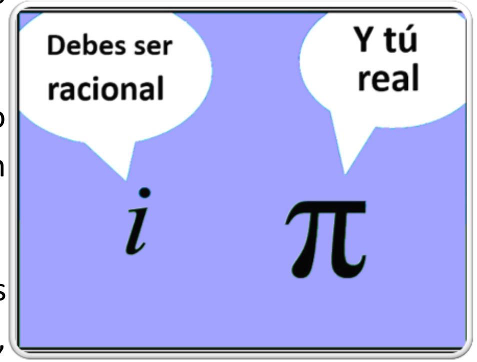
La racionalidad de este irracional

Teresa Ema Fernández



El número π es conocido por todos, principalmente por la geometría. Pero hoy quiero contarles sobre su formación, es decir, cómo podemos generarlo de otra manera.

En Grecia, en el siglo III a.C., Euclides, en su libro Elementos, describe un algoritmo para descomponer un número en fracciones, pero no cualquier fracción, sino en fracciones continuas.

En el siglo XX, Ramanuján (1887-1920) descubrió varias propiedades notables de las fracciones continuas (F.C.) y las aplicó a diversas áreas de la matemática. Por ejemplo, la solución a ecuaciones diofánticas y la expresión del número áureo.

$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, las expresó como F.C., dando también otra expresión del número áureo:$\varphi = \sqrt{\frac{e\,\pi}{2}}$.

Estas fracciones continuas son una expresión conveniente a los números reales, para estudiar sus propiedades. Son expresiones de las siguientes formas:

$$a_0+\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3+\ldots\ldots}}}=\left[a_0;\frac{b_1}{a_1};\frac{b_2}{a_2};\frac{b_3}{a_3};\ldots\ldots\ldots\right]$$

F. C. FINITA:

$$a_0+\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{\ldots\ldots\ldots a_{n-1}+\cfrac{b_n}{a_n}}}=\left[a_0;\frac{b_1}{a_1};\frac{b_2}{a_2};\ldots\ldots;\frac{b_n}{a_n}\right]$$

F. C. INFINITA:

$$\left[a_0;\frac{b_k}{a_k}\right]_1^{\infty}$$

F . C . SIMPLE:

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ldots\ldots}}}=\left[a_0;\frac{1}{a_1};\frac{1}{a_2};\frac{1}{a_3};\ldots\ldots\ldots\right]$$

Para hallarlas, se aplica el algoritmo de Euclides. Si tomamos la parte entera de cada una de las fracciones, podemos escribir la F.C. en forma reducida, como se ve en la imagen. Cada paso resulta en lo que se denomina convergente, cumpliendo la propiedad de ser una mejor aproximación del número en cuestión. En el caso de los números irracionales, cada convergente es un número racional que se aproxima cada vez más a ese irracional. Al ser π un número real e irracional, cumple el teorema fundamental en la teoría de F.C., que establece que todo irracional puede ser expresado como tal.

A continuación, vemos unos ejemplos de conversión de una F.C. a fracción simple y viceversa:

- CONVERTIR EN FRACCIÓN ORDINARIA. $\left[3;\frac{1}{3};\frac{1}{1},\frac{1}{4}\right]=3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}$

SE RESUELVEN LAS FRACCIONES PARCIALES:

$$1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4};\quad 1:\frac{5}{4}=\frac{4}{5};\quad 3+\frac{4}{5}=\frac{19}{5};\quad 1:\frac{19}{5}=\frac{5}{19};\quad 3+\frac{5}{19}=\frac{62}{19}$$

Y OBTENEMOS: $\left[3;\frac{1}{3};\frac{1}{1},\frac{1}{4}\right]=3\frac{5}{19}$

CONVERTIR EN F.C. $\frac{62}{19}$

APLICAMOS ALG . DE EUCLIDES :

$62=3.19+5\Rightarrow\frac{62}{19}=3+\frac{5}{19}$ $\quad 5=1.4\ +1\Rightarrow\frac{5}{4}=1+\frac{1}{4}$

$19=3.5\ +4\Rightarrow\frac{19}{5}=3+\frac{4}{5}$ $\quad 4=4.1\ +0$

$$\frac{62}{19}=3+\frac{5}{19}=3+\cfrac{1}{\cfrac{19}{5}}=3+\cfrac{1}{3+\cfrac{4}{5}}=3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\cfrac{5}{4}}}=3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}$$

POR LO TANTO: $\frac{62}{19}=\left[3;\frac{1}{3};\frac{1}{1};\frac{1}{4}\right]$ o $\frac{62}{19}=[3;3,1,4]$

Volvamos a π. Para expresarlo con F.C., debemos escribirlo como 3+0.14159 (truncado). Luego expresamos la parte decimal como fracción $\frac{14159}{100000}$, escribimos su recíproca $\frac{100000}{141159}$, dividimos y escribimos su parte entera más la decimal, pero ésta como fracción: $7+\frac{887}{14159}$.

Con la fracción procedemos de la misma forma, sucesivamente hasta llegar a una división exacta. Luego armamos la F.C. con las partes enteras más la decimal convertida:

$3{,}14159=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{25+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{4}}}}}}}$. Los convergentes son C_0=3, C_1=3+$\frac{1}{7}=\frac{22}{7}=3,142857,$ etc.

El C_1 es considerado una muy buena aproximación de Pi y debido a él, el día 22 de julio (22/7) es el Día de la aproximación de π.

Aplicaciones para nuestros estudiantes:

1. Expresar soluciones de ecuaciones cuadráticas mediante el algoritmo de Euclides.

2. Criptografía: algoritmo de factorización de números enteros.

3. Números periódicos expresados como F.C. Ejemplos:

$$\frac{11}{9}=1+\frac{2}{9} \qquad 9=4*2+1$$

$$\frac{9}{2}=4+\frac{1}{2} \qquad 2=2*1+0$$

$$\Rightarrow 1,\hat{2}=1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}} \Rightarrow 1,\hat{2}=[1,4,2]$$

4. Convertir números a F.C. Dar múltiples F.C. y organizarlas en una línea, previamente convertidas en números.

5. Representar a Pi como F.C., y ordenar en la recta cada uno de sus convergentes, estudiando la aproximación de cada uno a Pi.

6. Podrías explicarlo de esta manera:

7. Representar gráficamente un pentágono regular y medir sus lados y diagonales. Luego, formar una F.C. con estas dos medidas. Investigar el número resultante y sus propiedades, incluyendo en qué otros polígonos se cumple este número obtenido.