



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Α.Θεωρία

1. Εκπαίδευση ΤΝΔ

1. Εισαγωγή
2. Μάθηση με Επίβλεψη

2. Εκπαίδευση ενός νευρώνα

1. Σκοπός του Αλγορίθμου
2. Διαισθηση πίσω από τον αλγόριθμο
3. Ο αλγόριθμος οπισθοδιάδοσης του λάθους
4. Γνωστές Παραγώγοι
5. Παραδείγματα
6. Παρατηρήσεις για τον αλγόριθμο οπισθοδιάδοσης

Β.Ασκήσεις

1. Εφαρμογές

Α. Θεωρία

1. Εκπαίδευση ΤΝΔ

1. Εισαγωγή

Η εκπαίδευση ενός ΤΝΔ είναι μία υπολογιστική διαδικασία στην οποία «εκπαιδεύουμε το ΤΝΔ προκειμένου να κάνει την επιθυμητή εργασία, δηλαδή:

- Να απαντά ΝΑΙ, για κάθε θετικό πρότυπο.
- Να απαντά ΌΧΙ για κάθε αρνητικό πρότυπο.

Σε ένα ΤΝΔ ενός νευρώνα, η εκπαίδευση συνίσταται στο να υπολογιστούν:

- Τα βάρη των εισόδων w_1, w_2, \dots
- Η τιμή του κατωφλίου θ .

Ήδη έχουμε μάθει μία διαδικασία εκπαίδευσης ενός ΤΝΔ:

- Η εύρεση των βαρών και του κατωφλίου με την διαδικασία του γραφικού διαχωρισμού των προτύπων σε θετικά και αρνητικά στιγμιότυπα.

Γενικά οι διαδικασίες εκπαίδευσης ενός ΤΝΔ χωρίζονται σε 3 κατηγορίες:

- Την μάθηση με επίβλεψη (ΕΝΤΟΣ ύλης)
- Την μάθηση χωρίς επίβλεψη (ΕΝΤΟΣ ύλης)
- Την μάθηση με ενίσχυση (εκτός ύλης)

Α. Θεωρία

1. Εκπαίδευση ΤΝΔ

2. Μάθηση με Επίβλεψη

Στην μάθηση με επίβλεψη:

- Υπάρχουν τα πρότυπα ως ζεύγη (είσοδος – επιθυμητή έξοδος)

Επαναλαμβάνεται μια αλγοριθμική διαδικασία στην οποία:

- Δίδονται εισόδοι στο ΤΝΔ
- Το ΤΝΔ δίνει την απάντησή του.
- Συγκρίνεται η απάντηση του ΤΝΔ με την επιθυμητή έξοδο
- Γίνεται προσαρμογή των παραμέτρων (κατώφλια – βάρη) από το ίδιο το σύστημα.

Το σύστημα προσπαθεί να ανακαλύψει τη συσχέτιση μεταξύ των δεδομένων εισόδου και της επιθυμητής εξόδου προσαρμόζοντας τις συναρτήσεις που προσομοιώνουν την διαδικασία της απόφασης.

Ο αλγόριθμος που ακολουθείται για την εκπαίδευση πολυεπίπεδων ΤΝΔ λέγεται αλγόριθμος οπισθοδιάδοσης του λάθους

A. Θεωρία

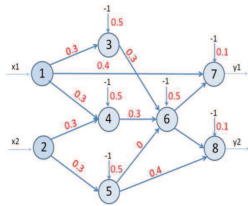
2. Εκπαίδευση ΤΝΔ με τον αλγόριθμο οπισθοδιάδοσης

1. Σκοπός του αλγορίθμου

Ο αλγόριθμος οπισθοδιάδοσης του λάθους είναι ένας αλγόριθμος που χρησιμοποιείται για την εκπαίδευση ενός δικτύου εμπρόσθιας τροφοδότησης.

- Μας παρέχονται τα πρότυπα εισόδου-εξόδου, τρέχουμε τον αλγόριθμο και έχουν παραχθεί τα βάρη των ακμών και του κατωφλίου.

ΝΕΥΡΩΝΙΚΟ ΔΙΚΤΥΟ



ΠΡΟΤΥΠΑ ΕΙΣΟΔΟΥ-ΕΞΟΔΟΥ

Οπισθο-
διάδοση
Λάθους



ΔΙΟΡΘΩΜΕΝΑ ΒΑΡΗ
ΑΚΜΩΝ ΩΣΤΕ ΤΟ ΔΙΚΤΥΟ
ΝΑ ΠΑΡΑΓΕΙ ΤΙΣ
ΕΠΙΘΥΜΗΤΕΣ ΕΞΟΔΟΥΣ

A. Θεωρία

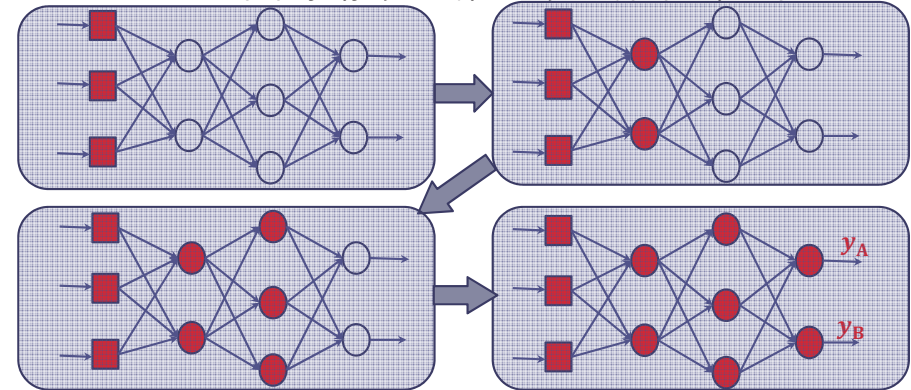
2. Εκπαίδευση ΤΝΔ με τον αλγόριθμο οπισθοδιάδοσης

2. Διαισθηση πίσω από τον αλγόριθμο

Η οπισθοδιάδοση του λάθους συνίσταται στα εξής βήματα:

1. Προς τα Εμπρός Πέρασμα

- Γίνεται υπολογισμός της εξόδου (ή των εξόδων) με βάση το πρότυπο



- Από εδώ υπολογίζεται το σφάλμα σε κάθε έξοδο.

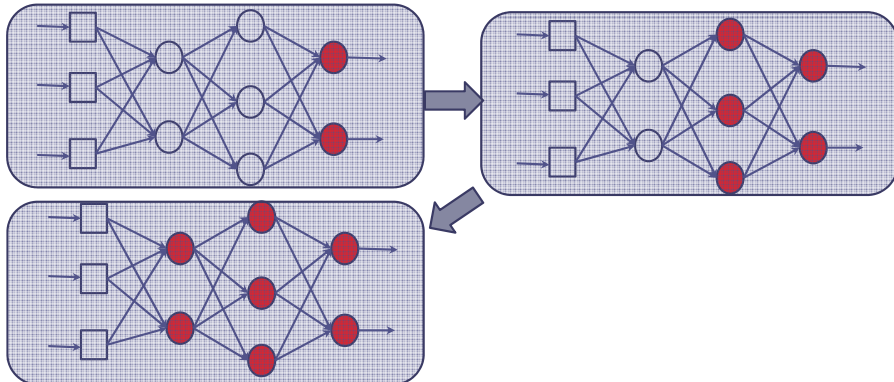
A. Θεωρία

2. Εκπαίδευση ΤΝΔ με τον αλγόριθμο οπισθοδιάδοσης

2. Διαισθηση πίσω από τον αλγόριθμο

2. Προς τα Πίσω Πέρασμα (Οπισθοδιάδοση λάθους)

- Υπολογίζεται η συμβολή στο λάθος (λέγεται τοπική κλίση του νευρώνα) σε κάθε υπολογιστικό νευρώνα με μαθηματικό τύπο



- Με μαθηματικό τύπο από τις τοπικές κλίσεις εξαγονται τα νέα βάρη.

A. Θεωρία

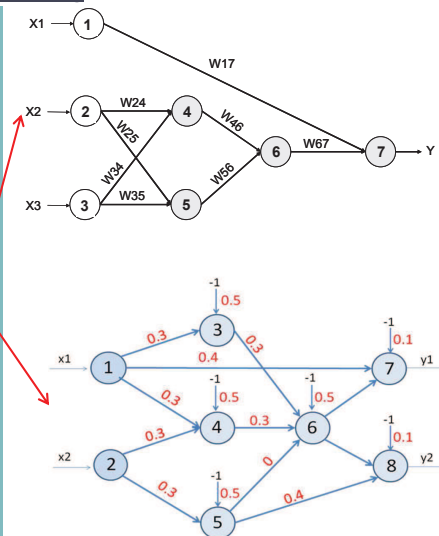
2. Εκπαίδευση ΤΝΔ με τον αλγόριθμο οπισθοδιάδοσης

3. Ο αλγόριθμος οπισθοδιάδοσης του λάθους

Αρχικοποίηση:

- Αρχικοποιούμε τα διανύσματα:
 - Για κάθε πρότυπο $1, \dots, K$: Κατασκευάζουμε το διάνυσμα: $x_i = [x_{i0}, x_{i1}, \dots, x_{in}]$ και αρχικοποιούμε την επιθυμητή έξοδο: d_i
- Δίνουμε αριθμηση στους κόμβους (αν αυτή δεν υπάρχει ήδη)
 - Πρέπει να υπάρχει μία τοπολογική ταξινόμηση στους κόμβους (δηλαδή να μην υπάρχει ακμή από κόμβο σε προηγούμενό του κόμβο)
- Αρχικοποιούμε τις τιμές των βαρών σύμφωνα με την εκφώνηση.
- Εντοπίζουμε την συνάρτηση ενεργοποίησης για κάθε κόμβο καθώς και την παραγωγό της (θα είναι κάποια συνεχής συνάρτηση)
- Δίνουμε τιμή στην παράμετρο μάθησης η : $0 < \eta < 1$ (από εκφώνηση)

Πραγματοποιούμε κύκλους εκπαίδευσης διαδοχικά για τα πρότυπα.



A. Θεωρία

2. Εκπαίδευση ΤΝΔ με τον αλγόριθμο οπισθοδιάδοσης

3. Ο αλγόριθμος οπισθοδιάδοσης του λάθους

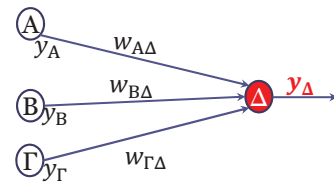
ΠΡΟΣ ΤΑ ΕΜΠΡΟΣ ΠΕΡΑΣΜΑ:

Οι νευρώνες εξετάζονται κατά την αύξουσα αρίθμηση: $j=1, \dots, N$

- Για κάθε νευρώνα εισόδου θέτουμε ως y_j την είσοδο που παράγει.
- Για κάθε υπολογιστικό νευρώνα j (κρυφό και εξόδο):
 - Υπολόγισε το δυναμικό ως: $v_j = \sum_{i=0}^p w_{ij} y_i$
 - Υπολόγισε την έξοδο από την συνάρτηση ενεργοποίησης: $y_j = \varphi(v_j)$
- Συμβολίζουμε με o_j την έξοδο μόνο των νευρώνων εξόδου
 - $o_j = y_j$
- Για κάθε νευρώνα εξόδου:
 - Υπολόγισε το σφάλμα: $e_j = d_j - o_j$ (επιθυμητή μείον παραγματική)

p είναι ο συνολικός αριθμός εισόδων του νευρώνα j

- Υπολογίζεται το δυναμικό του νευρώνα ως άθροισμα των γινομένων βαρών-εισόδων
- Συμπεριλαμβάνεται η είσοδος κατωφλίου (αν υπάρχει)



$$v_{\Delta} = w_{AD}y_A + w_{BD}y_B + w_{GD}y_G$$

$$y_{\Delta} = \varphi(v_{\Delta})$$

A. Θεωρία

2. Εκπαίδευση ΤΝΔ με τον αλγόριθμο οπισθοδιάδοσης

1. Ο αλγόριθμος οπισθοδιάδοσης του λάθους

ΠΡΟΣ ΤΑ ΠΙΣΩ ΠΕΡΑΣΜΑ:

A. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΠΙΚΩΝ ΚΛΙΣΕΩΝ

Οι νευρώνες εξετάζονται κατά την φθίνουσα αρίθμηση $j=N, N-1, \dots, 1$

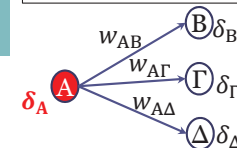
- Υπολογισμός της τοπικής κλίσης δ για κάθε υπολογιστικό νευρώνα:
 - Για τους νευρώνες εξόδου
 - $\delta_j(n) = e_j \cdot \varphi'_j(v_j)$
 - Για τους νευρώνες κρυφού επιπέδου:
 - $\delta_j(n) = \varphi'_j(v_j) \cdot \sum_k [\delta_k(n) \cdot w_{jk}(n)]$
 - Για τους νευρώνες εισόδου:
 - Δεν γίνεται υπολογισμός τοπικής κλίσης

Το δ για τους νευρώνες εξόδου υπολογίζεται ως το γινόμενο

- Του σφάλματος του νευρώνα
- Την παράγωγο της συνάρτησης ενεργοποίησης με όρισμα το δυναμικό του νευρώνα

Το δ για τους κρυφούς νευρώνες υπολογίζεται ως το γινόμενο

- Την παράγωγο της συνάρτησης ενεργοποίησης με όρισμα το δυναμικό του νευρώνα
- Κάνουμε το άθροισμα (δ*βάρος) για κάθε έξοδο του νευρώνα



$$\delta_A(n) = \varphi'_A(v_A) \cdot [\delta_B(n) \cdot w_{AB}(n) + \delta_{\Gamma}(n) \cdot w_{A\Gamma}(n) + \delta_{\Delta}(n) \cdot w_{AD}(n)]$$

A. Θεωρία

2. Εκπαίδευση ΤΝΔ με τον αλγόριθμο οπισθοδιάδοσης

3. Ο αλγόριθμος οπισθοδιάδοσης του λάθους

ΠΡΟΣ ΤΑ ΠΙΣΩ ΠΕΡΑΣΜΑ:

B. ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ ΣΤΑ ΒΑΡΗ ΤΩΝ ΑΚΜΩΝ

- Διορθώσεις σε όλα τα βάρη:
 - Υπολογισμός Διόρθωσης των Βαρών των ακμών:
 - $\Delta w_{ij}(n) = \eta \cdot \delta_j(n) \cdot y_i(n)$
 - Υπολογισμός των νέων βαρών:
 - $w_{ij}(n+1) = w_{ij}(n) + \Delta w_{ij}(n)$

ΧΡΗΣΗ ΟΡΜΗΣ (momentum) α ($0 < \alpha < 1$) η γραμμή τροποποιείται ως:

$$\Delta w_{ji}(n) = \eta \cdot \delta_j(n) \cdot y_i(n) + \alpha \cdot \Delta w_{ji}(n-1)$$



$$\Delta w_{AB}(n) = \eta \cdot \delta_B(n) \cdot y_A(n)$$

$$w_{AB}(n) = w_{AB}(n) + \Delta w_{AB}(n-1)$$

A. Θεωρία

2. Εκπαίδευση Νευρώνα με τον κανόνα μάθησης Δέλτα

3. Ο αλγόριθμος οπισθοδιάδοσης του λάθους

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΕΡΜΑΤΙΣΜΟΥ:

- Το δίκτυο παράγει τις επιθυμητές εξόδους ή έχουν ένα σφάλμα μικρότερο από κριτήριο που έχουμε θέσει.
- Το σφάλμα παρέμεινε ίδιο σε δύο διαδοχικούς κύκλους εκπαίδευσης
- Εκτελέσαμε τον αλγόριθμο για ένα συγκεκριμένο αριθμό βημάτων.

Επειδή απαιτείται ένας πολύ μεγάλος αριθμός πράξεων, στις εξετάσεις συνήθως μας βάζουν να τρέξουμε τον αλγόριθμο για 1 βήμα με 1 πρότυπο.



A. Θεωρία

2. Εκπαίδευση ΤΝΔ με τον αλγόριθμο οπισθοδιάδοσης

4. Γνωστές Παράγωγοι

Όνομα	Συνάρτηση	Παράγωγος
Σιγμοειδής	$\varphi(x) = \frac{1}{1+e^{-ax}}$	$\varphi'(x) = a\varphi(x)(1 - \varphi(x))$
Γραμμική	$\varphi(x) = x$	$\varphi'(x) = 1$
Υπερβολική Εφαπτομένη	$\varphi(x) = \frac{1 - e^{-ax}}{1 + e^{-ax}}$	$\varphi'(x) = \frac{a}{2} [1 - \varphi^2(x)]$
Γραμμική με συντελεστή	$\varphi(x) = ax$	$\varphi'(x) = a$
Ημίτονο	$\varphi(x) = \sin(x)$	$\varphi'(x) = \cos(x)$
Συνημίτονο	$\varphi(x) = \cos(x)$	$\varphi'(x) = -\sin(x)$



A. Θεωρία

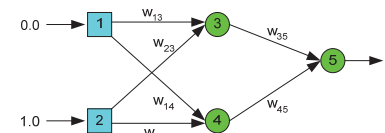
2. Εκπαίδευση ΤΝΔ με τον αλγόριθμο οπισθοδιάδοσης

5. Παράδειγματα (Παράδειγμα 1)

Δίνεται το παρακάτω ΤΝΔ για την επίλυση του προβλήματος XOR. Για την εκπαίδευσή του χρησιμοποιείται η μέθοδος οπισθοδιάδοσης του σφάλματος με ρυθμό εκπαίδευσης $\eta=1$, χωρίς χρήση ορμής (momentum). Η συνάρτηση ενεργοποίησης σε όλους τους νευρώνες είναι η γνωστή σιγμοειδής συνάρτηση S, όπου:

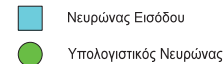
$$S(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

Σε κάποια στιγμή εκπαίδευσής του για την εκμάθηση του προτύπου $[0.0, 1.0]$ τα βάρη των συνδέσεων μεταξύ των κόμβων έχουν πάρει τις παρακάτω τιμές:
 $w_{13}=0.1$, $w_{14}=0.2$, $w_{23}=0.2$, $w_{24}=0.1$, $w_{35}=-0.1$ και $w_{45}=-0.1$.



Ζητούνται αναλυτικά:

Να βρεθούν οι νέες τιμές των βαρών w για το αμέσως επόμενο κύκλο εκπαίδευσης βάσει της μεθόδου οπισθοδιάδοσης του λάθους.



A. Θεωρία

2. Εκπαίδευση ΤΝΔ με τον αλγόριθμο οπισθοδιάδοσης

5. Παράδειγματα (Παράδειγμα 1)

1ος Κύκλος Εκπαίδευσης:

ΠΡΟΣ ΤΑ ΕΜΠΡΟΣ ΠΕΡΑΣΜΑ

ΝΕΥΡΩΝΑΣ 1 (νευρώνας εισόδου)

Η είσοδος μεταφέρεται στην έξοδο, άρα $y_1 = x_1 = 0.0$

ΝΕΥΡΩΝΑΣ 2 (νευρώνας εισόδου)

Η είσοδος μεταφέρεται στην έξοδο, άρα $y_2 = x_2 = 1.0$

ΝΕΥΡΩΝΑΣ 3 (κρυφός νευρώνας)

Δυναμικό: $v_3 = (w_{13} x_1) + (w_{23} x_2) = 0.1 \times 0.0 + 0.2 \times 1.0 = 0.2$

Ενεργοποίηση: $y_3 = \phi(v_3) = \phi(0.2) = \frac{1}{1+e^{-0.2}} = 0.550$

ΝΕΥΡΩΝΑΣ 4 (κρυφός νευρώνας)

Δυναμικό: $v_4 = (w_{14} x_1) + (w_{24} x_2) = 0.2 \times 0.0 + 0.1 \times 1.0 = 0.1$

Ενεργοποίηση: $y_4 = \phi(v_4) = \phi(0.1) = \frac{1}{1+e^{-0.1}} = 0.525$

ΝΕΥΡΩΝΑΣ 5 (νευρώνας εξόδου)

Δυναμικό: $v_5 = (w_{35} y_3) + (w_{45} y_4) = (-0.1) \times 0.550 + (-0.1) \times 0.525 = -0.108$

Ενεργοποίηση: $y_5 = \phi(v_5) = \phi(-0.108) = \frac{1}{1+e^{-(-0.108)}} = 0.473$

Επιθυμητή Έξοδος: 1

Σφάλμα νευρώνα 5: Επιθυμητή-Πραγματική: $e_5 = d_5 - y_5 = 1 - 0.473 = 0.527$

d_5

1

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
0.0	1.0	0.550	0.525	0.473

e_5

0.527



A. Θεωρία

2. Εκπαίδευση ΤΝΔ με τον αλγόριθμο οπισθοδιάδοσης

5. Παράδειγματα (Παράδειγμα 1)

1ος Κύκλος Εκπαίδευσης:

ΠΡΟΣ ΤΑ ΠΙΣΩ ΠΕΡΑΣΜΑ

A. Υπολογισμός Τοπικών Κλίσεων

ΝΕΥΡΩΝΑΣ 5

Είναι Νευρώνας Εξόδου άρα:

$$\delta_5(n) = e_5 \cdot \varphi'_5(v_5) = e_5 \cdot [\varphi_5(v_5)(1 - \varphi_5(v_5))] = 0.131$$

ΝΕΥΡΩΝΑΣ 4

Είναι Κρυφός Νευρώνας, άρα:

$$\begin{aligned} \delta_4(n) &= \varphi'_4(v_4) \cdot [\delta_5(n) * w_{45}(n)] = \\ &= [\varphi_4(v_4)(1 - \varphi_4(v_4))] [\delta_5(n) * w_{45}(n)] = [0.525(1 - 0.525)][0.131 * (-0.1)] = -0.003 \end{aligned}$$

ΝΕΥΡΩΝΑΣ 3

Είναι Κρυφός Νευρώνας, άρα:

$$\begin{aligned} \delta_3(n) &= \varphi'_3(v_3) \cdot [\delta_5(n) * w_{35}(n)] = \\ &= [\varphi_3(v_3)(1 - \varphi_3(v_3))] [\delta_5(n) * w_{35}(n)] = [0.550(1 - 0.550)][0.131 * (-0.1)] = -0.003 \end{aligned}$$

δ_3	δ_4	δ_5
-0.003	-0.003	0.131



A. Θεωρία

2. Εκπαίδευση ΤΝΔ με τον αλγόριθμο οπισθοδιάδοσης

5. Παράδειγματα (Παράδειγμα 1)

1ος Κύκλος Εκπαίδευσης:

ΠΡΟΣ ΤΑ ΠΙΣΩ ΠΕΡΑΣΜΑ

B. Υπολογισμός Νέων Βαρών

Διορθώσεις στα Βάρη:

$$\Delta w_{35}(n) = \eta \cdot \delta_5(n) \cdot y_3(n) = 1 \times 0.131 \times 0.550 = 0.072$$

$$\Delta w_{45}(n) = \eta \cdot \delta_5(n) \cdot y_4(n) = 1 \times 0.131 \times 0.525 = 0.069$$

$$\Delta w_{14}(n) = \eta \cdot \delta_4(n) \cdot y_1(n) = 1 \times (-0.003) \times 0.0 = 0.0$$

$$\Delta w_{24}(n) = \eta \cdot \delta_4(n) \cdot y_2(n) = 1 \times (-0.003) \times 1.0 = -0.003$$

$$\Delta w_{13}(n) = \eta \cdot \delta_3(n) \cdot y_1(n) = 1 \times (-0.003) \times 0.0 = 0.0$$

$$\Delta w_{23}(n) = \eta \cdot \delta_3(n) \cdot y_2(n) = 1 \times (-0.003) \times 1.0 = -0.003$$

Νέα Βάρη:

$$w_{35}(n+1) = w_{35}(n) + \Delta w_{35}(n) = -0.1 + 0.072 = -0.028$$

$$w_{45}(n+1) = w_{45}(n) + \Delta w_{45}(n) = -0.1 + 0.069 = -0.031$$

$$w_{14}(n+1) = w_{14}(n) + \Delta w_{14}(n) = 0.2 + 0.0 = 0.2$$

$$w_{24}(n+1) = w_{24}(n) + \Delta w_{24}(n) = 0.1 + (-0.003) = 0.097$$

$$w_{13}(n+1) = w_{13}(n) + \Delta w_{13}(n) = 0.1 + 0.0 = 0.1$$

$$w_{23}(n+1) = w_{23}(n) + \Delta w_{23}(n) = 0.2 + (-0.003) = 0.197$$

Η εφαρμογή του 1ου κύκλου τελείωσε. Υπολογίζεται ότι με τα νέα βάρη η έξοδος είναι 0.492, δηλαδή πιο κοντά στην επιθυμητή έξοδο. Απαιτούνται αρκετοί ακόμη κύκλοι για την εύρεση της σωστής τιμής

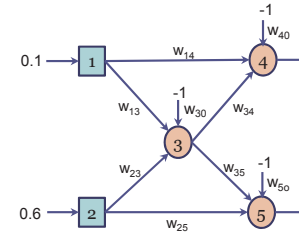


A. Θεωρία

2. Εκπαίδευση ΤΝΔ με τον αλγόριθμο οπισθοδιάδοσης

5. Παράδειγματα (Παράδειγμα 2)

Δίνεται ένα πολυεπίπεδο ΤΝΔ τοπολογίας 2-1-2 με τη συνδεσμολογία όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Για την εκπαίδευσή του χρησιμοποιείται η μέθοδος οπισθοδιάδοσης του σφάλματος με ρυθμό εκπαίδευσης $\eta=1$, χωρίς χρήση ορμής (momentum). Η συνάρτηση ενεργοποίησης σε όλους τους νευρώνες είναι η σιγμοειδής συνάρτηση S, όπου: $S(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$



Πίνακας 1			
Βάρος	Τιμή	Βάρος	Τιμή
$w_{13} =$	0,5	$w_{30} = \theta_3$	0,4
$w_{14} =$	0,5	$w_{40} = \theta_4$	0,4
$w_{23} =$	0,4	$w_{50} = \theta_5$	0,4
$w_{25} =$	0,4		
$w_{34} =$	0,3		
$w_{35} =$	0,3		

Σε κάποια στιγμή εκπαίδευσής του για την εκμάθηση του προτύπου [0.1, 0.6] με επιθυμητή έξοδο [0.0, 1.0] τα βάρη των συνδέσεων και οι τιμές των κατωφλίων έχουν πάρει τις τιμές που δίνονται στον Πίνακα 1. Θεωρείστε ότι τα κατώφλια είναι συνάψεις με είσοδο -1 και βάρος ίσο με την τιμή του κατωφλίου. Να κάνετε τις πράξεις με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων.

Να πραγματοποιήσετε έναν πλήρη κύκλο εκπαίδευσης (προς τα εμπρός και προς τα πίσω πέρασμα)



A. Θεωρία

2. Εκπαίδευση ΤΝΔ με τον αλγόριθμο οπισθοδιάδοσης

5. Παράδειγματα (Παράδειγμα 2)

ΠΡΟΣ ΤΑ ΕΜΠΡΟΣ ΠΕΡΑΣΜΑ

d_4	d_5
0	1

ΝΕΥΡΩΝΑΣ 1 (νευρώνας εισόδου)

Η είσοδος μεταφέρεται στην έξοδο, άρα $y_1 = x_1 = 0.1$

ΝΕΥΡΩΝΑΣ 2 (νευρώνας εισόδου)

Η είσοδος μεταφέρεται στην έξοδο, άρα $y_2 = x_2 = 0.6$

ΝΕΥΡΩΝΑΣ 3 (Κρυφός Νευρώνας)

$$\text{Δυναμικό: } v_3 = (w_{13} \cdot y_1) + (w_{23} \cdot y_2) + (w_{30} \cdot (-1)) = (0.5 \cdot 0.1) + (0.4 \cdot 0.6) + (0.4 \cdot (-1)) = -0.11$$

$$\text{Ενεργοποίηση: } y_3 = \varphi(v_3) = \frac{1}{1+e^{-(-0.11)}} = 0.473$$

ΝΕΥΡΩΝΑΣ 4 (Νευρώνας Εξόδου)

$$\text{Δυναμικό: } v_4 = (w_{14} \cdot y_1) + (w_{34} \cdot y_3) + (w_{40} \cdot (-1)) = (0.5 \cdot 0.1) + (0.3 \cdot 0.473) + (0.4 \cdot (-1)) = -0.208$$

$$\text{Ενεργοποίηση: } y_4 = \varphi(v_4) = \frac{1}{1+e^{-(-0.208)}} = 0.448$$

ΝΕΥΡΩΝΑΣ 5 (Νευρώνας Εξόδου)

$$\text{Δυναμικό: } v_5 = (w_{35} \cdot y_3) + (w_{25} \cdot y_2) + (w_{50} \cdot (-1)) = (0.3 \cdot 0.473) + (0.4 \cdot 0.6) + (0.4 \cdot (-1)) = -0.018$$

$$\text{Ενεργοποίηση: } y_5 = \varphi(v_5) = \frac{1}{1+e^{-(-0.018)}} = 0.496$$

Συνεπώς η έξοδος των νευρώνων είναι:

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
0.1	0.6	0.473	0.448	0.496

Υπολογισμός Σφάλματος για τους νευρώνες εξόδου:

$$\text{Νευρώνας 4: } e_4 = d_4 - y_4 = 0 - 0.448 = -0.448$$

$$\text{Νευρώνας 5: } e_5 = d_5 - y_5 = 1 - 0.496 = 0.504$$

Άρα τα σφάλματα στους νευρώνες εξόδου είναι:

e_4	e_5
-0.448	0.504



A. Θεωρία

2. Εκπαίδευση ΤΝΔ με τον αλγόριθμο οπισθοδιάδοσης

5. Παράδειγματα (Παράδειγμα 2)

ΠΡΟΣ ΤΑ ΠΙΣΩ ΠΕΡΑΣΜΑ

δ_3	δ_4	δ_5
0.126	0.111	0.126

ΝΕΥΡΩΝΑΣ 5 (νευρώνας εξόδου)

Υπολογισμός Τοπικής Κλίσης:

$$\delta_5 = e_5 \cdot \varphi'(v_5) = e_5 \cdot [y_5 (1 - y_5)] = 0.504 \cdot [0.496 (1 - 0.496)] = 0.126$$

Διορθώσεις στα Βάρη των Ακμών:

$$\Delta w_{35} = \eta \cdot y_3 \cdot \delta_5 = 1 \cdot 0.473 \cdot 0.126 = 0.060$$

$$\Delta w_{25} = \eta \cdot y_2 \cdot \delta_5 = 1 \cdot 0.6 \cdot 0.126 = 0.076$$

$$\Delta w_{50} = \eta \cdot (-1) \cdot \delta_5 = 1 \cdot (-1) \cdot 0.126 = -0.126$$

Υπολογισμός των νέων βαρών:

$$w_{35} = w_{35} + \Delta w_{35} = 0.3 + 0.060 = 0.360$$

$$w_{25} = w_{25} + \Delta w_{25} = 0.4 + 0.076 = 0.476$$

$$w_{50} = w_{50} + \Delta w_{50} = 0.4 - 0.126 = 0.274$$

A. Θεωρία

2. Εκπαίδευση ΤΝΔ με τον αλγόριθμο οπισθοδιάδοσης

5. Παράδειγματα (Παράδειγμα 2)

ΝΕΥΡΩΝΑΣ 4 (νευρώνας εξόδου)

Υπολογισμός Τοπικής Κλίσης:

$$\delta_4 = e_4 \cdot \varphi'(v_4) = e_4 \cdot [y_4 (1 - y_4)] = (-0,448) \cdot [0,448 (1 - 0,448)] = -0,111$$

Διορθώσεις στα Βάρη των Ακμών:

$$\Delta w_{34} = \eta \cdot y_3 \cdot \delta_4 = 1 \cdot 0,473 \cdot (-0,111) = -0,053$$

$$\Delta w_{14} = \eta \cdot y_1 \cdot \delta_4 = 1 \cdot 0,1 \cdot (-0,111) = -0,011$$

$$\Delta w_{40} = \eta \cdot (-1) \cdot \delta_4 = 1 \cdot (-1) \cdot (-0,111) = 0,111$$

Υπολογισμός των νέων βαρών:

$$w_{34} = w_{34} + \Delta w_{34} = 0,3 - 0,053 = 0,247$$

$$w_{14} = w_{14} + \Delta w_{14} = 0,5 - 0,011 = 0,489$$

$$w_{40} = w_{40} + \Delta w_{40} = 0,4 + 0,111 = 0,511$$

A. Θεωρία

2. Εκπαίδευση ΤΝΔ με τον αλγόριθμο οπισθοδιάδοσης

5. Παράδειγματα (Παράδειγμα 2)

ΝΕΥΡΩΝΑΣ 3 (κρυφός νευρώνας)

Υπολογισμός Τοπικής Κλίσης:

$$\delta_3 = \varphi'(v_3) \cdot [w_{34} \cdot \delta_4 + w_{35} \cdot \delta_5] = y_3 (1 - y_3) \cdot [w_{34} \cdot \delta_4 + w_{35} \cdot \delta_5] \\ = 0,473 (1 - 0,473) \cdot [0,3 \cdot (-0,111) + 0,3 \cdot 0,126] = 0,001$$

Διορθώσεις στα Βάρη των Ακμών:

$$\Delta w_{23} = \eta \cdot y_2 \cdot \delta_3 = 1 \cdot 0,6 \cdot 0,001 = 0,001$$

$$\Delta w_{13} = \eta \cdot y_1 \cdot \delta_3 = 1 \cdot 0,1 \cdot 0,001 = 0$$

$$\Delta w_{30} = \eta \cdot (-1) \cdot \delta_3 = 1 \cdot (-1) \cdot 0,001 = -0,001$$

Υπολογισμός των νέων βαρών:

$$w_{23} = w_{23} + \Delta w_{23} = 0,4 + 0,001 = 0,401$$

$$w_{13} = w_{13} + \Delta w_{13} = 0,5 + 0 = 0,5$$

$$w_{30} = w_{30} + \Delta w_{30} = 0,4 - 0,001 = 0,399$$

A. Θεωρία

2. Εκπαίδευση ΤΝΔ με τον αλγόριθμο οπισθοδιάδοσης

6. Παρατηρήσεις για τον Αλγόριθμο Οπισθοδιάδοσης

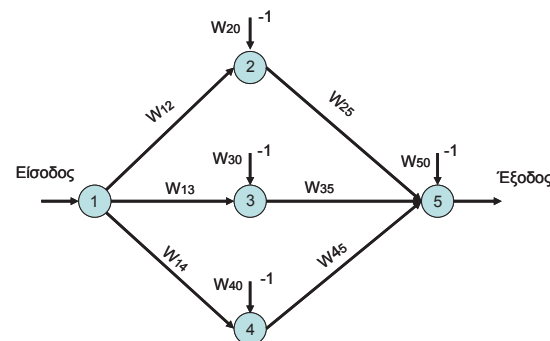
- Οι κύκλοι εκπαίδευσης αναφέρονται και ως εποχές εκπαίδευσης. Μία εποχή εκπαίδευσης συνίσταται σε έναν πλήρη κύκλο παρουσίασης όλων των προτύπων εισόδου – εξόδου.
 - Τα πρότυπα μπορούν να παρουσιαστούν με τυχαία σειρά σε μία εποχή εκπαίδευσης, θα πρέπει ωστόσο να παρουσιαστούν όλα και ακριβώς μία φορά το καθένα..
- Υπάρχουν δύο τρόποι όσον αφορά την εκπαίδευση του δικτύου:
 - Τρόπος προτύπων: Μετά από κάθε πρότυπο, αλλάζουν τα βάρη του δικτύου.
 - Σωρηδόν τρόπος (batch mode): Παρουσιάζονται όλα τα πρότυπα, γίνεται ο υπολογισμός της εξόδου και στην συνέχεια, υπολογίζεται το μέσο τετραγωνικό λάθος πάνω σε όλα τα δείγματα σύμφωνα με το μαθηματικό τύπο:

$$E_{average} = \frac{1}{2N} \sum_{n=1}^N \sum_j e_j^2(n)$$

B. Ασκήσεις

Εφαρμογή 1

Θέλουμε να εκπαιδεύσουμε το ΤΝΔ που παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα, ώστε η έξοδός του να παράγει το τετράγωνο της εισόδου του. Οι νευρώνες του κρυφού επιπέδου έχουν συνάρτηση ενεργοποίησης τη σιγμοειδή συνάρτηση $S(x) = 1/(1 + e^{-x})$, ενώ ο νευρώνας εξόδου τη γραμμική συνάρτηση αντίστοιχα. Σε κάποια στιγμή της εκπαίδευσης τα βάρη έχουν πάρει τις τιμές όπως τις παρουσιάζει ο Πίνακας 1. Επίσης, υπενθυμίζεται ότι τα κατωφλία έχουν εισόδο την τιμή -1.



Πίνακας 1 Βάρη του ΤΝΔ

w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{25}	w_{35}	w_{45}	w_{20}	w_{30}	w_{40}	w_{50}
0.10	0.10	0.20	0.30	0.82	0.20	0.10	0.10	0.10	0.10

Για όλα τα παρακάτω ερωτήματα χρησιμοποιείστε ακρίβεια 2 δεκαδικών.



Β. Ασκήσεις

Εφαρμογή 1

(α) Ποιο είναι το σφάλμα στην έξοδο του δικτύου αν εισάγουμε την τιμή 0.5 ως είσοδο; Για ευκολία στις πράξεις δίνεται ο Πίνακας 1 για τις εξόδους της σιγμοειδούς συνάρτησης.

Πίνακας 1 Έξοδοι σιγμοειδούς συνάρτησης

Είσοδος σιγμοειδούς	-0.20	-0.15	-0.1	-0.05	0	0.05	0.1	0.15	0.20
Έξοδος σιγμοειδούς	0.45	0.46	0.48	0.49	0.50	0.51	0.53	0.54	0.55



Β. Ασκήσεις

Εφαρμογή 1

(β) Να υπολογίσετε τις τιμές των ανανεωμένων βαρών που προκύπτουν από την εκπαίδευση του δικτύου με τον αλγόριθμο οπισθοδιάδοσης του λάθους, χρησιμοποιώντας την τιμή εισόδου του ερωτήματος (α). Δίνεται ότι ο ρυθμός εκπαίδευσης είναι 0.2. Να συμπληρωθεί ο Πίνακας 1.

Πίνακας 1 Ανανεωμένα βάρη του ΤΝΔ

W_{12new}	W_{13new}	W_{14new}	W_{25new}	W_{35new}	W_{45new}	W_{20new}	W_{30new}	W_{40new}	W_{50new}

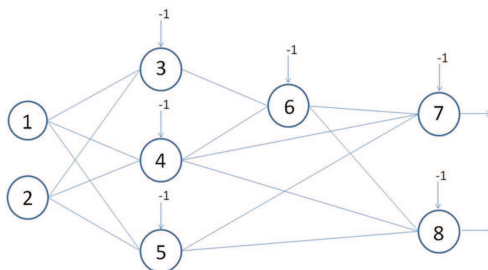


Β. Ασκήσεις

Εφαρμογή 2

Δίνεται το παρακάτω πολυεπίπεδο ΤΝΔ με τοπολογία 2-3-1-2 στο οποίο οι νευρώνες 1 και 2 είναι οι νευρώνες εισόδου. Στους υπόλοιπους υπολογιστικούς νευρώνες, η συνάρτηση ενεργοποίησης είναι: η συνάρτηση $f(x)=x$ για τους νευρώνες 3,4 και 5, η σιγμοειδής συνάρτηση $f(x)=1/(1+e^{-x})$ για το νευρώνα 6 και η συνάρτηση $f(x)=2x$ για τους νευρώνες εξόδου. Το δίκτυο εκπαιδεύεται με τη μέθοδο της οπισθοδιάδοσης του σφάλματος (backpropagation) με ρυθμό εκπαίδευσης $\eta=0.25$.

Τα βάρη των συνδέσεων και των κατωφλίων (σημειώνονται με δέκτη 0) δίνονται στον παρακάτω πίνακα:



W_{13}	0.5	W_{57}	0.2
W_{14}	0.5	W_{58}	0.2
W_{15}	0.5	W_{67}	0.3
W_{23}	0.3	W_{68}	0.3
W_{24}	0.3	W_{30}	0
W_{25}	0.3	W_{40}	0
W_{36}	0.7	W_{50}	0
W_{46}	0.7	W_{60}	0
W_{47}	0.5	W_{70}	-1
W_{48}	0.5	W_{80}	1

Τα σφάλμα στην έξοδο είναι $e_7=-0.53$ και $e_8=0.27$.



(1) Υπολογίστε την έξοδο όταν το διάνυσμα εισόδου είναι το (0,0).

(2) Υπολογίστε τους παράγοντες κλίσης δ_7 και δ_8 στους νευρώνες εξόδου 7 και 8.



(3) Υπολογίστε τον παράγοντα κλίσης (δ_6) στον νευρώνα 6 και το ανανεωμένο βάρος κατωφλίου w_{60} .

(4) Υπολογίστε τον παράγοντα κλίσης (δ_4) στον νευρώνα 4 και το ανανεωμένο βάρος w_{24} .