ΠΛΗ31

ΕΝΟΤΗΤΑ 3: ΝΕΥΡΩΝΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ

Μάθημα 3.5:
Δίκτυα Hopfield

Δημήτρης Ψούνης

www.psounis.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

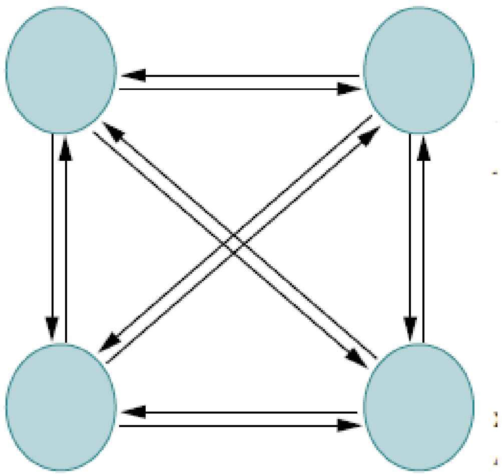
Α. Θεωρία

1. Δίκτυα Hopfield

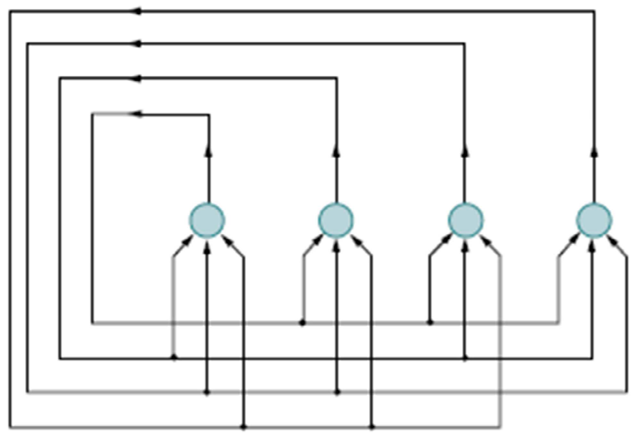
1. Δομή του Δικτύου Hopfield

Ένα ΤΝΔ της δομής Hopfield δομείται ως εξής:

- N υπολογιστικούς νευρώνες.
- Κάθε νευρώνας:
  - Στέλνει την έξοδο του σε κάθε άλλο νευρώνα.
  - Δέχεται είσοδο από όλους τους άλλους νευρώνες (Μηχανισμός Ανάδρασης)
    - Έχει και την στάνταρ είσοδο (κατωφλίου ή πολωση)
  - Όχι με τον εαυτό του όμως! Άρα έχουμε N(N-1) συνάψεις (ακμές).
- Προσοχή!!
  - Δεν υπάρχουν αισθητήρες εισόδου ή εξόδου



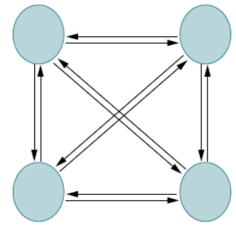
Ισοδύναμη Αποτύπωση



Α. Θεωρία

1. Δίκτυα Hopfield

2. Λειτουργία του Αισθητήρα



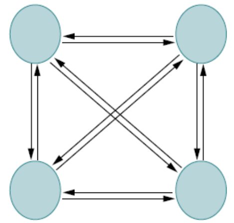
Κάθε ένας από τους Ν αισθητήρες:

- Έχει τις N-1 εισόδους από τους υπόλοιπους αισθητήρες
- Έχει μία είσοδο κατωφλίου
- Ο υπολογισμός που κάνει ένας νευρώνας είναι
  - Το δυναμικό υπολογίζεται ως το γνωστό άθροισμα: $x = \sum_{i=0}^{n} w_i s_i$
  - Συνήθως στις ασκήσεις χρησιμοποιείται ως συνάρτηση ενεργοποίησης:
    - Η συνάρτηση προσήμου: $\varphi(\mathrm{x}) = \mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$
    - Αλλά και πιο συχνά η εξής παραλλαγή: $\varphi(\mathrm{x}) = \mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1 & x < 0 \\ y_k, & x = 0 \end{cases}$
      - Όπου y_k η έξοδος του νευρώνα στο προηγούμενο βήμα

Α. Θεωρία

1. Δίκτυα Hopfield

3. Βάρη των Ακμών



Για τα βάρη των ακμών ισχύει ότι

- Οι αντιπαράλληλες ακμές έχουν το ίδιο βάρο $w_{ij}=w_{ji}$
- Θεωρούμε ότι οι ακμές $w_{ii}=0$ (ο νευρώνας δεν τροφοδοτεί τον εαυτό του)

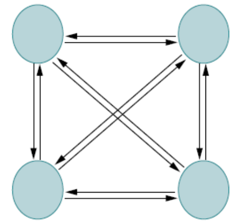
$$W = \begin{bmatrix} 0 & w_{12} & w_{13} & w_{14} \\ w_{21} & 0 & w_{23} & w_{24} \\ w_{31} & w_{32} & 0 & w_{34} \\ w_{41} & w_{42} & w_{43} & 0 \end{bmatrix}$$

- Άρα έχουμε έναν πίνακα βαρών NxN συμμετρικό με τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου να είναι 0.

Α. Θεωρία

1. Δίκτυα Hopfield

4. Τρέχουσα Κατάσταση του Δικτύου



Συνεπώς η πλήρης περιγραφή ενός δικτύου Hopfield σε ένα στιγμιότυπο της εκτέλεσης του αποτελείται από τα εξής:

- Ένα διάνυσμα με τις καταστάσεις (εξόδους) των N αισθητήρων
  - Συνήθως συμβολίζεται με y
  - Άρα ένα δίκτυο Hopfield μπορεί να βρεθεί σε 2^N καταστάσεις.
- Έναν τετραγωνικό NxN πίνακα με τα βάρη των ακμών.
  - Συνήθως συμβολίζεται με W
- Ένα διάνυσμα που ενσωματώνει τα κατώφλια
  - Συνήθως συμβολίζεται με θ

Α. Θεωρία

2. Το Δίκτυο Hopfield ως αποθηκευτικός χώρος

1. Χρήση του Δικτύου για Αποθήκευση Διανυσμάτων

Το δίκτυο Hopfield μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποθηκεύσουμε διανύσματα ίσης διάστασης

- Συγκεκριμένα αν θέλουμε να αποθηκεύσουμε τα Ν-διάστατα διανύσματα $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_K$
- Θα χρειαστούμε ένα δίκτυο Hopfield N αισθητήρων
- Η αποθήκευση γίνεται στα βάρη των ακμών σύμφωνα με τον τύπο:

$$W = X_1 {X_1}^T + X_2 {X_2}^T + \cdots + X_K {X_K}^T - K \cdot I$$

Παράδειγμα:

Θεωρείστε ότι θέλουμε να αποθηκεύσουμε τα ακόλουθα 2 διανύσματα σε ένα ΤΝΔ τύπου Hopfield 3 νευρώνων [-1,1,1], [-1,1,-1].

Το δίκτυο που αποθηκεύει τα διανύσματα πρέπει να έχει 3 αισθητήρες (αφού τα διανύσματα έχουν διάσταση 3). Υπολογίζουμε τον πίνακα βαρών:

$$W = X_1 {X_1}^T + X_2 {X_2}^T - 2I = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Α. Θεωρία

2. Το Δίκτυο Hopfield ως αποθηκευτικός χώρος

2. Ανάκληση των αρχικών Διανυσμάτων από τον πίνακα βαρών

Για να εξάγουμε τα διανύσματα από τον πίνακα βαρών:

- Κάθε ένα από τα Κ διανύσματα θα πρέπει να εξάγεται από τον πίνακα βαρών με την πράξη: $sign(W \cdot X_i - \theta)$ που θα πρέπει να είναι ίσο με το X_i
- Όπου W=ο πίνακας NxN των βαρών
- Όπου X_i=το διάνυσμα που ελέγχουμε
- Όπου θ=το διάνυσμα κατωφλίου

Παράδειγμα 1:

Για τα διανύσματα που αποθηκεύσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα θεωρώντας ότι τα κατώφλια δίνονται από το διάνυσμα: [0,0,0] όταν χρησιμοποιείται η συνήθης συνάρτηση προσήμου

Για το X_1: $sign(W \cdot X_1 - \theta) = sign\left(\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = sign\left(\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

$= sign\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = X_1$. Αποθηκεύετηκε σωστά.

Για το X_2: $sign(W \cdot X_2 - \theta) = sign\left(\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = sign\left(\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$

$= sign\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq X_2$. Δεν αποθηκεύτηκε σωστά.

Α. Θεωρία

2. Το Δίκτυο Hopfield ως αποθηκευτικός χώρος

2. Ανάκληση των αρχικών Διανυσμάτων από τον πίνακα βαρών

Παράδειγμα 2:

Δίνεται ο πίνακας βαρών: $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ και τα διανύσματα $X_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ και $X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Να εξετασεί αν τα διανύσματα έχουν αποθηκευτεί σωστά στον πίνακα βαρών θεωρώντας ότι στην ανάκτηση των διανυσμάτων γίνεται χρήση του επόμενου κανόνα: «Αν η έξοδος ενός νευρώνα είναι 0, τότε θέσε την έξοδο ίση με την αντίστοιχη είσοδο»με μηδενικά κατώφλια.

Λύση:

Για το X_1: $sign(W \cdot X_1 - \theta) = sign\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = sign\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$

$= sign\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = X_1$. Αποθηκεύτηκε σωστά.

Για το X_2: $sign(W \cdot X_2 - \theta) = sign\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = sign\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) =$

$sign\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = X_2$. Αποθηκεύτηκε σωστά.

Συνεπώς τα διανύσματα αποθηκεύονται σωστά.

Α. Θεωρία

2. Το Δίκτυο Hopfield ως αποθηκευτικός χώρος

3. Μέγιστη Χωρητικότητα Διανυσμάτων του Δικτύου Hopfield

Τα διανύσματα που αποθηκεύει ένα δίκτυο Hopfield αναφέρονται και ως **βασικές μνήμες.**

Αποδεικνύονται τα εξής:

- Ο μέγιστος αριθμός βασικών μνημών που μπορούμε να αποθηκεύσουμε χωρίς να έχουμε σφάλμα στην ανάκτηση:

$$M_{max} = \frac{N}{4 \cdot lnN}$$

- Ο μέγιστος αριθμός βασικών μνημών που μπορούμε να αποθηκεύσουμε ώστε περισσότερες από τις μισές βασικές μνήμες να ανακαλούνται χωρίς σφάλμα:

$$M_{max} = \frac{N}{2 \cdot lnN}$$

Παράδειγμα:
Για N=3, μπορούμε να αποθηκεύσουμε μέχρι:

$$M_{max} = \frac{3}{4 \cdot ln3} = 0.682$$

Όσο αυξάνει το N, αυξάνει και η χωρητικότητα.

Σημείωση. Το παραπάνω αποτέλεσμα δείχνει ότι το δίκτυο Hopfield για N=3 δεν εγγυάται την σωστή αποθήκευση ούτε ενός διανύσματος. Στις περισσότερες περιπτώσεις η σωστή αποθήκευση θα είναι εφικτή.

Α. Θεωρία

3. Ανάκτηση Βασικής Μνήμης από Φθαρμένο Διάνυσμα

1. Ανάκτηση Μνήμης

Σε ένα Δίκτυο Hopfield, στο οποίο:
- Έχουμε εκπαιδεύσει το σύνολο διανυσμάτων, ενσωματώνοντας το στον πίνακα βαρών W.
- έχουμε κάνει έλεγχο ότι οι βασικές μνήμες έχουν αποθηκευτεί σωστά

Παρουσιάζουμε ένα άγνωστο διάνυσμα (συνήθως ατελής εκδοχή μιας βασικής μνήμης) που λέγεται και φθαρμένο διάνυσμα, έστω X και βάζουμε το δίκτυο Hopfield να τρέξει με βάση αλγόριθμους ενημέρωσης:
- Τον αλγόριθμο σύγχρονης ενημέρωσης ή
- Τον αλγόριθμο ασύγχρονης ενημέρωσης

Με την εφαρμογή των αλγορίθμων:
- Παρουσιάζουμε το φθαρμένο διάνυσμα X, και υπολογίζουμε την έξοδο Y(0)
- Παρουσιάζουμε το Y(0) και υπολογίζουμε το Y(1)
- Παρουσιάζουμε το Y(1) και υπολογίζουμε το Y(2)
- κ.ο.κ.

Και το δίκτυο Hopfield θα συγκλίνει:
- Στις περισσότερες των περιπτώσεων σε μία από τις βασικές μνήμες
- Αυτό θα συμβαίνει όταν Y(t+1)=Y(t) οπότε λέμε ότι είμαστε σε **κατάσταση ισορροπίας** τότε το Y(t+1)=Y(t) θα είναι μία από τις βασικές μνήμες.

Α. Θεωρία

3. Ανάκτηση Βασικής Μνήμης από Φθαρμένο Διάνυσμα

2. Σύγχρονη Ενημέρωση

Η πρώτη παραλλαγή είναι ο αλγόριθμος σύγχρονης ενημέρωσης:

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΣΥΓΧΡΟΝΗΣ ΕΝΗΜΕΡΩΣΗΣ

Αρχικοποιούμε το φθαρμένο διάνυσμα ως X(0) και έπειτα υπολογίζουμε την έξοδο ως:

t=0

Επανέλαβε

$\Upsilon(\mathrm{t}+1) = sign(W \cdot \mathrm{X}(\mathrm{t}) - \theta)$

Θέσε $\mathrm{X}(\mathrm{t}+1) = \Upsilon(\mathrm{t}+1)$

Θέσε t=t+1

Εως ότου $\Upsilon(\mathrm{t}+1) = \Upsilon(\mathrm{t})$

Σημαντικό: Αποδεικνύεται ότι με τον αλγόριθμο σύγχρονης ενημέρωσης δεν έχουμε εγγύηση σύγκλισης σε κατάσταση ισορροπίας

- Είτε θα συγκλίνει σε κατάσταση ισορροπίας
- Είτε θα εγκλωβιστεί σε ατέρμονα βρόχο μήκους δύο, δηλαδή θα εναλάσσεται συνεχώς μεταξύ δύο καταστάσεων.

Α. Θεωρία

3. Ανάκτηση Βασικής Μνήμης από Φθαρμένο Διάνυσμα

2. Σύγχρονη Ενημέρωση

Παράδειγμα: Να θεωρήσετε ότι σε ένα δίκτυο Hopfield ο πίνακας βαρών W είναι ο παρακάτω. Να ελέγξετε αν προκύπτει κατάσταση ισορροπίας και εφόσον προκύπτει ποια είναι αυτή όταν εισάγεται το διάνυσμα x=[-1,1,1,1,-1] και τα βάρη ανανεώνονται με σύγχρονη ενημέρωση.

$$W = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 & 0.1 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0 & -0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & -0.1 & 0 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0 & 0.1 \\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}$$

ΛΥΣΗ:

Με σύγχρονο τρόπο ενημέρωσης, εισάγοντας το διάνυσμα x(0)=[-1,1,1,1,-1] θα έχουμε το αποτέλεσμα.

$$x(1) = sign(W \times x(0) - \theta) = sign(\begin{bmatrix} 0 & -0.1 & 0.1 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0 & -0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & -0.1 & 0 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0 & 0.1 \\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = sign(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.2 \\ 0 \\ 0.2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Δεν ξέρουμε αν το διάνυσμα που προέκυψε είναι βασική μνήμη. Οπότε συνεχίζουμε έως ότου έχουμε μια κατάσταση ισορροπίας (Σημείωση: όπου το άθροισμα είναι μηδέν, κρατάμε την προηγούμενη τιμή).

Α. Θεωρία

3. Ανάκτηση Βασικής Μνήμης από Φθαρμένο Διάνυσμα

2. Σύγχρονη Ενημέρωση

(…συνέχεια…)

$$x(2) = sign(W \times x(1) - \theta) = sign\left(\begin{bmatrix} 0 & -0.1 & 0.1 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0 & -0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & -0.1 & 0 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0 & 0.1 \\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = sign\left(\begin{bmatrix} -0.4 \\ 0.4 \\ -0.4 \\ 0.4 \\ 0.4 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Βλέπουμε ότι καταλήγουμε στο ίδιο διάνυσμα x(2)=x(1), άρα είμαστε σε κατάσταση ισορροπίας.

Α. Θεωρία

3. Ανάκτηση Βασικής Μνήμης από Φθαρμένο Διάνυσμα

3. Ασύγχρονη Ενημέρωση

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΑΣΥΓΧΡΟΝΗΣ ΕΝΗΜΕΡΩΣΗΣ

Αρχικοποιούμε το φθαρμένο διάνυσμα ως X(0) και έπειτα υπολογίζουμε την έξοδο ως:

Θέσε Y(0)=X(0)

t=0

Επανέλαβε

  Θέσε Y(t+1)=Y(t)

  Επέλεξε τυχαία έναν νευρώνα k

  Υπολόγισε την έξοδο μόνο στον νευρώνα k: $\mathrm{y_k} = sign(W \cdot \mathrm{X(t)} - \theta)$

  Θέσε Y(t+1)=Y(t) με τον νευρώνα k να έχει την έξοδο που υπολογίσαμε

  Θέσε $\mathrm{X(t+1) = Y(t+1)}$

  Θέσε t=t+1

Εως ότου $\mathrm{Y(t+1) = Y(t)}$

Σημείωση:

- Σε κάθε κύκλο ενημερώνεται μόνο μία έξοδος.

Σειρά Εξέτασης Νευρώνων:

- Σε Ν βήματα θα πρέπει να έχει εξεταστεί κάθε νευρώνας ακριβώς μία φορά (Εποχή Εκπαίδευσης)
- Η σειρά εξέτασης μπορεί να είναι τυχαία.
- Συνήθως η εκφώνηση μας ορίζει την σειρά εξέτασης (αλλιώς τους εξετάζουμε με την σειρά)

Σημαντικό: Στον αλγόριθμο ασύγχρονης ενημέρωσης αποδεικνύεται ότι έχουμε πάντα σύγκλιση σε μία από τις βασικές μνήμες.

Α. Θεωρία - 3. Ανάκτηση Βασικής Μνήμης από Φθαρμένο Διάνυσμα - 3. Ασύγχρονη Ενημέρωση

Παράδειγμα: Να θεωρήσετε ότι σε ένα δίκτυο Hopfield ο πίνακας βαρών W είναι ο παρακάτω. Να ελέγξετε αν προκύπτει κατάσταση ισορροπίας και εφόσον προκύπτει ποια είναι αυτή όταν εισάγεται το διάνυσμα x=[-1,1,1,1,-1] και τα βάρη ανανεώνονται με ασύγχρονη ενημέρωση όπου τα βάρη ανανεώνονται με τυχαία σειρά (όχι με τη σειρά). Δείξτε αναλυτικά όλη τη διαδικασία, θεωρώντας ότι και στις δύο περιπτώσεις τα κατώφλια του δικτύου είναι μηδενικά.

$$W=\begin{bmatrix} 0 & -0.1 & 0.1 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0 & -0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & -0.1 & 0 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0 & 0.1 \\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}$$

ΛΥΣΗ: Με ασύγχρονο τρόπο ενημέρωσης των βαρών, εισάγοντας το διάνυσμα x(0)=[-1,1,1,1,-1] θα έχουμε το εξής:

$$sign(W\times x(0)-\theta)=sign(\begin{bmatrix} 0 & -0.1 & 0.1 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0 & -0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & -0.1 & 0 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0 & 0.1 \\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix})=sign(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.2 \\ 0 \\ 0.2 \end{bmatrix})=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Αν οι νευρώνες 1,2 ή 4 ενημερωθούν πρώτα, τότε το άθροισμά τους είναι 0, οπότε δεν θα υπάρχει κάποια αλλαγή στην κατάστασή τους. Όμως για τους νευρώνες 3 και 5 δεν ισχύει αυτό, οπότε εξετάζουμε 2 ξεχωριστές περιπτώσεις.

Περίπτωση 1:
Αν ενημερωθεί πρώτα ο νευρώνας 3, τότε το άθροισμά του θα είναι -0.2, οπότε η κατάσταση θα αλλάξει από 1 (που ήταν) σε -1. Συνεπώς το διάνυσμα θα ενημερωθεί από [-1,1,1,1,-1] σε [-1,1,-1,1,-1] (αφού αλλάζει μόνο ο νευρώνας 3).
Συνεχίζοντας αυτήν την περίπτωση όπου x(1)=[-1,1,-1,1,-1]:

$$sign(W \times x(1) - \theta) = sign(\begin{bmatrix} 0 & -0.1 & 0.1 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0 & -0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & -0.1 & 0 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0 & 0.1 \\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = sign(\begin{bmatrix} -0.2 \\ 0.2 \\ -0.2 \\ 0.2 \\ 0.4 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι όποιος νευρώνας (εκτός του 5) και να ενημερωθεί, δεν θα προκύψει κάποια αλλαγή.

Περίπτωση 1.1:
Αν ενημερωθεί ο νευρώνας 5 θα έχουμε (με x(2)=[-1,1,-1,1,1]):

$$sign(W \times x(2) - \theta) = sign(\begin{bmatrix} 0 & -0.1 & 0.1 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0 & -0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & -0.1 & 0 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0 & 0.1 \\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = sign(\begin{bmatrix} -0.4 \\ 0.4 \\ -0.4 \\ 0.4 \\ 0.4 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Οπότε δεν υπάρχει καμιά περαιτέρω αλλαγή.

Περίπτωση 2:
Αν ενημερωθεί πρώτα ο νευρώνας 5, τότε το άθροισμά του θα είναι 0.2, οπότε η κατάσταση θα αλλάξει από -1 (που ήταν) σε +1. Συνεπώς το διάνυσμα θα ενημερωθεί από [-1,1,1,1,-1] σε [-1,1,1,1,+1] (αφού αλλάζει μόνο ο νευρώνας 5).
Συνεχίζοντας αυτήν την περίπτωση όπου x(1)=[-1,1, 1,1,1]:

$$sign(W \times x(1) - \theta) = sign(\begin{bmatrix} 0 & -0.1 & 0.1 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0 & -0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & -0.1 & 0 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0 & 0.1 \\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = sign(\begin{bmatrix} -0.2 \\ 0.2 \\ -0.4 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Κατόπιν, αν ενημερωθούν οι νευρώνες 1,2,4 ή 5, τότε δεν θα υπάρχει κάποια αλλαγή στην κατάστασή τους. Όμως για τον νευρώνα 3 δεν ισχύει αυτό, οπότε αν ενημερωθεί αυτός θα έχουμε:
Περίπτωση 2.1
Το διάνυσμα θα είναι x(2) = [-1,1,-1,1,1].
Είναι η ίδια κατάσταση με την περίπτωση 1.1. Βλέπουμε ότι όποιος νευρώνας και να ενημερωθεί, δεν θα προκύψει κάποια αλλαγή.
Συνεπώς και με τους δύο τρόπους ενημέρωσης των βαρών (σύγχρονη ή ασύγχρονη), έχουμε την ίδια κατάσταση ισορροπίας που είναι η [-1,1,-1,1,1]. Απλά με την σύγχρονη ενημέρωση φτάσαμε πολύ γρήγορα στην κατάσταση ισορροπίας.

Β. Ασκήσεις

Εφαρμογή 1

Έστω ένα ΤΝΔ τύπου Hopfield, που τα κατώφλια των νευρώνων του έχουν τιμή μηδέν και τα βάρη του είναι όπως τα παρουσιάζει ο παρακάτω πίνακας:

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & \alpha & 1 \\ 1 & \varepsilon & -1 & \beta & \gamma \\ -1 & -1 & \zeta & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & \eta & \delta \\ 1 & -3 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(α) Να υπολογιστούν οι άγνωστοι α, β, γ, δ, ε, και ζ. Πόσους νευρώνες έχει το συγκεκριμένο ΤΝΔ Hopfield;

(β) Αν $X_1 = (1,1,1,1,-1)^T$ και $X_2 = (-1,1,1,1,-1)^T$ είναι βασικές μνήμες του παραπάνω ΤΝΔ Hopfield, να εξεταστεί αν αποθηκεύονται σωστά.

Β. Ασκήσεις
Εφαρμογή 2

Έστω ένα εκπαιδευμένο Τεχνητό Νευρωνικό Δίκτυο Hopfield, με πίνακα βαρών W:

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & 1 \\ w_{21} & w_{22} & 1 \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{pmatrix}.$$

(α) Πόσους νευρώνες εισόδου έχει το συγκεκριμένο δίκτυο Hopfield;

(β) Να υπολογίσετε τον μέγιστο θεωρητικό αριθμό βασικών μνημών που μπορεί να αποθηκευτούν στο συγκεκριμένο δίκτυο Hopfield, ώστε να μπορούν να ανακληθούν χωρίς σφάλμα.

(γ) Να υπολογίσετε τον πίνακα W, αν γνωρίζετε ότι η βασική μνήμη $X_1 = (1,1,1)^T$ αποθηκεύεται σωστά στο δίκτυο Hopfield (με κατώφλια ίσα με το μηδέν) και ότι για την ανάκτηση της X_1 έγινε χρήση του επόμενου κανόνα: «στην περίπτωση που η έξοδος ενός νευρώνα Hopfield είναι ίση με μηδέν, τότε θέστε την έξοδο ίση με την αντίστοιχη είσοδο».

(δ) Δοκιμάστε αν έχουν αποθηκευτεί σωστά οι βασικές μνήμες $X_2 = (-1,1,-1)^T$ και $X_3 = (-1,1,1)^T$.