Número Pi e o círculo "fatiado"

Valdemar Vello
João Tomás do Amaral

https://doi.org/10.29327/2366212.2024.1-9

Um desafio. A vivência de aprendizagem, aqui registrada para compartilhar com colegas educadores, foi motivada por um desafio proposto pela professora Olenêva Sanches Sousa, de Salvador (BA), que atua como coordenadora do grupo EtnoMatemaTicas Brasis. A proposta consistiu em apresentar para alunos do Ensino Médio uma alternativa para o conceito de pi.

Pi nas Ciências Espaciais. Na atração inicial por informações significativas sobre o número pi, nos deparamos com um dado marcante. Por ser fundamental nas operações matemáticas nas Ciências Espaciais, o número pi é adotado com uma aproximação de 16 casas em sua parte decimal.

Л = 3,1415926535897932 (...)

Nota: Nesse caso, a infinitude de pi, como número irracional, indicada acima pelos parênteses (...) é desprezada nos cálculos.

Etapas para obter pi

Nesta fase, a conformidade em se adotar pi com aproximação de 16 casas decimais também será respeitada. O modo adotado será o de aproximações sucessivas. Segue um roteiro.

A conformidade em se adotar pi com aproximação de 16 casas decimais também será respeitada. O modo adotado será o de aproximações sucessivas. Segue um roteiro.

Raio unitário

Nossa proposta envolve um círculo de raio unitário ($r = 1$), inicialmente "fatiado" em 12 partes iguais.

Setor circular

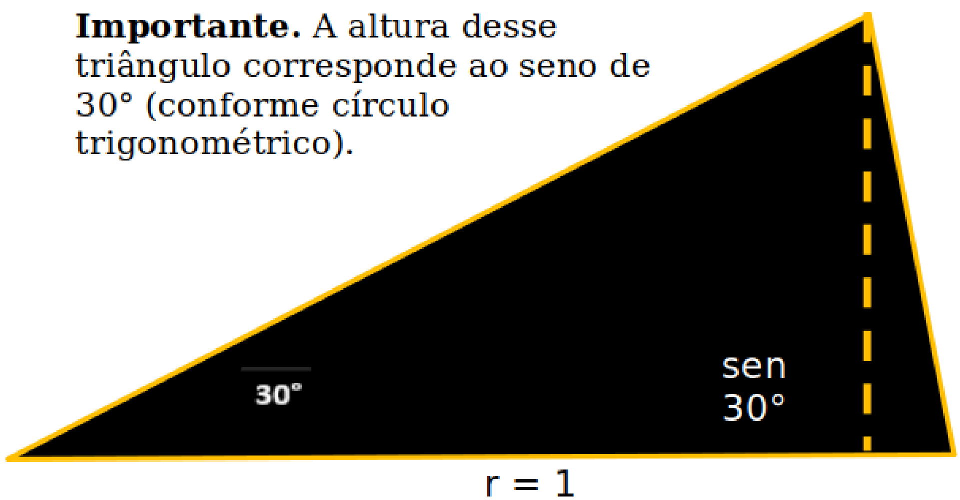
Com essa divisão se obtém um dodecágono regular inscrito. Cada fatia do círculo, ou seja, cada setor circular, tem ângulo central de 30 graus (12 × 30° = 360°).

Triângulo de base 1

Cada parte do dodecágono está inscrita (justaposta) ao setor circular. Essa parte do polígono regular é um triângulo de base igual a 1.

Área do dodecágono

Com o cálculo da área do triângulo, que representa essa parte do polígono regular, pode-se determinar a área do dodecágono (A_{12}).



Área do triângulo inscrito no setor circular

Base, r = 1
Altura, sen 30°= 0,5
Área do triângulo (A_T)
$A_T = 1 \times 0,5 / 2$
$A_T = 0,5 / 2$

Área do dodecágono regular (A_{12})

$A_{12} = 12 \times A_T$
$A_{12} = 12 \times 0,5 / 2$
$A_{12} = 6 \times 0,5$
$A_{12} = 3$

Parte inteira de pi

Nas aproximações sucessivas para se obter pi, a área do dodecágono regular inscrito em um círculo de raio unitário nos revela a parte inteira de pi (π_i). Ou seja:

$\pi_i = 3$

Círculo "fatiado" em 120 partes

A etapa seguinte consiste em dividir 30° em 10 partes iguais. Nesse caso, o ângulo central passa a ser de 3°. O novo triângulo formado tem altura igual a seno de 3°. O novo polígono regular obtido tem 10 × 12 "fatias" iguais (120 × 3° = 360°).

Nota. Os valores de seno para os cálculos a seguir foram obtidos em calculadora e registrados com 16 casas decimais.

Com 2 casas

Pi aproximado com 2 casas decimais (Л$_2$).

$$10 \times 12 / 2 \times \text{sen } 3^\circ =$$
$$= 10 \times 6 \times 0{,}0523359562429438\ldots =$$
$$= \mathbf{3{,}14}01573745766299\ldots$$

Em Л$_2$, apenas os dígitos **1** e **4** correspondem às casas decimais do número pi.

Л$_2$ = 3,14

Com 4 casas

Pi aproximado com 4 casas decimais (Л₄).

$10^2 \times 12 / 2 \times \text{sen}\ (0{,}3)° =$
$= 10^2 \times 6 \times 0{,}0052359638314195... =$
$= \mathbf{3{,}1415}782988517480...$

Em Л₄, apenas os dígitos **1 4 1 5** correspondem às casas decimais do número pi.

$Л_4$ = 3,1415

Com 8 casas

Pi aproximado com 8 casas decimais (Л₈).

$10^4 \times 12 / 2 \times \text{sen}\ (0{,}003)° =$
$= 10^4 \times 6 \times 0{,}0000523598775359... =$
$= 3{,}1415926521543174...$

Em Л₈, apenas os dígitos **1 4 1 5 9 2 6 5** correspondem às casas decimais do número pi.

$Л_8$ = 3,14159265

Com 16 casas

Pi aproximado com 16 casas decimais ($Л_{16}$).

$10^8 \times 12 / 2 \times \text{sen}\ (0{,}0000003)° =$
$= 10^8 \times 6 \times 0{,}0000000052359877... =$
$= 3{,}1415926535897932...$

Em $Л_{16}$, apenas os dígitos **1 4 1 5 9 2 6 5 3 5 8 9 7 9 3 2** correspondem às casas decimais do número pi.

$Л_{16}$ = 3,1415926535897932

Tendência

No círculo de raio 1, ao se obter a medida do ângulo central cada vez menor, a área do polígono regular inscrito tende à mesma área do círculo. Logo, por aproximações sucessivas, a área do círculo (Ac) tende a pi.

Ac = Л, para o círculo de raio unitário.

Áreas do dodecágono e do círculo de raio R qualquer

O recurso de se obter a expressão matemática para a área do dodecágono é dar apoio ao entendimento da área do círculo.

Área do dodecágono regular de raio R

Base, R qualquer.
Altura, sen 30°= 0,5R.

Área do triângulo inscrito (A_T)

$A_T = R \times 0{,}5R / 2$
$\mathbf{A_T = 0{,}5R^2 / 2}$

Área do dodecágono regular (A_{12})

$A_{12} = 12 \times A_T$
$A_{12} = 12 \times 0{,}5R^2 / 2$
$A_{12} = 6 \times 0{,}5R^2$
$\mathbf{A_{12} = 3R^2}$

Área do círculo de raio R

Na expressão $3R^2$, o número 3 é a parte inteira de pi. Ao promover as aproximações sucessivas, o pi assume seu valor de importância como uma das constantes matemáticas fundamentais.

Assim, ao se conceber Л, a área do círculo de raio R assim se define:

$$\mathbf{Ac = (3{,}1415...)R^2}$$

$$\mathbf{Ac = \pi R^2}$$

Comprimento da circunferência de raio R

Soma das alturas das 12 fatias do dodecágono (H_{12}).

Aqui o recurso para se obter a expressão matemática do comprimento da circunferência consiste, inicialmente, em determinar a soma das alturas das 12 fatias do dodecágono. Ou seja, da soma dos 12 valores do seno de 30°.

$$H_{12} = 12 \times \text{sen } 30°$$
$$H_{12} = 12 \times 0{,}5R$$
$$H_{12} = 2 \times 6 \times 0{,}5R$$

$$\mathbf{H_{12} = 2 \times 3R}$$

Na expressão **2 × 3R**, o número **3** é a parte inteira de pi. Ao promover as aproximações sucessivas, obtemos pi. Pois, com as reduções dos valores do ângulo central, as alturas das fatias e os lados do polígono regular tendem para o comprimento da circunferência (C).

C = 2 × (3,1415...)R

C = 2ЛR

Pi no "teclado" das calculadoras.

A calculadora digital de um computador (PC) tem uma "tecla" para o pi. Ao acioná-la, em nosso registro, o visor apresentou 31 casas decimais.

Л = 3,1415926535897932384626433832795...

Nota. Em determinados celulares, pi é mostrado com 11 casas decimais.

Do exposto acima, mantendo o mesmo raciocínio, agora o que propomos é uma outra alternativa e, também, uma generalização para o conceito de pi.

Círculo fatiado em 360 partes.

Ao dividir o círculo em 360 partes iguais, o ângulo central passa a ser de 1°. Assim, 360 × 1° = 360°. O novo polígono regular obtido tem 360 "fatias" iguais. E o novo triângulo formado tem altura igual a seno de 1°.

Nota. Raciocínio válido para círculo de raio unitário.

Área do polígono regular de 360 lados

$A_{360} = 360 / 2 \times \text{sen } 1°$
$A_{360} = 180 \times \text{sen } 1°$
$A_{360} = 180 \times 0{,}01745250643\ldots$
$\mathbf{A_{360} = 3{,}14143315871\ldots}$
$\mathbf{A_{360} = 3{,}141}$

Nota. Valor de Л por uma aproximação de 3 casas decimais.

Expressão geral para obter pi por aproximações sucessivas

$$\boxed{\mathbf{k \times 180 \times sen\ (1/k)^\circ}}$$

Exemplo para $k = 10^4$

$10^4 \times 180 \times \text{sen}\ (1/10^4)^\circ =$

$= 10^4 \times 180 \times \text{sen}\ (0{,}0001)^\circ =$

$= 10^4 \times 180 \times 0{,}00000174532\ldots =$

$= \mathbf{3{,}1415926535}9\ldots$

Para $k = 10^4$ se obtém pi com aproximação de 10 casas decimais.

Agora experimentem aplicar na expressão outros valores para k real positivo.