

Sprawozdanie 3

June 2, 2025

1 Analiza współczynnika uwarunkowania macierzy

Paweł Skierkowski

Wyznaczanie współczynnika uwarunkowania macierzy metodą potęgową

```
[281]: import numpy as np
       from scipy.linalg import hilbert
```

1.1 Zadanie 1:

1.1.1 Metoda potęgowa:

```
[244]: def m_potegowa(C):
       t = np.ones(C.shape[0])
       t = t / np.linalg.norm(t, ord=np.inf)
       l_old = 0

       while True:
           t = C @ t
           t = t / np.linalg.norm(t, ord=np.inf)
           l_new = (t.T @ C @ t) / (t.T @ t)
           error = abs(l_new - l_old)
           if error < 1e-6:
               break
           l_old = l_new

       return l_new
```

1.1.2 Wyznaczanie maksymalnej wartości własnej:

```
[247]: def lam_max(C):
       return m_potegowa(C)
```

1.1.3 Wyznaczanie minimalnej wartości własnej stosując przesunięcie:

```
[294]: def lam_min(A,l):  
        B=A-l*np.eye(A.shape[0])  
        l_min=m_potegowa(B)  
        return l_min+l
```

1.1.4 Wyznaczanie współczynnika uwarunkowania:

```
[253]: def cond(C):  
        A = C.T @ C  
        lam_max_val = lam_max(A)  
        lam_min_val = lam_min(A, lam_max_val)  
        return np.sqrt(lam_max_val / lam_min_val)
```

1.1.5 Porównanie wyników z wbudowaną funkcją:

```
[256]: def comp(A):  
        implemented = cond(A)  
        included = np.linalg.cond(A)  
        difference = abs(implemented - included) / included * 100  
        return implemented, included, difference
```

1.1.6 Wyznaczenie współczynnika oraz różnic pomiędzy metodami na podstawie macierzy C z podręcznika

```
[259]: C = np.array([  
        [4,2,-5,2],  
        [1,5,3,9],  
        [2,2,5,-7],  
        [1,4,-1,1]  
    ])  
    implemented,included,difference=comp(C)  
  
    print(f"Wyliczony współczynnik: {implemented}")  
    print(f"Wbudowana funckja: {included}")  
    print(f"Różnica pomiędzy metodami: {difference:.8f}%")
```

Wyliczony współczynnik: 6.43169731895808

Wbudowana funckja: 6.4316983882385355

Różnica pomiędzy metodami: 0.00001663%

1.1.7 Podsumowanie zadania 1:

Otrzymane wyniki są niemal identyczne, różnica pomiędzy zaimplementowaną metodą `m_potegowa`, a metodą z biblioteki `numpy` jest nieznaczna dla podanej macierzy.

1.2 Zadanie 2:

1.2.1 Wpływ właściwości macierzy (rodzaj, rozmiar) na efektywność metody:

```
[291]: R = np.random.rand(50, 50)
A_sym = (R + R.T) / 2

matrices = {
    "Symetryczna 4x4": np.array([
        [4, 1, 2, 0],
        [1, 3, 0, 1],
        [2, 0, 5, 1],
        [0, 1, 1, 2]
    ]),
    "Niesymetryczna 4x4": np.array([
        [2, -1, 0, 3],
        [0, 1, 4, 0],
        [1, 0, 2, -1],
        [1, 1, 1, 1]
    ]),
    "Losowa 5x5": np.random.rand(5, 5),
    "Diagonalna 4x4": np.diag([1, 10, 100, 1000]),
    "Symetryczna 50x50": A_sym,
    "Niesymetryczna 50x50": np.random.rand(50,50),
    "Hilberta 5x5": hilbert(5),
    "Hilberta 50x50": hilbert(50)
}
for name, A in matrices.items():
    implemented, included, diff = comp(A)
    print(f"\nMacierz: {name}")
    print(f"  Wyliczony cond:      {implemented:.8f}")
    print(f"  Wbudowana cond:      {included:.8f}")
    print(f"  Różnica:                {diff:.6f}%")
```

Macierz: Symetryczna 4x4

Wyliczony cond: 8.44118701

Wbudowana cond: 8.44120150

Różnica: 0.000172%

Macierz: Niesymetryczna 4x4

Wyliczony cond: 4.96799495

Wbudowana cond: 4.96801960

Różnica: 0.000496%

Macierz: Losowa 5x5

Wyliczony cond: 26.06577106

Wbudowana cond: 26.13153834

Różnica: 0.251678%

Macierz: Diagonalna 4x4

Wyliczony cond: 997.48510786
Wbudowana cond: 1000.00000000
Różnica: 0.251489%

Macierz: Symetryczna 50x50

Wyliczony cond: 157.31879812
Wbudowana cond: 660.02383851
Różnica: 76.164679%

Macierz: Niesymetryczna 50x50

Wyliczony cond: 363.19968527
Wbudowana cond: 7057.05480733
Różnica: 94.853382%

Macierz: Hilberta 5x5

Wyliczony cond: 126.73711652
Wbudowana cond: 476607.25024100
Różnica: 99.973408%

Macierz: Hilberta 50x50

Wyliczony cond: 79.14662308
Wbudowana cond: 17175883540120668160.00000000
Różnica: 100.000000%

1.2.2 Wnioski:

Dla macierzy niewielkich obie metody dają podobne wyniki.

Dla macierzy o większych rozmiarach (50x50) różnica staje się zdecydowanie większa, zaimplementowana metoda działa jednak lepiej dla macierzy symetrycznych niż niesymetrycznych.

Dla macierzy Hilberta - zarówno dużej jak i małej - zaimplementowana metoda potęgowa nie pozwala dokładnie wyznaczyć uwarunkowania. Macierz Hilberta jest bardzo źle uwarunkowana.

[]: