

Modelos Bayesianos con R y STAN

Andrés Gutiérrez - Hanwen Zhang

2021-06-27

Índice general

Prefacio	9
Antes de comenzar	11
Cuestionamientos sobre el enfoque bayesiano	11
Acerca de la notación	14
1. Tópicos básicos	17
1.1. Teoría de la decisión	17
1.2. Algunos resultados de probabilidad	19
1.3. Teorema de Bayes	21
2. Inferencia bayesiana	29
2.1. La distribución previa	31
2.2. Pruebas de hipótesis	42
2.3. Criterios de información	44
3. Modelos uniparamétricos	47
3.1. Modelo Bernoulli	47
3.2. Modelo Binomial	54
3.3. Modelo Binomial negativo	67
3.4. Modelo Poisson	76
3.5. Modelo Exponencial	85
3.6. Modelo Normal con media desconocida	93
3.7. Modelo normal con varianza desconocida	103
4. Modelos multiparamétricos	111
4.1. Modelo Normal con media y varianza desconocida	111
4.2. Modelo Normal multivariante con media desconocida y varianza conocida	137
4.3. Modelo normal multivariante con media y varianza desconocida .	147
A. Elementos de probabilidad	171
A.1. Distribuciones discretas	171
A.2. Distribuciones continuas	175

A.3. Distribuciones multivariadas	182
B. Matriz de información	187
C. Elementos de simulación estadística	193
C.1. Métodos directos	193
C.2. Métodos de Monte Carlo vía cadenas de Markov	202
Referencias	213

Índice de cuadros

4.1. Tasa de natalidad, tasa de mortalidad, mortalidad infantil en algunos países.	160
---	-----

Índice de figuras

1. Licencia de Creative Commons	9
3.1. Distribución previa no informativa de Jeffreys para el parámetro de una distribución Bernoulli	49
3.2. Distribuciones previas (línea punteada) y posteriores (línea sólida) para el ejemplo de las encuestas electorales.	52
3.3. Distribución posterior.	54
3.4. Funciones de verosimilitud, previa y posterior para $\alpha = 2$, $\beta = 5$, $s = 8$ y $n = 10$	56
3.5. Estimación posterior de θ para diferentes valores de n y s con $\alpha = \beta = 5$	57
3.6. Distribución posterior.	66
3.7. Función de densidad previa y función de densidad posterior para el ejemplo de bateo.	66
3.8. Función de densidad predictiva posterior para el jugador Max Alvis.	68
3.9. Distribución posterior.	73
3.10. Distribución predictiva posterior para el número de entrevistas necesarias para encontrar 5 pacientes.	75
3.11. Histograma para los datos de accidentes de tránsito.	82
3.12. Distribución previa y distribución posterior para el ejemplo del tránsito con dos distribuciones previas diferentes (el lado izquierdo representa el caso cuando se usa la previa no informativa, el lado derecho la previa informativa).	82
3.13. Distribución predictiva posterior para $n^* = 1$ para el ejemplo del tránsito.	84
3.14. Distribución posterior.	86
3.15. Distribución posterior.	92
3.16. Distribución posterior.	92
3.17. Distribución predictiva posterior para el tiempo promedio de sobrevivencia de transplante de corazón.	94
3.18. Distribución previa, función de verosimilitud y distribución posterior del parámetro θ con $\mu = 5$, $\tau^2 = 0.01$, $\bar{y} = 2$, $\sigma^2 = 1$ y $n = 5, 10, 50, 200$	96
3.19. Distribución posterior.	102

3.20. Histograma de los efectos en las ocho escuelas.	105
3.21. Distribución previa no informativa para la varianza de una distribución Normal	106
3.22. Distribución posterior.	108
3.23. Distribución posterior.	110
4.1. Distribuciones posteriores.	117
4.2. Convergencia de las distribuciones posteriores y diagramas de la función de autocorrelación en las cadenas.	119
4.3. 10 mil valores simulados de \tilde{Y} y la función de densidad de la distribución predictiva de \tilde{Y} con parámetros no informativos. . .	135
4.4. 10 mil valores simulados de \tilde{Y} y la función de densidad de la distribución predictiva de \tilde{Y} con parámetros informativos. . . .	137
4.5. Distribución posterior.	144
4.6. Distribución posterior de los parámetros transformados (diferencia de las medias teóricas).	145
4.7. Distribuciones posteriores para el vector de medias y la diferencia de medias.	152
4.8. Distribuciones posteriores para los elementos de la matriz de covarizanzas.	153
4.9. Convergencia de las distribuciones posteriores y diagramas de la función de autocorrelación en las cadenas.	154
C.1. Histograma de observaciones con distribución exponencial	195
C.2. Histograma de observaciones con distribución Poisson	198
C.3. Histograma de observaciones con distribución Gamma.	199
C.4. Histogramas de observaciones con distribución Normal bivariada. .	201
C.5. Histogramas de observaciones con distribución Normal bivariada. .	202
C.6. Generación de valores para una distribución normal bivariada. .	204
C.7. Convergencia de la media y varianza usando el muestreador de Gibbs.	205
C.8. Cadenas generadas desde el muestreador de Gibbs.	207
C.9. Densidades posteriores generadas con el muestreador de Gibbs. .	208
C.10. Autocorrelación y autocorrelación parcial para las cadenas simuladas del algoritmo MH.	211

Prefacio



Figura 1: Licencia de Creative Commons

La versión online de este libro está licenciada bajo una [Licencia Internacional de Creative Commons para compartir con atribución no comercial 4.0](#).

Antes de comenzar

La estadística bayesiana ha tenido un auge bastante importante en las últimas décadas. La mayoría de publicaciones actuales tienen un componente bayesiano importante. Todos las áreas de la ciencia de datos han explotado este paradigma y la evolución de la estadística ha ido en aumento a medida que la revolución bayesiana va tomando forma.

Cuestionamientos sobre el enfoque bayesiano

[Gelman \(2008\)](#) presenta algunos de los cuestionamientos que algunos estadísticos anti-bayesianos han argumentado en contra de este paradigma que, sin lugar a dudas, ha proporcionado una valiosa herramienta de modelación en la ciencia contemporánea. Revisemos algunos de estos argumentos:

La inferencia bayesiana es una teoría matemática coherente pero no brinda la suficiente confianza en usos científicos. Las distribuciones *previas* subjetivas no inspiran confianza porque ni siquiera existe algún principio objetivo para elegir una distribución previa no informativa. ¿De dónde vienen las distribuciones previas? No confío en ellas y no veo ninguna razón para recomendarlas a otra gente, apenas me siento cómodo acerca de su coherencia filosófica.

Este argumento es débil puesto que la teoría bayesiana es una teoría científica apoyada en los axiomas matemáticos de la teoría de la medida y de probabilidad. De la misma forma, nótese que tampoco existe un principio objetivo para escoger una verosimilitud. ¿De dónde vienen las regresiones logísticas? ¿quién dijo que los datos eran normales? Como toda ciencia, la estadística se basa en procedimientos subjetivos que inducen resultados que se pueden probar de una manera objetiva. Al decidir usar una determinada distribución previa, el investigador está haciendo uso de su conocimiento objetivo sobre el fenómeno de interés. Esto no dista mucho de la planificación de un estudio por muestreo o de un experimento, en donde se hace uso de la información auxiliar disponible para definir la mejor versión del estudio. Además, como se verá más adelante, sí existen principios objetivos que permiten decidir acerca de la elección de una distribución previa;

por ejemplo, la invarianza de la distribución previa frente a transformaciones de los parámetros.

La teoría bayesiana requiere un pensamiento mucho más profundo sobre la situación y recomendarle a los investigadores comunes el uso del teorema de Bayes es como darle al hijo del vecino la llave de un *F-16*. De veras que, yo comenzaría con algo de métodos probados y confiables, y entonces generalizaría la situación utilizando los principios estadísticos y la teoría del minimax, que no dependen de ninguna creencia subjetiva. Especialmente cuando las distribuciones previas que veo en la práctica toman formas conjugadas. ¡Qué coincidencia!

Como científicos e investigadores debemos tratar con el conocimiento objetivo y dejar a un lado las creencias subjetivas. Es por eso que las distribuciones previas que se manejan en la inferencia bayesiana son objetivas de la misma forma que lo son los métodos frecuentistas al asignar un modelo probabilístico a la verosimilitud de los datos. El resultado final sólo depende del modelo asumido y de los datos recolectados. A pesar de que algunos resultados de la inferencia bayesiana coinciden con el acercamiento frecuentista, esto no sucede en todos los casos. Si la distribución es conjugada, simplemente quiere decir que es posible utilizar un generador de números aleatorios conocido; sin embargo, en pleno siglo XXI, esto ya no constituye un problema.

Dejando de lado las preocupaciones matemáticas, me gustan las estimaciones insesgadas, los intervalos de confianza con un nivel real de cobertura. Pienso que la manera correcta de inferir es acercarse al parámetro tanto como sea posible y desarrollar métodos robustos que trabajen con supuestos mínimos. El acercamiento bayesiano intenta aproximar el insesgamiento, mientras asume supuestos más y más fuertes. En los viejos tiempos, los métodos Bayesianos por lo menos tenían la virtud de estar matemáticamente limpios. Hoy en día, cualquier inferencia se realiza mediante el uso de las cadenas de Markov con métodos de Monte Carlo (MCMC). Lo anterior significa que, no sólo no se pueden evaluar las características estadísticas del método, sino que tampoco se puede asegurar su convergencia.

Los métodos bayesianos parecen moverse rápidamente hacia la computación elaborada. Para bien o para mal, la computación se está convirtiendo en una plataforma central para el desarrollo científico y estadístico. Por otro lado, estos mismos adelantos de computación científica permiten evaluar las características de los modelos bayesianos y la convergencia de las cadenas de la distribución posterior. Haciendo uso de la rigurosidad científica, el investigador debe conocer a profundidad el espíritu de los métodos MCMC y verificar que la distribución posterior conjunta sobre un vector de parámetros no sea impropia, y por supuesto verificar que las cadenas tienen propiedades estacionarias.

La gente tiende a creer los resultados que apoyan sus preconceptos y descreen los resultados que los sorprenden, ésta es una forma erra-

da y sesgada de pensar. Pues bien, los métodos bayesianos animan este modo indisciplinado de pensamiento. Estoy seguro que muchos estadísticos bayesianos están actuando de buena fe; sin embargo, al mismo tiempo, también están proporcionando estímulo a investigadores descuidados y poco éticos por todas partes, porque el investigador queda estancado al momento de escoger una distribución previa.

Si hay una seria diferenciación entre las creencias subjetivas y los resultados posteriores, debería ser un indicador de reevaluar el modelo usado. Además, ante el desconocimiento del fenómeno, el investigador bayesiano puede utilizar una distribución previa débil y añadir más información si se necesita. Las verificaciones predictivas (previas y posteriores) son una parte esencial del método bayesiano que obliga a repensar las creencias del investigador con respecto al parámetro de interés. Este ejercicio redundante en el replanteamiento de la distribución previa mediante el estudio de las distribuciones predictivas, decantándose al final por el mejor modelo.

Los cálculos de la teoría de la decisión guían a la idea de que el muestreo probabilístico y la asignación aleatoria de tratamientos son ineficaces, de que los mejores diseños y muestras son los determinísticos. No tengo ningún conflicto con estos cálculos matemáticos; el conflicto es más profundo, en los fundamentos filosóficos, en la idea de que el objetivo de la estadística consiste en tomar una decisión óptima. Un estimador bayesiano es un estimador estadístico que reduce al mínimo el riesgo promedio. Sin embargo, cuando hacemos estadística, no estamos intentando *reducir al mínimo el riesgo promedio*, estamos intentando hacer estimación y juzgamiento de hipótesis.

Un estimador bayesiano es un estimador estadístico que minimiza el riesgo promedio. Uno de los primeros tópicos que se presentan en este libro es el de la teoría de la decisión y funciones de pérdida, como herramientas fundamentales del aprendizaje estadístico (Hastie et al., 2009). Además, como se verá más adelante, la asignación de las unidades experimentales al tratamiento o la inclusión de las unidades muestrales en un estudio probabilístico debe y puede ser tenido en cuenta en los modelos bayesianos, mediante la inclusión en el modelo de las variables que intervinieron en la selección de las unidades. De la misma forma, el juzgamiento de hipótesis es una práctica que se extiende en la modelación bayesiana.

No puedo estar al tanto de lo que están haciendo todos esos Bayesianos hoy en día. Desafortunadamente, toda clase de personas están siendo seducidas por las promesas de la inferencia automática con la *magia del MCMC*. Desearía que todos paráramos de una vez y por todas y empezáramos, de nuevo, a hacer estadística de la forma en que debe ser hecha: volviendo a los viejos tiempos en que un p -valor era utilizado para algo, cuando un intervalo de confianza tenía significado, y el sesgo estadístico era algo que se quería eliminar y no algo que se debiera abrazar.

Los métodos Bayesianos algunas veces son presentados como un motor de inferencia automática. Sin embargo, la inferencia bayesiana tiene tres etapas: formulación del modelo, ajuste del modelo a los datos, evaluación del ajuste. Así que el procedimiento no es mágico ni automático. Además, una de las ventajas de la estadística bayesiana es que deja de lado las sofisticaciones de la inferencia clásica en donde, por ejemplo, la simple interpretación de un intervalo de confianza se hace muy complicada a la luz del razonamiento lógico. De la misma forma los valores p constituyen un paradigma cada vez más revalorado en la investigación social.

Acerca de la notación

Antes de empezar las próximas secciones, es necesario revisar la notación que se seguirá de ahora en adelante. Del teorema de Bayes resultan tres grandes definiciones que constituyen la base de la estadística Bayesiana y que a lo largo de este texto se mencionarán diferenciándolas por medio de la notación. El símbolo más importante de la estadística matemática es p , el cual indica que existe una distribución de probabilidad para los datos, para el vector de parámetros, condicional o no. De hecho todas las definiciones y resultados anteriores han estado supeditadas al uso de esta monótona notación. En el ámbito de la notación de investigación internacional es común diferenciar las distribuciones con el fin de hacer más ameno el estudio del enfoque Bayesiano. En este texto se seguirá esta distinción. Un ejemplo claro en donde p representa cuatro funciones distintas en una sola ecuación es el siguiente:

$$p(\theta | y) = p(y | \theta) \frac{p(\theta)}{p(y)}$$

[Gelman et al. \(1995\)](#) explica por qué la notación simple, con el uso (a veces abuso) de la letra p es más rigurosa de lo que, a simple vista, pueda parecer y comenta que,

En realidad no me gusta la notación que la mayoría de los estadísticos usen f para las distribuciones de muestreo; π , para las distribuciones previas y L , para las verosimilitudes. Este estilo de notación se desvía de lo que realmente es importante. La notación no debería depender del orden en que las distribuciones son especificadas. Todas ellas son distribuciones de probabilidad, eso es lo realmente importante.

Esto tiene sentido, aún más cuando se estudian las propiedades estadísticas de los estimadores desde el punto de vista de la teoría de la medida. Siendo así, el símbolo p se refiere a una notación para una medida de probabilidad, quizás inducida por un elemento aleatorio. De hecho, en la ecuación que determina la regla de Bayes, cada una de las p son medidas de probabilidad que no comparten el mismo espacio de medida (ni la misma σ -álgebra, ni el mismo espacio muestral).

De hecho, todo queda claro al realizar un diagrama que permita ver el espacio de salida y el espacio de llegada de los elementos aleatorios que inducen (si es el caso), cada una de las distribuciones de probabilidad. Por otra parte, Bob Carpenter concluye que:

Una vez resuelto el problema de identificación de los espacios, la notación estadística depende en gran manera del contexto y aunque la regla de Bayes no necesite de mucha explicación, es necesario conocerlo todo acerca del contexto para poder interpretar las funciones que la conforman. . . El problema se hace mucho más agudo para los estadísticos novatos, pero eso se resuelve con la práctica. Una vez que uno sabe lo que está haciendo, se vuelve obvia la referencia de la distribución p .

Por lo anterior, es natural que algunos de los textos clásicos de estadística matemática, los autores asumen que el lector sigue la idea de la referencia de la distribución p en cuestión.

Capítulo 1

Tópicos básicos

Para poder entender la racionalidad del paradigma bayesiano es importante reconocer que las innovaciones de las metodologías bayesianas descansan en principios clásicos de la teoría de probabilidad.

1.1. Teoría de la decisión

El problema estadístico de estimar un parámetro se puede ver dentro del contexto de la teoría de decisión: la estimación que proveemos, sea en el ámbito de la estadística clásica o la estadística bayesiana, depende de los datos muestrales, \mathbf{X} , de tal forma que si éstos cambian, la estimación también cambia. De esta manera, el proceso de estimación puede ser representado como una función que toma un conjunto de datos muestrales y los convierte en una estimación ($A(\mathbf{X})$ o simplemente A) del parámetro de interés. En la teoría de decisión, la anterior función se conoce como una regla de decisión.

Así como en la vida cotidiana, por la incertidumbre del futuro (en el ámbito estadístico, por la incertidumbre acerca del parámetro), toda acción que se tome (toda estimación que se provea) puede traer consigo un grado de falla o riesgo. Y es necesario escoger la acción óptima que de alguna forma minimice ese riesgo. Formalizando esta idea intuitiva, se define la función de pérdida L que asocia a cada dupla conformada por la acción tomada y el parámetro de interés θ , (A, θ) con un número no negativo que cuantifica la pérdida que ocasiona la acción (o la estimación) A con respecto al parámetro θ .

Es claro que se desea escoger aquella acción que minimice de alguna forma la pérdida que ésta ocasiona, pero la función L no se puede minimizar directamente, puesto que:

- En el ámbito de la estadística clásica, el parámetro θ se considera fijo, y los

datos muestrales \mathbf{X} aleatorios. Como la función de pérdida L depende de \mathbf{X} , entonces ésta también será una variable aleatoria, y no se puede minimizar directamente. Por lo tanto se define el riesgo o la pérdida promedio como la esperanza matemática de L ; denotando el riesgo como R , éste está definido como $R = E(L)$ (la esperanza se toma con respecto a la distribución probabilística de \mathbf{X}).

- En el ámbito de la estadística bayesiana, θ sigue siendo una cantidad fija, pero la incertidumbre que tiene el investigador sobre la localización del parámetro se puede modelar mediante funciones de probabilidad. La herramienta fundamental para conocer características de θ es su función de densidad posterior $p(\theta|\mathbf{X})$. En este caso, el riesgo R se define como

$$R = E(L) = \int L(A, \theta) p(\theta|\mathbf{X}) d\theta$$

En cualquiera de los dos casos anteriores, se busca la estimación que minimice el riesgo R . Ilustramos los anteriores conceptos en los siguientes ejemplos tanto en la estadística clásica como en la estadística bayesiana.

Ejemplo 1.1. Sea X_i con $i = 1, \dots, n$ una muestra aleatoria con media θ y varianza σ^2 , ambas fijas, y suponga que se desea encontrar el mejor estimador de θ bajo la función de pérdida cuadrática dada por

$$L(A, \theta) = (A - \theta)^2$$

cuyo riesgo asociado está dado por $R = E(A - \theta)^2$. En primer lugar, buscaremos dicho estimador dentro de todas las formas lineales de X_i , es decir, los estimadores de la forma $A = \sum_{i=1}^n c_i X_i$. Por tanto, el riesgo se puede expresar como

$$\begin{aligned} R &= E(A - \theta)^2 = \text{Var}(A) + (E(A) - \theta)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n c_i^2 \sigma^2 + \theta^2 \left(\sum_{i=1}^n c_i - 1 \right)^2 \end{aligned}$$

Y al buscar los coeficientes c_i que minimizan la anterior expresión, encontramos que $c_i = \theta^2 / (\sigma^2 + n\theta^2)$ para todo i . Como estos coeficientes conducen a un estimador que depende del parámetro desconocido, concluimos que no hay ningún estimador que minimiza el riesgo.

Para encontrar una solución, es necesario restringir aún más el rango de estimadores; para eso, se impone la restricción de que $\sum_{i=1}^n c_i = 1$. De esta forma, el riesgo está dado por $R = \sum c_i^2 \sigma^2$. Dado que σ^2 es fijo, al minimizar $\sum c_i^2$ sujeto a la restricción, se tiene que la solución es $c_i = 1/n$ para todo i , y así encontramos que el mejor estimador (en el sentido de minimizar el riesgo de la función de pérdida cuadrática) dentro de todas las formas lineales con $\sum c_i = 1$ es la media muestral \bar{X} .

Ejemplo 1.2. Suponga que se desea estimar un parámetro de interés θ en el contexto de la estadística bayesiana y denotamos la función de densidad posterior de θ como $p(\theta|\mathbf{X})$, entonces si utilizamos la función de pérdida cuadrática, el riesgo asociado será

$$R = E(L(A, \theta)) = E(A - \theta)^2 = \text{Var}(\theta) + (E(\theta) - A)^2$$

que es minimizado si $A = E(\theta)$. Es decir, la mejor acción para estimar θ es utilizar su tomada con respecto a la distribución posterior $p(\theta|\mathbf{X})$.

Ejemplo 1.3. En el mismo contexto del ejemplo anterior, si cambiamos la función de pérdida a la siguiente

$$L(A, \theta) = |A - \theta| = (A - \theta)I_{(A \geq \theta)} + (\theta - A)I_{(\theta > A)}$$

El riesgo estará dado por

$$\begin{aligned} R &= E(L(A, \theta)) \\ &= \int L(A, \theta)p(\theta|\mathbf{X})d\theta \\ &= \int_{(A \geq \theta)} (A - \theta)p(\theta|\mathbf{X})d\theta + \int_{(\theta > A)} (\theta - A)p(\theta|\mathbf{X})d\theta \end{aligned}$$

Derivando el riesgo con respecto a la acción A , se tiene que

$$\frac{\partial R}{\partial A} = \int_{(A \geq \theta)} p(\theta|\mathbf{X})d\theta - \int_{(\theta > A)} p(\theta|\mathbf{X})d\theta$$

Igualando a cero, tenemos que

$$\int_{(A \geq \theta)} p(\theta|\mathbf{X})d\theta = \int_{(\theta > A)} p(\theta|\mathbf{X})d\theta = 0.5$$

Y concluimos que la acción A que induce menor riesgo corresponde al percentil 50 % o la mediana de la distribución posterior de θ .

De los anteriores ejemplos se observa que, bajo un mismo contexto, cuando se utilizan diferentes funciones de pérdida, también se obtienen distintas estimaciones, y distintas acciones que optimizan el riesgo.

1.2. Algunos resultados de probabilidad

Antes de entrar en el repaso de estos conceptos fundamentales, se definen los conceptos de **parámetro** y **espacio paramétrico** asociados a una distribución de probabilidad.

1. Un parámetro es aquella cantidad que define la forma funcional de una distribución de probabilidad; es decir, cuando el parámetro cambia de valor, la función de densidad y la función de distribución cambian. Las distribuciones de probabilidad pueden tener más de un parámetro. Cuando una distribución tiene solo un parámetro, éste se denota usualmente por θ , cuando se presenta más de un parámetro, la notación se cambia a $\boldsymbol{\theta}$, representando el vector de parámetros.
2. El espacio paramétrico, Θ , es el conjunto que contiene todos los posibles valores que puede tomar el parámetro o el vector de parámetros. Para distribuciones con un solo parámetro, Θ será un subconjunto de \mathbb{R} , mientras que para distribuciones con dos o más parámetros, Θ será un subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Para entender los fundamentos de la modelación bayesiana, es necesario recordar algunas definiciones y resultados de la teoría de probabilidad que ayudarán a hacer más expedito este periplo por la estadística bayesiana. En términos de notación, se utilizará indistintamente la expresión de integral, \int , indicando la sumatoria, en el caso de las variables aleatorias discretas o la integral de Riemann-Stieltjes en el caso de las variables aleatorias continuas.

Definición 1.1. Sean $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)'$, $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_q)'$ dos vectores aleatorios definidos sobre los espacios de muestreo \mathcal{X} , \mathcal{Y} , respectivamente. Suponga que la distribución conjunta de estos vectores aleatorios está dada por $p(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. La distribución marginal de \mathbf{X} está dada por

$$p(\mathbf{X}) = \int p(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) d\mathbf{Y} \quad (1.1)$$

y la distribución condicional de \mathbf{X} dado \mathbf{Y} como

$$p(\mathbf{X} | \mathbf{Y}) = \frac{p(\mathbf{X}, \mathbf{Y})}{p(\mathbf{Y})} \quad (1.2)$$

Resultado 1.1. Suponga los vectores \mathbf{X} , \mathbf{Y} y un tercer vector $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_r)'$ definido sobre el espacio de muestreo \mathcal{Z} . Entonces se tiene que

$$p(\mathbf{X} | \mathbf{Z}) = \int p(\mathbf{X}, \mathbf{Y} | \mathbf{Z}) d\mathbf{Y} \quad (1.3)$$

y

$$p(\mathbf{X} | \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \frac{p(\mathbf{X}, \mathbf{Y} | \mathbf{Z})}{p(\mathbf{Y} | \mathbf{Z})} \quad (1.4)$$

Demostración. En primer lugar, nótese que

$$\begin{aligned} \int p(\mathbf{X}, \mathbf{Y} | \mathbf{Z}) d\mathbf{Y} &= \int \frac{p(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})}{p(\mathbf{Z})} d\mathbf{Y} \\ &= \frac{1}{p(\mathbf{Z})} \int p(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) d\mathbf{Y} \\ &= \frac{1}{p(\mathbf{Z})} p(\mathbf{X}, \mathbf{Z}) = p(\mathbf{X} | \mathbf{Z}) \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\frac{p(\mathbf{X}, \mathbf{Y} | \mathbf{Z})}{p(\mathbf{Y} | \mathbf{Z})} = \frac{p(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})}{p(\mathbf{Z})} \bigg/ \frac{p(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})}{p(\mathbf{Z})} = \frac{p(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})}{p(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})} = p(\mathbf{X} | \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$$

□

Definición 1.2. Sean \mathbf{X} , \mathbf{Y} , \mathbf{Z} vectores aleatorios, se dice que \mathbf{X} es condicionalmente independiente de \mathbf{Y} con respecto a \mathbf{Z} si satisfacen la siguiente expresión

$$p(\mathbf{X}, \mathbf{Y} | \mathbf{Z}) = p(\mathbf{X} | \mathbf{Z})p(\mathbf{Y} | \mathbf{Z}) \quad (1.5)$$

Resultado 1.2. Si \mathbf{X} es condicionalmente independiente de \mathbf{Y} con respecto a \mathbf{Z} , entonces se tiene que

$$p(\mathbf{X} | \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = p(\mathbf{X} | \mathbf{Z}) \quad (1.6)$$

Demostración. Como $p(\mathbf{X}, \mathbf{Y} | \mathbf{Z}) = \frac{p(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})}{p(\mathbf{Z})}$, entonces

$$p(\mathbf{X} | \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \frac{p(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})}{p(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})} = \frac{p(\mathbf{X}, \mathbf{Y} | \mathbf{Z})p(\mathbf{Z})}{p(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})} = \frac{p(\mathbf{X} | \mathbf{Z})p(\mathbf{Y} | \mathbf{Z})}{p(\mathbf{Y} | \mathbf{Z})} = p(\mathbf{X} | \mathbf{Z})$$

□

Resultado 1.3. Si \mathbf{X} es independiente de \mathbf{Y} , entonces \mathbf{X} es condicionalmente independiente de \mathbf{Y} dado cualquier otro vector \mathbf{Z} .

Demostración. Nótese que

$$p(\mathbf{X}, \mathbf{Y} | \mathbf{Z}) = p(\mathbf{X} | \mathbf{Y}, \mathbf{Z})p(\mathbf{Y} | \mathbf{Z}) = p(\mathbf{X} | \mathbf{Z})p(\mathbf{Y} | \mathbf{Z})$$

puesto que, utilizando la hipótesis de independencia, se tiene que

$$p(\mathbf{X} | \mathbf{Y}) = p(\mathbf{X})$$

□

1.3. Teorema de Bayes

Desde la revolución estadística de Pearson y Fisher, la inferencia estadística busca encontrar los valores que parametrizan a la distribución desconocida de los datos. El primer enfoque, propuesto por Pearson, afirmaba que si era posible observar a la variable de interés en todos y cada uno de los individuos de una población, entonces era posible calcular los parámetros de la distribución de la variable

de interés; por otro lado, si solo se tenía acceso a una muestra representativa, entonces era posible calcular una estimación de tales parámetros. Sin embargo, Fisher discrepó de tales argumentos, asumiendo que las observaciones están sujetas a un error de medición y por lo tanto, así se tuviese acceso a toda la población, sería imposible calcular los parámetros de la distribución de la variable de interés.

Del planteamiento de Fisher resultaron una multitud de métodos estadísticos para la estimación de los parámetros poblacionales. Es decir, si la distribución de \mathbf{Y} está parametrizada por $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_K)$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ con Θ el espacio paramétrico inducido por el comportamiento de la variable de interés, el objetivo de la teoría estadística inferencial es calcular una estimación $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ del parámetro $\boldsymbol{\theta}$, por medio de los datos observados. En este enfoque, los parámetros se consideran cantidades fijas y constantes. Sin embargo, en la última mitad del siglo XX, algunos investigadores estadísticos comenzaron a reflexionar acerca de la naturaleza de $\boldsymbol{\theta}$ y enfocaron la inferencia estadística de una manera distinta: *asumiendo que la distribución de la variable de interés está condicionada a valores específicos de los parámetros*. Es decir, en términos de notación, si la variable de interés es \mathbf{Y} , su distribución condicionada a los parámetros toma la siguiente forma $p(\mathbf{Y} | \boldsymbol{\theta})$. Esto implica claramente que en este nuevo enfoque la naturaleza de los parámetros no es constante.

En términos de inferencia para $\boldsymbol{\theta}$, es necesario encontrar la distribución de los parámetros condicionada a la observación de los datos. Para este fin, es necesario definir la distribución conjunta de la variable de interés con el vector de parámetros.

$$p(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{Y}) = p(\boldsymbol{\theta})p(\mathbf{Y} | \boldsymbol{\theta})$$

A la distribución $p(\boldsymbol{\theta})$ se le conoce con el nombre de distribución *previa* y en ella se enmarcan todas y cada una de las creencias que se tienen acerca del comportamiento estocástico del vector de parámetros antes de que ocurra la recolección de los datos; $p(\mathbf{Y} | \boldsymbol{\theta})$ es la distribución de muestreo, verosimilitud o distribución de los datos. Por otro lado, la distribución del vector de parámetros condicionada a los datos observados está dada por

$$p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{Y}) = \frac{p(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{Y})}{p(\mathbf{Y})} = \frac{p(\boldsymbol{\theta})p(\mathbf{Y} | \boldsymbol{\theta})}{p(\mathbf{Y})} \quad (1.7)$$

A la distribución $p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{Y})$ se le conoce con el nombre de distribución *posterior* y en ella se enmarcan las creencias actualizadas acerca del comportamiento estocástico del vector de parámetros teniendo en cuenta los datos observados \mathbf{Y} . Nótese que la expresión (1.7) se compone de una fracción cuyo denominador no depende del vector de parámetros y considerando a los datos observados como fijos, corresponde a una constante y puede ser obviada. Por lo tanto, otra representación de la regla de Bayes está dada por

$$p(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{Y}) \propto p(\mathbf{Y} \mid \boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\theta}) \quad (1.8)$$

Gelman et al. (2003) menciona que esta expresión se conoce como la distribución *posterior no-normalizada* y encierra el núcleo técnico de la inferencia bayesiana. La constante $p(\mathbf{Y})$ faltante en la expresión (1.8) se da a continuación.

Resultado 1.4. *La expresión $p(\mathbf{Y})$ corresponde a una constante k tal que*

$$k = p(\mathbf{Y}) = E_{\boldsymbol{\theta}}[p(Y \mid \boldsymbol{\theta})]$$

Demostración. Nótese que

$$k = p(\mathbf{Y}) = \int p(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\theta}) \, d\boldsymbol{\theta} = \int p(\boldsymbol{\theta})p(\mathbf{Y} \mid \boldsymbol{\theta}) \, d\boldsymbol{\theta}.$$

entonces

$$\begin{aligned} k &= \int p(\mathbf{Y} \mid \boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\theta}) \, d\boldsymbol{\theta} \\ &= E_{\boldsymbol{\theta}}[p(Y \mid \boldsymbol{\theta})] \end{aligned}$$

□

Curiosamente, el reverendo Thomas Bayes nunca publicó este resultado, sino que después de su fallecimiento, su amigo el filósofo Richard Price, encontró los escritos dentro de sus pertenencias, y éstos fueron publicados en el 1764 en *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. Aunque el teorema de Bayes fue nombrado en honor de Thomas Bayes, es casi seguro que él mismo no sospechaba del gran impacto de su resultado. De hecho, aproximadamente una década más tarde, Pierre-Simon Laplace también descubrió el mismo principio, y dedicó gran parte de su vida extendiéndolo y formalizándolo. Más aún, él analizó grandes volúmenes de datos relacionados a los nacimientos en diferentes países para confirmar esta teoría, y sentó las bases de la estadística bayesiana.

A continuación se presenta un ejemplo simple de este sencillo pero poderoso teorema.

Ejemplo 1.4. Suponga que una fábrica del sector industrial produce bolígrafos y que la producción está a cargo de tres máquinas. La primera máquina produce el 50 % del total de bolígrafos en el año, la segunda máquina produce el 30 % y la última máquina produce el restante 20 %. Por supuesto, esta producción esta sujeta al error y por tanto, basados en la experiencia, es posible reconocer que, de los artículos producidos por la primera máquina, el 5 % resultan defectuosos; de los artículos producidos por la segunda máquina, el 2 % resultan defectuosos y, de los artículos producidos por la última máquina, el 6 % resultan defectuosos.

Una pregunta natural que surge es acerca de la probabilidad de selección de un artículo defectuoso y para responder a esta pregunta con rigurosidad de

probabilística es necesario enfocar la atención en los tópicos básicos que dejamos atrás. En primer lugar, el experimento en cuestión es la selección de un bolígrafo. Para este experimento, una terna $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ ¹, llamada comúnmente espacio de medida o espacio de probabilidad, está dada por

1. El espacio muestral: $\Omega = \{\text{defectuoso}, \text{No defectuoso}\}$
2. La σ -álgebra: $\mathfrak{F} = \{\Omega, \phi, \{\text{Defectuoso}\}, \{\text{No Defectuoso}\}\}$
3. La función de probabilidad:

$$\begin{aligned} p : \mathfrak{F} &\longrightarrow [0, 1] \\ \Omega &\longrightarrow 1 \\ \phi &\longrightarrow 0 \\ \{\text{Defectuoso}\} &\longrightarrow P(D) \\ \{\text{NoDefectuoso}\} &\longrightarrow 1 - P(D) \end{aligned}$$

en donde, acudiendo al teorema de probabilidad total, se define

$$p(D) = p(D \mid M1)P(M1) + p(D \mid M2)P(M2) + p(D \mid M3)P(M3)$$

Sin embargo, también es posible plantearse otro tipo de preguntas que sirven para calibrar el proceso de producción de artículos defectuosos. Por ejemplo, cabe preguntarse acerca de la probabilidad de que, habiendo seleccionado un artículo defectuoso, éste provenga de la primera máquina². En esta ocasión, el experimento ha cambiado y ahora se trata de seleccionar un artículo defectuoso y para responder a tal cuestionamiento, se debe establecer rigurosamente el espacio de probabilidad que puede estar dado por

1. El espacio muestral: $\Omega = \{M1, M2, M3\}$
2. La σ -álgebra: $\mathfrak{F}^+ = \{\Omega, \phi, \{M1\}, \{M2, M3\}\}$
3. La función de probabilidad:

$$\begin{aligned} p : \mathfrak{F}^+ &\longrightarrow [0, 1] \\ \Omega &\longrightarrow 1 \\ \phi &\longrightarrow 0 \\ \{M1\} &\longrightarrow p(M1 \mid D) \\ \{M2, M3\} &\longrightarrow 1 - p(M1 \mid D) \end{aligned}$$

en donde, acudiendo a la probabilidad condicional, se define

$$p(M1 \mid D) = \frac{p(D \mid M1)P(M1)}{p(D \mid M1)P(M1) + p(D \mid M2)P(M2) + p(D \mid M3)P(M3)}$$

¹ Ω denota el conjunto de todos los posibles resultados del experimento, \mathfrak{F} denota una σ -álgebra y P hace referencia a una medida de probabilidad propiamente definida.

²Por supuesto que la pregunta también es válida al indagar por la probabilidad de que habiendo seleccionado un artículo defectuoso, éste provenga de la segunda o tercera máquina.

La anterior función de probabilidad se conoce con el nombre de regla de probabilidad de Bayes y, aparte de ser el baluarte de la mayoría de investigaciones estadísticas que se plantean hoy en día, ha sido la piedra de tropiezo de muchos investigadores radicales que trataron de estigmatizar este enfoque tildando a sus seguidores de mediocres matemáticos y pobres probabilistas afirmando que la regla de probabilidad de Bayes es sólo un artilugio diseñado para divertirse en el tablero.

Pues bien, la interpretación de la regla de bayes se puede realizar en el sentido de actualización de la estructura probabilística que gobierna el experimento. Y esta actualización tiene mucho sentido práctico cuando se cae en la cuenta de que la vida real está llena de calibradores y que las situaciones generadas son consecuencia de algún cambio estructural. De esta forma, el conocimiento de la probabilidad de que el artículo sea producido por la primera máquina se actualiza al conocer que este artículo particular es defectuoso y de esta manera calibra la estructura aleatoria que existe detrás del contexto de la fábrica de bolígrafos. Aparte de servir para resolver problemas como el anteriormente mencionado, la regla de bayes ha marcado el comienzo de un nuevo enfoque de análisis de datos, no solamente porque hace explícitas las relaciones causales entre los procesos aleatorios, sino también porque facilita la inferencia estadística y la interpretación de los resultados.

En el campo de la medicina, también se ha visto un gran número de la aplicación del teorema de Bayes. A continuación se enuncia uno de ellos:

Ejemplo 1.5. El Grupo de Trabajo de Servicios Preventivos de los Estados Unidos (USPSTF) hizo unas nuevas y controversiales recomendaciones [recomendaciones](#) sobre la detección del cáncer de mama dentro de los cuales no recomienda el examen de la mamografía en mujeres entre 40 y 49 años de edad, afirmando que la práctica bienal de este examen debe ser una decisión individual según el contexto particular de la paciente. Por otro lado, la USPSTF sí recomienda tal práctica de forma bienal en grupos de mujeres de entre 50 y 74 años de edad, puesto que no encontró suficiente evidencia de beneficio o daño adicional en realizar este examen en mujeres mayores a los 74 años. Además, también recomendó *no* realizar auto exámenes de senos, contrario a las recomendaciones y consejos que da la mayoría de los profesionales y organizaciones de la salud, incluyendo la *Amerian Cancer Society*. Como información adicional, se sabe que:

- Los expertos estiman que un 12.3% de las mujeres desarrollan formas invasivas del cáncer de mama durante la vida.
- La probabilidad de que una mujer desarrolle el cáncer de mama entre los 40 y los 49 años de edad es 1 en 69, y esta probabilidad aumenta a medida que envejezca, de tal forma que llega a ser de 1 en 38 en mujeres de entre 50 y 59 años.
- El cáncer de mama es más difícil de detectar en mujeres jóvenes puesto que el tejido mamario es más denso y fibroso. Los expertos estiman que la tasa de un falso positivo es de 97.8 por cada 1000 mujeres de 40 y 49 años, y esta tasa disminuye a 86.6 por cada 1000 mujeres entre 50 y 59 años.

- La tasa de un falso negativo es de 1 por cada 1000 mujeres de 40 y 49 años, y es de 1.1 por cada 1000 mujeres entre 50 y 59 años.

Resumiendo las anteriores afirmaciones, tenemos las siguientes probabilidades

Probabilidad	40 - 49	50 - 59 años
Cáncer	1/69=0.01449	1/38=0.02632
No cáncer	68/69=0.9855	37/38=0.97368
Positivo No cáncer	0.0978	0.0866
Negativo No cáncer	0.9022	0.9134
Positivo Cáncer	0.999	0.9989
Negativo Cáncer	0.001	0.0011

Utilizando la regla de Bayes, se puede calcular las siguientes probabilidades para mujeres de 40 y 49 años:

$$\begin{aligned}
 P(\text{Cáncer}|\text{Positivo}) &= \frac{P(\text{Positivo}|\text{Cáncer})P(\text{Cáncer})}{P(\text{Positivo}|\text{Cáncer})P(\text{Cáncer}) + P(\text{Positivo}|\text{No cáncer})P(\text{No cáncer})} \\
 &= \frac{0.999 * 0.01449}{0.999 * 0.01449 + 0.0978 * 0.9855} \\
 &= 0.1305
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(\text{Cáncer}|\text{Negativo}) &= \frac{P(\text{Negativo}|\text{Cáncer})P(\text{Cáncer})}{P(\text{Negativo}|\text{Cáncer})P(\text{Cáncer}) + P(\text{Negativo}|\text{No cáncer})P(\text{No cáncer})} \\
 &= \frac{0.001 * 0.01449}{0.001 * 0.01449 + 0.9022 * 0.9855} \\
 &= 0.0000163
 \end{aligned}$$

Similarmente, se puede calcular estas dos probabilidades para las mujeres de 50 y 59 años.

Probabilidad	40 - 49 años	50 - 59 años
Cáncer Positivo	0.1305985	0.23769
No cáncer Positivo	0.8694223	0.7623123
Cáncer Negativo	0.0000163	0.0000326
No cáncer Negativo	0.9999837	0.9999674

Los anteriores resultados muestran cómo cambia la probabilidad de tener cáncer al condicionar en los resultados de la prueba. Entre estos valores se puede ver que, con un resultado positivo en el examen, la probabilidad de tener efectivamente

el cáncer es aproximadamente diez puntos porcentuales más bajo en mujeres de edad de 40 y 49 años, de donde se puede sustentar la recomendación de no efectuar este examen en mujeres de este rango de edad.

Capítulo 2

Inferencia bayesiana

El enfoque bayesiano, además de especificar un modelo para los datos observados $\mathbf{Y} = (y_1, \dots, y_n)$ dado un vector de parámetros desconocidos $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_K)$, usualmente en forma de densidad condicional $p(\mathbf{Y} \mid \boldsymbol{\theta})$, supone que $\boldsymbol{\theta}$ es aleatorio y que tiene una densidad *previa* $p(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{\eta})$, donde $\boldsymbol{\eta}$ es un vector de hiper-parámetros. De esta forma, la inferencia concerniente a $\boldsymbol{\theta}$ se basa en una densidad *posterior* $p(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{Y})$.

En términos de estimación, inferencia y predicción, el enfoque Bayesiano supone dos momentos o etapas:

1. Antes de la recolección de los datos, en donde el investigador propone, basado en su conocimiento, experiencia o fuentes externas, una distribución de probabilidad previa para el parámetro de interés. Con esta distribución es posible calcular estimaciones puntuales y por intervalo con el fin de confirmar que la distribución propuesta se ajusta al problema de estudio. En esta etapa, basados en la distribución previa, también es posible hacer predicciones de cantidades observables.
2. Después de la recolección de los datos. Siguiendo el teorema de Bayes, el investigador actualiza su conocimiento acerca del comportamiento probabilístico del parámetro de interés mediante la distribución posterior de este. Con esta distribución es posible calcular estimaciones puntuales y por intervalo justo como en el enfoque frecuentista. En esta etapa, basados en la distribución posterior, también es posible hacer predicciones de cantidades observables y pruebas de hipótesis acerca de la adecuación del mejor modelo a los datos observados.

Inferencia previa

Con las anteriores expresiones es posible calcular la probabilidad previa de que θ esté en una determinada región G como

$$Pr(\theta \in G) = \int_G p(\theta \mid \eta) d\theta \quad (2.1)$$

En esta primera etapa también es posible calcular, con fines confirmatorios (Carlin and Louis, 1996), la estimación puntual para el vector θ dada por alguna medida de tendencia central para la distribución $p(\theta \mid \eta)$. En particular, si se escoge la media, entonces

$$(\#eq : est.prio)\hat{\theta} = E(\theta) = \int \theta p(\theta \mid \eta) d\theta \quad (2.2)$$

También es posible calcular una región C de $100 \times (1 - \alpha)$ de credibilidad¹ para θ que en esta primera etapa es tal que

$$1 - \alpha \leq Pr(\theta \in C) = \int_C p(\theta \mid \eta) d\theta \quad (2.3)$$

Inferencia posterior

Una vez recolectados los datos, se actualizan los cálculos descritos en la sección anterior. Podemos calcular la probabilidad posterior de que θ esté en la región G dados los datos observados como

$$Pr(\theta \in G \mid \mathbf{Y}) = \int_G p(\theta \mid \mathbf{Y}) d\theta \quad (2.4)$$

También es posible calcular la estimación puntual para el vector θ dados los datos observados. Ésta está dada por alguna medida de tendencia central para la distribución $p(\theta \mid \mathbf{Y})$. En particular, si se escoge la media, entonces

$$\hat{\theta} = E(\theta \mid \mathbf{Y}) = \int \theta p(\theta \mid \mathbf{Y}) d\theta \quad (2.5)$$

La región C de $100 \times (1 - \alpha)$ de credibilidad es tal que

$$1 - \alpha \leq Pr(\theta \in C \mid \mathbf{Y}) = \int_C p(\theta \mid \mathbf{Y}) d\theta \quad (2.6)$$

¹La interpretación de las regiones de credibilidad bayesianas difiere de la interpretación de las regiones de confianza frecuentistas. La primera se refiere a la probabilidad de que el verdadero valor de θ esté en la región. La segunda se refiere a la región de la distribución muestral para θ tal que, dados los datos observados, se podría esperar que el $100 \times \alpha$ de las futuras estimaciones de θ no pertenecieran a dicha región.

También la distribución posterior del parámetro θ es útil para el procedimiento de juzgamiento de hipótesis en el ámbito del análisis bayesiano. Esto se lleva a cabo por medio del factor de Bayes que se presentará más adelante.

Inferencia predictiva

En términos de inferencia predictiva existen dos etapas que cubren las *actuales* suposiciones acerca del vector de parámetros θ . En una primera etapa - antes de la observación de los datos - la suposición *actual* de θ está dada por la densidad previa $p(\theta | \eta)$. En estos términos, utilizando el Resultado 1.4, la distribución predictiva previa de \mathbf{Y} está dada por

$$p(\mathbf{y}) = \int p(\mathbf{Y} | \theta) p(\theta | \eta) d\theta \quad (2.7)$$

La segunda etapa - después de la recolección de los datos - actualiza las suposiciones acerca de θ puesto que ahora éste sigue una distribución posterior dada por (1.7). Por lo tanto, la distribución predictiva posterior de \mathbf{Y} está dada por

$$\begin{aligned} p(\tilde{\mathbf{y}} | \mathbf{Y}) &= \int p(\tilde{\mathbf{y}}, \theta | \mathbf{y}) d\theta \\ &= \int p(\tilde{\mathbf{y}} | \theta, \mathbf{Y}) p(\theta | \mathbf{Y}) d\theta \\ &= \int p(\tilde{\mathbf{y}} | \theta) p(\theta | \mathbf{Y}) d\theta \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde $p(\tilde{\mathbf{y}} | \theta)$ es la distribución de los datos evaluada en los nuevos valores $\tilde{\mathbf{y}}$. La segunda línea de la anterior igualdad se obtiene utilizando el resultado 1.1 y la última línea se obtiene del resultado 1.2 de la independencia condicional.

2.1. La distribución previa

La escogencia de una distribución previa es muy importante en el análisis bayesiano, puesto que ésta afecta directamente en la distribución posterior, tal como lo ilustra el teorema de Bayes. En primer lugar, la distribución previa debe describir adecuadamente los conocimientos previos sobre los parámetros objetivos de estimación. Por ejemplo, si se cree que un parámetro toma valores cercanos a 10, entonces la distribución escogida para representarla también debe tomar valores cercanos a 10, como podría ser una distribución normal centrada en ese valor. Por otro lado, dado que en la literatura existe un gran número de distribuciones, algunas muy similares entre ellas, a la hora de escoger una distribución previa también se debe tener en cuenta las implicaciones a la hora

de efectuar cálculos de la estimación puntual o del intervalo de credibilidad, procurando en la mayoría de casos, obtener una distribución posterior fácil de manejar. A continuación exponemos algunos aspectos generales relacionados con las distribuciones previas.

2.1.1. Distribuciones conjugadas

Como se verá en los capítulos siguientes, muchos problemas de inferencia bayesiana comparten la agradable cualidad de que la forma funcional de la distribución previa para el parámetro de interés resulta ser la misma de la distribución posterior. Por ejemplo:

- Cuando se tiene una muestra aleatoria de variables con distribución Bernoulli de parámetro θ , es factible pensar que una distribución previa apropiada para este parámetro es la distribución Beta; bajo este escenario, la distribución posterior también resulta ser Beta.
- En el caso en que se quiera modelar el parámetro θ concerniente a una variable aleatoria con distribución Poisson, es posible asignar como candidata para distribución previa a la distribución Gamma; en este caso la distribución posterior también resulta ser Gamma.

Las distribuciones conjugadas son deseadas en el análisis bayesiano pues en primer lugar, la distribución posterior del parámetro θ es considerada como la actualización del conocimiento acerca de este después de la recolección de los datos, entonces al tener la misma forma funcional que la distribución previa, pueden ser comparadas y así ver claramente cómo es la influencia de los datos observados sobre la creencia inicial acerca de θ ; en segundo lugar, el hecho de que la distribución posterior sea de la misma forma funcional que la previa permite que la actualización de información se pueda llevar a cabo sistemáticamente, pues cada vez que se observan nuevos datos, la anterior distribución posterior puede ser tomada como la distribución previa y así producir una nueva distribución posterior.

A continuación exponemos la definición rigurosa de las distribuciones conjugadas y algunos tópicos relacionados.

Definición 2.1. Sea $\mathcal{F} = \{p(\mathbf{Y} \mid \boldsymbol{\theta})\}$ una familia de distribuciones de probabilidad. Una familia de distribuciones \mathcal{P} se dice conjugada con respecto a \mathcal{F} si para toda distribución previa $p(\boldsymbol{\theta}) \in \mathcal{P}$ y para toda distribución de muestreo o verosimilitud de las observaciones $p(\mathbf{Y} \mid \boldsymbol{\theta})$, $p(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{Y})$ también pertenece a la familia \mathcal{P} .

Esta definición es, en la mayoría de los casos prácticos, muy útil. Sin embargo, [Migon and Gamerman \(1999\)](#) describe los siguientes dos casos en donde esta definición es completamente inútil:

1. *Caso amplio:* sea $\mathcal{P} = \{\text{Todas las distribuciones de probabilidad}\}$ y \mathcal{F} cualquier familia de distribuciones de probabilidad. Entonces \mathcal{P} es conjugada

con respecto a \mathcal{F} puesto que toda posible distribución posterior será un miembro de \mathcal{P} .

2. *Caso restringido:* sea $\mathcal{P} = \{p \mid p(\theta = \theta_0) = 1\}$, esto es, \mathcal{P} corresponde a todas las distribuciones concentradas en un punto. Sea \mathcal{F} cualquier familia de distribuciones de probabilidad. De esta manera, la distribución posterior de θ estará dada por

$$\begin{aligned} p(\theta \mid Y) \propto p(Y \mid \theta)p(\theta) &= \begin{cases} p(Y \mid \theta) \times 1 & \text{si } \theta = \theta_0 \\ p(Y \mid \theta) \times 0 & \text{si } \theta \neq \theta_0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} p(Y \mid \theta) & \text{si } \theta = \theta_0 \\ 0 & \text{si } \theta \neq \theta_0 \end{cases} \end{aligned}$$

De lo anterior y dado que $\int p(\theta \mid Y) d\theta = 1$, entonces $p(Y \mid \theta) = 1$ si y sólo si $\theta = \theta_0$. Con el anterior razonamiento, se concluye que \mathcal{P} es conjugada con respecto a \mathcal{F} .

Por lo tanto, se deben buscar distribuciones previas que sean conjugadas de una forma tan amplia que permita proponer una distribución previa adecuada, pero al mismo tiempo tan restringida para que la definición de conjugada tenga sentido práctico. Ahora introducimos una familia de distribuciones muy importante para el desarrollo de la teoría estadística, tanto en el ámbito bayesiano como en el clásico.

2.1.2. Familia exponencial

Dependiendo de la naturaleza del parámetro θ , la familia exponencial puede ser uniparamétrica o multiparamétrica. En el primer caso, una distribución de probabilidad pertenece a la familia exponencial uniparamétrica si se puede escribir de la forma

$$p(Y \mid \theta) = \exp\{d(\theta)T(y) - c(\theta)\}h(y) \quad (2.9)$$

donde $T(y)$ y $h(y)$ son funciones que dependen de y únicamente, y $d(\theta)$ y $c(\theta)$ son funciones que dependen de θ únicamente. Análogamente, una distribución de probabilidad pertenece a la familia exponencial multi-paramétrica si se puede escribir de la forma

$$p(Y \mid \boldsymbol{\theta}) = \exp\{\mathbf{d}(\boldsymbol{\theta})'\mathbf{T}(y) - c(\boldsymbol{\theta})\}h(y) \quad (2.10)$$

donde $\mathbf{T}(y)$ y $\mathbf{d}(\boldsymbol{\theta})$ son funciones vectoriales, $h(y)$ y $c(\boldsymbol{\theta})$ son funciones reales.

La ventaja de la familia exponencial radica en que es una familia relativamente restringida de distribuciones que a la vez conservan la propiedad de ser distribuciones conjugadas, tal como muestra el siguiente resultado:

Resultado 2.1. *Sea Y una variable aleatoria con función de densidad perteneciente a la familia exponencial uniparamétrica, entonces la familia exponencial uniparamétrica es conjugada con respecto a sí misma.*

Demostración. Observando la expresión (2.9), se debe encontrar una distribución previa en la familia exponencial uniparamétrica, tal que la distribución posterior, resultante del producto de la distribución previa con la verosimilitud sea también miembro de la familia exponencial uniparamétrica. Con base en lo anterior, la distribución previa, parametrizada por el hiperparámetro α , debe ser una función exponencial de los términos $d(\theta)$ y $c(\theta)$ como lo afirma Jordan (2004). Esto es,

$$p(\theta | \alpha) \propto \exp\{w(\alpha)d(\theta) - \delta c(\theta)\}, \quad (2.11)$$

donde δ es una constante real (posiblemente dependiente de α). Por otro lado, para garantizar que $p(\theta | \alpha)$ sea una auténtica función de densidad se normaliza de la siguiente manera

$$p(\theta | \alpha) = \frac{1}{k(\alpha, \delta)} \exp\{w(\alpha)d(\theta) - \delta c(\theta)\}, \quad (2.12)$$

con

$$k(\alpha, \delta) = \int \exp\{w(\alpha)d(\theta) - \delta c(\theta)\} d\theta.$$

De esta manera, no es difícil comprobar que la definición de distribución previa, parametrizada por el hiper-parámetro α , pertenece a la familia exponencial, puesto que

$$p(\theta | \alpha) = \exp\{\underbrace{w(\alpha)}_{d(\alpha)} \underbrace{d(\theta)}_{T(\theta)} - \underbrace{\ln k(\alpha, \delta)}_{c(\alpha)} \underbrace{\exp\{-\delta c(\theta)\}}_{h(\theta)}\}. \quad (2.13)$$

Por otro lado, del teorema de Bayes se tiene que

$$\begin{aligned} p(\theta | Y) &\propto p(Y | \theta)p(\theta | \alpha) \\ &= \exp\{w(\alpha)d(\theta) + d(\theta)T(y) - c(\theta) - \ln k(\alpha, \delta)\} \exp\{-\delta c(\theta)\} h(y) \\ &= \exp\{\underbrace{[\alpha + T(y)]}_{d(y)} \underbrace{d(\theta)}_{T(\theta)} - \underbrace{[\ln k(\alpha, \delta) - \ln h(y)]}_{c(y)} \underbrace{\exp\{-(\delta + 1)c(\theta)\}}_{h(\theta)}\} \\ &\propto \exp\{[w(\alpha) + T(y)]d(\theta)\} \exp\{-(\delta + 1)c(\theta)\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la distribución posterior resultante también pertenece a la familia exponencial uniparamétrica. \square

La extensión del anterior resultado puede ser extendida para el caso en el que se cuenta con una muestra aleatoria de observaciones, tal como se expone a continuación:

Resultado 2.2. Sean $\mathbf{Y} = \{Y_1, \dots, Y_n\}$ una muestra aleatoria de variables distribuidas con función de densidad común perteneciente a la familia exponencial uniparamétrica, cuya función de densidad conjunta $p(\mathbf{Y} | \theta)$ también pertenece a la familia exponencial uniparamétrica. Bajo las anteriores condiciones la familia exponencial uniparamétrica es conjugada con respecto a sí misma.

Demostración. La demostración es inmediata utilizando el resultado anterior y notando que la forma funcional de la densidad conjunta para \mathbf{Y} es

$$p(\mathbf{Y} | \theta) = \exp \left\{ d(\theta) \sum_{i=1}^n T(y_i) - nc(\theta) \right\} \prod_{i=1}^n h(y_i) \quad (2.14)$$

la cual hace parte de la familia exponencial. \square

Otra extensión del resultado 2.1 corresponde al caso cuando la distribución de la observación está reparametrizado por un vector de parámetros θ . A continuación se expone el resultado y la prueba correspondiente.

Resultado 2.3. Sea Y una variable aleatoria con función de densidad perteneciente a la familia exponencial multiparamétrica. Sea θ el parámetro de interés con distribución previa parametrizada por un vector de hiperparámetros η y perteneciente a la familia exponencial multiparamétrica. Entonces la familia exponencial multiparamétrica es conjugada con respecto a sí misma.

Demostración. En primer lugar, la distribución de probabilidad de Y perteneciente a la familia exponencial multiparamétrica está dada por (2.10). Siguiendo el mismo razonamiento de la demostración del Resultado 2.1, la distribución previa del parámetro de interés debe estar definida de la siguiente manera

$$p(\theta | \eta) = \exp \left\{ \underbrace{w(\eta)' \mathbf{d}(\theta)}_{\mathbf{d}(\eta)} - \underbrace{\ln k(\eta, \delta)}_{c(\eta)} \right\} \underbrace{\exp\{-\delta c(\theta)\}}_{h(\theta)}, \quad (2.15)$$

con

$$k(\eta, \delta) = \int \exp\{w(\eta)' \mathbf{d}(\theta) - \delta c(\theta)\} d\theta.$$

Utilizando el teorema de Bayes, se tiene que, la distribución posterior del parámetro θ es

$$\begin{aligned} p(\theta | Y) &\propto p(Y | \theta) p(\theta | \eta) \\ &= \exp\{\mathbf{T}(y)' \mathbf{d}(\theta) - c(\theta) + w(\eta)' \mathbf{d}(\theta) - \delta c(\theta) - \ln k(\eta, \delta) + \ln h(y)\} \\ &= \exp \left\{ \underbrace{(w(\eta) + \mathbf{T}(y))' \mathbf{d}(\theta)}_{\mathbf{d}(y)} - \underbrace{[\ln k(\eta, \delta) - \ln h(y)]}_{c(y)} \right\} \underbrace{\exp\{-(\delta + 1)c(\theta)\}}_{h(\theta)} \end{aligned}$$

La anterior expresión también hace parte de la familia exponencial biparamétrica y con esto se concluye la demostración \square

Nótese que el anterior resultado también cobija situaciones donde la verosimilitud sea perteneciente a la familia exponencial uniparamétrica. Más aún, a cualquier familia exponencial multiparamétrica de orden menor o igual al orden de la distribución previa.

Resultado 2.4. Sean $\mathbf{Y} = \{Y_1, \dots, Y_n\}$ una muestra aleatoria con función de densidad conjunta o verosimilitud dada por (2.10). Bajo este escenario la familia exponencial multi-paramétrica es conjugada con respecto a sí misma.

Demostración. La demostración sigue los mismos lineamientos que la demostración del resultado anterior concluyendo que la distribución posterior de $\boldsymbol{\theta}$ está dada por

$$\begin{aligned}
 p(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{Y}) &\propto p(\mathbf{Y} \mid \boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{\eta}) \\
 &= \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \mathbf{T}(y_i)' \mathbf{d}(\boldsymbol{\theta}) - nc(\boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\eta}' \mathbf{d}(\boldsymbol{\theta}) - \delta c(\boldsymbol{\theta}) - \ln k(\boldsymbol{\eta}, \delta) + \sum_{i=1}^n \ln h(y_i) \right\} \\
 &= \exp \left\{ \underbrace{\left(\boldsymbol{\eta} + \sum_{i=1}^n \mathbf{T}(y_i) \right)'}_{\mathbf{d}(\mathbf{y})} \underbrace{\mathbf{d}(\boldsymbol{\theta})}_{\mathbf{T}(\boldsymbol{\theta})} - \underbrace{\left[\ln k(\boldsymbol{\eta}, \delta) - \sum_{i=1}^n \ln h(y_i) \right]}_{c(\mathbf{y})} \right\} \\
 &\quad \times \underbrace{\exp \{ -(\delta + n)c(\boldsymbol{\theta}) \}}_{h(\boldsymbol{\theta})}
 \end{aligned}$$

La anterior expresión también hace parte de la familia exponencial. \square

Ahora, estudiamos las expresiones relacionadas con la distribución predictiva de nuevas observaciones dentro del contexto de la familia exponencial:

Resultado 2.5. Sea Y una variable aleatoria con función de densidad perteneciente a la familia exponencial, dada por (2.9). Sea θ el parámetro de interés con distribución previa en la familia exponencial biparamétrica. La distribución predictiva previa de Y está dada por

$$p(Y) = \frac{k(\alpha + T(y), \delta + 1)}{k(\alpha, \delta)} h(y) \quad (2.16)$$

donde

$$k(a, b) = \int \exp\{w(a)d(\theta) - bc(\theta)\} d\theta$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
 p(Y) &= \int p(\theta)p(Y \mid \theta) d\theta \\
 &= \int \exp\{w(\alpha)d(\theta) - \ln k(\alpha, \delta) - \delta c(\theta)\} \exp\{d(\theta)T(y) - c(\theta)\}h(y)d\theta \\
 &= \frac{h(y)}{k(\alpha, \delta)} \int \exp\{[w(\alpha) + T(y)]d(\theta) - (\delta + 1)c(\theta)\}d\theta \\
 &= \frac{k(\alpha + T(y), \delta + 1)h(y)}{k(\alpha, \delta)}
 \end{aligned}$$

donde

$$k(\alpha, \delta) = \int \exp\{w(\alpha)d(\theta) - \delta c(\theta)\} d\theta$$

y

$$k(\alpha + T(y), \delta + 1) = \int \exp\{[w(\alpha) + T(y)]d(\theta) - (\delta + 1)c(\theta)\} d\theta.$$

□

La extensión al caso de contar con una muestra aleatoria de observaciones se encuentra a continuación:

Resultado 2.6. Sea $\mathbf{Y} = \{Y_1, \dots, Y_n\}$ una muestra aleatoria con función de densidad conjunta perteneciente a la familia exponencial, dada por (2.10). Sea θ el parámetro de interés con distribución previa exponencial multiparamétrica. La distribución predictiva previa de \mathbf{Y} está dada por

$$p(\mathbf{Y}) = \frac{k(\alpha + T(\mathbf{y}), \delta + n)}{k(\alpha, \beta)} h(\mathbf{y}) \quad (2.17)$$

donde k se define tal como en el resultado anterior.

Demostración. La prueba se tiene de inmediato siguiendo los lineamientos de la demostración del anterior resultado. □

Resultado 2.7. En términos de la distribución predictiva posterior, se tiene que para una sola observación \tilde{y} , ésta está dada por

$$p(\tilde{y} \mid Y) = \frac{k(\alpha + T(y) + T(\tilde{y}), \delta + 2)}{k(\alpha + T(y), \delta + 1)} h(\tilde{y}) \quad (2.18)$$

y en el caso en donde se tiene una muestra aleatoria, entonces la distribución predictiva posterior para una nueva muestra $\tilde{\mathbf{y}} = \{\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{n^*}\}$ de tamaño n^* está dada por

$$p(\tilde{\mathbf{y}} \mid \mathbf{Y}) = \frac{k(\alpha + T(\mathbf{y}) + T(\tilde{\mathbf{y}}), \delta + n + n^*)}{k(\alpha + T(\mathbf{y}), \delta + n)} h(\tilde{\mathbf{y}}) \quad (2.19)$$

Demostración. De la definición de distribución predictiva posterior dada por la expresión (2.8) se tiene que

$$\begin{aligned}
 p(\tilde{y} | Y) &= \int p(\tilde{y} | \theta) p(\theta | y) d\theta \\
 &= \int \exp\{d(\theta)T(\tilde{y}) - c(\theta)\} h(\tilde{y}) \frac{\exp\{[w(\alpha) + T(y)]d(\theta) - (\delta + 1)c(\theta)\}}{k(\alpha + T(y), \delta + 1)} d\theta \\
 &= \frac{h(\tilde{y})}{k(w(\alpha) + T(y), \delta + 1)} \int \exp\{[\alpha + T(y) + T(\tilde{y})]d(\theta) - (\delta + 2)c(\theta)\} d\theta \\
 &= \frac{k(\alpha + T(y) + T(\tilde{y}), \delta + 2)}{k(\alpha + T(y), \delta + 1)} h(\tilde{y}),
 \end{aligned}$$

con

$$k(\alpha + T(y) + T(\tilde{y}), \delta + 2) = \int \exp\{[w(\alpha) + T(y) + T(\tilde{y})]d(\theta) - (\delta + 2)c(\theta)\} d\theta.$$

La demostración para la nueva muestra se lleva a cabo de manera análoga. \square

2.1.3. Distribuciones previas no informativas

Cuando no existe una base poblacional sobre el parámetro de interés o cuando existe total ignorancia de parte del investigador acerca del comportamiento de probabilístico del parámetro, es necesario definir distribuciones previas que sean no informativas. Es decir, que jueguen un papel mínimo en términos de influencia en la distribución posterior. Una característica de estas distribuciones es que su forma es vaga, plana o difusa. Por tanto la pregunta de interés que surge en este instante es: ¿cómo seleccionar distribuciones previas no informativas² sobre el parámetro de interés?

En los anteriores términos, la distribución uniforme define una distribución previa que cumple con las características de no información en la mayoría de escenarios. Específicamente en aquellos problemas en donde el parámetro de interés está limitado a un espacio de muestreo acotado. Por ejemplo, en la distribución Binomial, el parámetro de interés está limitado al espacio de muestreo $[0, 1]$. Sin embargo, no en todos los problemas encaja la distribución uniforme. Nótese, por ejemplo, que en el caso en que la distribución exponencial se acomode a los datos como candidata a verosimilitud, entonces el espacio de muestreo del parámetro de interés estaría dado por $(0, \infty)$ en cuyo caso la distribución uniforme no sería

²Existen muchas denominaciones para las distribuciones uniformes que no son informativas. Por ejemplo, Box and Tiao (1992) proponen el nombre de distribuciones localmente uniformes para asegurar que cumplan con las condiciones de función de densidad de probabilidad en un rango particular del espacio paramétrico. Sin embargo, en este texto vamos a utilizar la expresión *no informativa* al referirse a este tipo de distribuciones a previa.

conveniente puesto que sería una distribución impropia en el espacio de muestreo del parámetro de interés. Es decir

$$\text{Si } p(\theta) \propto k I_{\Theta}(\theta), \text{ entonces } \int_{\Theta} p(\theta) d(\theta) \longrightarrow \infty$$

donde Θ denota espacio de muestreo del parámetro θ e I denota la función indicadora. Por otro lado, una característica importante que debe tener una distribución previa no informativa es que sea invariante en términos de transformaciones matemáticas. Es decir, si el parámetro de interés es θ con distribución previa no informativa dada por $p(\theta)$, y sea $\phi = h(\theta)$ una transformación de θ por medio de la función h , entonces la distribución previa de ϕ también debería ser no informativa. Sin embargo, la teoría de probabilidad afirma que la distribución de probabilidad de una transformación está dada por

$$p(\phi) = p(\theta) \left| \frac{d\theta}{d\phi} \right| = p(\theta) |h'(\theta)|^{-1} \quad (2.20)$$

y claramente si la función h no es una función lineal, entonces los resultados encontrados por medio de este enfoque indicarían que la distribución previa $p(\phi)$ sería informativa contradiciendo los supuestos de $p(\theta)$. El siguiente ejemplo ilustra este planteamiento:

Ejemplo 2.1. Suponga que el parámetro de interés es θ y que está restringido a un espacio de muestreo dado por el intervalo $[0, 1]$. Si se supone completa ignorancia acerca del comportamiento del parámetro, entonces una buena opción, con respecto a la distribución previa, sería la distribución uniforme en el intervalo $[0, 1]$. Es decir, la distribución previa no informativa estaría dada por

$$p(\theta) = I_{[0,1]}(\theta)$$

Suponga ahora que existe una transformación del parámetro de interés dada por $\phi = h(\theta) = \ln(\theta)$. Por tanto, siguiendo (2.20) se tiene que la distribución de ϕ está dada por

$$p(\phi) = I_{(-\infty, 0)}(\phi) e^{\phi}$$

la cual es informativa con respecto al parámetro ϕ . Sin embargo, es el mismo problema y existe una contradicción en términos de que para θ se desconoce todo, pero para una función ϕ existe evidencia de que el parámetro se comporta de cierta manera.

Para palear las anteriores diferencias, es necesario encontrar una distribución previa no informativa que sea invariante a transformaciones matemáticas. La distribución previa no informativa de Jeffreys, definida a continuación, cuenta con esta agradable propiedad.

Definición 2.2. Si la verosimilitud de los datos está determinada por un único parámetro θ , la distribución previa no informativa de Jeffreys tiene distribución de probabilidad dada por

$$p(\theta) \propto (I(\theta))^{1/2} \quad (2.21)$$

con $I(\theta)$ la información de Fisher definida como

$$\begin{aligned} I(\theta) &= E \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \log p(\mathbf{Y} \mid \theta) \right]^2 \right\} \\ &= -E \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log p(\mathbf{Y} \mid \theta) \right\} \end{aligned}$$

Si la verosimilitud de los datos está determinada por un vector de parámetros $\boldsymbol{\theta}$, la distribución previa no informativa de Jeffreys tiene distribución de probabilidad dada por

$$p(\boldsymbol{\theta}) \propto |\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})|^{1/2} \quad (2.22)$$

donde \mathbf{I} es la matriz de información de Fisher, cuyo elemento en la fila i y columna j está definida como

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{[ij]}(\boldsymbol{\theta}) &= E \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial \theta_i} \log p(\mathbf{Y} \mid \boldsymbol{\theta}) \right] \left[\frac{\partial}{\partial \theta_j} \log p(\mathbf{Y} \mid \boldsymbol{\theta}) \right] \right\} \\ &= -E \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \log p(\mathbf{Y} \mid \boldsymbol{\theta}) \right\} \end{aligned}$$

donde θ_i y θ_j son los elementos i y j del vector $\boldsymbol{\theta}$.

Nótese que si la verosimilitud de las observaciones pertenecen a la familia de distribuciones exponencial, entonces la distribución previa de Jeffreys no es difícil de calcular. Por otro lado nótese que la distribución previa no informativa de Jeffreys depende, de cierta manera, del mecanismo probabilístico que rige a los datos. Lo anterior hace que ciertos críticos de la estadística bayesiana manifiesten su inconformidad puesto que se supone que la formulación de la distribución a previa es independiente de los datos observados.

A continuación se evidencia la propiedad de esta distribución previa de seguir siendo no informativa con diferentes parametrizaciones.

Resultado 2.8. *La distribución previa no informativa de Jeffreys es invariante a transformaciones uno a uno. Es decir, si $\phi = h(\theta)$, entonces $p(\phi) \propto (I(\phi))^{1/2}$.*

Demostración. En primer lugar nótese que

$$I(\theta) = I(\phi) \left| \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right|^2$$

puesto que al utilizar la regla de la cadena del cálculo matemático se tiene que

$$\begin{aligned}
 I(\phi) &= -E \left[\frac{\partial^2 \log p(\mathbf{Y} | \phi)}{\partial \phi^2} \right] = -E \left[\frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\partial \log p(\mathbf{Y} | \phi)}{\partial \phi} \right) \right] \\
 &= -E \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \log p(\mathbf{Y} | \phi)}{\partial \phi} \right) \middle| \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right] \\
 &= -E \left[\frac{\partial^2 \log p(\mathbf{Y} | \phi)}{d\theta^2} \middle| \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right]^2 \\
 &= -E \left[\frac{\partial^2 \log p(\mathbf{Y} | \theta = h^{-1}(\phi))}{d\theta^2} \middle| \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right]^2 \\
 &= I(\theta) \left| \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right|^2
 \end{aligned}$$

Ahora, de la definición de función de distribución para una función y utilizando (2.20), se tiene que

$$p(\phi) = p(\theta) \left| \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right| \propto (I(\theta))^{1/2} \left| \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right| \propto I(\phi)^{1/2} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right| \left| \frac{d\theta}{d\phi} \right| = I(\phi)^{1/2}$$

□

En Box and Tiao (1992, p. 59) es posible encontrar un resumen exhaustivo de distribuciones previas no informativas para las distribuciones de verosimilitud más comunes. A continuación, se exponen algunos ejemplos que utilizan este enfoque.

Ejemplo 2.2. Si Y es una variable aleatoria con distribución Binomial, entonces el espacio de muestreo del parámetro de interés será el intervalo $[0, 1]$; sería conveniente utilizar la función de distribución uniforme sobre este intervalo como distribución previa no informativa. Con el enfoque de Jeffreys se llega a este mismo resultado puesto que la información de Fisher para la distribución binomial es $J(\theta) = n/\theta(1 - \theta)$ dado que

$$\log p(Y | \theta) = \log \binom{n}{y} + y \log(\theta) + (n - y) \log(1 - \theta)$$

y

$$\frac{\partial^2 \log p(Y | \theta)}{\partial \theta^2} = -\frac{y}{\theta^2} - \frac{n - y}{(1 - \theta)^2}$$

Por lo tanto, al calcular la esperanza, y por consiguiente la información de Fisher, se tiene que

$$I(\theta) = -E \left[\frac{\partial^2 \log p(Y | \theta)}{\partial \theta^2} \right] = \frac{n\theta}{\theta^2} + \frac{n - n\theta}{(1 - \theta)^2} = \frac{n}{\theta(1 - \theta)}$$

Es decir, la distribución previa no informativa para el parámetro de interés θ es proporcional a $\theta^{-1/2}(1 - \theta)^{-1/2}$, la cual comparte la misma forma estructural

de una distribución $Beta(1/2, 1/2)$ que a su vez es idéntica a la distribución uniforme. En términos de la distribución posterior para el parámetro de interés, se tiene que

$$\begin{aligned} p(\theta | Y) &\propto p(Y | \theta)p(\theta) \\ &\propto \theta^y(1 - \theta)^{n-y}\theta^{-1/2}(1 - \theta)^{-1/2} \\ &= \theta^{y+1/2-1}(1 - \theta)^{n-y+1/2-1} \end{aligned}$$

Por tanto, la distribución de $\theta | Y$ es $Beta(y+1/2, n-y+1/2)$. Por construcción, esta distribución no está alterada ni influenciada por la distribución previa pues la misma es no informativa.

Ejemplo 2.3. Si $\mathbf{Y} = \{Y_1, \dots, Y_n\}$ es una muestra aleatoria de variables con distribución de Poisson, entonces el espacio de muestreo del parámetro de interés será el intervalo $(0, \infty)$; por tanto utilizar la distribución uniforme como distribución previa no informativa no es conveniente. Ahora, la información de Fisher para la distribución conjunta es $I(\theta) = n/\theta$ puesto que

$$\log p(\mathbf{Y} | \theta) = -n\theta + \log(\theta) \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n \log(y_i!)$$

y

$$\frac{\partial^2 \log p(\mathbf{Y} | \theta)}{\partial \theta^2} = -\frac{\sum_{i=1}^n y_i}{\theta^2}$$

Por lo tanto al calcular la esperanza, y por consiguiente la información de Fisher, se tiene que

$$I(\theta) = -E \left[\frac{\partial^2 \log p(\mathbf{Y} | \theta)}{\partial \theta^2} \right] = \frac{\sum_{i=1}^n E(y_i)}{\theta^2} = \frac{n}{\theta}$$

Es decir, la distribución previa no informativa para el parámetro de interés es proporcional a $\theta^{-1/2}$. En términos de la distribución posterior para el parámetro de interés, se tiene que

$$p(\theta | Y) \propto p(Y | \theta)p(\theta) \propto e^{-n\theta} \theta^{\sum_{i=1}^n y_i} \theta^{-1/2} = e^{-n\theta} \theta^{\sum_{i=1}^n y_i - 1/2}$$

Por tanto, la distribución de $\theta | \mathbf{Y}$ es $Gamma(\sum_{i=1}^n y_i + 1/2, n)$. Por construcción, esta distribución no está alterada ni influenciada por la distribución previa pues la misma es no informativa.

Ejemplo 2.4. Suponga que $\mathbf{Y} = \{Y_1, \dots, Y_n\}$ es una muestra aleatoria con distribución normal de parámetros $(\theta, \sigma^2)'$. Se puede verificar que la matriz de información de Fisher para el vector de parámetros está dada por

$$\begin{pmatrix} \frac{n}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2\sigma^4} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

cuyo determinante está dado por $\frac{n^2}{2\sigma^6}$. Por lo tanto, la distribución a previa no informativa de Jeffreys está dada por

$$p(\theta, \sigma^2) \propto 1/\sigma^3 \quad (2.24)$$

2.2. Pruebas de hipótesis

A excepción del juzgamiento de hipótesis, las inferencias que hacen los estadísticos bayesianos, acerca de poblaciones normales, son muy similares a las que los estadísticos de la tradición frecuentista, de Neyman y Pearson, hacen. Consideremos la siguiente situación.

Un instrumento mide la posición de un objeto con un determinado error. Éste error está distribuido de manera uniforme en el intervalo $(-1\text{cm}, 1\text{cm})$. Supongamos que el instrumento midió la posición de un objeto en $+0.9999\text{cm}$ del origen. Planteamos la siguiente hipótesis nula, **H: La posición real del objeto es exactamente el origen**.

Imagine que planteamos este problema de inferencia estadística a dos estadísticos, uno frecuentista clásico y el otro acérrimo bayesiano.

- *Razonamiento del frecuentista*: si la hipótesis nula es verdadera, ha ocurrido un evento con una probabilidad (a dos colas) de ocurrencia de 0.0001 o menos. Mediante un criterio razonable (nivel de significación), este es un evento muy raro y por lo tanto rechaza la hipótesis nula.
- *Razonamiento del bayesiano*: dada una observación, la verosimilitud asociada con la posición del objeto en el intervalo -0.0001 y $+1.9999$ es la misma, 0.5. Fuera de esos límites la verosimilitud es nula. Ahora, el origen está dentro de la región en donde la verosimilitud es máxima; por lo tanto sea cual sea la distribución a previa asociada al parámetro de posición, la distribución posterior tomara el valor cero en cualquier lugar fuera del intervalo -0.0001 y $+1.9999$. Así, con la observación disponible, no hay evidencia para el rechazo de la hipótesis nula.

Bajo esta paradoja, [Brewer \(2002\)](#) sugiere que ambos estadísticos tienen razón, pero a la vez están equivocados. El frecuentista tiene razón en afirmar que, con la evidencia disponible, ha ocurrido un evento extraordinariamente extraño o que la hipótesis nula es falsa. El bayesiano tiene razón en argumentar que, en términos de la situación, no hay evidencia en contra de la hipótesis nula. Esta paradoja se presenta porque los bayesianos tienden a trabajar dentro de la situación que ellos creen que existe y la lógica bayesiana se mueve en ese marco de referencia. Los bayesianos hacen las inferencias en términos de la verosimilitud de los eventos observados, mientras que los frecuentistas hacen inferencias en términos de eventos que ni siquiera han ocurrido. .

2.2.1. Factor de Bayes

El juzgamiento de hipótesis del enfoque frecuentista se puede efectuar en el ámbito Bayesiano por medio del contraste entre dos modelos. Suponiendo que existen dos modelos $M1$ y $M2$ candidatos para \mathbf{Y} , se define el *Factor de Bayes* en favor del modelo $M1$ como la razón de las densidades marginales de los datos

para los dos modelos. Es posible demostrar que este factor es equivalente a la siguiente expresión:

$$FB = \frac{p(\mathbf{Y} | M1)}{p(\mathbf{Y} | M2)} = \frac{Pr(M1 | \mathbf{Y})/Pr(M2 | \mathbf{Y})}{Pr(M1)/Pr(M2)} \quad (2.25)$$

Para evaluar esta última expresión es necesario recurrir a la densidad previa y posterior del parámetro de interés, asumiendo que los modelos están parametrizados por éstos. Se puede ver que cuando los modelos $M1$ y $M2$ tienen la misma distribución previa, entonces el factor de Bayes se reduce a la razón de densidad posterior de los dos modelos. Adicionalmente este factor sólo está definido cuando la integral de la densidad marginal de \mathbf{Y} bajo cada modelo converge. En la expresión (2.25) se ve claro que valores grandes del factor muestran evidencia a favor del modelo $M1$; valores menores de 1, a favor del modelo $M2$; mientras que valores cercanos a 1 no muestran evidencias claras hacia ninguno de los dos modelos.

En Gelman et al. (1995) se presenta el siguiente ejemplo sencillo sobre la presencia o ausencia de la enfermedad de la hemofilia, una enfermedad genética especialmente grave en las mujeres. Para una mujer quien tiene un hermano portador del gen, el parámetro θ describe la presencia o ausencia del gen en ella, y toma valores de 1 (presencia del gen) y 0 (ausencia del gen). La distribución previa del parámetro es $Pr(\theta = 1) = Pr(\theta = 0) = 0.5$. El objetivo es evaluar el sistema $M_1 : \theta = 1$ y $M_2 : \theta = 0$, con base en el hecho de que ella tiene dos hijos ambos no portadores del gen. De esta forma, el factor de Bayes se expresa como:

$$FB = \frac{p(y_1 = 0, y_2 = 0 | \theta = 1)}{p(y_1 = 0, y_2 = 0 | \theta = 0)} = \frac{0.25}{1} = 0.25$$

De donde se evidencia mayor apoyo a la hipótesis $\theta = 0$.

2.2.2. Valor- p Bayesiano

En la inferencia clásica, se define el valor- p como la probabilidad de que la estadística de prueba tome valores más extremos a los observados, y se compara con el nivel de significancia, previamente establecido, para tomar una decisión acerca de la hipótesis nula. En el ámbito Bayesiano, el valor- p se define como la probabilidad de que la estadística de prueba T calculada sobre los datos replicados y^{rep} sean más extremos al observado, y la probabilidad se toma sobre la distribución posterior del parámetro θ y la distribución predictiva posterior de y^{rep} . Específicamente, queda determinado por la siguiente expresión:

$$p_B = \int \int_{T(y^{rep}) \geq T(y)} p(y^{rep} | \theta) p(\theta | y) dy^{rep} d\theta$$

A diferencia del valor- p clásico, donde solo valores pequeños muestran evidencia en contra de la hipótesis nula, un valor- p Bayesiano extremo (menor a 0.01 o mayor a 0.99) sugiere que los valores observados difícilmente pueden ser replicados si el modelo fuera verdadero.

2.3. Criterios de información

Los criterios de información constituyen una herramienta muy importante en el modelamiento estadístico, pues contribuyen a la selección de modelos de manera simple. Existen una variedad de estos criterios, a continuación se describen los dos criterios más comunes en el análisis bayesiano.

2.3.1. Criterio DIC

El criterio de información de *devianza* (DIC, por sus iniciales en inglés) es una generalización del popular criterio AIC para los modelos jerárquicos, y se basa en el concepto de la devianza que se define como

$$D(y, \boldsymbol{\theta}) = -2 * \log(p(y|\boldsymbol{\theta})) \quad (2.26)$$

cuya media posterior es una medida usual del ajuste del modelo. [Dempster \(1974\)](#) sugirió graficar la distribución posterior de la devianza para observar el ajuste del modelo a los datos. Una estimación de esta media posterior se basa en simulación de M valores $\boldsymbol{\theta}^1, \dots, \boldsymbol{\theta}^M$ de la distribución posterior de $\boldsymbol{\theta}$, y está dada por

$$\hat{E}_D = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M D(y, \boldsymbol{\theta}^m)$$

El DIC se define como

$$DIC = \hat{E}_D + p_D$$

Donde p_D es el número efectivo de parámetros. Nótese que en la anterior formulación, el DIC se puede descomponer en dos partes: la parte de la bondad de ajuste del modelo, medido a través de E_D , y la parte que mide la complejidad del modelo p_D . Otra formulación equivalente del DIC se obtiene teniendo en cuenta que

$$p_D = \hat{E}_D - \hat{D}$$

Donde $\hat{D} = -2 \log(p(y|\hat{\theta}))$ con $\hat{\theta}$ denotando la mediposterior de θ ; es decir, \hat{D} es la estimación de la devianza usando $\hat{\theta}$, y p_D se puede ver como la mediposterior de la devianza menos la devianza de las medias posterior ([Spiegelhalter et al., 2002](#)). De esta forma, el DIC también se puede escribir como

$$DIC = \hat{D} + 2p_D$$

Interpretación de DIC: El modelo con el menor DIC es considerado como el modelo que mejor predice un conjunto de datos con la misma estructura que los datos observados. Al respecto se deben tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- El DIC puede ser negativo puesto que $p(y|\theta)$ puede tomar valores mayores a 1 asociado a una devianza pequeña.
- p_D , y por consiguiente el DIC, no es invariante a parametrizaciones del modelo. Se sugiere en la práctica usar parametrizaciones que conducen a la normalidad en la distribución posterior.

2.3.2. Criterios AIC y BIC

El criterio de información de Akaike (AIC) fue formalmente presentado por [Akaike \(1974\)](#). Este criterio mide la pérdida de información al ajustar un modelo a un conjunto de datos; por esto, se buscan modelos que arrojen valores pequeños de AIC. Posteriormente ([Cavanaugh, 1997](#)) introdujo el factor de corrección para evitar que el AIC escoja modelos con demasiados parámetros en situaciones de tamaño de muestra pequeño.

Por otro lado, el criterio de información bayesiano BIC, también conocido como el criterio de Schwarz ([Schwarz, 1978](#)), también está formulado en términos de la función de verosimilitud del modelo y del número de parámetros. La expresión de estos criterios es como sigue:

$$AIC = -2 \log(p(y|\hat{\theta})) + 2p$$

$$AIC_c = AIC + \frac{2p^2 + 2p}{n - p - 1}$$

$$BIC = -2 \log(p(y|\hat{\theta})) + p \log(n)$$

Donde p es el número de parámetros en el modelo y n el número de datos observados. Cabe resaltar que en el criterio BIC hay una mayor penalización por el número excesivo de parámetros que en el criterio AIC, y en la práctica se prefieren los modelos con un BIC menor.

Se debe recalcar que los dos criterios tienen diferentes enfoques, el criterio BIC se enfoca en identificar el modelo verdadero, mientras que el criterio DIC enfoca en encontrar el modelo con mejor capacidad de predicción.

Capítulo 3

Modelos uniparamétricos

Los modelos que están definidos en términos de un solo parámetro que pertenece al conjunto de los números reales se definen como modelos *uniparamétricos*. Este capítulo estudia modelos, discretos y continuos, que son comunes de implementar en la práctica. Dado que todos ellos son inducidos por familias de probabilidad conjugadas, entonces las estimaciones posteriores para los parámetros pueden hallarse sin necesidad de sofisticaciones computacionales. Es decir, con el uso de una simple calculadora de bolsillo, es posible realizar inferencia bayesiana propiamente dicha. Por lo tanto, en este capítulo, será menor el uso de software estadístico. Sin embargo, para cada modelo se incluye la sintaxis de programación en R y en STAN junto con ejemplos prácticos que permiten la familiarización e interiorización del ambiente computacional de este software que será indispensable en el desarrollo de capítulos posteriores.

3.1. Modelo Bernoulli

Suponga que Y es una variable aleatoria con distribución Bernoulli dada por:

$$p(Y \mid \theta) = \theta^y (1 - \theta)^{1-y} I_{\{0,1\}}(y) \quad (3.1)$$

Como el parámetro θ está restringido al espacio $\Theta = [0, 1]$, entonces es posible formular varias opciones para la distribución previa del parámetro. En particular, la distribución uniforme restringida al intervalo $[0, 1]$ o la distribución Beta parecen ser buenas opciones. Puesto que la distribución uniforme es un caso particular de la distribución Beta, entonces se iniciará con ésta. Por lo tanto la distribución previa del parámetro θ estará dada por

$$p(\theta \mid \alpha, \beta) = \frac{1}{\text{Beta}(\alpha, \beta)} \theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1} I_{[0,1]}(\theta). \quad (3.2)$$

Bajo este marco de referencia se tienen los siguientes resultados

Resultado 3.1. *La distribución posterior del parámetro θ sigue una distribución*

$$\theta \mid Y \sim \text{Beta}(y + \alpha, \beta - y + 1)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} p(\theta \mid Y) &\propto p(Y \mid \theta) p(\theta \mid \alpha, \beta) \\ &= \frac{I_{\{0,1\}}(y)}{\text{Beta}(\alpha, \beta)} \theta^y \theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1} (1-\theta)^{1-y} I_{[0,1]}(\theta) \\ &\propto \theta^{y+\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-y+1-1} I_{[0,1]}(\theta) \end{aligned}$$

Por lo tanto, factorizando convenientemente, se encuentra una expresión idéntica a la función de distribución de una variable aleatoria con distribución $\text{Beta}(y + \alpha, \beta - y + 1)$. \square

Del anterior resultado, podemos ver que la familia de distribuciones Beta es conjugada con respecto a la familia de distribuciones Bernoulli. Ahora consideremos cuál sería la distribución previa no informativa de Jeffreys para el parámetro θ . De acuerdo a la definición 2.2, se tiene que

$$p(\theta) \propto I(\theta)^{1/2}$$

En donde $I(\theta)$ es la información de Fisher del parámetro θ , que en este caso está dada por

$$\begin{aligned} I(\theta) &= -E \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log p(\mathbf{Y} \mid \theta) \right\} \\ &= -E \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \{Y \log \theta + (1-Y) \log(1-\theta)\} \right\} \\ &= E \left\{ \frac{Y}{\theta^2} + \frac{1-Y}{(1-\theta)^2} \right\} \\ &= \frac{1}{\theta(1-\theta)} \end{aligned}$$

De esta forma, la distribución previa no informativa de Jeffreys debe ser proporcional a $\theta^{-1/2}(1-\theta)^{-1/2}$, que asimismo corresponde a la distribución $\text{Beta}(1/2, 1/2)$, cuya función de densidad se muestra en la figura 3.1 la cual asigna iguales pesos a los valores extremos del parámetro de interés y su característica de ser no informativa se representa en la simetría de la función alrededor del valor 0.5.

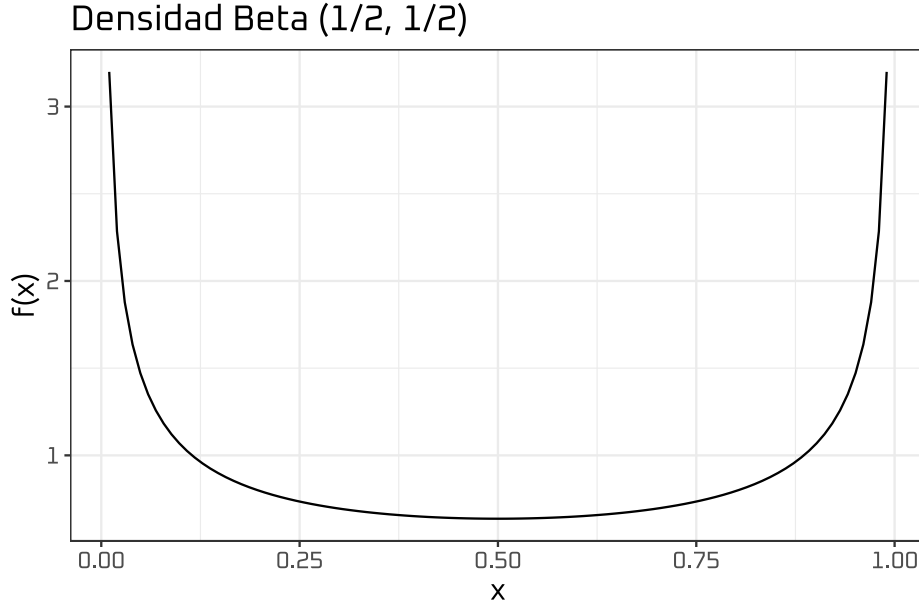


Figura 3.1: Distribución previa no informativa de Jeffreys para el parámetro de una distribución Bernoulli

Resultado 3.2. *La distribución predictiva previa para una observación y está dada por*

$$p(Y) = \frac{\text{Beta}(y + \alpha, \beta - y + 1)}{\text{Beta}(\alpha, \beta)} I_{\{0,1\}}(y) \quad (3.3)$$

La cual define una auténtica función de densidad de probabilidad continua.

Demostración. De la definición de función de distribución predictiva se tiene que

$$\begin{aligned} p(Y) &= \int p(Y | \theta) p(\theta | \alpha, \beta) d\theta \\ &= \int_0^1 \theta^y (1 - \theta)^{1-y} I_{\{0,1\}}(y) \frac{1}{\text{Beta}(\alpha, \beta)} \theta^{\alpha-1} (1 - \theta)^{\beta-1} d\theta \\ &= \frac{\text{Beta}(y + \alpha, \beta - y + 1)}{\text{Beta}(\alpha, \beta)} I_{\{0,1\}}(y) \int_0^1 \frac{\theta^{y+\alpha-1} (1 - \theta)^{\beta-y+1-1}}{\text{Beta}(y + \alpha, \beta - y + 1)} d\theta \\ &= \frac{\text{Beta}(y + \alpha, \beta - y + 1)}{\text{Beta}(\alpha, \beta)} I_{\{0,1\}}(y) \end{aligned}$$

Nótese que en la anterior expresión, la integral al lado derecho de la tercera igualdad es igual a la unidad, puesto que la expresión matemática dentro de

la integral corresponde a la función de densidad de una variable aleatoria con distribución *Beta*, que tiene rango en el intervalo $(0, 1)$. Por otro lado se deben verificar las dos condiciones de función de densidad. Es decir

1. $p(Y) > 0 \forall y \in Y$. Esta condición se tiene trivialmente puesto que la función matemática *Beta* siempre toma valores positivos.
2. $\int p(y) dx = 1$. En este caso, esta función es discreta definida en el conjunto $\{0, 1\}$. Por lo tanto esta condición es equivalente a

$$\sum_{y \in \{0,1\}} P(Y = y) = \sum_{y \in \{0,1\}} \frac{Beta(y + \alpha, \beta - y + 1)}{Beta(\alpha, \beta)} = 1$$

Lo cual se verifica fácilmente teniendo en cuenta las propiedades de la función matemática *Beta* y de la función matemática *Gamma*. \square

La distribución predictiva dada en (3.3) está basada únicamente en la distribución previa del parámetro θ . Una vez observada la variable Y se puede pensar en actualizar la distribución predictiva basando la inferencia en la distribución posterior del parámetro; esta distribución se da en el siguiente resultado.

Resultado 3.3. *Después de la recolección de los datos, la distribución predictiva posterior para una nueva observación \tilde{y} está dada por*

$$p(\tilde{y} | Y) = \frac{Beta(\tilde{y} + y + \alpha, \beta - \tilde{y} - y + 2)}{Beta(y + \alpha, \beta - y + 1)} I_{\{0,1\}}(\tilde{y}), \quad (3.4)$$

Demostración. De la definición de función de distribución predictiva se tiene que

$$\begin{aligned} p(\tilde{y} | Y) &= \int p(\tilde{y} | \theta) p(\theta | Y) d\theta \\ &= \int_0^1 \theta^{\tilde{y}} (1 - \theta)^{1-\tilde{y}} I_{\{0,1\}}(\tilde{y}) \frac{\theta^{y+\alpha-1} (1 - \theta)^{\beta-y+1-1}}{Beta(y + \alpha, \beta - y + 1)} d\theta \\ &= \frac{Beta(\tilde{y} + y + \alpha, \beta - \tilde{y} - y + 2)}{Beta(y + \alpha, \beta - y + 1)} I_{\{0,1\}}(\tilde{y}) \\ &\quad \times \int_0^1 \frac{\theta^{\tilde{y}+y+\alpha-1} (1 - \theta)^{\beta-\tilde{y}-y+2-1}}{Beta(\tilde{y} + y + \alpha, \beta - \tilde{y} - y + 2)} d\theta \\ &= \frac{Beta(\tilde{y} + y + \alpha, \beta - \tilde{y} - y + 2)}{Beta(y + \alpha, \beta - y + 1)} I_{\{0,1\}}(\tilde{y}) \end{aligned}$$

\square

En la práctica rara vez se observa la realización de una única variable aleatoria Bernoulli Y , sino una muestra de variables aleatorias Y_1, \dots, Y_n . En este caso, la distribución posterior del parámetro θ está dada en el siguiente resultado.

Resultado 3.4. *Cuando se tiene una muestra aleatoria Y_1, \dots, Y_n de variables con distribución Bernoulli de parámetro θ , entonces la distribución posterior del parámetro de interés es*

$$\theta \mid Y_1, \dots, Y_n \sim \text{Beta} \left(\sum_{i=1}^n y_i + \alpha, \beta - \sum_{i=1}^n y_i + n \right)$$

Ejemplo 3.1. Es común en muchos países del mundo que se presenten encuestas de opinión electoral unas semanas antes de las elecciones presidenciales. Dentro de este tipo de encuestas se acostumbra a indagar acerca del favoritismo de los candidatos involucrados en la contienda electoral. Suponga que el candidato presidencial A está interesado en conocer su intención de voto previa a las elecciones. Para esto, él contrata a una firma encuestadora para la realización de una encuesta entre la población votante. El resultado de este estudio puede hacer cambiar o afirmar las estrategias publicitarias y la redefinición de la campaña electoral. La firma encuestadora decide implementar una estrategia de muestreo con un tamaño de muestra de doce mil personas. A cada respondiente se le realiza la siguiente pregunta:

Si las elecciones presidenciales fueran mañana. ¿Usted votaría por el candidato A?

Las respuestas a esta pregunta son realizaciones de una muestra aleatoria de doce mil variables con densidad Bernoulli. Los resultados del estudio arrojan que 6360 personas de las personas entrevistadas, es decir un 53 %, votarían por el suscrito candidato. Técnicamente se debe analizar esta cifra puesto que las implicaciones de ganar en una primera vuelta son grandes en el sentido económico, logístico y administrativo. Claramente, el dato 53 % asegura una ventaja dentro de la muestra de doce mil personas. Sin embargo, es necesario realizar un estudio más profundo acerca de la caracterización estructural de la intención de voto del candidato en el electorado.

Con base en lo anteriormente expuesto, se decide utilizar la inferencia bayesiana puesto que existe información previa de un estudio anterior, contratado por el mismo candidato unos meses atrás en donde se entrevistaron a mil personas, con un favoritismo que estaba alrededor del 35 por ciento. Esta situación conlleva a la utilización de la metodología bayesiana que incorpora la información pasada acerca del mismo fenómeno.

El estadístico de la firma encuestadora decide utilizar una distribución previa Beta, definiendo los parámetros de la distribución previa como α igual al número de votantes a favor y β igual al número de votantes en contra. Es decir, $\text{Beta}(\alpha = 350, \beta = 650)$. Por lo anterior, la distribución posterior del parámetro de interés, que representa la probabilidad de éxito en las elecciones presidenciales, es $\text{Beta}(6360 + 350, 650 - 6360 + 12000) = \text{Beta}(6710, 6290)$. Por lo tanto, utilizando la distribución posterior, se estima que la intención de voto por el candidato es de $\frac{6710}{6710+6290} = \frac{6710}{13000} = 0.516$ y este valor equivale a la media de la

distribución posterior.

Sin embargo, si no se tuviese información previa como la suministrada por el estudio de meses anteriores, el análisis bayesiano sugeriría trabajar con una distribución previa no informativa, que en este caso, correspondería a una $Beta(\alpha = 0.5, \beta = 0.5)$. siguiendo el mismo análisis, se tiene que la distribución posterior es $Beta(6360.5, 5640.5)$. Finalmente, se estimaría que la intención de voto por el candidato es de $\frac{6350.5}{12001} = 0.529$.

La figuras 3.2 muestra el comportamiento de las distribuciones previas y posteriores en ambos escenarios. Nótese que la distribución no informativa influye muy poco en el comportamiento de la distribución posterior.

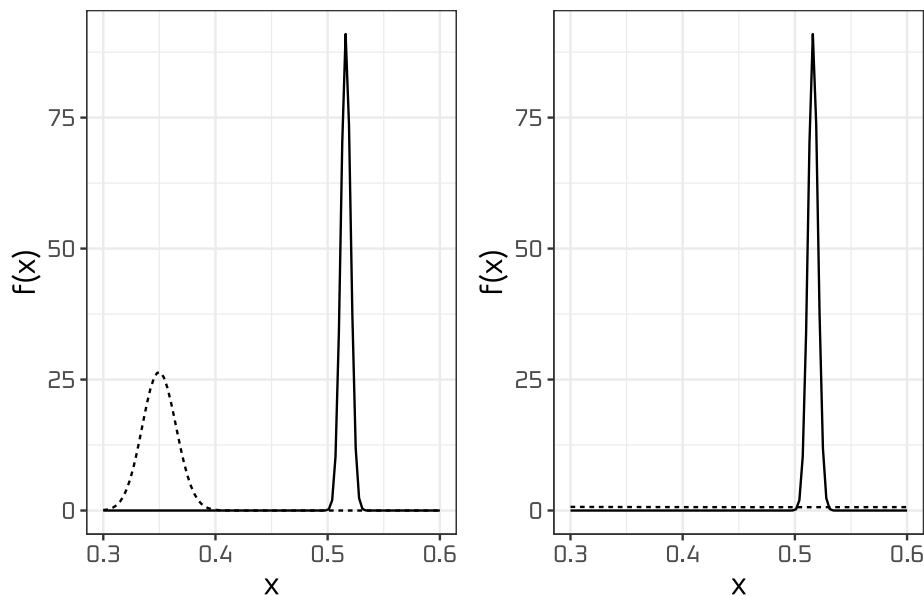


Figura 3.2: Distribuciones previas (línea punteada) y posteriores (línea sólida) para el ejemplo de las encuestas electorales.

Utilizando el siguiente código en R, es posible conocer los intervalos de credibilidad para las dos distribuciones posteriores. Además, es posible concluir que, en ambos escenarios, el candidato aventaja significativamente a sus contrincantes y, salvo algún cambio drástico en el comportamiento del electorado, ganará las elecciones. Lo anterior se deduce puesto que el intervalo de credibilidad al 95 % no contiene ningún valor menor a 0.5

```
qbeta(c(0.025, 0.975), 6710, 6290)
```

```
## [1] 0.5075614 0.5247415
```

```
qbeta(c(0.025, 0.975), 6350.5, 5640.5)
```

```
## [1] 0.5206678 0.5385340
```

Por otro lado, el siguiente código en STAN permite obtener el mismo tipo de inferencia creando cuatro cadenas cuya distribución de probabilidad coincide con la distribución posterior del ejemplo.

```
Bernoulli <- "
data {
  int<lower=0> n;
  int y[n];
}
parameters {
  real<lower=0, upper=1> theta;
}
model {
  y ~ bernoulli(theta);
  theta ~ beta(350, 650);
}

"

library(rstan)
options(mc.cores = parallel::detectCores())

n <- 12000
s <- 6350
y <- c(rep(1, s), rep(0, n - s))
sample_data <- list(n = n, y = y)

Berfit <- stan(model_code = Bernoulli,
               data = sample_data, verbose = FALSE)
```

La siguiente salida de STAN permite conocer la estimación bayesiana posterior y los límites del intervalo de credibilidad al 95 %.

```
print(Berfit, pars = "theta",
      digits = 4, probs = c(0.025, 0.975))

## Inference for Stan model: 62d7c91114fcc6227deb68f6059b2b09.
## 4 chains, each with iter=2000; warmup=1000; thin=1;
## post-warmup draws per chain=1000, total post-warmup draws=4000.
##
##           mean se_mean      sd   2.5%  97.5% n_eff   Rhat
## theta 0.5152    1e-04 0.0046 0.5059 0.5242  1258 1.0018
##
```

```
## Samples were drawn using NUTS(diag_e) at Sat Jun 12 11:55:22 2021.
## For each parameter, n_eff is a crude measure of effective sample size,
## and Rhat is the potential scale reduction factor on split chains (at
## convergence, Rhat=1).
```

La figura 3.3 muestra la distribución posterior para este ejemplo, junto con la estimación puntual, correspondiente a la media.

```
bayesplot::mcmc_areas(Berfit, pars = "theta",
                      prob = 0.95)
```

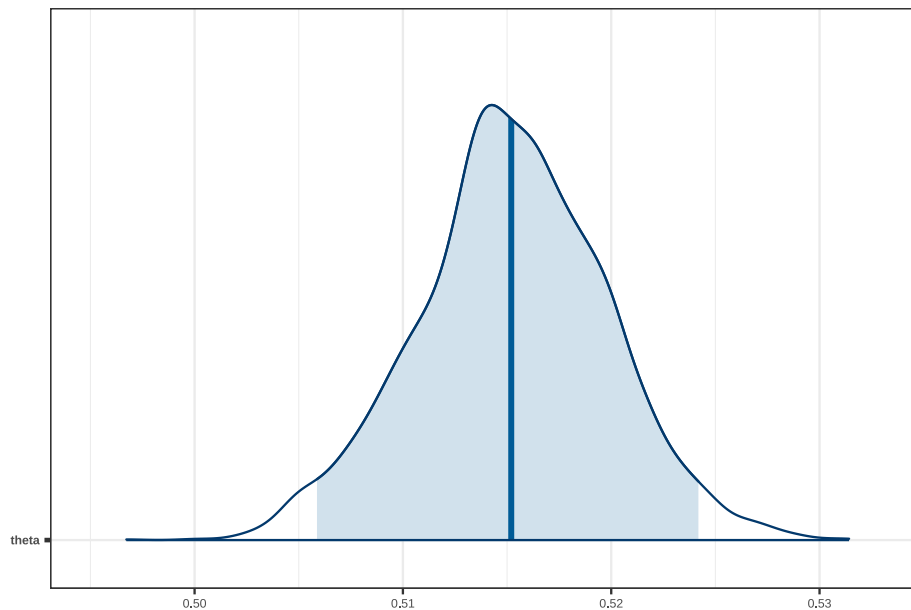


Figura 3.3: Distribución posterior.

3.2. Modelo Binomial

Cuando se dispone de una muestra aleatoria de variables con distribución Bernoulli Y_1, \dots, Y_n , la inferencia bayesiana se puede llevar a cabo usando la distribución Binomial, puesto que es bien sabido que la suma de variables aleatorias Bernoulli

$$S = \sum_{i=1}^n Y_i$$

sigue una distribución Binomial. Es decir:

$$p(S | \theta) = \binom{n}{s} \theta^s (1 - \theta)^{n-s} I_{\{0,1,\dots,n\}}(s), \quad (3.5)$$

Nótese que la distribución binomial es un caso general para la distribución Bernoulli, cuando $n = 1$. Entonces, así como en la distribución Bernoulli, el parámetro θ está restringido al espacio $\Theta = [0, 1]$. Luego, es admisible proponer que θ siga una distribución Beta. Por tanto la distribución previa del parámetro θ está dada por la expresión (3.2). Bajo este marco de referencia se tienen los siguientes resultados

Resultado 3.5. *La distribución posterior del parámetro θ sigue una distribución*

$$\theta | S \sim \text{Beta}(s + \alpha, \beta - s + n)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} p(\theta | S) &\propto p(S | \theta) p(\theta | \alpha, \beta) \\ &= \frac{\binom{n}{s} I_{\{0,1,\dots,n\}}(s)}{\text{Beta}(\alpha, \beta)} \theta^s \theta^{\alpha-1} (1 - \theta)^{\beta-1} (1 - \theta)^{n-s} I_{[0,1]}(\theta) \\ &\propto \theta^{s+\alpha-1} (1 - \theta)^{\beta-s+n-1} I_{[0,1]}(\theta) \end{aligned}$$

Por lo tanto, factorizando convenientemente, se llega a una expresión idéntica a la función de distribución de una variable aleatoria con distribución $\text{Beta}(s + \alpha, \beta - s + n)$. \square

Del resultado anterior podemos ver que el estimador bayesiano de θ está dada por la esperanza de la distribución posterior, dada por

$$\hat{\theta}_B = \frac{s + \alpha}{n + \alpha + \beta} \quad (3.6)$$

En la práctica, se acostumbra a escoger los hiperparámetros α y β de tal forma que correspondan respectivamente al número de éxitos y fracasos obtenidos en datos que pudieron ser recolectados previamente. De esta forma, $\hat{\theta}_P = \alpha/(\alpha + \beta)$ corresponde a la estimación previa del parámetro θ . Por otro lado, el estimador clásico de θ está dado por $\hat{\theta}_C = s/n$. Entonces es posible notar que el estimador bayesiano de θ en (3.6) de alguna forma combina el estimador clásico con el estimador previo. Más aún, se puede ver que $\hat{\theta}_B$ se puede escribir como un promedio ponderado entre la estimación clásica y la estimación previa. Puesto que

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_B &= \frac{s + \alpha}{n + \alpha + \beta} = \frac{s}{n + \alpha + \beta} + \frac{\alpha}{n + \alpha + \beta} \\
&= \frac{n}{n + \alpha + \beta} \frac{s}{n} + \frac{\alpha + \beta}{n + \alpha + \beta} \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \\
&= \frac{n}{n + \alpha + \beta} \hat{\theta}_C + \frac{\alpha + \beta}{n + \alpha + \beta} \hat{\theta}_P
\end{aligned}$$

De esta forma, queda en evidencia que la estimación bayesiana de θ siempre será un valor intermedio entre la estimación clásica y la estimación previa. La figura 3.4 da una ilustración acerca de la anterior afirmación, en donde se puede observar que para una distribución previa concentrada en $2/7$ y una función de verosimilitud¹ con máximo en $8/10$, entonces la distribución posterior estará centrada en $10/17$; es decir, la estimación bayesiana se encuentra situada entre la estimación previa y la estimación clásica.

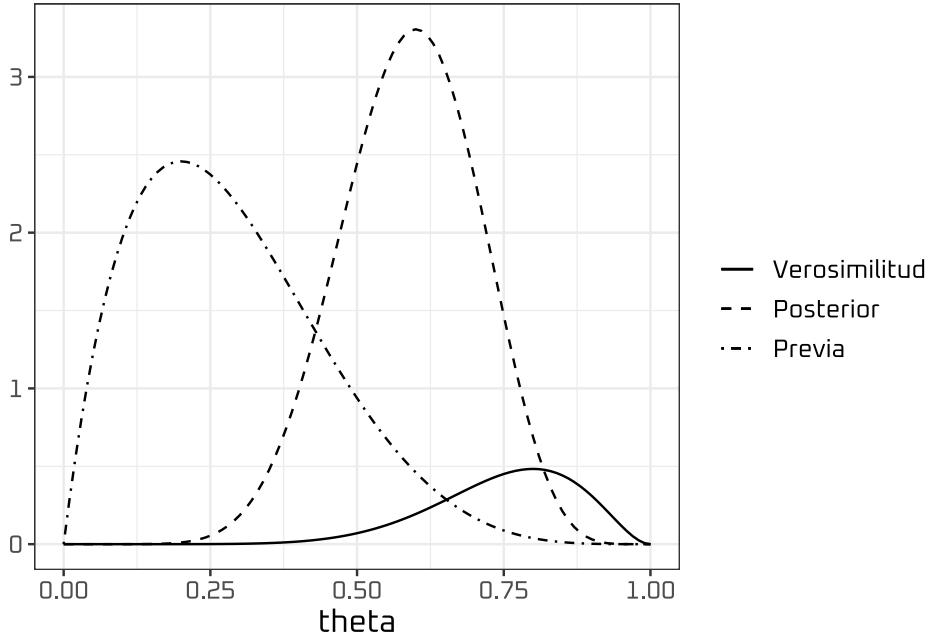


Figura 3.4: Funciones de verosimilitud, previa y posterior para $\alpha = 2$, $\beta = 5$, $s = 8$ y $n = 10$.

Por otro lado, entre más grande sea el tamaño muestral n , más cercano estará $\hat{\theta}_B$ de $\hat{\theta}_C$ o equivalentemente la función de densidad posterior de θ estará más concentrada en s/n ; mientras que entre mayor número de datos tenga la muestra

¹La función de verosimilitud es una función del parámetro y sólo se puede graficar una vez se hayan observado las realizaciones de la variable aleatoria.

de la distribución previa ($\alpha + \beta = \text{número de datos}$), más cercano estará $\hat{\theta}_B$ de $\hat{\theta}_P$ y la densidad posterior de θ estará más concentrada en $\alpha/(\alpha + \beta)$.

Para ilustrar lo anterior, suponga que la distribución previa de θ está parametrizada con $\alpha = \beta = 5$, es decir la estimación previa es 0.5, y suponga además que la estimación clásica es 0.33, pero el tamaño muestral n incrementa manteniendo constante la estimación clásica. En la figura 3.5 se muestra la estimación posterior de θ , es evidente que a medida que el tamaño muestral n aumenta, la estimación posterior se acerca más a la estimación clásica.

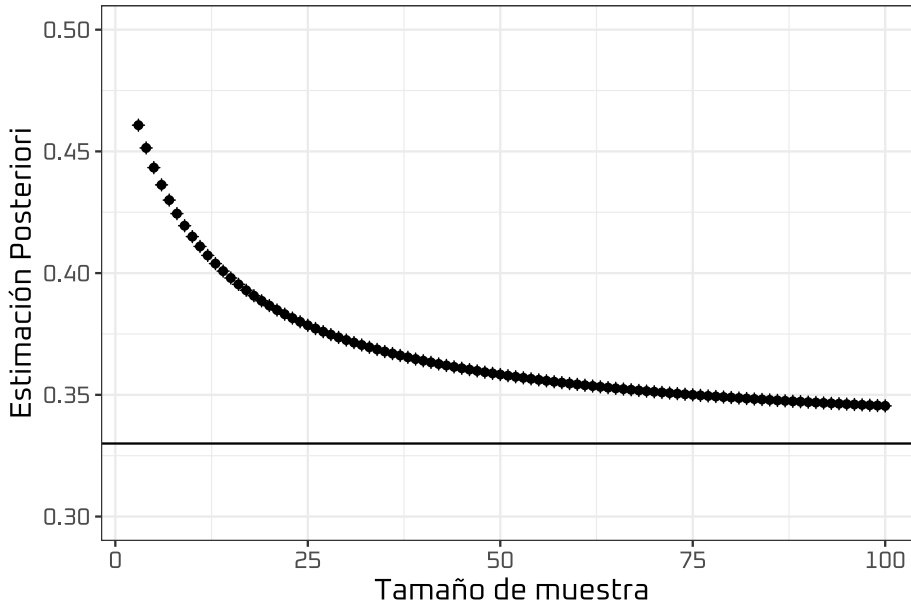


Figura 3.5: Estimación posterior de θ para diferentes valores de n y s con $\alpha = \beta = 5$.

Anteriormente, se comentó que se acostumbra a escoger los parámetros α y β que correspondan al número de éxitos y fracasos en la información previa. Sin embargo, la información previa puede no presentarse de esta forma. Por ejemplo, en algunas situaciones, la información previa puede proveer el valor de θ , es decir, el valor de $\hat{\theta}_P$, y el valor de la desviación estándar de la estimación (comúnmente conocido como el error estándar). Por ejemplo, suponga que $\hat{\theta}_P = 0.5$ con un error estándar de 0.1, entonces podemos encontrar los valores de α y β de las expresiones $\frac{\alpha}{\alpha + \beta} = 0.5$ y $\sqrt{\frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}} = 0.1$, de donde se tiene que $\alpha = 12$ y $\beta = 12$, y la distribución previa correspondiente $Beta(12, 12)$ tiene una esperanza de 0.05 y una desviación estándar de 0.1. Se puede ver que entre mayor sea la desviación estándar, menores resultan los valores de α y β , que conducen a una distribución previa menos informativa.

Ahora, se vio anteriormente que la distribución previa no informativa de Jeffreys corresponde a la distribución $Beta(1/2, 1/2)$, la cual conduce a la distribución posterior $Beta(s + 1/2, n - s + 1/2)$, que a su vez nos lleva al estimador

$$\hat{\theta}_B = \frac{s + 1/2}{n + 1} \quad (3.7)$$

La anterior expresión es comparable con el estimador clásico $\hat{\theta}_C = \frac{s}{n}$, en el sentido de que los dos son aplicables cuando no se dispone de ninguna información previa. Podemos observar que, aparte del alto grado de similitud que tienen los dos estimadores, es preferible usar el estimador (3.7) en situaciones donde el valor teórico de θ es muy pequeño, y como consecuencia $s = 0$ en la muestra. Por ejemplo, cuando θ representa el porcentaje de personas que están infectados con algún virus poco común. En estos casos, el estimador clásico $\hat{\theta}_C = 0$ sugiriendo que ningún porcentaje de la población está infectado, conclusión que puede ser errónea. Por otro lado, el estimador bayesiano $\hat{\theta}_B = \frac{0.5}{n+1}$ tiende a un porcentaje muy pequeño a medida que aumente el tamaño muestral n , pero nunca llega a ser nulo.

En el siguiente resultado, se encuentra la distribución predictiva previa para una variable binomial S .

Resultado 3.6. *La distribución predictiva previa para la observación particular de la suma de variables aleatorias Bernoulli, s , está dada por una distribución Beta-Binomial*

$$p(S) = \binom{n}{s} \frac{Beta(s + \alpha, \beta - s + n)}{Beta(\alpha, \beta)} I_{\{0,1,\dots,n\}}(s) \quad (3.8)$$

Demostración. De la definición de función de distribución predictiva previa se tiene que

$$\begin{aligned} p(S) &= \int p(S | \theta) p(\theta | \alpha, \beta) d\theta \\ &= \int_0^1 \binom{n}{s} \theta^s (1 - \theta)^{n-s} I_{\{0,1,\dots,n\}}(s) \frac{1}{Beta(\alpha, \beta)} \theta^{\alpha-1} (1 - \theta)^{\beta-1} d\theta \\ &= \binom{n}{s} \frac{Beta(s + \alpha, \beta - s + n)}{Beta(\alpha, \beta)} I_{\{0,1,\dots,n\}}(s) \\ &\quad \times \int_0^1 \frac{\theta^{s+\alpha-1} (1 - \theta)^{\beta-s+n-1}}{Beta(s + \alpha, \beta - s + n)} d\theta \\ &= \binom{n}{s} \frac{Beta(s + \alpha, \beta - s + n)}{Beta(\alpha, \beta)} I_{\{0,1,\dots,n\}}(s) \end{aligned}$$

□

Una vez observados los valores muestrales, podemos encontrar la distribución predictiva posterior para una nueva variable binomial \tilde{S} en una muestra de tamaño \tilde{n} . Esta distribución se encuentra en el siguiente resultado.

Resultado 3.7. *Después de la recolección de los datos y_1, \dots, y_n , la distribución predictiva posterior para una nueva variable \tilde{S} en una muestra del tamaño \tilde{n} está dada por*

$$p(\tilde{s} | S) = \binom{\tilde{n}}{\tilde{s}} \frac{\text{Beta}(\tilde{s} + s + \alpha, \beta - \tilde{s} - s + n + \tilde{n})}{\text{Beta}(s + \alpha, \beta - s + n)} I_{\{0,1,\dots,\tilde{n}\}}(\tilde{s}), \quad (3.9)$$

Demostración. De la definición de función de distribución predictiva se tiene que

$$\begin{aligned} p(\tilde{s} | S) &= \int p(\tilde{s} | \theta) p(\theta | S) d\theta \\ &= \int_0^1 \binom{\tilde{n}}{\tilde{s}} \theta^{\tilde{s}} (1 - \theta)^{\tilde{n} - \tilde{s}} I_{\{0,1,\dots,\tilde{n}\}}(\tilde{s}) \frac{\theta^{s+\alpha-1} (1 - \theta)^{\beta-s+n-1}}{\text{Beta}(s + \alpha, \beta - s + n)} d\theta \\ &= \binom{\tilde{n}}{\tilde{s}} \frac{\text{Beta}(\tilde{s} + s + \alpha, \beta - \tilde{s} - s + n + \tilde{n})}{\text{Beta}(s + \alpha, \beta - s + n)} I_{\{0,1,\dots,\tilde{n}\}}(\tilde{s}) \\ &\quad \times \int_0^1 \frac{\theta^{\tilde{s}+s+\alpha-1} (1 - \theta)^{\beta-\tilde{s}-s+n+\tilde{n}-1}}{\text{Beta}(\tilde{s} + s + \alpha, \beta - \tilde{s} - s + n + \tilde{n})} d\theta \\ &= \binom{\tilde{n}}{\tilde{s}} \frac{\text{Beta}(\tilde{s} + s + \alpha, \beta - \tilde{s} - s + n + \tilde{n})}{\text{Beta}(s + \alpha, \beta - s + n)} I_{\{0,1,\dots,\tilde{n}\}}(\tilde{s}) \end{aligned}$$

□

En la anterior distribución predictiva, se necesita calcular funciones Beta. Cuando los tamaños muestrales n , \tilde{n} y/o los parámetros de la distribución previa α y β son muy grandes, R puede presentar problemas numéricos al momento de calcular directamente estas funciones. Por ejemplo, supongamos que $n = 1000$, $s = 650$, $\alpha = 200$, $\beta = 300$ y $\tilde{n} = 800$, de esta forma, los posibles valores para \tilde{s} son $0, 1, \dots, 800$, y se tiene que la probabilidad de que \tilde{s} tome el valor 500 está dada por

$$Pr(\tilde{s} = 500 | S) = \binom{800}{500} \frac{\text{Beta}(1350, 950)}{\text{Beta}(850, 650)} \quad (3.10)$$

y desafortunadamente, en R se presenta error al intentar ejecutar `beta(1350,950)` o `beta(850,650)`.

```
beta(1350, 950)
```

```
## [1] 0
```

```
beta(850, 650)
```

```
## [1] 0
```

Por ende, es posible plantear la siguiente solución numérica cuando se quiere calcular la función predictiva (3.9) en muestras grandes. El problema central es el cómputo de $\frac{Beta(a,b)}{Beta(c,d)}$ con $a \geq c$ y $b \geq d$, valores enteros. Podemos ver que

$$\begin{aligned}
 & \frac{Beta(a,b)}{Beta(c,d)} \\
 &= \frac{(a-1)!(b-1)!(c+d-1)!}{(c-1)!(d-1)!(a+b-1)!} \\
 &= \frac{(a-1)(a-2)\cdots(a-(a-c))(b-1)(b-2)\cdots(b-(b-d))}{(a+b-1)(a+b-2)\cdots(a+b-(a+b-c-d))} \\
 &= \frac{a^{a-c}(1-\frac{1}{a})(1-\frac{2}{a})\cdots(1-\frac{a-c}{a})b^{b-d}(1-\frac{1}{b})(1-\frac{2}{b})\cdots(1-\frac{b-d}{b})}{(a+b)^{a+b-c-d}(1-\frac{1}{a+b})(1-\frac{2}{a+b})\cdots(1-\frac{a+b-c-d}{a+b})} \\
 &= \underbrace{\left(\frac{a}{a+b}\right)^{a-c}}_{t_1} \underbrace{\left(\frac{b}{a+b}\right)^{b-d}}_{t_2} \underbrace{\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{2}{a}\right)\cdots\left(1-\frac{a-c}{a}\right)}_{t_3} \\
 & \quad \underbrace{\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{2}{b}\right)\cdots\left(1-\frac{b-d}{b}\right)}_{t_4} \underbrace{\left(1-\frac{1}{a+b}\right)\left(1-\frac{2}{a+b}\right)\cdots\left(1-\frac{a+b-c-d}{a+b}\right)}_{t_5}
 \end{aligned}$$

Calculando separadamente los términos t_1 , t_2 , t_3 , t_4 y t_5 podemos calcular $\frac{Beta(a,b)}{Beta(c,d)}$ para valores grandes de a , b , c y d . La siguiente función `prob` calcula la densidad (3.9) para un valor particular de \tilde{s} usando la anterior técnica.

```
prob <- function(s.mono, n.mono, s, n, alfa, beta){
  a <- s.mono + s + alfa
  b <- n.mono - s.mono + n - s + beta
  c <- s + alfa
  d <- n - s + beta
  t1 <- (a/(a + b))^(a - c)
  t2 <- (b/(a + b))^(b - d)
  t3 <- prod(1 - c(1:(a - c))/a)
  t4 <- prod(1 - c(1:(b - d))/b)
  t5 <- prod(1 - c(1:(a + b - c - d))/(a + b))
  if (a==c)
    resul <- t2 * t4/t5
  if (b==d)
    resul <- t1 * t3/t5
  if (a > c & b > d)
```

```

    resul <- choose(n.mono, s.mono) * t1 * t2 * t3 * t4/t5
    return(resul)
  }

```

Si queremos examinar la distribución predictiva para todos valores de la variable \tilde{s} , podemos usar los siguientes códigos

```

n <- 1000
s <- 650
alfa <- 200
beta <- 300
n.mono <- 800
res <- rep(NA, (1 + n.mono))
for(i in 1:length(res)){
  res[i] <- prob(i - 1, n.mono, s, n, alfa, beta)
}

```

Y como resultado, el objeto `res` contiene las 801 probabilidades asociadas a todos los posibles valores de \tilde{s} . Los resultados obtenidos con la anterior técnica son equivalentes a lo obtenido usando la función `lbeta` que computa el logaritmo natural de la función beta. Así, para calcular la probabilidad en (3.10), simplemente usamos el siguiente código

```
choose(800, 500) * exp(lbeta(1350, 950) - lbeta(850, 650))
```

```
## [1] 0.0005969157
```

Nótese que esta probabilidad es la misma contenida en la posición 501 del objeto `res` igual a 5.969157×10^{-4} . Finalmente, se observa que la distribución predictiva (3.9) corresponde a una distribución Beta-binomial con parámetros $s + \alpha$ y $\beta - s + n$. El paquete `VGAM` (Yee, 2012) en R contiene funciones que calculan la función de densidad, función de distribución, percentiles, además de generar números aleatorios para la distribución Beta-binomial. Las probabilidades puntuales de \tilde{s} se puede calcular con la función `dbetabinom`, teniendo en cuenta que los parámetros utilizados son $\mu = (s + \alpha)/(n + \alpha + \beta)$ y $\rho = 1/(1 + n + \alpha + \beta)$. Con el siguiente código, podemos calcular las probabilidades para todos los posibles valores de \tilde{s} .

```

library(VGAM)
mu <- (s + alfa)/(n + alfa + beta)
rho <- 1/(1 + n + alfa + beta)
res2 <- rep(NA, (1 + n.mono))
for(i in 1:length(res2)){
  res2[i] <- dbetabinom(i - 1,
                        size = n.mono,
                        prob = mu,
                        rho = rho)
}

```

Podemos observar que la posición 501 del objeto `res2` es igual a 5.969157×10^{-4} , el cual es idéntico a lo obtenido en `res`. Adicionalmente, al escribir la distribución predictiva de (3.9) como la función de densidad de una distribución Beta-binomial, se puede encontrar la esperanza de esta distribución, la cual está dada por

$$E(\tilde{S}|S) = \tilde{n} \frac{s + \alpha}{n + \alpha + \beta}$$

Nótese que la esperanza en la anterior expresión corresponde simplemente al tamaño \tilde{n} de la nueva muestra multiplicado por la estimación bayesiana del parámetro θ . Adicionalmente, la esperanza de \tilde{S} también se puede obtener multiplicando todos los posibles valores de \tilde{S} con su respectiva probabilidad, y sumando al final, como se muestra a continuación.

```
sum(res * c(0:n.mono))

## [1] 453.3333

n.mono * (s + alfa)/(n + alfa + beta)

## [1] 453.3333
```

Retomando el ejemplo 3.1, suponga que la encuesta de opinión electoral se lleva a cabo en diferentes ciudades de un determinado país, en este caso, para cada ciudad se tiene una muestra de variables con distribución Bernoulli o equivalentemente una variable binomial; de esta forma, se dispone de una muestra de variables con distribución Binomial. La distribución posterior del parámetro θ para estos casos se encuentra en el siguiente resultado.

Resultado 3.8. *Cuando se tiene una sucesión de variables aleatorias $S_1, \dots, S_i, \dots, S_k$ independientes y con distribución Binomial(n_i, θ) para $i = 1, \dots, k$, entonces la distribución posterior del parámetro de interés θ es*

$$\theta \mid S_1, \dots, S_k \sim \text{Beta} \left(\sum_{i=1}^k s_i + \alpha, \beta + \sum_{i=1}^k n_i - \sum_{i=1}^k s_i \right)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} p(\theta \mid S_1, \dots, S_k) &\propto \prod_{i=1}^k p(S_i \mid \theta) p(\theta \mid \alpha, \beta) \\ &\propto \prod_{i=1}^k \theta^{\sum_{i=1}^k s_i} \theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1} (1-\theta)^{\sum_{i=1}^k n_i - \sum_{i=1}^k s_i} I_{[0,1]}(\theta) \\ &= \theta^{\sum_{i=1}^k s_i + \alpha - 1} (1-\theta)^{\sum_{i=1}^k n_i - \sum_{i=1}^k s_i + \beta} I_{[0,1]}(\theta) \end{aligned}$$

Por lo tanto, factorizando convenientemente, se encuentra una expresión idéntica a la función de densidad de la distribución $\text{Beta} \left(\sum_{i=1}^k s_i + \alpha, \beta + \sum_{i=1}^k n_i - \sum_{i=1}^k s_i \right)$.

□

Ejemplo 3.2. El siguiente conjunto de datos fue estudiado inicialmente por [Efron and Morris \(1975\)](#) y se ha convertido en uno de los ejemplos prácticos más citados en la historia de la estadística moderna. Se trata de los porcentajes de bateo en una muestra de 18 jugadores profesionales en la temporada regular de béisbol en Estados Unidos en el año 1970. [Wikipedia \(2011\)](#) establece que, en términos generales, este valor representa la razón entre la cantidad de *hits* y el número de turnos al bate². La fórmula para calcular esta estadística es s/n , donde s es el número de *hits* y n es el total de turnos. Este conjunto de datos está disponible en el paquete `pscl` de R y se puede cargar mediante el siguiente código computacional.

```
library(pscl)
data(EfronMorris)
```

name	team	league	r	y	n	p
Roberto Clemente	Pitts	NL	18	0.400	367	0.346
Frank Robinson	Balt	AL	17	0.378	426	0.298
Frank Howard	Wash	AL	16	0.356	521	0.276
Jay Johnstone	Cal	AL	15	0.333	275	0.222
Ken Berry	Chi	AL	14	0.311	418	0.273
Jim Spencer	Cal	AL	14	0.311	466	0.270
Don Kessinger	Chi	NL	13	0.289	586	0.263
Luis Alvarado	Bos	AL	12	0.267	138	0.210
Ron Santo	Chi	NL	11	0.244	510	0.269
Ron Swoboda	NY	NL	11	0.244	200	0.230
Del Unser	Wash	AL	10	0.222	277	0.264
Billy Williams	Chi	AL	10	0.222	270	0.256
George Scott	Bos	AL	10	0.222	435	0.303
Rico Petrocelli	Bos	AL	10	0.222	538	0.264
Ellie Rodriguez	KC	AL	10	0.222	186	0.226
Bert Campaneris	Oak	AL	9	0.200	558	0.285
Thurman Munson	NY	AL	8	0.178	408	0.316
Max Alvis	Mil	NL	7	0.156	70	0.200

En la primera columna se tiene el número del jugador, la segunda columna proporciona el nombre del jugador, la cuarta columna representan el número de *hits* en los primeros 45 turnos al bate. La sexta columna representa el número de turnos al bate al final de la temporada regular y la última columna representa el promedio de bateo en la temporada.

²Un *hit* es la conexión efectuada por el bateador que coloca la pelota dentro del terreno de juego, permitiéndole alcanzar al menos una base, sin que se produzca un error de defensa del equipo contrario. Para lograr un hit, el bateador debe llegar a primera base antes de que ningún jugador defensivo lo toque con la bola en el trayecto del home a la inicial, o que el jugador de la defensa que tenga la bola pise la primera base antes que el bateador llegue a la misma.

Suponga que, partiendo de la muestra de los 18 jugadores, el objetivo es estimar el porcentaje de bateo, notado como θ , en toda la liga en el año de 1970. En primera instancia es plausible considerar que cada uno de los jugadores se comporta de manera independiente y que el porcentaje de bateo es común a todos, puesto que pertenecen a la misma liga profesional. Por lo tanto, es posible establecer que el número de *hits* s_i ($i = 1, \dots, 18$) para cada jugador tiene la siguiente distribución

$$S_i \sim \text{Binomial}(n_i, \theta) \quad i = 1, \dots, 18.$$

Utilizando un enfoque bayesiano, es posible sacar provecho de la información recolectada al principio de la temporada, constituida por la tercera y cuarta columna del archivo de datos. En esta instancia, se tuvieron $18 + 17 + \dots + 8 + 7 = 215$ hits para un total de $45 \times 18 = 810$ turnos al bate. Con esta información, se define la caracterización estructural de la distribución previa que, siguiendo las recomendaciones anteriores, está dada por una $\text{Beta}(\alpha = 215, \beta = 810 - 215) = \text{Beta}(\alpha = 215, \beta = 595)$. Del resultado 3.8, y teniendo en cuenta que al final de la temporada se obtuvieron $\sum S_i = 1825$ hits para un total de $\sum n_i = 6649$ turnos al bate, se tiene que la distribución posterior para este ejemplo es una $\text{Beta}(1825 + 215, 6649 - 1825 + 595) = \text{Beta}(2040, 5419)$. Por lo tanto, utilizando la distribución posterior, se estima que el porcentaje de bateo en la liga profesional en el año de 1970 es de $\frac{2040}{2040+5419} = \frac{2040}{7459} = 0.273$. Este valor corresponde a la media de la distribución posterior.

Nótese que los mismos resultados se encuentran cuando se analiza este conjunto de datos en STAN, mediante el siguiente código computacional.

```
Binomial <- 'data {
  int<lower=0> n;
  int<lower=0> m[n];
  int<lower=0> s[n];
}
parameters {
  real<lower=0, upper=1> theta;
}
model {
  for(i in 1:n) {
    s[i] ~ binomial(m[i], theta);
  }
  theta ~ beta(215, 595);
}
'
```

```
library(rstan)
options(mc.cores = parallel::detectCores())
```



```
s <- round(EfronMorris$n * EfronMorris$p)
sample_data <- list(s = s,
                    n = nrow(EfronMorris),
                    m = EfronMorris$n)

Binfit <- stan(model_code = Binomial,
               data = sample_data, verbose = FALSE)
```

La siguiente salida de STAN permite conocer la estimación bayesiana posterior y los límites del intervalo de credibilidad al 95 %.

```
print(Binfit, pars = "theta",
      digits = 4, probs = c(0.025, 0.975))
```

```
## Inference for Stan model: b5a37600d5b0f80332bf311eb740e4c6.
## 4 chains, each with iter=2000; warmup=1000; thin=1;
## post-warmup draws per chain=1000, total post-warmup draws=4000.
##
##          mean se_mean      sd    2.5%  97.5% n_eff   Rhat
## theta 0.2737    1e-04 0.0051 0.2635 0.2832  1567 1.0022
##
## Samples were drawn using NUTS(diag_e) at Sat Jun 12 11:55:56 2021.
## For each parameter, n_eff is a crude measure of effective sample size,
## and Rhat is the potential scale reduction factor on split chains (at
## convergence, Rhat=1).
```

La figura 3.6 muestra la distribución posterior para este ejemplo, junto con la estimación puntual, correspondiente a la media.

```
bayesplot::mcmc_areas(Binfit, pars = "theta",
                      prob = 0.95)
```

Por otro lado, el mismo intervalo de credibilidad del 95 % correspondiente se puede hallar mediante el siguiente código computacional de R.

```
qbeta(c(0.025, 0.975), 2040, 5419)
```

```
## [1] 0.2634379 0.2836674
```

La figura 3.7 muestra el comportamiento de las distribuciones previa y posterior para este ejemplo. Nótese que, con un análisis frecuentista, se hubiese llegado a una estimación cercana de $\frac{1825}{6649} = 0.274$.

Es posible analizar este conjunto de datos desde otra perspectiva al suponer que los jugadores no constituyen una muestra aleatoria y cada uno de ellos tiene un promedio de bateo diferente. Sin embargo, este análisis se deja como ejercicio en un capítulo posterior.

Ejemplo 3.3. Continuando con el conjunto de datos de Efron y Morris, suponga que el entrenador de un equipo de las ligas inferiores está interesado en adquirir

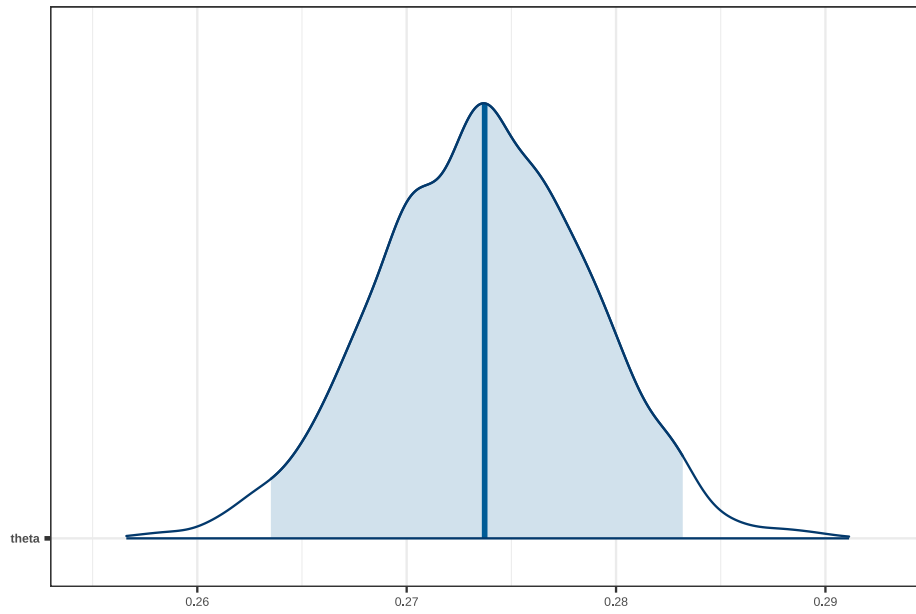


Figura 3.6: Distribución posterior.

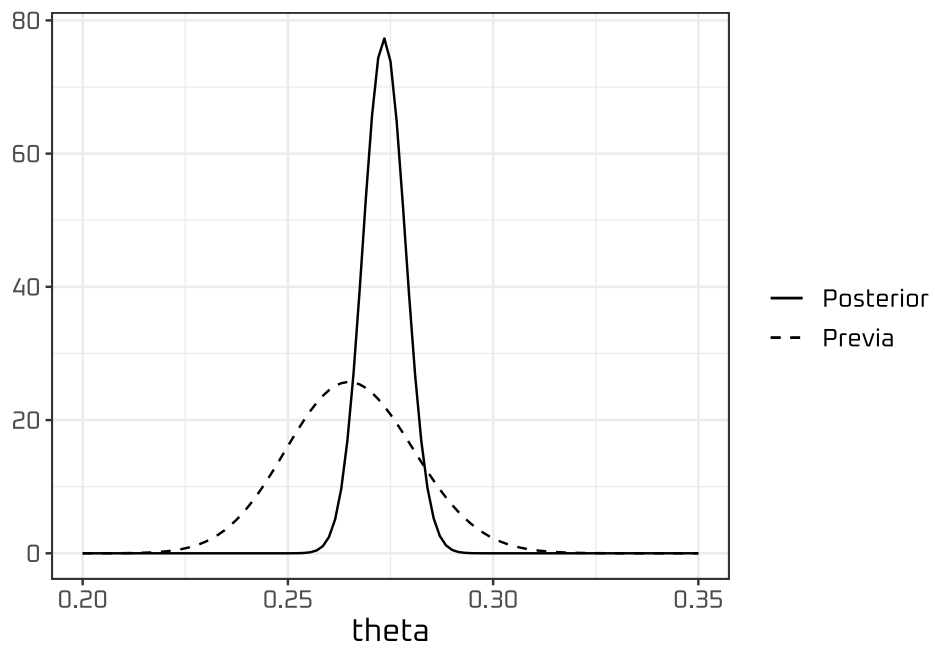


Figura 3.7: Función de densidad previa y función de densidad posterior para el ejemplo de bateo.

los servicios de Max Alvis. Este jugador no tuvo un buen promedio de bateo en la temporada y no tuvo muchos turnos al bate. El entrenador quiere conocer cuál será el número más probable de *hits* que anotará en la siguiente temporada. Teniendo en cuenta que es un jugador que viene de la liga profesional, lo más conveniente es que tenga muchos turnos al bate, digamos 400.

Para resolver este cuestionamiento, es conveniente recurrir a la función predictiva posterior, dada en el resultado 3.7. Para este análisis, se define la caracterización estructural de la distribución previa del jugador que está dada por una $Beta(\alpha = 7, \beta = 38)$. La siguiente función en R permite obtener la distribución predictiva para este jugador, que se muestra en la figura 3.8.

```
n <- 70
s <- 14
alp <- 7
bet <- 38
n.ast <- 400
predictiva <- rep(NA, n.ast + 1)
for(k in 0:n.ast){
  predictiva[k + 1] <-
    choose(n.ast,k) *
    beta(k+s+alp,bet-k-s+n.ast+n)/beta(s+alp,bet-s+n)
}

sum(predictiva)

## [1] 1
which(predictiva==max(predictiva))

## [1] 71
```

La última línea del código computacional permite concluir que lo más probable es que el jugador realice 71 hits en 400 turnos al bate, cifra que no convence al entrenador para adquirir los servicios del jugador.

3.3. Modelo Binomial negativo

La distribución binomial negativa describe el número de ensayos necesarios para alcanzar un número determinado y fijo de éxitos k en una secuencia independiente de experimentos tipo Bernoulli. Esta distribución es particularmente útil cuando el parámetro θ que se quiere estimar es muy pequeño, como la proporción de una población que padece de alguna enfermedad rara. La razón por la que no se utiliza la distribución binomial es que al fijar el número de ensayos n , con una probabilidad θ muy pequeña, es muy probable que en la muestra de tamaño n no se encuentre ningún paciente con la enfermedad; mientras que al utilizar

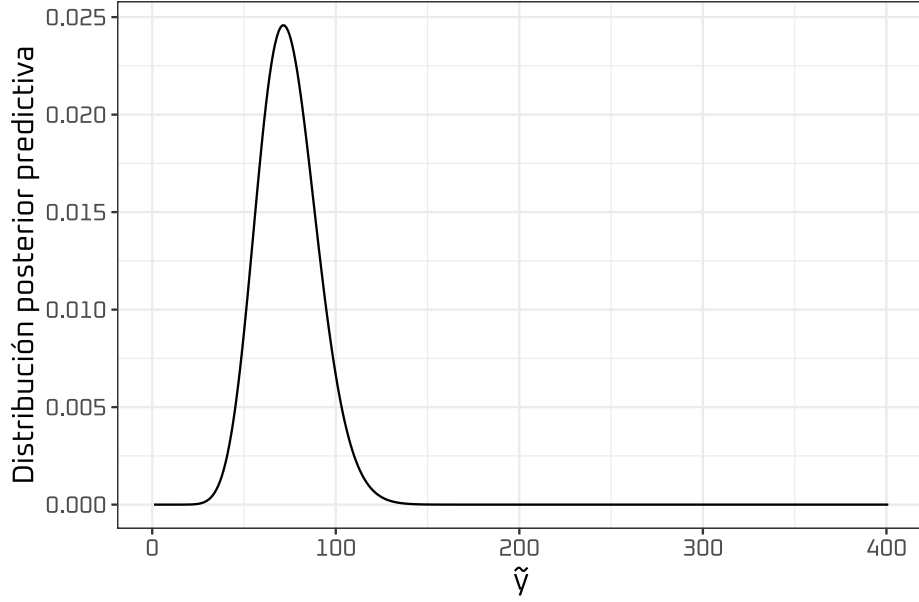


Figura 3.8: Función de densidad predictiva posterior para el jugador Max Alvis.

la distribución binomial negativa, de antemano se garantiza que se obtendrá k pacientes con la enfermedad en la muestra.

Suponga que Y es una variable aleatoria cuya distribución es Binomial negativa, y que representa el número de ensayos necesarios y para alcanzar un número determinado y fijo de éxitos k en un experimento. La forma funcional de esta distribución es la siguiente

$$p(Y | \theta) = \binom{y-1}{k-1} \theta^k (1-\theta)^{y-k} I_{\{k, k+1, \dots\}}(y), \quad (3.11)$$

Así como en la distribución Bernoulli y Binomial, el parámetro θ está restringido al espacio $\Theta = [0, 1]$. Luego, es admisible proponer que θ siga una distribución Beta. Por tanto, la distribución previa del parámetro θ está dada por la expresión (3.2). Bajo este marco de referencia se tienen los siguientes resultados

Resultado 3.9. *La distribución posterior del parámetro θ sigue una distribución*

$$\theta | Y \sim \text{Beta}(\alpha + k, \beta + y - k)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} p(\theta | Y) &\propto p(Y | \theta) p(\theta | \alpha, \beta) \\ &\propto \theta^{\alpha+k-1} (1-\theta)^{\beta+y-k-1} I_{[0,1]}(\theta) \end{aligned}$$

Por lo tanto, factorizando convenientemente, se llega a una expresión idéntica a la función de distribución de una variable aleatoria con distribución $Beta(\alpha + k, \beta + y - k)$. \square

En algunas situaciones se puede encontrar una muestra de variables con distribución binomial negativa. Por ejemplo, la entrevista de pacientes para encontrar cierta enfermedad puede llevarse a cabo en diferentes puntos de atención médica o en diferentes ciudades del país. Así en cada punto de atención, se tendrá el dato correspondiente a una variable con distribución binomial negativa. El procedimiento inferencial bayesiano para estas situaciones se describe a continuación:

Resultado 3.10. *Cuando se tiene una sucesión de variables aleatorias Y_1, \dots, Y_n independientes y con distribución BinomialNegativa(k_i, θ) ($i = 1, \dots, n$), entonces la distribución posterior del parámetro de interés es*

$$\theta \mid Y_1, \dots, Y_n \sim Beta(\alpha + \sum_{i=1}^n k_i, \beta + \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n k_i) \quad (3.12)$$

Ejemplo 3.4. Una franquicia de investigación farmacéutica ha desarrollado un nuevo tratamiento farmacológico sobre pacientes diabéticos que padezcan, a su vez, de enfermedades cardíacas o cardiopatías (angina de pecho, infarto de miocardio, insuficiencia mitral, estenosis mitral, entre otras). Para evaluar el nuevo tratamiento, es necesario seleccionar una muestra, mediante el diseño de un experimento clínico, de pacientes que tienen estas características.

Por otro lado, se sabe que la proporción de personas que padecen de diabetes y que además tienen algún tipo de condición cardíaca es muy baja y es necesario obtener una estimación precisa de la proporción de personas con estas condiciones. Con base en lo anteriormente expuesto, se puede pensar en seleccionar una muestra grande de personas y utilizar un acercamiento binomial para estimar esta proporción. Sin embargo, dado que la prevalencia de esta condición es bastante baja, es posible que el número de personas en la muestra que presenten estas enfermedades sea nulo; por consiguiente, la estimación binomial no será, de ninguna forma, precisa.

Por lo tanto, el diseño clínico está supeditado al uso de la distribución Binomial Negativa, en donde se entrevistarán pacientes, de una base de datos de un hospital de la ciudad asociado con la franquicia, hasta conseguir una muestra de cinco pacientes que padezcan de estas condiciones. Después de varios meses de entrevistas, se encontró el quinto paciente en la entrevista número 1106.

Mediante el análisis bayesiano, suponiendo una distribución previa $Beta(0.5, 0.5)$, se llega a que la distribución posterior del parámetros θ es $Beta(0.5 + 5, 0.5 + 1106 - 5) = Beta(5.5, 1101.5)$. Por lo tanto, la estimación puntual del parámetro de interés, que corresponde a la media de la distribución posterior, es 0.0049, que equivale una proporción de 0.49 % de personas con estas enfermedades.

El siguiente código computacional muestra cómo se puede llegar a las mismas conclusiones con STAN, haciendo la salvedad de que STAN define esta distribución

en términos del número de fracasos $m = y - k$ necesarios para obtener k éxitos.

```
BinNegativa <- 'data {
  int<lower=0> k;
  int<lower=0> y;
}
transformed data {
  int<lower=0> m;
  m = y - k;
}
parameters {
  real<lower=0> beta;
}
transformed parameters {
  real<lower=0> theta;
  theta = beta/(beta + 1);
}
model {
  m ~ neg_binomial(k, beta);
  theta ~ beta(0.5, 0.5);
}
'
```

```
y <- 1106
k <- 5
sample_data <- list(k = k, y = y)

BNfit <- stan(model_code = BinNegativa,
              data = sample_data, verbose = FALSE)
```

La siguiente salida de STAN permite conocer la estimación bayesiana posterior y los límites del intervalo de credibilidad al 95 %.

```
print(BNfit, pars = "theta",
      digits = 4, probs = c(0.025, 0.975))
```

```
## Inference for Stan model: ca45da8b0e94b143378403f155105e09.
## 4 chains, each with iter=2000; warmup=1000; thin=1;
## post-warmup draws per chain=1000, total post-warmup draws=4000.
##
##          mean se_mean      sd   2.5%  97.5% n_eff Rhat
## theta 0.005    1e-04 0.0022 0.0018 0.0102 1178    1
##
## Samples were drawn using NUTS(diag_e) at Sat Jun 12 11:56:29 2021.
## For each parameter, n_eff is a crude measure of effective sample size,
## and Rhat is the potential scale reduction factor on split chains (at
## convergence, Rhat=1).
```

Después de las iteraciones necesarias, la salida del anterior código muestra la estimación puntual dada por 0.00498 y un intervalo de credibilidad al 95 %, dado por (0.00174, 0.01013).

Ejemplo 3.5. Continuando con la temática del ejemplo anterior, suponga que la franquicia llevó a cabo la misma investigación en las 31 ciudades con mayor densidad poblacional de país. En total, se tuvieron 29620 entrevistas para un total de éxitos de 152, tal como se muestra a continuación.

Ciudad	y	k
BOGOTA	1001	4
MEDELLIN	978	6
CALI	999	5
BARRANQUILLA	860	4
CARTAGENA	1155	4
CUCUTA	585	6
BUCARAMANGA	1030	3
IBAGUE	960	5
SOLEDAD	1002	6
SANTA MARTA	763	7
SOACHA	1036	5
PASTO	779	5
MONTERIA	1158	4
VILLAVICENCIO	1017	5
BELLO	888	6
MANIZALES	977	4
VALLEDUPAR	1256	6
BUENAVENTURA	1349	6
NEIVA	1047	5
PALMIRA	1088	5
ARMENIA	649	3
POPAYAN	765	4
FLORIDABLANCA	699	5
SINCELEJO	1042	4
ITAGUI	1212	5
BARRANCABERMEJA	660	5
TULUA	671	5
ENVIGADO	835	6
DOSQUEBRADAS	997	5
RIOHACHA	1146	4
SINCELEJO	1016	5

Mediante el análisis bayesiano, suponiendo una distribución previa³ no infor-

³Nótese que es posible también asignar una previa informativa $Beta(5.5, 1101.5)$, que da cuenta de la información del estudio del ejemplo anterior.

mativa $Beta(0.5, 0.5)$, se llega a que la distribución posterior del parámetros θ es $Beta(0.5 + 152, 0.5 + 29620 - 152) = Beta(152.5, 29468.5)$. Por lo tanto, la estimación puntual del parámetro de interés, que corresponde a la media de la distribución posterior, es 0.0051, que equivale a una proporción de 0.51 % de personas con estas enfermedades. El siguiente código computacional muestra cómo se puede llegar a las mismas conclusiones con STAN

```
BinNegativa2 <- 'data {
  int<lower=0> n;
  int<lower=0> k[n];
  int<lower=0> y[n];
}
transformed data {
  int<lower=0> m[n];
  for(i in 1:n){
    m[i] = y[i] - k[i];
  }
}
parameters {
  real<lower=0> b;
}
transformed parameters {
  real<lower=0> theta;
  theta = b/(b + 1);
}
model {
  for(i in 1:n){
    m[i] ~ neg_binomial(k[i], b);
  }
  theta ~ beta(0.5, 0.5);
}
'
```

```
y <- c(1001, 978, 999, 860, 1155, 585, 1030,
      960, 1002, 763, 1036, 779, 1158, 1017,
      888, 977, 1256, 1349, 1047, 1088, 649,
      765, 699, 1042, 1212, 660, 671, 835,
      997, 1146, 1016)
k <- c(4, 6, 5, 4, 4, 6, 3, 5, 6, 7, 5, 5, 4,
      5, 6, 4, 6, 6, 5, 5, 3, 4, 5, 4, 5, 5,
      5, 6, 5, 4, 5)
sample_data <- list(k = k, y = y, n = length(y))

BNfit2 <- stan(model_code = BinNegativa2,
              data = sample_data, verbose = FALSE)
```


Después de cinco mil iteraciones, la salida del anterior código muestra la estimación puntual dada por 0.00515 y un intervalo de credibilidad al 95 %, dado por (0.00439, 0.00603), mucho más estrecho que el intervalo de credibilidad del anterior ejemplo

```
print(BNfit2, pars = "theta",
      digits = 4, probs = c(0.025, 0.975))

## Inference for Stan model: 756b8df22716f40c50aa8045790299a4.
## 4 chains, each with iter=2000; warmup=1000; thin=1;
## post-warmup draws per chain=1000, total post-warmup draws=4000.
##
##          mean se_mean      sd  2.5% 97.5% n_eff  Rhat
## theta  0.0052      0 4e-04 0.0044 0.006  1313 1.0015
##
## Samples were drawn using NUTS(diag_e) at Sat Jun 12 11:57:00 2021.
## For each parameter, n_eff is a crude measure of effective sample size,
## and Rhat is the potential scale reduction factor on split chains (at
## convergence, Rhat=1).
```

La figura 3.9 muestra la distribución posterior para este ejemplo, junto con la estimación puntual, correspondiente a la media.

```
bayesplot::mcmc_areas(BNfit2, pars = "theta",
                     prob = 0.95)
```

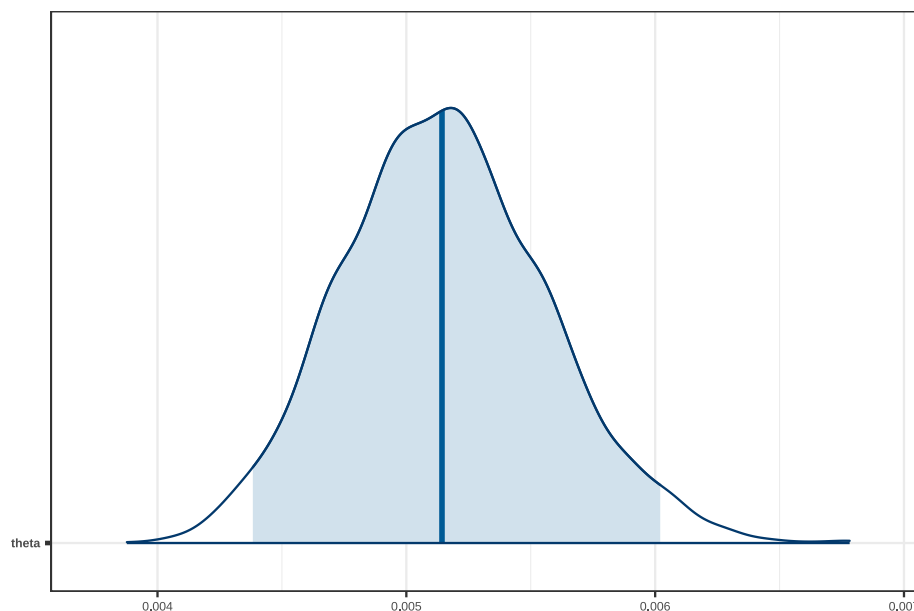


Figura 3.9: Distribución posterior.

Una vez observados los datos actuales y encontrada la distribución posterior, se puede encontrar la distribución predictiva posterior de una nueva variable con distribución binomial negativa. Es decir, se puede definir el mecanismo probabilístico para el número de ensayos necesarios para encontrar \tilde{k} éxitos.

Resultado 3.11. *Después de la recolección de datos, la distribución predictiva posterior para una nueva variable \tilde{Y} está dada por*

$$p(\tilde{Y}|Y_1, \dots, Y_n) = \binom{\tilde{y}-1}{\tilde{k}-1} \frac{Beta(\alpha + \tilde{k} + \sum k_i, \beta + \tilde{y} - \tilde{k} + \sum y_i - \sum k_i)}{Beta(\alpha + \sum k_i, \beta + \sum y_i - \sum k_i)} I_{\{\tilde{k}, \tilde{k}+1, \dots\}}(\tilde{y})$$

Demostración.

$$\begin{aligned} & p(\tilde{Y}|Y_1, \dots, Y_n) \\ &= \int p(\tilde{Y}|\theta) p(\theta|Y_1, \dots, Y_n) d\theta \\ &= \int_0^1 \binom{\tilde{y}-1}{\tilde{k}-1} \theta^{\alpha+\tilde{k}} (1-\theta)^{\beta+\tilde{y}-\tilde{k}} I_{\{\tilde{k}, \tilde{k}+1, \dots\}}(\tilde{y}) \frac{\theta^{\sum k_i-1} (1-\theta)^{\sum y_i - \sum k_i-1}}{Beta(\alpha + \sum k_i, \beta + \sum y_i - \sum k_i)} d\theta \\ &= \binom{\tilde{y}-1}{\tilde{k}-1} \frac{I_{\{\tilde{k}, \tilde{k}+1, \dots\}}(\tilde{y})}{Beta(\alpha + \sum k_i, \beta + \sum y_i - \sum k_i)} \int_0^1 \theta^{\alpha+\tilde{k}+\sum k_i-1} (1-\theta)^{\beta+\tilde{y}-\tilde{k}+\sum y_i - \sum k_i-1} d\theta \\ &= \binom{\tilde{y}-1}{\tilde{k}-1} \frac{Beta(\alpha + \tilde{k} + \sum k_i, \beta + \tilde{y} - \tilde{k} + \sum y_i - \sum k_i)}{Beta(\alpha + \sum k_i, \beta + \sum y_i - \sum k_i)} I_{\{\tilde{k}, \tilde{k}+1, \dots\}}(\tilde{y}) \end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.6. Siguiendo con los datos del ejemplo 3.5, suponga que se quiere recolectar información de tres pacientes con cardiopatía en cierta ciudad, y se quiere conocer acerca del número de entrevistas necesarias para . Utilizando la distribución previa $Beta(0.5, 0.5)$ y los datos de las 31 ciudades del ejemplo, se tiene que la distribución predictiva para el número de entrevistas necesarias para encontrar 3 pacientes está dada por

$$\begin{aligned} & p(\tilde{Y}|Y_1, \dots, Y_n) \\ &= \binom{\tilde{y}-1}{4} \frac{Beta(0.5 + 5 + 152, 0.5 + \tilde{y} - 5 + 29620 - 152)}{Beta(0.5 + 152, 0.5 + 29620 - 152)} I_{\{5, 6, \dots\}}(\tilde{y}) \\ &= \binom{\tilde{y}-1}{4} \frac{Beta(157.5, \tilde{y} + 29463.5)}{Beta(152.5, 29468.5)} I_{\{5, 6, \dots\}}(\tilde{y}) \end{aligned}$$

Con los siguientes códigos se puede calcular la anterior función predictiva.

```
BNpred <- function(y, alfa, beta, s, n, k){
  choose(y - 1, k - 1) *
  exp(lbeta(alfa + k + s, beta + y - k + n - s) -
```

```

        lbeta(alfa+s,beta+n-s))
}

alfa <- beta <- 0.5
s <- sum(k)
n <- sum(y)
k <- 5

fun <- rep(NA)
for(y in 5:5000){
  fun[y - 4] <- BNpred(y, alfa, beta, s, n, k)
}

sum(fun)

```

```
## [1] 0.9999994
```

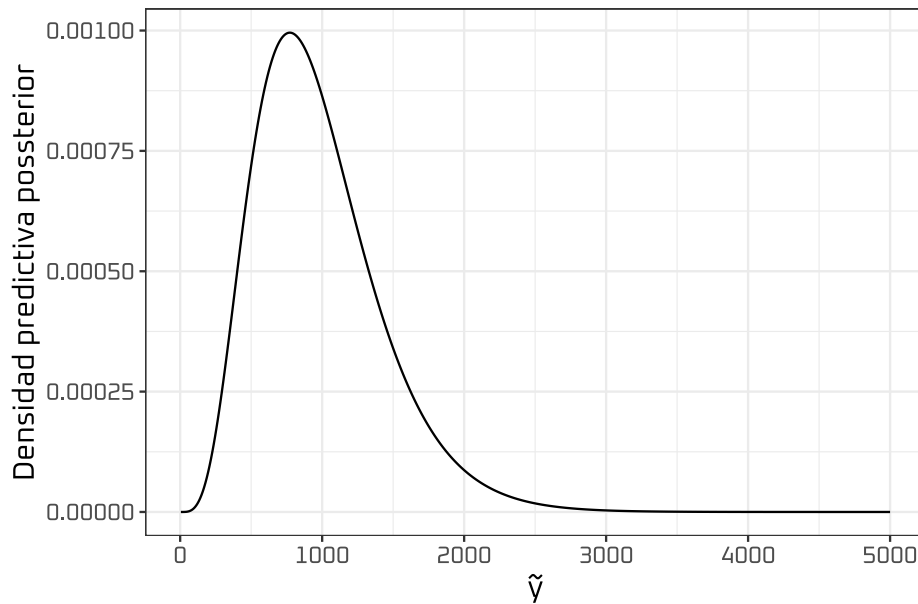


Figura 3.10: Distribución predictiva posterior para el número de entrevistas necesarias para encontrar 5 pacientes.

Se puede ver que el número de entrevistas que tiene mayor probabilidad asociadas es el valor 768, usando el comando `which(fun == max(fun))`. También, se puede observar que la probabilidad de que en menos de 500 entrevistas se encuentren los 5 pacientes es de solo el 0.1200985 usando el comando `sum(fun[1:(500 - 4)])`

3.4. Modelo Poisson

Suponga que $\mathbf{Y} = \{Y_1, \dots, Y_n\}$ es una muestra aleatoria de variables con distribución Poisson con parámetro θ , la función de distribución conjunta o la función de verosimilitud está dada por

$$\begin{aligned} p(\mathbf{Y} \mid \theta) &= \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\theta} \theta^{y_i}}{y_i!} I_{\{0,1,\dots\}}(y_i) \\ &= \frac{e^{-n\theta} \theta^{\sum_{i=1}^n y_i}}{\prod_{i=1}^n y_i!} I_{\{0,1,\dots\}^n}(y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

donde $\{0, 1, \dots\}^n$ denota el producto cartesiano n veces sobre el conjunto $\{0, 1, \dots\}$. Por otro lado, como el parámetro θ está restringido al espacio $\Theta = (0, \infty)$, entonces es posible formular varias opciones para la distribución previa del parámetro. Algunas de estas se encuentran considerando la distribución exponencial, la distribución Ji-cuadrado o la distribución Gamma. Nótese que las dos primeras son casos particulares de la última. Por lo tanto, la distribución previa del parámetro θ está dada por

$$p(\theta \mid \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta} I_{(0,\infty)}(\theta). \quad (3.13)$$

Bajo este marco de referencia se tienen el siguiente resultado con respecto a la distribución posterior del parámetro de interés θ .

Resultado 3.12. *La distribución posterior del parámetro θ está dada por*

$$\theta \mid \mathbf{Y} \sim \text{Gamma} \left(\sum_{i=1}^n y_i + \alpha, n + \beta \right)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} p(\theta \mid \mathbf{Y}) &\propto p(\mathbf{Y} \mid \theta) p(\theta \mid \alpha, \beta) \\ &= \frac{I_{\{0,1,\dots\}^n}(y_1, \dots, y_n)}{\prod_{i=1}^n y_i!} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} \theta^{\sum_{i=1}^n y_i} e^{-\beta\theta} e^{-n\theta} I_{(0,\infty)}(\theta) \\ &\propto \theta^{\sum_{i=1}^n y_i + \alpha - 1} e^{-(\beta+n)\theta} I_{(0,\infty)}(\theta) \end{aligned}$$

Por lo tanto, factorizando convenientemente, se encuentra una expresión idéntica a la función de distribución de una variable aleatoria con distribución $\text{Gamma}(\sum_{i=1}^n y_i + \alpha, n + \beta)$. \square

Utilizando el resultado anterior, se tiene que la estimación Bayesiana del parámetro θ está dada por

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i + \alpha}{n + \beta}.$$

La anterior expresión sugiere tomar los parámetros de la distribución previa α y β de la siguiente manera: β representa el número de observaciones en la información previa, mientras que α representa la suma de los datos de la información previa. De esta forma, α/β representa la estimación previa del parámetro θ . Y la estimación Bayesiana de θ se puede escribir como

$$\begin{aligned}\hat{\theta} &= \frac{\sum_{i=1}^n y_i + \alpha}{\beta + n} \\ &= \frac{n}{n + \beta} * \frac{\sum y_i}{n} + \frac{\beta}{n + \beta} * \frac{\alpha}{\beta} \\ &= \frac{n}{n + \beta} * \hat{\theta}_C + \frac{\beta}{n + \beta} * \hat{\theta}_P\end{aligned}$$

Es decir, la estimación Bayesiana de θ es un promedio ponderado entre la estimación clásica y la estimación previa del parámetro θ , donde los pesos dependen directamente del tamaño muestral de la información actual y de la información previa.

A continuación estudiamos las distribuciones predictivas previa y posterior para una nueva observación

Resultado 3.13. *La distribución predictiva previa para una observación $\mathbf{y} = \{y_1, \dots, y_n\}$ de la muestra aleatoria está dada por*

$$p(\mathbf{Y}) = \frac{\Gamma(\sum_{i=1}^n y_i + \alpha)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\beta^\alpha}{(n + \beta)^{\sum_{i=1}^n y_i + \alpha}} \frac{I_{\{0,1,\dots\}^n}(y_1, \dots, y_n)}{\prod_{i=1}^n y_i!} \quad (3.14)$$

y define una auténtica función de densidad de probabilidad continua.

Demostración. De la definición de función de distribución predictiva se tiene que

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{Y}) &= \int p(\mathbf{Y} \mid \theta) p(\theta \mid \alpha, \beta) d\theta \\
&= \int_0^\infty \frac{e^{-n\theta} \theta^{\sum_{i=1}^n y_i}}{\prod_{i=1}^n y_i!} I_{\{0,1,\dots\}^n}(y_1, \dots, y_n) \frac{\beta^\alpha \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta}}{\Gamma(\alpha)} d\theta \\
&= \frac{\Gamma(\sum_{i=1}^n y_i + \alpha)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\beta^\alpha}{(n + \beta)^{\sum_{i=1}^n y_i + \alpha}} \frac{I_{\{0,1,\dots\}^n}(y_1, \dots, y_n)}{\prod_{i=1}^n y_i!} \\
&\quad \times \int_0^\infty \frac{(n + \beta)^{\sum_{i=1}^n y_i + \alpha}}{\Gamma(\sum_{i=1}^n y_i + \alpha)} \theta^{\sum_{i=1}^n y_i + \alpha - 1} e^{-(\beta+n)\theta} d\theta \\
&= \frac{\Gamma(\sum_{i=1}^n y_i + \alpha)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\beta^\alpha}{(n + \beta)^{\sum_{i=1}^n y_i + \alpha}} \frac{I_{\{0,1,\dots\}^n}(y_1, \dots, y_n)}{\prod_{i=1}^n y_i!}
\end{aligned}$$

□

En el caso en el que la muestra aleatoria estuviera constituida por una sola variable aleatoria, entonces $n = 1$ y si, en particular, los hiper-parámetros de la distribución previa fuesen $\alpha = \beta = 1$, entonces no es difícil ver, utilizando la definición de la función matemática Gamma, que la función de distribución predictiva (3.14) estaría dada por

$$\begin{aligned}
p(Y) &= \frac{\Gamma(y+1)}{\Gamma(1)} \frac{1}{2^{y+1}} \frac{I_{\{0,1,\dots\}}(y)}{y!} \\
&= \frac{1}{2^{y+1}} I_{\{0,1,\dots\}}(y)
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Para chequear la convergencia de la anterior distribución es necesario recurrir a los resultados del análisis matemático Apostol (1957, pág. 361). Dado que el espacio de muestreo de la variable aleatoria Y es $\{0, 1, \dots\}$, entonces la suma infinita converge a uno, lo que conlleva a que en este caso particular $P(Y)$ sea una auténtica función de densidad de probabilidad.

$$\sum_{y=0}^{\infty} p(Y = y) = \sum_{y=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{y+1} = \frac{1}{2} \sum_{y=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^y = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - 1/2} = 1$$

Podemos afirmar que la expresión (3.15) sí representa una función de densidad de una variable discreta. Ahora, consideramos la distribución predictiva posetior de una muestra aleatoria, esta distribución se presenta en el siguiente resultado.

Resultado 3.14. *Después de la recolección de los datos, la distribución predictiva posterior para una nueva posible observación $\tilde{\mathbf{y}} = \{\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{n^*}\}$, de tamaño n^* , está dada por*

$$p(\tilde{\mathbf{y}} | \mathbf{Y}) = \frac{\Gamma(\sum_{i=1}^{n^*} \tilde{y}_i + \sum_{i=1}^n y_i + \alpha)}{\Gamma(\sum_{i=1}^n y_i + \alpha)} \frac{(\beta + n)^{\sum_{i=1}^n y_i + \alpha}}{(n^* + \beta + n)^{\sum_{i=1}^{n^*} \tilde{y}_i + \sum_{i=1}^n y_i + \alpha}} \times \frac{I_{\{0,1,\dots\}}^{n^*}(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{n^*})}{\prod_{i=1}^{n^*} \tilde{y}_i!} \quad (3.16)$$

La anterior distribución corresponde a una distribución multivariada que nos permite calcular probabilidades predictivas para cualesquiera valores de $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{n^*}$; sin embargo, en algunas situaciones, como por ejemplo cuando θ representa el número promedio de algún suceso en una región geográfica, al momento de la predicción, podemos estar interesados en predecir el número total o el número promedio de sucesos en la nueva muestra aleatoria de regiones geográficas. Es decir, podemos estar más interesados en la distribución de $\sum_{y=1}^{n^*} \tilde{y}_i$ o de $\sum_{y=1}^{n^*} \tilde{y}_i/n^*$ en vez de la distribución conjunta de $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{n^*}$. La distribución predictiva de $\sum_{y=1}^{n^*} \tilde{y}_i$ se presenta en el siguiente resultado, y con esta se pueden obtener fácilmente probabilidades predictivas para $\sum_{y=1}^{n^*} \tilde{y}_i/n^*$.

Resultado 3.15. *Después de la recolección de los datos, la distribución predictiva posterior para la suma de un vector de observaciones nuevas $(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{n^*})$, $\tilde{s} = \sum_{y=1}^{n^*} \tilde{y}_i$, está dada por:*

$$p(\tilde{s} | \mathbf{Y}) = \frac{\Gamma(\tilde{s} + \sum_{i=1}^n y_i + \alpha)}{\Gamma(\sum_{i=1}^n y_i + \alpha)} \frac{(n + \beta)^{\sum_{i=1}^n y_i + \alpha}}{(n^* + n + \beta)^{\tilde{s} + \sum_{i=1}^n y_i + \alpha}} \frac{(n^*)^{\tilde{s}} I_{\{0,1,\dots\}}(\tilde{s})}{\tilde{s}!} \quad (3.17)$$

Demostración. Usando el hecho de que $\theta | \mathbf{Y} \sim \text{Gamma}(\sum_{i=1}^n y_i + \alpha, n + \beta)$ y $\tilde{s} | \theta \sim \text{Poisson}(n^* \theta)$ se procede a calcular $\tilde{s}/p(\mathbf{y})$, así:

$$\begin{aligned} p(\tilde{s} | \mathbf{y}) &= \int_{\Omega} p(\tilde{s} | \theta) p(\theta | \mathbf{y}) d\theta \\ &= \int_{\Omega} \frac{(n^* \theta)^{\tilde{s}} e^{-n^* \theta}}{\tilde{s}!} I_{\{0,1,\dots\}}(\tilde{s}) (\beta + n)^{\sum_{i=1}^n y_i + \alpha} \frac{\theta^{\tilde{s} + \sum_{i=1}^n y_i + \alpha - 1}}{\Gamma(\sum_{i=1}^n y_i + \alpha)} e^{-(\beta + n)\theta} I_{(0,\infty)}(\theta) d\theta \\ &= \frac{(n^*)^{\tilde{s}} (\beta + n)^{\sum_{i=1}^n y_i + \alpha}}{\tilde{s}! \Gamma(\sum_{i=1}^n y_i + \alpha)} I_{\{0,1,\dots\}}(\tilde{s}) \int_0^{\infty} \theta^{\sum_{i=1}^n y_i + \alpha - 1} e^{-(n^* + \beta + n)\theta} d\theta \end{aligned}$$

Agupando las constantes para obtener la integral de una distribución gamma con $\alpha = \tilde{s} + \sum_{i=1}^n y_i + \alpha$ y $\beta = n^* + n + \beta$ se obtiene el resultado. \square

En la práctica, evaluar directamente la expresión (3.17) puede ocasionar problemas numéricas, por la presencia de la función Gamma y las potencias. Para evitar dicha dificultad, podemos usar la siguiente expresión equivalente cuando $\tilde{s} = 1, 2, \dots$:

$$p(\tilde{s} \mid \mathbf{Y}) = \frac{\Gamma(\tilde{s})}{Beta(\tilde{s}, \sum_{i=1}^n y_i + \alpha)} \left(\frac{n + \beta}{n^* + n + \beta} \right)^{\sum_{i=1}^n y_i + \alpha} \frac{(n^*)^{\tilde{s}}}{(n^* + n + \beta)^{\tilde{s}}} \tilde{s}!$$

Cuando $\tilde{s} = 0$, la distribución predictiva es simplemente:

$$p(\tilde{s} \mid \mathbf{Y}) = \left(\frac{n + \beta}{n^* + n + \beta} \right)^{\sum_{i=1}^n y_i + \alpha}$$

Ahora, debido a la complejidad de la expresión en (3.17), es prácticamente imposible comprobar analíticamente $\sum_{i=0}^{\infty} p(\tilde{s} = i) = 1$, y también muy difícil encontrar una expresión matemática cerrada de la esperanza de la variable \tilde{s} . Sin embargo, en situaciones prácticas, se puede usar aproximaciones numéricas tal como se verá en el ejemplo al final de esta sección.

Anteriormente en el ejemplo 2.3 se consideró la situación en la cual no se tenía ninguna consideración para formular una distribución previa y se concluyó que la distribución previa no informativa de Jeffreys para este caso es

$$p(\theta) \propto \theta^{-1/2},$$

Esta es una distribución previa impropia, puesto que $\int_0^{\infty} \theta^{-1/2} = \infty$. Sin embargo, este hecho no afecta que la inferencia posterior se pueda llevar a cabo, puesto que la distribución posterior está dada por

$$\theta \mid \mathbf{Y} \sim Gamma(\sum y_i + 1/2, n)$$

Por consiguiente, la estimación Bayesiana del parámetro θ viene dada por

$$\hat{\theta} = \frac{\sum y_i + 1/2}{n}.$$

la cual es muy similar a la estimación clásica de θ dada por \bar{Y} . Cuando se utiliza la distribución previa no informativa de Jeffreys, la distribución predictiva para nuevas observaciones $\tilde{y} = \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{n^*}$ y $\tilde{s} = \sum_{i=1}^{n^*} \tilde{y}_i$ están dadas por

$$p(\tilde{\mathbf{y}} \mid \mathbf{Y}) = \frac{\Gamma(\sum_{i=1}^{n^*} \tilde{y}_i + \sum_{i=1}^n y_i + 0.5)}{\Gamma(\sum_{i=1}^n y_i + 0.5)} \frac{n^{\sum_{i=1}^n y_i + 0.5}}{(n^* + n)^{\sum_{i=1}^n \tilde{y}_i + \sum_{i=1}^n y_i + 0.5}} \frac{I_{\{0,1,\dots\}}^{n^*}(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{n^*})}{\prod_{i=1}^{n^*} \tilde{y}_i!} \quad (3.18)$$

y

$$p(\tilde{s} \mid \mathbf{Y}) = \frac{\Gamma(\tilde{s} + \sum_{i=1}^n y_i + 0.5)}{\Gamma(\sum_{i=1}^n y_i + 0.5)} \frac{n \sum_{i=1}^n y_i + 0.5}{(n^* + n)^{\tilde{s} + \sum_{i=1}^n y_i + 0.5}} \frac{I_{\{0,1,\dots\}}(\tilde{s})}{\tilde{s}!} \quad (3.19)$$

Ejemplo 3.7. Por políticas gubernamentales, las autoridades municipales están obligados a realizar un seguimiento exhaustivo al comportamiento de la accidentalidad en las vías urbanas y medirlo en términos del número de accidentes de tránsito. Lo anterior es necesario para evaluar la gestión de la administración pública y evaluar las políticas que el gobierno de la ciudad ha implementado para disminuir esta cifra.

Suponga que en una ciudad se quiere implementar una estrategia educativa para disminuir el número de accidentes de tránsito generados por manejar en estado de embriaguez. Para esto, se registraron durante diez días 30 días el número de accidentes de tránsito por ebriedad del conductor. Los datos para cada uno de los días son 22, 9, 9, 20, 10, 14, 11, 14, 11, 11, 19, 12, 8, 9, 16, 8, 13, 8, 14, 12, 14, 11, 14, 13, 11, 14, 13, 11, 7, 12.

Es posible modelar la variable aleatoria número de accidentes de tránsito en un día mediante una distribución de Poisson puesto que el promedio muestral y la varianza muestral de los datos son semejantes. Para este conjunto de datos, el promedio equivale a 12.33, mientras que la varianza es de 12.51. El histograma de los valores observados se puede ver en la figura 3.11.

En primera instancia, es posible realizar un análisis no informativo, al formular una distribución previa de Jeffreys proporcional a $\theta^{-1/2}$, para lo cual la distribución posterior será $\text{Gamma}(\sum_{i=1}^n y_i + 1/2, n) = \text{Gamma}(370.5, 30)$. Por lo tanto, un estimador de θ está dado por la media de la distribución posterior que es $370.5/30 = 12.35$, muy cercano al valor del estimador de máxima verosimilitud correspondiente al promedio muestral. La figura 3.12 (lado izquierdo) muestra el comportamiento de las distribuciones de Jeffreys y posterior para este ejemplo.

Por otro lado, basándose en datos históricos, la alcaldía observó que, en el mismo periodo del año anterior, ocurrieron 37 accidentes en 9 días de observación. Luego, una distribución previa informativa⁴ está dada por $\text{Gamma}(\alpha = 38, \beta = 9)$. Luego, apelando al resultado 3.12, la distribución posterior corresponde a una $\text{Gamma}(370 + 38, 30 + 9) = \text{Gamma}(408, 39)$. Para este caso, un estimador de θ está dado por la media de la distribución posterior que es $408/39 = 10.46$. La figura 3.12 (lado derecho) muestra el comportamiento de las distribuciones previa (informativa) y posterior para este ejemplo.

A continuación se examina la distribución predictiva. En la figura 3.13 se grafica la distribución predictiva para una nueva observación cuando se usa la previa no

⁴En la práctica, se recomienda que los valores de los hiperparámetros α y β correspondan a la suma del número de eventos más uno y número de observaciones, respectivamente.

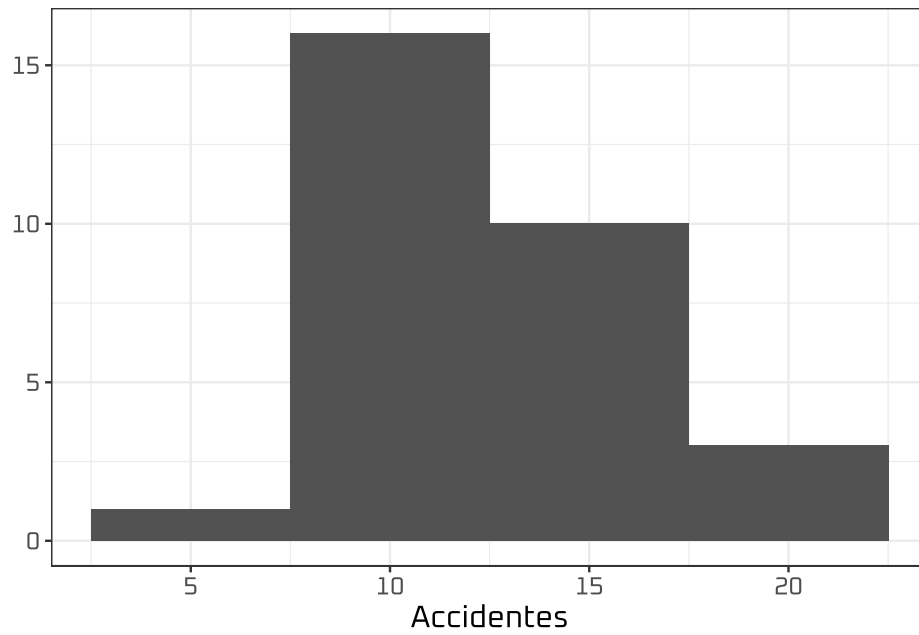


Figura 3.11: Histograma para los datos de accidentes de tránsito.

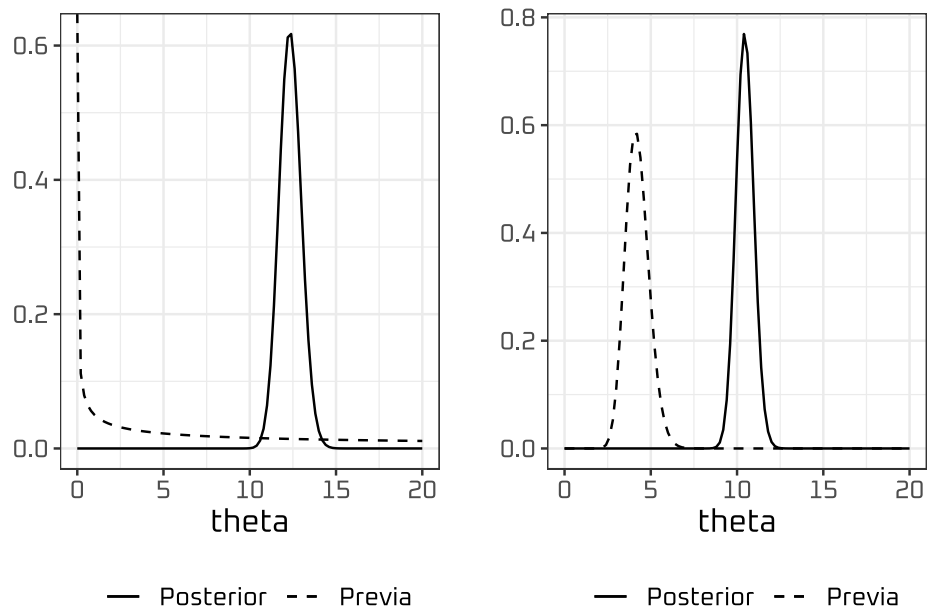


Figura 3.12: Distribución previa y distribución posterior para el ejemplo del tránsito con dos distribuciones previas diferentes (el lado izquierdo representa el caso cuando se usa la previa no informativa, el lado derecho la previa informativa).

informativa y la previa informativa. Los códigos para el cálculo cuando se usan ambas distribuciones previas es como sigue:

```
n <- length(Trans)

pre.Transito.NoInf <- function(s){
  if(s > 0){
    val <- gamma(s) *
      (n/(n + 1)) ^ (sum(Trans) + 0.5)/
      (beta(s, sum(Trans) + 0.5) *
        prod(1:s) * (n + 1) ^ s)
  }
  if( s == 0){
    val <- (n/(n + 1)) ^ (sum(Trans) + 0.5)
  }
  return(val)
}

pre.Transito <- function(s){
  if(s > 0){
    val <- gamma(s) *
      ((n + beta)/(n + beta + 1))^(sum(Trans) + alfa)/
      (beta(s, sum(Trans) + alfa) * (1+n+beta) ^ s *
        prod(1:s))
  }
  if(s == 0){
    val <- ((n + beta)/(n + beta + 1)) ^ (sum(Trans) + alfa)
  }
  return(val)
}

s.max <- 40
s.val <- 0:s.max

pre.NoInf.val <- pre.Inf.val <- c()
for(i in 1:length(s.val)){
  pre.NoInf.val[i] <- pre.Transito.NoInf(s.val[i])
  pre.Inf.val[i] <- pre.Transito(s.val[i])
}
sum(pre.NoInf.val)

## [1] 1
sum(pre.Inf.val)

## [1] 1
```

Nótese que en los anteriores códigos se usó como valor máximo 40 para la variable \tilde{s} , a pesar de que esta toma valores infinitos; pero al ver que la suma de las probabilidades desde el valor 0 hasta el 40 es igual a 1, podemos concluir que la probabilidad de que $\tilde{s} > 40$ es prácticamente nula.

Finalmente, podemos tener una aproximación de la esperanza de la variable \tilde{s} como

```
sum(pre.NoInf.val * s.val)
```

```
## [1] 12.35
```

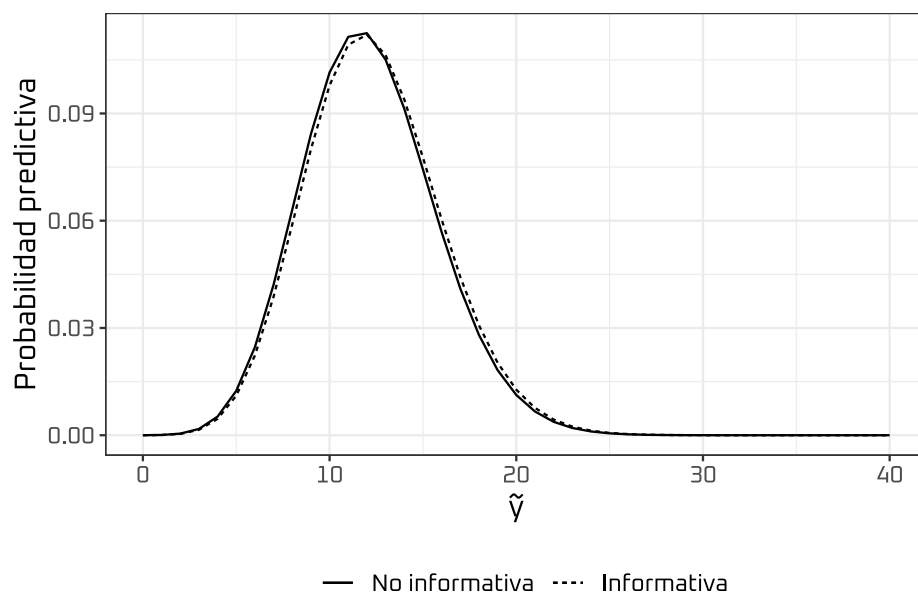


Figura 3.13: Distribución predictiva posterior para $n^* = 1$ para el ejemplo del tránsito.

A continuación se presenta el código computacional para realizar la inferencia bayesiana en STAN utilizando la distribución previa predictiva.

```
Poisson <- '
data {
  int<lower=0> n;
  int<lower=0> y[n];
}
parameters {
  real<lower=0> theta;
}
model {
  y ~ poisson(theta);
}
```

```

    theta ~ gamma(38, 9);
  }
  '
sample_data <- list(y = Trans, n = length(Trans))
Poissonfit <- stan(model_code = Poisson,
                  data = sample_data, verbose = FALSE)

```

Después de converger, la salida del anterior código muestra la estimación puntual dada por 10.482 y un intervalo de credibilidad al 95 %, dado por (9.470, 11.500), mucho más estrecho que el intervalo de credibilidad del anterior ejemplo

```

print(Poissonfit, pars = "theta",
      digits = 4, probs = c(0.025, 0.975))

```

```

## Inference for Stan model: 1c8218d83e89323ee40322eb3f4fd32d.
## 4 chains, each with iter=2000; warmup=1000; thin=1;
## post-warmup draws per chain=1000, total post-warmup draws=4000.
##
##           mean se_mean      sd   2.5%   97.5% n_eff   Rhat
## theta 10.4569  0.0137 0.5083  9.4805 11.4915 1384 1.0019
##
## Samples were drawn using NUTS(diag_e) at Sat Jun 12 11:57:36 2021.
## For each parameter, n_eff is a crude measure of effective sample size,
## and Rhat is the potential scale reduction factor on split chains (at
## convergence, Rhat=1).

```

La figura 3.14 muestra la distribución posterior para este ejemplo, junto con la estimación puntual, correspondiente a la media.

```

bayesplot::mcmc_areas(Poissonfit, pars = "theta",
                    prob = 0.95)

```

3.5. Modelo Exponencial

Suponga que $\mathbf{Y} = \{Y_1, \dots, Y_n\}$ corresponde a una muestra de variables aleatorias con distribución Exponencial. Luego, la función de distribución conjunta o verosimilitud está dada por

$$\begin{aligned}
 p(\mathbf{Y} \mid \theta) &= \prod_{i=1}^n \theta e^{(-\theta y_i)} I_{(0, \infty)}(y_i) \\
 &= \theta^n e^{(-\theta \sum_{i=1}^n y_i)} I_{(0, \infty)^n}(y_1, \dots, y_n)
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Donde $\{0, 1 \dots\}^n$ denota el producto cartesiano n veces sobre el intervalo $(0, \infty)$. Por otro lado, como el parámetro θ está restringido al espacio $\Theta = (0, \infty)$,

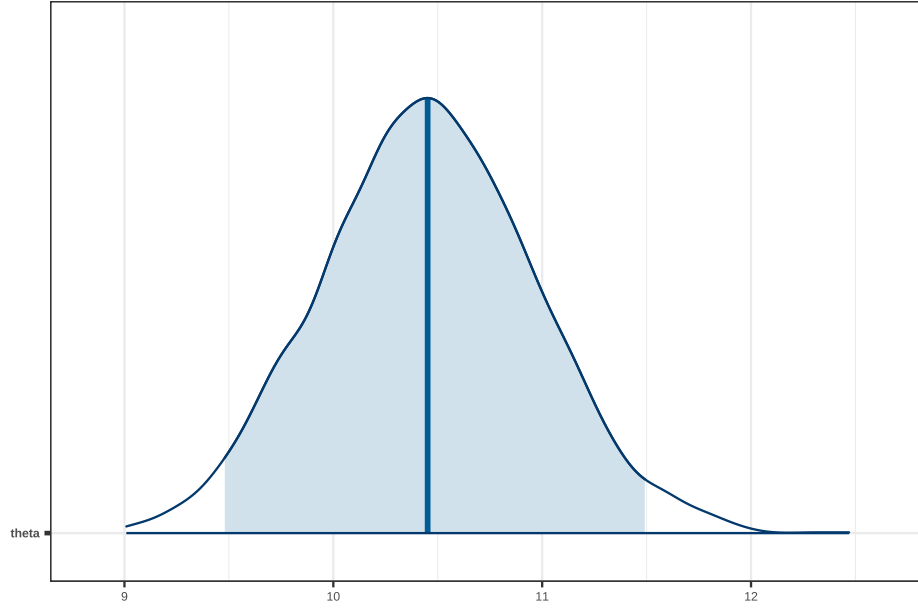


Figura 3.14: Distribución posterior.

entonces es posible formular varias opciones para la distribución previa del parámetro, al igual que en la distribución Poisson. Así mismo, suponga que la distribución previa para el parámetro de interés es la distribución Gamma tal como aparece en la expresión (3.13). Bajo este marco de referencia se tienen los siguientes resultados

Resultado 3.16. *La distribución posterior del parámetro θ sigue una distribución*

$$\theta \mid \mathbf{Y} \sim \text{Gamma} \left(\alpha + n, \beta + \sum_{i=1}^n y_i \right)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} p(\theta \mid \mathbf{Y}) &\propto p(\mathbf{Y} \mid \theta) p(\theta \mid \alpha, \beta) \\ &= \theta^n e^{(-\theta \sum_{i=1}^n y_i)} I_{(0, \infty)^n}(y_1, \dots, y_n) \frac{\beta^\alpha \theta^{\alpha-1} e^{-\beta \theta}}{\Gamma(\alpha)} I_{(0, \infty)}(\theta) \\ &\propto \theta^{\alpha+n-1} e^{-(\beta + \sum_{i=1}^n y_i) \theta} I_{(0, \infty)}(\theta) \end{aligned}$$

Por lo tanto, factorizando convenientemente, se encuentra una expresión idéntica a la función de distribución de una variable aleatoria con distribución $\text{Gamma}(\alpha + n, \beta + \sum_{i=1}^n y_i)$. \square

Resultado 3.17. *La distribución predictiva previa para una observación $\mathbf{y} = \{y_1, \dots, y_n\}$ de la muestra aleatoria está dada por*

$$p(\mathbf{Y}) = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\beta^\alpha}{(\beta + \sum_{i=1}^n y_i)^{\alpha+n}} I_{(0,\infty)^n}(y_1, \dots, y_n) \quad (3.21)$$

y define una auténtica función de densidad de probabilidad continua.

Demostración. De la definición de función de distribución predictiva se tiene que

$$\begin{aligned} p(\mathbf{Y}) &= \int p(\mathbf{Y} \mid \theta) p(\theta \mid \alpha, \beta) d\theta \\ &= \int_0^\infty \theta^n e^{(-\theta \sum_{i=1}^n y_i)} I_{(0,\infty)^n}(y_1, \dots, y_n) \frac{\beta^\alpha \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta}}{\Gamma(\alpha)} d\theta \\ &= \frac{\Gamma(n + \alpha)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\beta^\alpha}{(\beta + \sum_{i=1}^n y_i)^{\alpha+n}} I_{(0,\infty)^n}(y_1, \dots, y_n) \\ &\quad \times \int_0^\infty \frac{(\beta + \sum_{i=1}^n y_i)^{\alpha+n}}{\Gamma(n + \alpha)} \theta^{\alpha+n-1} e^{-(\beta + \sum_{i=1}^n y_i)\theta} d\theta \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\beta^\alpha}{(\beta + \sum_{i=1}^n y_i)^{\alpha+n}} I_{(0,\infty)^n}(y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

□

Por ejemplo, en el caso en que la muestra aleatoria estuviera constituida por una sola variable aleatoria, entonces no es difícil ver, utilizando la definición de la función matemática Gamma, que la función de distribución predictiva estaría dada por

$$\begin{aligned} p(Y) &= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\beta^\alpha}{(\beta + y)^{\alpha+1}} I_{(0,\infty)}(y) \\ &= \frac{\alpha \beta^\alpha}{(\beta + y)^{\alpha+1}} I_{(0,\infty)}(y) \end{aligned}$$

Para chequear la convergencia de la anterior distribución es necesario recurrir a los resultados del cálculo integral. Dado que el espacio de muestreo de la variable aleatoria Y es el intervalo $(0, \infty)$, entonces la integral definida es igual a uno, lo que conlleva a que en este caso particular $P(Y)$ sea una auténtica función de densidad de probabilidad.

$$\int_0^\infty p(Y) dy = \int_0^\infty \frac{\alpha \beta^\alpha}{(\beta + y)^{\alpha+1}} dy = \beta^\alpha \left[\frac{(\beta + y)^{-\alpha}}{-\alpha} \right]_0^\infty = 1$$

Volviendo al caso general en donde se tiene una muestra aleatoria, se tiene el siguiente resultado.

Resultado 3.18. Después de la recolección de los datos, la distribución predictiva posterior para un conjunto de nuevas variables aleatorias $\tilde{\mathbf{y}} = \{\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{n^*}\}$, de tamaño n^* , está dada por

$$p(\tilde{\mathbf{y}} | \mathbf{Y}) = \frac{\Gamma(n + \alpha + n^*)}{\Gamma(n + \alpha)} \frac{(\beta + \sum_{i=1}^n y_i)^{n+\alpha}}{(\sum_{i=1}^{n^*} \tilde{y}_i + \beta + \sum_{i=1}^n y_i)^{n^*+\alpha+n}} \times I_{(0,\infty)^{n^*}}(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n) \quad (3.22)$$

El anterior resultado permite calcular la distribución predictiva conjunta de variables aleatorias por observar. En algunas situaciones lo que se quiere pronosticar es el comportamiento probabilístico de promedio muestral de este conjunto de variables aleatorias; es decir, $\bar{Y}^* = \sum_{i=1}^{n^*} \tilde{Y}_i$. En el siguiente resultado se presenta la distribución predictiva de esta variable aleatoria.

Resultado 3.19. Después de la recolección de los datos, la distribución predictiva posterior para el promedio muestral de un nuevo conjunto de variables aleatorias $\bar{Y}^* = \sum_{i=1}^{n^*} \tilde{Y}_i$ está dada por

$$p(\bar{Y}^*) = \frac{n^* \Gamma(n^* + \alpha + n)}{\Gamma(n^*) \Gamma(\alpha + n)} \frac{(\beta + \sum_{i=1}^n y_i)^{\alpha+n}}{(n^* \bar{Y}^* + \beta + \sum y_i)^{n^*+\alpha+n}} (n^* \bar{Y}^*)^{n^*-1} I_{(0,\infty)}(\bar{Y}^*)$$

Demostración. En primer lugar se halla la distribución predictiva posterior de la variable $\tilde{S} = \sum_{i=1}^{n^*} \tilde{Y}_i$, teniendo en cuenta que $\tilde{S}|\theta \sim \text{Gamma}(n^*, \theta)$, de esta forma

$$\begin{aligned} p(\tilde{S}|\mathbf{Y}) &= \int p(\tilde{S}|\theta) p(\theta|\mathbf{Y}) d\theta \\ &= \int_0^\infty \frac{\theta^{n^*}}{\Gamma(n^*)} \tilde{S}^{n^*-1} e^{-\theta \tilde{S}} I_{(0,\infty)}(\tilde{S}) \frac{(\beta + \sum_{i=1}^n y_i)^{\alpha+n}}{\Gamma(\alpha + n)} \theta^{\alpha+n-1} e^{-(\beta + \sum y_i)\theta} d\theta \\ &= \frac{\tilde{S}^{n^*-1} (\beta + \sum_{i=1}^n y_i)^{\alpha+n}}{\Gamma(n^*) \Gamma(\alpha + n)} I_{(0,\infty)}(\tilde{S}) \int_0^\infty \theta^{n^*+\alpha+n-1} e^{-(\tilde{S}+\beta+\sum y_i)\theta} d\theta \\ &= \frac{\tilde{S}^{n^*-1} (\beta + \sum_{i=1}^n y_i)^{\alpha+n}}{\Gamma(n^*) \Gamma(\alpha + n)} \frac{\Gamma(n^* + \alpha + n)}{(\tilde{S} + \beta + \sum y_i)^{n^*+\alpha+n}} I_{(0,\infty)}(\tilde{S}) \end{aligned}$$

Al aplicar el teorema de transformación a la distribución predictiva, se puede hallar la distribución de \bar{Y}^* , dada por

$$p(\bar{Y}^*|\mathbf{Y}) = \frac{n^* \Gamma(n^* + \alpha + n)}{\Gamma(n^*) \Gamma(\alpha + n)} \frac{(\beta + \sum_{i=1}^n y_i)^{\alpha+n}}{(n^* \bar{Y}^* + \beta + \sum y_i)^{n^*+\alpha+n}} (n^* \bar{Y}^*)^{n^*-1} I_{(0,\infty)}(\bar{Y}^*)$$

□

En la práctica puede ocurrir que algunos de los valores de n , n^* , $\sum_{i=1}^n y_i$ y $n^* \bar{Y}^*$ sean muy grandes; por consiguiente, evaluar directamente la expresión anterior puede ocasionar problemas numéricos. Realizando algunas operaciones algebraicas, se encuentra la siguiente expresión equivalente para la distribución predictiva posterior de \bar{Y}^* que evita problemas numéricos:

$$p(\bar{Y}^* | \mathbf{Y}) = \frac{1}{\bar{Y}^* \text{Beta}(n, n^*)} \left(\frac{\beta + \sum_{i=1}^n y_i}{\beta + \sum_{i=1}^n y_i + n^* \bar{Y}^*} \right)^{\alpha+n} \left(\frac{n^* \bar{Y}^*}{\beta + \sum_{i=1}^n y_i + n^* \bar{Y}^*} \right)^{n^*} I_{(0, \infty)}(\bar{Y}^*) \quad (3.23)$$

Por otro lado, se puede ver que al utilizar la distribución previa no informativa de Jeffreys, la distribución predictiva posterior de \bar{Y}^* está dada por

$$p(\bar{Y}^* | \mathbf{Y}) = \frac{n^* \Gamma(n^* + n)}{\Gamma(n^*) \Gamma(n)} \frac{(\sum_{i=1}^n y_i)^n}{(n^* \bar{Y}^* + \sum y_i)^{n^* + n}} (n^* \bar{Y}^*)^{n^* - 1} I_{(0, \infty)}(\bar{Y}^*) \quad (3.24)$$

La cual es equivalente a la siguiente expresión que en ocasiones puede ser útil para evitar problemas numéricos

$$p(\bar{Y}^* | \mathbf{Y}) = \frac{1}{\bar{Y}^* \text{Beta}(n, n^*)} \left(\frac{\sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{i=1}^n y_i + n^* \bar{Y}^*} \right)^n \left(\frac{n^* \bar{Y}^*}{\sum_{i=1}^n y_i + n^* \bar{Y}^*} \right)^{n^*} I_{(0, \infty)}(\bar{Y}^*) \quad (3.25)$$

Ejemplo 3.8. [Crowley and Hu \(1977\)](#) reportan un conjunto de datos que da cuenta de los tiempos de sobrevivencia de $n = 69$ miembros del programa de trasplante de corazón de Stanford (los tiempos se reportan en días después del trasplante). Los datos pueden ser encontrados en el paquete `survival` [Therneau and Lumley \(2011\)](#) de R, mediante la implementación del siguiente código computacional.

```
library(survival)
library(dplyr)
data(heart)

sobrevida <- heart %>%
  filter(transplant == 1) %>%
  mutate(tiempo = stop - start)
```

A continuación, se muestran los primeros y últimos datos de este estudio. Se recuerda que el total de pacientes atendidos en este estudio fue de $n = 69$ y la suma de los tiempos de sobrevida es de $\sum_{i=1}^n y_i = 25998.5$.

```
sobrevida %>% {
  rbind(head(., 5), tail(., 5))
}
```

	start	stop	event	age	year	surgery	transplant	id	tiempo
1	1	16	1	6.297057	0.2655715	0	1	3	15
2	36	39	1	-7.737166	0.4900753	0	1	4	3
3	51	675	1	2.869268	0.7802875	0	1	7	624
4	12	58	1	-5.497604	0.8624230	0	1	10	46
5	26	153	1	-0.019165	0.8733744	0	1	11	127
65	2	16	1	-7.718001	5.9767283	0	1	95	14
66	13	180	0	-21.349760	6.0095825	0	1	96	167
67	21	131	0	-24.383299	6.1437372	0	1	97	110
68	96	109	0	-19.370294	6.2039699	0	1	98	13
69	38	39	0	-12.939083	6.3956194	1	1	100	1

Estos tiempos de sobrevivencia pueden ser modelados mediante una distribución exponencial. Además de inferir acerca del parámetro de esta distribución, también es posible inferir acerca del tiempo promedio de sobrevivencia de un individuo sometido a este tipo de trasplantes. Luego, dadas las implicaciones del estudio, se debe ser muy cuidadoso en la asignación de los parámetros de la distribución previa. Una forma de hacerlo es asignar valores muy pequeños a estos parámetros. Otra forma de hacerlo es utilizando la distribución previa de Jeffreys, que corresponde a una distribución impropia y que conduce a resultados muy cercanos a los del enfoque anterior.

Utilizando parámetros previos muy cercanos a cero, la distribución posterior del parámetro de interés es $\text{Gamma}(69, 25998.5)$. Como es bien sabido, una estimación bayesiana para el parámetro θ está dada por la media de esta distribución posterior, la cual equivale a $69/25998.5 = 0.0026$. Ahora, como la esperanza de la distribución exponencial es $1/\theta$, entonces el tiempo promedio de sobrevivencia es de $1/0.0026 = 376.78$ días. Sin embargo, en este tipo de estudios es común que se presenten muchos datos atípicos; por ende el promedio no es una medida de escala válida en este tipo de análisis, puesto que no es una medida robusta y se prefiere la utilización de la mediana. El siguiente código computacional en STAN puede ser usado para realizar inferencias sobre el parámetro θ , sobre el tiempo promedio y el tiempo mediano. De la misma forma, es posible obtener intervalos de credibilidad para estos parámetros.

```
Exponencial <- '
data {
  int<lower=0> n;
  vector[n] y;
}
parameters {
  real<lower=0> theta;
}
transformed parameters {
  real<lower=0> invtheta = 1/theta;
}
model {
```

```

y ~ exponential(theta);
theta ~ gamma(0.1, 0.1);
}
'

sample_data <- list(y = sobrevida$tiempo,
                    n = nrow(sobrevida))
Expofit <- stan(model_code = Exponencial,
               data = sample_data, verbose = FALSE)

```

Después de las iteraciones, los resultados de este código muestran una estimación para θ de 0.0026 con un intervalo de credibilidad de (0.00208, 0.00332). Para la media $1/\theta$, se tiene una estimación puntual de 381.4 con un intervalo de credibilidad de (302.2, 485.8). La mediana se estimó en 376.8 días de sobrevivencia.

```

print(Expofit, digits = 4,
      pars = c("theta", "invtheta"),
      probs = c(0.025, 0.975))

```

```

## Inference for Stan model: 1e6dcc88d5f711b516d61c512b5ced4.
## 4 chains, each with iter=2000; warmup=1000; thin=1;
## post-warmup draws per chain=1000, total post-warmup draws=4000.
##
##               mean se_mean      sd      2.5%      97.5% n_eff  Rhat
## theta         0.0027  0.0000  0.0003   0.0020   0.0033  1274  1.0068
## invtheta      382.3398  1.3155 46.8971 303.2639 488.2924  1271  1.0077
##
## Samples were drawn using NUTS(diag_e) at Sat Jun 12 11:58:06 2021.
## For each parameter, n_eff is a crude measure of effective sample size,
## and Rhat is the potential scale reduction factor on split chains (at
## convergence, Rhat=1).

```

Las figuras 3.15 y 3.16 muestra la distribución posterior para este ejemplo, junto con la estimación puntual, correspondiente a la media.

```

bayesplot::mcmc_areas(Expofit, pars = "theta",
                      prob = 0.95)

```

```

bayesplot::mcmc_areas(Expofit, pars = "invtheta",
                      prob = 0.95)

```

Ejemplo 3.9. Suponga ahora que se va a realizar el trasplante de corazón a 5 pacientes, y se quiere conocer el comportamiento probabilístico del tiempo promedio de sobrevida en estos 5 pacientes. Aplicando la distribución predictiva y definiendo una distribución previa no informativa de Jeffreys, se tiene que

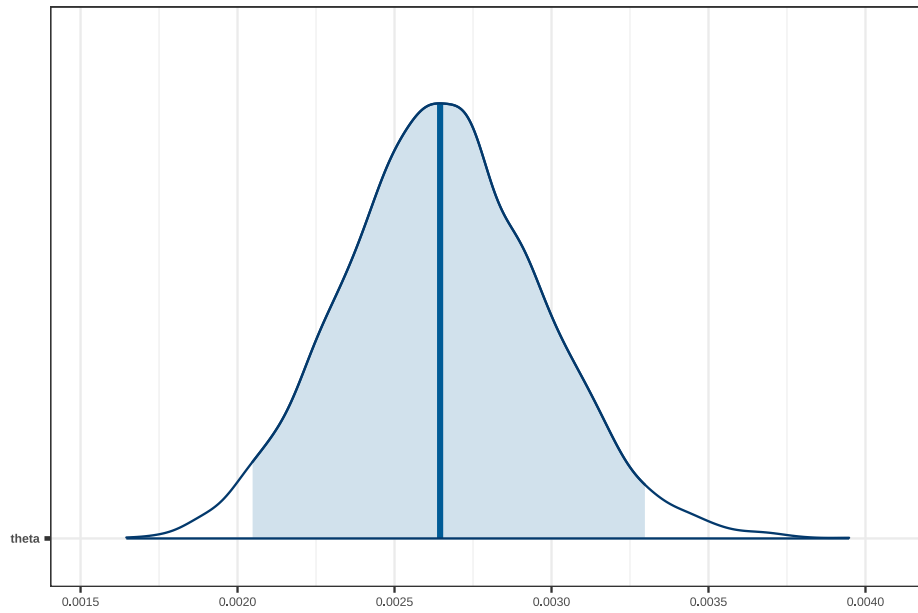


Figura 3.15: Distribución posterior.

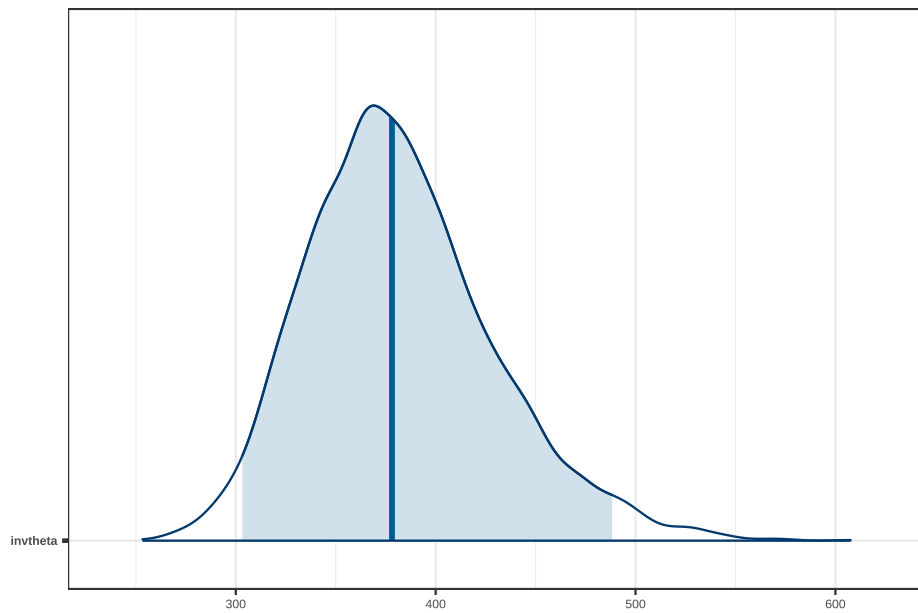


Figura 3.16: Distribución posterior.

$$\begin{aligned}
 p(\bar{Y}^*|\mathbf{Y}) &= \frac{5\Gamma(5+69)}{\Gamma(5)\Gamma(69)} \frac{25998.5^{69}}{(5\bar{Y}^* + 25998.5)^{5+69}} (5\bar{Y}^*)^4 \\
 &= \frac{1}{\bar{Y}^* \text{Beta}(5, 69)} \left(\frac{25998.5}{5\bar{Y}^* + 25998.5} \right)^{69} \left(\frac{5\bar{Y}^*}{5\bar{Y}^* + 25998.5} \right)^5
 \end{aligned}$$

El cálculo de esta función predictiva se puede llevar a cabo con el siguiente código en R, además de comprobar que la integral de la función es 1.

```

pred_exp <- function(x){
  ((s/(s+x*n.mono))^n) *
  ((x*n.mono/(s+x*n.mono))^n.mono) /
  (x*beta(n,n.mono))
}

alfa <- beta <- 0
s <- 25998.5
n <- 69
n.mono <- 5
integrate(pred_exp, 0.0001, 10000)

```

```
## 1 with absolute error < 3.2e-10
```

La distribución predictiva de esta función se puede visualizar en la Figura 3.17, donde se puede ver que la mayor masa de la función se acumula alrededor de los 300 días. Usando el comando `integrate(pred_exp, 800, 10000)`, también se puede observar que la probabilidad de que en promedio los cinco pacientes sobrevivan más de 800 días es de 0.026448474057506.

3.6. Modelo Normal con media desconocida

En esta sección se consideran datos que pueden ser descritos adecuadamente por medio de la distribución normal la cual, a diferencia de las anteriores distribuciones consideradas, tiene dos parámetros. En esta parte, se asume que la varianza teórica es conocida y el objetivo es estimar la media teórica. En el siguiente capítulo se considerará el caso general cuando ambos parámetros son desconocidos.

Suponga que Y_1, \dots, Y_n son variables independientes e idénticamente distribuidos con distribución $Normal(\theta, \sigma^2)$ con θ desconocido pero σ^2 conocido. De esta forma, la función de verosimilitud de los datos está dada por

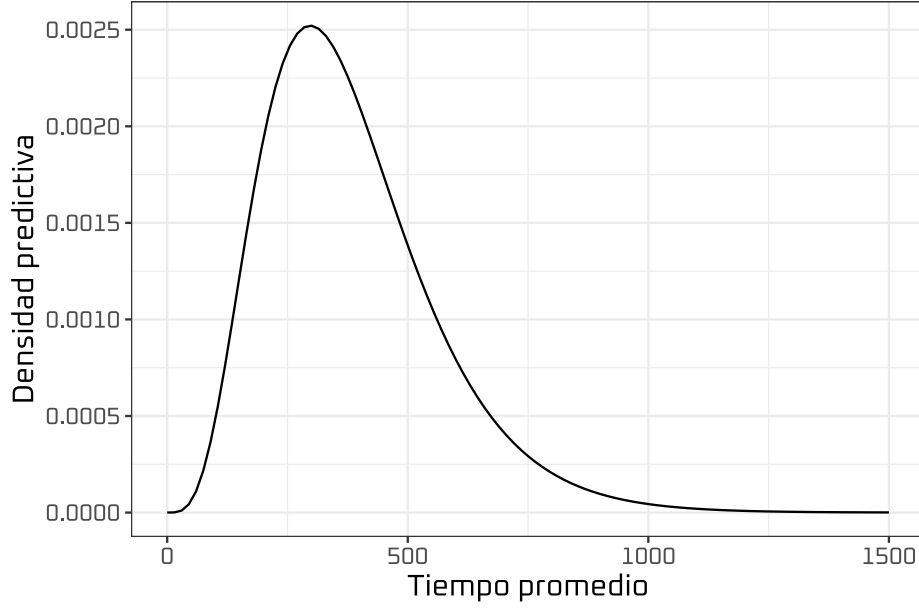


Figura 3.17: Distribución predictiva posterior para el tiempo promedio de sobrevivencia de trasplante de corazón.

$$p(\mathbf{Y} \mid \theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (y_i - \theta)^2 \right\} I_{\mathbb{R}}(y) \quad (3.26)$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \theta)^2 \right\} \quad (3.27)$$

Como el parámetro θ puede tomar cualquier valor en los reales, es posible asignarle una distribución previa $\theta \sim \text{Normal}(\mu, \tau^2)$. Bajo este marco de referencia se tienen los siguientes resultados

Resultado 3.20. *La distribución posterior del parámetro de interés θ sigue una distribución*

$$\theta \mid \mathbf{Y} \sim \text{Normal}(\mu_n, \tau_n^2).$$

En donde

$$\mu_n = \frac{\frac{n}{\sigma^2} \bar{Y} + \frac{1}{\tau^2} \mu}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}} \quad y \quad \tau_n^2 = \left(\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2} \right)^{-1} \quad (3.28)$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
p(\theta \mid \mathbf{Y}) &\propto p(\mathbf{Y} \mid \theta)p(\theta \mid \mu, \tau^2) \\
&\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \theta)^2 - \frac{1}{2\tau^2} (\theta - \mu)^2 \right\} \\
&= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \theta)^2}{\sigma^2} + \frac{(\theta - \mu)^2}{\tau^2} \right] \right\} \\
&\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{n\theta^2}{\sigma^2} - \frac{2\theta \sum_{i=1}^n y_i}{\sigma^2} + \frac{\theta^2}{\tau^2} - \frac{2\theta\mu}{\tau^2} \right] \right\} \\
&= \exp \left\{ -\frac{\theta^2}{2} \left[\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2} \right] + \theta \left[\frac{n\bar{y}}{\sigma^2} + \frac{\mu}{\tau^2} \right] \right\} \\
&= \exp \left\{ -\frac{\theta^2}{2\tau_n^2} + \frac{\theta\mu_n}{\tau_n^2} \right\} \\
&= \exp \left\{ -\frac{1}{2\tau_n^2} (\theta^2 - 2\theta\mu_n) \right\} \\
&\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\tau_n^2} (\theta^2 - 2\theta\mu_n + \mu_n^2) \right\} \\
&= \exp \left\{ -\frac{1}{2\tau_n^2} (\theta - \mu_n)^2 \right\}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se encuentra una expresión idéntica a la función de distribución de una variable aleatoria con distribución $Normal(\mu_n, \tau_n^2)$. \square

Observando la forma de μ_n , que corresponde a la estimación bayesiana del parámetro θ , podemos concluir que este es una combinación convexa entre el estimador clásico de máxima verosimilitud $\hat{\theta}_C = \bar{y}$ y el estimador previo $\hat{\theta}_P = \mu$, puesto que:

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_B = \mu_n &= \frac{\frac{n}{\sigma^2} \bar{Y} + \frac{1}{\tau^2} \mu}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}} \\
&= \frac{\frac{n}{\sigma^2}}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}} \bar{Y} + \frac{\frac{1}{\tau^2}}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}} \mu \\
&= \frac{\frac{n}{\sigma^2}}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}} \hat{\theta}_C + \frac{\frac{1}{\tau^2}}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}} \hat{\theta}_P
\end{aligned}$$

De donde se puede concluir que, para una distribución previa fija, entre mayor sea el tamaño muestral n , más peso tendrá el estimador clásico $\hat{\theta}_C$ en la estimación bayesiana. De la misma forma, para un conjunto fijo de datos \mathbf{Y} , entre menor sea la varianza previa, τ^2 , más certeza tenemos sobre la información previa y por consiguiente la estimación bayesiana μ_n se acercará más a la estimación

previa. En la Figura 3.18 se observa la función de densidad previa, función de verosimilitud y función de densidad posterior con $\mu = 5$, $\tau^2 = 0.01$, $\bar{y} = 2$, $\sigma^2 = 1$ y $n = 5, 10, 50, 200$. Podemos observar que a medida que el tamaño muestral n aumenta, la función de verosimilitud (vista como la función del parámetro θ) se vuelve más concentrada alrededor del valor de \bar{y} , y a consecuencia, la función de densidad posterior de θ se sitúa más cercana a la función de verosimilitud, y la estimación bayesiana se acerca más a la estimación clásica \bar{y} .

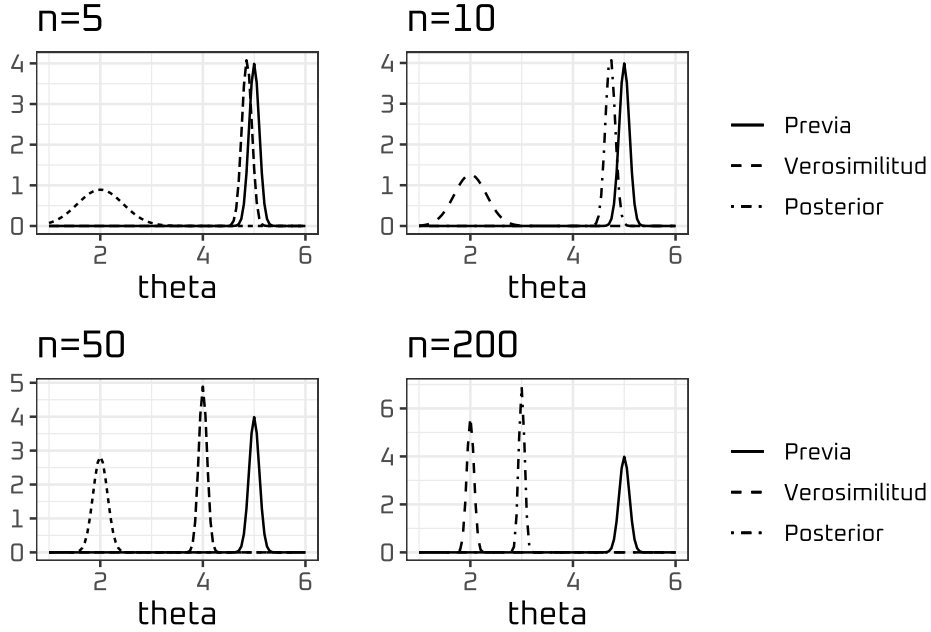


Figura 3.18: Distribución previa, función de verosimilitud y distribución posterior del parámetro θ con $\mu = 5$, $\tau^2 = 0.01$, $\bar{y} = 2$, $\sigma^2 = 1$ y $n = 5, 10, 50, 200$.

3.6.1. Distribución previa no informativa para θ

Por otro lado, nótese que en el caso en donde se desconozca el comportamiento estructural de θ , es posible definir su distribución previa tan plana y vaga como sea posible. Para esto, basta con hacer tender al parámetro de precisión de la distribución previa hacia infinito. Es decir $\tau^2 \rightarrow \infty$, en este caso, la distribución previa de θ corresponde a una distribución impropia, $p(\theta) \propto cte$. Se puede ver que bajo esta distribución previa, la distribución posterior tendería a una $Normal(\bar{y}, \sigma^2/n)$.

La anterior idea intuitiva de usar la distribución previa $p(\theta) \propto cte$ para representar la falta de la información *a priori* corresponde a la distribución previa no informativa de Jeffreys, puesto que la información de Fisher del parámetro θ en

una variable con distribución normal está dada por

$$I(\theta) = 1/\sigma^2$$

De donde se puede concluir que la previa no informativa de Jeffreys está dada por

$$p(\theta) \propto 1/\sigma \propto cte$$

Finalmente, es posible comparar los resultados inferenciales obtenidos con la previa no informativa de Jeffreys y el enfoque inferencial clásico en términos de la estimación puntual y el intervalo de credibilidad y de confianza. En cuanto a la estimación puntual, es claro que ambos enfoques conducen al mismo estimador $\hat{\theta} = \bar{Y}$. Con respecto al intervalo para el parámetro θ , al usar el enfoque bayesiano con la previa no informativa de Jeffreys, el intervalo de credibilidad de $(1 - \alpha) \times 100\%$ está dado por los percentiles $\alpha/2$ y $1 - \alpha/2$ de la distribución posterior de θ : $Normal(\bar{y}, \sigma^2/n)$. Al denotar estos percentiles como a y b , respectivamente. Por definición tenemos que, si $X \sim N(\bar{y}, \sigma^2/n)$

$$\begin{aligned} \alpha/2 &= Pr(X < a) \\ &= Pr\left(\frac{X - \bar{y}}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{a - \bar{y}}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\ &= Pr\left(Z < \frac{a - \bar{y}}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

Estos es, $\frac{a - \bar{y}}{\sigma/\sqrt{n}}$ es el percentil $\alpha/2$ de la distribución normal estándar $z_{\alpha/2}$ o equivalentemente $-z_{1-\alpha/2}$. De esta forma, tenemos que $a = \bar{y} - z_{1-\alpha/2} \sigma/\sqrt{n}$. Análogamente tenemos que $b = \bar{y} + z_{1-\alpha/2} \sigma/\sqrt{n}$, y podemos concluir que un intervalo de credibilidad de $(1 - \alpha) \times 100\%$ está dada por $\bar{y} \pm z_{1-\alpha/2} \sigma/\sqrt{n}$, el cual coincide con el intervalo de confianza para θ usando el enfoque de la inferencia clásica (Zhang and Gutiérrez, 2010).

3.6.2. Diferentes formas de hallar la distribución previa para θ

En primer lugar, considere el caso para el cual la información previa se encuentra en un conjunto de datos x_1, \dots, x_m que corresponden a mediciones de la variable de estudio en otro punto del tiempo, en otro punto geográfico, o inclusive en otra población de estudio. En este caso, podemos tomar la media de la distribución previa μ como \bar{x} y la varianza de la distribución previa τ^2 como S_x^2 .

En el caso en el que no se disponga de datos como información previa, sino que esta esté contenida en alguna estimación que se haya realizado anteriormente

sobre θ . Por ejemplo, si se dispone de algún modelamiento estadístico que se haya hecho previamente sobre θ , es posible fácilmente obtener el valor estimado de θ y el error estándar de esta estimación y naturalmente estos dos valores serían los parámetros de la distribución previa: μ y τ^2 .

Finalmente, si la estimación previa de θ se presenta en forma de un intervalo; por ejemplo, si se sabe que un intervalo de confianza para θ es (15.3, 24.7), entonces es posible definir a μ como el punto medio de este intervalo, es decir, $\mu = 20$ y para escoger el valor de τ^2 se tiene en cuenta que en muchas ramas de la estadística, un intervalo de confianza se puede aproximar por $\hat{\theta} \pm 2\sqrt{\text{var}(\hat{\theta})}$. De esta forma, se puede definir $\tau^2 = \left(\frac{24.7-20}{2}\right)^2 \approx 5.5$

3.6.3. Distribuciones predictivas

Los siguientes resultados presentan las distribuciones predictivas previa y predictiva posterior para una observación o una nueva muestra.

Resultado 3.21. *La distribución predictiva previa para una observación y está dada por*

$$y \sim \text{Normal}(\mu, \tau^2 + \sigma^2)$$

Demostración. De la definición de función de distribución predictiva se tiene que

$$\begin{aligned} p(Y) &= \int p(Y | \theta) p(\theta | \mu, \tau^2) d\theta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(y - \theta)^2\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\tau^2}(\theta - \mu)^2\right\} d\theta \end{aligned}$$

Berger (1985) desarrolló las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left[\frac{(\theta - \mu)^2}{\tau^2} + \frac{(y - \theta)^2}{\sigma^2} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{\sigma^2} \right) \theta^2 - 2 \left(\frac{\mu}{\tau^2} + \frac{y}{\sigma^2} \right) \theta + \left(\frac{\mu^2}{\tau^2} + \frac{y^2}{\sigma^2} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2\tau_1^2} \left[\theta^2 - 2\tau_1^2 \left(\frac{\mu}{\tau^2} + \frac{y}{\sigma^2} \right) \theta + \tau_1^4 \left(\frac{\mu}{\tau^2} + \frac{y}{\sigma^2} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu^2}{\tau^2} + \frac{y^2}{\sigma^2} \right) - \frac{\tau_1^2}{2} \left(\frac{\mu}{\tau^2} + \frac{y}{\sigma^2} \right)^2 \\
&= \frac{1}{2\tau_1^2} \left[\theta - \tau_1^2 \left(\frac{\mu}{\tau^2} + \frac{y}{\sigma^2} \right) \right]^2 + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{\sigma^2} - \frac{\tau_1^2}{\sigma^4} \right) y^2 - 2 \frac{\mu\tau_1^2}{\tau^2\sigma^2} y + \left(\frac{\mu^2}{\tau^2} - \frac{\mu^2\tau_1^2}{\tau^4} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2\tau_1^2} [\theta - \mu_1]^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sigma^2 + \tau^2} y^2 - 2 \frac{\mu}{\sigma^2 + \tau^2} y + \frac{\mu^2}{\sigma^2 + \tau^2} \right] \\
&= \frac{1}{2\tau_1^2} [\theta - \mu_1]^2 + \frac{1}{2(\sigma^2 + \tau^2)} (y - \mu)^2
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
p(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma\tau} \exp \left\{ -\frac{1}{2\tau_1^2} (\theta - \mu_1)^2 \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2(\tau^2 + \sigma^2)} (y - \mu)^2 \right\} d\theta \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\sigma^2\tau^2}{\tau_1^2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(\tau^2 + \sigma^2)} (y - \mu)^2 \right\} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_1^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\tau_1^2} (\theta - \mu_1)^2 \right\} d\theta \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\tau^2 + \sigma^2)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(\tau^2 + \sigma^2)} (y - \mu)^2 \right\}
\end{aligned}$$

□

Una vez recolectados los datos $\mathbf{Y} = \{Y_1, \dots, Y_n\}$, se obtiene la distribución predictiva posterior dada en el siguiente resultado. La demostración es similar al del resultado anterior.

Resultado 3.22. *La distribución predictiva posterior para una nueva observación \tilde{y} es*

$$\tilde{y} \mid \mathbf{Y} \sim \text{Normal}(\mu_n, \tau_n^2 + \sigma^2)$$

En algunas situaciones, se quiere conocer el comportamiento probabilístico de más de una nueva observación, digamos Y_1^*, \dots, Y_n^* , en este caso, lo ideal sería obtener la distribución conjunta predictiva posterior de la nueva muestra, $p(Y_1^*, \dots, Y_n^* \mid \mathbf{Y})$. Sin embargo, esta distribución no es fácil de hallar, por lo que el énfasis se pondrá en la distribución predictiva posterior de la media de esta nueva muestra \bar{Y}^* , la cual está dada en el siguiente resultado.

Resultado 3.23. *La distribución predictiva posterior para la media muestral \bar{Y}^* de una nueva muestra es*

$$\bar{Y}^*|\mathbf{Y} \sim N\left(\mu_n, \frac{\sigma^2}{n^*} + \tau_n^2\right)$$

donde μ_n y τ_n^2 fueron definidos en (3.28).

Demostración.

$$\begin{aligned} p(\bar{Y}^*|\mathbf{Y}) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(\bar{Y}^*|\theta)p(\theta|\mathbf{Y}) d\theta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi \frac{\sigma^2}{n^*})^{-1/2} \exp\left\{-\frac{n^*}{2\sigma^2}(\bar{y}^* - \theta)^2\right\} (2\pi\tau_n^2)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\tau_n^2}(\theta - \mu_n)^2\right\} d\theta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi)^{-1} (\frac{\sigma^2}{n^*} \tau_n^2)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[\frac{(\bar{y}^* - \theta)^2}{\sigma^2/n^*} + \frac{(\theta - \mu_n)^2}{\tau_n^2} \right]\right\} d\theta \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} (2\pi \frac{1}{n^*/\sigma^2 + 1/\tau_n^2})^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{n^*}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau_n^2} \right) \left(\theta - \frac{\bar{y}^*/(\sigma^2/n^*) + \mu_n/\tau_n^2}{n^*/\sigma^2 + 1/\tau_n^2} \right)^2\right\} d\theta}_{\text{igual a 1}} \\ &\quad (2\pi)^{-1/2} (\frac{\sigma^2}{n^*} \tau_n^2)^{-1/2} (\frac{n^*}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau_n^2})^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2(\sigma^2/n^* + \tau_n^2)}(\bar{y}^* - \mu_n)^2\right\} \\ &= (2\pi)^{-1/2} (\frac{\sigma^2}{n^*} \tau_n^2)^{-1/2} (\frac{n^*}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau_n^2})^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2(\sigma^2/n^* + \tau_n^2)}(\bar{y}^* - \mu_n)^2\right\} \\ &= (2\pi)^{-1/2} (\frac{\sigma^2}{n^*} + \tau_n^2)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2(\sigma^2/n^* + \tau_n^2)}(\bar{y}^* - \mu_n)^2\right\} \end{aligned}$$

□

Del anterior resultado, podemos ver que la esperanza de la distribución de $\bar{Y}^*|\mathbf{Y}$ es igual a la esperanza de $\theta|\mathbf{Y}$. A diferencia de la varianza de $\theta|\mathbf{Y}$, la varianza de $\bar{Y}^*|\mathbf{Y}$ tiene un componente adicional dado por σ^2/n^* . De esta forma, existirán tres fuentes de incertidumbre al momento de pronosticar \bar{Y}^* : la incertidumbre en la información previa, la incertidumbre en la muestra observada y la incertidumbre en la nueva muestra.

Ejemplo 3.10. En [Zhang and Gutiérrez \(2010, Ej. 2.3.6\)](#), se reportan datos sobre el grosor de láminas de vidrio templado de 3 cm. para controlar la calidad de una línea de producción. Estos datos son 3.56, 3.36, 2.99, 2.71, 3.31, 3.68, 2.78, 2.95, 2.82, 3.45, 3.42 y 3.15, con promedio de 3.18 cm. Suponga que, por especificaciones técnicas, se conoce que la varianza del grosor es de 0.1cm^2 . Por otro lado, como información previa, se conoce que en la última inspección de calidad el grosor promedio fue de 2.8 cm. con una desviación estándar de 0.23 cm.

De la anterior información, se puede decir que el parámetro de interés θ sería el grosor promedio de las láminas. También podemos afirmar que $\sigma^2 = 0.1\text{cm}^2$, $\bar{y} = 3.18\text{cm}$, $n = 12$, y los parámetros de la distribución previa estarían dados

por $\mu = 2.8cm$ y $\tau = 0.45cm$. De esta forma, podemos calcular los parámetros de la distribución posterior

$$\mu_n = \frac{\frac{12}{0.1}3.18 + \frac{1}{0.23^2}2.8}{\frac{12}{0.1} + \frac{1}{0.23^2}} = 3.13cm$$

$$\tau_n^2 = \left(\frac{12}{0.1} + \frac{1}{0.23^2} \right)^{-1} = 0.007cm^2$$

Entonces, la distribución posterior del grosor promedio será $N(\mu_n = 3.13cm, \tau_n^2 = 0.007cm^2)$. Es posible concluir que la estimación bayesiana del parámetro de interés corresponde a $3.13cm$, mientras que para calcular un intervalo de credibilidad de 95% para el parámetro de interés, se debe calcular los percentiles 2.5% y 97.5% de la distribución posterior de θ , dados por $(2.966cm, 3.293cm)$.

A continuación se ilustra el uso de STAN para obtener la estimación bayesiana del parámetro θ .

```
NormalMedia <- '
data {
  int<lower=0> n;
  real y[n];
}
parameters {
  real theta;
}
model {
  y ~ normal(theta, 0.1);
  theta ~ normal(2.8, 0.23);
}
'
```

```
n <- 12
y <- c(3.56, 3.36, 2.99, 2.71, 3.31, 3.68,
       2.78, 2.95, 2.82, 3.45, 3.42, 3.15)

sample_data <- list(y = y, n = n)
NormalMfit <- stan(model_code = NormalMedia,
                  data = sample_data, verbose = FALSE)
```

Después de la convergencia del proceso inferencial, la estimación bayesiana de θ es $3.1745cm$, mientras que un intervalo de credibilidad del 95% es $(3.117cm, 3.232cm)$, resultados muy similares a lo obtenido calculando directamente μ_n y τ_n^2 .

```
print(NormalMfit, digits = 4,
      pars = "theta", probs = c(0.025, 0.975))

## Inference for Stan model: 1a46eb2f3eff113b3e52c62bed60aed2.
## 4 chains, each with iter=2000; warmup=1000; thin=1;
## post-warmup draws per chain=1000, total post-warmup draws=4000.
##
##           mean se_mean      sd   2.5%  97.5% n_eff   Rhat
## theta 3.1757    8e-04 0.0285 3.1192 3.2311 1349 1.0003
##
## Samples were drawn using NUTS(diag_e) at Sat Jun 12 11:58:37 2021.
## For each parameter, n_eff is a crude measure of effective sample size,
## and Rhat is the potential scale reduction factor on split chains (at
## convergence, Rhat=1).
```

Las figuras 3.19 muestra la distribución posterior para este ejemplo, junto con la estimación puntual, correspondiente a la media.

```
bayesplot::mcmc_areas(NormalMfit, pars = "theta",
                     prob = 0.95)
```

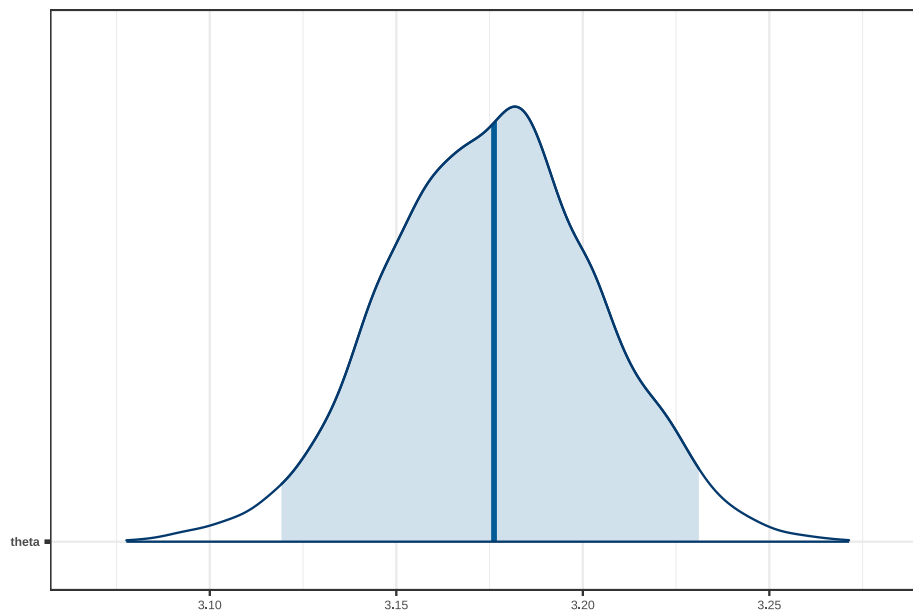


Figura 3.19: Distribución posterior.

En el siguiente ejemplo se ilustra el uso de la distribución predictiva posterior.

Ejemplo 3.11. Suponga que la fábrica debe hacer un despacho de 8 láminas, y se quiere conocer sobre el grosor promedio del despacho \bar{y}^* . Usando el resultado

3.23, se tiene que la distribución de \bar{Y}^* condicionado en los 12 datos observados está dada por

$$\bar{Y}^* | \mathbf{Y} \sim N \left(\mu_n, \frac{\sigma^2}{n^*} + \tau_n^2 \right) = N \left(3.13cm, \frac{0.1}{8} + 0.007 \right) = N(3.13cm, 0.0195cm^2)$$

De esta forma, se puede afirmar que el grosor promedio del despacho es de 3.13cm con un intervalo del 95 % dado por (2.85cm, 3.40cm). Nótese que el intervalo para \bar{Y}^* es más ancho que el intervalo para θ , pues este tiene una varianza mayor a la varianza de la distribución posterior de θ .

3.7. Modelo normal con varianza desconocida

En esta sección se presentan los fundamentos necesario para realizar inferencia bayesiana en un modelo normal para el cual sí se conoce la media, pero no su varianza. En casi todas las aplicaciones prácticas, es común que ambos parámetros sean desconocidos. Sin embargo, estas secciones servirán de base teórica para desarrollar modelos más complejos. Supóngase además que se cuenta con información previa, la cual puede basarse sin pérdida de generalidad en observaciones anteriores de alguna muestra de tamaño n_0 cuya varianza estimada fue σ_0^2 .

En este orden de ideas, y siguiendo la argumentación de las secciones anteriores, dado que la varianza de la distribución es un parámetro que toma valores positivos únicamente, es plausible plantear que su distribución previa sea

$$\sigma^2 \sim Inversa - Gamma(n_0/2, n_0\sigma_0^2/2)$$

Siguiendo la regla de Bayes, y después de factorizar convenientemente, se encuentra el siguiente resultado que muestra que la distribución posterior es conjugada con respecto a la previa.

Resultado 3.24. *La distribución posterior condicional de σ^2 es*

$$\sigma^2 | \theta, \mathbf{Y} \sim Inversa - Gamma \left(\frac{n_0 + n}{2}, \frac{v_0}{2} \right) \quad (3.29)$$

$$con v_0 = n_0\sigma_0^2 + (n-1)S^2 + n(\bar{y} - \theta)^2.$$

A continuación se presenta un ejemplo de modelación de la varianza en una distribución normal. Como se vió en los anteriores resultados, la distribución previa conjugada toma la forma de una Gamma-inversa, sin embargo el investigador debe sopesar las ventajas de considerar esta distribución, puesto que las características del modelo bayesiano no sólo recaen en la definición de la verosimilitud, sino también en la estructura de la distribución previa. Es decir,

en algunas ocasiones es mejor ponderar las bondades predictivas y de ajuste de los modelos, antes que escoger una distribución conjugada. Por ejemplo, [Gelman \(2006\)](#) presentan diferentes opciones de distribuciones previas para modelar la varianza; sin embargo, el desarrollo teórico de estas otras posibles escogencias necesitan de herramientas metodológicas que se considerarán en los posteriores capítulos.

Ejemplo 3.12. [Gelman et al. \(1995\)](#), sección 5.5.) presentan un estudio realizado para analizar los efectos de algunos programas de entrenamiento especial en preparación para una prueba estandarizada de opción múltiple llamada *SAT*, la cual es utilizada por las universidades para tomar decisiones con respecto a la admisión de sus estudiantes. Quienes presenten mejores puntuaciones tienen una mayor probabilidad de ser admitidos para cursar sus estudios de educación superior.

Las puntuaciones del *SAT* pueden variar entre 200 y 800, con una media de 500 y una desviación estándar de 100. Los exámenes SAT están diseñados para reflejar los conocimientos adquiridos y las habilidades desarrolladas durante muchos años de educación. Sin embargo, cada una de las ocho escuelas en este estudio consideró que su programa de entrenamiento a corto plazo fue muy exitoso para aumentar los puntajes de la prueba. Además, no había ninguna razón previa para creer que alguno de los ocho programas fuera más efectivo que cualquier otro o que algunos fueran más similares en efecto entre sí que cualquier otro.

La variable de interés en este ejemplo es el efecto del programa de entrenamiento en ocho escuelas secundarias. Este efecto se define como la diferencia entre el puntaje promedio de la escuela con el promedio de la escala de la prueba (500 puntos). Además, en una administración especial de la prueba para en ocho escuelas secundarias. La figura 3.20 muestra la distribución de los datos observados.

```
Escuelas <- data.frame(
  row.names=c("A", "B", "C", "D", "E", "F", "G", "H"),
  efecto = c(28.39, 7.94, -2.75, 6.82,
            -0.64, 0.63, 18.01, 12.16))
```

En el siguiente apartado se hará uso de **STAN** para realizar la inferencia bayesiana del parámetro de interés. Aunque, como ya se vio en las secciones anteriores, es posible utilizar simplemente R, acudiendo a los percentiles de la distribución posterior. Para este ejemplo, no se asume un conocimiento específico del fenómeno en la distribución previa. Por consiguiente se definirán parámetros no informativos sobre la distribución previa.

Notando la forma funcional de la distribución Gamma-inversa, al hacer que sus parámetros tomen valores muy pequeños ($\alpha \rightarrow \infty$, $\beta \rightarrow \infty$) se tiene que

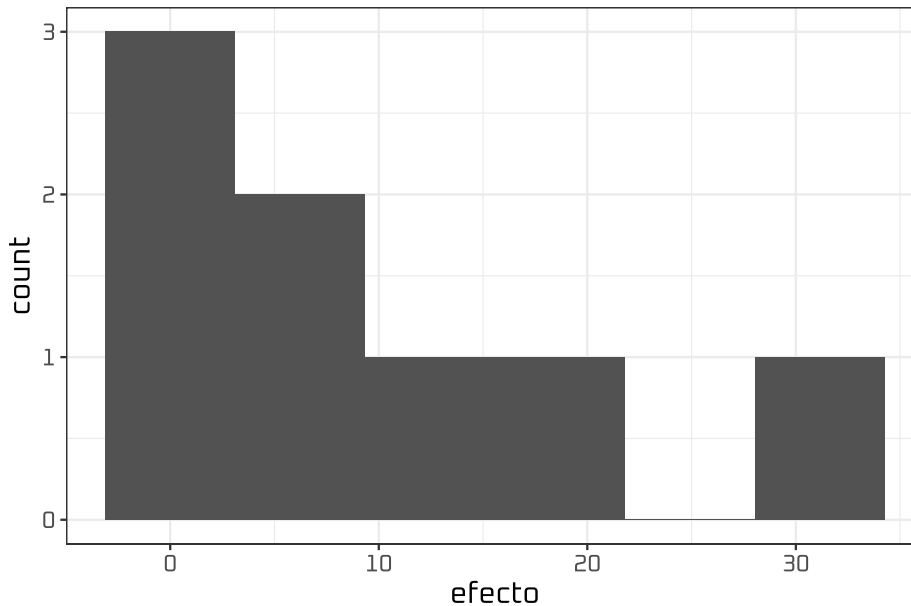


Figura 3.20: Histograma de los efectos en las ocho escuelas.

$$p(\sigma^2|\alpha, \beta) \propto (\sigma^2)^{-\alpha-1} \exp\left(-\frac{\beta}{\sigma^2}\right) \\ \propto \frac{1}{\sigma^2}$$

La cual coincide con la distribución previa de Jeffreys. De esta forma, para que la distribución previa sea propia (integral definida de la función de densidad), se escogen valores cercanos a cero, pero no nulos; por ejemplo $\alpha = 0.001$, $\beta = 0.001$. La figura 3.21 muestra la densidad previa no informativa para el parámetro de interés.

Es posible notar que esta distribución provee un intervalo de confianza del 95 % entre 176079526 e infinito. Por lo que se puede concluir que hay una muy baja probabilidad de que el parámetro tome valores muy bajos o muy altos. Por ejemplo, $Pr(\sigma^2 < 10) = 0.00859688$.

```
library(psc1)
sapply(c(0.025, 0.975),
       function(x) qgamma(x, 0.001, 0.001))
```

```
## [1] 176079526      Inf
```

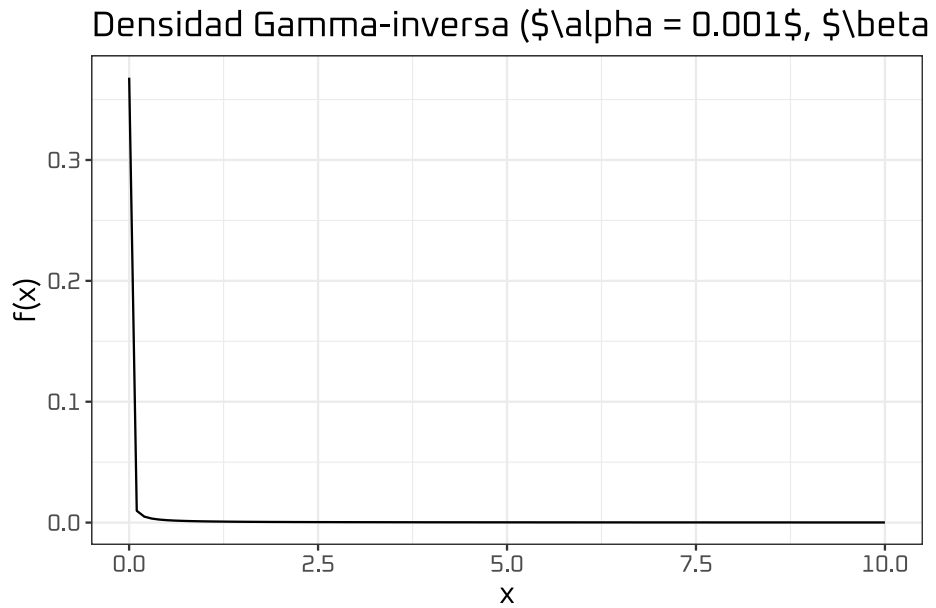


Figura 3.21: Distribución previa no informativa para la varianza de una distribución Normal

```
pigamma(10, 0.001, 0.001)
```

```
## [1] 0.00859688
```

```
NormalVar <- '
data {
  int<lower=0> n;
  real mu;
  real y[n];
}
parameters {
  real sigma;
}
transformed parameters {
  real sigma2;
  sigma2 = pow(sigma, 2);
}
model {
  y ~ normal(mu, sigma);
  sigma2 ~ inv_gamma(0.001, 0.001);
}
generated quantities {
```

```

real y_test[n];
for(i in 1:n) {
  y_test[i] = normal_rng(mu, sigma);
}
}
'

sample_data <- list(y = Escuelas$efecto,
                   n = nrow(Escuelas),
                   mu = mean(Escuelas$efecto))
NormalVfit <- stan(model_code = NormalVar,
                  data = sample_data, verbose = FALSE)

```

Después de la convergencia del proceso inferencial, la estimación bayesiana de σ^2 es 10.8, y de σ es 127.7 cm. De la misma forma, un intervalo de credibilidad del 95 % para la desviación estándar es (6.659, 19.172).

```

print(NormalVfit, digits = 4,
      pars = c("sigma", "sigma2"), probs = c(0.025, 0.975))

```

```

## Inference for Stan model: db1d737f5b63e0b7dcdc9498c360b64f.
## 4 chains, each with iter=2000; warmup=1000; thin=1;
## post-warmup draws per chain=1000, total post-warmup draws=4000.
##
##           mean se_mean      sd    2.5%   97.5% n_eff   Rhat
## sigma    11.0309  0.1266  3.2905  6.6896  19.1047   676 1.0006
## sigma2  132.5059  3.8417 92.0712 44.7509 364.9883   574 1.0011
##
## Samples were drawn using NUTS(diag_e) at Sat Jun 12 11:59:09 2021.
## For each parameter, n_eff is a crude measure of effective sample size,
## and Rhat is the potential scale reduction factor on split chains (at
## convergence, Rhat=1).

```

Las figuras 3.22 muestra la distribución posterior para este ejemplo, junto con la estimación puntual, correspondiente a la desviación estándar.

```

bayesplot::mcmc_areas(NormalVfit, pars = "sigma",
                     prob = 0.95)

```

En cualquier caso, es posible sugerir mejores distribuciones no informativas eligiendo apropiadamente un límite superior U y uno inferior L en lugar de parámetros α y β en la distribución Gamma-inversa. Por lo general, los límites se pueden establecer con bastante facilidad luego de un poco de reflexión sobre lo que σ^2 realmente significa en el mundo real. Por ejemplo, si fuese el error en algún tipo de cantidad física, L no puede ser más pequeño que el tamaño de un átomo, o el tamaño más pequeño que pueda observar en su experimento. Es más, U no podría ser más grande que la tierra (o el sol si se quisiera ser realmente conservador).

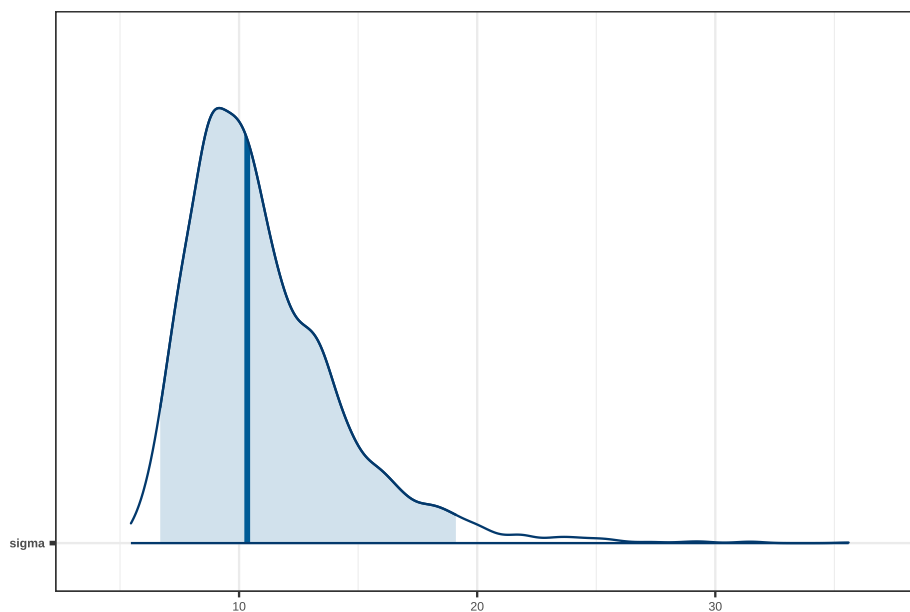


Figura 3.22: Distribución posterior.

De esta manera, una forma de mantener las propiedades de invariancia, es definir $\nu \sim \text{Uniform}(\ln(L), \ln(U))$ para que $\sigma \sim \exp(U(\ln(L), \ln(U)))$. El siguiente código en STAN permite establecer esta opción inferencial.

```
NormalVar2 <- '
data {
  int<lower = 0> n;
  real mu;
  real y[n];
}
parameters {
  real <lower = 0> nu;
}
transformed parameters {
  real sigma;
  real sigma2;
  sigma = exp(nu);
  sigma2 = pow(sigma, 2);
}
model {
  y ~ normal(mu, sigma);
  nu ~ uniform(0.5, 20);
}
```

```

generated quantities {
  real y_test[n];
  for(i in 1:n) {
    y_test[i] = normal_rng(mu, sigma);
  }
}

sample_data <- list(y = Escuelas$efecto,
                   n = nrow(Escuelas),
                   mu = mean(Escuelas$efecto))
NormalVfit2 <- stan(model_code = NormalVar2,
                   data = sample_data, verbose = FALSE)

```

Después de la convergencia del proceso inferencial, la estimación bayesiana de σ^2 es 10.8, y de σ es 128.2 cm. De la misma forma, un intervalo de credibilidad del 95 % para la desviación estándar es (6.596, 18.795).

```

print(NormalVfit2, digits = 4,
      pars = c("sigma", "sigma2"), probs = c(0.025, 0.975))

```

```

## Inference for Stan model: 9fedbb4c644064e4fdb958182968aebc.
## 4 chains, each with iter=2000; warmup=1000; thin=1;
## post-warmup draws per chain=1000, total post-warmup draws=4000.
##
##               mean se_mean      sd    2.5%    97.5% n_eff  Rhat
## sigma    10.9169  0.0718  3.0243  6.7415  18.2841  1773 1.0003
## sigma2  128.3234  1.8823 80.9997 45.4484 334.3090  1852 1.0002
##
## Samples were drawn using NUTS(diag_e) at Sat Jun 12 11:59:38 2021.
## For each parameter, n_eff is a crude measure of effective sample size,
## and Rhat is the potential scale reduction factor on split chains (at
## convergence, Rhat=1).

```

Las figuras 3.23 muestra la distribución posterior para este ejemplo, junto con la estimación puntual, correspondiente a la desviación estándar.

```

bayesplot::mcmc_areas(NormalVfit2, pars = "sigma",
                     prob = 0.95)

```

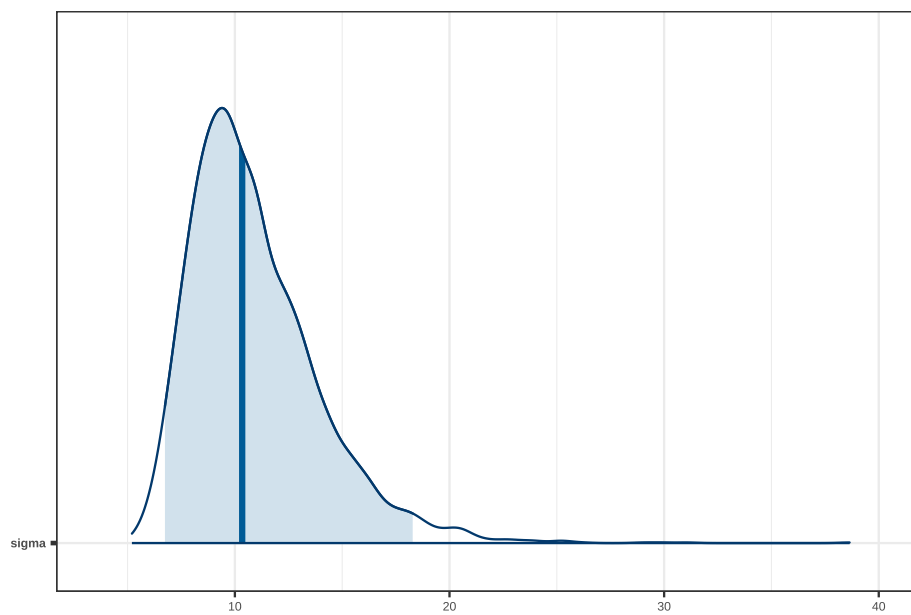


Figura 3.23: Distribución posterior.

Capítulo 4

Modelos multiparamétricos

En este capítulo, discutimos situaciones donde se requiere estimar simultáneamente más de un parámetro; es decir, los datos que enfrentamos se ajustan a una distribución de probabilidad que involucra múltiples parámetros de forma simultánea. Específicamente, se estudiarán las siguientes distribuciones

- La distribución normal univariada que tiene dos parámetros: la media θ y la varianza σ^2 .
- La distribución normal multivariada con vector de medias θ y matriz de varianzas-covarianzas Σ .
- La distribución multinomial cuyo parámetro es un vector de probabilidades θ .

En el contexto de la estimación bayesiana, es necesario hallar la distribución posterior conjunta de estos parámetros, y encontrar la estimación por alguna de las siguientes dos formas: (1) hallar teóricamente la esperanza de la distribución posterior conjunta, o (2) simular valores de la distribución posterior conjunta, de donde se puede obtener la estimación puntual y por intervalo.

Para abordar esta sección se supone que lector tiene una proficiencia media en términos de simulación estadística, cadenas de markov y métodos de Montecarlo. El apéndice de este libro contiene un resumen exhaustivo de los principales métodos de simulación de distribuciones de probabilidad, los cuales son la base fundamental para realizar una apropiada inferencia bayesiana.

4.1. Modelo Normal con media y varianza desconocida

Supongamos que se dispone de realizaciones de un conjunto de variables independientes e idénticamente distribuidas $Y_1, \dots, Y_n \sim N(\theta, \sigma^2)$. Cuando se desconoce

tanto la media como la varianza de la distribución es necesario plantear diversos enfoques y situarse en el más conveniente, según el contexto del problema. En términos de la asignación de las distribuciones previas para θ y σ^2 es posible:

- Suponer que la distribución previa $p(\theta)$ es independiente de la distribución previa $p(\sigma^2)$ y que ambas distribuciones son informativas.
- Suponer que la distribución previa $p(\theta)$ es independiente de la distribución previa $p(\sigma^2)$ y que ambas distribuciones son no informativas.
- Suponer que la distribución previa para θ depende de σ^2 y escribirla como $p(\theta | \sigma^2)$, mientras que la distribución previa de σ^2 no depende de θ y se puede escribir como $p(\sigma^2)$.

A continuación, analizamos cada uno de estos planteamientos, y desarrollamos los resultados necesarios para la estimación de θ y σ^2 .

4.1.1. Parámetros independientes

El primer enfoque que consideraremos para el análisis de los parámetros de interés θ y σ^2 en una distribución normal univariada es aquel que supone que las distribuciones previas de cada uno de ellos son independientes, pero al mismo tiempo informativas. [Gelman et al. \(2003\)](#) afirman que este supuesto de independencia es atractivo en problemas para los cuales la información previa para θ no toma la forma de un número fijo de observaciones con varianza σ^2 . Adicionalmente, este supuesto de independencia es coherente con el hecho de que en la teoría clásica de estimación los estimadores insesgados de varianza mínima de θ y σ^2 son independientes ([Zhang and Gutiérrez, 2010](#), Sección 2.4)

En este orden de ideas, y siguiendo la argumentación del capítulo anterior, la distribución previa para el parámetro θ será

$$\theta \sim \text{Normal}(\mu, \tau^2)$$

Y la distribución previa para el parámetro σ^2 será

$$\sigma^2 \sim \text{Inversa} - \text{Gamma}(n_0/2, n_0\sigma_0^2/2)$$

Asumiendo independencia previa, la distribución previa conjunta estará dada por

$$p(\theta, \sigma^2) \propto (\sigma^2)^{-n_0/2-1} \exp \left\{ -\frac{n_0\sigma_0^2}{2\sigma^2} \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2\tau^2}(\theta - \mu)^2 \right\} \quad (4.1)$$

Una vez que se conoce la forma estructural de la distribución previa conjunta, es posible establecer la distribución posterior conjunta puesto que la verosimilitud de los datos, $p(\mathbf{Y} | \theta, \sigma^2)$, está dada por la expresión (3.26) y

$$p(\theta, \sigma^2 \mid \mathbf{Y}) \propto p(\mathbf{Y} \mid \theta, \sigma^2) p(\theta, \sigma^2)$$

Resultado 4.1. *La distribución posterior conjunta de los parámetros de interés está dada por*

$$\begin{aligned} p(\theta, \sigma^2 \mid \mathbf{Y}) &\propto (\sigma^2)^{-(n+n_0)/2-1} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [n_0\sigma_0^2 + (n-1)S^2 + n(\bar{y} - \theta)^2] - \frac{1}{2\tau^2}(\theta - \mu)^2 \right\} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} p(\theta, \sigma^2 \mid \mathbf{Y}) &\propto p(\mathbf{Y} \mid \theta, \sigma^2) p(\theta, \sigma^2) \\ &\propto (\sigma^2)^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \theta)^2 \right\} (\sigma^2)^{-n_0/2-1} \exp \left\{ -\frac{n_0\sigma_0^2}{2\sigma^2} \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2\tau^2}(\theta - \mu)^2 \right\} \\ &= (\sigma^2)^{-(n+n_0)/2-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[n_0\sigma_0^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - \theta)^2 \right] - \frac{1}{2\tau^2}(\theta - \mu)^2 \right\} \\ &\propto (\sigma^2)^{-(n+n_0)/2-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [n_0\sigma_0^2 + (n-1)S^2 + n(\bar{y} - \theta)^2] - \frac{1}{2\tau^2}(\theta - \mu)^2 \right\} \end{aligned}$$

donde la última expresión se obtiene al sumar y restar \bar{y} dentro de $(y_i - \theta)^2$. \square

Nótese que la distribución posterior conjunta no tiene una forma estructural conocida y por lo tanto no es posible realizar el método de integración analítica para obtener una constante de integración (Migon and Gamerman, 1999). Sin embargo, sí es posible obtener las distribuciones condicionales posteriores de θ y de σ^2 , notando que

$$p(\theta \mid \sigma^2, \mathbf{Y}) \propto p(\theta, \underbrace{\sigma^2}_{fijo} \mid \mathbf{Y}) \quad \text{y} \quad p(\sigma^2 \mid \theta, \mathbf{Y}) \propto p(\underbrace{\theta}_{fijo}, \sigma^2 \mid \mathbf{Y})$$

Es decir, para encontrar la distribución posterior condicional de $\theta \mid \sigma^2$, se utiliza la distribución posterior conjunta y los términos que no dependan de θ se incorporan en la constante de proporcionalidad. El mismo razonamiento se aplica para encontrar la distribución posterior condicional de $\sigma^2 \mid \theta$.

Resultado 4.2. *La distribución posterior condicional de θ es*

$$\theta \mid \sigma^2, \mathbf{Y} \sim \text{Normal}(\mu_n, \tau_n^2) \quad (4.3)$$

En donde las expresiones para μ_n y τ_n^2 están dadas por (3.28). Por otro lado, la distribución posterior condicional de σ^2 es

$$\sigma^2 \mid \theta, \mathbf{Y} \sim \text{Inversa} - \text{Gamma} \left(\frac{n_0 + n}{2}, \frac{v_0}{2} \right) \quad (4.4)$$

con $v_0 = n_0\sigma_0^2 + (n-1)S^2 + n(\bar{y} - \theta)^2$.

Demostración. Acudiendo a la distribución posterior conjunta, e incorporando los términos que no dependen de θ en la constante de proporcionalidad, se tiene que

$$p(\theta \mid \sigma^2, \mathbf{Y}) \propto \exp \left\{ -\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{y} - \theta)^2 - \frac{1}{2\tau^2}(\theta - \mu)^2 \right\}$$

Completando los cuadrados se encuentra una expresión idéntica a la función de distribución de una variable aleatoria con distribución $Normal(\mu_n, \tau_n^2)$. Similarmente, después de un desarrollo algebraico breve, se tiene la distribución posterior condicional de σ^2 . \square

Una vez encontradas las distribuciones posteriores condicionales de θ y σ^2 , es posible obtener la estimación puntual de estos parámetros usando métodos de Montecarlo, específicamente el muestreo de Gibbs que, en el contexto de este capítulo, se resume en los siguientes pasos:

1. Fijar un valor inicial para θ , denotado por $\theta_{(1)}$.
2. Simular un valor de la distribución de $\sigma^2 \mid \theta, \mathbf{Y}$ en (4.4). Nótese que el parámetro v_0 , que depende de θ , debe ser reemplazado por $\theta_{(1)}$ del paso anterior. Este valor simulado se denotará como $\sigma_{(1)}^2$.
3. Simular un valor de la distribución de $\theta \mid \sigma^2, \mathbf{Y}$ en (4.3). Nótese que en μ_n y τ_n^2 se debe reemplazar σ^2 por $\sigma_{(1)}^2$. Este valor simulado se denotará como $\theta_{(2)}$.
4. Repetir los pasos (2) y (3) hasta completar un número de iteraciones suficientes para alcanzar la convergencia en ambos parámetros.

Después de ejecutar el muestreo de Gibbs, se eliminan los primeros valores simulados para descartar la influencia del valor inicial; además, posiblemente se deba efectuar la fase de *thinning* para eliminar las correlaciones que pueden estar presentes en las cadenas generadas. Posteriormente, se obtendrán los valores finales simulados de las distribuciones de θ y σ^2 , con los cuales se podrá calcular las estimaciones respectivas, además de estimar los intervalos de credibilidad resultantes con los percentiles muestrales de los valores simulados.

En cuanto a la distribución predictiva para una nueva observación \tilde{y} , esta está dada por la siguiente expresión

$$p(\tilde{y} \mid \mathbf{Y}) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty p(\tilde{y} \mid \theta, \sigma^2) p(\theta, \sigma^2 \mid \mathbf{Y}) d\theta d\sigma^2$$

Hallar esta distribución de forma exacta no es fácil, y podemos optar por conocer el comportamiento probabilístico de \tilde{y} por medio de la simulación estadística. Tal como se explicó en el capítulo anterior, se debe simular en primer lugar valores de θ y de σ^2 de la distribución posterior $p(\theta, \sigma^2 \mid \mathbf{Y})$ - usando el muestreo de Gibbs - y posteriormente, valores de \tilde{y} de la distribución $p(\tilde{y} \mid \theta, \sigma^2)$.

Por otro lado, si se quiere conocer el comportamiento de una nueva muestra aleatoria Y_1^*, \dots, Y_n^* , es posible hacerlo por medio de la distribución predictiva de la media \bar{Y}^* , simulando en primer lugar valores de θ y de σ^2 de la distribución posterior $p(\theta, \sigma^2 \mid \mathbf{Y})$ - usando el muestreo de Gibbs - y posteriormente valores de \bar{Y}^* de la distribución $N(\theta, \frac{\sigma^2}{n^*})$.

Ejemplo 4.1. Efron (2010) consideró un conjunto de datos que muestran la función renal de 157 individuos que se sometieron a una prueba médica exhaustiva en un hospital. Los resultados de la prueba renal están en un intervalo de -6 puntos a 4 puntos. Entre más alto sea el resultado, se concluye que el riñón del individuo es más sano. Nótese que estas pruebas son importantes para predecir el comportamiento de un riñón donado a un paciente con problemas renales.

En principio, es de interés para el investigador conocer la media y la dispersión de estos datos, para poder analizar a fondo la situación de los pacientes que esperan un transplante. Dado que se trata de una primera aproximación, se prefiere utilizar distribuciones previas no informativas para los parámetros de la media y varianza. Lo anterior se logra en STAN definiendo las distribuciones previas de `theta ~ normal(0, 10000)` y de `sigma2 ~ inv_gamma(0.001, 0.001)`. De esta forma, la distribución previa de θ está centrada en cero, pero con una varianza muy grande al igual que la distribución de la varianza, los cuales representan distribuciones previas no informativas.

El siguiente código en STAN muestra cómo se lleva a cabo la inferencia.

```
NormalMeanVar <- '
data {
  int<lower=0> n;
  real y[n];
}
parameters {
  real sigma;
  real theta;
}
transformed parameters {
  real sigma2;
  sigma2 = pow(sigma, 2);
}
model {
  y ~ normal(theta, sigma);
  theta ~ normal(0, 1000);
  sigma2 ~ inv_gamma(0.001, 0.001);
}
```

```

}
'

y <- c( 1.69045085, -1.41076082, -0.27909483,
        -0.91387987,  3.21868429, -1.47282460,
        -0.96524353, -2.45084934,  1.03838153,
         1.79928679,  0.97826621,  0.67463830,
        -1.08665864, -0.00509027,  0.43708128)
n <- length(y)

sample_data <- list(y = y,
                    n = n)
NormalMVfit <- stan(model_code = NormalMeanVar,
                    data = sample_data, verbose = FALSE)

print(NormalMVfit, digits = 4,
      pars = c("theta", "sigma", "sigma2"), probs = c(0.025, 0.975))

## Inference for Stan model: de363179728705eed697c67cf38b3332.
## 4 chains, each with iter=2000; warmup=1000; thin=1;
## post-warmup draws per chain=1000, total post-warmup draws=4000.
##
##           mean se_mean      sd    2.5%  97.5% n_eff  Rhat
## theta  0.0657  0.0090  0.4066 -0.7606  0.8497  2033 1.0025
## sigma  1.5419  0.0078  0.3092  1.0756  2.2731  1573 1.0007
## sigma2 2.4729  0.0287  1.0605  1.1568  5.1670  1364 1.0012
##
## Samples were drawn using NUTS(diag_e) at Mon Jun 21 23:19:07 2021.
## For each parameter, n_eff is a crude measure of effective sample size,
## and Rhat is the potential scale reduction factor on split chains (at
## convergence, Rhat=1).

```

Después de ejecutar las iteraciones necesarias, la salida del anterior código muestra una estimación puntual para la esperanza de Y de 0.09 con un intervalo de credibilidad del 95 % dado por (-0.71, 0.91). Por otro lado, la estimación puntual de la desviación estándar de Y es de 1.55 con un intervalo de credibilidad del 95 % dado por (1.09, 2.31).

Las figuras 4.1 muestran la distribución posterior para este ejemplo, junto con la estimación puntual, correspondiente a la desviación estándar.

A continuación se ilustra el uso de R en la programación de un algoritmo de Gibbs para los datos del ejemplo anterior. Se recalca que se utiliza la librería `MCMCpack` (Martin et al., 2011) para generar las realizaciones de la distribución Inversa-Gamma.

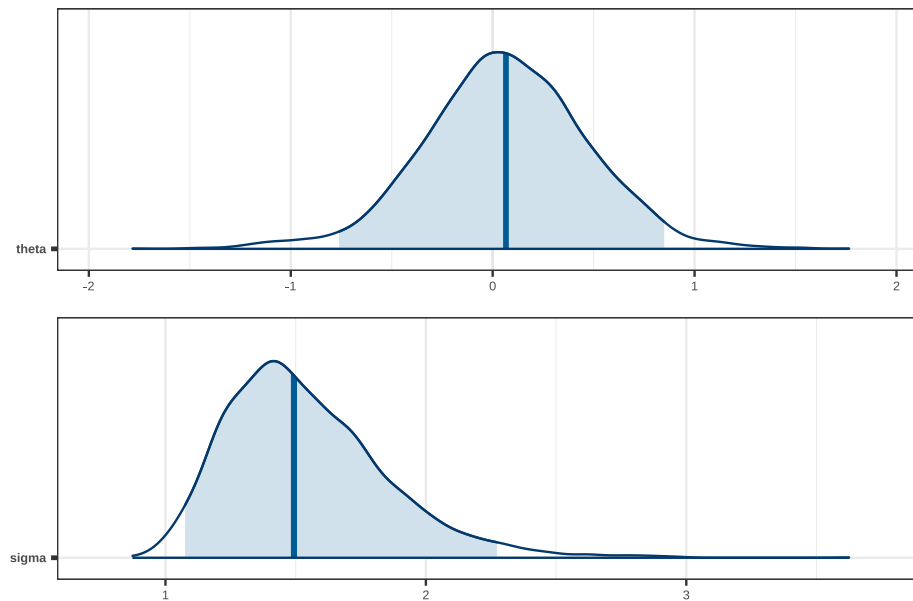


Figura 4.1: Distribuciones posteriores.

```
library(MCMCpack)

#parametros previos de theta
mu <- 0
tau2 <- 1000
#parametros previos de sigma2
a <- 0.001
b <- 0.001

nsim <- 5000
theta.pos <- rep(NA, nsim)
sigma2.pos <- rep(NA, nsim)

# Valor inicial de theta
theta.pos[1] <- 0

#parametros posteriores de sigma2
a.n <- a + n/2
b.n <- b + ((n - 1) * var(y) + n * (mean(y) - theta.pos[1]))/2
#simulacion de la distribucion posterior condicional de theta
sigma2.pos[1] <- rinvgamma(1, a.n, b.n)

#####
```

```

# Muestreo de Gibbs #
#####

for(i in 2:nsim){
  #parametros posteriores de theta
  tau2.n <- 1 / ((n/sigma2.pos[i - 1]) + (1/tau2))
  mu.n <- tau2.n * (mean(y) * (n/sigma2.pos[i - 1]) + mu/tau2)
  #simulacion de la distribucion posterior condicional de theta
  theta.pos[i] <- rnorm(1, mean=mu.n, sd=sqrt(tau2.n))
  #parametros posteriores de sigma2
  a.n <- a + n/2
  b.n <- b + ((n - 1) * var(y) + n * (mean(y) - theta.pos[i])) / 2
  #simulacion de la distribucion posterior condicional de theta
  sigma2.pos[i] <- rinvgamma(1, a.n, b.n)
}

mean(theta.pos)

## [1] 0.09059077

quantile(theta.pos, c(0.025, 0.975))

##          2.5%          97.5%
## -0.6912883  0.9094063

mean(sqrt(sigma2.pos))

## [1] 1.533898

quantile(sqrt(sigma2.pos), c(0.025, 0.975))

##          2.5%          97.5%
## 0.9983506  2.2915069

```

De donde podemos concluir que los resultados de este algoritmo de Gibbs coinciden con la estimación puntual para la esperanza de Y , su desviación estándar, y sus intervalos de credibilidad del 95 %, obtenidos con STAN.

Las figuras 4.2 muestran que la convergencia de las cadenas es inmediata y que además no existen correlaciones importantes en los valores simulados de θ y σ^2 . Por tanto, se concluye que se pueden utilizar directamente estos valores para la obtención de las estimaciones. Finalmente se ilustra la forma de obtener la distribución predictiva para el promedio muestral de 5 nuevos pacientes.

```

n.ast <- 5
y.bar <- c()

for(i in 1:(nsim/2)){
  y.bar[i] <- rnorm(1,

```

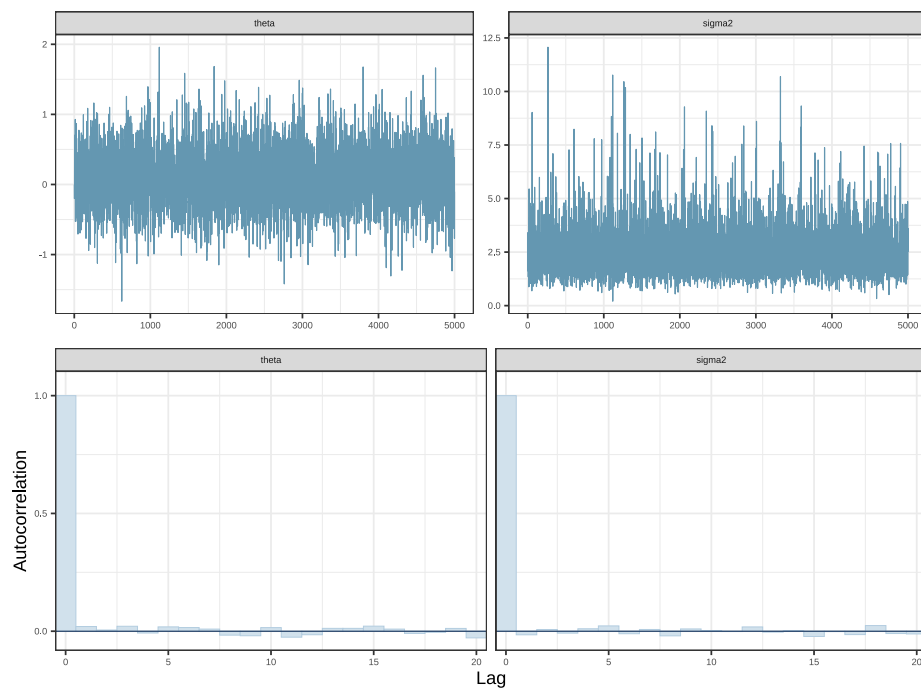


Figura 4.2: Convergencia de las distribuciones posteriores y diagramas de la función de autocorrelación en las cadenas.

```

        theta.pos[i + nsim/2],
        sqrt(sigma2.pos[i + nsim/2]/n.ast))
}

mean(y.bar)

## [1] 0.1106463
sd(y.bar)

## [1] 0.7960929
quantile(y.bar,c(0.025,0.975))

##      2.5%      97.5%
## -1.523240  1.607851

```

Podemos ver que se espera que el promedio de las pruebas en 5 nuevos pacientes es de 0.1106463, con un intervalo de credibilidad del 95 % que es mucho más ancho que el de θ , pues naturalmente \bar{Y} tiene mayor incertidumbre que los parámetros del modelo; además, el tamaño de nuevos datos es de cinco, el cual es pequeño y hace que el pronóstico para \bar{Y}^* no sea muy preciso.

4.1.2. Parámetros dependientes

En algunas situaciones es muy útil asumir una distribución previa conjugada, y para lograr eso no es posible establecer que los parámetros tengan distribuciones previas independientes. Bajo esta situación, la inferencia posterior de los parámetros de interés debe ser llevada a cabo en dos etapas: En la primera, se debe establecer la distribución previa conjunta para ambos parámetros siguiendo la siguiente regla

$$p(\theta, \sigma^2) = p(\sigma^2)p(\theta | \sigma^2)$$

En la segunda etapa ya es posible analizar propiamente cada uno de los parámetros de interés siguiendo otra sencilla regla análoga

$$p(\theta, \sigma^2 | \mathbf{Y}) \propto p(\mathbf{Y} | \theta, \sigma^2)p(\theta, \sigma^2)$$

La anterior formulación conlleva a asignar una distribución previa para θ dependiente del parámetro σ^2 . Esto quiere decir que en la distribución $p(\theta | \sigma^2)$, el valor de σ^2 se considera una constante fija y conocida, esta distribución previa está dada por¹

$$p(\theta | \sigma^2) \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2/c_0)$$

¹La forma como la distribución previa de θ dependa de σ^2 es coherente con la información de Fisher sobre θ dada por σ^{-2} .

donde c_0 es una constante. Por otro lado, y siguiendo los argumentos del capítulo anterior, una posible opción para la distribución previa de σ^2 , que no depende de θ , corresponde a

$$p(\sigma^2) \sim \text{Inversa} - \text{Gamma}(n_0/2, n_0\sigma_0^2/2)$$

De esta forma, podemos encontrar la distribución conjunta previa de θ y σ^2 como sigue:

Resultado 4.3. *La distribución conjunta previa de los parámetros θ y σ^2 está dada por*

$$\theta, \sigma^2 \sim \text{Normal} - \text{Inversa} - \text{Gamma}\left(\mu, c_0, \frac{n_0 + 1}{2}, \frac{n_0\sigma_0^2}{2}\right)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} p(\theta, \sigma^2) &= p(\sigma^2)p(\theta | \sigma^2) \\ &\propto (\sigma^2)^{-\frac{n_0}{2}-1} \exp\left\{-\frac{n_0\sigma_0^2}{2\sigma^2}\right\} (\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{c_0}{2\sigma^2}(\theta - \mu)^2\right\} \\ &= (\sigma^2)^{-\frac{n_0+1}{2}-1} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} [n_0\sigma_0^2 + c_0(\theta - \mu)^2]\right\} \end{aligned}$$

la cual corresponde a la forma de la función de densidad de la distribución Normal-Inversa-Gamma. \square

Una vez encontrada la distribución conjunta previa, procedemos a encontrar la distribución conjunta posterior, y así poder encontrar las estimaciones de θ y σ^2 .

Resultado 4.4. *La distribución posterior conjunta de los parámetros θ y σ^2 está dada por*

$$\theta, \sigma^2 | \mathbf{Y} \sim \text{Normal} - \text{Inversa} - \text{Gamma}\left(\mu_n, c_0 + n, \frac{n_0 + n + 1}{2}, \beta\right).$$

con

$$\beta = \frac{1}{2} \left(n_0\sigma_0^2 + (n-1)S^2 + \frac{c_0n}{c_0+n}(\mu - \bar{y})^2 \right)$$

y

$$\mu_n = \frac{\frac{n}{\sigma^2}\bar{Y} + \frac{c_0}{\sigma^2}\mu}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{c_0}{\sigma^2}} = \frac{n\bar{Y} + c_0\mu}{n + c_0}$$

Demostración. En primer lugar, recordamos que la función de verosimilitud de la muestra está dada por

$$p(\mathbf{Y} | \theta, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} [(n-1)S^2 + n(\bar{y} - \theta)^2]\right\} \quad (4.5)$$

Por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned} p(\theta, \sigma^2 \mid \mathbf{Y}) &\propto p(\mathbf{Y} \mid \theta, \sigma^2) p(\theta, \sigma^2) \\ &\propto (\sigma^2)^{-\frac{n_0+n+1}{2}-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [n_0\sigma_0^2 + c_0(\theta - \mu)^2 + (n-1)S^2 + n(\bar{y} - \theta)^2] \right\} \\ &= (\sigma^2)^{-\frac{n_0+n+1}{2}-1} \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[n_0\sigma_0^2 + (n-1)S^2 + (c_0+n)(\theta - \mu_n)^2 + \frac{c_0n}{c_0+n}(\mu - \bar{y})^2 \right] \right\} \quad (4.7)$$

puesto que

$$c_0(\theta - \mu)^2 + n(\bar{y} - \theta)^2 = (c_0 + n)(\theta - \mu_n)^2 + \frac{c_0n}{c_0+n}(\mu - \bar{y})^2$$

□

Para encontrar las distribuciones marginales posterior de cada uno de los parámetros se procede de la siguiente forma:

1. Para hallar la distribución posterior condicional de θ , dada por $P(\theta \mid \sigma^2, \mathbf{Y})$, se debe considerar que σ^2 es una constante fija y conocida, tal como se consideró al principio de esta sección. Basado en lo anterior, es posible utilizar la siguiente regla de probabilidad

$$P(\theta \mid \sigma^2, \mathbf{Y}) = \frac{p(\theta, \sigma^2 \mid \mathbf{Y})}{p(\sigma^2, \mathbf{Y})} p(\mathbf{Y}) \propto p(\theta, \sigma^2 \mid \mathbf{Y})$$

Lo anterior sugiere que la distribución marginal posterior de θ , $p(\theta \mid \sigma^2, \mathbf{Y})$, se encuentra utilizando la distribución posterior conjunta, $p(\theta, \sigma^2 \mid \mathbf{Y})$, suponiendo que todas las expresiones que involucren al valor σ^2 se pueden incluir en la constante de proporcionalidad

2. Dado que σ^2 no depende de ningún otro parámetro entonces, utilizando la distribución posterior conjunta, es posible encontrar su distribución marginal posterior de la siguiente forma

$$p(\sigma^2 \mid \mathbf{Y}) = \int p(\theta, \sigma^2 \mid \mathbf{Y}) d\theta$$

3. Un razonamiento similar se puede formular para el parámetro θ ; utilizando la distribución posterior conjunta, es posible encontrar su distribución marginal posterior de la siguiente forma

$$p(\theta \mid \mathbf{Y}) = \int p(\theta, \sigma^2 \mid \mathbf{Y}) d\sigma^2$$

Resultado 4.5. La distribución posterior de θ condicional a σ^2, \mathbf{Y} está dada por

$$\theta \mid \sigma^2, \mathbf{Y} \sim \text{Normal}(\mu_n, \sigma^2/(n + c_0))$$

$$\text{con } \mu_n = \frac{n\bar{y} + c_0\mu}{n + c_0}.$$

Demostración. Acudiendo a la distribución posterior conjunta dada en (4.6), tenemos que

$$\begin{aligned}
 p(\theta \mid \sigma^2, \mathbf{Y}) &\propto p(\theta, \sigma^2 \mid \mathbf{Y}) \\
 &\propto (\sigma^2)^{-\frac{n_0+n+1}{2}-1} \\
 &\quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[n_0\sigma_0^2 + (n-1)S^2 + (c_0+n)(\theta - \mu_n)^2 + \frac{c_0n}{c_0+n}(\mu - \bar{y})^2 \right] \right\} \\
 &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2}(c_0+n)(\theta - \mu_n)^2 \right\}
 \end{aligned}$$

la cual corresponde a la forma de la función de densidad de la distribución $Normal(\mu_n, \sigma^2/(n+c_0))$. \square

En el anterior resultado, la media de la distribución condicional posterior μ_n se puede escribir como $\mu_n = \frac{n}{n+c_0}\bar{y} + \frac{c_0}{n+c_0}\mu$, promedio ponderado entre la estimación clásica \bar{y} y la estimación previa μ . Observando que las ponderaciones $\frac{n}{n+c_0}$ y $\frac{c_0}{n+c_0}$ forman una combinación lineal convexa, se puede definir a c_0 como el número de observaciones en la información previa. De esta forma, las ponderaciones de la estimación clásica y la estimación previa dependerán directamente de los tamaños muestrales respectivos.

Resultado 4.6. *La distribución marginal posterior del parámetro σ^2 es*

$$\sigma^2 \mid \mathbf{Y} \sim Inversa - Gamma \left(\frac{n+n_0}{2}, \frac{(n+n_0)\sigma_n^2}{2} \right)$$

Donde $(n+n_0)\sigma_n^2 = n_0\sigma_0^2 + (n-1)S^2 + \frac{c_0n}{c_0+n}(\mu - \bar{y})^2$ corresponde a una suma ponderada de la varianza previa, la varianza muestral y la diferencia entre la media muestral y la media previa.

Demostración. De la distribución posterior conjunta (4.6), e integrando con respecto a θ , se tiene que

$$\begin{aligned}
p(\sigma^2 \mid \mathbf{Y}) &= \int p(\theta, \sigma^2 \mid \mathbf{Y}) d\theta \\
&\propto (\sigma^2)^{-\frac{n_0+n+1}{2}-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[n_0\sigma_0^2 + (n-1)S^2 + \frac{c_0n}{c_0+n}(\mu - \bar{y})^2 \right] \right\} \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{n+c_0}{2\sigma^2}(\theta - \mu_n)^2 \right\} d\theta \\
&\propto (\sigma^2)^{-\frac{n_0+n}{2}-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[n_0\sigma_0^2 + (n-1)S^2 + \frac{c_0n}{c_0+n}(\mu - \bar{y})^2 \right] \right\} \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{n+c_0}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{n+c_0}{2\sigma^2}(\theta - \mu_n)^2 \right\} d\theta \\
&\propto (\sigma^2)^{-\frac{n_0+n}{2}-1} \exp \left\{ -\frac{(n+n_0)\sigma_n^2}{2\sigma^2} \right\}
\end{aligned}$$

la cual corresponde a la forma funcional de la densidad *Inversa - Gamma*($\frac{n+n_0}{2}, \frac{(n+n_0)\sigma_n^2}{2}$). \square

Dadas las distribuciones $p(\sigma^2 \mid \mathbf{Y})$ y $p(\theta \mid \sigma^2, \mathbf{Y})$, podemos proceder de la siguiente forma para obtener valores simulados de θ y σ^2 y por consiguiente sus estimaciones puntuales. Si el número de iteraciones se fija como G , entonces se debe seguir el siguiente algoritmo:

1. Simular G valores de la distribución de $\sigma^2 \mid \mathbf{Y}$; es decir, de la distribución *Inversa - Gamma* encontrada en el anterior resultado. Estos valores se denotan por $\sigma_{(1)}^2, \sigma_{(2)}^2, \dots, \sigma_{(G)}^2$.
2. Para cada valor de $\sigma_{(g)}^2$, con $g = 1, \dots, G$, simular un valor de la distribución de $\theta \mid \sigma^2, \mathbf{Y}$; es decir, de la distribución $N(\mu_n, \sigma^2/(n+c_0))$, donde σ^2 se reemplaza por $\sigma_{(g)}^2$. De esta forma, se obtiene los valores $\theta_{(1)}, \theta_{(2)}, \dots, \theta_{(G)}$.

Es claro que en el anterior algoritmo, no es necesario fijar algún valor inicial para θ o para σ^2 . De la misma forma no existirán correlaciones sustantivas entre los valores simulados para ningún parámetro. Por lo tanto, estos valores se pueden usar directamente para el cálculo de las estimaciones, y no es necesario descartar los primeros valores simulados, ni realizar la fase de *thinning*.

Ahora bien, existe otra alternativa para obtener la estimación de θ y σ^2 , la cual depende directamente de la distribución posterior de cada parámetro. En efecto, la distribución posterior de σ^2 ya se encontró en el resultado 4.6, resta encontrar la distribución posterior de θ , la cual se presenta en el siguiente resultado.

Resultado 4.7. *La distribución posterior del parámetro θ corresponde a una t no estandarizada con $n_0 + n$ grados de libertad, parámetro de localización*

$$\mu_n = \frac{n\bar{Y} + c_0\mu}{n + c_0} \text{ y parámetro de escala } \frac{\sigma_n}{\sqrt{c_0 + n}}, \text{ con } (n + n_0)\sigma_n^2 = n_0\sigma_0^2 + (n -$$

1) $S^2 + \frac{c_0 n}{c_0 + n}(\mu - \bar{y})^2$. Esto es,

$$\theta \mid \mathbf{Y} \sim t_{n+n_0} \left(\mu_n, \frac{\sigma_n^2}{c_0 + n} \right)$$

Demostración. Partiendo de la distribución posterior conjunta e integrando con respecto a σ^2 , se tiene que

$$\begin{aligned} p(\theta \mid \mathbf{Y}) &= \int_0^\infty p(\theta, \sigma^2 \mid \mathbf{Y}) d\sigma^2 \\ &\propto \int_0^\infty \left(\frac{1}{\sigma^2} \right)^{\frac{n_0+n+1}{2}+1} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [(n_0+n)\sigma_n^2 + (c_0+n)(\theta - \mu_n)^2] \right\} d\sigma^2 \end{aligned}$$

Haciendo un cambio de variable tal que

$$z = \frac{A}{2\sigma^2}, \quad \text{donde } A = (n_0+n)\sigma_n^2 + (c_0+n)(\theta - \mu_n)^2$$

Por tanto

$$d\sigma^2 = -\frac{A}{2z^2} dz$$

Volviendo a la integral en cuestión, se tiene que

$$\begin{aligned} p(\theta \mid \mathbf{Y}) &\propto \left(\frac{1}{A} \right)^{\frac{n_0+n+1}{2}+1} \int_0^\infty \frac{-A}{2z^2} (2z)^{\frac{n_0+n+1}{2}+1} e^{-z} dz \\ &\propto A^{-\frac{n_0+n+1}{2}} \underbrace{\int_0^\infty z^{\frac{n_0+n+1}{2}-1} e^{-z} dz}_{\text{Gamma}\left(\frac{n_0+n+1}{2}, 1\right)} \\ &\propto A^{-\frac{n_0+n+1}{2}} \\ &= [(n_0+n)\sigma_n^2 + (c_0+n)(\theta - \mu_n)^2]^{-\frac{n_0+n+1}{2}} \\ &\propto \left[1 + \frac{(c_0+n)(\theta - \mu_n)^2}{(n_0+n)\sigma_n^2} \right]^{-\frac{n_0+n+1}{2}} \\ &= \left[1 + \frac{1}{n_0+n} \left(\frac{\theta - \mu_n}{\sigma_n/\sqrt{c_0+n}} \right)^2 \right]^{-\frac{n_0+n+1}{2}} \end{aligned}$$

la cual corresponde a la forma de la función de densidad de la distribución deseada. \square

Las distribuciones encontradas en los resultados 4.6 y 4.7 permiten estimar directamente los parámetros θ y σ^2 usando las esperanzas teóricas de las distribuciones posteriores. Por ende, las estimaciones puntuales son:

$$\hat{\theta} = \mu_n = \frac{n\bar{Y} + c_0\mu}{n + n_0}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(n + n_0)\sigma_n^2/2}{(n + n_0)/2 - 1} = \frac{(n + n_0)\sigma_n^2}{n + n_0 - 2} \approx \sigma_n^2 = \frac{n_0\sigma_0^2 + (n - 1)S^2 + \frac{c_0n}{c_0+n}(\mu - \bar{y})^2}{n + n_0}$$

Los intervalos del $(1 - \alpha) \times 100\%$ de credibilidad para θ y σ^2 se construyen usando los percentiles $\alpha/2$ y $1 - \alpha/2$ de las respectivas distribuciones posteriores dadas en los resultados mencionados anteriormente. Ilustramos el uso de la metodología en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.2. Para los datos de función renal Efron (2010) que se muestran en el Ejemplo 4.1, suponga que la información previa está contenida en la medición de función renal para una muestra de 12 pacientes dadas por: -1.3619, -1.1116, -0.4744, -0.5663, 2.2056, 0.9491, 0.2298, -0.7933, 1.0198, -0.9850, 3.5679 y -1.9504. La media y la varianza muestral de estas 12 observaciones corresponden a $\mu = 0.060775$ y $\sigma_0^2 = 2.598512$; por consiguiente $c_0 = n_0 = 12$.

Por otro lado, la media y la varianza muestral de los 15 pacientes en la información actual son $\bar{y} = 0.08349249$ y $S^2 = 2.301684$. De esta forma, los parámetros de las distribuciones marginales posteriores de θ y σ^2 se pueden calcular como $\mu_n = \frac{15}{15+12} \times 0.08349249 + \frac{12}{15+12} \times 0.060775 = 0.07339583$ y

$$\sigma_n^2 = \frac{12 * 2.598512 + 14 * 2.301684 + 6.666667 * (0.060775 - 0.08349249)^2}{15 + 12} = 2.348487$$

En conclusión, las distribuciones marginales posterior de θ y σ^2 están dadas por

$$\theta|\mathbf{Y} \sim t_{27}(0.07339583, 2.348487/27 = 0.086981)$$

y

$$\sigma^2|\mathbf{Y} \sim Inversa - Gamma(27/2 = 13.5, 27 * 2.348487/2 = 31.70457)$$

Así, la estimación Bayesiana de θ es $\mu_n = 0.073$ y un intervalo de credibilidad del 95 % para θ se puede calcular como $0.073 \pm t_{27,0.975} * \sqrt{0.086981} = (-0.53, 0.68)$. Por otro lado, la estimación Bayesiana de σ^2 está dada por $31.70457/(13.5 - 1) = 2.53$, y un intervalo de credibilidad del 95 % para σ^2 se puede calcular como los percentiles 2.5 % y 97.5 % de la distribución *Inversa - Gamma*(13.5, 31.70457), dados por (1.5, 4.4). Los anteriores cálculos se ilustran en el siguiente código R.

```

library(psc1)
# Datos de la informacion previa
x <- c(-1.3619, -1.1116, -0.4744, -0.5663,
       2.2056,  0.9491,  0.2298, -0.7933,
       1.0198, -0.9850,  3.5679, -1.9504)
# Datos de la informacion actual
y <- c( 1.69045085, -1.41076082, -0.27909483,
       -0.91387987,  3.21868429, -1.47282460,
       -0.96524353, -2.45084934,  1.03838153,
       1.79928679,  0.97826621,  0.67463830,
       -1.08665864, -0.00509027,  0.43708128)
# Paramatros de la distribucion previa
n0 <- c0 <- 12
mu <- mean(x)
sigma2_0 <- var(x)

# Informacion
n <- length(y)
bar.y <- mean(y)
S2 <- var(y)

# Algunos paramatros de la distribucion posterior
mu.n <- (n * bar.y + c0 * mu)/(n + n0)
sigma2_n <- (n0 * sigma2_0 + (n - 1) * S2 +
            c0 * n * (mu - bar.y)^2/(c0 + n))/(n + n0)
# Estimacion puntual
theta.hat <- mu.n
sigma2.hat <- (n + n0) * sigma2_n/(n + n0 - 2)
theta.hat

## [1] 0.07339583
sigma2.hat

## [1] 2.536367
# Intervalo de credibilidad de 95% para theta
mu.n + qt(c(0.025, 0.975), df = n + n0) *
  sqrt(sigma2_n/(n + n0))

## [1] -0.5317412  0.6785329
# Intervalo de credibilidad de 95% para sigma2
qgamma(0.025, alpha = (n + n0)/2,
      beta = (n + n0) * sigma2_n/2)

## [1] 1.467991

```

```
qgamma(0.975, alpha = (n + n0)/2,
       beta = (n + n0) * sigma2_n/2)
```

```
## [1] 4.351026
```

Otra forma de estimar los parámetros θ y σ^2 es utilizando métodos de simulación directa. De esta forma, como se expuso anteriormente, se generan primero los valores de σ^2 y posteriormente los valores de θ .

```
n.sim <- 5000
sigma2.res <- rigamma(n.sim, (n + n0)/2,
                    (n + n0) * sigma2_n/2)

theta.res <- c()
for(i in 1:n.sim){
  theta.res[i] <- rnorm(1, mu.n, sqrt(sigma2.res[i]/(n + c0)))
}

# Estimaciones puntuales
mean(theta.res)
```

```
## [1] 0.06467424
```

```
mean(sigma2.res)
```

```
## [1] 2.53312
```

```
# Intervalos de credibilidad del 95%
quantile(theta.res, c(0.025, 0.975))
```

```
##      2.5%      97.5%
## -0.5560560  0.6429974
```

```
quantile(sigma2.res, c(0.025, 0.975))
```

```
##      2.5%      97.5%
## 1.48546  4.34731
```

4.1.3. Parámetros no informativos

En esta sección consideramos el tratamiento de los datos cuando no tenemos información previa disponible. Suponga que $\mathbf{Y} = \{Y_1, \dots, Y_n\}$ corresponde a una muestra de variables aleatorias con distribución $Normal(\theta, \sigma^2)$. Luego, la función de distribución conjunta o verosimilitud está dada por

$$p(\mathbf{Y} | \theta, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \theta)^2 \right\}$$

En primer lugar suponga que los parámetros tienen distribuciones previas independientes. Por ende, en esta primera etapa se realizará el análisis suponiendo que estas distribuciones son no informativas. Lo anterior implica que la distribución previa conjunta de los parámetros de interés está dada por

$$p(\theta, \sigma^2) = p(\theta)p(\sigma^2) \quad (4.8)$$

Como la distribución previa de θ es normal, es fácil verificar que ésta empieza a tener las características propias de una distribución no informativa cuando la varianza de la misma se vuelve muy grande, sin importar el valor de la media. Cuando esto sucede, la forma de la distribución previa de θ se torna plana y es lógico pensar que puede ser acercada mediante una distribución constante, tal que

$$p(\theta) \propto \text{cte}$$

Por otro lado, [Gelman et al. \(2003\)](#) afirmaN que la distribución Inversa-Gamma, la cual es la distribución previa para el parámetro σ^2 , se vuelve no informativa cuando los hiper-parámetros toman valores muy cercanos a cero. De esta forma haciendo tender $\alpha \rightarrow 0$ y $\beta \rightarrow 0$, entonces la distribución previa de σ^2 se convierte en

$$p(\sigma^2) \propto \sigma^{-2}$$

la cual coincide con la distribución previa no informativa de Jeffreys discutida en las secciones anteriores. Por lo anterior, la distribución previa no informativa conjunta está dada por

$$p(\theta, \sigma^2) \propto \sigma^{-2} \quad (4.9)$$

Bajo este marco de referencia se tiene el siguiente resultado sobre la distribución posterior de θ

Resultado 4.8. *La distribución posterior del parámetro θ sigue una distribución t no estandarizada con $n - 1$ grados de libertad, parámetro de localización \bar{Y} y parámetro de escala $\frac{S^2}{n}$; esto es,*

$$\theta \mid \mathbf{Y} \sim t_{n-1} \left(\bar{y}, \frac{S^2}{n} \right).$$

Donde $(n - 1)S^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$. Esta distribución también puede expresarse como

$$\frac{\theta - \bar{y}}{S/\sqrt{n}} \mid \mathbf{Y} \sim t_{n-1}$$

donde t_{n-1} denota la distribución t estandarizada con $n - 1$ grados de libertad.

Demostración. En primer lugar nótese que la distribución posterior conjunta de los parámetros de interés es

$$\begin{aligned}
 p(\theta, \sigma^2 \mid \mathbf{Y}) &\propto p(\theta, \sigma^2) p(\mathbf{Y} \mid \theta, \sigma^2) \\
 &\propto \frac{1}{\sigma^2} \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \theta)^2 \right\} \\
 &\propto \left(\frac{1}{\sigma^2} \right)^{n/2+1} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 + n(\bar{y} - \theta)^2 \right] \right\} \\
 &= \left(\frac{1}{\sigma^2} \right)^{n/2+1} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [(n-1)S^2 + n(\bar{y} - \theta)^2] \right\} \quad (4.10)
 \end{aligned}$$

Para hallar la distribución marginal posterior de θ es necesario integrar la anterior expresión con respecto a σ^2 . Con esto, se tiene que

$$\begin{aligned}
 p(\theta \mid \mathbf{Y}) &= \int_0^\infty p(\theta, \sigma^2 \mid \mathbf{Y}) d\sigma^2 \\
 &\propto \int_0^\infty \left(\frac{1}{\sigma^2} \right)^{n/2+1} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [(n-1)S^2 + n(\bar{y} - \theta)^2] \right\} d\sigma^2
 \end{aligned}$$

Haciendo un cambio de variable tal que

$$z = \frac{A}{2\sigma^2}, \quad \text{donde } A = (n-1)S^2 + n(\bar{y} - \theta)^2$$

Por tanto

$$d\sigma^2 = -\frac{A}{2z^2} dz$$

Entonces, volviendo a la integral en cuestión, se tiene que

$$\begin{aligned}
 p(\theta \mid \mathbf{Y}) &\propto \left(\frac{1}{A} \right)^{n/2+1} \int_\infty^0 \frac{-A}{2z^2} (2z)^{n/2+1} e^{-z} dz \\
 &\propto A^{-n/2} \underbrace{\int_0^\infty z^{n/2-1} e^{-z} dz}_{\text{Gamma}(n/2)} \\
 &\propto A^{-n/2} \\
 &= [(n-1)S^2 + n(\bar{y} - \theta)^2]^{-n/2} \\
 &\propto \left[1 + \frac{n(\bar{y} - \theta)^2}{(n-1)S^2} \right]^{-n/2} = \left[1 + \frac{1}{n-1} \left(\frac{\bar{y} - \theta}{S/\sqrt{n}} \right)^2 \right]^{-\frac{(n-1)+1}{2}}
 \end{aligned}$$

la cual corresponde a la función de densidad de distribución de una variable aleatoria con distribución $t_{n-1}(\bar{y}, S^2/n)$. \square

Resultado 4.9. La distribución posterior del parámetro σ^2 sigue una distribución

$$\sigma^2 \mid \mathbf{Y} \sim \text{Inversa} - \text{Gamma}((n-1)/2, (n-1)S^2/2).$$

Demostración. Utilizando el mismo argumento del anterior resultado, se tiene que

$$\begin{aligned} p(\sigma^2 \mid \mathbf{Y}) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(\theta, \sigma^2 \mid \mathbf{Y}) d\theta \\ &\propto \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{n/2+1} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[(n-1)S^2 + n(\bar{y} - \theta)^2]\right\} d\theta \\ &= \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{n/2+1} \sqrt{2\pi\sigma^2/n} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(n-1)S^2\right\} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/n}} \exp\left\{-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{y} - \theta)^2\right\} d\theta}_{\text{vale 1}} \\ &\propto (\sigma^2)^{-n/2-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(n-1)S^2\right\} \\ &= (\sigma^2)^{-\frac{n-1}{2}-1} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(n-1)S^2\right\} \end{aligned}$$

La cual corresponde a la función de densidad de la distribución *Inversa* – *Gamma* $((n-1)/2, (n-1)S^2/2)$. \square

De los resultados ?? y ??, podemos ver que cuando no se dispone de información previa, la estimación bayesiana de θ y σ^2 están dadas por

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_B &= E(\theta \mid \mathbf{Y}) = \bar{Y} \\ \hat{\sigma}_B^2 &= E(\sigma^2 \mid \mathbf{Y}) = \frac{(n-1)S^2/2}{(n-1)/2-1} = \frac{n-1}{n-3}S^2 \approx S^2 \end{aligned}$$

Por consiguiente, podemos concluir que la estimación bayesiana de θ cuando no hay información previa es idéntica a la estimación clásica de θ , mientras que la de σ^2 es muy similar a la estimación clásica. En cuanto a la estimación por intervalo de credibilidad, podemos ver que un intervalo de credibilidad de $(1-\alpha) \times 100\%$ está dado por los percentiles $\alpha/2$ y $1-\alpha/2$ de la distribución $t_{n-1}\left(\bar{Y}, \frac{S^2}{n}\right)$. Se puede ver que estos corresponden a $\bar{Y} + t_{n-1, \alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$ y $\bar{Y} + t_{n-1, 1-\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$. En conclusión, un intervalo de credibilidad para θ está dado por $\bar{Y} \pm t_{n-1, 1-\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$, el cual es idéntico al intervalo de confianza para θ en la estadística clásica.

En cuanto al intervalo de credibilidad para σ^2 , este está dado por los percentiles $\alpha/2$ y $1 - \alpha/2$ de la distribución *Inversa - Gamma* $((n-1)/2, (n-1)S^2/2)$. En la estadística clásica, el intervalo de confianza para σ^2 está dada por

$$IC(\sigma^2) = \left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1, \alpha/2}^2} \right)$$

Aunque la forma de estos dos intervalos son muy diferentes, resultan ser idénticos. A continuación mostramos el porqué. Suponga que a es el percentil $\alpha/2$ de la distribución *Inversa - Gamma* $((n-1)/2, (n-1)S^2/2)$, esto es, si $X \sim \text{Inversa - Gamma}((n-1)/2, (n-1)S^2/2)$, entonces $Pr(X < a) = \alpha/2$. Ahora por propiedades de la distribución *Inversa - Gamma*, se tiene que $\frac{X}{(n-1)S^2} \sim \text{Inversa - Gamma}(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2})$. Por la relación entre la distribución *Gamma* y la distribución *Inversa - Gamma*, tenemos que $\frac{(n-1)S^2}{X} \sim \text{Gamma}(\frac{n-1}{2}, 2)$, es decir, $\frac{(n-1)S^2}{X} \sim \chi_{n-1}^2$, de donde tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2} &= Pr(X < a) \\ &= Pr\left(\frac{(n-1)S^2}{X} > \frac{(n-1)S^2}{a}\right) \end{aligned}$$

Esto es, $\frac{(n-1)S^2}{a}$ es el percentil $1 - \alpha/2$ de la distribución χ_{n-1}^2 , esto es, $\frac{(n-1)S^2}{a} = \chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2$, de donde $a = \frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2}$, así concluimos que el límite inferior del intervalo de credibilidad coincide con el límite inferior del intervalo de confianza. Análogamente se puede ver que también los límites superiores coinciden, y así vemos que el intervalo para σ^2 coincide en la estadística clásica y la estadística bayesiana sin información previa.

Enfoque alterno para estimar θ y σ^2

Existe otra forma de obtener las estimaciones para el parámetro θ . Recordando la expresión ??, podemos afirmar que

$$\theta \mid \sigma^2, \mathbf{Y} \sim \text{Normal}(\bar{y}, \sigma^2/n)$$

puesto que

$$\begin{aligned} p(\theta \mid \sigma^2, \mathbf{Y}) &\propto p(\theta, \sigma^2 \mid \mathbf{Y}) \\ &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [(n-1)S^2 + n(\bar{y} - \theta)^2] \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{n}{2\sigma^2} (\bar{y} - \theta)^2 \right\} \end{aligned}$$

La cual corresponde a la función de densidad de la distribución $Normal(\bar{y}, \sigma^2/n)$. De esta forma, usando las distribuciones $p(\sigma^2 | \mathbf{Y})$ y $p(\theta | \sigma^2, \mathbf{Y})$, podemos implementar el siguiente procedimiento para obtener valores simulados de θ y σ^2 . Si el número de iteraciones se fija como G , entonces se procede a:

1. Simular G valores de la distribución de $\sigma^2 | \mathbf{Y}$ - es decir, de la distribución $Inversa - Gamma((n-1)/2, (n-1)S^2/2)$. Estos valores se denotan por $\sigma_{(1)}^2, \sigma_{(2)}^2, \dots, \sigma_{(G)}^2$.
2. Para cada valor de $\sigma_{(g)}^2$, con $g = 1, \dots, G$, simular un valor de la distribución de $\theta | \sigma^2, \mathbf{Y}$ - es decir, de la distribución $N(\bar{y}, \sigma^2/n)$, donde σ^2 se reemplaza por $\sigma_{(g)}^2$. De esta forma, se obtienen los valores $\theta_{(1)}, \theta_{(2)}, \dots, \theta_{(G)}$.

Las estimaciones de θ y σ^2 se pueden obtener de los valores obtenidos $\theta_{(1)}, \theta_{(2)}, \dots, \theta_{(G)}$ y $\sigma_{(1)}^2, \sigma_{(2)}^2, \dots, \sigma_{(G)}^2$.

4.1.4. Distribución predictiva

La distribución predictiva para una nueva observación \tilde{Y} está dada por

$$\begin{aligned} p(\tilde{y} | \mathbf{Y}) &= \int \int p(\tilde{y} | \theta, \sigma^2) p(\theta, \sigma^2 | \mathbf{Y}) d\theta d\sigma^2 \\ &= \int \int p(\tilde{y} | \theta, \sigma^2) p(\theta | \sigma^2, \mathbf{Y}) p(\sigma^2 | \mathbf{Y}) d\theta d\sigma^2 \\ &= \int \left(\int p(\tilde{y} | \theta, \sigma^2) p(\theta | \sigma^2, \mathbf{Y}) d\theta \right) p(\sigma^2 | \mathbf{Y}) d\sigma^2 \end{aligned}$$

En la integral dentro del paréntesis, el parámetro σ^2 permanece fijo; por lo cual, dicha integral corresponde a la distribución $N\left(\bar{y}, \left(1 + \frac{1}{n}\right)\sigma^2\right)$. De esta forma, al combinarla con la distribución posterior de σ^2 , tenemos que

$$\begin{aligned} &p(\tilde{y} | \mathbf{Y}) \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi(1 + \frac{1}{n})\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2(1 + \frac{1}{n})}(\tilde{y} - \bar{y})^2\right\} \frac{\left(\frac{(n-1)S^2}{2}\right)^{(n-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} (\sigma^2)^{-\frac{n-1}{2}-1} \exp\left\{-\frac{(n-1)S^2}{2\sigma^2}\right\} d\sigma^2 \end{aligned}$$

Después de realizar los pasos algebraicos necesarios, se encuentra que

$$p(\tilde{y} | \mathbf{Y}) = \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((n-1)/2)} \frac{1}{\sqrt{\pi(n-1)}} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right) S^2 \right)^{-1/2} \left(1 + \frac{1}{n-1} \frac{(\tilde{y} - \bar{y})^2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right) S^2} \right)^{-n/2} \quad (4.11)$$

La cual corresponde a la distribución t no estandarizada con $n-1$ grados de libertad, parámetro de localización \bar{y} y parámetro de escala $(1 + \frac{1}{n})S^2$. De esta

forma, podemos ver que los dos primeros momentos de esta distribución están dados por

$$E(\tilde{Y} \mid \mathbf{Y}) = \bar{y}$$

$$Var(\tilde{Y} \mid \mathbf{Y}) = \frac{n-1}{n-3} \left(1 + \frac{1}{n}\right) S^2 = \frac{(n-1)(n+1)}{n(n-3)} S^2$$

Otra manera equivalente de conocer el comportamiento probabilístico de \tilde{y} es por medio de la simulación. Se debe simular en primer lugar valores de θ y de σ^2 de la distribución posterior $p(\theta, \sigma^2 \mid \mathbf{Y})$ usando el muestreo de Gibbs y posteriormente simulando valores de \tilde{y} de la distribución $p(\tilde{y} \mid \theta, \sigma^2)$. En la figura ?? se muestran el histograma de 10 mil valores de \tilde{Y} simulados de esta forma, donde los datos corresponden a 20 datos simulados de la distribución $N(12, 3^2)$. En la misma gráfica se observa también la función de densidad de la distribución t , podemos ver que los valores simulados de \tilde{Y} efectivamente coinciden con la distribución predictiva de \tilde{Y} . Por lo anterior, se puede calcular un predictor de \tilde{Y} como el promedio de los 10 mil valores simulados, y calcular el intervalo de predicción usando los percentiles de estos 10 mil valores.

```
library("MCMCpack")
nsim <- 10000
y.tilde <- theta.pos <- c()
n <- 20
y <- rnorm(n, 12, 3)
y.bar <- mean(y)

S2 <- var(y)
a.n <- (n - 1)/2
b.n <- (n - 1) * S2/2
sigma2.pos <- rinvgamma(nsim, a.n, b.n)

for(i in 1:10000){
  theta.pos[i] <- rnorm(1, y.bar, sqrt(sigma2.pos[i]/n))
  y.tilde[i] <- rnorm(1, theta.pos[i], sqrt(sigma2.pos[i]))
}

tn <- function(x){
  v2 <- (n + 1) * S2/n
  tnpred <- (pi * (n - 1) * v2)^(- 0.5) * gamma(n/2) *
    (1 + (x - y.bar)^2/((n - 1) * v2))^(- n/2)/gamma((n - 1)/2)
  return(tnpred)
}

ggplot() +
  geom_histogram(data = data.frame(y.tilde),
    aes(x = y.tilde, y=..density..),
```

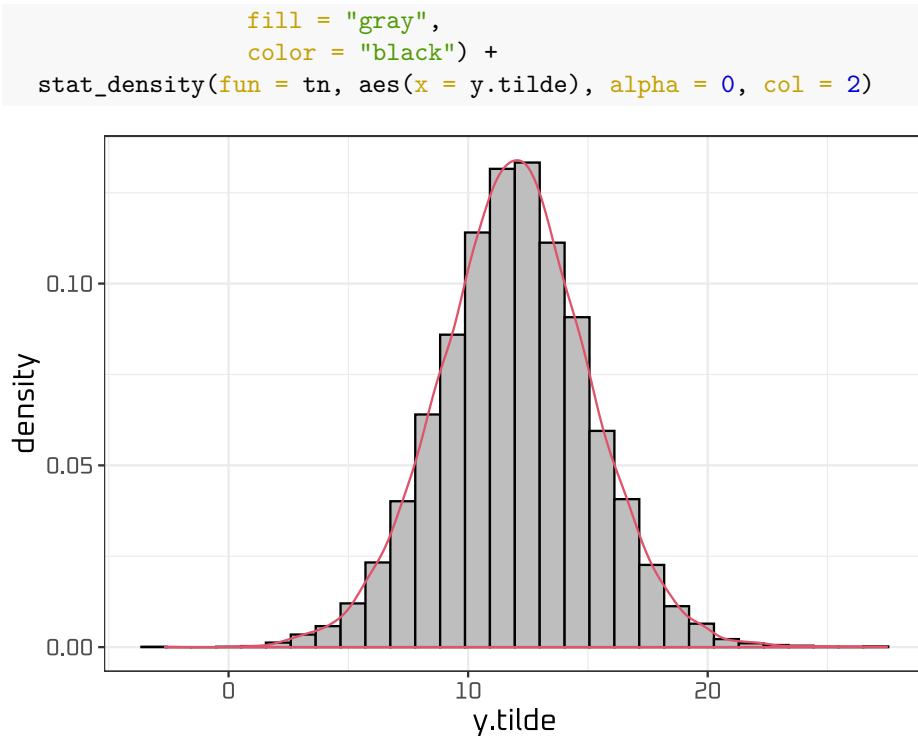


Figura 4.3: 10 mil valores simulados de \tilde{Y} y la función de densidad de la distribución predictiva de \tilde{Y} con parámetros no informativos.

Por otro lado, si consideramos parámetros informativos podríamos usar este mismo método de simulación que es realmente efectivo y que se convertirá de ahora en adelante en nuestro medio para realizar las importantes validaciones predictivas en los diferentes modelos bayesianos que se trabajarán en este libro. Por ejemplo, para el mismo conjunto de datos anterior supongamos que en un experimento anterior se recolectaron 20 datos con media 10 y varianza 5. En la figura 4.4 se muestran el histograma de 10 mil valores simulados para una nueva observación. Nótese que convenientemente la forma de la distribución predictiva teórica coincide plenamente con la distribución predictiva simulada. Esta agradable propiedad nos acompañará en el resto de los capítulos subsecuentes.

```

library(MCMCpack)
nsim <- 10000
y.tilde <- theta.pos <- sigma2.pos <- c()
n <- 20
y <- rnorm(n, 12, 3)
y.bar <- mean(y)
S2 <- var(y)

```

```

#parametros previos de theta
mu <- 10
tau2 <- 4
#parametros previos de sigma2
n_0 <- 20
sigma2_0 <- 5

# Valor inicial de theta
theta.pos[1] <- 0

#parametros posteriores de sigma2
a.n <- (n_0 + n)/2
b.n <- (n_0 * sigma2_0 + (n - 1) * S2 +
        n * (mean(y) - theta.pos[1]))/2
sigma2.pos[1] <- rinvgamma(1, a.n, b.n)

# Valor inicial de y.tilde
y.tilde[1] <- rnorm(1, theta.pos[1], sqrt(sigma2.pos[1]))
#####
# Muestreo de Gibbs #
#####

for(i in 2:nsim){
  #parametros posteriores de theta
  tau2.n <- 1 / ((n/sigma2.pos[i - 1]) + (1/tau2))
  mu.n <- tau2.n * (mean(y) * (n/sigma2.pos[i - 1]) + mu/tau2)
  #simulacion de la distribucion posterior condicional de theta
  theta.pos[i] <- rnorm(1, mean = mu.n, sd = sqrt(tau2.n))
  #parametros posteriores de sigma2
  b.n <- (n_0 * sigma2_0 + (n - 1) * S2 +
        n * (mean(y) - theta.pos[i - 1]))/2
  #simulacion de la distribucion posterior condicional de theta
  sigma2.pos[i] <- rinvgamma(1, a.n, b.n)
  #simulacion de la distribucion predictiva
  y.tilde[i] <- rnorm(1, theta.pos[i], sqrt(sigma2.pos[i]))
}

tn <- function(x){
  v0 <- n_0 * sigma2_0 + n * sigma2_c
  tnpred <- (pi * v0)^(- 0.5) * gamma((n_0 + n + 1)/2) *
    (1 + (x - theta)^2/v0)^(- (n_0 + n + 1)/2)/gamma((n_0 + n)/2)
  return(tnpred)
}

ggplot() +

```



```
geom_histogram(data = data.frame(y.tilde),
               aes(x = y.tilde, y = ..density..),
               fill = "gray",
               color = "black") +
stat_density(fun = tn, aes(x = y.tilde), alpha = 0, col = 2)
```

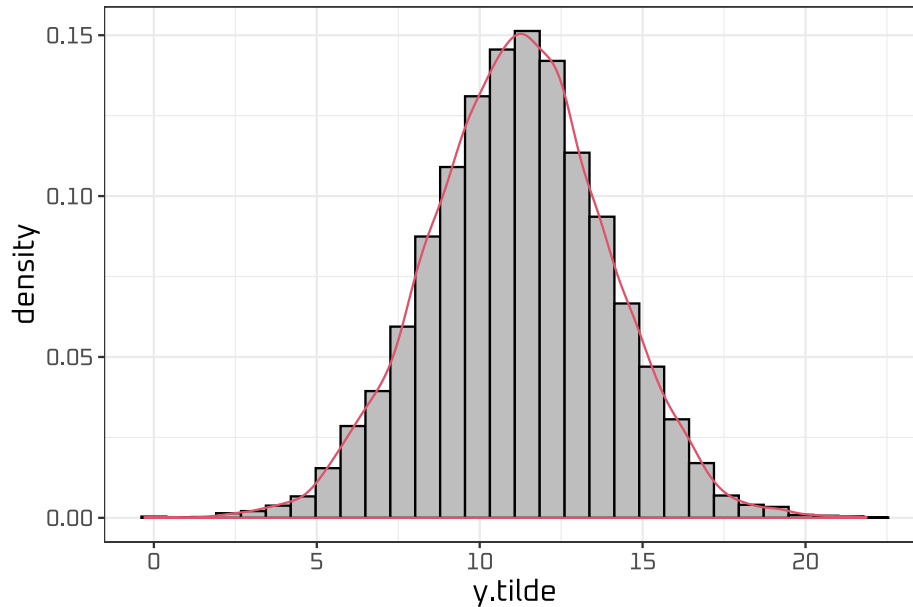


Figura 4.4: 10 mil valores simulados de \tilde{Y} y la función de densidad de la distribución predictiva de \tilde{Y} con parámetros informativos.

4.2. Modelo Normal multivariante con media desconocida y varianza conocida

Cuando la distribución usada para describir el comportamiento de los datos es una distribución normal multivariante, las técnicas de inferencia no se distancian mucho del caso univariado. Se debe tener en cuenta el manejo matricial de las formas cuadráticas y las propiedades básicas del cálculo de matrices. Los desarrollos y resultados derivados de esta sección redundarán en el análisis de los modelos lineales con el enfoque bayesiano.

Sea $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_p)'$ un vector aleatorio cuya distribución es normal multivariante dada por

$$p(\mathbf{Y} \mid \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma}) \propto |\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\theta})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\theta}) \right\} \quad (4.12)$$

En donde $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_p)'$ es el vector que contiene la media de cada uno de los componentes del vector \mathbf{Y} y $\boldsymbol{\Sigma}$ es la matriz de varianzas y covarianzas de orden $p \times p$, simétrica y definida positiva. La verosimilitud para una muestra de n vectores aleatorios independientes e idénticamente distribuidos está dada por

$$p(\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n \mid \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma}) \propto |\boldsymbol{\Sigma}|^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \boldsymbol{\theta})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{y}_i - \boldsymbol{\theta}) \right\}$$

Los parámetros que requieren estimación corresponden al vector de medias $\boldsymbol{\theta}$ y la matriz de varianzas y covarianzas $\boldsymbol{\Sigma}$. Por ahora, se asume que $\boldsymbol{\Sigma}$ es conocida y nos centramos en la estimación del vector de medias $\boldsymbol{\theta}$. Para la distribución previa, considerando que en general no hay restricción sobre los valores de los componentes de $\boldsymbol{\theta}$, asumimos que $\boldsymbol{\theta}$ sigue una distribución previa normal multivariante informativa y parametrizada por los hiper-parámetros $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{\Gamma}$

$$p(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Gamma}) \propto |\boldsymbol{\Gamma}|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Gamma}^{-1}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu}) \right\}$$

Nótese que esta distribución se hace no informativa cuando $|\boldsymbol{\Gamma}^{-1}| \rightarrow 0$, sin importar el valor del vector de medias previa $\boldsymbol{\mu}$. En el siguiente resultado, encontramos la distribución posterior del parámetro $\boldsymbol{\theta}$.

Resultado 4.10. *La distribución posterior del vector $\boldsymbol{\theta}$ sigue una distribución normal multivariante*

$$\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{Y}, \boldsymbol{\Sigma} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_n, \boldsymbol{\Gamma}_n).$$

En donde

$$\boldsymbol{\Gamma}_n = (\boldsymbol{\Gamma}^{-1} + n\boldsymbol{\Sigma}^{-1})^{-1} \quad (4.13)$$

$$\boldsymbol{\mu}_n = \boldsymbol{\Gamma}_n(\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\boldsymbol{\mu} + n\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\bar{\mathbf{y}}) \quad (4.14)$$

Demostración. En primer lugar, nótese la siguiente identidad

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\theta})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{Y}_i - \bar{\mathbf{Y}})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{Y}_i - \bar{\mathbf{Y}}) + n(\bar{\mathbf{Y}} - \boldsymbol{\theta})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\mathbf{Y}} - \boldsymbol{\theta}) \quad (4.15)$$

puesto que

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\theta})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\theta}) \\
&= \sum_{i=1}^n (\mathbf{Y}_i - \bar{\mathbf{Y}} + \bar{\mathbf{Y}} - \boldsymbol{\theta})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{Y}_i - \bar{\mathbf{Y}} + \bar{\mathbf{Y}} - \boldsymbol{\theta}) \\
&= \sum_{i=1}^n (\mathbf{Y}_i - \bar{\mathbf{Y}})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{Y}_i - \bar{\mathbf{Y}}) + \sum_{i=1}^n (\mathbf{Y}_i - \bar{\mathbf{Y}})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{Y}} - \boldsymbol{\theta}) \\
&\quad + (\bar{\mathbf{Y}} - \boldsymbol{\theta})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \sum_{i=1}^n (\mathbf{Y}_i - \bar{\mathbf{Y}}) + \sum_{i=1}^n (\bar{\mathbf{Y}} - \boldsymbol{\theta})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{Y}} - \boldsymbol{\theta}) \\
&= \sum_{i=1}^n (\mathbf{Y}_i - \bar{\mathbf{Y}})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{Y}_i - \bar{\mathbf{Y}}) + n(\bar{\mathbf{Y}} - \boldsymbol{\theta})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{Y}} - \boldsymbol{\theta})
\end{aligned}$$

Por otro lado, de la definición de distribución previa, se tiene que

$$\begin{aligned}
p(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{Y}, \boldsymbol{\Sigma}) &\propto p(\mathbf{Y} \mid \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma}) p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma}) \\
&\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \boldsymbol{\theta})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{y}_i - \boldsymbol{\theta}) + (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Gamma}^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu}) \right] \right\} \\
&\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[n(\bar{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\theta})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\theta}) + (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Gamma}^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu}) \right] \right\} \\
&\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[-n\bar{\mathbf{y}}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\theta} - n\boldsymbol{\theta}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \bar{\mathbf{y}} + n\boldsymbol{\theta}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta}' \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}' \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \boldsymbol{\theta} \right] \right\} \\
&= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\boldsymbol{\theta}' (\boldsymbol{\Gamma}^{-1} + n\boldsymbol{\Sigma}^{-1}) \boldsymbol{\theta} - 2\boldsymbol{\theta}' (\boldsymbol{\Gamma}^{-1} \boldsymbol{\mu} + n\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \bar{\mathbf{y}}) \right] \right\} \\
&= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\boldsymbol{\theta}' \boldsymbol{\Gamma}_n^{-1} \boldsymbol{\theta} - 2\boldsymbol{\theta}' \boldsymbol{\Gamma}_n^{-1} \boldsymbol{\mu}_n \right] \right\} \\
&\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\boldsymbol{\theta}' \boldsymbol{\Gamma}_n^{-1} \boldsymbol{\theta} - 2\boldsymbol{\theta}' \boldsymbol{\Gamma}_n^{-1} \boldsymbol{\mu}_n + \boldsymbol{\mu}_n' \boldsymbol{\Gamma}_n^{-1} \boldsymbol{\mu}_n \right] \right\} \\
&= \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu}_n)' \boldsymbol{\Gamma}_n^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu}_n) \right\}
\end{aligned}$$

La cual corresponde al núcleo de una distribución normal multivariante con vector de medias $\boldsymbol{\mu}_n$ y matriz de varianzas $\boldsymbol{\Gamma}_n$. \square

Observando los parámetros de la distribución posterior, podemos ver que $\boldsymbol{\Gamma}_n^{-1} = \boldsymbol{\Gamma}^{-1} + (\boldsymbol{\Sigma}/n)^{-1}$. Teniendo en cuenta que la matriz de varianzas y covarianzas es una medida de dispersión de la distribución alrededor de su media, la inversa de dicha matriz se puede ver como una medida de precisión de qué tanto se concentra la distribución alrededor de la media. Así, podemos ver que la precisión posterior

viene siendo la suma entre la precisión previa y la precisión de la estimación clásica del parámetro θ .

En cuanto a la media posterior μ_n , tenemos que

$$\begin{aligned}\mu_n &= (\Gamma^{-1} + n\Sigma^{-1})^{-1} (\Gamma^{-1}\mu + n\Sigma^{-1}\bar{y}) \\ &= (\mathbf{I} + n\Gamma\Sigma^{-1})^{-1} \mu + \left(\frac{1}{n}\Sigma\Gamma^{-1} + \mathbf{I}\right)^{-1} \bar{y} \\ &= \underbrace{\Sigma(\Sigma + n\Gamma)^{-1}}_{\mathbf{A}_1} \mu + \underbrace{n\Gamma(\Sigma + n\Gamma)^{-1}}_{\mathbf{A}_2} \bar{y}\end{aligned}$$

De donde podemos ver que la media posterior μ_n se puede escribir como $\mu_n = \mathbf{A}_1\mu + \mathbf{A}_2\bar{y}$ donde $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 = \mathbf{I}$. Es claro que en el caso univariado, \mathbf{A}_1 , μ , \mathbf{A}_2 y \bar{y} son todos escalares, y μ_n es un valor intermedio entre μ y \bar{y} . Mientras que en caso multivariado, $\mathbf{A}_1\mu + \mathbf{A}_2\bar{y}$ es similar a una combinación convexa entre los vectores μ y \bar{y} , pero los coeficientes son matrices en vez de escalares.

Para ilustrar la relación de μ_n con μ y \bar{y} , tomamos el caso de $p = 2$, y denotamos $\mathbf{A} = \Sigma(\Sigma + n\Gamma)^{-1}$. Es claro que \mathbf{A} es una matriz simétrica y definida positiva, lo denotaremos con $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, donde $a_{11} > 0$ y $a_{22} > 0$. De esta forma

$$\begin{aligned}\mu_n &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{12} & 1 - a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}\mu_1 + (1 - a_{11})\bar{y}_1 + a_{12}(\mu_2 - \bar{y}_2) \\ a_{22}\mu_2 + (1 - a_{22})\bar{y}_2 + a_{12}(\mu_1 - \bar{y}_1) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Al observar la primera entrada de μ_n , podemos ver que este se compone de una combinación convexa entre μ_1 y \bar{y}_1 (pues $a_{11} > 0$) y una parte que depende de la diferencia $\mu_2 - \bar{y}_2$; un comportamiento similar se observa en la segunda entrada de μ_n . Esta observación es interesante, pues ilustra que cada componente de la media posterior μ_n no siempre será un promedio ponderado del componentes correspondiente de la media previa y la estimación clásica.

Ilustramos los resultados encontrados suponiendo las dos siguientes situaciones:

1. Suponga que se quiere estimar el vector de medias $\theta = (\theta_1, \theta_2)'$ con una matriz de varianzas y covarianzas conocida de $\Sigma = \begin{pmatrix} 20 & 8 \\ 8 & 30 \end{pmatrix}$. Para esto se recolectan 10 observaciones con vector de promedios muestrales $\bar{y} = (150, 230)'$. Como información previa, suponga que $\mu = (100, 200)'$ y $\Gamma = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$. Realizando los cálculos correspondiente, se tiene que $\Gamma_n = \begin{pmatrix} 1.42 & 0.64 \\ 0.64 & 2.31 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.3 & -0.026 \\ -0.026 & 0.235 \end{pmatrix}$ y $\mu_n = (136, 224)$. Podemos ver que en este caso cada componente de μ_n se encuentra entre los componentes

correspondientes de $\boldsymbol{\mu}$ y $\bar{\mathbf{y}}$. Los códigos computacionales se muestran a continuación.

```
n <- 10
mu <- matrix(c(100, 200))
y.bar <- matrix(c(150, 230))
Gamma <- matrix(c(5, 3, 3, 10), 2, 2)
Sigma <- matrix(c(20, 8, 8, 30), 2, 2)
Gamma.n <- solve(solve(Gamma) + n * solve(Sigma))
A <- Sigma %*% solve(Sigma + n * Gamma)
mu.n <- Gamma.n %*%
  (solve(Gamma) %*% mu + n * solve(Sigma) %*% y.bar)
mu.n
```

135.7889
223.6155

- Tomando los mismos datos del caso anterior, también podemos suponer que $\bar{\mathbf{y}} = (150, 2300)'$, las matrices $\boldsymbol{\Gamma}_n$ y \mathbf{A} no cambian de valor, pero la media de la distribución posterior está dada por $\boldsymbol{\mu}_n = (190, 1808)$. Podemos ver que el primer componente de $\boldsymbol{\mu}_n$ no está entre 100 y 150 que corresponden a las estimaciones previa y clásica, respectivamente. Esto se debe a que la diferencia entre μ_2 y \bar{y}_2 es muy grande.

```
n <- 10
mu <- matrix(c(100, 200))
y.bar <- matrix(c(150, 2300))
Gamma <- matrix(c(5, 3, 3, 10), 2, 2)
Sigma <- matrix(c(20, 8, 8, 30), 2, 2)
Gamma.n <- solve(solve(Gamma) + n * solve(Sigma))
A <- Sigma %*% solve(Sigma + n * Gamma)
mu.n <- Gamma.n %*%
  (solve(Gamma) %*% mu + n * solve(Sigma) %*% y.bar)
mu.n
```

189.8642
1808.0199

4.2.1. Distribución previa no informativa

Al tener en cuenta que la distribución previa del parámetro $\boldsymbol{\theta}$ es la distribución normal multivariada, y al observar la forma de la función de densidad, se puede afirmar que cuando $|\boldsymbol{\Gamma}^{-1}|$ es muy pequeño, los parámetros previos $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{\Gamma}$ pierden peso en los cálculos de $\boldsymbol{\mu}_n$ y $\boldsymbol{\Gamma}_n$. En este caso se puede ver que

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Gamma}_n &\approx n^{-1}\boldsymbol{\Sigma} \\ \boldsymbol{\mu}_n &\approx \bar{\mathbf{y}}\end{aligned}$$

De donde podemos concluir que la estimación bayesiana será muy cercana a la estimación clásica \bar{y} , más aún, el intervalo de credibilidad también será muy similar al intervalo de confianza del enfoque clásico.

Ejemplo 4.3. *Student* (1908) introdujo un conjunto de datos clásicos sobre el incremento en horas de sueño producido con 2 medicamentos soporíferos diferentes comparados con grupo control en 10 pacientes. Estos datos se pueden encontrar en R con el nombre `sleep` y se pueden definir como realizaciones de vectores aleatorios con distribución normal bivariada. Supongamos que la matriz de varianzas y covarianzas de la distribución es conocida e igual a $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.6 \\ 0.6 & 2 \end{pmatrix}$.

El parámetro de interés es el vector de medias $\theta = (\theta_1, \theta_2)'$. Para la distribución previa, suponemos que $\mu = (0, 1)'$, es decir que el primer medicamento no tiene ningún efecto soporífero, mientras que el segundo medicamento tiene un efecto promedio de aumentar 1 hora de sueño, también asumimos que $\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Los siguientes códigos de STAN ilustran el procedimiento de estimación del parámetro de interés.

```
NormalMultMedia <- '
data {
  int<lower=0> n;
  int<lower=0> P;
  vector[P] y[n];
  vector[P] mu;
  matrix[P, P] Sigma;
  matrix[P, P] Gamma;
}
parameters {
  vector[P] theta;
}
transformed parameters {
  real diftheta;
  diftheta = theta[2] - theta[1];
}
model {
  y ~ multi_normal(theta, Sigma);
  theta ~ multi_normal(mu, Gamma);
}
'
```

```
y <- structure(.Data = sleep[,1], .Dim=c(10,2))
n <- nrow(y)
P <- ncol(y)
Sigma <- matrix(c(1, 0.6, 0.6, 2), 2, 2)
mu <- as.vector(c(0, 1))
```

```
Gamma <- matrix(c(2, 0, 0, 2), 2, 2)

sample_data <- list(y = y, n = n, P = P,
                   Sigma = Sigma, mu = mu,
                   Gamma = Gamma)

set.seed(1234)
NormalMultifit <- stan(model_code = NormalMultMedia,
                      data = sample_data, verbose = FALSE)
```

Después de la convergencia del proceso inferencial, la estimación bayesiana de θ es (0.6866, 2.1812)' para los dos medicamentos; mientras que los intervalos de credibilidad del 95 % corresponden a (0.0834, 1.2776) y (1.3391, 3.0109).

```
print(NormalMultifit, digits = 4,
      pars = "theta", probs = c(0.025, 0.975))
```

```
## Inference for Stan model: 0b2360136b3d61c08a460b98848640c6.
## 4 chains, each with iter=2000; warmup=1000; thin=1;
## post-warmup draws per chain=1000, total post-warmup draws=4000.
##
##               mean se_mean      sd   2.5%  97.5% n_eff   Rhat
## theta[1]  0.6874   0.0064  0.3110  0.1038  1.3055   2361  0.9997
## theta[2]  2.2060   0.0090  0.4283  1.3620  3.0268   2245  1.0000
##
## Samples were drawn using NUTS(diag_e) at Sun Jun 27 21:00:32 2021.
## For each parameter, n_eff is a crude measure of effective sample size,
## and Rhat is the potential scale reduction factor on split chains (at
## convergence, Rhat=1).
```

Las figuras 4.5 muestra la distribución posterior para este ejemplo, junto con la estimación puntual, correspondiente a la media.

```
bayesplot::mcmc_areas(NormalMultifit, pars = c("theta[1]", "theta[2]"),
                     prob = 0.95)
```

A continuación, mostramos los códigos de R para llevar a cabo los cálculos directamente.

```
y.bar <- colMeans(y)
Gamma.n <- solve(solve(Gamma) + n * solve(Sigma))
mu.n <- Gamma.n %*%
  (solve(Gamma) %*% mu + n * solve(Sigma) %*% y.bar)
mu.n
```

0.6802703

2.1905381

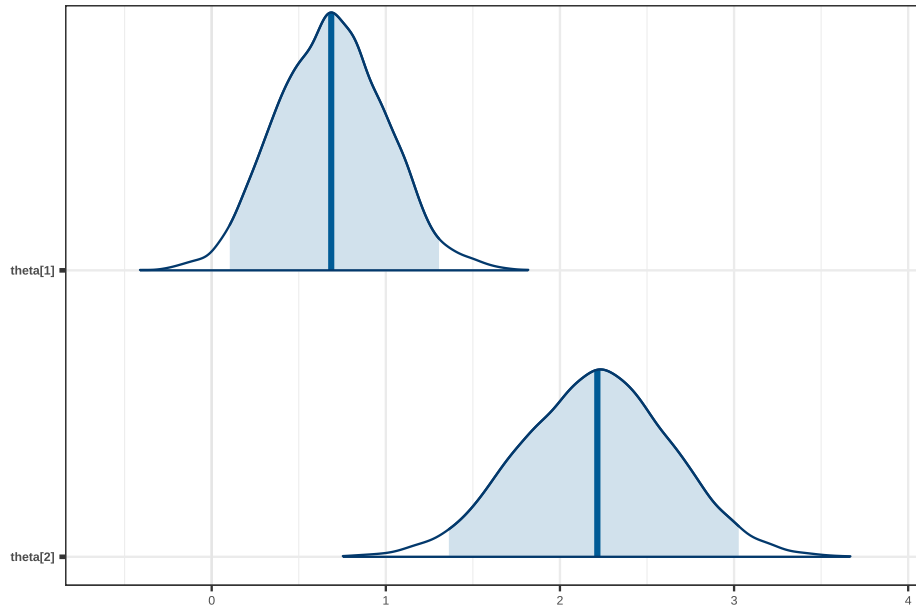


Figura 4.5: Distribución posterior.

```
Gamma.n
```

0.0937527	0.0519886
0.0519886	0.1804003

De los resultados arrojados, vemos que la distribución posterior del parámetro está dada por

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \sim N_2 \left(\begin{pmatrix} 0.68 \\ 2.19 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.094 & 0.052 \\ 0.052 & 0.180 \end{pmatrix} \right)$$

De esta forma, la estimación bayesiana obtenida para los efectos promedios corresponde a 0.68 horas y 2.19 horas, respectivamente; los cuales son similares a los obtenidos por STAN. En cuanto a los intervalos de credibilidad del 95 %, estas son dadas por los percentiles 2.5 % y 97.5 % de las dos distribuciones posteriores marginales de θ_1 y θ_2 . Estos intervalos se pueden obtener así:

```
qnorm(c(0.025, 0.975), mu.n[1], sqrt(Gamma.n[1, 1]))
```

```
## [1] 0.08014771 1.28039297
```

```
qnorm(c(0.025, 0.975), mu.n[2], sqrt(Gamma.n[2, 2]))
```

```
## [1] 1.358072 3.023005
```

Ahora, suponga que el objetivo es comparar los medicamentos para concluir si el segundo medicamento es más efectivo que el primero, podemos encontrar

la distribución posterior de la diferencia $\theta_2 - \theta_1$. Utilizando propiedades de la distribución normal multivariante, podemos encontrar la distribución posterior de $\theta_2 - \theta_1$, calcular un intervalo de credibilidad para $\theta_2 - \theta_1$ e indagar cuál es la probabilidad de que θ_2 sea mayor a θ_1 . Estos cálculos se pueden llevar a cabo de la siguiente forma en STAN

```
print(NormalMultifit, digits = 4,
      pars = "diftheta", probs = c(0.025, 0.975))

## Inference for Stan model: 0b2360136b3d61c08a460b98848640c6.
## 4 chains, each with iter=2000; warmup=1000; thin=1;
## post-warmup draws per chain=1000, total post-warmup draws=4000.
##
##               mean se_mean      sd   2.5%  97.5% n_eff   Rhat
## diftheta 1.5186  0.0067 0.4136 0.7162 2.3123 3815 0.9998
##
## Samples were drawn using NUTS(diag_e) at Sun Jun 27 21:00:32 2021.
## For each parameter, n_eff is a crude measure of effective sample size,
## and Rhat is the potential scale reduction factor on split chains (at
## convergence, Rhat=1).
```

La figura 4.6 muestra la distribución posterior para este ejemplo, junto con la estimación puntual, correspondiente a la media.

```
bayesplot::mcmc_areas(NormalMultifit, pars = "diftheta",
                      prob = 0.95)
```

Los mismos cálculos pueden reproducirse en R, por medio de los siguientes códigos computacionales.

```
vec <- matrix(c(-1, 1), 1, 2)
difmedia <- vec %*% mu.n
varianza <- vec %*% Gamma.n %*% t(vec)
qnorm(c(0.025, 0.975), difmedia, sqrt(varianza))
```

```
## [1] 0.7017359 2.3187996
```

```
1 - pnorm(0, difmedia, sqrt(varianza))
```

```
## [1] 0.9998744
```

Observando los anteriores resultados, vemos que el intervalo de credibilidad para $\theta_2 - \theta_1$ está dado por (0.7, 2.3), el cual no contiene el valor 0, indicando que el segundo medicamento tiene un efecto mayor que el primero. Adicionalmente, se observa que con probabilidad muy cercana a uno, el segundo medicamento tiene efecto mayor al primero y por ende tiene un desempeño superior al primero.

Finalmente, ilustramos los resultados obtenidos al usar una distribución previa no informativa, para eso, usaremos $\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}$, con $|\mathbf{\Gamma}^{-1}| = 0.0001$, repre-

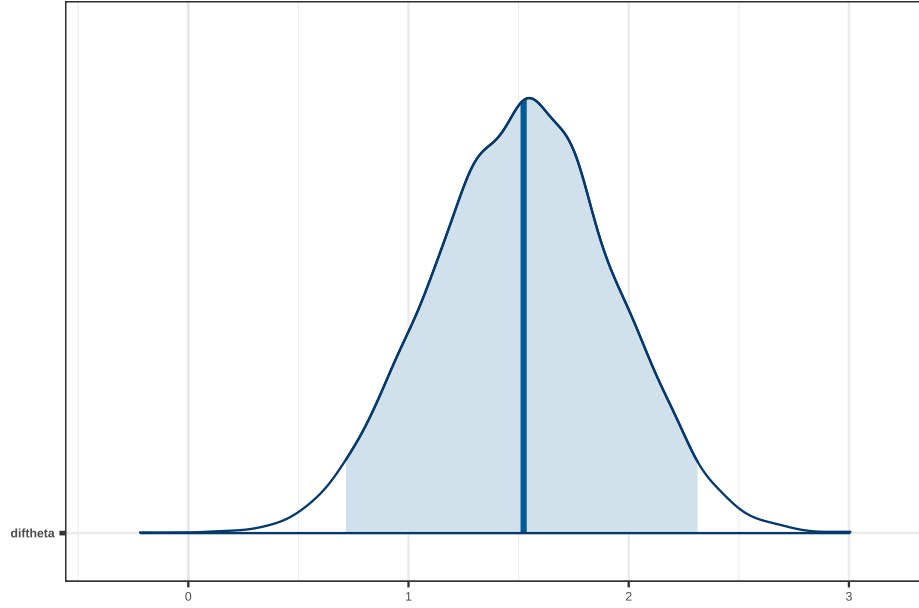


Figura 4.6: Distribución posterior de los parámetros transformados (diferencia de las medias teóricas).

sentando una distribución previa no informativa. Los resultados de estimación arroja la siguiente distribución posterior para el vector de parámetros:

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \sim N_2 \left(\begin{pmatrix} 0.75 \\ 2.33 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.10 & 0.06 \\ 0.06 & 0.20 \end{pmatrix} \right)$$

Los intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros θ_1 y θ_2 están dados por (0.129, 1.368) y (1.451, 3.202), respectivamente. Observamos que estos intervalos de credibilidad son muy similares a los intervalos de confianza del 95 % del enfoque clásico, calculados con la expresión $\bar{y} \pm z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, y que para los datos del ejemplo están dados por (0.130, 1.370) y (1.453, 3.207).

Finalmente, recordamos los dos siguientes resultados relacionados con la distribución normal multivariante que pueden resultar útiles en otros análisis.

Resultado 4.11. *La distribución posterior marginal de un subconjunto de parámetros, digamos $\theta^{(1)}$ es también normal multivariante con media igual a la del subvector de medias apropiado, $\mu_n^{(1)}$ y similar matriz de varianzas $\Gamma_n^{(11)}$.*

Resultado 4.12. *La distribución posterior condicional de un subconjunto de parámetros, digamos $\theta^{(1)}$, dado $\theta^{(2)}$ es también normal multivariante dada por*

$$\theta^{(1)} \mid \theta^{(2)} \sim N_p \left(\mu_n^{(1)} + \Gamma_n^{(12)} \left(\Gamma_n^{(22)} \right)^{-1} \left(\theta^{(2)} - \mu_n^{(2)} \right), \Gamma_n^{(1|2)} \right).$$

En donde

$$\mathbf{\Gamma}_n^{(1|2)} = \mathbf{\Gamma}_n^{(11)} - \mathbf{\Gamma}_n^{(12)} \left(\mathbf{\Gamma}_n^{(22)} \right)^{-1} \mathbf{\Gamma}_n^{(21)} \quad (4.16)$$

Con $\boldsymbol{\mu}^{(1)}$ y $\boldsymbol{\mu}^{(2)}$ correspondientes al vector de medias y $\mathbf{\Gamma}_n^{(11)}$, $\mathbf{\Gamma}_n^{(22)}$ denotan la matriz de varianzas y covarianzas de $\boldsymbol{\theta}^{(1)}$ y $\boldsymbol{\theta}^{(2)}$, respectivamente. $\mathbf{\Gamma}_n^{(12)}$ es la matriz de covarianzas entre $\boldsymbol{\theta}^{(1)}$ y $\boldsymbol{\theta}^{(2)}$, $\mathbf{\Gamma}_n^{(21)}$ es la matriz de covarianzas entre $\boldsymbol{\theta}^{(2)}$ y $\boldsymbol{\theta}^{(1)}$.

La prueba de los dos resultados anteriores se sigue inmediatamente de las propiedades de la distribución normal multivariante.

4.3. Modelo normal multivariante con media y varianza desconocida

Al igual que en la distribución normal univariada, cuando se desconoce tanto el vector de medias como la matriz de varianzas y covarianzas de la distribución, es necesario plantear diversos enfoques y situarse en el más conveniente. Nótese que en términos de parámetros, existen p parámetros correspondientes al vector de medias $\boldsymbol{\theta}$ y $\binom{p}{2} = \frac{p(p+1)}{2}$ parámetros correspondientes a la matriz de varianzas $\boldsymbol{\Sigma}$. Pensando en la gran cantidad de parámetros que se deben modelar, es necesario tener en cuenta que el número de datos en la muestra aleatoria sea lo suficientemente grande. Suponiendo que el número de observaciones en la muestra aleatoria sea suficiente, existe otra situación que se debe surtir y es la asignación de las distribuciones previas para $\boldsymbol{\theta}$ y $\boldsymbol{\Sigma}$. En estos términos, es posible

1. Suponer que la distribución previa $p(\boldsymbol{\theta})$ es independiente de la distribución previa $p(\boldsymbol{\Sigma})$ y que ambas distribuciones son informativas. Luego, utilizar un análisis de simulación condicional conjunta para extraer muestras provenientes de las respectivas distribuciones posterior.
2. Suponer que la distribución previa para $\boldsymbol{\theta}$ depende de $\boldsymbol{\Sigma}$ y escribirla como $p(\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\Sigma})$, mientras que la distribución previa de $\boldsymbol{\Sigma}$ no depende de $\boldsymbol{\theta}$ y se puede escribir como $p(\boldsymbol{\Sigma})$. El análisis posterior de este enfoque encuentra la distribución posterior de $\boldsymbol{\Sigma} | \mathbf{Y}$ y con esta se encuentra la distribución posterior de $\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{Y}$.
3. Suponer que la distribución conjunta previa para $\boldsymbol{\theta}$ y $\boldsymbol{\Sigma}$ es una distribución no informativa.

4.3.1. Parámetros independientes con distribuciones previas informativas

En este enfoque se supone que las distribuciones previas para los parámetros de interés son independientes e informativas. Hacemos siguiente observación para

lograr que las resultantes distribuciones posterior sean conjugadas.

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\theta})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\theta}) &= \text{traza} \left(\sum_{i=1}^n (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\theta})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\theta}) \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \text{traza} ((\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\theta})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\theta})) \\
 &= \sum_{i=1}^n \text{traza} (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\theta}) (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\theta})') \\
 &= \text{traza} \left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \sum_{i=1}^n (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\theta}) (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\theta})' \right) \\
 &= \text{traza} (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{S}_{\boldsymbol{\theta}})
 \end{aligned}$$

Donde $\mathbf{S}_{\boldsymbol{\theta}} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\theta}) (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\theta})'$. En cuanto a la asignación de las distribuciones previas, para el vector de medias $\boldsymbol{\theta}$ es posible usar la distribución normal, esto es,

$$\boldsymbol{\theta} \sim \text{Normal}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Gamma})$$

Por otro lado, la distribución para la matriz de varianzas $\boldsymbol{\Sigma}$ es

$$\boldsymbol{\Sigma} \sim \text{Inversa} - \text{Wishart}(\boldsymbol{\Lambda}, v)$$

donde v denota los grados de libertad y $\boldsymbol{\Lambda}$ la matriz de escala. Esto es, la función de densidad está dada por

$$p(\boldsymbol{\Sigma}) \propto |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{v+p+1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{traza}(\boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) \right\}$$

Asumiendo independencia previa, la distribución previa conjunta resulta estar dada por

$$\begin{aligned}
 p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma}) &= p(\boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\Sigma}) \\
 &\propto |\boldsymbol{\Sigma}|^{-(v+p+1)/2} \\
 &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\text{traza}(\boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) + (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Gamma}^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu})] \right\} \quad (4.17)
 \end{aligned}$$

Una vez que se conoce la forma estructural de la distribución previa conjunta, es posible establecer la distribución posterior conjunta teniendo en cuenta la forma de la función de verosimilitud $p(\mathbf{Y} | \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma})$ y la expresión equivalente para $\sum_{i=1}^n (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\theta})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\theta})$ mostrada al inicio de esta sección. Adicionalmente,

acudiendo a la simetría de las matrices $\mathbf{\Lambda}$, $\mathbf{\Sigma}$ y \mathbf{S}_θ , se tiene que

$$\begin{aligned}
 p(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{\Sigma} \mid \mathbf{Y}) &\propto p(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{\Sigma}) p(\mathbf{Y} \mid \boldsymbol{\theta}, \mathbf{\Sigma}) \\
 &\propto |\mathbf{\Sigma}|^{-(v+n+p+1)/2} \\
 &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\text{traza}(\mathbf{\Lambda} \mathbf{\Sigma}^{-1} + \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{S}_\theta) + (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{\Gamma}^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu})] \right\} \\
 &\propto |\mathbf{\Sigma}|^{-(v+n+p+1)/2} \\
 &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\text{traza}(\mathbf{\Sigma}^{-1} (\mathbf{\Lambda} + \mathbf{S}_\theta)) + (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{\Gamma}^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu})] \right\} \quad (4.18)
 \end{aligned}$$

Dado que la distribución posterior conjunta no tiene una forma estructural conocida, no es posible utilizar el método de integración analítica. Sin embargo, es posible obtener las distribuciones condicionales de cada uno de los parámetros suponiendo fijos los restantes y teniendo en cuenta que

$$p(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{\Sigma}, \mathbf{Y}) \propto p(\boldsymbol{\theta}, \underbrace{\mathbf{\Sigma}}_{fijo} \mid \mathbf{Y}) \quad y \quad p(\mathbf{\Sigma} \mid \boldsymbol{\theta}, \mathbf{Y}) \propto p(\underbrace{\boldsymbol{\theta}}_{fijo}, \mathbf{\Sigma} \mid \mathbf{Y})$$

Resultado 4.13. La distribución posterior de la matriz de parámetros $\mathbf{\Sigma}$ condicional a $\boldsymbol{\theta}, \mathbf{Y}$ es

$$\mathbf{\Sigma} \mid \boldsymbol{\theta}, \mathbf{Y} \sim Inversa - Wishart_{v+n}(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{S}_\theta)$$

Demostración. La prueba es inmediata notando que

$$\begin{aligned}
 \mathbf{\Sigma} \mid \boldsymbol{\theta}, \mathbf{Y} &\propto |\mathbf{\Sigma}|^{-(v+n+p+1)/2} \\
 &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\text{traza}(\mathbf{\Sigma}^{-1} (\mathbf{\Lambda} + \mathbf{S}_\theta)) + (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{\Gamma}^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu})] \right\}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, factorizando convenientemente, se encuentra una expresión idéntica a la función de distribución de una variable aleatoria con distribución *Inversa - Wishart* $_{v+n}(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{S}_\theta)$. \square

Resultado 4.14. La distribución posterior del vector de parámetros $\boldsymbol{\theta}$ condicional a $\mathbf{\Sigma}, \mathbf{Y}$ es

$$\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{\Sigma}, \mathbf{Y} \sim Normal_p(\boldsymbol{\mu}_n, \mathbf{\Gamma}_n) \quad (4.19)$$

donde $\boldsymbol{\mu}_n$ y $\mathbf{\Gamma}_n$ están dadas por las expresiones (4.13) y (4.14), respectivamente.

Una vez encontradas las distribuciones posteriores condicionales de $\boldsymbol{\theta}$ y $\mathbf{\Sigma}$, se puede obtener la estimación de estos parámetros vía el muestreo de Gibbs, que en este caso se resume en los siguientes pasos:

1. Fijar un valor inicial para $\boldsymbol{\theta}$; lo denotamos por $\boldsymbol{\theta}_{(1)}$.
2. Simular un valor de la distribución de $\mathbf{\Sigma} \mid \boldsymbol{\theta}, \mathbf{Y}$ en (4.13) donde el parámetro \mathbf{S}_θ que depende de $\boldsymbol{\theta}$, debe ser reemplazado por $\boldsymbol{\theta}_{(1)}$ del paso anterior; este valor simulado se denotará por $\mathbf{\Sigma}_{(1)}$

3. Simular un valor de la distribución de $\theta|\Sigma, \mathbf{Y}$ en (4.19) donde en \mathbf{mu}_n y Γ_n se debe reemplazar Σ por $\hat{\Sigma}$; este valor simulado se denota por θ .
4. Repetir los pasos (2) y (3) hasta completar un número de iteraciones suficientes para alcanzar la convergencia en ambos parámetros

Una vez tengamos los valores muestreados, se debe garantizar la convergencia y la correlación nula entre estos valores, con el fin de calcular las estimaciones. En el siguiente ejemplo ilustramos la implementación de este muestreo de Gibbs en R.

Ejemplo 4.4. Retomamos los datos del efecto de dos medicamentos soporíferos introducidos por Student (1908), los cuales fueron estudiados en el ejemplo 4.3 asumiendo que la matriz de varianzas y covarianzas era conocida. El vector de medias muestrales de estos datos están dados por $\bar{y} = (0.75, 2.33)'$, y la matriz de varianzas y covarianzas muestrales está dada por $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 3.20 & 2.85 \\ 2.85 & 4.01 \end{pmatrix}$.

Ahora supongamos que tanto el vector de medias como la matriz de varianzas y covarianzas son desconocidos. Para el vector de medias, asumimos la distribución previa del ejemplo ??, es decir, $\mu = (0, 1)'$ y $\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Para la matriz de varianzas y covarianzas asumimos la distribución inversa-Wishart con matriz de escala igual a $\Lambda = \begin{pmatrix} 20 & 8 \\ 8 & 20 \end{pmatrix}$ y $v = 10$ grados de libertad. De esta forma, la estimación previa de Σ viene dada por $\frac{1}{v-2-1}\Lambda = \begin{pmatrix} 2.86 & 1.14 \\ 1.14 & 2.86 \end{pmatrix}$.

Ilustramos los códigos de STAN a continuación.

```
NormalMultMediaCov <- '
data {
  int<lower=0> n;
  int<lower=0> P;
  vector[P] y[n];
  vector[P] mu;
  matrix[P, P] Gamma;
  matrix[P, P] Lambda;
  int<lower=0> v;
}
parameters {
  vector[P] theta;
  cov_matrix[P] Sigma;
}
transformed parameters {
  real diftheta;
  diftheta = theta[2] - theta[1];
}
model {
  theta ~ multi_normal(mu, Gamma);
```

```

Sigma ~ inv_wishart(v, Lambda);
for (i in 1:n)
  y[i] ~ multi_normal(theta, Sigma);
}
'

y <- structure(.Data = sleep[,1], .Dim=c(10,2))
n <- nrow(y)
P <- ncol(y)
Sigma <- matrix(c(1, 0.6, 0.6, 2), 2, 2)
mu <- as.vector(c(0, 1))
Gamma <- matrix(c(2, 0, 0, 2), 2, 2)
v <- 10
Lambda <- matrix(c(20, 8, 8, 20), 2, 2)

sample_data <- list(y = y, n = n, P = P,
                    Sigma = Sigma, mu = mu,
                    Gamma = Gamma, v = v,
                    Lambda = Lambda)

set.seed(1234)
NormalMultMediaCovfit <- stan(model_code = NormalMultMediaCov,
                              data = sample_data, verbose = FALSE)

```

Con base en los resultados de las cadenas simuladas, se observa que la estimación bayesiana para el número de horas de sueño producidas por los dos medicamentos son 0.5772 y 2.1011, respectivamente. En cuanto a la estimación de la matriz de varianzas y covarianzas, ésta está dada por $\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} 3.0132 & 2.1011 \\ 2.1011 & 3.5222 \end{pmatrix}$.

```

print(NormalMultMediaCovfit, digits = 4,
      pars = c("theta", "Sigma"), probs = c(0.025, 0.975))

```

```

## Inference for Stan model: 8ef9836716ef08fd4cd1136cfef43904.
## 4 chains, each with iter=2000; warmup=1000; thin=1;
## post-warmup draws per chain=1000, total post-warmup draws=4000.
##
##               mean se_mean      sd    2.5%  97.5% n_eff  Rhat
## theta[1]    0.5482  0.0103 0.5001 -0.4113  1.5300  2337 1.0001
## theta[2]    2.0732  0.0122 0.5480  0.8840  3.0624  2033 1.0008
## Sigma[1,1]  3.0355  0.0241 1.1310  1.5812  5.8057  2206 0.9999
## Sigma[1,2]  2.1079  0.0232 1.0193  0.7354  4.7245  1928 1.0002
## Sigma[2,1]  2.1079  0.0232 1.0193  0.7354  4.7245  1928 1.0002
## Sigma[2,2]  3.5141  0.0280 1.3193  1.8198  6.8809  2214 0.9995
##
## Samples were drawn using NUTS(diag_e) at Sun Jun 27 21:01:20 2021.
## For each parameter, n_eff is a crude measure of effective sample size,

```

and Rhat is the potential scale reduction factor on split chains (at
convergence, Rhat=1).

Las figuras 4.7 y 4.8 muestran las distribuciones posteriores en este ejemplo.

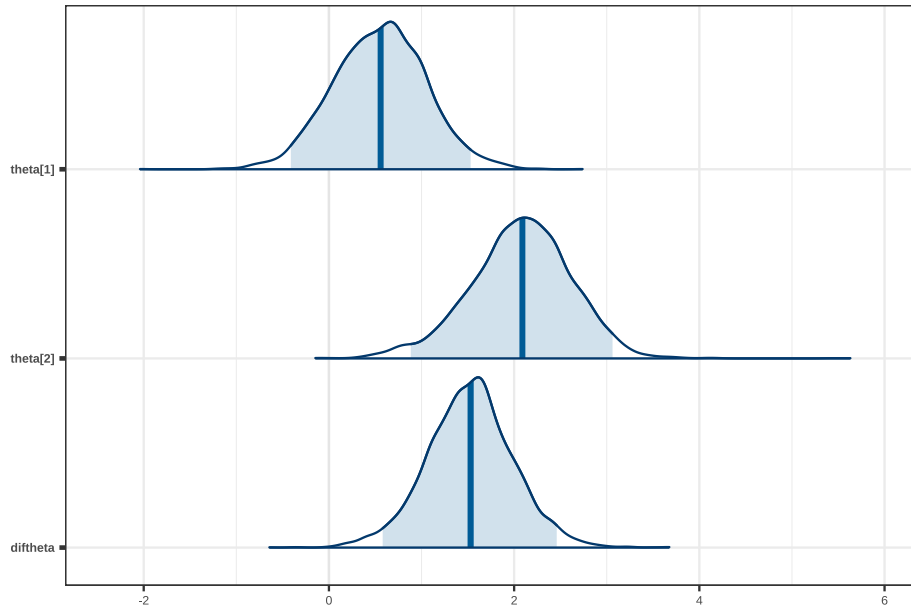


Figura 4.7: Distribuciones posteriores para el vector de medias y la diferencia de medias.

A continuación se muestran los códigos necesarios para implementar el muestreo de Gibbs de forma manual en R.

```
library(MCMCpack)
library(mvtnorm)

y.bar <- colMeans(y)
n <- nrow(y)
nsim <- 10000

theta.pos <- matrix(NA, nsim, P)
Sigma.pos <- array(NA, c(nsim, P, P))

# Valor inicial de theta
theta.pos[1,] <- c(0, 1)

# Parámetros posteriores de Sigma
v.pos <- v + n
matrix.theta <- kronecker(matrix(rep(1, n)),
```

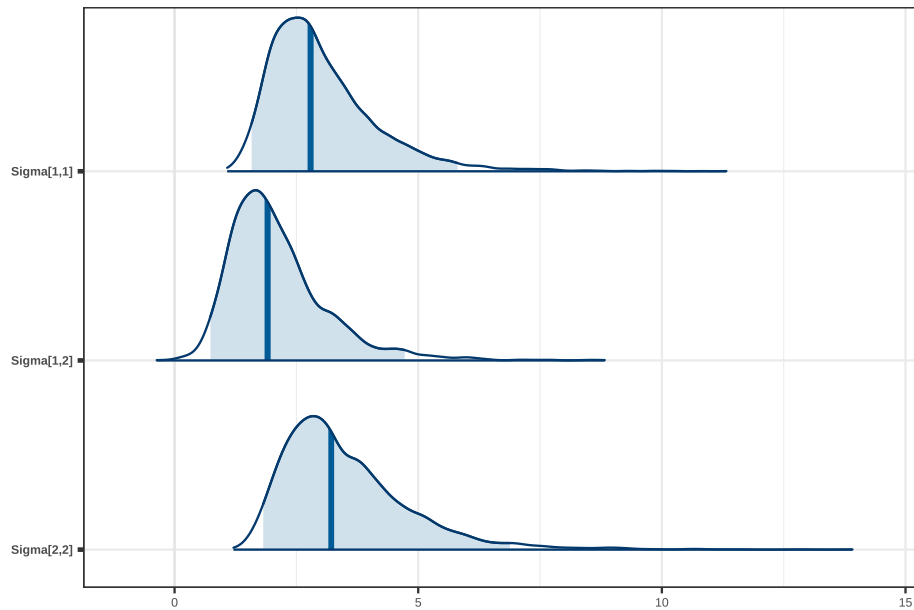



Figura 4.8: Distribuciones posteriores para los elementos de la matriz de covarianzas.

```

                                t(theta.pos[1, ]))
S.theta <- t(y - matrix.theta) %*% (y-matrix.theta)
Lambda.pos <- Lambda + S.theta
# Simulación de la distribución posterior condicional de Sigma
Sigma.pos[1, , ] <- riwish(v.pos, Lambda.pos)

#####
# muestreo de Gibbs #
#####

for(i in 2:nsim){
  # Parámetros posteriores de theta
  Gamma.n <- solve(solve(Gamma) +
                    n * solve(Sigma.pos[i - 1, , ]))
  mu.n <- Gamma.n %*%
    (solve(Gamma) %*% mu +
     n * solve(Sigma.pos[i - 1, , ]) %*% y.bar)
  # Simulación de la distribución posterior condicional de theta
  theta.pos[i, ] <- rmvnorm(1, mu.n, Gamma.n)
  # Parámetros posteriores de Sigma
  matrix.theta <- kronecker(matrix(rep(1, n)),
                             t(theta.pos[i, ]))

```

```

S.theta <- t(y - matrix.theta) %*% (y - matrix.theta)
Lambda.pos <- Lambda + S.theta
# Simulación de la distribución posterior condicional de Sigma
Sigma.pos[i, , ] <- riwish(v.pos, Lambda.pos)
}

```

Una vez finalizada la ejecución del muestreo de Gibbs, debemos examinar la calidad de los valores muestreados para asegurar que las estimaciones bayesianas sean obtenidas de una muestra de valores que hayan convergido, y en segundo lugar que no estén correlacionados. Para eso a continuación observamos la gráfica de los valores generados para algunos parámetros (en particular, consideramos los parámetros θ_1 , θ_2 , σ_1^2 y σ_{12}), así como la gráfica de las autocorrelaciones muestrales.

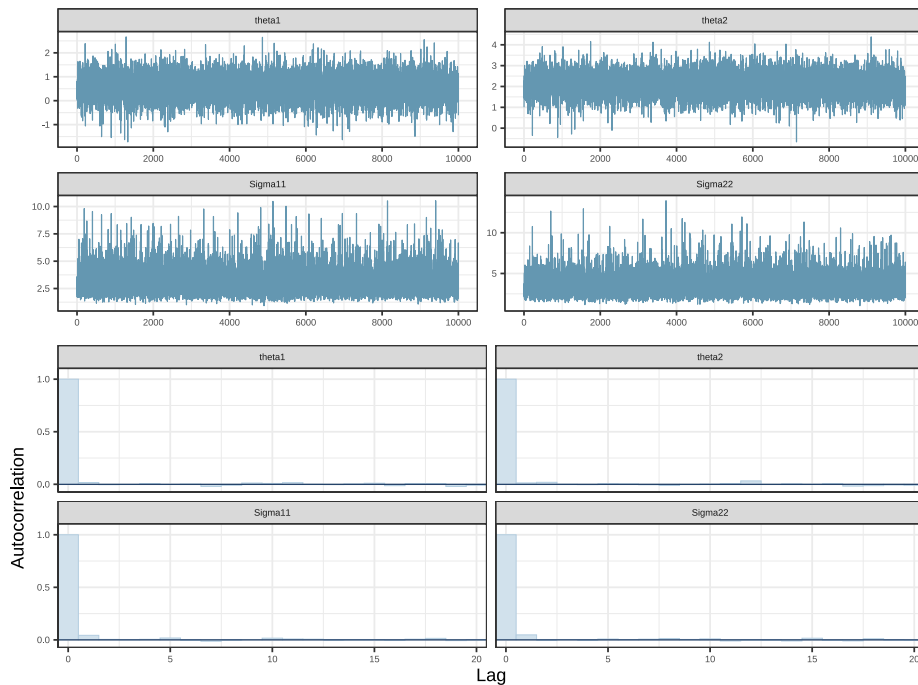


Figura 4.9: Convergencia de las distribuciones posteriores y diagramas de la función de autocorrelación en las cadenas.

Con estas gráficas, observamos que los valores muestreados han alcanzado la convergencia; además estos tienen correlaciones cercanas a cero. De esta forma, podemos usar los valores muestreados para calcular las estimaciones y los intervalos de credibilidad.

```

theta.Bayes <- colMeans(theta.pos)
Sigma.Bayes <- matrix(c(mean(Sigma.pos[,1,1])),

```

```

        mean(Sigma.pos[,2,1]),
        mean(Sigma.pos[,1,2]),
        mean(Sigma.pos[,2,2])),
    nrow = 2, ncol = 2)
theta.Bayes

## [1] 0.5638342 2.0993759
Sigma.Bayes

```

3.042341	2.093069
2.093069	3.490823

El procedimiento inferencial sobre la comparación entre los efectos de los dos medicamentos se puede realizar de la misma manera como ilustró el ejemplo 4.3.

4.3.2. Parámetros dependientes

Al igual que en el caso univariado, la inferencia posterior de los parámetros de interés debe ser llevada a cabo en dos etapas: En la primera, se debe establecer la distribución previa conjunta para ambos parámetros mediante

$$p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma}) = p(\boldsymbol{\Sigma})p(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{\Sigma})$$

Luego, en la segunda etapa es posible analizar posterior propiamente cada uno de los parámetros de interés puesto que

$$p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma} \mid \mathbf{Y}) \propto p(\mathbf{Y} \mid \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma})p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma})$$

Al igual que en el caso univariado, la anterior formulación conlleva a asignar una distribución previa para $\boldsymbol{\theta}$ dependiente de la matriz $\boldsymbol{\Sigma}$. Esto quiere decir que en la distribución $p(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{\Sigma})$ el valor de $\boldsymbol{\Sigma}$ se considera una constante fija y conocida. Siguiendo los lineamientos del capítulo anterior, una distribución previa para $\boldsymbol{\theta}$ condicional a $\boldsymbol{\Sigma}$ es

$$p(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{\Sigma}) \sim \text{Normal}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}/c_0)$$

Donde c_0 es una constante. Por otro lado, y siguiendo los argumentos de la sección anterior, una posible opción para la distribución previa de $\boldsymbol{\Sigma}$, corresponde a

$$p(\boldsymbol{\Sigma}) \sim \text{Inversa} - \text{Wishart}_{v_0}(\boldsymbol{\Lambda})$$

Resultado 4.15. La distribución previa conjunta de los parámetros $\boldsymbol{\theta}$ y $\boldsymbol{\Sigma}$ está dada por

$$p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma}) \propto |\boldsymbol{\Sigma}|^{-(v_0+p)/2-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\text{traza}(\boldsymbol{\Lambda}_0 \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) + c_0(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu})] \right\}$$

Demostración. La prueba es inmediata al multiplicar las densidades y asignar los términos que no dependen de los parámetros de interés a la constante de proporcionalidad. \square

Para encontrar las distribuciones posteriores de cada uno de los parámetros de interés se utilizan argumentos similares a los del capítulo anterior.

Resultado 4.16. *La distribución posterior de θ condicional a Σ, \mathbf{Y} está dada por*

$$\theta \mid \Sigma, \mathbf{Y} \sim \text{Normal}_p(\mu_n, \Sigma/(n + c_0))$$

donde

$$\mu_n = \frac{n\bar{\mathbf{Y}} + c_0\boldsymbol{\mu}}{n + c_0}$$

Demostración. Utilizando propiedades de la distribución condicional, tenemos que

$$\begin{aligned} p(\theta \mid \Sigma, \mathbf{Y}) &\propto p(\theta, \Sigma \mid \mathbf{Y}) \\ &\propto |\Sigma|^{-(v_0+p)/2-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\text{traza}(\Lambda_0 \Sigma^{-1}) + c_0(\theta - \boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1}(\theta - \boldsymbol{\mu})] \right\} \\ &\quad |\Sigma|^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \theta)' \Sigma^{-1}(\mathbf{y}_i - \theta) \right\} \\ &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} c_0(\theta - \boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1}(\theta - \boldsymbol{\mu}) \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \theta)' \Sigma^{-1}(\mathbf{y}_i - \theta) \right\} \end{aligned}$$

La anterior expresión es la misma que apareció en el capítulo anterior para $p(\theta \mid \Sigma, \mathbf{Y})$, en donde Σ/c_0 toma el valor de Γ . Así, teniendo en cuenta las ecuaciones (4.13) y (4.14), podemos afirmar que el vector de medias y la matriz de varianzas y covarianzas posterior están dadas por

$$\Gamma_n = ((\Sigma/c_0)^{-1} + n\Sigma^{-1})^{-1} = \frac{\Sigma}{n + c_0} \quad (4.20)$$

$$\mu_n = \frac{\Sigma}{n + c_0} ((\Sigma/c_0)^{-1} \boldsymbol{\mu} + n\Sigma^{-1} \bar{\mathbf{y}}) = \frac{n\bar{\mathbf{Y}} + c_0\boldsymbol{\mu}}{n + c_0} \quad (4.21)$$

\square

En cuanto a la distribución de Σ , se tiene el siguiente resultado:

Resultado 4.17. *La distribución marginal posterior de la matriz de parámetros Σ es*

$$\Sigma \mid \mathbf{Y} \sim \text{Inversa-Whishart}_{n+v_0}(\Lambda_n)$$

Donde

$$\Lambda_n = \Lambda + (n-1)\mathbf{S} + \frac{c_0 n}{c_0 + n} (\boldsymbol{\mu} - \bar{\mathbf{y}})(\boldsymbol{\mu} - \bar{\mathbf{y}})' \quad (4.22)$$

con S la matriz de varianzas y covarianzas muestrales.

Demostración.

$$\begin{aligned}
& p(\boldsymbol{\Sigma} \mid \mathbf{Y}) \\
&= \int_{R^p} p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma} \mid \mathbf{Y}) d\boldsymbol{\theta} \\
&\propto \int_{R^p} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-(v_0+p+n)/2-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\text{traza}(\boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) + c_0(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu}) + \sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \boldsymbol{\theta})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{y}_i - \boldsymbol{\theta}) \right] \right\} d\boldsymbol{\theta} \\
&\propto |\boldsymbol{\Sigma}|^{-(v_0+p+n)/2-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\text{traza}(\boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\Sigma}^{-1})] \right\} \\
&\quad \int_{R^p} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[c_0(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu}) + \sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \boldsymbol{\theta})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{y}_i - \boldsymbol{\theta}) \right] \right\} d\boldsymbol{\theta} \\
&\propto |\boldsymbol{\Sigma}|^{-(v_0+p+n)/2-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\text{traza}(\boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) + c_0 \boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} + \sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}}) + n \bar{\mathbf{y}}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \bar{\mathbf{y}} \right] \right\} \\
&\quad \int_{R^p} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [c_0 \boldsymbol{\theta}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\theta} - 2c_0 \boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\theta} - 2n \bar{\mathbf{y}}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\theta} + n \boldsymbol{\theta}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\theta}] \right\} d\boldsymbol{\theta} \\
&\propto |\boldsymbol{\Sigma}|^{-(v_0+p+n)/2-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\text{traza} \left((\boldsymbol{\Lambda} + c_0 \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}' + \sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})' + n \bar{\mathbf{y}} \bar{\mathbf{y}}') \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \right) \right] \right\} \\
&\quad \left| \frac{\boldsymbol{\Sigma}}{c_0 + n} \right|^{1/2} \exp \left\{ \frac{1}{2} \frac{c_0 \boldsymbol{\mu}' + n \bar{\mathbf{y}}'}{c_0 + n} \left(\frac{\boldsymbol{\Sigma}}{c_0 + n} \right)^{-1} \frac{c_0 \boldsymbol{\mu} + n \bar{\mathbf{y}}}{c_0 + n} \right\} \\
&\quad \underbrace{\int_{R^p} \left| \frac{\boldsymbol{\Sigma}}{c_0 + n} \right|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\theta} - \frac{c_0 \boldsymbol{\mu} + n \bar{\mathbf{y}}}{c_0 + n} \right)' \left(\frac{\boldsymbol{\Sigma}}{c_0 + n} \right)^{-1} \left(\boldsymbol{\theta} - \frac{c_0 \boldsymbol{\mu} + n \bar{\mathbf{y}}}{c_0 + n} \right) \right\} d\boldsymbol{\theta}}_{\text{Igual a 1}}
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
& \frac{c_0 \boldsymbol{\mu}' + n \bar{\mathbf{y}}'}{c_0 + n} \left(\frac{\boldsymbol{\Sigma}}{c_0 + n} \right)^{-1} \frac{c_0 \boldsymbol{\mu} + n \bar{\mathbf{y}}}{c_0 + n} \\
&= \frac{1}{c_0 + n} (c_0 \boldsymbol{\mu}' + n \bar{\mathbf{y}}') \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (c_0 \boldsymbol{\mu} + n \bar{\mathbf{y}}) \\
&= \text{traza} \left(\frac{1}{c_0 + n} (c_0 \boldsymbol{\mu} + n \bar{\mathbf{y}})(c_0 \boldsymbol{\mu}' + n \bar{\mathbf{y}}') \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \right) \\
&= \text{traza} \left(\left(\frac{c_0^2 \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}'}{c_0 + n} + \frac{2c_0 n \bar{\mathbf{y}} \boldsymbol{\mu}'}{c_0 + n} + \frac{n^2 \bar{\mathbf{y}} \bar{\mathbf{y}}'}{c_0 + n} \right) \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \right)
\end{aligned}$$

Reemplazando la anterior expresión en $p(\Sigma | \mathbf{Y})$, se tiene que

$$p(\Sigma | \mathbf{Y}) \propto |\Sigma|^{-(v_0+p+n+1)/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{traza} \left[\left(\Lambda + (n-1)\mathbf{S} + \frac{c_0 n}{c_0 + n} (\boldsymbol{\mu} - \bar{\mathbf{y}})(\boldsymbol{\mu} - \bar{\mathbf{y}})' \right) \Sigma^{-1} \right] \right\}$$

la cual corresponde a la distribución deseada. \square

En términos de simulación de densidades, para obtener las estimaciones bayesianas de $\boldsymbol{\theta}$ y Σ se debe primero simular valores de Σ de la distribución $p(\Sigma | \mathbf{Y})$ y luego, se debe utilizar estos valores para simular valores de $\boldsymbol{\theta}$ de la distribución $p(\boldsymbol{\theta} | \Sigma, \mathbf{Y})$.

Una forma equivalente de obtener las estimaciones es calcular directamente la esperanza teórica de las distribuciones posteriores marginales de $\boldsymbol{\theta}$ y de Σ .

Del resultado 4.17, podemos concluir que la estimación bayesiana de la matriz de varianzas y covarianzas Σ está dada por

$$\hat{\Sigma} = \frac{\Lambda + (n-1)\mathbf{S} + \frac{c_0 n}{c_0 + n} (\boldsymbol{\mu} - \bar{\mathbf{y}})(\boldsymbol{\mu} - \bar{\mathbf{y}})'}{n + v_0 - p - 1}$$

Teniendo en cuenta que la estimación previa de Σ viene dada por $\hat{\Sigma}_{pre} = \frac{\Lambda}{v_0 - p - 1}$, podemos ver que la estimación bayesiana de Σ está conformada por tres componentes: la estimación previa $\hat{\Sigma}_{pre}$, la estimación clásica \mathbf{S} y una medida de discrepancia entre la estimación previa y la clásica de $\boldsymbol{\theta}$. Para encontrar correctas formas de escoger los parámetros previas de Σ , por ahora ignoramos el último componente, y vemos que la estimación previa $\hat{\Sigma}_{pre}$ y la estimación clásica \mathbf{S} entran al cómputo de la estimación bayesiana con los pesos de $v_0 - p - 1$ y $n - 1$, de esta forma, podemos escoger v_0 tal que $v_0 - p$ represente el número de la información previa, y el valor de Λ se puede calcular a partir de v_0 y $\hat{\Sigma}_{pre}$.

El siguiente resultado muestra la distribución posterior marginal de $\boldsymbol{\theta}$.

Resultado 4.18. *La distribución marginal posterior del parámetro $\boldsymbol{\theta}$ es la distribución t de Student multivariante tal que*

$$\boldsymbol{\theta} | \mathbf{Y} \sim t_{n+v_0-p+1} \left(\boldsymbol{\mu}_n, \frac{\Lambda_n}{(c_0 + n)(n + v_0 - p + 1)} \right)$$

con $\boldsymbol{\mu}_n = \frac{c_0 \boldsymbol{\mu} + n \bar{\mathbf{y}}}{c_0 + n}$ y Λ_n dado en la ecuación (4.22).

Demostración.

$$\begin{aligned}
& p(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{Y}) \\
&= \int_{R^p \times R^p} p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma} \mid \mathbf{Y}) d\boldsymbol{\Sigma} \\
&= \int_{R^p \times R^p} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-(v_0+p+n)/2-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\text{traza}(\boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) + c_0(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu}) + \sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \boldsymbol{\theta})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{y}_i - \boldsymbol{\theta}) \right] \right\} d\boldsymbol{\Sigma} \\
&= \int_{R^p \times R^p} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-(v_0+p+n+2)/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{traza} \left[\boldsymbol{\Lambda} + c_0(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu})' + \sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \boldsymbol{\theta})(\mathbf{y}_i - \boldsymbol{\theta})' \right] \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \right\} d\boldsymbol{\Sigma} \\
&\propto \left| \boldsymbol{\Lambda} + c_0(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu})' + \sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \boldsymbol{\theta})(\mathbf{y}_i - \boldsymbol{\theta})' \right|^{-\frac{v_0+n+1}{2}} \\
&= \left| \boldsymbol{\Lambda} + c_0(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu})' + \sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})' + n(\bar{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\theta})(\bar{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\theta})' \right|^{-\frac{v_0+n+1}{2}} \\
&= \left| \boldsymbol{\Lambda} + (n-1)\mathbf{S} + \frac{c_0 n}{c_0 + n}(\boldsymbol{\mu} - \bar{\mathbf{y}})(\boldsymbol{\mu} - \bar{\mathbf{y}})' + (c_0 + n)(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu}_n)(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu}_n)' \right|^{-\frac{v_0+n+1}{2}} \\
&= \left| \boldsymbol{\Lambda}_n + (c_0 + n)(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu}_n)(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu}_n)' \right|^{-\frac{v_0+n+1}{2}} \\
&\propto \left| \mathbf{I}_p + (c_0 + n)\boldsymbol{\Lambda}_n^{-1}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu}_n)(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu}_n)' \right|^{-\frac{v_0+n+1}{2}} \\
&= \left| 1 + (c_0 + n)(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu}_n)' \boldsymbol{\Lambda}_n^{-1}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu}_n) \right|^{-\frac{v_0+n+1}{2}} \\
&= \left| 1 + \frac{1}{n + v_0 - p + 1}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu}_n)' \left(\frac{\boldsymbol{\Lambda}_n}{(c_0 + n)(n + v_0 - p + 1)} \right)^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu}_n) \right|^{-\frac{v_0+n+1}{2}}
\end{aligned}$$

Esta expresión obtenida corresponde a la forma de la distribución t de Student multivariado. En el desarrollo se utilizó la propiedad $|\mathbf{I} + \mathbf{AB}| = |\mathbf{I} + \mathbf{BA}|$ para matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} de tamaños compatibles para las multiplicaciones. \square

El anterior resultado indica que la estimación bayesiana del parámetro $\boldsymbol{\theta}$ está dada por

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\mu}_n = \frac{n\hat{\mathbf{Y}} + c_0\boldsymbol{\mu}}{n + c_0} = \frac{n}{n + c_0}\hat{\mathbf{Y}} + \frac{c_0}{n + c_0}\boldsymbol{\mu}$$

donde se puede observar que $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ se acercará a la estimación clásica $\hat{\mathbf{y}}$ cuando n es grande comparado a c_0 , de lo contrario se acercará a la estimación previa $\boldsymbol{\mu}$. La varianza posterior para el i -ésimo componente de $\boldsymbol{\theta}$ está dada por

$$\text{var}(\theta_i \mid \mathbf{Y}) = \frac{\lambda_{ii}}{(c_0 + n)(n + v_0 - p + 1)} \frac{n + c_0 - p + 1}{n + c_0 - p - 1} \approx \frac{\lambda_{ii}}{(c_0 + n)(n + v_0 - p + 1)}$$

donde λ_{ii} denota el i -ésimo elemento en la diagonal de la matriz $\boldsymbol{\Lambda}_n$.

Cuadro 4.1: Tasa de natalidad, tasa de mortalidad, mortalidad infantil en algunos países.

Natalidad	Mortalidad	MortalidadInfantil
20.7	8.4	25.7
46.6	18.0	111.0
28.6	7.9	63.0
23.4	5.8	17.1
27.4	6.1	40.0
32.9	7.4	63.0
29.0	23.2	43.0
34.8	6.6	42.0
32.9	8.3	109.9
18.0	9.6	21.9
27.5	4.4	23.3

Ejemplo 4.5. Peña (2002) reporta las mediciones de 6 variables indicadoras de desarrollo en 91 países en los años noventa. Para este ejemplo, utilizamos tres variables: la tasa de natalidad, la tasa de mortalidad y la mortalidad infantil en algunos países de Suramérica y Asia mostrados en la tabla 4.1. Específicamente, usaremos los datos de los países de Suramérica como datos muestrales y los de Asia para extraer la información previa.

A continuación se muestra el proceso necesario para obtener la estimación bayesiana del vector de medias y de la matriz de covarianzas con los datos del ejemplo.

```
# Datos muestrales
y.sam <- data.frame(
  Nata = c(20.7, 46.6, 28.6, 23.4, 27.4,
           32.9, 29, 34.8, 32.9, 18, 27.5),
  Mort = c(8.4, 18, 7.9, 5.8, 6.1, 7.4,
           23.2, 6.6, 8.3, 9.6, 4.4),
  Infa = c(25.7, 111, 63, 17.1, 40, 63,
           43, 42, 109.9, 21.9, 23.3))

# Datos de la información previa
y.pre <- data.frame(
  Nata = c(21.2, 30.5, 28.6, 31.6,
           36.1, 39.6, 17.8),
  Mort = c(6.7, 10.2, 9.4, 5.6,
           8.8, 14.8, 5.2),
  Infa=c(32, 91, 75, 24, 68, 128, 7.5))

n <- nrow(y.sam)
P <- ncol(y.sam)
```



```

# Estimación clásica de los parámetros
y.bar <- colMeans(y.sam)
S <- var(y.sam)

# Estimación previa de los parámetros
mu <- colMeans(y.pre)
c0 <- nrow(y.pre)
v0 <- P + nrow(y.pre)
Lambda <- var(y.pre) * (v0 - P - 1)

# Parámetros de las distribuciones posteriores marginales
mu.n <- (n * y.bar + c0 * mu)/(n + c0)
Lambda.n <- Lambda + (n - 1) * S +
  matrix(mu - y.bar) %*%
  t(matrix(mu - y.bar)) * c0 * n
var.theta <- Lambda.n/((c0 + n) * (n + v0 - P + 1))
mu.n

##      Nata      Mort      Infa
## 29.288889  9.244444 54.744444
var.theta

```

	Nata	Mort	Infa
Nata	2.7991957	0.7890556	10.675752
Mort	0.7890556	1.3526977	2.195668
Infa	10.6757519	2.1956683	85.548053

Lambda.n

	Nata	Mort	Infa
Nata	957.3249	269.8570	3651.1071
Mort	269.8570	462.6226	750.9186
Infa	3651.1071	750.9186	29257.4343

De los anteriores cálculos, se puede ver que la distribución posterior de θ está dada por

$$\theta \mid \mathbf{Y} \sim t_{19} \left(\begin{pmatrix} 29.3 \\ 9.2 \\ 54.7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2.80 & 0.79 & 10.68 \\ 0.79 & 1.35 & 2.20 \\ 10.68 & 2.20 & 85.55 \end{pmatrix} \right)$$

Usando propiedades de la distribución multivariante t de Student, tenemos que $\theta_1 \sim t_{19}(29.29, 2.80)$, $\theta_2 \sim t_{19}(9.24, 1.35)$ y $\theta_3 \sim t_{19}(54.7, 85.55)$, de allí se puede encontrar fácilmente los intervalos de credibilidad para cada uno de estos tres parámetros.

En cuanto a la distribución posterior de Σ , ésta está dada por

$$\Sigma \mid \mathbf{Y} \sim \text{Inversa} - \text{Wishart}_{21} \left(\begin{pmatrix} 957 & 270 & 3651 \\ 270 & 463 & 751 \\ 3651 & 751 & 29257 \end{pmatrix} \right)$$

La estimación bayesiana de Σ viene dada por $\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} 56.3 & 15.9 & 214.8 \\ 15.9 & 27.2 & 44.2 \\ 214.8 & 44.2 & 1721.0 \end{pmatrix}$.

Por propiedades de la distribución inversa-Wishart, se puede concluir que los elementos diagonales de Σ tienen distribución inversa-Gamma. Por ejemplo, se tiene que $\sigma_1^2 \sim \text{Inversa} - \text{Gamma}(21/2, 56.3/2)$ y cualquier inferencia que se desear realizar sobre σ_1^2 es posible a partir de esta distribución.

Aparte de los análisis anteriores, también podemos realizar ejercicios de comparación y verificar la posible independencia entre parejas de variables. Por ejemplo, si queremos verificar la hipótesis de que la tasa de natalidad es dos veces la tasa de mortalidad, esto es $\theta_1 = 2 \times \theta_2$. Una forma de confirmar o refutar esta hipótesis es hallar el intervalo de credibilidad de $\theta_1 - 2\theta_2$ que se

puede expresar como $(1, -2, 0) \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$. Por propiedades de la distribución t de

Student multivariante, tenemos que $\theta_1 - 2\theta_2$ tiene distribución t de Student univariada con los mismos grados de libertad que θ . La esperanza de esta dis-

tribución está dada por $(1, -2, 0) \begin{pmatrix} 29.3 \\ 9.2 \\ 54.7 \end{pmatrix} = 10.8$ y la escala está dada por

$$(1, -2, 0) \begin{pmatrix} 2.80 & 0.79 & 10.68 \\ 0.79 & 1.35 & 2.20 \\ 10.68 & 2.20 & 85.55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 5.054, \text{ esto es,}$$

$$\theta_1 - 2\theta_2 \mid \mathbf{Y} \sim t_{19}(10.8, 5.054)$$

De esta forma, un intervalo de credibilidad para $\theta_1 - 2\theta_2$ viene dado por los percentiles 2.5 % y 97.5 % de la anterior distribución, que a la vez son iguales a los percentiles 2.5 % y 97.5 % de la distribución t de Student estandarizada multiplicado por $\sqrt{5.054}$ y sumando 10.8. Este intervalo es igual a (6.095, 15.505). Al observar que este intervalo no contiene el valor 0, podemos concluir que no es válido afirmar que la tasa de natalidad sea dos veces la tasa de mortalidad.

En el anterior análisis, vemos que el intervalo de credibilidad para $\theta_1 - 2\theta_2$ contiene solo valores positivos, lo cual es un indicio de que la variable $\theta_1 - 2\theta_2$ tenga la mayor parte de la función de densidad ubicada en el eje positivo. De hecho podemos indagar por $Pr(\theta_1 - 2\theta_2 > 0)$, la cual se puede calcular de la distribución $t_{19}(10.8, 5.054)$ encontrada anteriormente. Esta probabilidad es $1 - \text{pt}((0 - 10.8)/\text{sqrt}(5.054), 19)$ dando como resultado 0.9999383; de donde

se muestra una fuerte evidencia de que la tasa de natalidad es superior a dos veces la tasa de mortalidad.

Los anteriores resultados fueron obtenidos directamente de las distribuciones posteriores marginales $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Y})$ y $p(\boldsymbol{\Sigma}|\mathbf{Y})$. De forma equivalente también se puede usar las técnicas de simulación con base en las distribuciones $p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma}|\mathbf{Y})$ y $p(\boldsymbol{\Sigma}|\mathbf{Y})$. A continuación se muestran los códigos necesario en R:

```
nsim <- 1000
theta.pos <- matrix(NA, nsim, P)
Sigma.pos <- array(NA, c(nsim, P, P))

for(i in 1:nsim){
  Sigma.pos[i,,] <- riwish(n + v0, Lambda.n)
  theta.pos[i,] <- rmvnorm(1, mu.n,
                           Sigma.pos[i, , ]/(n + c0))
}

# Estimaciones finales
theta.final <- colMeans(theta.pos)
Sigma.final <- matrix(c(mean(Sigma.pos[, 1, 1]),
                        mean(Sigma.pos[, 1, 2]),
                        mean(Sigma.pos[, 1, 3]),
                        mean(Sigma.pos[, 2, 1]),
                        mean(Sigma.pos[, 2, 2]),
                        mean(Sigma.pos[, 2, 3]),
                        mean(Sigma.pos[, 3, 1]),
                        mean(Sigma.pos[, 3, 2]),
                        mean(Sigma.pos[, 3, 3])),
                      nrow = P, ncol = P)

theta.final
```

```
## [1] 29.245516  9.288723 54.650509
```

```
Sigma.final
```

55.88544	15.59074	211.03550
15.59074	26.47268	42.52096
211.03550	42.52096	1687.49974

Podemos ver que los resultados obtenidos con los dos métodos son totalmente coincidentes. En cuanto al intervalo de credibilidad para $\theta_1 - 2\theta_2$, se puede calcular con

```
quantile(
  theta.pos[,1] - 2 * theta.pos[, 2],
  c(0.025, 0.975))
```

```
##      2.5%      97.5%
```

```
## 6.120592 15.045185
```

También podemos calcular $Pr(\theta_1 - 2\theta_2 > 0)$ como

```
sum(theta.pos[, 1] > 2 * theta.pos[, 2])/nsim
```

```
## [1] 1
```

Podemos ver que estos resultados son muy similares a los obtenidos usando $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Y})$.

4.3.3. Parámetros no informativos

Gelman et al. (2003) afirma que la distribución previa no informativa de Jeffreys conjunta para $\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma}$, en este caso está dada por la siguiente expresión

$$p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma}) \propto |\boldsymbol{\Sigma}|^{-(p+1)/2}$$

La distribución posterior conjunta para $\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma}$ está dada por

$$p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma} | \mathbf{Y}) \propto |\boldsymbol{\Sigma}|^{-(p+n+1)/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\theta})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\theta}) \right\}$$

De la anterior distribución, podemos encontrar la distribución condicional posterior de $\boldsymbol{\theta}$ dada en el siguiente resultado.

Resultado 4.19. *La distribución posterior del vector de parámetros $\boldsymbol{\theta}$ condicional a $\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{Y}$ es*

$$\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{Y} \sim \text{Normal}_p(\bar{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\Sigma}/n)$$

Demostración. Algunas simples operaciones algebraicas muestran que:

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{Y}) &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\theta})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\theta}) \right\} \\ &\propto \exp \left\{ -\frac{n}{2} (\boldsymbol{\theta} - \bar{\mathbf{Y}})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \bar{\mathbf{Y}}) \right\} \end{aligned}$$

Por lo tanto, factorizando convenientemente, se encuentra una expresión idéntica a la función de distribución de una variable aleatoria con distribución $\text{Normal}_p(\bar{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\Sigma}/n)$. \square

En cuanto a la estimación de $\boldsymbol{\Sigma}$, en el siguiente resultado encontramos su distribución posterior.

Resultado 4.20. *La distribución marginal posterior de la matriz de parámetros $\boldsymbol{\Sigma}$ es*

$$\boldsymbol{\Sigma} | \mathbf{Y} \sim \text{Inversa-Whishart}_{n-1}(\mathbf{S})$$

donde $\mathbf{S} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})'$

Demostración. En primer lugar recordamos la expresión

$$\mathbf{S}_\theta = \sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \theta)(\mathbf{y}_i - \theta)' = \mathbf{S} + n(\theta - \bar{\mathbf{y}})(\theta - \bar{\mathbf{y}})'$$

Por otro lado, recurriendo a las propiedades del operador *traza*, e integrando la distribución posterior conjunta con respecto a θ , se tiene que

$$\begin{aligned} p(\Sigma \mid \mathbf{Y}) &= \int p(\theta, \Sigma \mid \mathbf{Y}) d\theta \\ &= |\Sigma|^{-(p+n+1)/2} \int \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\mathbf{Y}_i - \theta)' \Sigma^{-1} (\mathbf{Y}_i - \theta) \right\} d\theta \\ &= |\Sigma|^{-(p+n+1)/2} \int \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{traza}(\Sigma^{-1} \mathbf{S}_\theta) \right\} d\theta \\ &= |\Sigma|^{-(p+n+1)/2} \int \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{traza}(\Sigma^{-1} (\mathbf{S} + n(\theta - \bar{\mathbf{y}})(\theta - \bar{\mathbf{y}})')) \right\} d\theta \\ &= |\Sigma|^{-(p+n)/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{traza}(\Sigma^{-1} \mathbf{S}) \right\} \\ &\quad \times \int |\Sigma|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{n}{2} \text{traza}(\Sigma^{-1} (\theta - \bar{\mathbf{y}})(\theta - \bar{\mathbf{y}})') \right\} d\theta \\ &= |\Sigma|^{-(p+n)/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{traza}(\Sigma^{-1} \mathbf{S}) \right\} \\ &\quad \times \int |\Sigma|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{n}{2} \text{traza}((\theta - \bar{\mathbf{y}})' \Sigma^{-1} (\theta - \bar{\mathbf{y}})) \right\} d\theta \\ &= |\Sigma|^{-(p+n)/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{traza}(\Sigma^{-1} \mathbf{S}) \right\} \\ &\quad \times \underbrace{\int |\Sigma|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{n}{2} (\theta - \bar{\mathbf{y}})' \Sigma^{-1} (\theta - \bar{\mathbf{y}}) \right\} d\theta}_{\text{Normal}_p(\bar{\mathbf{y}}, \Sigma/n)} \\ &= |\Sigma|^{-(p+n)/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{traza}(\Sigma^{-1} \mathbf{S}) \right\} \end{aligned}$$

Por lo tanto, factorizando convenientemente, se encuentra una expresión idéntica a la función de distribución de una variable aleatoria con distribución *Inversa-Whishart* $_{n-1}(\mathbf{S})$. \square

El anterior resultado indica que la estimación bayesiana de Σ cuando se utiliza una previa no informativa está dada por

$$\hat{\Sigma} = \frac{\sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})'}{n - p - 2}$$

Esta expresión es muy similar a la estimación clásica de la matriz de varianzas y covarianzas dada por $\frac{\sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})'}{n-1}$. Se puede observar que a medida que n se aumente, las dos expresiones darán resultados muy similares, pero siempre la estimación bayesiana será mayor a la estimación clásica, especialmente en situaciones donde el tamaño muestral es pequeño.

Para obtener la estimación de Σ junto con la estimación de θ , podemos proceder de la siguiente forma para obtener valores simulados de θ y Σ y así, obtener las estimaciones respectivas. Si el número de iteraciones se fija como G , entonces se procede a:

1. Simular G valores de la distribución de $\Sigma|\mathbf{Y}$; estos valores se denotan por $\Sigma_{(1)}, \Sigma_{(2)}, \dots, \Sigma_{(G)}$.
2. Para cada valor de $\Sigma_{(g)}$, con $g = 1, \dots, G$, simular un valor de la distribución de $\theta|\Sigma, \mathbf{Y}$; es decir, de la distribución $N_p(\bar{\mathbf{y}}, \Sigma/n)$, donde Σ se reemplaza por $\Sigma_{(g)}$. De esta forma, se obtienen los valores $\theta_{(1)}, \theta_{(2)}, \dots, \theta_{(G)}$.

El siguiente ejemplo ilustra la forma de obtener las estimaciones siguiendo el anterior procedimiento.

Ejemplo 4.6. Retomamos los datos del efecto de aumento en horas de sueño de dos medicamentos soporíferos utilizados en los ejemplos 4.3 y 4.4. Los siguientes códigos en R ilustran el procedimiento computacional para obtener valores de la distribución posterior conjunta de θ y Σ .

```
library(MCMCpack)
library(mvtnorm)

y <- as.matrix(
  data.frame(M1 = sleep[1:10, 1],
             M2 = sleep[-(1:10), 1]))
n <- nrow(y)

y.bar <- colMeans(y)
S <- var(y) * (n - 1)

nsim <- 1000
theta.pos <- matrix(NA, nsim, 2)
Sigma.pos <- array(NA, c(nsim, 2, 2))

for(i in 1:nsim){
  #simulacion de la distribucion posterior condicional de Sigma
  Sigma.pos[i, , ] <- riwish(n - 1, S)
  #simulacion de la distribucion posterior condicional de theta
  theta.pos[i, ] <- rmvnorm(1, y.bar, Sigma.pos[i, , ]/n)
}
```

Dado que en el cálculo no se hizo uso de valores iniciales y por la forma de

las distribuciones posteriores de $p(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{Y})$ y $\boldsymbol{\Sigma}|\mathbf{Y}$, los valores muestrados en la diferentes iteraciones no guardan relación entre sí; por ende, podemos usar directamente todos los valores simulados para realizar el cálculo de las estimaciones bayesianas.

```
theta.Bayes <- colMeans(theta.pos)
Sigma.Bayes <- matrix(c(mean(Sigma.pos[, 1, 1]),
                        mean(Sigma.pos[, 2, 1]),
                        mean(Sigma.pos[, 1, 2]),
                        mean(Sigma.pos[, 2, 2])),
                      ncol = 2, nrow = 2)

theta.Bayes
```

```
## [1] 0.7890492 2.3443686
```

```
Sigma.Bayes
```

4.985367	4.337360
4.337360	6.002711

Por otro lado, la estimación clásica de los parámetros está dada por

```
y.bar
```

```
## M1 M2
```

```
## 0.75 2.33
```

```
var(y)
```

	M1	M2
M1	3.200556	2.848333
M2	2.848333	4.009000

Por consiguiente, podemos observar que, en cuanto al parámetro $\boldsymbol{\theta}$, la estimación bayesiana es igual a la estimación clásica; mientras que el determinante de la estimación bayesiana de $\boldsymbol{\Sigma}$ es mucho mayor que el de la estimación clásica, esto ocurre en situaciones cuando el tamaño muestral es pequeño. En cuanto a la estimación por intervalo de los efectos promedios de los dos medicamentos, tenemos que:

```
quantile(theta.pos[, 1], c(0.025, 0.975))
```

```
## 2.5% 97.5%
```

```
## -0.6388661 2.1506794
```

```
t.test(y[, 1])$conf.int
```

```
## [1] -0.5297804 2.0297804
```

```
## attr(,"conf.level")
```

```
## [1] 0.95
```

```
quantile(theta.pos[, 2], c(0.025, 0.975))
```

```
##      2.5%      97.5%
## 0.7742381 3.9578339
```

```
t.test(y[,2])$conf.int
```

```
## [1] 0.8976775 3.7623225
## attr(,"conf.level")
## [1] 0.95
```

De las anteriores salidas observamos que los resultados obtenidos con el enfoque bayesiano, aunque no son exactamente iguales a los obtenidos con el enfoque clásico, sí son muy similares. En cuanto a la estimación por intervalo de las varianzas y covarianzas. Primero consideramos la varianza del primer medicamento denotada por σ_1^2 . La distribución posterior de la matriz de varianzas y covarianzas está dada por

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \sim \text{Inversa-Wishart}_9(\mathbf{S})$$

con $\mathbf{S} = \sum_{i=1}^{10} (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})' = \begin{pmatrix} 28.81 & 25.64 \\ 25.64 & 36.08 \end{pmatrix}$. Usando las propiedades de la distribución Inversa-Wishart, se puede concluir que la distribución marginal posterior de σ_1^2 está dada por *Inversa-Gamma*($\alpha = \frac{9-1}{2}, \beta = \frac{28.81}{2}$), y su intervalo de credibilidad se puede calcular directamente de dicha distribución, o equivalentemente usando los percentiles muestrales de los valores de σ_1^2 simulados. El intervalo obtenido por estos dos medios son muy similares como se puede ver a continuación.

```
library(psc1)
```

```
qigamma(0.025, alpha = 8/2, beta = 28.81/2)
```

```
## [1] 1.643042
```

```
qigamma(0.975, alpha = 8/2, beta = 28.81/2)
```

```
## [1] 13.21723
```

```
quantile(Sigma.pos[, 1, 1], c(0.025, 0.975))
```

```
##      2.5%      97.5%
## 1.60053 14.00017
```

El intervalo de confianza del 95 % se puede obtener con el siguiente código².

```
c(9 * var(y[, 1]) / qchisq(0.975, 9),
  9 * var(y[, 2]) / qchisq(0.025, 9))
```

²Consultar Zhang and Gutiérrez (2010, sección.3.2.1) para mayor información.

[1] 1.514238 13.361406

En comparación con el intervalo de credibilidad, el intervalo de confianza está ubicado levemente hacia la izquierda del eje real, esto se debe a que la estimación clásica de la varianza siempre será menor a la estimación bayesiana con una previa no informativa.

Apéndice A

Elementos de probabilidad

A.1. Distribuciones discretas

A.1.1. Distribución uniforme discreta

Definición A.1. Una variable aleatoria Y tiene distribución uniforme discreta sobre el conjunto $\{1, 2, \dots, N\}$ si su función de densidad está dada por:

$$f_Y(y) = \frac{1}{N} I_{\{1, 2, \dots, N\}}(y) \quad (\text{A.1})$$

Esta distribución describe situaciones donde los resultados de un experimento aleatorio tienen la misma probabilidad de ocurrencia. Entre los ejemplos de la distribución uniforme discreta en la vida práctica están el lanzamiento de una moneda corriente, el lanzamiento de un dado corriente, la extracción de una urna que contiene bolas enumeradas de 1 a N .

Resultado A.1. Si Y es una variable aleatoria con distribución uniforme discreta sobre el conjunto $\{1, 2, \dots, N\}$, entonces:

- $E(Y) = \frac{N+1}{2}$.
- $Var(Y) = \frac{N^2-1}{12}$.
- $m_Y(t) = \sum_{i=1}^N \frac{e^{ti}}{N}$.

A.1.2. Distribución hipergeométrica

Definición A.2. Una variable aleatoria Y tiene distribución hipergeométrica con parámetros n , R y N si su función de densidad está dada por:

$$f_Y(y) = \frac{\binom{R}{y} \binom{N-R}{n-y}}{\binom{N}{n}} I_{\{0,1,\dots,n\}}(y), \quad (\text{A.2})$$

y se nota como $Y \sim Hg(n, R, N)$.

Suponga que en una urna hay N bolas en total, donde R de ellas son del color negro y los $N - R$ son del color blanco, se extrae aleatoriamente n bolas de la urna ($n < N$), entonces la variable “número de bolas negras extraídas” tiene distribución hipergeométrica con parámetros n , R y N . Otro uso de la distribución hipergeométrica es el problema de captura-recaptura.

Resultado A.2. Si Y es una variable aleatoria con distribución hipergeométrica con parámetros n , R y N , entonces:

- $E(Y) = \frac{nR}{N}$.
- $Var(Y) = \frac{nR(N-R)(N-n)}{N^2(N-1)}$.

El anterior resultado no incluye la función generadora de momentos, pues éste no ha resultado ser útil en la teoría relacionada con la distribución hipergeométrica.

A.1.3. Distribución Bernoulli

La distribución Bernoulli debe su nombre al matemático suizo Jacob Bernoulli (1654-1705) que describe el éxito o fracaso de un evento.

Definición A.3. Una variable aleatoria Y tiene distribución Bernoulli con parámetro $p \in (0, 1)$ si su función de densidad está dada por:

$$f_Y(y) = p^y (1-p)^{1-y} I_{\{0,1\}}(y), \quad (\text{A.3})$$

y se nota como $Y \sim Ber(p)$.

Resultado A.3. Si Y es una variable aleatoria con distribución Bernoulli con parámetro p , entonces:

- $E(Y) = p$.
- $Var(Y) = p(1-p)$.
- $m_Y(t) = pe^t + 1 - p$.

A.1.4. Distribución binomial

Definición A.4. Una variable aleatoria Y tiene distribución binomial con los parámetros $n \in \mathbb{N}$ y $p \in (0, 1)$ si su función de densidad está dada por:

$$f_Y(y) = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y} I_{\{0,1,\dots,n\}}(y), \quad (\text{A.4})$$

y se nota como $Y \sim Bin(n, p)$.

Resultado A.4. Sea Y_1, \dots, Y_n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución Bernoulli con parámetro p , entonces la variable $\sum_{i=1}^n Y_i$ tiene distribución $\text{Bin}(n, p)$. Por ende, la distribución Bernoulli es un caso particular de la distribución binomial cuando $n = 1$.

Demostración. La demostración radica en el hecho de que la función generadora de momentos caracteriza la distribución probabilística, entonces basta demostrar que la función generadora de momentos de $\sum_{i=1}^n X_i$ es la de una distribución $\text{Bin}(n, p)$. Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} m_{\sum Y_i}(t) &= E(e^{\sum tY_i}) = E\left(\prod_{i=1}^n e^{tY_i}\right) \\ &= \prod_{i=1}^n E(e^{tY_i}) \quad (\text{por independencia}) \\ &= \prod_{i=1}^n (pe^t + 1 - p) \quad (\text{definición de } m_{Y_i}(t)) \\ &= (pe^t + 1 - p)^n \end{aligned}$$

□

Una aplicación de esta distribución es cuando tenemos un número n de repeticiones independientes de un experimento donde cada uno tiene dos posibles resultados que se podrían llamarse como éxito o fracaso y donde la probabilidad de éxito p es constante en cada una de las repeticiones. Por tanto, la variable número de éxitos obtenidos en las n repeticiones tiene distribución $\text{Bin}(n, p)$. La distribución binomial tiene dos parámetros, n y p ; sin embargo, cuando n es conocido, la distribución dependerá sólo del valor p que sería el único parámetro con espacio paramétrico $\Theta = (0, 1)$.

Resultado A.5. Si Y es una variable aleatoria con distribución binomial con parámetros n y p , entonces

- $E(Y) = np$.
- $\text{Var}(Y) = np(1 - p)$.
- $m_Y(t) = (pe^t + 1 - p)^n$.

A.1.5. Distribución Binomial negativa

Definición A.5. Una variable aleatoria Y tiene distribución Binomial negativa con parámetros (θ, r) si su función de densidad está dada por:

$$P(y \mid \theta, r) = \frac{\Gamma(r + y_i)}{y_i! \Gamma(r)} \theta^r (1 - \theta)^{1-y_i} I_{(0,1,2,\dots)}(y) \quad (\text{A.5})$$

Esta distribución siempre ha tenido lugar al resolver el problema del número de ensayos necesarios para lograr un número específico de éxitos. Por supuesto, si r es el número de éxitos necesarios y se conoce que la probabilidad de éxito es θ , entonces la distribución binomial negativa corresponde a un modelo probabilístico, afianzado durante siglos, que permite la resolución de este tipo de situaciones.

Por otro lado, es posible asignar al parámetro r valores que sean reales; en este caso no hay ninguna interpretación práctica en el contexto del número de ensayos necesarios para determinados éxitos. Sin embargo, en términos de distribución, r es un parámetro más. Esto nos lleva a uno de los verdaderos usos prácticos de esta distribución: la sobredispersión. Dado que la forma funcional de arriba corresponde a una generalización de la función de distribución Poisson, entonces es posible suponer que los datos de conteo vienen de una distribución binomial negativa.

Lo anterior trae ventajas puesto que, si la media de los datos recolectados no corresponde con la varianza (característica esencial de la Poisson), entonces cualquier modelo que de allí surgiese sería altamente cuestionable. Si lo anterior se presenta es mejor acudir a la distribución binomial negativa dando valores reales al parámetro r .

Resultado A.6. Si Y es una variable aleatoria con distribución binomial-negativa con parámetros (θ, r) , entonces

- $E(Y) = \frac{r\theta}{1-\theta}.$
- $Var(Y) = \frac{r\theta}{(1-\theta)^2}.$
- $m_Y(t) = \left(\frac{1-\theta}{1-\theta e^t}\right)^r.$

A.1.6. Distribución de Poisson

La distribución de Poisson debe su nombre al francés Siméon-Denis Poisson (1781-1840) quien descubrió esta distribución en el año 1838, cuando la usó para describir el número de ocurrencias de algún evento durante un intervalo de tiempo de longitud dada.

Definición A.6. Una variable aleatoria Y tiene distribución de Poisson con parámetros $\lambda > 0$ si su función de densidad está dada por:

$$f_Y(y) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^y}{y!} I_{\{0,1,\dots\}}(y) \quad (\text{A.6})$$

y se nota como $Y \sim P(\lambda)$.

Nótese que la distribución Poisson tiene solo un parámetro $\theta = \lambda$, y el espacio paramétrico es $\Theta = (0, \infty)$.

Resultado A.7. Si Y es una variable aleatoria con distribución Poisson con parámetro λ , entonces

- $E(Y) = \lambda$.
- $Var(Y) = \lambda$.
- $m_Y(t) = \exp\{\lambda(e^t - 1)\}$.

Resultado A.8. Sea Y_1, \dots, Y_n variables aleatorias independientes con distribución $P(\lambda_i)$ para $i = 1, \dots, n$, entonces la variable $\sum_{i=1}^n X_i$ tiene distribución $P(\sum_{i=1}^n \lambda_i)$.

A.2. Distribuciones continuas

A.2.1. Distribución Uniforme Continua

Definición A.7. Una variable aleatoria Y tiene distribución uniforme continua sobre el intervalo $[a, b]$ con $a < b$ si su función de densidad está dada por:

$$f_Y(y) = \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(y) \quad (\text{A.7})$$

Resultado A.9. Si Y es una variable aleatoria con distribución uniforme continua sobre $[a, b]$, entonces

- $E(Y) = \frac{a+b}{2}$.
- $Var(Y) = \frac{(b-a)^2}{12}$.
- $m_Y(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}$.

A.2.2. Distribución Weibull

Definición A.8. Una variable aleatoria Y tiene distribución uniforme continua sobre los reales positivos si su función de densidad está dada por:

$$p(Y | \theta, \gamma) = \frac{\theta}{\gamma^\theta} y^{\theta-1} \exp \left\{ -\frac{y^\theta}{\gamma^\theta} \right\} I_{[0,\infty)}(y) \quad (\text{A.8})$$

Resultado A.10. Si Y es una variable aleatoria con distribución Weibull, entonces

- $E(Y) = \gamma \Gamma \left(1 + \frac{1}{\theta} \right)$.
- $Var(Y) = \gamma^2 \left[\Gamma \left(1 + \frac{2}{\theta} \right) + \Gamma^2 \left(1 + \frac{1}{\theta} \right) \right]$.
- $m_Y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \gamma^n}{n!} \Gamma \left(1 + \frac{n}{\theta} \right), \theta \geq 1$.

A.2.3. Distribución valor-extremo

Definición A.9. Una variable aleatoria Y tiene distribución valor-extremo si su función de densidad está dada por:

$$p(y \mid \theta, \lambda) = \theta \exp(\theta y) \exp \{ \lambda - \exp(\lambda + \theta y) \} \quad (\text{A.9})$$

Resultado A.11. Si Y es una variable aleatoria con distribución valor-extremo, entonces

$$\begin{aligned} \blacksquare E(Y) &= -\frac{\lambda}{\theta} - \frac{\epsilon}{\theta}. \\ \blacksquare \text{Var}(Y) &= \frac{\pi^2}{6\theta^2}. \end{aligned}$$

Donde $\pi \approx 3.1416$ es el número Pi y $\epsilon = 0.5772$ es la constante de Euler.

A.2.4. Distribución Gamma

Definición A.10. Una variable aleatoria Y tiene distribución Gamma con parámetro de forma $\alpha > 0$ y parámetro de escala $\theta > 0$ si su función de densidad está dada por:

$$p(\theta \mid \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta} I_{(0,\infty)}(\theta). \quad (\text{A.10})$$

donde $\Gamma(k) = \int_0^\infty u^{k-1} \exp(-u) du$.

La distribución Gamma tiene dos parámetros: α y β , en este caso, el vector de hiper-parámetros es $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \theta)'$ donde el espacio paramétrico está dado por $\Theta = (0, \infty) \times (0, \infty)$.

Resultado A.12. Si Y es una variable aleatoria con distribución Gamma con parámetro de forma α y parámetro de escala θ , entonces

$$\begin{aligned} \blacksquare E(Y) &= \alpha/\beta. \\ \blacksquare \text{Var}(Y) &= \alpha/\theta^2. \end{aligned}$$

Resultado A.13. Sea Y_1, \dots, Y_n variables aleatorias independientes con distribución Gamma con parámetro de forma α_i y parámetro de escala β para $i = 1, \dots, n$, entonces la variable $\sum_{i=1}^n X_i$ tiene distribución Gamma con parámetro de forma $\sum_{i=1}^n \alpha_i$ y parámetro de escala θ .

A.2.5. Distribución Gamma-inversa

Definición A.11. Una variable aleatoria Y tiene distribución Gamma-inversa con parámetro de forma $\alpha > 0$ y parámetro de escala $\beta > 0$ si su función de densidad está dada por:

$$p(y \mid \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{-\alpha-1} e^{-\beta/y} I_{(0,\infty)}(y). \quad (\text{A.11})$$

donde $\Gamma(k) = \int_0^\infty u^{k-1} \exp(-u) du$.

La distribución Gamma-inversa tiene dos parámetros: α y β ; en este caso, el vector de hiper-parámetros es $\theta = (\alpha, \beta)'$ donde el espacio paramétrico está dado por $\Theta = (0, \infty) \times (0, \infty)$.

Resultado A.14. Si Y es una variable aleatoria con distribución Gamma-inversa con parámetro de forma α y parámetro de escala β , entonces

- $E(Y) = \beta/(\alpha - 1)$.
- $Var(Y) = \theta^2/(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)$.

Resultado A.15. Si X es una variable aleatoria con distribución Gamma(α, β), entonces $1/X$ tiene distribución Gamma - inversa($\alpha, 1/\beta$).

A.2.6. Distribución exponencial

Definición A.12. Una variable aleatoria Y tiene distribución exponencial con parámetro de escala $\theta > 0$ si su función de densidad está dada por:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\theta} e^{-y/\theta} I_{(0, \infty)}(y) \quad (\text{A.12})$$

La distribución exponencial es un caso particular de la distribución Gamma cuando el parámetro de forma k toma el valor 1, y usualmente se utiliza para describir la vida útil de un componente eléctrico o el tiempo necesario para la ocurrencia de algún evento.

Resultado A.16. Si Y es una variable aleatoria con distribución exponencial con parámetro θ , entonces

- $E(Y) = \theta$.
- $Var(Y) = \theta^2$.
- $m_Y(t) = \frac{1}{1 - \theta t}$ para $t < 1/\theta$, y no existe para otros valores de t .

Resultado A.17. Sea Y_1, \dots, Y_n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución exponencial con parámetro de escala θ , entonces la variable $\sum_{i=1}^n X_i$ tiene distribución Gamma con parámetro de forma n y parámetro de escala θ .

A.2.7. Distribución Beta

Definición A.13. Una variable aleatoria Y tiene distribución Beta con parámetro de forma $\alpha > 0$ y parámetro de escala $\beta > 0$ si su función de densidad está dada por:

$$f_Y(y) = \frac{1}{Beta(\alpha, \beta)} y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1} I_{[0,1]}(y). \quad (\text{A.13})$$

donde $Beta(\alpha, \beta) = \frac{\gamma(\alpha)\gamma(\beta)}{\gamma(\alpha + \beta)}$.

La distribución Beta tiene dos parámetros: α y β ; en este caso, el vector de parámetros es $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta)'$ donde el espacio paramétrico está dado por $\Theta = (0, \infty) \times (0, \infty)$. Pero cuando uno de los dos parámetros es fijo, por ejemplo θ , entonces la distribución tendría un sólo parámetro: k .

Resultado A.18. Si Y es una variable aleatoria con distribución Gamma con parámetro de forma k y parámetro de escala θ , entonces

$$\begin{aligned} \blacksquare E(Y) &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}. \\ \blacksquare Var(Y) &= \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \end{aligned}$$

A.2.8. Distribución normal

La distribución normal también es llamada la distribución gaussiana, rindiendo homenaje al matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855). La distribución normal es, sin duda, una de las distribuciones más importantes, puesto que una gran parte de la teoría estadística fue desarrollada inicialmente para variables con esta distribución; por el otro lado, gracias al teorema central del límite, muchas distribuciones ajenas a la normal puede ser aproximadas por esta.

Definición A.14. Una variable aleatoria Y tiene distribución normal con parámetros μ y σ^2 si su función de densidad está dada por:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2}(y - \mu)^2 \right\} I_{\mathbb{R}}(y), \quad (\text{A.14})$$

donde $\sigma > 0$ y se nota como $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$.

La distribución normal tiene dos parámetros, representado como $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)$, mientras que su espacio paramétrico es $\Theta = \mathbb{R} \times (0, \infty)$.

Resultado A.19. Si Y es una variable aleatoria con distribución normal con parámetros μ y σ^2 , entonces

$$\begin{aligned} \blacksquare E(Y) &= \mu. \\ \blacksquare Var(Y) &= \sigma^2. \\ \blacksquare m_Y(t) &= \exp\{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\}. \end{aligned}$$

Cuando $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, se dice que Y tiene distribución normal estándar y usualmente se denota por Z .

Resultado A.20. Si $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, y α, β son constantes, entonces la variable $\alpha Y + \beta$ tiene distribución $N(\alpha\mu + \beta, \alpha^2\sigma^2)$.

Demostración. Se usará el hecho de que la función generadora de momentos caracteriza la distribución probabilística. Se tiene que:

$$\begin{aligned}
m_{\alpha Y + \beta}(t) &= E(e^{t(\alpha Y + \beta)}) \\
&= E(e^{\alpha t Y})e^{\beta t} \\
&= m_Y(\alpha t)e^{\beta t} \\
&= e^{\mu \alpha t + \sigma^2 \alpha^2 t/2} e^{\beta t} \\
&= e^{(\alpha \mu + \beta)t + \sigma^2 \alpha^2 t/2}
\end{aligned}$$

la cual es la función generadora de momentos de una distribución $N(\alpha\mu + \beta, \alpha^2\sigma^2)$, y el resultado queda demostrado. \square

Como consecuencia inmediata del anterior resultado, se define la estandarización, que es fundamental en la teoría relacionada con las distribuciones normales. Si $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces la variable $Z = \frac{Y - \mu}{\sigma}$ tiene distribución normal estándar, y la anterior transformación se conoce como la normal estandarizada.

Resultado A.21. Sea Y_1, \dots, Y_n variables aleatorias independientes, donde $Y_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ con $i = 1, \dots, n$, entonces la variable $\sum_{i=1}^n Y_i$ tiene distribución $N(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2)$.

A.2.9. Distribución log-normal

Definición A.15. Una variable aleatoria Y tiene distribución log-normal si su función de densidad está dada por:

$$p(Y \mid \mu, \sigma^2) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2(\ln(y) - \mu)^2}\right\} \quad (\text{A.15})$$

Nótese que si μ y σ^2 son la media y la varianza de $\ln(Y)$, entonces $\ln(Y)$ tiene distribución normal de media μ y varianza σ^2 .

Resultado A.22. Si Y es una variable aleatoria con distribución log-normal, entonces

- $E(Y) = \exp(\mu + \sigma^2/2)$.
- $Var(Y) = (\exp(\sigma^2) - 1) \exp(2\mu + \sigma^2)$.

A.2.10. Distribución Ji-cuadrado

Definición A.16. Una variable aleatoria Y tiene distribución Ji-cuadrado con n grados de libertad, con n entero positivo, si su función de densidad está dada por:

$$f_Y(y) = \frac{y^{(n/2)-1} e^{-y/2}}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} I_{(0, \infty)}(y), \quad (\text{A.16})$$

y se nota como $Y \sim \chi_n^2$.

La distribución Ji-cuadrado con n grados de libertad es un caso particular de la distribución Gamma cuando el parámetro de forma k toma el valor $n/2$ y el parámetro de escala toma el valor 2. También, en la literatura estadística existe la siguiente definición para la distribución Ji-cuadrado.

Definición A.17. Si Z_1, \dots, Z_n son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución normal estándar, entonces la variable $\sum_{i=1}^n Z_i^2$ tiene distribución Ji-cuadrado con n grados de libertad.

Resultado A.23. Si Y es una variable aleatoria con distribución Ji-cuadrado con n grados de libertad, entonces

- $E(Y) = n$.
- $Var(Y) = 2n$.
- $m_Y(t) = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{n/2}$ para $t < 1/2$, y no existe para otros valores de t .

Resultado A.24. Sea Z_1, \dots, Z_m variables aleatorias independientes con distribución $\chi_{n_i}^2$ para $i = 1, \dots, m$, entonces la variable $\sum_{i=1}^m Z_i$ tiene distribución Ji-cuadrado con $\sum_{i=1}^m n_i$ grados de libertad.

A.2.11. Distribución t-student

El descubrimiento de la distribución t-student fue publicado por el estadístico inglés William Sealy Gosset (1876-1937) en el año 1908 cuando trabajaba en la famosa empresa cervecera *Guinness*. La publicación lo hizo de forma anónimo bajo el nombre de Student, pues Guinness le prohibía la publicación por ser el descubrimiento parte de resultados de investigación realizado por la empresa.

Definición A.18. Una variable aleatoria Y tiene distribución t-student con n grados de libertad si su función de densidad está dada por:

$$f_Y(y) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n} \Gamma(\frac{n}{2})} \left(1 + \frac{y^2}{n}\right)^{-(n+1)/2} I_{\mathbb{R}}(y), \quad (\text{A.17})$$

donde $n > 0$ y se nota como $Y \sim t_n$.

Otra definición que se encuentra frecuentemente en la literatura estadística es la siguiente.

Definición A.19. Sea Z una variable aleatoria con distribución normal estándar y Y una variable aleatoria con distribución Ji-cuadrado con n grados de libertad, si Z y Y son independientes, entonces la variable $\frac{Z}{\sqrt{Y/n}}$ tiene distribución t-student con n grados de libertad.

La función de densidad de la distribución t-student es muy parecida a la de distribución normal estándar, entre más grande sea el grado de libertad, más se parece a la distribución normal estándar.

Resultado A.25. Si Y es una variable aleatoria con distribución t -student con n grados de libertad, entonces

- $E(Y) = 0$ para $n > 1$.
- $Var(Y) = \frac{n}{n-2}$ para $n > 2$.

La distribución t -student no tiene función generadora de momentos.

A.2.12. Distribución t -student generalizada

Definición A.20. Una variable aleatoria Y tiene distribución t -student con n grados de libertad, parámetro de centralidad θ y parámetro de escala σ^2 , si su función de densidad está dada por:

$$f_Y(y) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)\sqrt{n\pi}\sigma} \left[1 + \frac{1}{n} \left(\frac{y-\theta}{\sigma} \right)^2 \right]^{-(n+1)/2} I_{\mathbb{R}}(y), \quad (\text{A.18})$$

donde $n > 0$ y se nota como $Y \sim t_n(\theta, \sigma^2)$.

Resultado A.26. Si Y es una variable aleatoria con distribución t -student generalizada, entonces

- $E(Y) = \theta$ para $n > 1$.
- $Var(Y) = \frac{n}{n-2}\sigma^2$ para $n > 2$.

A.2.13. Distribución F

La distribución F también se conoce como la distribución F de Fisher o distribución de Fisher-Snedecor, refiriendo al gran estadístico Ronald Aylmer Fisher (1890-1962) y el fundador del primer departamento de estadística en los Estados Unidos, George Waddel Snedecor (1881-1974).

Definición A.21. Una variable aleatoria Y tiene distribución F con m grados de libertad en el numerador y n grados de libertad en el denominador si su función de densidad está dada por:

$$f_Y(y) = \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} \left(\frac{m}{n} \right)^{m/2} \frac{z^{\frac{m}{2}-1}}{\left(1 + \frac{m}{n}z \right)^{\frac{m+n}{2}}}, \quad (\text{A.19})$$

y se nota como $Y \sim F_n^m$.

Otra definición para la distribución F es como sigue:

Definición A.22. Sea Y y Y variables aleatorias independientes con distribuciones Ji-cuadrado con m y n grados de libertad, respectivamente, entonces la variable $\frac{Y/m}{Y/n}$ tiene distribución F con m grados de libertad en el numerador y n grados de libertad en el denominador.

Resultado A.27. Si Y es una variable aleatoria con distribución F con m grados de libertad en el numerador y n grados de libertad en el denominador, entonces

- $E(Y) = \frac{n}{n-2}$ para $n > 2$.
- $Var(Y) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$ para $n > 4$.

La distribución F no tiene función generadora de momentos.

A.3. Distribuciones multivariadas

A.3.1. Distribución Multinomial

Definición A.23. Un vector aleatorio $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_p)'$ tiene distribución multinomial si su función de densidad está dada por:

$$p(\mathbf{Y} | \boldsymbol{\theta}) = \binom{n}{y_1, \dots, y_p} \theta_1^{y_1} \dots \theta_p^{y_p} \quad \theta_i > 0, \quad \sum_{i=1}^p \theta_i = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^p y_i = p \quad (\text{A.20})$$

donde

$$\binom{p}{y_1, \dots, y_p} = \frac{p!}{y_1! \dots y_p!}. \quad (\text{A.21})$$

Como [Gelman et al. \(2003\)](#), afirma esta distribución es una generalización de la distribución binomial. La distribución marginal de una sola variable Y_i es $Binomial(p, \theta_i)$

Resultado A.28. Si \mathbf{Y} es una vector aleatorio con distribución multinomial, entonces

- $E(\mathbf{Y}) = p(\theta_1, \dots, \theta_p)'$.
- $Var(\mathbf{Y})_{ij} = \begin{cases} p\theta_i(1 - \theta_i) & \text{si } i = j \\ -p\theta_i\theta_j & \text{si } i \neq j \end{cases}$

A.3.2. Distribución Dirichelt

Definición A.24. Un vector aleatorio $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_p)'$ tiene distribución Dirichelt si su función de densidad está dada por:

$$p(\mathbf{Y} | \boldsymbol{\theta}) = \frac{\Gamma(\theta_1 + \dots + \theta_p)}{\Gamma(\theta_1) \dots \Gamma(\theta_p)} y_1^{\theta_1-1} \dots y_p^{\theta_p-1} \quad \theta_i > 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^p \theta_i = 1. \quad (\text{A.22})$$

Esta distribución es una generalización de la distribución beta. La distribución marginal de una sola variable Y_i es $Beta(\theta_i, (\sum_{i=1}^p \theta_i) - \theta_i)$

Resultado A.29. Si \mathbf{Y} es un vector aleatorio con distribución Dirichlet, entonces

$$\begin{aligned} \blacksquare E(\mathbf{Y}) &= (\sum_{i=1}^p \theta_i)^{-1} (\theta_1, \dots, \theta_p)' \\ \blacksquare Var(\mathbf{Y})_{ij} &= \begin{cases} \frac{\theta_i (\sum_{i=1}^p \theta_i - \theta_i)}{(\sum_{i=1}^p \theta_i)^2 (\sum_{i=1}^p \theta_i + 1)} & \text{si } i = j \\ -\frac{\theta_i \theta_j}{(\sum_{i=1}^p \theta_i)^2 (\sum_{i=1}^p \theta_i + 1)} & \text{si } i \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

A.3.3. Distribución Normal Multivariante

Definición A.25. Un vector aleatorio $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_p)'$ tiene distribución normal multivariante de orden p , denotada como $\mathbf{Y} \sim N_p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma})$, si su función de densidad está dada por:

$$p(\mathbf{Y} \mid \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma}) = (2\pi)^{-p/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\theta})' \boldsymbol{\Sigma} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\theta}) \right\} \quad (\text{A.23})$$

donde $|\boldsymbol{\Sigma}|$ se refiere al determinante de la matriz $\boldsymbol{\Sigma}$, la cual es simétrica y definida positiva de orden $p \times p$.

La distribución Normal Multivariante es el baluarte de una gran cantidad de técnicas y métodos estadísticos como son los modelos lineales, los modelos lineales generalizados, el análisis factorial, etc. Algunas de sus propiedades se citan a continuación.

Resultado A.30. Si $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_p)'$ es un vector aleatorio con distribución normal multivariante, entonces

- La distribución marginal de cualquier subconjunto de componentes de \mathbf{Y} es también normal multivariante. Por ejemplo si \mathbf{Y} es particionado en $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}'_1, \mathbf{Y}'_2)$, entonces $p(\mathbf{Y}_1)$ seguiría una distribución normal multivariante, al igual que $p(\mathbf{Y}_2)$.
- Cualquier transformación lineal de \mathbf{Y} es normal multivariante y su dimensión equivale al rango de la transformación. en particular, la suma de las componentes del vector, dada por $\sum_{i=1}^p Y_i$ sigue una distribución normal univariada.
- La distribución condicional de \mathbf{Y} , restringida a un subespacio lineal es normal.
- La distribución condicional de cualquier sub-vector de elementos de \mathbf{Y} dados los restantes elementos es normal multivariante. Más aún, si \mathbf{Y} es particionado en $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}'_1, \mathbf{Y}'_2)$, entonces $p(\mathbf{Y}_1 \mid \mathbf{Y}_2)$ es normal multivariada con

$$\begin{aligned} E(\mathbf{Y}_1 \mid \mathbf{Y}_2) &= E(\mathbf{Y}_1) + Cov(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2) (Var(\mathbf{Y}_2))^{-1} (\mathbf{Y}_2 - E(\mathbf{Y}_2)) \\ Var(\mathbf{Y}_1 \mid \mathbf{Y}_2) &= Var(\mathbf{Y}_1) - Cov(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2) (Var(\mathbf{Y}_2))^{-1} Cov(\mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_1) \end{aligned}$$

- Si \mathbf{X} es un vector con distribución normal multivariante, entonces $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$ tiene una distribución normal multivariante. En particular si \mathbf{X} es independiente de \mathbf{Y} , comparten el mismo orden p y $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Gamma})$, entonces $\mathbf{X} + \mathbf{Y} \sim N_p(\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{\Sigma})$.

Resultado A.31. Si \mathbf{Y} es un vector aleatorio con distribución Normal Multivariante, entonces

- $E(\mathbf{Y}) = \boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)'$.
- $Var(\mathbf{Y}) = \boldsymbol{\Sigma}$

Resultado A.32. Dado \mathbf{Y} un vector aleatorio particionado como $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}'_1, \mathbf{Y}'_2)$ con esperanza $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}'_1, \boldsymbol{\theta}'_2)$ y matrix de varianzas y covarianzas

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix}.$$

Si $\mathbf{Y}_1 | \mathbf{Y}_2 \sim N(\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\mathbf{Y}_2 - \boldsymbol{\theta}_2), \boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21})$ y $\mathbf{Y}_2 \sim N(\boldsymbol{\theta}_2, \boldsymbol{\Sigma}_{22})$, entonces se tiene que

$$\mathbf{Y} \sim N(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma}).$$

Resultado A.33. Si $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n$ es una muestra aleatoria de vectores con distribución Normal Multivariante, entonces la verosimilitud de la muestra se puede escribir como

$$\prod_{i=1}^n p(\mathbf{Y}_i | \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma}) \propto |\boldsymbol{\Sigma}|^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{traza}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{S}_{\boldsymbol{\theta}}) \right\} \quad (\text{A.24})$$

Donde $\mathbf{S}_{\boldsymbol{\theta}} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\theta})(\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\theta})'$.

Demostración. La verosimilitud de la muestra aleatoria está dada por

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n p(\mathbf{Y}_i | \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma}) &\propto |\boldsymbol{\Sigma}|^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\theta})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\theta}) \right\} \\ &= |\boldsymbol{\Sigma}|^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{traza}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{S}_{\boldsymbol{\theta}}) \right\} \end{aligned}$$

Puesto que, por las propiedades del operador *traza*, se tiene que

- Si c es un escalar, entonces $c = \text{traza}(c)$.
- Si \mathbf{A} y \mathbf{B} son dos matrices, entonces $\text{traza}(\mathbf{AB}) = \text{traza}(\mathbf{BA})$
- Si \mathbf{A}_i ($i=1, \dots, n$) son matrices del mismo tamaño, entonces $\sum_{i=1}^n \text{traza}(\mathbf{A}_i) = \text{traza}(\sum_{i=1}^n \mathbf{A}_i)$

Por lo anterior,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\theta})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\theta}) &= \text{traza} \left[\sum_{i=1}^n (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\theta})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\theta}) \right] \\
 &= \sum_{i=1}^n \text{traza} [\boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\theta}) (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\theta})'] \\
 &= \text{traza} \left[\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \sum_{i=1}^n (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\theta}) (\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\theta})' \right] \\
 &= \text{traza} (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{S}_{\boldsymbol{\theta}})
 \end{aligned}$$

□

A.3.4. Distribución Wishart

Definición A.26. Sea $\boldsymbol{\Sigma}$ una matriz aleatoria simétrica y definida positiva de tamaño $p \times p$. Se dice que $\boldsymbol{\Sigma}$ tiene distribución Wishart con v grados de libertad, denotada como $\mathbf{Y} \sim \text{Wishart}_v(\boldsymbol{\Lambda})$, si su función de densidad está dada por:

$$\begin{aligned}
 p(\boldsymbol{\Sigma}) &= \left(2^{vp/2} \pi^{p(p-1)/4} \prod_{i=1}^p \Gamma \left(\frac{v+1-i}{2} \right) \right)^{-1} \\
 &\quad \times |\boldsymbol{\Lambda}|^{-v/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{(v-p-1)/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{traza}(\boldsymbol{\Lambda}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}) \right\} \quad (\text{A.25})
 \end{aligned}$$

donde $|\boldsymbol{\Lambda}|$ se refiere al determinante de la matriz $\boldsymbol{\Lambda}$, la cual es simétrica y definida positiva de orden $p \times p$.

Resultado A.34. Si $\boldsymbol{\Sigma}$ es una matriz aleatoria con distribución Wishart con v grados de libertad, entonces $E(\boldsymbol{\Sigma}) = v\boldsymbol{\Lambda}$

A.3.5. Distribución inversa-Wishart

Definición A.27. Sea $\boldsymbol{\Sigma}$ una matriz aleatoria simétrica y definida positiva de tamaño $p \times p$. Se dice que $\boldsymbol{\Sigma}$ tiene distribución Wishart con v grados de libertad, denotada como $\mathbf{Y} \sim \text{Wishart}_v(\boldsymbol{\Lambda})$, si su función de densidad está dada por:

$$\begin{aligned}
 p(\boldsymbol{\Sigma}) &= \left(2^{vp/2} \pi^{p(p-1)/4} \prod_{i=1}^p \Gamma \left(\frac{v+1-i}{2} \right) \right)^{-1} \\
 &\quad \times |\boldsymbol{\Lambda}|^{v/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-(v+p+1)/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{traza}(\boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) \right\} \quad (\text{A.26})
 \end{aligned}$$

donde $|\mathbf{\Lambda}|$ se refiere al determinante de la matriz $\mathbf{\Lambda}$, la cual es simétrica y definida positiva de orden $p \times p$.

Resultado A.35. Si $\mathbf{\Sigma}$ es una matriz aleatoria con distribución inversa-Wishart con v grados de libertad, entonces $E(\mathbf{\Sigma}) = \frac{1}{v - p - 1} \mathbf{\Lambda}$

Resultado A.36. Si $\mathbf{\Sigma}^{-1}$ es una matriz aleatoria con distribución inversa-Wishart, entonces con $\mathbf{\Sigma}$ tiene distribución Wishart.

Apéndice B

Matriz de información

Definición B.1. Dada X una variable aleatoria con función de densidad $f(x, \theta)$, donde θ es el parámetro de la distribución, y además existe $\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x, \theta)$, entonces se define la información contenida en X acerca de θ como

$$I_X(\theta) = E \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(X, \theta) \right]^2 \right\}. \quad (\text{B.1})$$

Resultado B.1. En la anterior definición, si además existe $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln f(x, \theta)$, entonces se tiene que

$$I_X(\theta) = -E \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln f(X, \theta) \right\}. \quad (\text{B.2})$$

Las anteriores definiciones introducen la información contenida en una variable; sin embargo, cuando tenemos disponible una muestra aleatoria, es necesario definir la información contenida en una muestra aleatoria acerca de algún parámetro.

Definición B.2. Dada X_1, \dots, X_n variables aleatorias con función de densidad $f(x_i, \theta)$, donde θ es el parámetro de la distribución, y además existe $\frac{\partial}{\partial \theta} \ln \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$, entonces se define la información contenida en la muestra aleatoria acerca de θ como

$$I_{X_1, \dots, X_n}(\theta) = E \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln \prod_{i=1}^n f(X_i, \theta) \right]^2 \right\}. \quad (\text{B.3})$$

Resultado B.2. Dada X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria, entonces

$$I_{X_1, \dots, X_n}(\theta) = nI_X(\theta),$$

donde $I_X(\theta) = I_{X_i}(\theta)$, con $i = 1, \dots, n$. Es decir, en una muestra aleatoria, cada variable aporta la misma cantidad de información, y la cantidad total de información en la muestra es la suma de la información en cada variable.

Demostración.

$$\begin{aligned} I_{X_1, \dots, X_n}(\theta) &= E \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln \prod_{i=1}^n f(X_i, \theta) \right]^2 \right\} \\ &= E \left\{ \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(X_i, \theta) \right]^2 \right\} \\ &= E \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(X_i, \theta) \right]^2 \right\} + \\ &\quad \underbrace{E \left\{ \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(X_i, \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(X_j, \theta) \right] \right\}}_{=0, \text{ por la independencia entre } X_i \text{ y } X_j} \\ &= \sum_{i=1}^n E \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(X_i, \theta) \right]^2 \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n I_X(\theta) = nI_X(\theta). \end{aligned}$$

□

Ejemplo B.1. Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria proveniente de la distribución $N(\mu, \sigma^2)$, la información contenida en la muestra acerca de μ es n/σ^2 . Para verificar esta afirmación, calculamos la información acerca de μ en una variable X con distribución $N(\mu, \sigma^2)$. Tenemos:

$$\begin{aligned}
I_X(\mu) &= -E \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \ln f(X, \theta) \right\} \\
&= -E \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \left[-\frac{1}{2} \ln 2\pi\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} (X - \mu)^2 \right] \right\} \\
&= -E \left\{ \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\frac{X - \mu}{\sigma^2} \right] \right\} \\
&= -E \left\{ -\frac{1}{\sigma^2} \right\} \\
&= \frac{1}{\sigma^2}.
\end{aligned}$$

Ahora, usando el Resultado 2.3.4, se tiene que $I_{X_1, \dots, X_n}(\mu) = n/\sigma^2$.

Nótese que esta información, en primer lugar, depende del tamaño n de manera que entre más grande sea la muestra, hay mayor información acerca de μ ; en segundo lugar, entre más pequeña sea la varianza σ^2 , la cantidad de información acerca de μ también incrementa, esto es natural, puesto que si σ^2 es pequeña, los datos de la muestra están muy concentrados alrededor de μ , entonces estos datos aportan más información que otros datos con más dispersión.

Definición B.3. Dada una variable aleatoria X con función de densidad $f(x, \theta)$, la matriz de información contenida en X acerca de θ se define como

$$I_X(\theta) = E \left\{ \frac{\partial \ln f(X, \theta)}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \ln f(X, \theta)}{\partial \theta} \right)' \right\} \quad (\text{B.4})$$

Definición B.4. Dada una muestra aleatoria X_1, \dots, X_n con función de densidad $f(x_i, \theta)$, la matriz de información contenida en la muestra acerca de θ se define como

$$I_{X_1, \dots, X_n}(\theta) = E \left\{ \frac{\partial \ln \prod_{i=1}^n f(X_i, \theta)}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \ln \prod_{i=1}^n f(X_i, \theta)}{\partial \theta} \right)' \right\}$$

Ejemplo B.2. Dada una muestra aleatoria X_1, \dots, X_n con distribución común $N(\mu, \sigma^2)$, vamos a hallar la matriz de información contenida en la muestra acerca del vector de parámetros (μ, σ^2) . Tenemos que

$$\begin{aligned}
& I_{X_1, \dots, X_n}(\mu, \sigma^2) \\
&= E \left\{ \left(\frac{\frac{\partial \ln \prod_{i=1}^n f(X_i, \mu, \sigma^2)}{\partial \mu}}{\frac{\partial \ln \prod_{i=1}^n f(X_i, \mu, \sigma^2)}{\partial \sigma^2}} \right) \left(\frac{\partial \ln \prod_{i=1}^n f(X_i, \mu, \sigma^2)}{\partial \mu} \quad \frac{\partial \ln \prod_{i=1}^n f(X_i, \mu, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} \right) \right\} \\
&= E \left\{ \left(\frac{\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - n\sigma^2}}{\frac{\sigma^2}{2\sigma^4}} \right) \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma^2} \quad \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - n\sigma^2}{2\sigma^4} \right) \right\} \\
&= E \left\{ \left(\frac{\frac{(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu)^2}{(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu)(\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - n\sigma^2)}}{\frac{(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu)(\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - n\sigma^2)}{2\sigma^6}} \quad \frac{(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu)(\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - n\sigma^2)}{\frac{2\sigma^6}{(\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - n\sigma^2)^2}} \right) \right\}
\end{aligned}$$

Donde el primer elemento diagonal de la anterior matriz está dada por

$$\begin{aligned}
E \left\{ \frac{(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu)^2}{\sigma^4} \right\} &= \left[Var \left(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu \right) + \left(E \left(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu \right) \right)^2 \right] / \sigma^4 \\
&= n\sigma^2 / \sigma^4 = n / \sigma^2.
\end{aligned}$$

El segundo elemento diagonal está dada por

$$E \left\{ \frac{(\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - n\sigma^2)^2}{4\sigma^8} \right\} \quad (\text{B.5})$$

$$= \frac{1}{4\sigma^8} E \left\{ \left[\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \right]^2 + n^2 \sigma^4 - 2n\sigma^2 \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \right\} \quad (\text{B.6})$$

$$= \frac{1}{4\sigma^8} \left\{ Var \left(\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \right) + \left[E \left(\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \right) \right]^2 + n^2 \sigma^4 - 2n\sigma^2 E \left[\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \right] \right\} \quad (\text{B.7})$$

Usando el hecho de que

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2$$

y la esperanza y varianza de la distribución χ_n^2 , tenemos que la expresión (B.5) está dada por

$$\frac{1}{4\sigma^8} \left\{ 2n\sigma^4 + [n\sigma^2]^2 + n^2 \sigma^4 - 2n\sigma^2 n\sigma^2 \right\} = \frac{n}{2\sigma^4}.$$

Finalmente, el elemento fuera de la diagonal de la matriz $I_{X_1, \dots, X_n}(\mu, \sigma^2)$ está dado por

$$\begin{aligned}
& E \left\{ \left(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu \right) \left(\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - n\sigma^2 \right) \right\} \\
&= E \left\{ \sum_{i=1}^n X_i \left(\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - n\sigma^2 \right) - n\mu \left(\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - n\sigma^2 \right) \right\} \\
&= E \left\{ \sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \right\} - n\sigma^2 E \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) - n\mu E \left(\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \right) + n^2 \mu \sigma^2 \\
&= E \left(\sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n X_i^2 \right) - 2\mu E \left[\left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2 \right] + n^2 \mu^3 - n^2 \mu \sigma^2 - n^2 \mu \sigma^2 + n^2 \mu \sigma^2 \\
&= E \left(\sum_{i=1}^n X_i^3 + \sum_{i \neq j} X_i X_j^2 \right) - 2\mu(n\sigma^2 + n^2 \mu^2) + n^2 \mu^3 - n^2 \mu \sigma^2 \\
&= \sum_{i=1}^n [3\mu E(X_i^2) - 2\mu^3] + \sum_{i \neq j} E(X_i)E(X_j^2) - 2n\mu\sigma^2 - 2n^2 \mu^3 + n^2 \mu^3 - n^2 \mu \sigma^2 \\
&= 3n\mu(\sigma^2 + \mu^2) - 2n\mu^3 + \mu(\sigma^2 + \mu^2)(n^2 - n) - 2n\mu\sigma^2 - 2n^2 \mu^3 + n^2 \mu^3 - n^2 \mu \sigma^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

De donde obtenemos finalmente la matriz de información $I_{X_1, \dots, X_n}(\mu, \sigma^2)$ dada por

$$I_{X_1, \dots, X_n}(\mu, \sigma^2) = \begin{pmatrix} \frac{n}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2\sigma^4} \end{pmatrix}$$

Apéndice C

Elementos de simulación estadística

Como lo afirma [Gelman et al. \(2003\)](#) la simulación numérica es parte central del análisis bayesiano puesto que la generación de datos provenientes de una distribución de probabilidad se puede realizar fácilmente, incluso cuando la forma estructural de ésta no es conocida o es muy complicada computacionalmente. A lo largo de la historia del desarrollo de la teoría estadística, la simulación de distribuciones de probabilidad ha jugado un papel importante. Aunque son innumerables los métodos de generación de datos, en este apartado, se da cuenta de unos pocos, quizás lo más usados en este auge computacional.

R es un software de uso libre que maneja un ambiente de programación enfocado al manejo de matrices y por lo tanto muy apropiado para realizar la simulación de las distribuciones posteriores y predictivas necesarias para la inferencia bayesiana. En este capítulo, usando una serie de ejemplos, se describe cómo R puede ser usado como una herramienta efectiva. Estos ejemplos tienen un énfasis especial en tópicos bayesianos, específicamente en el uso de las cadenas de Markov para simular distribuciones posteriores.

C.1. Métodos directos

C.1.1. Método de la transformación uniforme

Al momento de la simulación estocástica de observaciones provenientes de alguna distribución de interés, la distribución uniforme es quizás la más usada y la más importante. El siguiente resultado adaptado de [Robert and Casella \(1999\)](#) así lo confirma.

Resultado C.1. Si U es una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$, entonces la variable aleatoria $F^{-1}(U)$ tiene distribución F .

Aunque la función F no necesariamente es una función uno a uno (por lo menos no lo es en el caso discreto) sí se puede verificar que $F^{-1}(U)$ es única con probabilidad uno. Una definición general, que encaja en el caso continuo o discreto, de la función F inversa es la siguiente

Definición C.1. Para cualquier función F definida sobre \mathbb{R} , se define la función inversa generalizada de F como

$$F^{-1}(u) = \inf\{x \mid F(x) \geq u\} \quad (\text{C.1})$$

Ejemplo C.1. Suponga que X es una variable aleatoria con distribución exponencial. De esta forma, su función de densidad acumulativa viene dada por

$$F(x) = 1 - \exp\{-\theta x\}$$

Del anterior resultado se tiene que si u es una realización de una variable $U \sim \text{Uniforme}(0, 1)$, entonces $F^{-1}(u)$ es una realización de una variable con distribución exponencial. Como $x = F^{-1}(u)$, entonces $F(x) = u$ y despejando x , se llega a que la siguiente expresión

$$F^{-1}(u) = -\frac{\ln(1 - u)}{\theta}$$

entrega una forma diáfana para la simulación de una observación con distribución exponencial. Para simular una muestra de n observaciones, simplemente se repite el anterior procedimiento n veces. En R, el código necesario para la simulación de una muestra de tamaño 1000 proveniente de una distribución exponencial con parámetro $\theta = 5$ es

```
theta <- 5
u <- runif(1000)
rexpo <- log(1 - u)/(-theta)
1/mean(rexpo)

## [1] 5.071472

hist(rexpo, freq = FALSE)
lines(density(rexpo), col = 2)
```

C.1.2. Método de la grilla

Existen distribuciones de probabilidad cuya forma estructural es muy compleja. Mas aún, existen distribuciones de probabilidad conocidas para las cuales la

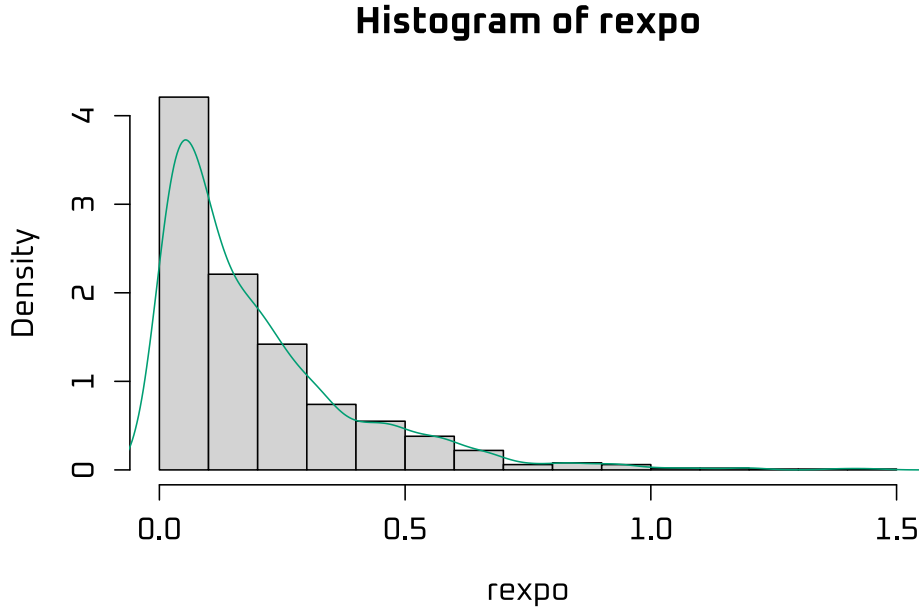


Figura C.1: Histograma de observaciones con distribución exponencial

inversa de la función de de densidad acumulativa es difícil de solucionar analíticamente. En los anteriores casos, el método analítico dado por el teorema de la transformación integral de probabilidad no siempre resulta efectivo. Sin embargo, es posible realizar una variante, manteniendo el espíritu de la anterior técnica.

El presente método utiliza una distribución discreta para aproximar cualquier tipo de distribución (discreta o continua) sin importar su nivel de complejidad. El algoritmo que enmarca este método se da a continuación:

1. Escribir la densidad de interés como $f(\cdot)$ y establecer el rango de la variable aleatoria de interés.
2. Fijar un conjunto de n valores $x_1 < \dots < x_n$ equiespaciados que cubran una gran parte del rango de la variable aleatoria.
3. Para x_k ($k = 1, \dots, n$) calcular $f(x_k)$ que equivale al valor de la densidad en el punto x_k . Nótese que si $f(\cdot)$ es una función de densidad continua, entonces $f(x_k)$ no corresponde a una probabilidad;
4. Calcular la probabilidad asociada al punto x_k definida por la aproximación discreta a $f(\cdot)$ y dada por

$$p(x_k) = \frac{f(x_k)}{\sum_{k=1}^n f(x_k)}$$

5. Calcular la función de densidad acumulativa aproximada definida como

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < x_1 \\ \sum_{l=1}^k p(x_l), & \text{si } x_k \leq x < x_{k+1} \\ 1, & \text{si } x > x_n \end{cases}$$

6. Simular una observación u proveniente de una distribución uniforme continua en el intervalo $(0, 1)$.
7. Si $F(x_k) < u \leq F(x_{k+1})$, entonces $F^{-1}(u) = x_{k+1}$ y por consiguiente el valor x_{k+1} es una pseudo-observación proveniente de la densidad de interés.

Nótese que en el anterior proceso, la unidad x_{k+1} es seleccionada con probabilidad p_{k+1} ; puesto que

$$\begin{aligned} P(F(x_k) < U \leq F(x_{k+1})) &= F(x_{k+1}) - F(x_k) \\ &= \sum_{l=1}^{k+1} p(x_l) - \sum_{l=1}^k p(x_l) = p_{k+1} \end{aligned}$$

Si se quiere extraer una muestra aleatoria de N observaciones provenientes de la distribución de interés, entonces basta con repetir el anterior proceso N veces. Por supuesto, como se trata de una muestra aleatoria cada selección se debe realizar con repetición; de esta manera no importa si $N > n$. Suponiendo que el conjunto x_1, \dots, x_n conforma una grilla de puntos lo suficientemente cercanos y que no sucede nada importante entre cada uno de ellos, entonces esta técnica debe tener un buen funcionamiento.

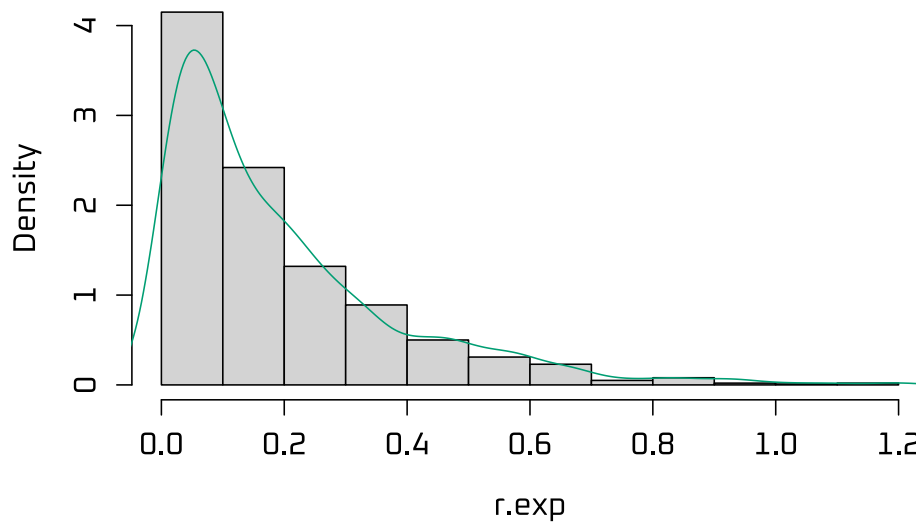
Ejemplo C.2. El siguiente código computacional permite utilizar el método de la grilla para simular mil valores provenientes de una distribución exponencial con parámetro $\theta = 5$.

```
theta <- 5
x.grid <- seq(0, 100, by=0.01)
p.exp <- theta * exp(-theta * x.grid)
r.exp <- sample(x.grid, 1000, prob = p.exp, replace = T)
1/mean(r.exp)
```

```
## [1] 5.248242
```

```
hist(r.exp, freq = FALSE)
lines(density(rexp), col = 2)
```

Histogram of r.exp



Ejemplo C.3. De la misma manera, el método de la grilla permite simular valores de un distribución discreta. El siguiente código computacional permite utilizar el método de la grilla para simular mil valores provenientes de una distribución Poisson con parámetro $\theta = 2$.

```
p.poisson <-function(theta, x.grid){
  N <- length(x.grid)
  res <- rep(NA, N)
  for(k in 1:N){
    P1 <- exp(-theta) * theta^(x.grid[k])
    P2 <- factorial(x.grid[k])
    res[k] <- P1/P2
  }
  return(res)
}

theta <- 2
x.grid <- seq(0, 100, by = 1)
f.x <- p.poisson(theta, x.grid)
p.x <- f.x/sum(f.x)
sum(p.x)

## [1] 1

rpois <- sample(x.grid, 1000, prob=p.x, replace = T)
mean(rpois)

## [1] 2.022
```

```
var(rpois)
```

```
## [1] 1.921437
```

```
hist(rpois, freq = FALSE)
```

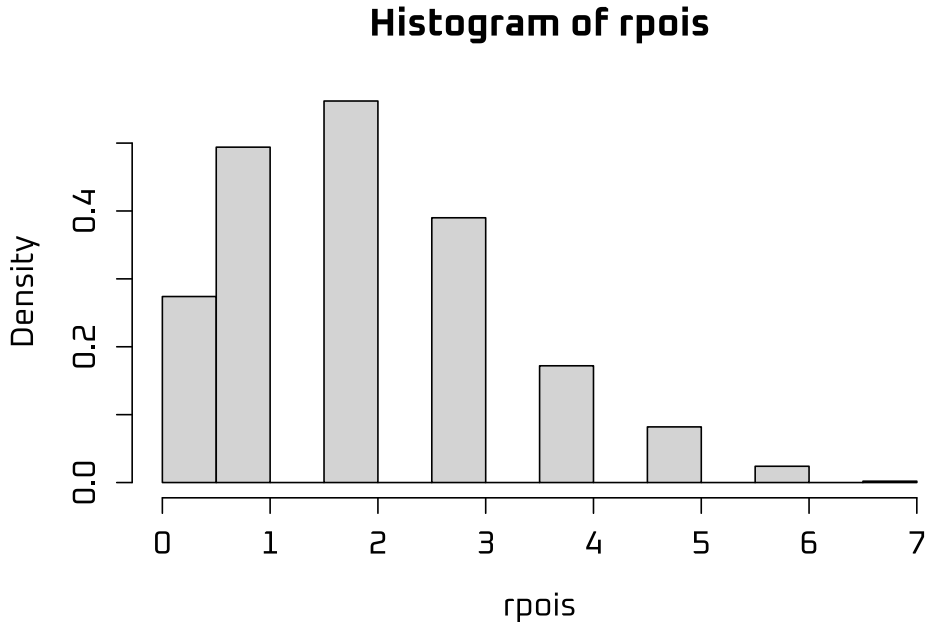


Figura C.2: Histograma de observaciones con distribución Poisson

Ejemplo C.4. El método de la grilla también puede utilizarse para simular observaciones de una distribución biparamétrica, univariada y continua. El siguiente código computacional permite utilizar el método de la grilla para simular mil valores provenientes de una distribución Gamma con parámetros $\theta = 4$, $\beta = 2$.

```
p.gamma <- function(a, b, x.grid){
  N <- length(x.grid)
  res <- rep(NA, N)
  for(k in 1:N){
    P1 <- (b^a)/gamma(a)
    P2 <- x.grid[k]^(a - 1)
    P3 <- exp(-b * x.grid[k])
    res[k] <- P1*P2*P3
  }
  return(res)
}
```

```

alpha <- 4
beta <- 2
x.grid <- seq(0, 100, by = 0.1)
f.x <- p.gamma(alpha, beta, x.grid)
p.x <- f.x / sum(f.x)

rgamma <- sample(x.grid, 1000, prob = p.x, replace = T)
mean(rgamma)

## [1] 2.0219
var(rgamma)

## [1] 0.9676981
hist(rgamma, freq = F)
lines(density(rgamma), col = 2)

```

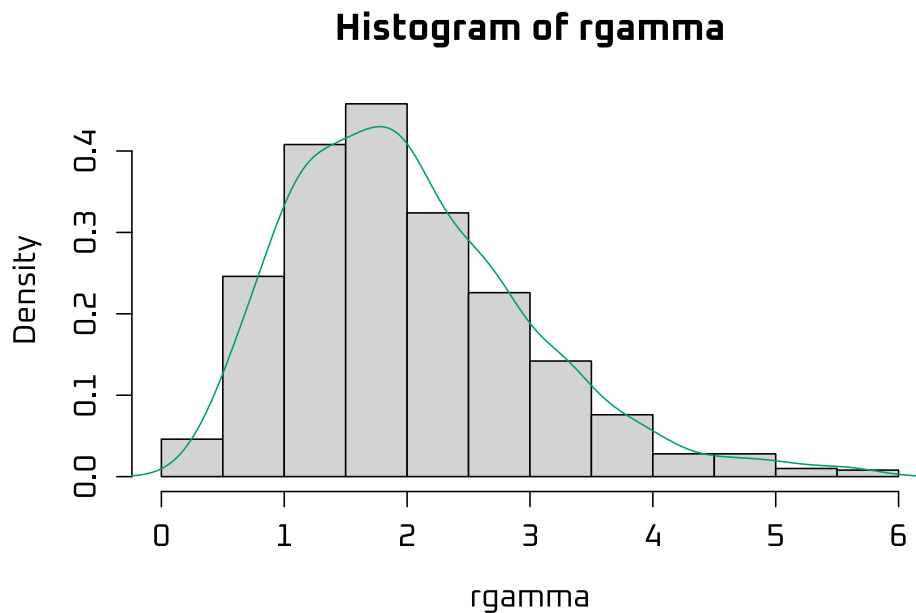


Figura C.3: Histograma de observaciones con distribución Gamma.

Ejemplo C.5. Para comprobar el poder de este método de simulación, se presenta el siguiente código que permite simular valores de una distribución multiparamétrica, bivariada y continua. En particular, se simulan valores de la distribución Normal multivariante con vector de medias $\boldsymbol{\mu} = (2, 4)'$ y matriz de varianzas covarianzas $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 25 & 30 \\ 30 & 16 \end{bmatrix}$

```

p.normal2 <- function(mu, Sigma, x, y){
  P1 <- 1/(2 * pi)
  P2 <- 1/sqrt(det(Sigma))
  P3a <- t((c(x, y) - mu)) %*% solve(Sigma) %*% (c(x, y) - mu)
  P3 <- exp((-1/2) * P3a)
  res <- P1 * P2 * P3
  return(res)
}

grilla <- function(a, b){
  A <- seq(1:length(a))
  unoA <- rep(1, length(A))
  B <- seq(1:length(b))
  unoB <- rep(1, length(B))
  P1 <- kronecker(A, unoB)
  P2 <- kronecker(unoA, B)
  grid <- cbind(a[P1], b[P2])
  return(grid)
}

mu1 <- c(2, 4)
Sigma1 <- matrix(c(25, 10, 10, 16), nrow=2)

x.grid <- seq(mu1[1] - 3 * sqrt(Sigma1[1, 1]),
              mu1[1] + 3 * sqrt(Sigma1[1, 1]),
              by = 0.5)
y.grid <- seq(mu1[2] - 3 * sqrt(Sigma1[2, 2]),
              mu1[2] + 3 * sqrt(Sigma1[2, 2]),
              by = 0.5)
xy.grid <- grilla(x.grid, y.grid)
N.grid <- dim(xy.grid)[1]

f.xy <- rep(NA, N.grid)
for(j in 1:N.grid){
  f.xy[j] <- p.normal2(mu1, Sigma1,
                       xy.grid[j, 1],
                       xy.grid[j, 2])
}

p.xy <- as.vector(f.xy/sum(f.xy))
sum(p.xy)

## [1] 1

rnormal2 <- sample(N.grid, 1000, prob = p.xy, replace = T)
rxy.normal2 <- xy.grid[rnormal2, ]

```



```
rx.normal <- rxy.normal2[, 1]
ry.normal <- rxy.normal2[, 2]

colMeans(rxy.normal2)
```

```
## [1] 1.9255 4.1045

var(rxy.normal2)
```

23.329529	8.589124
8.589124	14.194524

```
hist(rx.normal, freq = F)
lines(density(rx.normal), col = 2)
```

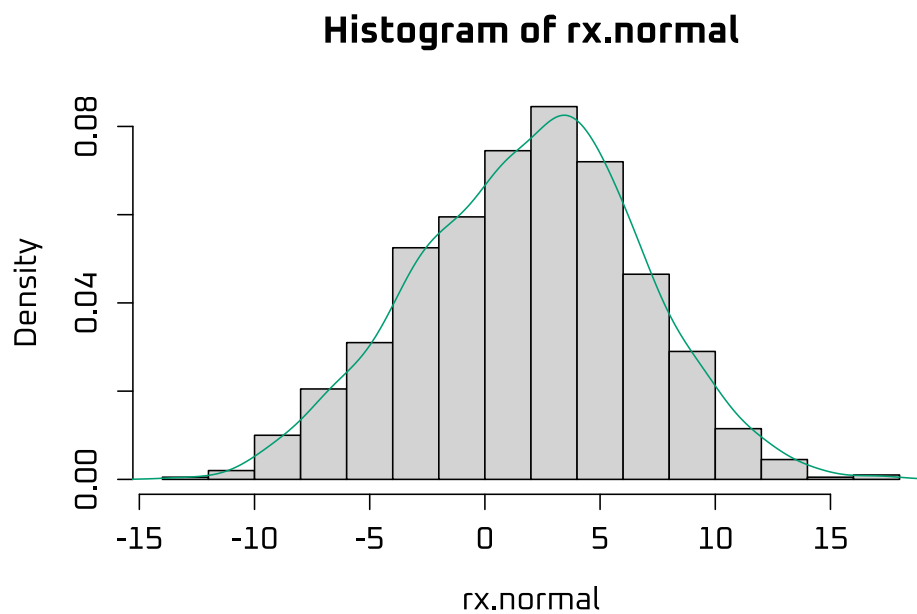


Figura C.4: Histogramas de observaciones con distribución Normal bivariada.

```
hist(ry.normal, freq = F)
lines(density(ry.normal), col = 2)
```

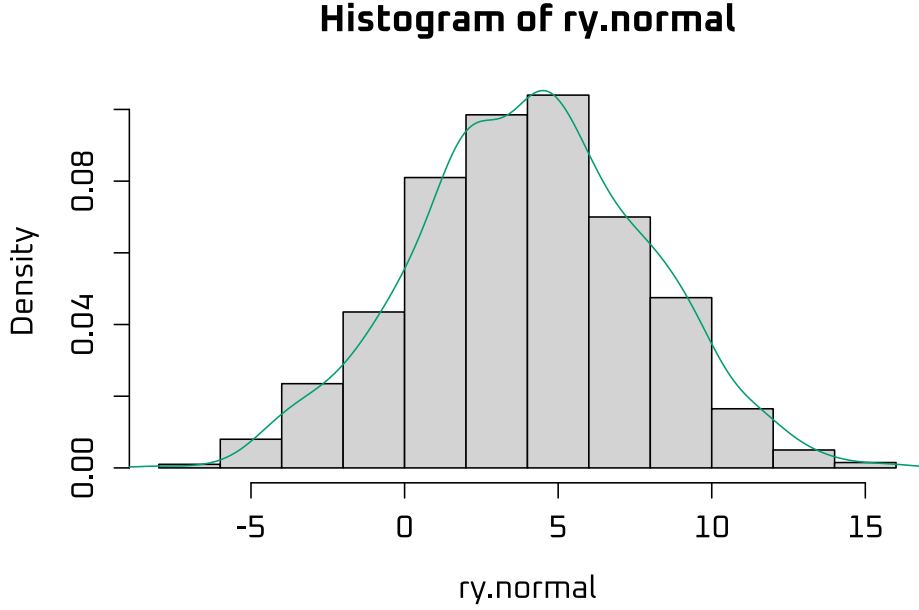


Figura C.5: Histogramas de observaciones con distribución Normal bivariada.

C.2. Métodos de Monte Carlo vía cadenas de Markov

C.2.1. El muestreador de Gibbs

Tal como lo afirma [Peña \(2002\)](#), este procedimiento es apropiado para obtener muestras de una distribución conjunta cuando es fácil muestrear de las distribuciones condicionadas. El algoritmo se implementa asumiendo que $\theta_i = (\theta_i^{(1)}, \dots, \theta_i^{(d)})$ representa a los valores actuales de θ . Entonces θ_{i+1} se obtiene así:

- Generar $\theta_{i+1}^{(1)}$ de $p(\theta^{(1)} \mid \theta_i^{(2)}, \dots, \theta_i^{(d)}, x)$
- Generar $\theta_{i+1}^{(2)}$ de $p(\theta^{(2)} \mid \theta_{i+1}^{(1)}, \theta_i^{(3)}, \dots, \theta_i^{(d)}, x)$
- ...
- Generar $\theta_{i+1}^{(d)}$ de $p(\theta^{(d)} \mid \theta_{i+1}^{(1)}, \theta_{i+1}^{(2)}, \dots, \theta_{i+1}^{(d-1)}, x)$

La idea de este esquema es renovar cada componente por medio de la simulación de la correspondiente distribución condicional. Una vez que la cadena converge, se tiene que los valores de θ corresponden a observaciones de la distribución requerida, $p(\theta \mid x)$. Sin embargo, en general, no se garantiza una muestra variables aleatorias *totalmente* independientes provenientes de la distribución $p(\theta \mid x)$, dado que el esquema del muestreador de Gibbs usa el valor actual para construir el siguiente valor; por ende, la secuencia de valores que se obtiene

estará correlacionada.

Ejemplo C.6. Se puede implementar el muestreador de Gibbs para generar una secuencia de observaciones con densidad conjunta

$$(x, y) \sim N_2\left(0, \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}\right)$$

Teniendo en cuenta que la media de ambas variables es cero y su varianza uno, entonces la covarianza entre ambas variables será ρ (Robert and Casella, 2009). Por ende, partiendo de valores iniciales (x_t, y_t) , el algoritmo se centra en actualizar las distribuciones condicionales según el resultado A.30.

$$x_{t+1} \mid y_t \sim N(\rho y_t, 1 - \rho^2)$$

$$y_{t+1} \mid x_{t+1} \sim N(\rho x_{t+1}, 1 - \rho^2)$$

```
bivariate.gibbs <- function (n, rho, x, y) {
  mat <- matrix(ncol = 2, nrow = n)
  mat[1, ] <- c(x, y)
  for (i in 2:n){
    x <- rnorm(1, rho * y, sqrt(1 - rho^2))
    y <- rnorm(1, rho * x, sqrt(1 - rho^2))
    mat[i, ] <- c(x, y)
  }
  mat<-as.data.frame(mat)
  return(mat)
}

biv <- bivariate.gibbs(n=2000, rho=0.5, x= 0, y = 0)
colMeans(biv)
```

```
##           V1           V2
## -0.062475391 -0.001996723
```

```
var(biv)
```

	V1	V2
V1	1.0126581	0.5045562
V2	0.5045562	0.9795653

```
cor(biv)
```

	V1	V2
V1	1.0000000	0.5065956
V2	0.5065956	1.0000000

```
plot(biv)
```

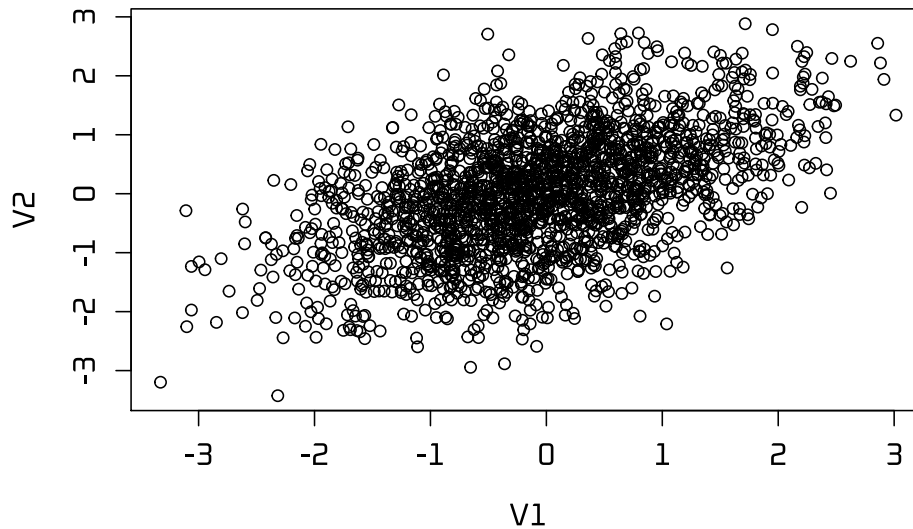


Figura C.6: Generación de valores para una distribución normal bivariada.

Ejemplo C.7. Un problema común es el de descartar los primeros valores, puesto que el algoritmo puede demorar en obtener convergencia; esto se puede resolver en forma empírica utilizando las medias y varianzas acumuladas y graficándolas se puede tomar una decisión acerca del valor óptimo en el que la cadena converge.

Con el siguiente código computacional, es posible corroborar que un punto de corte óptimo desde el cual se consideraría que las cadenas simuladas anteriormente es a partir de la iteración **600**.

```
g.diag <- function(sample){
  n <- length(sample)
  res <- matrix(nrow=2, ncol=n)
  for(i in 1:n){
    res[1, i] <- mean(sample[1 : i])
    res[2, i] <- var(sample[1 : i])
  }
  return(res)
}

m1 <- g.diag(biv[, 1])
m2 <- g.diag(biv[, 2])

par(mfcol = c(1, 2))
plot(m1[1, ], type = 'l', ylim=c(-0.6, 0.6), col=4)
```

```

lines(m2[1, ], lty = 2, col = 2)
title("Diagnóstico - Media acumulada")

plot(m1[2, ], type = 'l', ylim = c(0.5, 1.5), col=4)
lines(m2[2, ], lty = 2, col = 2)
title("Diagnóstico - Varianza acumulada")

```

Diagnóstico - Media acumulada - Varianza acumulada

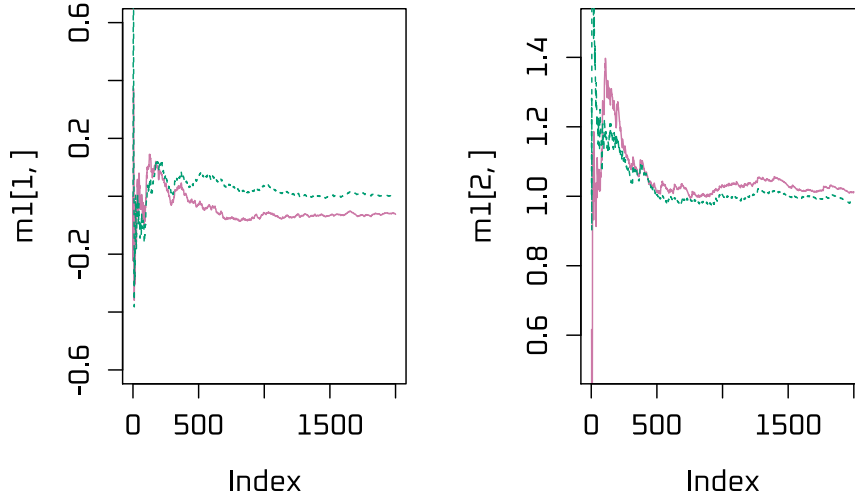


Figura C.7: Convergencia de la media y varianza usando el muestreador de Gibbs.

El muestreador de Gibbs también funciona en una “segunda fase”, cuando queremos seleccionar una muestra de $f(\theta | x)$, es decir, la distribución de los parámetros dada la información observada x .

Ejemplo C.8. Suponga que y tiene distribución $N(\mu, \sigma^2 = 1/\phi)$ y queremos obtener una muestra de la distribución posterior del vector aleatorio $\theta = (\mu, 1/\phi)$. Para este caso supongamos que conocemos las distribuciones previas; para la media μ se asume una distribución uniforme y para la varianza ϕ una distribución Gamma con parámetros a y b . La distribución posterior de (μ, ϕ) satisface:

$$p(\mu, \phi | y) \propto (\phi)^{n/2} \exp \left\{ -\phi \frac{\sum_{j=1}^n (y_j - \mu)^2}{2} \right\} (\phi)^{a-1} \exp(-b/\phi) \quad (C.2)$$

En donde la primera parte después del signo de proporcionalidad, corresponde a la verosimilitud de la información observada y la segunda parte corresponde a la distribución posterior de ϕ ; la distribución posterior de μ no aparece pues es una constante. Por tanto, ésta se puede escribir como:

$$p(\mu, \phi | y) \propto (\phi)^{n/2+a-1} \exp \left\{ -\phi \left(\frac{\sum_{j=1}^n (y_j - \mu)^2}{2} + b \right) \right\}$$

Acudiendo al resultado A.15, la distribución condicional de la varianza σ^2 dado (μ, y) es Gamma-inversa con parámetros $a + n/2$ y $\sum_{j=1}^n (y_j - \mu)^2/2 + b$. Por tanto,

$$\sigma^2 | \mu, x \sim \text{Gamma-inversa} \left(\theta + n/2, \sum_{j=1}^n (y_j - \mu)^2/2 + b \right) \quad (\text{C.3})$$

Análogamente, la distribución de μ dado (σ^2, y) es normal con media \bar{y} y varianza σ^2/n , es decir,

$$\mu | \sigma^2, y \sim N(\bar{y}, \sigma^2/n) \quad (\text{C.4})$$

Para implementar el muestreador de Gibbs con estas distribuciones, primero se deben escoger valores apropiados para a y b , con el propósito de representar correctamente la distribución previa, y luego

- Definir un valor inicial para la media y la varianza, (μ_0, σ_0^2) .
- Generar $(\mu_{i+1}, \sigma_{i+1}^2)$ simulando μ_{i+1} de (C.3) y luego σ_{i+1}^2 de (C.4).
- Iterar para obtener $(\mu_0, \sigma_0^2), (\mu_1, \sigma_1^2), (\mu_2, \sigma_2^2), \dots$.
- Suponiendo que el algoritmo converge después de m iteraciones, descartar los m primeros valores.

Entonces $(\mu_{m+1}, \sigma_{m+1}^2), (\mu_{m+2}, \sigma_{m+2}^2), \dots$, es una muestra (correlacionada) de $p(\mu, \sigma^2 | x)$.

La siguiente función en R implementa el muestreador de Gibbs para el anterior ejemplo.

```
library(invgamma)

normal2 <- function(datos, a, b, nsim, inicial){
  n <- length(datos)
  xbar <- mean(datos)
  mu.now <- inicial[1]
  var.now <- inicial[2]
  dummy <- matrix(ncol = 2, nrow = nsim)
  dummy[1, 1] <- mu.now
  dummy[1, 2] <- var.now

  for (i in 2 : nsim){
    alp <- a + (n/2)
    bet <- b + (sum((datos - mu.now)^2)/2)
```

```

var.next <- rinvgamma(1, shape = alp, rate = bet)
mu.next <- rnorm(1, xbar, sqrt(var.now/n))
dummy[i, 1] <- mu.next
dummy[i, 2] <- var.next
mu.now <- mu.next
var.now <- var.next
}
return(dummy)
}

datos <- rnorm(100, 5, 2)
mc1.vals <- normal2(datos, a = 2, b = 5,
                    nsim = 1000, inicial = c(2, 2))
mc1.vals <- mc1.vals[101: 1000, ]
colMeans(mc1.vals)

```

```
## [1] 4.552863 4.990870
```

```

par(mfcol = c(1, 2))
plot(mc1.vals[, 1], type = 'l', ylab = 'mu')
plot(mc1.vals[, 2], type = 'l', ylab = 'sigma^2')

```

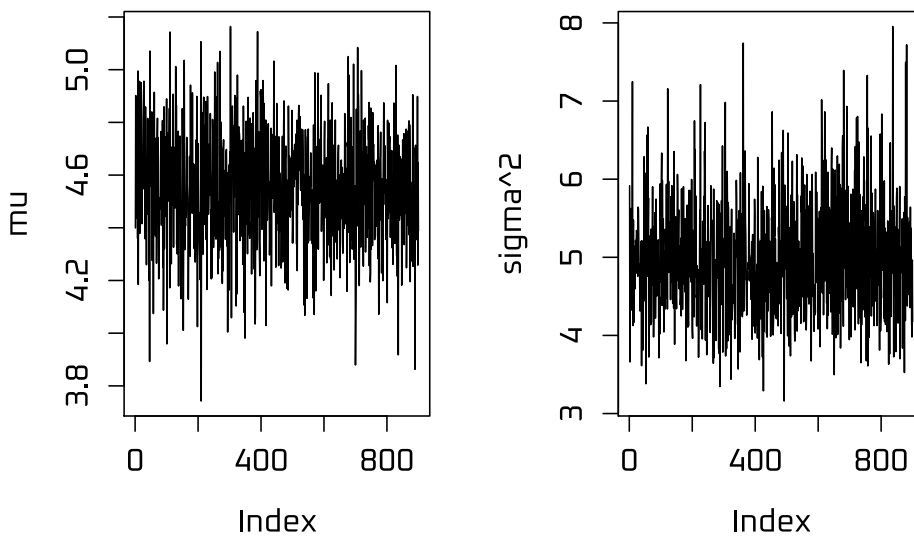


Figura C.8: Cadenas generadas desde el muestreador de Gibbs.

```

par(mfcol = c(1, 2))
hist(mc1.vals[, 1], prob = T, xlab='mu', main = "")
lines(density(mc1.vals[, 1], kernel='gaussian'))
hist(mc1.vals[, 2], prob = T, xlab='sigma^2', main = "")

```

```
lines(density(mcl.vals[, 2], kernel='gaussian'))
```

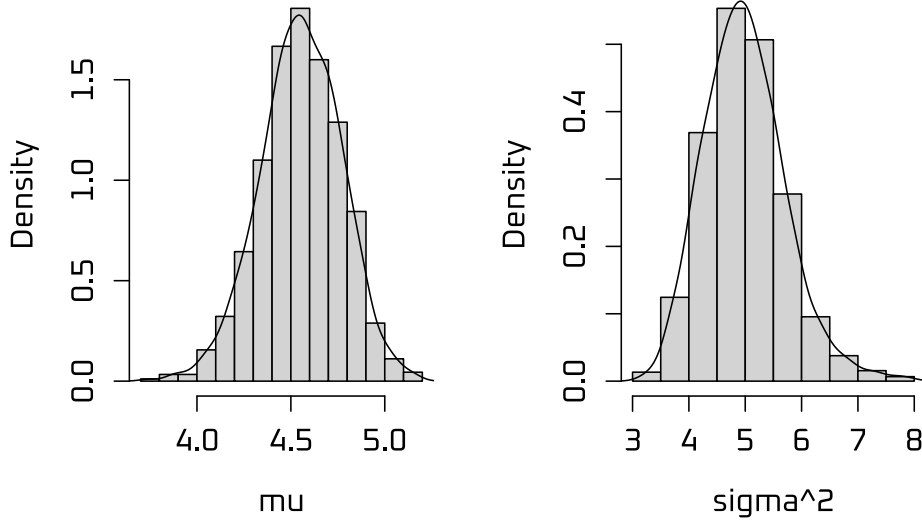


Figura C.9: Densidades posteriores generadas con el muestreador de Gibbs.

C.2.2. El algoritmo de Metrópolis-Hastings

Este algoritmo se basa en proponer un nuevo punto de acuerdo a una función de densidad adecuada y aceptar este nuevo valor propuesto con una probabilidad que depende del punto actual, del nuevo punto y de la densidad de la cual fue propuesto el nuevo punto.

Suponga que deseamos simular valores de una distribución multivariada $p(\theta | y)$. Sea la función de densidad propuesta $q(\theta, \theta')$, una función de densidad de probabilidad arbitraria que describe la probabilidad de aceptación de θ' a partir de la posición actual de θ . El algoritmo de Metropolis-Hastings está dado por los siguientes pasos:

- Siendo el valor actual θ_i , genere un valor candidato θ' obtenido como una observación de la densidad $q(\theta_i, \theta')$.
- Calcule

$$T(\theta_i, \theta') = \begin{cases} \min \left(1, \frac{p(\theta' | y) q(\theta_i, \theta')}{p(\theta_i | y) q(\theta', \theta_i)} \right), & \text{si } p(\theta_i | y) q(\theta_i, \theta') > 0, \\ 1, & \text{si } p(\theta_i | y) q(\theta_i, \theta') = 0 \end{cases}$$

- Acepte el nuevo valor y actualícelo a $\theta_{i+1} = \theta'$ con probabilidad $T(\theta_i, \theta')$. De otra forma, rechazar el valor candidato y defina $\theta_{i+1} = \theta_i$.
- Repita el paso anterior para obtener la secuencia $\theta_0, \theta_1, \dots$, donde θ_0 denota un valor arbitrario de arranque.

- Descarte los primeros m valores obtenidos.

Siguiendo el anterior algoritmo, entonces se tiene que $\theta_{m+1}, \theta_{m+2}, \dots$ es una secuencia (correlacionada) de la distribución requerida. En principio, puede ser usada cualquier densidad q , pero si ésta es escogida ingenuamente, la eficiencia de la cadena puede ser muy pobre. La relación más importante entre el muestreador de Gibbs y el algoritmo de Metropolis-Hastings, está dada como un teorema en el libro de [Robert and Casella \(2009, pág. 296\)](#).

Resultado C.2. *El muestreador de Gibbs es equivalente al algoritmo de Metropolis-Hastings, con la probabilidad de aceptación igual a uno para todos los puntos propuestos.*

Lo anterior implica que la convergencia para ambos métodos no es la misma. Para cerrar la sección de cadenas de Markov vía Monte Carlo, es importante hacernos la siguiente pregunta: ¿Son independientes las muestras simuladas? En principio no se puede hablar de independencia, pues es claro que la observación $\{i + 1\}$ depende de la observación $\{i\}$. Dado que las observaciones resultantes se encuentran en estricto orden de medición, podríamos utilizar algunos criterios como la función de auto-correlación (ACF) y la función de auto-correlación parcial (PACF), para conocer sobre la correlación entre observaciones.

Siguiendo con el ejemplo C.8 del apartado de Gibbs, se ha escogido usar como como distribuciones propuestas q para la media y para la varianza, densidades normales centradas en el actual parámetro, ambas con varianza igual a uno. Dadas las distribuciones propuestas, algunos valores de la varianza pueden ser negativos; aunque este no es un problema porque la distribución posterior le asignará el valor cero, por tanto este valor será rechazado con un probabilidad de uno.

```
library(invgamma)

met.hast <- function(datos, a, b, iter, ini){
  mu0 <- ini[1]
  var0 <- ini[2]
  resul <- matrix(ncol = 2, nrow = iter)
  resul[1, 1] <- mu0
  resul[1, 2] <- var0
  for (i in 2 : iter){
    mu.prop <- rnorm(1, mu0, 1)
    var.prop <- rnorm(1, var0, 1)
    if (var.prop <= 0){ T.val <- 0 }
    else{
      p1 <- prod(dnorm(datos, mu.prop, sqrt(var.prop))) *
        dinvgamma(var.prop, shape = a, rate = b)
      q1 <- dnorm(mu0, mu.prop, 1) *
        dnorm(var0, var.prop, 1)
      p2 <- prod(dnorm(datos, mu0, sqrt(var0))) *
```

```

    dinvgamma(var0, shape = a, rate = b)
  q2 <- dnorm(mu.prop, mu0, 1) *
    dnorm(var.prop, var0, 1)
  T.val <- min(1, (p1 * q1)/(p2 * q2))
}
u <- runif(1)
if (u <= T.val){
  resul[i, 1] <- mu.prop
  resul[i, 2] <- var.prop
}
else{
  resul[i, 1] <- mu0
  resul[i, 2] <- var0
}
mu0 <- resul[i, 1]
var0 <- resul[i, 2]
}
return(resul)
}

datos <- rnorm(100, 5, 2)
mc2 <- met.hast(datos, a = 2, b = 5,
  iter = 1000, ini = c(2, 2))
colMeans(mc2)

## [1] 4.617579 3.292443

par(mfrow=c(2,2))
pacf(mc2[, 1], 100)
pacf(mc2[, 2], 100)
acf(mc2[, 1], 100)
acf(mc2[, 2], 100)

```

C.2.3. Buenas prácticas en la aplicación de métodos MCMC

Dado que una gran parte de la inferencia bayesiana está ligada a la programación e implementación de los métodos MCMC para realizar inferencias posteriores de los parámetros de interés, se sugiere seguir el razonamiento y recomendaciones de [Gelman and Shirley \(2010\)](#), que puede ser resumido en los siguientes ítemes para cada parámetro de interés:

1. Simulación de tres o más cadenas de forma paralela. Los valores iniciales de cada cadena deben estar dispersos entre sí.
2. Comprobación de la convergencia de las cadenas mediante el descarte de

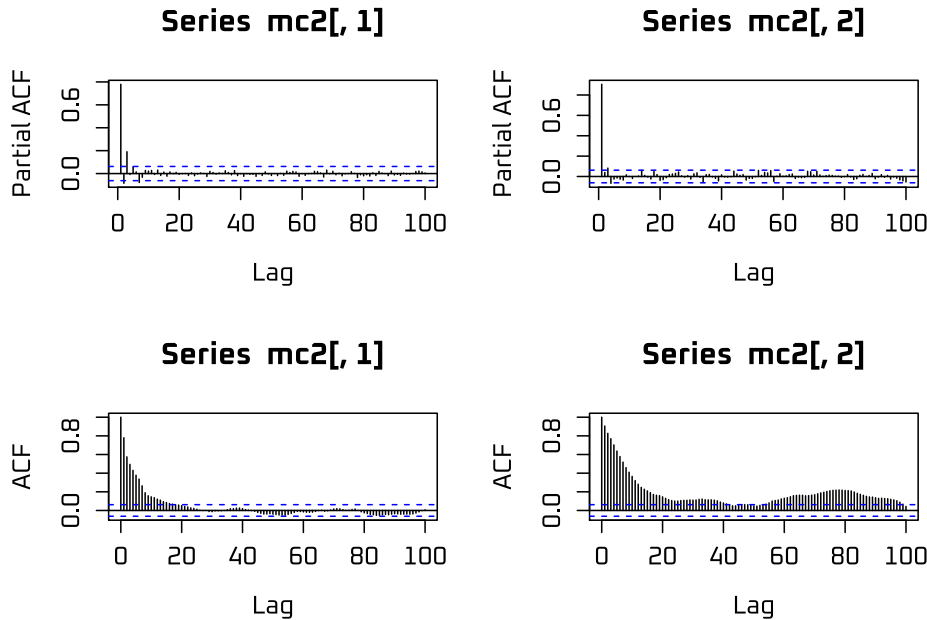


Figura C.10: Autocorrelación y autocorrelación parcial para las cadenas simuladas del algoritmo MH.

la primera mitad de los valores generados en las cadenas. Esta etapa se conoce como *burning stage*.

3. Una vez que las cadenas converjan, mezclar los tres conjuntos de valores generados por las cadenas. Esto garantiza, en primera instancia, que las cadenas no estén auto-correlacionadas.
4. Además de realizar esta mezcla, descartar valores intermedios mediante un muestreo sistemático. Esta etapa se conoce como *thinning stage*. Al final se recomienda almacenar una cantidad elevada de valores simulados.
5. Calibrar el algoritmo si la convergencia de las cadenas no se presenta rápidamente.
 - Para los algoritmos de Metropolis-Hastings, escoger una distribución de salto acorde con la distribución de la cual se desea simular. Por ejemplo, [Cepeda and Gamerman \(2001\)](#) presentan dos distribuciones de salto para el problema de la modelación de la varianza (cada una de las propuestas presenta tasas de aceptación diferentes).
6. Comparación y contraste de los resultados con modelos simples que permitan examinar posibles discrepancias y corregir errores de programación.

En términos de inferencia bayesiana, se tienen dos tipos de procesos: el primero y más común, que trata de realizar inferencias acerca de un vector de parámetros de interés θ ; el segundo trata con los momentos del parámetro, por ejemplo su esperanza. Nótese que el primer proceso se presenta con seguridad en ejercicios

empíricos simulados; sin embargo, el segundo se presenta en los ejercicios prácticos con datos reales, en donde se quiere contrastar alguna hipótesis.

Las anteriores dos opciones tienen tratamientos muy diferentes en términos de la cantidad de simulaciones requeridas. Por ejemplo, si el objetivo es inferir acerca de θ , para conocer su comportamiento estructural, basta con realizar una simulación que genere una cantidad mediana de valores y que se resumen en un promedio y una desviación estándar. Por otro lado, si el objetivo es inferir acerca de $E(\theta)$, se requieren muchas más simulaciones para obtener una buena precisión. Siguiendo a [Gelman and Shirley \(2010\)](#), una vez terminado el proceso de *burning* y *thinning*, se sugiere que se dividan los valores simulados en las cadenas paralelas y se formen k grupos; de esta forma, una estimación de $E(\theta)$ será la gran media de las medias muestrales de cada grupo y el error estándar será su desviación estándar dividida por \sqrt{k} .

Referencias

Bibliografía

- Akaike, H. (1974). A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(6):716–723.
- Apostol, T. M. (1957). *Mathematical Analysis*. McGraw - Hill.
- Berger, J. O. (1985). *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*. Springer, 2 edition.
- Box, G. E. P. and Tiao, G. C. (1992). *Bayesian Inference in Statistical Analysis*. Wiley, 1 edition.
- Brewer, K. (2002). *Combined Survey Sampling Inference: Weighing Basu's Elephants*. A Hodder Arnold Publication. Arnold.
- Carlin, B. P. and Louis, T. A. (1996). *Bayes and Empirical Bayes for Data Analysis*. Chapman and Hall/CRC, 1 edition.
- Cavanaugh, J. E. (1997). Unifying the derivations of the Akaike and corrected Akaike information criteria. *Statistics & Probability Letters*, 31:201–208.
- Cepeda, E. and Gamerman, D. (2001). Bayesian modeling of variance heterogeneity in normal regression models. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, 14:207 – 221.
- Crowley, J. and Hu, M. (1977). Covariance analysis of heart transplant survival data. *Journal of the American Statistical Association*, 72:27 – 36.
- Dempster, A. P. (1974). The direct use of likelihood for significance testing. In *Proceedings of Conference on Foundational Questions in Statistical Inference*, pages 335 – 352. Department of Theoretical Statistics: University of Aarhus.
- Efron, B. (2010). *Large-Scale Inference. Empirical Bayes Methods for Estimation, Testing, and Prediction*. Cambridge University Press.
- Efron, B. and Morris, C. (1975). Data analysis using stein's estimator and its generalizations. *Journal of the American Statistical Association*, 70:311 – 319.
- Gelman, A. (2006). Prior distributions for variance parameters in hierarchical models. *Bayesian Analysis*, 1(3):515–533.

- Gelman, A. (2008). Objections to Bayesian statistics. *Bayesian Analysis*, 3(3):445 – 449.
- Gelman, A., Carlin, J. B., Stern, H. S., and Rubin, D. B. (1995). *Bayesian Data Analysis*. Chapman and Hall/CRC, 1 edition.
- Gelman, A., Carlin, J. B., Stern, H. S., and Rubin, D. B. (2003). *Bayesian Data Analysis*. Chapman and Hall/CRC, 2 edition.
- Gelman, A. and Shirley, K. (2010). *Handbook of Markov Chain Monte Carlo*, chapter Inference from Simulations and Monitoring Convergence. CRC.
- Hastie, T., Tibshirani, R., and Friedman, J. (2009). *The elements of statistical learning: data mining, inference and prediction*. Springer.
- Jordan, M. I. (2004). The exponential family and generalized linear models.
- Martin, A. D., Quinn, K. M., and Park, J. H. (2011). MCMCpack: Markov chain monte carlo in R. *Journal of Statistical Software*, 42(9):22.
- Migon, H. S. and Gamerman, D. (1999). *Statistical Inference: An Integrated Approach*. Arnold.
- Peña, D. (2002). *Análisis de datos multivariantes*. McGraw-Hill.
- Robert, C. P. and Casella, G. (1999). *Monte Carlo Statistical Methods*. Springer.
- Robert, C. P. and Casella, G. (2009). *Introducing Monte Carlo Methods with R*. Springer.
- Schwarz, G. (1978). Estimating the dimension of a model. *Annals of Statistics*, 6:461 – 464.
- Spiegelhalter, D. J., Best, N. G., Carlin, B. P., and VanderLinde, A. (2002). Bayesian measures of model complexity and fit. *Journal of the Royal Statistical Society*, B 64:583 – 639.
- Student (1908). The probable error of a mean. *Biometrika*, 6(1):1 – 25.
- Therneau, T. and Lumley, T. (2011). *survival: Survival analysis, including penalised likelihood*. R package version 2.36-5.
- Wikipedia (2011). Porcentaje de bateo. Wikipedia.
- Yee, T. W. (2012). *VGAM: Vector Generalized Linear and Additive Models*. URL <http://CRAN.R-project.org/package=VGAM>. R package version 0.9-0.
- Zhang, H. and Gutiérrez, H. A. (2010). *Teoría estadística. Aplicación y métodos*. Universidad Santo Tomás.