Non-triangulation en dimension 4

Décembre 2020

Le théorème de Poincaré-Perelman établi en 2006 donne une nouvelle démonstration de l'existence d'une variété topologique non triangulable en dimension 4. La démonstration originale est due à Andrew Casson et fait usage de l'invariant de Casson.

Théorème 1 (Casson, 1985)**.** *Il existe des variétés de dimension 4 non triangulables ; en particulier, la variété $E8$ de Freedman ne possède pas de triangulation.*

Démonstration. La variété topologique $E8$, que nous notons M, est une variété compacte de dimension 4 découverte par Michael Freedman en 1982. Sa forme d'intersection est de matrice $E8$: la signature de M est $\sigma(M) = 8$. De plus, sa deuxième classe de Stiefel-Whitney est triviale. Ainsi, il découle du théorème de Rokhlin que $E8$ ne possède pas de structure lisse.

Théorème (Rokhlin)**.** *Une variété M de dimension 4 lisse, compacte et dont la deuxième classe de Stiefel-Whitney est triviale a une signature $\sigma(M)$ divisible par 16.*

Supposons que M, la variété $E8$, possède une triangulation. Puisque $E8$ est une variété topologique, les liens de chaque sommet sont simplement connexes (Lemme 3). De plus, ce sont des complexes simpliciaux qui sont des variétés d'homologie de dimension 3, ce qui en fait des variétés topologiques (Corollaire et Lemme 4). Par le théorème de Poincaré-Perelman, ces liens sont tous homéomorphes à S^3. Ceci confère à la triangulation (et à M), une structure linéaire par morceaux (PL). Toute variété PL de dimension 4 peut être munie d'une structure lisse, ce qui contredit la théorème de Rokhlin.

M ne possède pas de triangulation. □

Nous détaillons ci-bas les étapes nous permettant d'appliquer le théorème de Poincaré-Perelman.

Lemme 1. *Soit K une triangulation d'une variété topologique $M \cong |K|$ de dimension n. Le voisinage étoilé $St(\sigma)$ d'un simplexe σ est une variété topologique.*

Démonstration. Pour tout $x \in St(\sigma)$, il existe un voisinage de $V \subset M$ de x homéomorphe à $\mathbb{R}^n$. Si x est dans un n-simplexe, on peut supposer $V \subset St(\sigma)$. Si x est dans un k-simplexe $\tau \subset St(\sigma)$, $k < n$, on peut prendre V assez petit de sorte qu'il soit inclus dans l'intérieur de l'union de n-simplexes qui ont τ comme face. Puisque τ a σ comme face par définition de $St(\sigma)$, ces n-simplexes ont aussi σ comme face : ils sont donc dans $\overline{St}(\sigma)$, la fermeture de $St(\sigma)$. Ainsi, on a l'inclusion $V \subset St(\sigma)$, et $St(\sigma)$ est bien variété topologique. $\square$

Lemme 2. *Soit SX la suspension d'un espace X. Si SX est une variété topologique de dimension n, alors SX est homéomorphe à la sphère S^n et X est homotopiquement équivalent à S^{n-1}.*

Démonstration. Soit p le point auquel $X \times \{1\}$ est identifié dans la suspension

$$SX = X \times [-1, 1]/\sim$$

où $(x, t) \sim (y, s)$ si et seulement si $t = s \in \{-1, 1\}$. Il existe un voisinage U de p homéomorphe à $\mathbb{R}^n$. Soit $t_0 \in (-1, 1]$ tel que $X \times [t_0, 1]/X \times \{1\} \subset U$. L'homéomorphisme h fixant $X \times \{t_0\}$ et envoyant $X \times [t_0, 1]/X \times \{1\}$ sur $X \times [-1, t_0]/X \times \{-1\}$ donne un ouvert $h(U) \cong \mathbb{R}^n$. Les ouverts $h(U)$ et U recouvrent SX. Le bord de U, $\partial U \cong S^{n-1}$, est à bicollier dans $h(U)$. Par le théorème de Schönflies généralisé, $h(U) \setminus U$ est homéomorphe à une n-boule fermée. Ainsi, SX est l'identification des deux n-boules fermées $h(U) \setminus U$ et $\overline{U}$ en leur bord commun ∂U. On en conclut que SX est homéomorphe à la sphère S^n.

De plus, X est rétraction de $SX \setminus \{p, q\}$, où q est le point auquel $X \times \{-1\}$ est identifié dans SX. Par conséquent, on obtient les équivalences homotopiques

$$X \simeq SX \setminus \{p, q\} \cong S^n \setminus \{2 \text{ points}\} \simeq S^{n-1}. \qquad \square$$

Définition 1. Un espace topologique $M \cong |K|$ triangulé par un complexe simplicial K de dimension n est une *variété d'homologie* si pour tout simplexe $\sigma \in K$, $H_* Lk(\sigma) = H_*(S^{n-\dim(\sigma)-1})$.

Lemme 3. *Soit K une triangulation d'une variété topologique $M \cong |K|$ de dimension n. Les liens $Lk(\sigma)$ pour tout σ simplexe de K sont homotopiquement équivalents à la sphère $S^{n-\dim(\sigma)-1}$. En particulier, M est une variété d'homologie.*

Démonstration. Par définition du voisinage étoilé et du lien,

$$\overline{St}(\sigma) \cong CLk(\sigma) \times \sigma \cong CLk(\sigma) \times [-1, 1]^k \cong C(S^k Lk(\sigma)),$$

où $S^k Lk(\sigma)$ est la suspension k fois de $Lk(\sigma)$. Le cône $C(S^k Lk(\sigma))$ est une variété topologique par le lemme 1. Par le lemme 2, $S^{k+1} Lk(\sigma)$ est homéomorphe à S^n et $Lk(\sigma) \simeq S^{n-k-1}$. $\square$

Corollaire. *Soit K une triangulation d'une variété topologique $M \cong |K|$ de dimension n. Les liens $Lk(\sigma)$ pour tout σ simplexe de K sont des variétés d'homologie.*

Démonstration. Soit τ un k-simplexe de $Lk(\sigma)$ et posons $l = \dim \sigma$. Par définition du lien,

$$H_*(Lk(\tau, Lk(\sigma))) = H_*(Lk(\tau * \sigma, K)) = H_*(S^{n-(k+l+1)-1}) \qquad \square$$

Lemme 4. *Si $M \cong |K|$ est une variété d'homologie de dimension 3, alors elle est une variété topologique.*

Démonstration. Soit $x \in M$ et supposons sans perte de généralité que x est un sommet de K (quitte à prendre une subdivision de K).

Soit $y \in Lk(x)$ qu'on suppose sans perte de généralité être un sommet de $Lk(x)$. Par le lemme 3

$$H_*(Lk(v, Lk(x))) = H_*(Lk(vx, K)) = H_*(S^{3-1-1}) = H_*(S^1).$$

Par définition du lien, $Lk(v, Lk(x))$ est forcément homéomorphe à S^1, si bien que $\overline{St}(v, Lk(x)) = CLk(v, Lk(x)) = B^2$, d'où l'existence d'un voisinage de y homéomorphe à $\mathbb{R}^2$ dans $Lk(x)$. Ce dernier est une variété topologique de dimension 2.

L'unique variété topologique de dimension 2 ayant l'homologie de S^2 est S^2 elle-même. Ainsi, $\overline{St}(x, K) \cong CLk(x, K) \cong CS^2 \cong B^3$. Il s'ensuit qu'on peut trouver un voisinage de x homéomorphe à $\mathbb{R}^3$, contenu dans $\overline{St}(x, K) \subset M$. $\square$

Références

[1] Michael W Davis, Jim Fowler et Jean-François Lafont : Aspherical manifolds that cannot be triangulated. *Algebraic Geometric Topology*, 14(2): 795–803, Jan 2014.

[2] Selman Akbulut et John D. McCarthy : *Cassons invariant for oriented homology three-spheres : an exposition.* Numéro 36 de Mathematical Notes. Princeton University Press, 1990.

[3] Robin C. Kirby : *The topology of 4-manifolds.* Springer, 1991.

[4] David E. Galewski et Ronald J. Stern : Classifications of simplicial triangulations of topological manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 82(6):916–918, 11 1976.

[5] Edwin E. Moise : Affine structure in 3-manifolds : VI. Compact spaces covered by two euclidean neighborhoods. *Annals of Mathematics*, 58(1):107–107, 1953.