Non-triangulation en dimension 4

Décembre 2020

Le théorème de Poincaré-Perelman établi en 2006 donne une nouvelle démonstration de l'existence d'une variété topologique non triangulable en dimension 4. La démonstration originale est due à Andrew Casson et fait usage de l'invariant de Casson.

Théorème 1 (Casson, 1985)**.** *Il existe des variétés de dimension 4 non triangulables ; en particulier, la variété $E8$ de Freedman ne possède pas de triangulation.*

Démonstration. La variété topologique $E8$, que nous notons M, est une variété compacte de dimension 4 découverte par Michael Freedman en 1982. Sa forme d'intersection est de matrice $E8$: la signature de M est $\sigma(M) = 8$. De plus, sa deuxième classe de Stiefel-Whitney est triviale. Ainsi, il découle du théorème de Rokhlin que $E8$ ne possède pas de structure lisse.

Théorème 2 (Rokhlin)**.** *Une variété M de dimension 4 lisse, compacte et dont la deuxième classe de Stiefel-Whitney est triviale a une signature $\sigma(M)$ divisible par 16.*

Supposons que M, la variété $E8$, possède une triangulation. Puisque $E8$ est une variété topologique, les liens de chaque sommet sont simplement connexes [1]. Par le théorème de Poincaré-Perelman, ces liens, fermés et de dimension 3 par définition, sont tous homéomorphes à S^3. Ceci confère à la triangulation (et à M), une structure linéaire par morceaux (PL). Toute variété PL peut-être munie d'une structure lisse, ce qui contredit la théorème de Rokhlin.

M ne possède pas de triangulation. □

Références

[1] Robert D. Edwards : The topology of manifolds and cell-like maps. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, pages 111–127, 1978.

[2] Michael W Davis, Jim Fowler et Jean-François Lafont : Aspherical manifolds that cannot be triangulated. *Algebraic Geometric Topology*, 14(2): 795–803, Jan 2014.

[3] Selman Akbulut et John D. McCarthy : *Cassons invariant for oriented homology three-spheres : an exposition.* Numéro 36 de Mathematical Notes. Princeton University Press, 1990.

[4] Robin C. Kirby : *The topology of 4-manifolds.* Springer, 1991.