<u>Δομή:</u> Ένα ΤΝΔ της δομής Hopfield δομείται ως εξής:

- Ν υπολογιστικούς νευρώνες και κάθε νευρώνας στέλνει την έξοδο του σε κάθε άλλο νευρώνα. Άρα έχουμε Ν(Ν-1) συνάψεις (ακμές).
- Δεν υπάρχουν αισθητήρες εισόδου ή εξόδου.

<u>Πίνακας Βαρών:</u> Θέλοντας να αποθηκεύσουμε τα Ν-διάστατα διανύσματα $X_1,X_2,X_3,\dots,X_K$ **(βασικές μνήμες)** θα χρειαστούμε ένα δίκτυο Hopfield N αισθητήρων και η αποθήκευση θα γίνει στα βάρη των ακμών με τον τύπο (I ο NxN μοναδιαίος πίνακας):

$$W = X_1{X_1}^T + X_2{X_2}^T + \cdots + X_K{X_K}^T - K\cdot I$$

<u>Παρατηρήσεις για τον πίνακα βαρών:</u>

- Συμμετρικός ως προς την κύρια διαγώνιο
- Η κύρια διαγώνιος είναι 0.

<u>Έλεγχος ορθής αποθήκευσης των βασικών μνημών:</u>

Κάθε ένα από τα Κ διανύσματα θα πρέπει να εξάγεται από τον πίνακα βαρών με την πράξη:

$sign(W\cdot X_i - \theta)$ που θα πρέπει να είναι ίσο με το X_i

<u>Ισχύουν οι ακόλουθοι τύποι</u> :

- Ο μέγιστος αριθμός βασικών μνημών που αποθηκεύονται χωρίς να έχουμε σφάλμα στην ανάκτηση: $M_{max} = \frac{N}{4\cdot lnN}$
- Αντίστοιχα ώστε περισσότερες από τις μισές βασικές μνήμες να ανακαλούνται χωρίς σφάλμα: $M_{max} = \frac{N}{2\cdot lnN}$

<u>Πίνακας Βαρών:</u> Θεωρείστε ότι θέλουμε να αποθηκεύσουμε τα ακόλουθα 2 διανύσματα σε ένα ΤΝΔ τύπου Hopfield 3 νευρώνων [-1,1,1], [-1,1,-1].

Το δίκτυο που αποθηκεύει τα διανύσματα πρέπει να έχει 3 αισθητήρες (αφού τα διανύσματα έχουν διάσταση 3).

Υπολογίζουμε τον πίνακα βαρών:

$$W = X_1{X_1}^T + X_2{X_2}^T - 2I$$

$$= \begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\1\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\-1&1&1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&-2&0\\-2&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

<u>Έλεγχος Ορθής Αποθήκευσης:</u> Δίνεται ο πίνακας βαρών: $\begin{bmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$ και τα διανύσματα $X1 = \begin{bmatrix}-1\\1\\-1\end{bmatrix}$ και $X2 = \begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$. Να εξετασεί αν τα διανύσματα έχουν αποθηκευτεί σωστά στον πίνακα βαρών θεωρώντας ότι στην ανάκτηση των διανυσμάτων γίνεται χρήση του επόμενου κανόνα: «Αν η έξοδος ενός νευρώνα είναι 0, τότε θέσε την έξοδο ίση με την αντίστοιχη είσοδο»με μηδενικά κατώφλια.

Λύση:

Για το X_1:

$$sign(W\cdot X_1 - \theta) = sign\left(\begin{bmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right) = sign\left(\begin{bmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\end{bmatrix}\right)$$

$$= sign\left(\begin{bmatrix}-2\\0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-1\\1\\-1\end{bmatrix} = X_1$$. Αποθηκεύτηκε σωστά.

Για το X_2:

$$sign(W\cdot X_2 - \theta) = sign\left(\begin{bmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right) =$$

$$sign\left(\begin{bmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}\right) = sign\left(\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix} = X_2$$. Αποθηκεύτηκε σωστά.

Εισαγωγή Φθαρμένου Διανύσματος:
Εισάγεται διάνυσμα X (είτε βασική μνήμη, είτε άλλο (φθαρμένο) διάνυσμα.

Σύγχρονη Ενημέρωση Βαρών:
Γίνεται η πράξη: $sign(W \cdot X - \theta) = X'$ και
Αν το αποτέλεσμα X' = X:
- «Ισορροπεί στην X»

Αν το αποτέλεσμα X' δεν είναι ίσο με X:
- Τότε γίνεται η ίδια πράξη με είσοδο X' (οπότε ή θα έχουμε σύγκλιση ή θα έχουμε παλινδρόμηση (αποτυχία)
  - Σύγκλιση θα έχουμε όταν η είσοδος γίνει ίδια με την έξοδο. (π.χ. X=>X'=>X': ισορροπεί στην X')
  - Παλινδρόμηση θα έχουμε αν ξαναβγεί ένα διάνυσμα που είχαμε εισάγει και σε προηγούμενα (π.χ. X=>X'=>X'' και έπειτα το αποτέλεσμα X'''=X'

Ασύγχρονη Ενημέρωση Βαρών
Όπως παραπάνω, αλλά διορθώνεται μόνο μία είσοδος σε κάθε βήμα.
- Σε έναν κύκλο εκπαίδευσης θα πρέπει να διορθωθούν με τυχαία σειρά όλες οι είσοδοι.
- Μόλις ολοκληρωθεί ο κύκλος ισχύουν τα ίδια κριτήρια τερματισμού με τη σύγχρονη ενημέρωση.

Σύγχρονη Ενημέρωση Βαρών: π.χ. $W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, θ= $\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$

Π.χ.1: Με είσοδο το φθαρμένο διάνυσμα $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$:

$$X(1) = sign(W \times X(0) - \theta) = sign\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}\right)$$

$$= sign\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}\right) = sign\left(\begin{bmatrix} -0{,}5 \\ -2{,}5 \\ -0{,}5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Κατάσταση ισορροπίας: $[-1\ -1\ -1]^T$

Π.χ.2: Με είσοδο το φθαρμένο διάνυσμα $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$:

$$X(1) = sign(W \times X(0) - \theta) = sign\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$X(2) = sign(W \times X(1) - \theta) = sign\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X(3) = sign(W \times X(2) - \theta) = sign\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Παλινδρομεί μεταξύ των X(1) και X(2)

Ασύγχρονη Ενημέρωση Βαρών: (στο ίδιο δίκτυο με είσοδο $[1,1,1]^T$)

$1^{ος}$ κύκλος εκπαίδευσης:

Ο νευρώνας 1 ενημερώνεται: $sign(w_{11}x_1 + w_{12}x_2 + w_{13}x_3 - \theta_1) = sign(0 \times 1 + 1 \times 1 + (-1) \times 1 - 0{,}5) = sign(-0{,}5) = -1$ Συνεπώς: $X(1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Ο νευρώνας 2 ενημερώνεται: $sign(w_{21}x_1 + w_{22}x_2 + w_{23}x_3 - \theta_2) = sign(1 \times (-1) + 0 \times 1 + 1 \times 1 - 0{,}5) = sign(-0{,}5) = -1$. Συνεπώς: $X(2) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Ο νευρώνας 3 ενημερώνεται: $sign(w_{31}x_1 + w_{32}x_2 + w_{33}x_3 - \theta_3) = sign((-1) \times (-1) + 1 \times (-1) + 0 \times 1 - 0{,}5) = sign(-0{,}5) = -1$. Συνεπώς: $X(3) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$2^{ος}$ κύκλος εκπαίδευσης

…