ΠΛΗ10

ΕΝΟΤΗΤΑ 1: Εισαγωγή στους Η/Υ

Μάθημα 1.2:
Πράξεις στα Συστήματα Αρίθμησης

Δημήτρης Ψούνης

www.psounis.gr

Περιεχόμενα Μαθήματος

Α. Θεωρία
1. Πρόσθεση στα Συστήματα Αρίθμησης
1. Πρόσθεση στο Δεκαδικό Σύστημα Αρίθμησης

- Λίγα λόγια για την **πρόσθεση** στο **δεκαδικό** σύστημα αρίθμησης
  - Οι δύο αριθμοί που προσθέτουμε καλούνται **προσθετέοι**
  - Το αποτέλεσμα είναι το **άθροισμα** των αριθμών

Μεθοδολογία (από το δημοτικό):
- Γράφουμε τους αριθμούς τον ένα κάτω απ' τον άλλο με ευθυγράμμιση στην ίδια τάξη ψηφίων (υποδιαστολή).
- Κάνουμε την πρόσθεση από δεξιά προς τα αριστερά.
- Σε περίπτωση που το άθροισμα είναι μεγαλύτερο του 10 μεταφέρουμε κρατούμενο 1 μονάδα (**συμβολίζει μια 10-άδα**) στην αμέσως αριστερή στήλη και καταγράφουμε το αποτέλεσμα.

Παράδειγμα: $(5649)_{10} + (184)_{10}$

```
      1 1    ← Κρατούμενο
     5649    ← 1ος προσθετέος
(+)   184    ← 2ος προσθετέος
    -----
     5833    ← Άθροισμα
```

Άρα: $(5649)_{10} + (184)_{10} = (5833)_{10}$

Α. Θεωρία
1. Πρόσθεση στα Συστήματα Αρίθμησης
2. Πρόσθεση στο Δυαδικό Σύστημα Αρίθμησης

- Στην **πρόσθεση** στο **δυαδικό** σύστημα αρίθμησης
  - Η διαφορά με το δεκαδικό σύστημα είναι ότι το κρατούμενο συμβολίζει **μια 2-άδα**

Μεθοδολογία:
- Επειδή προκύπτουν αθροίσματα 3 ψηφίων (2 προσθετέοι και κρατούμενο) ισχύουν τα εξής:
  - $0+0 = (0)_{10} = (0)_2$: Άθροισμα 0 (όχι κρατούμενο)
  - $0+0+1 = (1)_{10} = (1)_2$: Άθροισμα 1 (όχι κρατούμενο)
  - $0+1+1 = (2)_{10} = (10)_2$: Άθροισμα 0 (κρατούμενο 1)
  - $1+1+1 = (3)_{10} = (11)_2$: Άθροισμα 1 (κρατούμενο 1)

Παράδειγμα 1: $(110110)_2 + (11100)_2$

```
     1111
     110110
(+)   11100
    -------
    1010010
```

Άρα: $(110110)_2 + (11100)_2 = (1010010)_2$

Παράδειγμα 2: $(1011.01)_2 + (10.111)_2$

```
     111 1
     1011.01
(+)    10.111
    --------
     1110.001
```

Άρα: $(110110)_2 + (11100)_2 = (1010010)_2$

Α. Θεωρία
1. Πρόσθεση στα Συστήματα Αρίθμησης
2. Πρόσθεση στο Δυαδικό Σύστημα Αρίθμησης (Ασκήσεις)

Άσκηση 1: Εκτελέστε τις προσθέσεις στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης:

I. $(1101)_2 + (11010)_2$

II. $(110.001)_2 + (110.01101)_2$

III. $(110)_2 + (11.0011)_2$

Α. Θεωρία
1. Πρόσθεση στα Συστήματα Αρίθμησης
2. Πρόσθεση στο Δυαδικό Σύστημα Αρίθμησης (Ασκήσεις)

Άσκηση 2: Εκτελέστε την ακόλουθη πρόσθεση του δυαδικού συστήματος και επαληθεύστε το αποτέλεσμα μέσω του δεκαδικού συστήματος.

$$(10010)_2 + (111)_2$$

Α. Θεωρία
1. Πρόσθεση στα Συστήματα Αρίθμησης
3. Πρόσθεση στο Οκταδικό Σύστημα Αρίθμησης

- Στην **πρόσθεση** στο **οκταδικό** σύστημα αρίθμησης
  - Η διαφορά με το δεκαδικό σύστημα είναι ότι το κρατούμενο συμβολίζει μια 8-άδα

Μεθοδολογία:
- Όταν θα αθροίζουμε δύο οκταδικά ψηφία το αποτέλεσμα θα βγει το πολύ 15 (7+7+1).
- Ο ακόλουθος πίνακας ελαχιστοποιεί τα λάθη:

Άθροισμα	
Αποτέλεσμα	
0	8
1	9
2	10
3	11
4	12
5	13
6	14
7	15
Κρατούμενο 0	Κρατούμενο 1

Π.χ.
- Αν το άθροισμα βγει 6 τότε γράφουμε στο αποτέλεσμα 6 και το κρατούμενο είναι 0
- Αν το άθροισμα βγει 14 τότε γράφουμε στο απότέλεσμα 6 και το κρατούμενο είναι 1

Α. Θεωρία
1. Πρόσθεση στα Συστήματα Αρίθμησης
2. Πρόσθεση στο Οκταδικό Σύστημα Αρίθμησης

Παράδειγμα 1: $(24307)_8 + (2714)_8$

```
     1 1
   24307
(+) 2714
   -----
   27223
```

Άρα: $(24307)_8 + (2714)_8 = (27223)_8$

Άθροισμα	
Αποτέλεσμα	
0	8
1	9
2	10
3	11
4	12
5	13
6	14
7	15
Κρατούμενο 0	Κρατούμενο 1

Παράδειγμα 2: $(57.07)_8 + (11.231)_8$

```
    1  1
   57.07
(+) 11.231
   ------
   70.321
```

Άρα: $(57.07)_8 + (11.231)_8 = (70.321)_8$

Α. Θεωρία

1. Πρόσθεση στα Συστήματα Αρίθμησης

2. Πρόσθεση στο Οκταδικό Σύστημα Αρίθμησης (Ασκήσεις)

Άσκηση 1: Εκτελέστε τις προσθέσεις στο οκταδικό σύστημα αρίθμησης:

I. $(712.07)_8 + (6.17)_8$

II. $(777.77)_8 + (1.01)_8$

III. $(523)_8 + (675)_8$

Α. Θεωρία

1. Πρόσθεση στα Συστήματα Αρίθμησης

2. Πρόσθεση στο Οκταδικό Σύστημα Αρίθμησης (Ασκήσεις)

Άσκηση 2: Εκτελέστε την ακόλουθη πρόσθεση του οκταδικού συστήματος και επαληθεύστε το αποτέλεσμα μέσω του δεκαδικού συστήματος.

$$(137)_8 + (52)_8$$

Α. Θεωρία

1. Πρόσθεση στα Συστήματα Αρίθμησης

4. Πρόσθεση στο Δεκαεξαδικό Σύστημα Αρίθμησης

- Στην **πρόσθεση** στο **δεκαεξαδικό** σύστημα αρίθμησης
  - Η διαφορά με το δεκαδικό είναι ότι το κρατούμενο συμβολίζει μια 16-άδα

Μεθοδολογία:
- Όταν θα αθροίζουμε δύο δεκαεξαδικά ψηφία το αποτέλεσμα θα βγει το πολύ 31 (15+15+1).
- Ο ακόλουθος πίνακας ελαχιστοποιεί τα λάθη:

Άθροισμα	
Αποτέλεσμα	
0	16
1	17
2	18
3	19
4	20
5	21
6	22
7	23
8	24
9	25
10 (A)	26
11 (B)	27
12 (C)	28
13 (D)	29
14 (E)	30
15 (F)	31
Κρατούμενο 0	**Κρατούμενο** 1

Π.χ.:
- Αν το άθροισμα βγει 5 τότε
  το αποτέλεσμα είναι 5 και το κρατούμενο 0
- Αν το άθροισμα βγει 12 τότε
  το αποτέλεσμα είναι C και το κρατούμενο 0
- Αν το άθροισμα βγει 18 τότε
  το αποτέλεσμα είναι 2 και το κρατούμενο 1
- Αν το άθροισμα βγει 28 τότε
  το αποτέλεσμα είναι C και το κρατούμενο 1

Α. Θεωρία

1. Πρόσθεση στα Συστήματα Αρίθμησης

4. Πρόσθεση στο Δεκαεξαδικό Σύστημα Αρίθμησης

Παράδειγμα 1: $(16F1)_{16} + (5739)_{16}$

$$\begin{array}{rr} & \overset{1}{\smile} \\ & \mathtt{16F1} \\ (+) & \mathtt{5739} \\ \hline & \mathtt{6E2A} \end{array}$$

Άρα: $(16F1)_{16} + (5739)_{16} = (6E2A)_{16}$

Παράδειγμα 1: $(AA.81)_{16} + (1C.802)_{16}$

$$\begin{array}{rl} & \ \ 11 \\ & \mathtt{AA.81} \\ (+) & \mathtt{1C.802} \\ \hline & \mathtt{C7.012} \end{array}$$

Άρα: $(AA.81)_{16} + (1C.802)_{16} = (C7.012)_{16}$

Άθροισμα	
Αποτέλεσμα	
0	16
1	17
2	18
3	19
4	20
5	21
6	22
7	23
8	24
9	25
10 (A)	26
11 (B)	27
12 (C)	28
13 (D)	29
14 (E)	30
15 (F)	31
Κρατούμενο 0	Κρατούμενο 1

Α. Θεωρία
1. Πρόσθεση στα Συστήματα Αρίθμησης
4. Πρόσθεση στο Δεκαεξαδικό Σύστημα Αρίθμησης (Ασκήσεις)

Άσκηση 1: Εκτελέστε τις προσθέσεις στο 16δικό σύστημα αρίθμησης:

I. $(\mathrm{AA})_{16} + (\mathrm{B}C)_{16}$

II. $(19B.A2)_{16} + (0.FE)_{16}$

III. $(DEF)_2 + (FED)_2$

Α. Θεωρία
1. Πρόσθεση στα Συστήματα Αρίθμησης
4. Πρόσθεση στο Δεκαεξαδικό Σύστημα Αρίθμησης (Ασκήσεις)

Άσκηση 2: Εκτελέστε την ακόλουθη πρόσθεση του 16δικού συστήματος και επαληθεύστε το αποτέλεσμα μέσω του δεκαδικού συστήματος.

$$(2A)_{16} + (3B)_{16}$$

Α. Θεωρία
1. Πρόσθεση στα Συστήματα Αρίθμησης
5. Πρόσθεση σε άλλα Συστήματα Αρίθμησης

- Εντελώς αντίστοιχα σε οποιοδήποτε άλλο σύστημα αρίθμησης:
  - Η διαφορά με το δεκαδικό είναι ότι το κρατούμενο συμβολίζει μια b-άδα όπου b είναι η βάση του συστήματος αρίθμησης

Μεθοδολογία:
- Αντίστοιχα θα ισχύει ότι το άθροισμα θα είναι το πολύ (b-1)+(b-1)+1=2b-1
- Ο πίνακας θα έχει μία στήλη από 0 έως b-1 και μία στήλη από b έως 2b-1

Άσκηση: Εκτελέστε τις ακόλουθες προσθέσεις:

I. $(311.13)_4 + (23.21)_4$

II. $(712.66)_9 + (83.771)_9$

Α. Θεωρία
2. Αφαίρεση στα Συστήματα Αρίθμησης
1. Αφαίρεση στο Δεκαδικό Σύστημα Αρίθμησης

- Λίγα λόγια για την **αφαίρεση** στο **δεκαδικό** σύστημα αρίθμησης
  - Αφαιρούμε από το **μειωτέο** τον **αφαιρετέο**
  - Το αποτέλεσμα είναι η **διαφορά** των αριθμών

Μεθοδολογία
- Γράφουμε τον αφαιρετέο κάτω από το μειωτέο με ευθυγράμμιση στην ίδια τάξη ψηφίων (υποδιαστολή).
- Κάνουμε την αφαίρεση από δεξιά προς τα αριστερά.
- Σε περίπτωση που το ψηφίο του μειωτέου είναι μικρότερο από το ψηφίο του αφαιρετέου
  - Προσθέτουμε μια **δεκάδα** στο τρέχον ψηφίο του μειωτέου
  - Προσθέτουμε μια μονάδα στο αριστερό ψηφίο του αφαιρετέου

Παράδειγμα: $(3549)_{10} - (378)_{10}$

	14	← *Διόρθωση Μειωτέου*
	3 5 $\cancel{4}$ 9	← *Μειωτέος*
	4	← *Διόρθωση Αφαιρετέου*
(−)	$\cancel{3}$ 7 8	← *Αφαιρετέος*
	3 1 7 1	← *Διαφορά*

Άρα: $(3549)_{10} - (378)_{10} = (3171)_{10}$

Α. Θεωρία

2. Αφαίρεση στα Συστήματα Αρίθμησης

1. Αφαίρεση στο Δεκαδικό Σύστημα Αρίθμησης

Μεθοδολογία:
- Την ίδια διαδικασία κάνουμε αν ο αφαιρετέος έχει κι άλλα ψηφία μεγαλύτερα από αυτά του αφαιρετέου προσέχοντας τις διορθώσεις

Παράδειγμα: $(3249)_{10} - (378)_{10}$

$$\begin{array}{rcccc}
 & & ^{12} & ^{14} & \\
 & 3 & \cancel{2} & \cancel{4} & 9 \\
 & ^{1} & ^{4} & & \\
(-) & & \cancel{3} & 7 & 8 \\ \hline
 & 2 & 8 & 7 & 1
\end{array}$$

Άρα: $(3249)_{10} - (378)_{10} = (2871)_{10}$

Παράδειγμα: $(3079)_{10} - (288)_{10}$

$$\begin{array}{rcccc}
 & & ^{10} & ^{17} & \\
 & 3 & \cancel{0} & \cancel{7} & 9 \\
 & ^{1} & ^{3} & & \\
(-) & & \cancel{2} & 8 & 8 \\ \hline
 & 2 & 7 & 9 & 1
\end{array}$$

Άρα: $(3079)_{10} - (288)_{10} = (2791)_{10}$

Παράδειγμα: $(300079)_{10} - (288)_{10}$

$$\begin{array}{rcccccc}
 & & ^{10} & ^{10} & ^{10} & ^{17} & \\
 & 3 & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{7} & 9 \\
 & ^{1} & ^{1} & ^{1} & ^{3} & & \\
(-) & & & & \cancel{2} & 8 & 8 \\ \hline
 & 2 & 9 & 9 & 7 & 9 & 1
\end{array}$$

Άρα: $(300079)_{10} - (288)_{10} = (299791)_{10}$

Α. Θεωρία

2. Αφαίρεση στα Συστήματα Αρίθμησης

1. Αφαίρεση στο Δεκαδικό Σύστημα Αρίθμησης (Ασκήσεις)

Άσκηση: Εκτελέστε τις ακόλουθες πράξεις του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης

I. $(10.16)_{10} - (8.396)_{10}$

II. $(112)_{10} - (181)_{10}$

III. $-(121)_{10} - (189)_{10}$

Α. Θεωρία

2. Αφαίρεση στα Συστήματα Αρίθμησης

2. Αφαίρεση στο Δυαδικό Σύστημα Αρίθμησης

- Στην **αφαίρεση** στο **δυαδικό** σύστημα αρίθμησης όταν το ψηφίο του μειωτέου είναι μικρότερο από το ψηφίο του αφαιρετέου:
  - Προσθέτουμε **μια δυάδα** στο ψηφίο του μειωτέου.
  - Προσθέτουμε μία μονάδα στο αριστερό ψηφίο του αφαιρετέου.

Μεθοδολογία
- Καλό θα είναι στις διορθώσεις που παριστούμε να βάζουμε τα ισοδύναμα δεκαδικά.
- Οι πιο έμπειροι ας το αναπαραστήσουν με δυαδικό!

Παράδειγμα: $(1101)_2 - (110)_2$

$$\begin{array}{rcccc}
 & & ^{3} & ^{2} & \\
 & 1 & \cancel{1} & \cancel{0} & 1 \\
 & ^{1} & ^{2} & & \\
(-) & & \cancel{1} & 1 & 0 \\ \hline
 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{array}$$

Άρα: $(1101)_2 - (110)_2 = (111)_2$

Α. Θεωρία

2. Αφαίρεση στα Συστήματα Αρίθμησης

1. Αφαίρεση στο Δεκαδικό Σύστημα Αρίθμησης

Παράδειγμα 2: $(1001)_2 - (111)_2$

$$\begin{array}{rcccc}
 & & ^{2} & ^{2} & \\
 & 1 & \cancel{0} & \cancel{0} & 1 \\
 & ^{1} & ^{2} & & \\
(-) & & \cancel{1} & 1 & 1 \\ \hline
 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}$$

Άρα: $(1001)_2 - (111)_2 = (10)_2$

Παράδειγμα 3: $(1010)_2 - (101)_2$

$$\begin{array}{rcccc}
 & & ^{2} & & ^{2} \\
 & 1 & \cancel{0} & 1 & \cancel{0} \\
 & ^{1} & & ^{1} & \\
(-) & & 1 & \cancel{0} & 1 \\ \hline
 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{array}$$

Άρα: $(1010)_2 - (101)_2 = (101)_2$

Παράδειγμα 4: $(111000)_2 - (101011)_2$

$$\begin{array}{rcccccc}
 & & & ^{3} & ^{2} & ^{2} & ^{2} \\
 & 1 & 1 & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\
 & & ^{1} & ^{2} & ^{1} & ^{2} & \\
(-) & 1 & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} & 1 \\ \hline
 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1
\end{array}$$

Άρα: $(111000)_2 - (101011)_2 = (1101)_2$

Παράδειγμα 5: $(101.001)_2 - (11.1001)_2$

$$\begin{array}{rcccccccc}
 & & ^{2} & ^{3} & & ^{2} & & & ^{2} \\
 & 1 & \cancel{0} & \cancel{1} & . & \cancel{0} & 0 & 1 & \\
 & ^{1} & ^{2} & ^{2} & & & & ^{1} & \\
(-) & & \cancel{1} & \cancel{1} & . & 1 & 0 & \cancel{0} & 1 \\ \hline
 & 0 & 0 & 1 & . & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

Άρα: $(101.001)_2 - (11.1001)_2 = (1.1001)_2$

Α. Θεωρία

2. Αφαίρεση στα Συστήματα Αρίθμησης

2. Αφαίρεση στο Δυαδικό Σύστημα Αρίθμησης (Ασκήσεις)

Άσκηση 1: Εκτελέστε τις ακόλουθες αφαιρέσεις του δυαδικού συστήματος αρίθμησης

I. $(1010.11)_2 - (111.101)_2$

II. $(1000)_2 - (11.0001)_2$

III. $(11.01)_2 - (100.101)_2$

Α. Θεωρία

2. Αφαίρεση στα Συστήματα Αρίθμησης

3. Αφαίρεση στο Οκταδικό και Δεκαεξαδικό Σύστημα Αρίθμησης

- Στην **αφαίρεση** στο **οκταδικό** σύστημα αρίθμησης, δουλεύουμε αντίστοιχα με το δεκαδικό, αλλά:
  - Προσθέτουμε **μια οκτάδα** στο ψηφίο του μειωτέου.
  - Προσθέτουμε μία μονάδα στο αριστερό ψηφίο του αφαιρετέου.
- Στην **αφαίρεση** στο **16δικό** σύστημα αρίθμησης, δουλεύουμε αντίστοιχα με το δεκαδικό, αλλά:
  - Προσθέτουμε **μια δεκαεξάδα** στο ψηφίο του μειωτέου.
  - Προσθέτουμε μία μονάδα στο αριστερό ψηφίο του αφαιρετέου.

Μεθοδολογία
- Στο 16δικό βοηθάει να ανάγουμε πρώτα τα γράμματα στα ισοδύναμα δεκαδικά.
- Οι πράξεις που προκύπτουν γίνονται πάντα στο δεκαδικό.

Παράδειγμα 1: $(732)_8 - (64)_8$

$$\begin{array}{rccc}
 & & 11 & 10 \\
 & 7 & \cancel{3} & \cancel{2} \\
 & 1 & 7 & \\
(-) & & \cancel{6} & 4 \\
\hline
 & 6 & 4 & 6
\end{array}$$

Άρα: $(732)_8 - (64)_8 = (646)_8$

Παράδειγμα: $(\mathrm{CAA})_{16} - (2\mathrm{F})_{16}$

$$\begin{array}{rccc}
 & & & 26 \\
 & 12 & 10 & \cancel{10} \\
 & C & A & A \\
 & & 3 & \\
 & & \cancel{2} & 15 \\
(-) & & 2 & F \\
\hline
 & 12 & 7 & 11 \\
 & C & 7 & B
\end{array}$$

Άρα: $(CAA)_{16} - (2F)_{16} = (C7B)_{16}$

Α. Θεωρία

2. Αφαίρεση στα Συστήματα Αρίθμησης

3. Αφαίρεση στο Οκταδικό και Δεκαεξαδικό Σύστημα Αρίθμησης (Ασκήσεις)

Άσκηση: Εκτελέστε τις ακόλουθες αφαιρέσεις

I. $(71.01)_8 - (16.54)_8$

II. $(\mathrm{A.1})_{16} - (\mathrm{1.A})_{16}$

III. $(\mathrm{2BB}.FA)_{16} - (F8.AC)_{16}$

Α. Θεωρία

2. Αφαίρεση στα Συστήματα Αρίθμησης

4. Αφαίρεση σε άλλα Συστήματα Αρίθμησης

- Εντελώς αντίστοιχα σε οποιοδήποτε άλλο σύστημα αρίθμησης κάνουμε την αφαίρεση από αριστερά προς τα δεξιά:
- Αν το ψηφίο του μειωτέου είναι μικρότερο από το ψηφίο του αφαιρετέου:
  - Προσθέτουμε b μονάδες στο τρέχον ψηφίο του μειωτέου
  - Προσθέτουμε μία μονάδα στο αριστερό του τρέχοντος ψηφίο του αφαιρετέου

Άσκηση: Εκτελέστε τις ακόλουθες προσθέσεις:

I. $(311.13)_4 - (23.21)_4$

II. $(712.66)_9 - (83.771)_9$

Α. Θεωρία

3. Πολλαπλασιασμός και Διαίρεση

1. Πολλαπλασιασμός στα Συστήματα Αρίθμησης

- Ο συνήθης υπολογιστικός τρόπος για να γίνει ένας πολλαπλασιασμός είναι μέσω διαδοχικών προσθέσεων
- Οι προσθέσεις γίνονται στο σύστημα αρίθμησης που είναι οι αριθμοί.

Παράδειγμα 1: $(4)_{10} \times (5)_{10}$

```
      5   ← 1η φορά
(+)   5   ← 2η φορά
---------
     10
(+)   5   ← 3η φορά
---------
     15
(+)   5   ← 4η φορά
---------
     20
```

Άρα: $(4)_{10} \times (5)_{10} = (20)_{10}$

Παράδειγμα 2: $(100)_2 \times (101)_2$

```
       101   ← (1)2 φορά
(+)    101   ← (10)2 φορά
-----------
      1010
(+)    101   ← (11)2 φορά
-----------
      1111
(+)    101   ← (100)2 φορά
-----------
     10100
```

Άρα: $(100)_2 \times (101)_2 = (10100)_2$

Α. Θεωρία

3. Πολλαπλασιασμός και Διαίρεση

2. Διαίρεση στα Συστήματα Αρίθμησης

- Ο συνήθης υπολογιστικός τρόπος για να γίνει μία διαίρεση είναι μέσω διαδοχικών αφαιρέσεων
- Οι αφαιρέσεις γίνονται στο σύστημα αρίθμησης που είναι οι αριθμοί.

Παράδειγμα 1: $(17)_{10} / (5)_{10}$

```
     17
(−)   5   ← 1η αφαίρεση
---------
     12
(−)   5   ← 2η αφαίρεση
---------
      7
(−)   5   ← 3η αφαίρεση
---------
      2   ← STOP. Αριθμός<5
```

Άρα: $(17)_{10} / (5)_{10} = (3)_{10}$ με υπόλοιπο διαίρεσης ίσο με το 2

Παράδειγμα 2: $(10001)_2 / (101)_2$

```
     10001
(−)    101   ← 1η αφαίρεση
-----------
      1100
(−)    101   ← 2η αφαίρεση
-----------
       111
(−)    101   ← 3η αφαίρεση
-----------
        10   ← STOP. Αριθμός<101
```

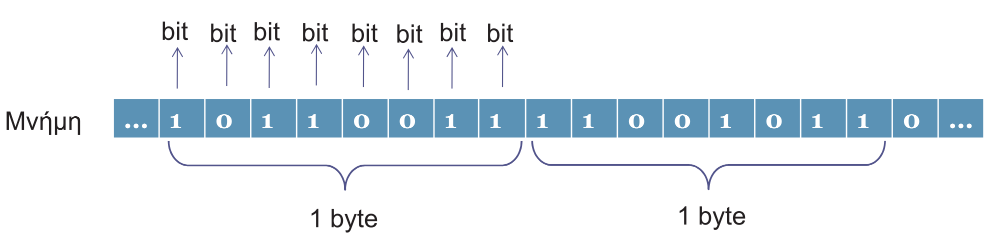
Άρα: $(10001)_2 / (101)_2 = (11)_2$ με υπόλοιπο διαίρεσης ίσο με το $(10)_2$

Α. Θεωρία

4. Αναπαράσταση Αριθμών στον Υπολογιστή

1. Bits, Bytes και Απεικόνιση Αριθμών στην μνήμη

- Μπορούμε (για την ώρα) να οραματιστούμε την μνήμη του υπολογιστή σαν μια ταινία που έχει χώρους αποθήκευσης για δυαδικά ψηφία.
- **Ένα δυαδικό ψηφίο (που έχει τιμή 0 ή 1) καλείται bit**. Αποτελεί τη μικρότερη μονάδα αποθήκευσης πληροφορίας στους υπολογιστές.
- **8 διαδοχικά bits αποτελούν 1 byte.**
  - Ιστορικά 1 byte χρησίμευε για την αποθήκευση ενός χαρακτήρα στην μνήμη σύμφωνα με τον πίνακα ASCII σε παλιότερα συστήματα.
  - Ό,τι βλέπουμε στον υπολογιστή είναι τελικά κωδικοποιημένο στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης.



Α. Θεωρία

4. Αναπαράσταση Αριθμών στον Υπολογιστή

1. Bits, Bytes και Απεικόνιση Αριθμών στην μνήμη

- Ο πίνακας ASCII στους πρώτους υπολογιστές κωδικοποιούσε σύμβολα σε bytes!

Παράδειγμα: Η λέξη: $\underbrace{01001000}_{H}\ \underbrace{01000101}_{E}\ \underbrace{01011100}_{L}\ \underbrace{01011100}_{L}\ \underbrace{01000001}_{A}\ \underbrace{01010011}_{S}$

Dec	Hx	Oct	Char		Dec	Hx	Oct	Html	Chr	Dec	Hx	Oct	Html	Chr	Dec	Hx	Oct	Html	Chr
0	0	000	NUL	(null)	32	20	040		Space	64	40	100	@	@	96	60	140	`	`
1	1	001	SOH	(start of heading)	33	21	041	!	!	65	41	101	A	A	97	61	141	a	a
2	2	002	STX	(start of text)	34	22	042	"	"	66	42	102	B	B	98	62	142	b	b
3	3	003	ETX	(end of text)	35	23	043	#	#	67	43	103	C	C	99	63	143	c	c
4	4	004	EOT	(end of transmission)	36	24	044	$	$	68	44	104	D	D	100	64	144	d	d
5	5	005	ENQ	(enquiry)	37	25	045	%	%	69	45	105	E	E	101	65	145	e	e
6	6	006	ACK	(acknowledge)	38	26	046	&	&	70	46	106	F	F	102	66	146	f	f
7	7	007	BEL	(bell)	39	27	047	'	'	71	47	107	G	G	103	67	147	g	g
8	8	010	BS	(backspace)	40	28	050	(	(	72	48	110	H	H	104	68	150	h	h
9	9	011	TAB	(horizontal tab)	41	29	051	)	)	73	49	111	I	I	105	69	151	i	i
10	A	012	LF	(NL line feed, new line)	42	2A	052	*	*	74	4A	112	J	J	106	6A	152	j	j
11	B	013	VT	(vertical tab)	43	2B	053	+	+	75	4B	113	K	K	107	6B	153	k	k
12	C	014	FF	(NP form feed, new page)	44	2C	054	,	,	76	4C	114	L	L	108	6C	154	l	l
13	D	015	CR	(carriage return)	45	2D	055	-	-	77	4D	115	M	M	109	6D	155	m	m
14	E	016	SO	(shift out)	46	2E	056	.	.	78	4E	116	N	N	110	6E	156	n	n
15	F	017	SI	(shift in)	47	2F	057	/	/	79	4F	117	O	O	111	6F	157	o	o
16	10	020	DLE	(data link escape)	48	30	060	0	0	80	50	120	P	P	112	70	160	p	p
17	11	021	DC1	(device control 1)	49	31	061	1	1	81	51	121	Q	Q	113	71	161	q	q
18	12	022	DC2	(device control 2)	50	32	062	2	2	82	52	122	R	R	114	72	162	r	r
19	13	023	DC3	(device control 3)	51	33	063	3	3	83	53	123	S	S	115	73	163	s	s
20	14	024	DC4	(device control 4)	52	34	064	4	4	84	54	124	T	T	116	74	164	t	t
21	15	025	NAK	(negative acknowledge)	53	35	065	5	5	85	55	125	U	U	117	75	165	u	u
22	16	026	SYN	(synchronous idle)	54	36	066	6	6	86	56	126	V	V	118	76	166	v	v
23	17	027	ETB	(end of trans. block)	55	37	067	7	7	87	57	127	W	W	119	77	167	w	w
24	18	030	CAN	(cancel)	56	38	070	8	8	88	58	130	X	X	120	78	170	x	x
25	19	031	EM	(end of medium)	57	39	071	9	9	89	59	131	Y	Y	121	79	171	y	y
26	1A	032	SUB	(substitute)	58	3A	072	:	:	90	5A	132	Z	Z	122	7A	172	z	z
27	1B	033	ESC	(escape)	59	3B	073	;	;	91	5B	133	[	[	123	7B	173	{	{
28	1C	034	FS	(file separator)	60	3C	074	<	<	92	5C	134	\	\	124	7C	174			|
29	1D	035	GS	(group separator)	61	3D	075	=	=	93	5D	135	]	]	125	7D	175	}	}
30	1E	036	RS	(record separator)	62	3E	076	>	>	94	5E	136	^	^	126	7E	176	~	~
31	1F	037	US	(unit separator)	63	3F	077	?	?	95	5F	137	_	_	127	7F	177	&#127;	DEL

Α. Θεωρία

4. Αναπαράσταση Αριθμών στον Υπολογιστή

2. Μήκος Λέξης

- Για την ομαδοποίηση των bits χρησιμοποιούμε τον όρο **μήκος λέξης** (πόσα bits ομαδοποιούμε). Κάθε υπολογιστής έχει συγκεκριμένο μήκος λέξης (συνηθέστερα 1 byte)
  - Ένα byte έχει μήκος λέξης = 8

Έτσι σε ένα υπολογιστή με μήκος λέξης 8:
- Μπορούμε να αναπαραστήσουμε 2^8 αριθμούς
- Αν θέλουμε να αναπαραστήσουμε φυσικούς αριθμούς, μπορούμε να αναπαραστήσουμε από το 0 έως το 2^8-1 (δηλαδή από το 0 έως το 255)

Δυαδικοί Αριθμοί με μήκος λέξης 8 (1 byte)

```
00000000  =  0
00000001  =  1
00000010  =  2
00000011  =  3
…
11111100  =  252
11111101  =  253
11111110  =  254
11111111  =  255
```

Αριθμοί του Δεκαδικού Συστήματος

- Σε μια κωδικοποίηση αριθμών κατά σύμβαση λέμε ότι το αριστερότερο είναι το **περισσότερο σημαντικό ψηφίο** (Most Significant Bit – MSB) και το δεξιότερο είναι το **λιγότερο σημαντικό ψηφίο** (Least Significant Bit – LSB)

Α. Θεωρία

4. Αναπαράσταση Αριθμών στον Υπολογιστή

2. Μήκος Λέξης

- **Οι αριθμοί αναπαρίστανται σε έναν υπολογιστή με τόσα bits όσα και το μήκος λέξης του υπολογιστή.**
  - Αν απαιτούνται λιγότερα bits από το μήκος λέξης τότε συμπληρώνουμε από αριστερά με μηδενικά.
  - Αν απαιτούνται περισσότερα bits από το μήκος λέξης έχουμε **υπερχείλιση** (overflow) και χάνονται τα bits που υπερβαίνουν το μήκος λέξης από αριστερά.

Παράδειγμα: Να κωδικοποιηθούν σε υπολογιστή με μήκος λέξης 8 (1 byte) οι αριθμοί: 254, 12, 515

Απάντηση:
- Ισχύει $(254)_{10} = (11111110)_2$. Άρα ο αριθμός με μήκος λέξης 8 κωδικοποιείται: 11111110
- Ισχύει $(12)_{10} = (1100)_2$. Άρα ο αριθμός με μήκος λέξης 8 κωδικοποιείται: 00001100
- Ισχύει $(515)_{10} = (1000000011)_2$. Άρα ο αριθμός με μήκος λέξης 8 κωδικοποιείται: 00000011 άρα έχουμε υπερχείλιση (δεν κωδικοποιήθηκε σωστά ο αριθμός)

Α. Θεωρία

4. Αναπαράσταση Αριθμών στον Υπολογιστή

2. Μήκος Λέξης

Άσκηση: Να αναπαρασταθούν οι παρακάτω φυσικοί αριθμοί σε υπολογιστή με μήκος λέξης 8. Σε ποιες περιπτώσεις έχουμε υπερχείλιση (overflow);

I. $(16)_{10}$

II. $(F0)_{16}$

III. $(477)_8$

Α. Θεωρία

4. Αναπαράσταση Αριθμών στον Υπολογιστή

3. Αναπαράσταση Αρνητικών με Μέτρο

- Για την **αναπαράσταση αρνητικών ακέραιων** αριθμών προτείνονται 3 τρόποι:
  - Ο 1ος τρόπος είναι η **αναπαράσταση μέτρου**.
  - Το αριστερότερο bit (MSB) παίζει το ρόλο προσήμου (0 για το (+) και 1 για το (-))

Έτσι σε ένα υπολογιστή με μήκος λέξης 8:

1	0	1	1	0	0	1	1
Πρόσημο	Αριθμός						

- Μπορούμε να αναπαραστήσουμε 2^8-2 =254 αριθμούς
- Οι 127 θα είναι οι θετικοί και οι 127 θα είναι οι αρνητικοί ακέραιοι.
- **Πρόβλημα!**
  - Το 0 αναπαρίσταται δύο φορές
    - Τη μία με θετικό πρόσημο και την άλλη με αρνητικό πρόσημο.
  - Ο τρόπος αυτός δεν χρησιμοποιείται στην πράξη!

```
00000000  =  +0
00000001  =  +1
00000010  =  +2
00000011  =  +3
…
01111100  =  +124
01111101  =  +125
01111110  =  +126
01111111  =  +127
```
θετικοί ακέραιοι

```
10000000  =  -0
10000001  =  -1
10000010  =  -2
10000011  =  -3
…
11111100  =  -124
11111101  =  -125
11111110  =  -126
11111111  =  -127
```
αρνητικοί ακέραιοι

Α. Θεωρία

4. Αναπαράσταση Αριθμών στον Υπολογιστή

3. Αναπαράσταση Αρνητικών με Συμπλήρωμα ως προς 1

- Για την **αναπαράσταση αρνητικών ακέραιων** αριθμών προτείνονται 3 τρόποι:
  - Ο 2ος τρόπος είναι η **αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς 1**.
  - Κανόνας: «Αντιστρέφουμε τα bits του αριθμού: Κάθε 0 γίνεται 1 και κάθε 1 γίνεται 0»

Έτσι σε ένα υπολογιστή με μήκος λέξης 8:

- Μπορούμε να αναπαραστήσουμε 2^8-1 = 255 αριθμούς
- Οι 127 θα είναι οι θετικοί και οι 127 θα είναι οι αρνητικοί ακέραιοι και ένας είναι το 0.

00000000	=	+0	θετικοί ακέραιοι
00000001	=	+1	
00000010	=	+2	
00000011	=	+3	
…			
01111100	=	+124	
01111101	=	+125	
01111110	=	+126	
01111111	=	+127	
10000000	=	-127	αρνητικοί ακέραιοι
10000001	=	-126	
10000010	=	-125	
10000011	=	-124	
…			
11111100	=	-3	
11111101	=	-2	
11111110	=	-1	
11111111	=	-0	

- **Πρόβλημα!**
  - Το 0 αναπαρίσταται δύο φορές
    - Τη μία με θετικό πρόσημο και την άλλη με αρνητικό πρόσημο.
  - Το πρόβλημα αυτό ξεπερνιέται με την τεχνική συμπληρώματος ως προς 2!

Α. Θεωρία

4. Αναπαράσταση Αριθμών στον Υπολογιστή

3. Αναπαράσταση Αρνητικών με Συμπλήρωμα ως προς 2

- Για την **αναπαράσταση αρνητικών ακέραιων** αριθμών προτείνονται 3 τρόποι:
  - Ο 3ος τρόπος είναι η **αναπαράσταση συμπληρώματος ως προς 2**.
  - Κανόνας: «Υπολογίζουμε το συμπλήρωμα ως προς 1 και προσθέτουμε μια μονάδα»

Έτσι σε ένα υπολογιστή με μήκος λέξης 8:

- Για την κωδικοποίηση του αρνητικού αριθμού -7:
  - Ο αριθμός +7 είναι : `00000111`
  - Το συμπλήρωμα ως προς 1 : `11111000`
    `+1`
  - Το συμπλήρωμα ως προς 2 : `11111001`
- Άρα $(-7)_2 = (11111001)_2$

00000000	=	+0	θετικοί ακέραιοι
00000001	=	+1	
00000010	=	+2	
00000011	=	+3	
…			
01111100	=	+124	
01111101	=	+125	
01111110	=	+126	
01111111	=	+127	
10000000	=	-128	αρνητικοί ακέραιοι
10000001	=	-127	
10000010	=	-126	
10000011	=	-125	
…			
11111100	=	-4	
11111101	=	-3	
11111110	=	-2	
11111111	=	-1	

Παρατηρήσεις:
- Ξεπεράστηκε το πρόβλημα με το 0.
- Ωστόσο, οι αρνητικοί είναι παραπάνω από τους θετικούς
- Είναι ευθύνη αυτού που κωδικοποιεί τα δεδομένα να προσέχει τα όρια των αριθμών ώστε να χωράνε στο μήκος λέξης και να μην έχουμε υπερχείλιση.

Α. Θεωρία

4. Αναπαράσταση Αριθμών στον Υπολογιστή

3. Αναπαράσταση Αρνητικών με Συμπλήρωμα ως προς 2

- Τέλος, αν μας δίνεται μία λέξη και μας πουν ότι είναι το συμπλήρωμα ως προς 2 ενός αριθμού, τότε για να υπολογίσουμε ποιος αρνητικός αριθμός είναι:
  - Υπολογίζουμε το συμπλήρωμα ως προς 2 του αριθμού και υπολογίζουμε το μέτρο του.
  - Βάζουμε αρνητικό πρόσημο.

Ποιον αρνητικό αριθμό κωδικοποιεί η λέξη 11111001 σε υπολογιστή με μήκος λέξης 8

Λύση:

Έχουμε:

- Ο αριθμός είναι : `11111001`
- Το συμπλήρωμα ως προς 1 : `00000110`
  `+1`
- Το συμπλήρωμα ως προς 2 : `00000111`

Άρα ο αριθμός είναι: $(-7)_2$

Α. Θεωρία

4. Αναπαράσταση Αριθμών στον Υπολογιστή

3. Αναπαράσταση Αρνητικών με Συμπλήρωμα ως προς 2

Άσκηση 1: Βρείτε την αναπαράσταση ως προς 2 των παρακάτω αρνητικών δυαδικών αριθμών σε μορφή συμπληρώματος ως προς 2 σε υπολογιστή με μήκος λέξης 4 και υπολογιστή με μήκος λέξης 8:

I. $(-5)_{10}$

II. $(-31)_{10}$

III. $(-1F)_{16}$

Α. Θεωρία

4. Αναπαράσταση Αριθμών στον Υπολογιστή

3. Αναπαράσταση Αρνητικών με Συμπλήρωμα ως προς 2

Άσκηση 2: Έστω υπολογιστής με μήκος λέξης 8 που οι αρνητικοί αριθμοί είναι αποθηκευμένοι με συμπλήρωμα ως προς 2. Σε ποιους δεκαδικούς αριθμούς αντιστοιχούν οι ακόλουθες λέξεις:

I. 00000101

II. 10100101

III. 11100111

Α. Θεωρία

5. Αφαίρεση με Τεχνική Συμπληρώματος

1. Αφαίρεση στο Δυαδικό με Συμπλήρωμα ως προς 2

- Με το συμπλήρωμα ως προς 2 έχουμε την δυνατότητα να κάνουμε εύκολα πράξεις προσημασμένων ακεραίων στο δυαδικό:
  - Προετοιμάζουμε τους αριθμούς με βάση το μήκος λέξης
  - Οι αρνητικοί απεικονίζονται με συμπλήρωμα ως προς 2
  - Όλες οι πράξεις γίνονται προσθέσεις!
  - Τυχόν κρατούμενο αγνοείται

Άσκηση: Κάντε τις πράξεις 15+17, 15-17, -15+17, -15-17 με την τεχνική του συμπληρώματος ως προς 2 σε υπολογιστή με μήκος λέξης 8 δυαδικών ψηφίων. Επαληθεύστε το αποτέλεσμα στο δεκαδικό σύστημα

<u>Λύση:</u> Προεργασία:

Ο αριθμός 15 είναι: 00001111	Ο αριθμός 17 είναι: 00010001
Ο αριθμός -15: • Ο αριθμός +15 είναι : 00001111 • Το συμπλήρωμα ως προς 1 : 11110000 +1 • Το συμπλήρωμα ως προς 2 :11110001 Άρα ο αριθμός -15 είναι: 11110001	Ο αριθμός -17: • Ο αριθμός +17 είναι : 00010001 • Το συμπλήρωμα ως προς 1 : 11101110 +1 • Το συμπλήρωμα ως προς 2 :11101111 Άρα ο αριθμός -17 είναι: 11101111

Α. Θεωρία

5. Αφαίρεση με Τεχνική Συμπληρώματος

1. Αφαίρεση στο Δυαδικό με Συμπλήρωμα ως προς 2

Συνεπώς: $(15)_{10} + (17)_{10} = (00001111)_2 + (00010001)_2$

```
      1 1 1 1 1
    00001111
(+) 00010001
    --------
    00100000
```

Άρα: $(15)_{10} + (17)_{10} = (00100000)_2 = (32)_{10}$

Συνεπώς: $(15)_{10} - (17)_{10} = (15)_{10} + (-17)_{10} = (00001111)_2 + (11101111)_2$

```
      1 1 1 1
    00001111
(+) 11101111
    --------
    11111110
```

Το αποτέλεσμα είναι:
11111110
Το συμπλήρωμα ως προς 1
00000001
Το συμπλήρωμα ως προς 2
00000010
Άρα ο αριθμός στο 10δικό
2

Άρα: $(15)_{10} + (-17)_{10} = (11011110)_2 = (-2)_{10}$

Συνεπώς: $-(15)_{10} + (17)_{10} = (-15)_{10} + (17)_{10} = (11110001)_2 + (00010001)_2$

```
   1 1 1 1     1
    11110001
(+) 00010001
    --------
   100000010
```

$\cancel{1}00000010$

Άρα: $(-15)_{10} + (17)_{10} = (00000010)_2 = (2)_{10}$

Συνεπώς: $-(15)_{10} - (17)_{10} = (-15)_{10} + (-17)_{10} = (11110001)_2 + (11101111)_2$

```
   1 1 1 1 1 1 1 1
    11110001
(+) 11101111
    --------
   111100000
```

$\cancel{1}11100000$

Το αποτέλεσμα είναι:
11100000
Το συμπλήρωμα ως προς 1
00011111
Το συμπλήρωμα ως προς 2
00100000
Άρα ο αριθμός στο 10δικό
32

Άρα: $(-15)_{10} + (-17)_{10} = (11100000)_2 = (-32)_{10}$

Α. Θεωρία

5. Αφαίρεση με Τεχνική Συμπληρώματος

1. Αφαίρεση στο Δυαδικό με Συμπλήρωμα ως προς 2

Άσκηση: Να εκτελέσετε την πράξη $(52)_{10} - (71)_{10}$ χρησιμοποιώντας την μέθοδο του συμπληρώματος ως προς 2. Θεωρήστε ότι οι δυαδικοί αριθμοί αναπαριστώνται με 8 δυαδικά ψηφία (bits)

Α. Θεωρία

5. Αφαίρεση με Τεχνική Συμπληρώματος

2. Αφαίρεση σε άλλα Συστήματα με Τεχνική Συμπληρώματος

- Στο **δυαδικό σύστημα** για τον υπολογισμό του **συμπληρώματος ως προς 2**:
  - Αντιστρέφαμε τα bits (ή ισοδύναμα κάναμε την πράξη 1-Ψ, όπου Ψ το ψηφίο)
  - Προσθέταμε μια μονάδα
- Αντίστοιχα στο **8δικό σύστημα** για τον υπολογισμό του **συμπληρώματος ως προς 8**:
  - Κάνουμε την πράξη **7-Ψ** όπου Ψ το ψηφίο (συμπλήρωμα ως προς 7)
  - Προσθέτουμε μία μονάδα (και έχουμε το συμπλήρωμα ως προς 8)
- Αντίστοιχα στο **16δικό σύστημα** για τον υπολογισμό του **συμπληρώματος ως προς 16**:
  - Κάνουμε την πράξη **15-Ψ** όπου Ψ το ψηφίο (συμπλήρωμα ως προς 15)
  - Προσθέτουμε μία μονάδα (και έχουμε το συμπλήρωμα ως προς 16)
- κ.ο.κ. και έχουμε την απεικόνιση των αρνητικών αριθμών στο αντίστοιχο σύστημα.
  - Έπειτα για τις πράξεις, ισχύουν τα ακριβώς ίδια με το 2δικό σύστημα αρίθμησης

Παράδειγμα 1: Να απεικονιστεί το $(-32)_{10}$ στο δεκαεξαδικό σύστημα με μήκος λέξης 4.

Λύση:

Το 32 στο δεκαεξαδικό είναι: $(20)_{16}$
Με μήκος λέξης ίσο με το 4: $(0020)_{16}$
Το Συμπλήρωμα ως προς 15: $(\mathrm{FFDF})_{16}$
Το Συμπλήρωμα ως προς 16: $(\mathrm{FFE0})_{16}$

Α. Θεωρία

5. Αφαίρεση με Τεχνική Συμπληρώματος

2. Αφαίρεση σε άλλα Συστήματα με Τεχνική Συμπληρώματος

Παράδειγμα 2: Να γίνει η πράξη το $(32)_{16}-(7\mathrm{F})_{16}$ στο δεκαεξαδικό σύστημα με μήκος λέξης 4 και την τεχνική του συμπληρώματος ως προς 16. Επαληθεύστε μέσω του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης.

Λύση:

Μειωτέος: $(32)_{16}=\mathbf{3}\times 16^1 + \mathbf{2}\times 16^0 = 48+2=(50)_{10}$
Αφαιρετέος: $(7\mathrm{F})_{16}=\mathbf{7}\times 16^1 + \mathbf{15}\times 16^0 = 112+15=(127)_{10}$

Ο Μειωτέος με Μήκος Λέξης 4: **0032**
Ο Αφαιρετέος με Μήκος Λέξης 4: **007F**

Απεικόνιση του $(-7\mathrm{F})_{16}$
Ο Μειωτέος είναι: $(007\mathrm{F})_{16}$
Το Συμπλήρωμα ως προς 15: $(\mathrm{FF80})_{16}$
Το Συμπλήρωμα ως προς 16: $(\mathrm{FF81})_{16}$

Άρα:

$$\begin{array}{rr} & \mathtt{0032} \\ (+) & \mathtt{FF81} \\ \hline & \mathtt{FFB3} \end{array}$$

Το αποτέλεσμα είναι αρνητικός άρα θα υπολογίσουμε το συμπλήρωμα ως προς 16:
Ο αριθμός είναι: $(\mathrm{FFB3})_{16}$
Το Συμπλήρωμα ως προς 15: $(004\mathrm{C})_{16}$
Το Συμπλήρωμα ως προς 16: $(004\mathrm{D})_{16}$
Συνεπώς το αποτέλεσμα είναι: $-(4\mathrm{D})_{16}=-(\mathbf{4}\times 16^1 + \mathbf{13}\times 16^0) = -(64+13)=-(77)_{10}$

Α. Θεωρία

5. Αφαίρεση με Τεχνική Συμπληρώματος

2. Αφαίρεση σε άλλα Συστήματα με Τεχνική Συμπληρώματος

Άσκηση: Να εκτελέσετε την πράξη $(1\mathrm{F})_{16}-(3\mathrm{A})_{16}$

I. Απευθείας στο Δεκαεξαδικό
II. Με μετατροπή στο Δυαδικό και την τεχνική του συμπληρώματος ως προς 2
III. Με Μετατροπή στο Δεκαδίκό
IV. Με χρήση της τεχνικής συμπληρώματος ως προς 16.

Για το ερώτημα (ΙΙ) θεωρήστε μήκος λέξης 8, για το ερώτημα (IV) μήκος λέξης 4