Non-triangulation en dimension 4

Décembre 2020

Le théorème de Poincaré-Perelman établi en 2006 donne une nouvelle démonstration de l'existence d'une variété topologique non triangulable en dimension 4. La démonstration originale est due à Andrew Casson et fait usage de l'invariant de Casson.

Théorème 1 (Casson, 1985)**.** *Il existe des variétés de dimension 4 non triangulables ; en particulier, la variété $E8$ de Freedman ne possède pas de triangulation.*

Démonstration. La variété topologique $E8$, que nous notons M, est une variété compacte de dimension 4 découverte par Michael Freedman en 1982. Sa forme d'intersection est de matrice $E8$: la signature de M est $\sigma(M) = 8$. De plus, sa deuxième classe de Stiefel-Whitney est triviale. Ainsi, il découle du théorème de Rokhlin que $E8$ ne possède pas de structure lisse.

Théorème 2 (Rokhlin)**.** *Une variété M de dimension 4 lisse, compacte et dont la deuxième classe de Stiefel-Whitney est triviale a une signature $\sigma(M)$ divisible par 16.*

Supposons que M, la variété $E8$, possède une triangulation. Puisque $E8$ est une variété topologique, les liens de chaque sommet sont simplement connexes (Lemme 1 ci-bas). Par le théorème de Poincaré-Perelman, ces liens, fermés et de dimension 3 par définition, sont tous homéomorphes à S^3. Ceci confère à la triangulation (et à M), une structure linéaire par morceaux (PL). Toute variété PL peut-être munie d'une structure lisse, ce qui contredit la théorème de Rokhlin.

M ne possède pas de triangulation. $\square$

Lemme 1. *Soit K une triangulation d'une variété topologique $M \cong |K|$ de dimension $n \geq 4$. Les liens de chaque sommet de K sont simplement connexes.*

Démonstration. Soient v sommet de K, $St(v)$ son voisinage étoilé ouvert et $Lk(v)$ son lien. Montrons que $St(v)$ est variété topologique de dimension n. Pour tout $x \in St(v)$, il existe un voisinage de $V \subset M$ de x homéomorphe à $\mathbb{R}^n$. Si x est dans un n-simplexe, on peut supposer $V \subset St(v)$. Si x est dans un k-simplexe σ, $k < n$, on peut prendre V assez petit de sorte qu'il soit inclus dans l'intérieur de l'union de n-simplexes qui ont σ comme face. Ces n-simplexes ont donc v comme sommet, ce qui fait qu'il sont dans $\overline{St(v)}$, la fermeture de $St(v)$. Ainsi, $V \subset St(v)$ et $St(v)$ est bien variété topologique.

Par définition du lien, $Lk(v)$ est composé des simplexes de $\overline{St(v)}$, ne contenant pas v. Le joint $Lk(v) * v$ est égal à

$$\bigcup_{\sigma \in Lk(v)^{n-1}} \sigma * v$$

où $Lk(v)^{n-1}$ est l'ensemble des $(n-1)$-simplexes de $Lk(v)$, des faces des n-simplexes de $St(v)$. Un joint $\sigma * v$ est égal à la fermeture d'un n-simplexe de $St(v)$, si bien que l'union ci-haut coïncide avec $\overline{St(v)}$. On conclut des homéomorphismes

$$CLk(v) \cong Lk(v) * v \cong \overline{St(v)}$$

que $CLk(v)$, le cône le $Lk(v)$, est une variété topologique de dimension n. Il s'ensuit que $SLk(v)$, la suspension de $Lk(v)$, est aussi variété topologique de dimension n.

Soit p le point auquel $Lk(v) \times \{1\}$ est identifié dans la suspension

$$SLk(v) = Lk(v) \times [-1, 1]/\{Lk(v) \times \{-1\}, Lk(v) \times \{1\}\}.$$

Il existe un voisinage U de p homéomorphe à $\mathbb{R}^n$. Soit $t_0 \in (-1, 1]$ tel que $Lk(v) \times [t_0, 1]/Lk(v) \times \{1\} \subset U$. L'homéomorphisme h fixant $Lk(v) \times \{t_0\}$ et envoyant $Lk(v) \times [t_0, 1]/Lk(v) \times \{1\}$ sur $Lk(v) \times [-1, t_0]/Lk(v) \times \{-1\}$ donne un ouvert $h(U) \cong \mathbb{R}^n$. Les ouverts $h(U)$ et U recouvrent $SLk(v)$. Le bord de U, $\partial U \cong S^{n-1}$, est à bicollier dans $h(U)$. Par le théorème de Schönflies généralisé, $h(U) \setminus U$ est homéomorphe à une n-boule fermée. Ainsi, $SLk(v)$ est l'identification des deux n-boules fermées $h(U) \setminus U$ et $\overline{U}$ en leur bord commun ∂U. On en conclut que $SLk(v)$ est homéomorphe à la sphère S^n.

$Lk(v)$ est rétraction de $SLk(v) \setminus \{p, q\}$, où q est le point auquel $Lk(v) \times \{-1\}$ est identifié dans $SLk(v)$. Par conséquent,

$$\pi_1(Lk(v)) \cong \pi_1(SLk(v) \setminus \{p, q\}) \cong \pi_1(S^n \setminus \{2 \text{ points}\}) \cong \pi_1(S^n) = 0.$$

□

Références

[1] Michael W Davis, Jim Fowler et Jean-François Lafont : Aspherical manifolds that cannot be triangulated. *Algebraic Geometric Topology*, 14(2): 795–803, Jan 2014.

[2] Selman Akbulut et John D. McCarthy : *Cassons invariant for oriented homology three-spheres : an exposition.* Numéro 36 de Mathematical Notes. Princeton University Press, 1990.

[3] Robin C. Kirby : *The topology of 4-manifolds*. Springer, 1991.

[4] David E. Galewski et Ronald J. Stern : Classifications of simplicial triangulations of topological manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 82(6):916–918, 11 1976.

[5] Edwin E. Moise : Affine structure in 3-manifolds : VI. Compact spaces covered by two euclidean neighborhoods. *Annals of Mathematics*, 58(1):107–107, 1953.