)} = \frac{1}{N_d}\sum_{i=1}^{N_d} y_{di}^{*(b)}$ para $d = 1, \cdots, D$.

Estimación del ECM

4. Para cada área muestreada d, extraer una muestra aleatoria de tamaño n_d mediante un muestreo aleatorio estratificado proporcional al tamaño N_d de cada provincia.
5. Ajustar el modelo de (1) a la muestra obtenida y calcular los predictores *Bootstrap* $\hat{\theta}_d^{EB*(b)}$ para $d = 1, , D$.
6. Repetir los pasos 2)-5) para $b = 1, , B$. Finalmente, el estimador *Bootstrap* del ECM para la estimación de $\hat{\theta}_d$ está dada por

$$\mathrm{ECM}_B(\hat{\theta_d}) = \frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B}(\hat{\theta}_d^{EB*(b)} - \hat{\theta}_d^{*(b)})^2$$

Estimación

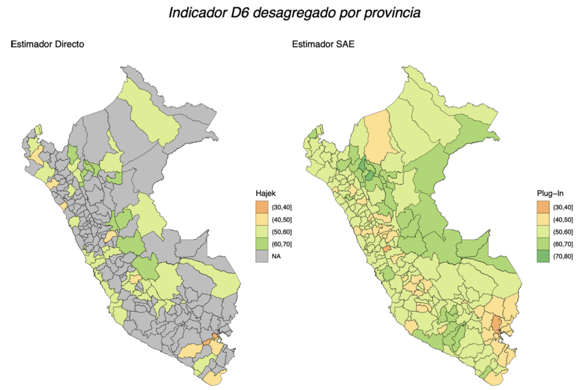

Figura1: Uso de métodos de planificación familiar

Estimación

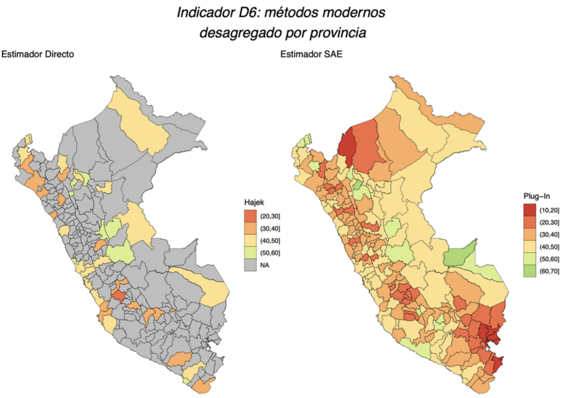

Figura2: Uso de métodos modernos de planificación familiar

Estimación

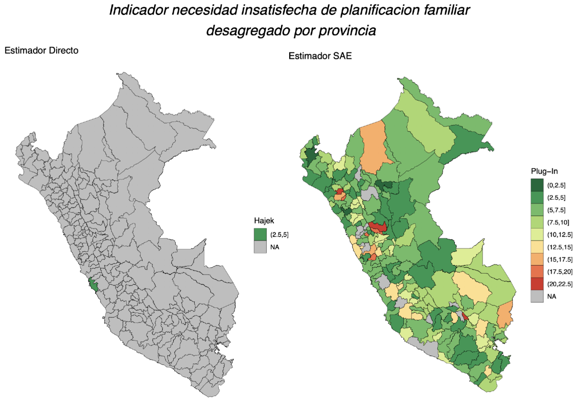

Figura3: Indicaador de necesidades insatisfechas de planificación familiar

¡Gracias!

¡Gracias!