Pi e su relación con los números complejos

Bertha Ivonne Sánchez Luján

Los números complejos se representan por la letra C y están compuestos por una parte real y una parte imaginaria. Por ejemplo: $4 + 3i$ es un numero complejo representado en forma binómica o rectangular, la cual el 4 es un número real y $+ 3i$ es la parte imaginaria. Estos números, sus operaciones, representación geométrica, obtención de raíces y solución de ecuaciones, se encuentran en el programa de la asignatura Álgebra Lineal para los estudiantes de las diversas carreras de ingeniería del sistema Tecnológico Nacional de México.

El número "pi"(π) es una constante matemática fundamental que representa la relación entre la circunferencia de un círculo y su diámetro. Aunque normalmente se utiliza en contextos de geometría y trigonometría, también se puede relacionar con los números complejos. Dentro de os temas que deben revisarse en esta temática se encuentran:

1. Representación polar: Los números complejos se pueden expresar en forma polar, utilizando una magnitud y un ángulo. La fórmula de Euler establece una relación importante entre los números complejos, "pi" y los exponentes complejos: $e^{-i\pi} - 1 = 0$. Esta ecuación relaciona los números complejos, el número "pi" y la identidad aditiva.

2. Fórmula de De Moivre: La fórmula de De Moivre es otra herramienta útil en el estudio de números complejos. Esta fórmula establece $(cosx + isenx)^n = \cos cos\,(nx) + i\,sen(nx)$ Aquí, el argumento (ángulo) "x" puede ser un múltiplo de "pi", lo que implica que π está relacionado con las potencias de los números complejos.

3. Representación gráfica: El plano complejo, también conocido como plano de Argand-Gauss, es una forma visual de representar los números complejos como puntos en un plano. El número "pi" se relaciona con los números complejos en términos de sus argumentos y módulos. Además, si el tiempo de clase lo permite, es posible explorar la relación entre la circunferencia unitaria y el número "pi" en el contexto de números complejos.

4. Funciones trigonométricas: Las funciones trigonométricas también se pueden extender al dominio de los números complejos. Esto puede ayudar a los estudiantes a comprender las conexiones entre las funciones trigonométricas y los números complejos.

La representación polar de un número complejo implica expresarlo en términos de su magnitud (o módulo) y su argumento (o ángulo). Si consideramos un número complejo z en forma rectangular como $z = a + bi$, donde a , b son las partes real e imaginaria respectivamente, la representación polar se puede obtener utilizando la siguiente fórmula: $z = r(cos\theta + i\,sen\theta)$, donde r es la magnitud del número complejo $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, θ es el argumento del número complejo, que se puede obtener mediante $\theta = arctan\frac{b}{a}$.

La relación entre la representación polar de los números complejos y el número "pi" se establece a través de la fórmula de Euler: $e^{i\theta} = cos\theta + isen\theta$, esta fórmula relaciona el exponente complejo $e^{i\theta}$ con las funciones trigonométricas coseno y seno del ángulo θ. Si tomamos el caso particular de θ = π (pi), obtenemos: : $e^{-i\pi} = cos\pi + isen\pi = \ -1$. Esta es una relación fundamental que vincula el número "pi", el número complejo imaginario: i y las funciones trigonométricas coseno y seno. Es conocida como la identidad de Euler y es considerada una de las ecuaciones más elegantes de las matemáticas debido a su simplicidad y profundidad conceptual.

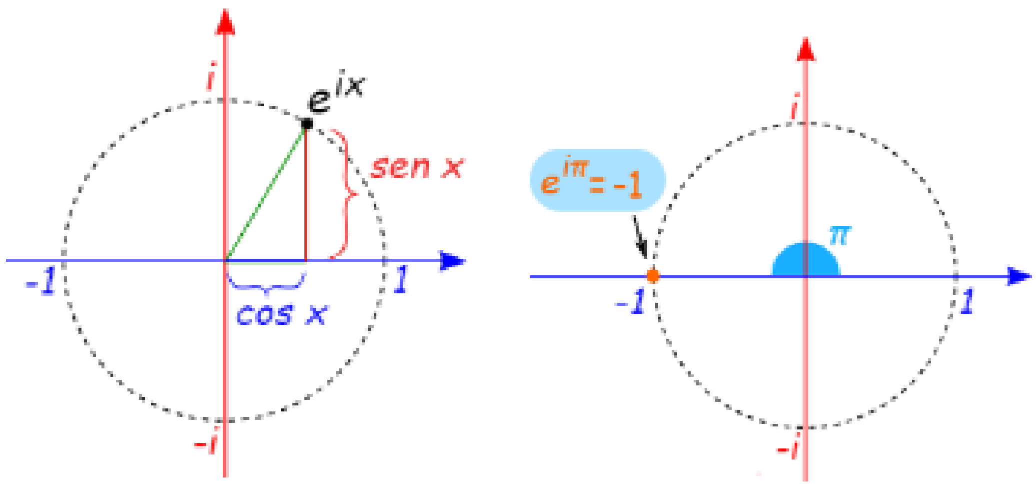
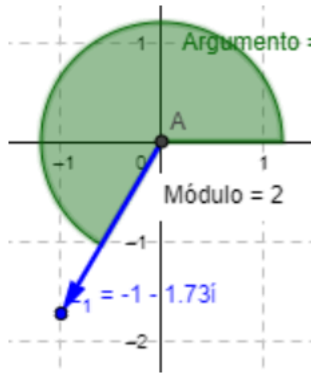


Figura 1: Representación de un número complejo en el círculo unitario.

Esta relación entre "pi", los números complejos y la identidad de Euler permite explorar conexiones entre diferentes áreas de las matemáticas, como el análisis complejo, la geometría y la trigonometría.

En el contexto de una clase con estudiantes de ingeniería, se les pide que llenen u formato similar a la Tabla 1.

Tabla 1. Representación de números complejos en sus diferentes formatos. (Elaboración propia)

Binómica	Trigonométrica	Polar	Gráfica (Diagrama de Argand)
$-1-i\sqrt{3}$	$2(cos\frac{4}{3}\pi + \ i\ sen\frac{4}{3}\pi)$	$2e^{\frac{4}{3}\pi i}$	 con Geogebra

Además, los estudiantes deben investigar aplicaciones de los números complejos en el campo de la ingeniería que estén cursando, y se dedica una sesión para comentar sobre los hallazgos. Algunas aplicaciones prácticas en diversas áreas de la vida diaria:

1. Ingeniería eléctrica: se utilizan para representar corrientes y voltajes en circuitos de corriente alterna. Permiten trabajar con valores de amplitud y fase, lo que facilita el análisis de circuitos y el cálculo de impedancias.

2. Telecomunicaciones: son utilizados para representar señales moduladas, como las señales de radio y televisión. Además, las técnicas de modulación y demodulación se basan en operaciones matemáticas con números complejos.

3. Procesamiento de señales digitales: los números complejos se utilizan para analizar y manipular señales, como en la transformada de Fourier. Esta herramienta matemática es esencial en aplicaciones como compresión de audio y video, reconocimiento de voz y análisis espectral.

4. Geometría y gráficos por computadora: Permiten representar y manipular objetos en el plano complejo, lo que facilita operaciones como rotaciones, traslaciones y escalados.

5. Análisis de vibraciones y ondas: para describir y analizar fenómenos oscilatorios, además en el estudio de estructuras y materiales. Las funciones sinusoidales y las soluciones de ecuaciones diferenciales se expresan en términos de números complejos.

En general, se utilizan en disciplinas científicas y técnicas que involucran fenómenos ondulatorios, oscilatorios y sistemas con componentes imaginarios. La capacidad de trabajar con números complejos amplía el rango de problemas que se pueden resolver y brinda herramientas matemáticas poderosas en diversos campos. Para los estudiantes de ingeniería es una herramienta para resolver problemas de su espacialidad, y el mostrarles las diversas formas de representación ha ayudado a una mejor comprensión del concepto y su relación con el número “pi”.