ΠΛΗ31

ΕΝΟΤΗΤΑ 2: ΓΝΩΣΗ

Μάθημα 2.2:
Κατηγορηματική Λογική – Νόμοι Κ.Λ. και Κανονικές Μορφές

Δημήτρης Ψούνης

Περιεχόμενα Μαθήματος

Α. Θεωρία
1. Νόμοι Κατηγορηματικής Λογικής

- Οι νόμοι της Κατηγορηματικής Λογικής είναι οι ακόλουθοι:

	Όνομα Νόμου	Διατύπωση	Σχόλια
1	Διπλή Άρνηση	$\sim(\sim A) \equiv A$	Διπλή άρνηση απαλείφεται
2	Αντικατάσταση	$A \Rightarrow B \equiv \sim A \vee B$	Συνεπαγωγή γίνεται OR
3	De Morgan	$\sim(A \vee B) \equiv \sim A \wedge \sim B$ $\sim(A \wedge B) \equiv \sim A \vee \sim B$	OR γινεται AND και αντίστροφα
4	Επιμερισμού	$A \wedge (B \vee \Gamma) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge \Gamma)$ $A \vee (B \wedge \Gamma) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee \Gamma)$	
5	Αντιμετάθεσης	$A \wedge B \equiv B \wedge A$ $A \vee B \equiv B \vee A$	
6	Προσεταιρισμού	$A \wedge (B \wedge \Gamma) \equiv (A \wedge B) \wedge \Gamma$ $A \vee (B \vee \Gamma) \equiv (A \vee B) \vee \Gamma$	
7	Αναίρεσης ή αντιθετικότητας	$A \Rightarrow B \equiv \sim B \Rightarrow \sim A$	
8	Ισοδυναμίας με ποσοδείκτες	$\sim \exists x A \equiv \forall x \sim A$ $\sim \forall x A \equiv \exists x \sim A$	Άρνηση και Ποσοδείκτες
		$\exists x\{A \vee B\} \equiv \exists x A \vee \exists x B$ $\forall x\{A \wedge B\} \equiv \forall x A \wedge \forall x B$	

Α. Θεωρία

1. Νόμοι Κατηγορηματικής Λογικής

1.Ταυτολογία-Αντίφαση

- Οι νόμοι της κατηγορηματικής λογικής είναι ισοδυναμίες ($\varphi \equiv \psi$).
  - Αυτό σημαίνει ότι αν εφαρμόσουμε έναν νόμο της κατηγορηματικής λογικής προκειμένου να τροποποιήσουμε την μορφή μιας πρότασης, προκύπτει ένας νέος τύπος που έχει την ίδια τιμή αλήθειας με την αρχική πρόταση.

Παράδειγμα: Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

$\forall x \exists y [likes(x,y)]$ (εφαρμόζω νόμο διπλής άρνησης)

$\equiv \neg\neg\forall x \exists y [likes(x,y)]$ (εφαρμόζω νόμο άρνησης ποσοδείκτη)

$\equiv \neg\exists x \neg\exists y [likes(x,y)]$ (εφαρμόζω νόμο άρνησης ποσοδείκτη)

$\equiv \neg\exists x \forall y \neg[likes(x,y)]$

- Ορίζουμε επίσης:

Ταυτολογία είναι οποιαδήποτε παράσταση κατηγορηματικής λογικής είναι πάντα αληθής

Αντίφαση είναι οποιαδήποτε παράσταση είναι πάντα ψευδής.

Α. Θεωρία

1. Νόμοι Κατηγορηματικής Λογικής

2.Μετονομασία Μεταβλητής

- Έχουμε το δικαίωμα να μετονομάσουμε την μεταβλητή ενός ποσοδείκτη, αρκεί να μετονομάσουμε και όλες τις εμφανίσεις της στο πεδίο εφαρμογής της μεταβλητής.
  - Για παράδειγμα αν έχουμε την παράσταση:

$$\forall x\left[\sim T(x) \lor \left(\exists y\left(P(x,y) \land \sim R(y)\right)\right)\right]$$

  - Μπορεί να γραφεί ως:

$$\forall z\left[\sim T(z) \lor \left(\exists y\left(P(z,y) \land \sim R(y)\right)\right)\right]$$

  - Και περαιτέρω:

$$\forall z\left[\sim T(z) \lor \left(\exists w\left(P(z,w) \land \sim R(w)\right)\right)\right]$$

Α. Θεωρία

2. Κανονικές Μορφές Προτάσεων

Ορισμός:

- Οι **κανονικές μορφές** προτάσεων είναι τυποποιημένες μορφές στις οποίες μπορεί να μετατραπεί (με ισοδύναμο νόημα) κάθε καλοσχηματισμένη πρόταση κατηγορηματικής λογικής (wff).

- Θα μάθουμε 3 κανονικές μορφές προτάσεων:
  - Την Συζευκτική Κανονική Μορφή (ΣΚΜ)
  - Την Διαζευκτική Κανονική Μορφή (ΔΚΜ)
  - Την clausal form (CF)
- Και θα δούμε τον τρόπο για να μετατρέπουμε οποιονδήποτε τύπο κατηγορηματικής λογικής σε συζευκτική κανονική μορφή.

Α. Θεωρία

2. Κανονικές Μορφές Προτάσεων

1. Συζευκτική Κανονική Μορφή

Ορισμός:
Ένας τύπος είναι σε **Συζευκτική Κανονική Μορφή (ΣΚΜ),** αν είναι της μορφής:

$$A_1 \land A_2 \land \cdots \land A_n$$

όπου κάθε $\boldsymbol{A_i}$ είναι της μορφής:

$$B_1 \lor B_2 \lor \cdots \lor B_n$$

Και κάθε $\mathbf{B}_j$ είναι **κυριολέκτημα** (literal) δηλαδή ατομική πρόταση ή άρνηση ατομικής πρότασης

Παραδείγματα:

Π.χ. οι προτάσεις:

$$(man(tom) \lor parent(tom, pam)) \land (man(bob) \lor \sim parent(pam, bob))$$

και

$$(Q(a) \lor T(c) \lor \sim T(d)) \land (T(d) \lor \sim T(d) \lor Q(d))$$

είναι σε Συζευκτική Κανονική Μορφή (ΣΚΜ)

Α. Θεωρία

2. Κανονικές Μορφές Προτάσεων

2. Διαζευκτική Κανονική Μορφή

Ορισμός:
Ένας τύπος είναι σε **Διαζευκτική Κανονική Μορφή (ΔΚΜ),** αν είναι της μορφής:

$$A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n$$

όπου κάθε $\boldsymbol{A_i}$ είναι της μορφής:

$$B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_n$$

Και κάθε $\mathbf{B}_j$ είναι κυριολέκτημα (literal) δηλαδή ατομική πρόταση ή άρνηση ατομικής πρότασης

Παραδείγματα:

Π.χ. οι προτάσεις:

$$(man(tom) \wedge parent(tom, pam)) \vee (man(bob) \wedge \sim parent(pam, bob))$$

και

$$(Q(a) \wedge T(c) \wedge \sim T(d)) \vee (T(d) \wedge \sim T(d) \wedge Q(d))$$

είναι σε Διαζευκτική Κανονική Μορφή (ΔΚΜ)

Α. Θεωρία

2. Κανονικές Μορφές Προτάσεων

3. Clausal Form

Ορισμός:

Ένας τύπος είναι σε **clausal form** αν είναι της μορφής:

$$\boldsymbol{B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_m \Rightarrow A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n}$$

όπου τα Β (καλούνται υποθέσεις) και τα Α (καλούνται συμπεράσματα) είναι ατομικές προτάσεις (δηλαδή κατηγορήματα χωρίς αρνήσεις)

Ειδικές Περιπτώσεις:

Αν n=0: $\boldsymbol{B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_m \Rightarrow}$

(υποθέσεις χωρίς συμπέρασμα) Λέμε ότι η πρόταση είναι **ασυνεπής**

Αν m=0: $\boldsymbol{\Rightarrow A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n}$

(συμπεράσματα που ισχύουν ανεξάρτητα από υποθέσεις) Λέμε ότι η πρόταση είναι πάντα αληθής δηλαδή **ταυτολογία**

Αν n=m=0: ⇒ που θα συμβολίζεται και με □ και είναι πάντα αναληθής, δηλαδή **αντίφαση**

Παρατήρηση:

Η C.F. είναι ειδική περίπτωση της ΣΚΜ αφού π.χ.:

$$\boldsymbol{B_1 \wedge B_2 \Rightarrow A_1 \vee A_2 \equiv \sim(B_1 \wedge B_2) \vee A_1 \vee A_2 \equiv (\sim B_1 \vee \sim B_2) \vee A_1 \vee A_2 \equiv \sim B_1 \vee \sim B_2 \vee A_1 \vee A_2}$$

Α. Θεωρία

2. Κανονικές Μορφές Προτάσεων

4. Πρόταση Horn

Ορισμός:
- Μία **Πρόταση Horn** είναι ένας τύπος σε clausal form με το **πολύ ένα συμπέρασμα**.

Παρατήρηση:
- Οι προτάσεις Horn παίζουν σημαντικό ρόλο τόσο στην Prolog όσο και γενικότερα στον αυτοματοποιημένο συμπερασμό.
- **Αποτυπώνουν μαθηματικά την έννοια του κανόνα.**

Δύο Σημαντικές Ειδικές Περιπτώσεις:
- Περίπτωση 1: Ακριβώς ένα θετικό κατηγόρημα με παρουσία υποθέσεων:
  - Μορφή: $\boldsymbol{B_1} \land \boldsymbol{B_2} \land \cdots \land \boldsymbol{B_m} \Rightarrow \mathbf{A}$
  - Αποτυπώνει την συλλογιστική: «**Αν** ισχύουν τα $B_1, B_2, \dots, B_m$ **τότε** ισχύει το Α»
  - Ισοδύναμα υπό τις υποθέσεις $B_1, B_2, \dots, B_m$ έπεται το συμπέρασμα Α.
  - Μία τέτοια πρόταση καλείται και **κανόνας**
- Περίπτωση 2: Ακριβώς ένα θετικό κατηγόρημα χωρίς υποθέσεις:
  - Μορφή: $\Rightarrow \mathbf{A}$
  - Αποτυπώνει την συλλογιστική: «Ισχύει το Α»
  - Ισοδύναμα ισχύει το Α άνευ υποθέσεων (ισχύει αναντίρρητα).
  - Μία τέτοια πρόταση καλείται και **γεγονός**

Τα δύο αυτά στοιχεία αποτελούν τα θεμέλια της γλώσσα Prolog.

Α. Θεωρία

3. Μετατροπή wff σε ΣΚΜ

Ορισμός:

- Ένας καλοσχηματισμένος τύπος ΚΛ (wff) μπορεί να μετατραπεί σε Συζευκτική Κανονική Μορφή μέσω ενός αλγορίθμου που αποτελείται από τα εξής βήματα:
    1. Εξάλειψη των Συνεπαγωγών
    2. Αρνήσεις μόνο στις Ατομικές Προτάσεις
    3. Εξάλειψη των Υπαρξιακών Ποσοδεικτών
    4. Επονόμαση Μεταβλητών Καθολικών Ποσοδεικτών
    5. Μετακίνηση των Καθολικών Ποσοδεικτών στα αριστερά
    6. Μετακίνηση των διαζεύξεων στο επίπεδο των Κυριολεκτημάτων
    7. Απάλειψη του Καθολικού Ποσοδείκτη και του AND

Α. Θεωρία

3. Μετατροπή wff σε ΣΚΜ

1. Εξάλειψη των Συνεπαγωγών

1ο βήμα: Εξάλειψη των συνεπαγωγών

Στο 1ο βήμα διώχνουμε τυχόν συνεπαγωγές που υπάρχουν εφαρμόζοντας τον νόμο μετατροπής της συνεπαγωγής σε OR:

$$\boldsymbol{A} \Rightarrow \mathbf{B} \equiv \sim\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}$$

Παράδειγμα:
Να μετατραπεί σε ΚΣΜ η πρόταση:

$$\forall x\left[\underline{T(x)} \Rightarrow \underline{\exists y\big(D(x,y) \wedge \sim P(y)\big) \wedge \sim\exists y(D(x,y) \wedge D(y,x)) \wedge \forall y(\sim T(y) \Rightarrow \sim E(x,y))}\right]$$

Λύση:
Μετατρέπουμε την «αριστερή» συνεπαγωγή σε OR:

$$\forall x\left[\sim T(x) \vee \left[\exists y\big(D(x,y) \wedge \sim P(y)\big) \wedge \sim\exists y(D(x,y) \wedge D(y,x)) \wedge \forall y(\underline{\sim T(y)} \Rightarrow \underline{\sim E(x,y))}\right]\right]$$

Μετατρέπουμε την «δεξιά» συνεπαγωγή σε OR:

$$\forall x\left[\sim T(x) \vee \left[\exists y\big(D(x,y) \wedge \sim P(y)\big) \wedge \sim\exists y(D(x,y) \wedge D(y,x)) \wedge \forall y(T(y) \vee \sim E(x,y))\right]\right]$$

Α. Θεωρία

3. Μετατροπή wff σε ΣΚΜ

2. Εξάλειψη των Συνεπαγωγών

2ο βήμα: Αρνήσεις μόνο στις ατομικές προτάσεις

Στο 2ο βήμα μεταφέρουμε τις αρνήσεις που υπάρχουν στο επίπεδο των ατομικών προτάσεων. Θα φανούν χρήσιμοι οι νόμοι ισοδυναμίας με ποσοδείκτες και οι νόμοι De Morgan:

$$\sim\forall x[\dots] \equiv \exists x\sim[\dots] \qquad \sim(\mathrm{A}\wedge\mathrm{B}) \equiv (\sim\mathrm{A}\vee\sim\mathrm{B})$$
$$\sim\exists x[\dots] \equiv \forall x\sim[\dots] \qquad \sim(\mathrm{A}\vee\mathrm{B}) \equiv (\sim\mathrm{A}\wedge\sim\mathrm{B})$$

(…συνέχεια…)

$$\forall x\left[\sim T(x)\vee\left[\exists y\big(D(x,y)\wedge\sim P(y)\big)\wedge\underline{\sim\exists y(D(x,y)\wedge D(y,x))}\wedge\forall y(T(y)\vee\sim E(x,y))\right]\right]$$

Εφαρμόζω νόμο ισοδυναμίας με ποσοδείκτες:

$$\forall x\left[\sim T(x)\vee\left[\exists y\big(D(x,y)\wedge\sim P(y)\big)\wedge\forall y\underline{\sim(D(x,y)\wedge D(y,x))}\wedge\forall y(T(y)\vee\sim E(x,y))\right]\right]$$

Εφαρμόζω νόμο De Morgan:

$$\forall x\left[\sim T(x)\vee\left[\exists y\big(D(x,y)\wedge\sim P(y)\big)\wedge\forall y(\sim D(x,y)\vee\sim D(y,x))\wedge\forall y(T(y)\vee\sim E(x,y))\right]\right]$$

Α. Θεωρία

3. Μετατροπή wff σε ΣΚΜ

3. Εξάλειψη των Υπαρξιακών Ποσοδεικτών (Σκολεμοποίηση)

3ο βήμα: Εξάλειψη Υπαρξιακών Ποσοδεικτών (Σκολεμοποίηση)

Αν ο υπαρξιακός ποσοδείκτης δεν είναι στο πεδίο εφαρμογής κάποιου καθολικού ποσοδείκτη, τότε αντικαθιστούμε την μεταβλητή του υπαρξιακού ποσοδείκτη με κάποια σταθερά

Παραδείγματα:

- $\exists x\big(Q(x)\big) \equiv Q(A)$
- $\exists x \exists y\big(Q(x,y)\big) \equiv Q(A,B)$
- $\exists x \forall y\big(Q(x,y)\big) \equiv \forall y\big(Q(A,y)\big)$

Αν ο υπαρξιακός ποσοδείκτης είναι στο πεδίο εφαρμογής κάποιου καθολικού ποσοδείκτη, τότε αντικαθιστούμε μεταβλητή με μία συνάρτηση εφαρμοζόμενη στην μεταβλητή του καθολικού ποσοδείκτη

Παραδείγματα:

- $\forall x \exists y\big(parent(y,x)\big) \equiv \forall x\big(parent(\gamma o \nu \varepsilon \alpha \varsigma(x),x)\big)$
- $\forall x \exists y\big(Q(y,x)\big) \equiv \forall x\big(Q(f(x),x)\big)$
- $\forall x \forall z \exists y\big(Q(y,x)\big) \equiv \forall x \forall z\big(Q(f(x,z),x)\big)$
- $\forall x \forall y \exists z \forall w \exists k\big(Q(z,k,x)\big) \equiv \forall x \forall y \forall w \exists k\big(Q(f(x,y),k,x)\big) \equiv \forall x \forall y \forall w\big(Q(f(x,y),g(x,y,w),x)\big)$

Α. Θεωρία

3. Μετατροπή wff σε ΣΚΜ

3. Εξάλειψη των Υπαρξιακών Ποσοδεικτών (Σκολεμοποίηση)

(…συνέχεια…)

$$\forall x\left[\sim T(x) \vee \left[\exists y\big(D(x,y) \wedge \sim P(y)\big) \wedge \forall y(\sim D(x,y) \vee \sim D(y,x)) \wedge \forall y(T(y) \vee \sim E(x,y))\right]\right]$$

Εξαλείφουμε τους υπαρξιακούς ποσοδείκτες:

$$\forall x\left[\sim T(x) \vee \left[\big(D(x,f(x)) \wedge \sim P(f(x))\big) \wedge \forall y(\sim D(x,y) \vee \sim D(y,x)) \wedge \forall y(T(y) \vee \sim E(x,y))\right]\right]$$

Α. Θεωρία

3. Μετατροπή wff σε ΣΚΜ

4. Επονόμαση Μεταβλητών Καθολικών Ποσοδεικτών

4ο βήμα: Επονόμαση Μεταβλητών Καθολικών Ποσοδεικτών

Στο 4ο βήμα αλλάζουμε τα ονόματα των μεταβλητών των καθολικών ποσοδεικτών, έτσι ώστε κάθε καθολικός ποσοδείκτης να έχει ξεχωριστό όνομα μεταβλητής

Προσοχή! Αλλάζουμε αντίστοιχα και τα ονόματα των εμφανίσεων της μεταβλητής στο πεδίο εφαρμογής του ποσοδείκτη

(…συνέχεια…)

$$\forall x\left[\sim T(x) \vee \left[\left(D(x,f(x)) \wedge \sim P(f(x))\right) \wedge \forall y(\sim D(x,y) \vee \sim D(y,x)) \wedge \underline{\forall y(T(y) \vee \sim E(x,y))}\right]\right]$$

Μετονομασία στην 2η εμφάνιση της y σε ποσοδείκτη:

$$\forall x\left[\sim T(x) \vee \left[\left(D(x,f(x)) \wedge \sim P(f(x))\right) \wedge \forall y(\sim D(x,y) \vee \sim D(y,x)) \wedge \forall z(T(z) \vee \sim E(x,z))\right]\right]$$

Α. Θεωρία

3. Μετατροπή wff σε ΣΚΜ

5. Μετακίνηση των καθολικών ποσοδεικτών αριστερά

5ο βήμα: Μετακίνηση των καθολικών ποσοδεικτών αριστερά

Στο 5ο βήμα μετακινούμε τους καθολικούς ποσοδείκτες αριστερά

Επειδή κάθε όνομα μεταβλητής έχει αλλάξει, χρησιμοποιώντας νόμους Κ.Λ. έχουμε δικαίωμα να εξάγουμε αμέσως τους καθολικούς ποσοδείκτες μπροστά από όλη την πρόταση.

(…συνέχεια…)

$$\forall x\left[\sim T(x) \lor \left[\left(D(x,f(x)) \land \sim P(f(x))\right) \land \forall y(\sim D(x,y) \lor \sim D(y,x)) \land \forall z(T(z) \lor \sim E(x,z))\right]\right]$$

Μετακίνηση των καθολικών ποσοδεικτών αριστερά:

$$\forall x \forall y \forall z\left[\sim T(x) \lor \left[\left(D(x,f(x)) \land \sim P(f(x))\right) \land (\sim D(x,y) \lor \sim D(y,x)) \land (T(z) \lor \sim E(x,z))\right]\right]$$

Α. Θεωρία

3. Μετατροπή wff σε ΣΚΜ

6. Μετακίνηση των διαζεύξεων στο επίπεδο των κυριολεκτημάτων

6ο βήμα: Μετακίνηση των διαζεύξεων στο επίπεδο των κυριολεκτημάτων

Στο 6ο βήμα μετακινούμε τα OR ώστε να συνδέουν μόνο κυριολεκτήματα (ατομικές προτάσεις ή αρνήσεις ατομικών προτάσεων)

Χρήσιμος θα φανεί ο νόμος επιμερισμού:

$$\mathrm{A} \vee (\mathrm{B} \wedge \Gamma) = (\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \wedge (\mathrm{A} \vee \Gamma)$$

Καθώς και η γενίκευση του:

$$\mathrm{A} \vee (\mathrm{B} \wedge \Gamma \wedge \Delta) = (\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \wedge (\mathrm{A} \vee \Gamma) \wedge (\mathrm{A} \vee \Delta)$$

(…συνέχεια…)

$$\forall x \forall y \forall z \left[\underbrace{\sim T(x)}_{\mathrm{A}} \vee \Big[\underbrace{\big(D(x,f(x)) \wedge \sim P(f(x))\big)}_{\mathrm{B}} \wedge \underbrace{(\sim D(x,y) \vee \sim D(y,x))}_{\Gamma} \wedge \underbrace{(T(z) \vee \sim E(x,z))}_{\Delta}\Big]\right]$$

$$\mathrm{A} \quad \vee (\quad \mathrm{B} \quad \wedge \quad \Gamma \quad \wedge \quad \Delta \quad)$$

Εφαρμόζω νόμο επιμερισμού:

$$\forall x \forall y \forall z \Big[\big[\underbrace{\sim T(x)}_{\mathrm{A}} \vee \big(\underbrace{D(x,f(x))}_{\mathrm{B}} \wedge \underbrace{\sim P(f(x))}_{\Gamma}\big)\big] \wedge [\sim T(x) \vee (\sim D(x,y) \vee \sim D(y,x))] \wedge [\sim T(x) \vee (T(z) \vee \sim E(x,z))]\Big]$$

$$\mathrm{A} \quad \vee (\quad \mathrm{B} \quad \wedge \quad \Gamma \quad)$$

Εφαρμόζω νόμο επιμερισμού:

$$\forall x \forall y \forall z \Big[\Big[\big(\sim T(x) \vee D(x,f(x))\big) \wedge \big(\sim T(x) \vee \sim P(f(x))\big)\Big] \wedge [\sim T(x) \vee (\sim D(x,y) \vee \sim D(y,x))] \wedge [\sim T(x) \vee (T(z) \vee \sim E(x,z))]\Big]$$

Και με βάση το νόμο του προσεταιρισμού έχουμε τελικά:

$$\forall x \forall y \forall z \Big[\big[\sim T(x) \vee D(x,f(x))\big] \wedge \big[\sim T(x) \vee \sim P(f(x))\big] \wedge [\sim T(x) \vee \sim D(x,y) \vee \sim D(y,x)] \wedge [\sim T(x) \vee T(z) \vee \sim E(x,z)]\Big]$$

Α. Θεωρία

3. Μετατροπή wff σε ΣΚΜ

7. Απάλειψη του καθολικού ποσοδείκτη και του AND

7ο βήμα: Απάλειψη του καθολικού ποσοδείκτη και του AND
Στο 7ο βήμα διώχνουμε τους καθολικούς ποσοδείκτες και σπάμε τις προτάσεις με βαση τους συνδέσμους AND

Στις τελικές προτάσεις δεν πρέπει να έχουμε σε 2 προτάσεις τα ίδια ονόματα μεταβλητών (Αλλάζουμε τα ονόματα σε προτάσεις που έχουν τα ίδια ονόματα μεταβλητών).

(…συνέχεια…)

$$\forall x \forall y \forall z \left[[\sim T(x) \vee D(x, f(x))] \wedge [\sim T(x) \vee \sim P(f(x))] \wedge [\sim T(x) \vee \sim D(x,y) \vee \sim D(y,x)] \wedge [\sim T(x) \vee T(z) \vee \sim E(x,z)] \right]$$

Απάλειψη ποσοδεικτών και AND. Μετονομασία μεταβλητών που έχουν το ίδιο όνομα σε προτάσεις:

1. $\sim T(x_1) \vee D(x_1, f(x_1))$
2. $\sim T(x_2) \vee \sim P(f(x_2))$
3. $\sim T(x_3) \vee \sim D(x_3, y) \vee \sim D(y, x_3)$
4. $\sim T(x_4) \vee T(z) \vee \sim E(x_4, z)$

Β. Μεθοδολογία

1. Παρουσίαση Απάντησης ΣΚΜ

1. Μεγάλη Άσκηση Σ.Κ.Μ

Τυπική Απάντηση ΣΚΜ

- Στην περίπτωση που η άσκηση απαιτεί πολλά βήματα η μορφή της απάντησης έγκειται στην απαρίθμηση των βημάτων του αλγορίθμου

Να βρεθεί η Σ.Κ.Μ του τύπου: $\forall x\big[T(x) \Rightarrow \big(\exists y(\mathrm{P}(x,y) \wedge {\sim}Q(x)) \wedge \forall y({\sim}\mathrm{Q}(y) \Rightarrow R(x,y))\big)\big]$

Απάντηση:

Βήμα 1: Εξάλειψη των συνεπαγωγών

$\forall x\big[T(x) \Rightarrow \big(\exists y(\mathrm{P}(x,y) \wedge {\sim}Q(x)) \wedge \forall y({\sim}\mathrm{Q}(y) \Rightarrow R(x,y))\big)\big]$ (εξάλειψη συνεπαγωγών)

$= \forall x\big[{\sim}T(x) \vee \big(\exists y(\mathrm{P}(x,y) \wedge {\sim}Q(x)) \wedge \forall y({\sim}{\sim}\mathrm{Q}(y) \vee R(x,y))\big)\big]$ (εφ.ν.διπλής άρνησης)

$= \forall x\big[{\sim}T(x) \vee \big(\exists y(\mathrm{P}(x,y) \wedge {\sim}Q(x)) \wedge \forall y(\mathrm{Q}(y) \vee R(x,y))\big)\big]$

Βήμα 2: Αρνήσεις μόνο στις ατομικές προτάσεις

Δεν Απαιτείται

Βήμα 3: Εξάλειψη Υπαρξιακών Ποσοδεικτών

$= \forall x\big[{\sim}T(x) \vee \big((\mathrm{P}(x,f(x)) \wedge {\sim}Q(x)) \wedge \forall y(\mathrm{Q}(y) \vee R(x,y))\big)\big]$

Βήμα 4: Επονόμαση Μεταβλητών Καθολικών Ποσοδεικτών

Δεν απαιτείται

Βήμα 5: Μετακίνηση των ποσοδεικτών αριστερά

$\forall x \forall y\big[{\sim}T(x) \vee \big((\mathrm{P}(x,f(x)) \wedge {\sim}Q(x)) \wedge (\mathrm{Q}(y) \vee R(x,y))\big)\big]$

Β. Μεθοδολογία

1. Παρουσίαση Απάντησης ΣΚΜ

1. Μεγάλη Άσκηση Σ.Κ.Μ

Απάντηση (συνέχεια):

Βήμα 6: Μετακίνηση των διαζεύξεων στο επίπεδο των κυριολεκτημάτων

$$\forall x \forall y \left[\sim T(x) \vee \left(\left(P(x, f(x)) \wedge \sim Q(x) \right) \wedge \left(Q(y) \vee R(x, y) \right) \right) \right]$$ (νόμος επιμερισμού)

$$= \forall x \forall y \left[\left(\sim T(x) \vee \left(P(x, f(x)) \wedge \sim Q(x) \right) \right) \wedge \left(\sim T(x) \vee \left(Q(y) \vee R(x, y) \right) \right) \right]$$ (νόμος επιμερισμού)

$$= \forall x \forall y \left[\left(\left(\sim T(x) \vee P(x, f(x)) \right) \wedge \left(\sim T(x) \vee \sim Q(x) \right) \right) \wedge \left(\sim T(x) \vee Q(y) \vee R(x, y) \right) \right]$$

$$= \forall x \forall y \left[\left(\sim T(x) \vee P(x, f(x)) \right) \wedge \left(\sim T(x) \vee \sim Q(x) \right) \wedge \left(\sim T(x) \vee Q(y) \vee R(x, y) \right) \right]$$

Βήμα 7: Απάλειψη του καθολικού ποσοδείκτηκαι του AND

1. $\sim T(x_1) \vee P(x_1, f(x_1))$
2. $\sim T(x_2) \vee \sim Q(x_2)$
3. $\sim T(x_3) \vee Q(y_1) \vee R(x_3, y_1)$

Β. Μεθοδολογία

1. Παρουσίαση Απάντησης ΣΚΜ

2. Προτάσεις Horn (και μικρές παραλλαγές)

Μορφή Απάντησης για παραλλαγές πρότασης Horn

- Σε πολλές ασκήσεις θα προκύπτουν προτάσεις που θα είναι προτάσεις Horn (ή μικρές παραλλαγές τους). Στην περίπτωση αυτή, μπορούμε να εξάγουμε άμεσα τη Σ.Κ.Μ. Χρησιμοποιώντας άμεσα τον ακόλουθο εμπειρικό κανόνα:

$\forall x \forall y \forall z[\varphi \rightarrow \psi]$ — $\sim\varphi \vee \psi$

Κυριολεκτήματα

ΣΚΜ

$\forall x \forall y \forall z[\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \rightarrow \varphi]$ — $\sim\varphi_1 \vee \sim\varphi_2 \vee \sim\varphi_3 \vee \varphi$

Απάντηση:

Παράδειγμα 1: $\forall x[T(x) \Rightarrow R(x)]$

Έχει Σ.Κ.Μ.: $\sim T(x) \vee R(x)$

Παράδειγμα 2: $\forall x \forall y[Q(x) \wedge R(y) \ \Rightarrow P(x,y)]$

Έχει Σ.Κ.Μ.: $\sim Q(x) \vee \sim R(y) \vee P(x,y)$

Γ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 1

Δίνεται το παρακάτω σύνολο λογικών προτάσεων:

$(Q \wedge T) \Rightarrow R$, $(Q \vee P) \Rightarrow R$, $S \Rightarrow (T \vee P)$, Q, S, $\neg T$

Μετατρέψτε τις προτάσεις σε ΣΚΜ.

Γ. Ασκήσεις

Εφαρμογή 2

Να βρεθεί η Σ.Κ.Μ. του παρακάτω τύπου:

$$\forall t \neg \exists u \big(R(t,u) \wedge \neg \forall v \big(R(t,v) \Rightarrow \exists w \big(R(v,w) \wedge R(u,w)\big)\big)\big)$$

Γ. Ασκήσεις
Εφαρμογή 3

Δίνονται οι παρακάτω προτάσεις σε φυσική γλώσσα:
$Π_1$: Η Μαρία είναι γιατρός
$Π_2$: Οι γιατροί πηγαίνουν στην δουλειά με το αυτοκίνητο
$Π_3$: Ο Γιάννης πηγαίνει στην δουλειά με το λεωφορείο
$Π_4$: Ο Μιχάλης είναι ζωγράφος
$Π_5$: Ο Γιάννης συμπαθεί όποιον πηγαίνει στη δουλειά με το αυτοκίνητο
$Π_6$: Η Μαρία συμπαθεί όποιον την συμπαθεί
(α) Να διατυπωθούν οι παραπάνω προτάσεις φυσικής γλώσσας σε προτάσεις Κατηγορηματικής Λογικής.
Σημείωση: Χρησιμοποιείστε τα κατηγορήματα γιατρός/1,πηγαίνει_στη_δουλειά/2, ζωγράφος/1 και συμπαθεί/2

(β) Να μετατραπούν οι παραπάνω προτάσεις Κατηγορηματικής Λογικής σε ΣΚΜ