



ΠΛΗ31

ΕΝΟΤΗΤΑ 4: ΓΕΝΕΤΙΚΟΙ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ

Μάθημα 4.2: Βελτιστοποίηση Αριθμητικών Συναρτήσεων

Δημήτρης Ψούνης



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Α.Θεωρία

1. Εισαγωγή στους Γενετικούς Αλγορίθμους
 1. Προβλήματα Αριθμητικής Βελτιστοποίησης
2. Γενετικός Αλγόριθμος για Αριθμητικές Συναρτήσεις
 1. Αρχικοποίηση
 2. Αξιολόγηση
 3. Επιλογή
 4. Διασταύρωση
 5. Μετάλλαξη
3. Παραλλαγή του Γενετικού Αλγορίθμου
 1. Βασική Παραλλαγή του Γενετικού Αλγορίθμου
 2. Παράδειγμα 1: ΕΔΥ/ΑΑ-1
 3. Παράδειγμα 2: ΕΔΥ/ΑΑ-2
 4. Παράδειγμα 3: ΕΔΥ/ΑΑ-3

Εφαρμογές



Α. Θεωρία

1. Εισαγωγή

1. Προβλήματα Αριθμητικής Βελτιστοποίησης

- Στα προβλήματα αριθμητικής βελτιστοποίησης, μας δίνεται μια αριθμητική συνάρτηση f πολλών μεταβλητών και ζητείται να βρούμε το **μέγιστό** της.
 - Γενική Μορφή **προβλήματος μεγιστοποίησης**:
 $f(x_1, x_1, \dots, x_k): \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ και ζητείται το $\max[f]$
 - Η συνάρτηση f καλείται **αντικειμενική συνάρτηση** (objective function)
- Ακόμη και αν ζητείται το πρόβλημα της **ελαχιστοποίησης** μιας συνάρτησης (εύρεση του ελαχίστου) μπορούμε να το μεταμορφώσουμε σε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης λύνοντας:
 - αντί για το: $\min[f]$
 - το $\max[-f]$
- Ακόμη θα υποθέσουμε ότι η f παίρνει μόνο θετικές τιμές.
 - Ακόμη κι αν δεν παίρνει θετικές τιμές, μπορούμε να εισάγουμε μια θετική σταθερά, ώστε να παίρνει μόνο θετικές τιμές.
 - Εργαζόμαστε δηλαδή με τη συνάρτηση:
 $\max[f + C]$



Α. Θεωρία

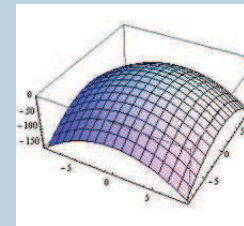
1. Εισαγωγή

1. Προβλήματα Αριθμητικής Βελτιστοποίησης

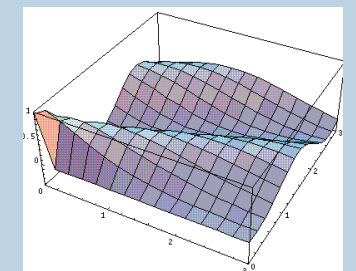
- Η εύρεση ενός μεγίστου σε μία αριθμητική συνάρτηση είναι ένα πολύ σημαντικό υπολογιστικό πρόβλημα. Έχουν προταθεί πολλές προσεγγίσεις για την αποδοτική επίλυση του προβλήματος.
- Για παράδειγμα έχουν προταθεί:
 - Η αναρρίχηση λόφου που ακολουθεί μια αύξουσα πορεία στην γραφική παράσταση της συνάρτησης
 - Οι **γενετικοί Αλγόριθμοι** που πράκτορες είναι ατάκτως εριμμένοι στον χώρο αναζήτησης αναζητώντας ένα καλό τοπικό βέλτιστο.

Παράδειγμα 1

$$f(x, y) = -x^4 - y^4$$



Παράδειγμα 2



A. Θεωρία

2. Γενετικός Αλγόριθμος για Αριθμητικές Συναρτήσεις.

- Θα μελετήσουμε πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον γενετικό αλγόριθμο για να μεγιστοποιήσουμε μία αριθμητική συνάρτηση

Ο βασικός Γενετικός Αλγόριθμος αποτελείται από τα εξής βήματα:

- Αρχικοποίηση** του πληθυσμού (Initialization)
 - Επανάλαβε:
 - Αξιολόγηση** κάθε στοιχείου του πληθυσμού
 - Επιλογή** ενός νέου πληθυσμού (τελεστής επιλογής)
 - Διασταύρωση** στοιχείων του πληθυσμού (τελεστής διασταύρωσης)
 - Μετάλλαξη** στοιχείων του πληθυσμού (τελεστής μετάλλαξης)
- Εως ότου να ικανοποιηθεί το **κριτήριο τερματισμού** του ΓΑ

A. Θεωρία

2. Γενετικός Αλγόριθμος για Αριθμητικές Συναρτήσεις

- Ο Γενετικός Αλγόριθμος για Αριθμητικές Συναρτήσεις παρουσιάζει την εξής ιδιαιτερότητα:
 - Πρέπει να αποφασιστεί ένας τρόπος για την αναπαράσταση των τιμών των μεταβλητών στην μνήμη.
 - Θα επιλεγθεί δυαδική κωδικοποίηση
 - Θα προταθεί τρόπος για να επιτυγχάνεται η επιθυμητή ακρίβεια σε δεκαδικά ψηφία των μεταβλητών.
 - Θα προταθεί τρόπος για να γίνεται η κωδικοποίηση και η αποκωδικοποίηση των μεταβλητών
 - Ο τρόπος αυτός είναι συγκεκριμένος και θα παρουσιαστεί στις επόμενες διαφάνειες.
- Τα υπόλοιπα βήματα είναι ίδια με αυτά που είδαμε στον Βασικό Γενετικό Αλγόριθμο:
 - Η επιλογή θα γίνεται με εξαναγκασμένη ρουλέτα.
 - Η διασταύρωση θα είναι μονού σημείου.
 - Η μετάλλαξη θα γίνει με εναλλαγή bit με βάση τους τυχαίους αριθμούς.

A. Θεωρία

2. Γενετικός Αλγόριθμος για Αριθμητικές Συναρτήσεις.

ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΤΟΥ ΓΕΝΕΤΙΚΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ ΓΙΑ ΜΙΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ:

Συμβολισμός	Επεξήγηση
$f(x_1, x_1, \dots, x_k)$ όπου $x_i \in D_i = [a_i, b_i]$	Αντικειμενική Συνάρτηση και Πεδίο Ορισμού κάθε ορίσματος.
pop_size	Μέγεθος του πληθυσμού (χρωμοσώματα)
p_c	Πιθανότητα Διασταύρωσης
p_m	Πιθανότητα Μετάλλαξης
K	Αριθμός Γενεών (επαναλήψεις του αλγορίθμου)

A. Θεωρία

2. Γενετικός Αλγόριθμος για Αριθμητικές Συναρτήσεις

-1. Διατύπωση του αριθμητικού προβλήματος μεγιστοποίησης

Δίδεται μία αριθμητική συνάρτηση:

$$f(x_1, x_1, \dots, x_k): \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^+$$

και ζητείται το $\max[f]$

Κάθε όρισμα x_i παίρνει τιμές στο αντίστοιχο κλειστό διάστημα $D_i = [a_i, b_i]$

Η συνάρτηση καλείται εναλλακτικά:

- Αντικειμενική Συνάρτηση**
- Συνάρτηση Καταλληλότητας**
- Συνάρτηση Ικανότητας**
- Συνάρτηση Απόδοσης**

Παράδειγμα

Δίδεται η αντικειμενική συνάρτηση:

$$f(x_1, x_1) = x_1^1 - x_1^1$$

Όπου $x_1 \in [4, 11]$ και $x_1 \in [1, 4]$

Και αναζητούμε ένα τοπικό μέγιστο

A. Θεωρία

2. Γενετικός Αλγόριθμος για Αριθμητικές Συναρτήσεις

0. Κωδικοποίηση των λύσεων στο δυαδικό σύστημα

Η κωδικοποίηση της λύσης θα γίνει στο δυαδικό σύστημα. Από την εκφώνηση θα μας δίνεται η επιθυμητή ακρίβεια σε δεκαδικά ψηφία, έστω q άρα:

Διαδοχικά για κάθε μεταβλητή x_1, x_2, \dots, x_n

- Χωρίζουμε το διάστημα $[a_i, b_i]$ σε $(b_i - a_i) \cdot 10^q$ διαστήματα
- Εντοπίζουμε το ελάχιστο m_i για το οποίο ισχύει: $(b_i - a_i) \cdot 10^q \leq 2^{m_i} - 1$
- Η τιμή του x_i θα χρειαστεί m_i bits.

Συνεπώς η λύση αναπαρίσταται με:

- Τα πρώτα m_1 bits αναπαριστούν την 1^η μεταβλητή
- Τα επόμενα m_i bits αναπαριστούν την 2^η μεταβλητή
- ...
- Κ.Ο.Κ.

A. Θεωρία

2. Γενετικός Αλγόριθμος για Αριθμητικές Συναρτήσεις

0. Κωδικοποίηση των λύσεων στο δυαδικό σύστημα

Παράδειγμα

Στην αντικειμενική συνάρτηση:

$$f(x_1, x_i) = x_1^i - x_i^i$$

Όπου $x_1 \in [4, 11]$ και $x_i \in [1, 4]$

Ζητείται αναπαράσταση με 0 δεκαδικά ψηφία.

Συνεπώς για την μεταβλητή x_1 θα χρειαστώ:

$$(11 - 4) \cdot 10^0 \leq 2^{m_1} - 1 \Rightarrow 7 \leq 2^{m_1} - 1 \Rightarrow \log 8 \leq \log 2^{m_1} \Rightarrow \log 8 \leq m_1$$

Άρα 3 bits.

Και για την μεταβλητή x_i θα χρειαστώ:

$$(4 - 1) \cdot 10^0 \leq 2^{m_2} - 1 \Rightarrow 3 \leq 2^{m_2} - 1 \Rightarrow \log 4 \leq \log 2^{m_2} \Rightarrow \log 4 \leq m_2$$

Άρα 2 bits.

Συνολικά λοιπόν θα απαιτηθούν 5 bits. Τα τρία πρώτα θα αναπαριστούν την τιμή της x_1 και η δεύτερη θα αναπαριστά την μεταβλητή x_2

A. Θεωρία

2. Γενετικός Αλγόριθμος για Αριθμητικές Συναρτήσεις

0. Κωδικοποίηση των λύσεων στο δυαδικό σύστημα

ΚΩΔΙΚΟΠΟΙΗΣΗ στο δυαδικό

Η κωδικοποίηση της τιμής της μεταβλητής x_i θα γίνεται ως εξής: Θα αντιστοιχίζεται μια δυαδική συμβολοσειρά bin_str_i , τέτοια ώστε:

$$\text{binary}\left(\frac{x_i - a_i}{b_i - a_i} \cdot (2^{m_i} - 1)\right)$$

ΑΠΟΚΩΔΙΚΟΠΟΙΗΣΗ δυαδικής συμβολοσειράς

Η αποκωδικοποίηση της δυαδικής συμβολοσειράς στην αντίστοιχη δεκαδική τιμή θα γίνεται με τον τύπο:

$$x_i = a_i + \text{decimal}(\text{bin_str}_i) \frac{b_i - a_i}{2^{m_i} - 1}$$

Παράδειγμα

Στην αντικειμενική συνάρτηση:

$$f(x_1, x_i) = x_1^i - x_i^i$$

Όπου $x_1 \in [4, 11]$ και $x_i \in [1, 4]$

Κωδικοποίηση της λύσης (6,2)

$$\text{binary}(6 - 4) = \text{binary}(2) = 010$$

$$\text{binary}(2 - 1) = \text{binary}(1) = 01$$

Άρα η λύση θα κωδικοποιηθεί ως 01001.

Αποκωδικοποίηση του διανυσματος 01111

$$x_1 = a_1 + \text{decimal}(011) \frac{11 - 4}{2^3 - 1} = 4 + 3 = 7$$

$$x_i = a_i + \text{decimal}(11) \frac{4 - 1}{2^2 - 1} = 1 + 3 = 4$$

Είναι η λύση (7,4)

A. Θεωρία

2. Γενετικός Αλγόριθμος για Αριθμητικές Συναρτήσεις

1. Αρχικοποίηση

Αρχικοποίηση

Στο βήμα της αρχικοποίησης δημιουργούμε έναν τυχαίο πληθυσμό από δυνατές λύσεις

Το πλήθος των τυχαίων λύσεων που παράγονται είναι **pop_size** (παράμετρος του προβλήματος)

Το μέγεθος του πληθυσμού μένει σταθερό στην διάρκεια του αλγορίθμου.

Αρχικοποίηση

Έστω ότι ο πληθυσμός έχει **pop_size=4**
Παράγουμε 4 δυαδικές συμβολοσειρές μήκους 5 με τυχαίο τρόπο:

A: 00110

B: 11000

Γ: 01101

Δ: 11111

A. Θεωρία

2. Γενετικός Αλγόριθμος για Αριθμητικές Συναρτήσεις

2.1. Αξιολόγηση

Αξιολόγηση

Η αξιολόγηση γίνεται σε δύο βήματα.

- 1) Γίνεται η αποκωδικοποίηση της λύσης στο αντίστοιχο διάνυσμα τιμών: v_i .
- 2) Για κάθε λύση υπολογίζεται η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης: $eval(v_i)$.

Αξιολόγηση

A: 00110

Αποκωδικοποίηση ... $v_1 = (5,3)$

Αξιολόγηση: $f(x_1, x_1) = x_1^1 - x_1^1 = 16$

Άρα: $eval(v_1) = 16$

B: 11000

Αποκωδικοποίηση ... $(10,1)$

Αξιολόγηση: $f(x_1, x_1) = x_1^1 - x_1^1 = 99$

Άρα: $eval(v_1) = 99$

Γ: 01101

Αποκωδικοποίηση ... $(7,2)$

Αξιολόγηση: $f(x_1, x_1) = x_1^1 - x_1^1 = 45$

Άρα: $eval(v_3) = 45$

Δ: 11111

Αποκωδικοποίηση ... $(11,4)$

Αξιολόγηση: $f(x_1, x_1) = x_1^1 - x_1^1 = 105$

Άρα: $eval(v_4) = 105$

A. Θεωρία

2. Γενετικός Αλγόριθμος για Αριθμητικές Συναρτήσεις

2.2. Επιλογή

Επιλογή

Η επιλογή γίνεται με την μέθοδο της **εξαναγκασμένης ρουλέτας**:

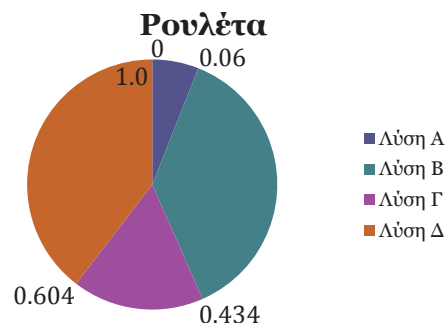
Εφαρμογή της Επιλογής στο Παράδειγμα

- Το άθροισμα των αξιολογήσεων των μελών είναι:
 $F = 16 + 99 + 45 + 105 = 265$
- Η πιθανότητα επιλογής των μελών:
 - $p_1 = \frac{eval(v_1)}{F} = \frac{16}{265} = 0.060$
 - $p_l = \frac{eval(v_2)}{F} = \frac{99}{265} = 0.374$
 - $p_3 = \frac{eval(v_3)}{F} = \frac{45}{265} = 0.170$
 - $p_4 = \frac{eval(v_4)}{F} = \frac{105}{265} = 0.396$
- Η αθροιστική πιθανότητα των μελών:
 - $q_1 = p_1 = 0.060$
 - $q_l = p_1 + p_l = 0.434$
 - $q_3 = p_1 + p_l + p_3 = 0.604$
 - $q_4 = p_1 + p_l + p_3 + p_4 = 1.000$

A. Θεωρία

2. Γενετικός Αλγόριθμος για Αριθμητικές Συναρτήσεις

2.2. Επιλογή



Επιλογή: Διαδοχικά από μια γεννήτρια τυχαίων αριθμών έχουμε:

- $r = 0.55$: Επιλογή του Γ
- $r = 0.89$: Επιλογή του Δ
- $r = 0.74$: Επιλογή του Δ
- $r = 0.09$: Επιλογή του B

Προσωρινός πληθυσμός είναι ο $(\Gamma, \Delta, \Delta, B)$

A. Θεωρία

2. Γενετικός Αλγόριθμος για Αριθμητικές Συναρτήσεις

2.3. Διασταύρωση

Διασταύρωση

Η διασταύρωση που γίνεται είναι μονού σημείου

ΔΙΑΣΤΑΥΡΩΣΗ ΜΟΝΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ – ΠΡΟΕΡΓΑΣΙΑ

Η συμβολοσειρά που αναπαριστά μια λύση έχει μέγεθος 5.

Τα πιθανά σημεία διασταύρωσης είναι $n-1=4$. Θέτουμε κάθε ένα σημείο ισοπίθανο με πιθανότητα $1/4=0.25$.

Συνεπώς το σημείο διαχωρισμού θα επιλέγεται τυχαία με βάση τους τυχαίους αριθμούς και θα επιλέγεται ανάμεσα στις:

- Θέσεις 1-2 στο διάστημα $[0.00, 0.25]$
- Θέσεις 2-3 στο διάστημα $(0.25, 0.50]$
- Θέσεις 3-4 στο διάστημα $(0.50, 0.75]$
- Θέσεις 4-5 στο διάστημα $(0.75, 1.00]$

A. Θεωρία

2. Γενετικός Αλγόριθμος για Αριθμητικές Συναρτήσεις

2.3. Διασταύρωση

Διασταύρωση (με $p_c=0.80$)

- Επιλέγουμε τυχαίους αριθμούς από το 0 έως το 1 για κάθε μέλος του προσωρινού πληθυσμού (Γ,Δ,Δ,B) και έστω ότι μας δίνεται η ακόλουθη τυχαίων αριθμών
 - 0.45 0.68 0.77 0.93 0.35 0.22

1° ζεύγος (Γ,Δ).

- Τυχαίος Αριθμός: $0.45 \leq p_c$. Διασταυρώνονται!
 - Τυχαίος Αριθμός: 0.68, άρα μεταξύ θέσεων 3-4.
 - $\Gamma = 0111 \mid 01$ $A' = 011 \mid 11$
 - $\Delta = 111 \mid 11$ $B' = 111 \mid 01$

2° ζεύγος (Δ,B).

- Τυχαίος Αριθμός: $0.77 \leq p_c$. Διασταυρώνονται!
 - Τυχαίος Αριθμός: 0.93, άρα μεταξύ θέσεων 4-5.
 - $\Delta = 1111 \mid 1$ $\Gamma' = 1111 \mid 0$
 - $B = 1100 \mid 0$ $\Delta' = 1100 \mid 1$

A. Θεωρία

2. Γενετικός Αλγόριθμος για Αριθμητικές Συναρτήσεις

2.3. Διασταύρωση

Διασταύρωση (με $p_c=0.80$)

Συνεπώς ο πληθυσμός μετά το βήμα της διασταύρωσης είναι:

- $A' = 01111$
- $B' = 11101$
- $\Gamma' = 11110$
- $\Delta' = 11001$

A. Θεωρία

2. Γενετικός Αλγόριθμος για Αριθμητικές Συναρτήσεις

2.4. Μετάλλαξη

Μετάλλαξη

Κάθε bit κάθε χρωμοσώματος αλλάζει αν ο τυχαίος αριθμός που επιλέγουμε είναι μικρότερος από την πιθανότητα μετάλλαξης p_m .

Διασταύρωση (με $p_c=0.30$)

Χρησιμοποιώντας την εξής ακολουθία τυχαίων αριθμών: 0.77 0.23 0.09 0.93 0.28 0.22 0.15 0.82 0.34 0.32 0.44.

	1° bit	2o bit	3° bit	4° bit	5° bit	
$A' = 01111$	0.77 0	0.23 1	<u>0.09</u> <u>1</u>	0.93 1	0.28 1	$A' = 01011$
$B' = 11101$	0.22 1	0.15 1	0.82 1	0.34 0	0.32 1	$B' = 11101$
$\Gamma' = 11110$	0.44 1	0.77 1	0.23 1	<u>0.09</u> <u>1</u>	0.93 0	$\Gamma' = 11100$
$\Delta' = 11001$	0.28 1	0.22 1	0.15 0	0.82 0	0.34 1	$\Delta' = 11001$

A. Θεωρία

2. Γενετικός Αλγόριθμος για Αριθμητικές Συναρτήσεις

Εκτελέσαμε μία πλήρη επανάληψη στον γενετικό αλγόριθμο για την βελτιστοποίηση μιας αριθμητικής συνάρτησης. Θα αξιολογήσουμε τον πληθυσμό που προέκυψε:

Αξιολόγηση

A: 01011

Αποκωδικοποίηση ... $v_1 = (6,4)$

Αξιολόγηση: $f(x_1, x_i) = x_1^i - x_i^i = 20$

Άρα: $eval(v_1) = 20$

B: 11101

Αποκωδικοποίηση ... (11,2)

Αξιολόγηση: $f(x_1, x_i) = x_1^i - x_i^i = 117$

Άρα: $eval(v_i) = 117$

Γ: 11100

Αποκωδικοποίηση ... (11,4)

Αξιολόγηση: $f(x_1, x_i) = x_1^i - x_i^i = 105$

Άρα: $eval(v_3) = 105$

Δ: 11001

Αποκωδικοποίηση ... (10,2)

Αξιολόγηση: $f(x_1, x_i) = x_1^i - x_i^i = 96$

Άρα: $eval(v_4) = 96$



A. Θεωρία

3. Παραλλαγή του Γενετικού Αλγορίθμου

Ο **γενετικός αλγόριθμος** που εξετάσαμε

- Είναι σπάνταρ στο ΕΔΥ,
- Είναι σπάνταρ στα θέματα των εξετάσεων.
- Είναι σχεδόν σπάνταρ στα θέματα των εργασιών.

Στο βιβλίο του ΕΑΠ (Λυκοθανάσης) χρησιμοποιείται **παραλλαγή** του γενετικού αλγορίθμου.

- Το βήμα της επιλογής είναι ίδιο!
- Το βήμα της διασταύρωσης διαφοροποιείται σημαντικά!
- Το βήμα της μετάλλαξης είναι ίδιο!

Θα το δούμε μέσω του παραδείγματος του βιβλίου.



A. Θεωρία

3. Παραλλαγή του Γενετικού Αλγορίθμου

1. Κωδικοποίηση

Η **κωδικοποίηση** γίνεται με τον **ίδιο** τρόπο.

Εξομοιώνουμε τον παραπάνω ΓΑ για τη βελτιστοποίηση μιας συνάρτησης. Έστω $pop_size = 20$, $p_c = 0.25$ και $p_m = 0.01$. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την ακόλουθη συνάρτηση δύο μεταβλητών:

$$f(x_1, x_2) = 21.5 + x_1 \sin(4\pi x_1) + x_2 \sin(20\pi x_2),$$

με $-3.0 \leq x_1 \leq 12.1$ και $4.1 \leq x_2 \leq 5.8$.

Ας υποθέσουμε ακόμη ότι η απαιτούμενη ακρίβεια είναι τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων για κάθε μεταβλητή.

Το εύρος τιμών της μεταβλητής x_1 έχει μήκος 15.1, άρα το διάστημα $[-3.0, 12.1]$ θα πρέπει να διαχωριστεί σε $15.1 \cdot 10000 = 151\,000$ ίσα υπο-διαστήματα. Αυτό σημαίνει ότι 18 δυαδικά ψηφία απαιτούνται για τη δυαδική αναπαράσταση της x_1 (και τα οποία θα αποτελούν το πρώτο τμήμα του χρωμοσώματος), αφού:

$$2^{17} < 151000 \leq 2^{18}.$$



A. Θεωρία

3. Παραλλαγή του Γενετικού Αλγορίθμου

1. Κωδικοποίηση

Η **κωδικοποίηση** γίνεται με τον **ίδιο** τρόπο.

Η ίδια διαδικασία για τη x_2 προσδιορίζει το 15 ως τον απαιτούμενο αριθμό δυαδικών ψηφίων για την αναπαράσταση των δεκαδικών τιμών της. Επομένως, το συνολικό μήκος του χρωμοσώματος, σύμφωνα με τον τύπο (3.2), είναι $m = 18 + 15 = 33$ δυαδικά ψηφία.

Έστω το άτομο:

$$(010001001011010000111110010100010).$$

Τα πρώτα 18 δυαδικά ψηφία (010001001011010000) αναπαριστούν τον αριθμό (από την εξίσωση 3.1)

$$x_1 = -3.0 + 70352 \cdot \frac{15.1}{262143} = -3.0 + 4.05242 = 1.05242,$$

και τα επόμενα 15 δυαδικά ψηφία (11110010100010) τον αριθμό $x_2 = 5.75533$. Δηλαδή, το άτομο αυτό αντιστοιχεί στο σημείο $(x_1, x_2) = (1.05242, 5.75533)$.

Η απόδοση για αυτό το χρωμόσωμα είναι $f(1.05242, 5.75533) = 20.25264$.



A. Θεωρία

3. Παραλλαγή του Γενετικού Αλγορίθμου

2. Αρχικοποίηση

Η **αρχικοποίηση** γίνεται με **τυχαίο** τρόπο. Π.χ. **ισοπίθανη** επιλογή για κάθε bit

Ας υποθέσουμε ότι μετά τη διαδικασία της αρχικοποίησης προκύπτει ο ακόλουθος πληθυσμός:

$$v_1 = (100110100000001111111010011011111) \quad v_{11} = (011001111110110101100001101111000)$$

$$v_2 = (111000100100110111001010100011010) \quad v_{12} = (110100010111101101000101010000000)$$

$$v_3 = (000010000011001000001010111011101) \quad v_{13} = (111011111010001000110000001000110)$$

$$v_4 = (100011000101101001111000001110010) \quad v_{14} = (010010011000001010100111100101001)$$

$$v_5 = (00011101100101001101011111000101) \quad v_{15} = (111011101101110000100011111011110)$$

$$v_6 = (00010100001001010100101011111011) \quad v_{16} = (110011110000011111100001101001011)$$

$$v_7 = (00100010000011010111101101111011) \quad v_{17} = (011010111111001111010001101111101)$$

$$v_8 = (10000110000111010001011010110011) \quad v_{18} = (011101000000001110100111110101101)$$

$$v_9 = (01000000010100010110000001111100) \quad v_{19} = (000101010011111111110000110001100)$$

$$v_{10} = (000001111000110000011010000111011) \quad v_{20} = (101110010110011110011000101111110)$$

A. Θεωρία

3. Παραλλαγή του Γενετικού Αλγορίθμου

3. Αξιολόγηση

Η αξιολόγηση γίνεται με την ίδια διαδικασία. Αποκωδικοποίηση-Υπολογισμός

Αρχικά αποκωδικοποιούμε κάθε χρωμόσωμα και υπολογίζουμε την απόδοσή του. Έτσι έχουμε:

$\text{eval}(v_1) = f(6.084492, 5.652242) = 26.019600$	$\text{eval}(v_{11}) = f(3.130078, 4.996097) = 23.410669$
$\text{eval}(v_2) = f(10.348434, 4.380264) = 7.580015$	$\text{eval}(v_{12}) = f(9.356179, 4.239457) = 15.011619$
$\text{eval}(v_3) = f(-2.516603, 4.390381) = 19.526329$	$\text{eval}(v_{13}) = f(11.134646, 5.378671) = 27.316702$
$\text{eval}(v_4) = f(5.278638, 5.593460) = 17.406725$	$\text{eval}(v_{14}) = f(1.335944, 5.151378) = 19.876294$
$\text{eval}(v_5) = f(-1.255173, 4.734458) = 25.341160$	$\text{eval}(v_{15}) = f(11.089025, 5.054515) = 30.060205$
$\text{eval}(v_6) = f(-1.811725, 4.391937) = 18.100417$	$\text{eval}(v_{16}) = f(9.211598, 4.993762) = 23.867227$
$\text{eval}(v_7) = f(-0.991471, 5.680258) = 16.020812$	$\text{eval}(v_{17}) = f(3.367514, 4.571343) = 13.696165$
$\text{eval}(v_8) = f(4.910618, 4.703018) = 17.959701$	$\text{eval}(v_{18}) = f(3.843020, 5.158226) = 15.414128$
$\text{eval}(v_9) = f(0.795406, 5.381472) = 16.127799$	$\text{eval}(v_{19}) = f(-1.746635, 5.395584) = 20.095903$
$\text{eval}(v_{10}) = f(-2.554851, 4.793707) = 21.278435$	$\text{eval}(v_{20}) = f(7.935998, 4.757338) = 13.666916$

A. Θεωρία

3. Παραλλαγή του Γενετικού Αλγορίθμου

4. Επιλογή

Η επιλογή γίνεται με τον ίδιο τρόπο. Πιθανότητες-Αθροιστικές-Γυρισμα Ρουλέτας

Οι συσσωρευμένες πιθανότητες (cumulative probabilities) q_i για κάθε άτομο $v_i, i=1, \dots, 20$ του πληθυσμού είναι:

$q_1 = 0.067099$	$q_6 = 0.293917$	$q_{11} = 0.538381$	$q_{16} = 0.837863$
$q_2 = 0.086647$	$q_7 = 0.335232$	$q_{12} = 0.577093$	$q_{17} = 0.873182$
$q_3 = 0.137001$	$q_8 = 0.381546$	$q_{13} = 0.647537$	$q_{18} = 0.912932$
$q_4 = 0.181890$	$q_9 = 0.423137$	$q_{14} = 0.698794$	$q_{19} = 0.964756$
$q_5 = 0.247240$	$q_{10} = 0.478009$	$q_{15} = 0.776314$	$q_{20} = 1.000000$

Τώρα είμαστε έτοιμοι να περιστρέψουμε τη ρουλέτα 20 φορές, σε κάθε περιστροφή επιλέγουμε και ένα άτομο για το νέο πληθυσμό. Υποθέτουμε ότι έχουμε παράγει την εξής ακολουθία 20 τυχαίων αριθμών στο διάστημα $[0, 1]$:

0.513870	0.175741	0.308652	0.534534	0.947628
0.171736	0.702231	0.226431	0.494773	0.424720
0.703899	0.389647	0.277226	0.368071	0.983437
0.005398	0.765682	0.646473	0.767139	0.780237

A. Θεωρία

3. Παραλλαγή του Γενετικού Αλγορίθμου

4. Επιλογή

Η επιλογή γίνεται με τον ίδιο τρόπο. Πιθανότητες-Αθροιστικές-Γυρισμα Ρουλέτας

Η πιθανότητα επιλογής p_i κάθε μέλους το πληθυσμού $v_i, i=1, \dots, 20$, είναι:

$p_1 = \text{eval}(v_1)/F = 0.067099$	$p_{11} = \text{eval}(v_{11})/F = 0.060372$
$p_2 = \text{eval}(v_2)/F = 0.019547$	$p_{12} = \text{eval}(v_{12})/F = 0.038712$
$p_3 = \text{eval}(v_3)/F = 0.050355$	$p_{13} = \text{eval}(v_{13})/F = 0.070444$
$p_4 = \text{eval}(v_4)/F = 0.044889$	$p_{14} = \text{eval}(v_{14})/F = 0.051257$
$p_5 = \text{eval}(v_5)/F = 0.065350$	$p_{15} = \text{eval}(v_{15})/F = 0.077519$
$p_6 = \text{eval}(v_6)/F = 0.046677$	$p_{16} = \text{eval}(v_{16})/F = 0.061549$
$p_7 = \text{eval}(v_7)/F = 0.041315$	$p_{17} = \text{eval}(v_{17})/F = 0.035320$
$p_8 = \text{eval}(v_8)/F = 0.046315$	$p_{18} = \text{eval}(v_{18})/F = 0.039750$
$p_9 = \text{eval}(v_9)/F = 0.041590$	$p_{19} = \text{eval}(v_{19})/F = 0.051823$
$p_{10} = \text{eval}(v_{10})/F = 0.054873$	$p_{20} = \text{eval}(v_{20})/F = 0.035244$

A. Θεωρία

3. Παραλλαγή του Γενετικού Αλγορίθμου

4. Επιλογή

Η επιλογή γίνεται με τον ίδιο τρόπο. Πιθανότητες-Αθροιστικές-Γυρισμα Ρουλέτας

Ο πρώτος αριθμός $r = 0.513870$ είναι μεγαλύτερος του q_{10} και μικρότερος του q_{11} , γεγονός που σημαίνει ότι το άτομο v_{11} επιλέγεται για να «περάσει» στο νέο πληθυσμό. Ο δεύτερος αριθμός $r = 0.175741$ είναι μεγαλύτερος του q_3 και μικρότερος του q_4 , οπότε το άτομο v_4 επιλέγεται για το νέο πληθυσμό. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο κατασκευάζουμε το νέο πληθυσμό:

$v_1^* = (01100111110110101100001101111000) (v_{11})$	$v_{11}^* = (111011101101110000100011111011110) (v_{15})$
$v_2^* = (100011000101101001111000001110010) (v_4)$	$v_{12}^* = (010000000101100010110000001111100) (v_9)$
$v_3^* = (00100010000011010111101101111011) (v_7)$	$v_{13}^* = (00010100001001010100101011111011) (v_6)$
$v_4^* = (011001111110110101100001101111000) (v_{11})$	$v_{14}^* = (100001100001110100010110101100111) (v_8)$
$v_5^* = (00010101001111111110000110001100) (v_{19})$	$v_{15}^* = (101110010110011110011000101111110) (v_{20})$
$v_6^* = (100011000101101001111000001110010) (v_4)$	$v_{16}^* = (10011010000000111111101001101111) (v_1)$
$v_7^* = (111011101101110000100011111011110) (v_{15})$	$v_{17}^* = (000001111000110000011010000111011) (v_{10})$
$v_8^* = (00011101100101001101011111000101) (v_5)$	$v_{18}^* = (111011111010001000110000001000110) (v_{13})$
$v_9^* = (011001111110110101100001101111000) (v_{11})$	$v_{19}^* = (111011101101110000100011111011110) (v_{15})$
$v_{10}^* = (000010000011001000001010111011101) (v_3)$	$v_{20}^* = (110011110000011111100001101001011) (v_{16})$

Στην τελευταία στήλη, μέσα σε παρένθεση, φαίνονται τα άτομα του αρχικού πληθυσμού που έχουν περάσει (αντιγραφεί) στην επόμενη γενιά.

A. Θεωρία

3. Παραλλαγή του Γενετικού Αλγορίθμου

5. Διασταύρωση

ΠΡΟΣΟΧΗ! Για κάθε άτομο επιλέγεται τυχαίος αριθμός. Επιλέγονται προς διασταύρωση μόνο τα στοιχεία για τα οποία $ΤΥΧΑΙΟΣ\ ΑΡΙΘΜΟΣ \leq p_c$

Ας υποθέσουμε ότι η ακολουθία των τυχαίων αριθμών είναι:

0.822951	0.151932	0.625477	0.314685	0.346901
0.911720	0.519760	0.401154	0.606758	0.785402
0.031523	0.869921	0.166525	0.674520	0.758400
0.581893	0.389248	0.200232	0.355635	0.826927

Αυτό σημαίνει ότι τα άτομα v_2 , v_{11} , v_{13} και v_{18} επιλέχθηκαν για διασταύρωση (ο αριθμός των ατόμων είναι ζυγός, οπότε το ταίριασμά τους είναι εύκολο – στην περίπτωση που ο αριθμός του ήταν μονός, θα έπρεπε είτε να επιλέξουμε ένα ακόμα άτομο από τον πληθυσμό ή να απορρίψουμε κάποιο από αυτά). Στη συνέχεια, ταιριάζουμε με τυχαίο τρόπο άτομα για ζευγάρωμα. Ας υποθέσουμε ότι ζευγαρώνουν τα πρώτα δύο (v_2 και v_{11}) και τα επόμενα δύο (v_{13} και v_{18}).

A. Θεωρία

3. Παραλλαγή του Γενετικού Αλγορίθμου

5. Διασταύρωση

Διασταυρώνονται κατά ζεύγη **ΜΟΝΟ** τα στοιχεία που επιλέχθηκαν με διασταύρωση μονού σημείου.

Έστω ότι για το πρώτο ζεύγος επιλέχθηκε, ως σημείο διασταύρωσης, $pos = 9$:

$$v_2 = (100011000|101101001111000001110010)$$

$$v_{11} = (111011101|101110000100011111011110)$$

Τότε αυτά θα αντικατασταθούν από τα άτομα-απογόνους

$$v'_2 = (100011000|101110000100011111011110)$$

$$v'_{11} = (111011101|101101001111000001110010)$$

Έστω ότι για το δεύτερο ζεύγος επιλέχθηκε, ως σημείο διασταύρωσης, $pos = 20$:

$$v_{13} = (00010100001001010100|010111111011)$$

$$v_{18} = (1110111110100010001|0000001000110)$$

Τότε αυτά θα αντικατασταθούν από τα άτομα-απογόνους

$$v'_{13} = (00010100001001010100|0000001000110)$$

$$v'_{18} = (1110111110100010001|010111111011)$$

A. Θεωρία

3. Παραλλαγή του Γενετικού Αλγορίθμου

5. Διασταύρωση

Τα υπόλοιπα στοιχεία περνάνε ως έχουν στην επόμενη γενιά.

Οπότε η τρέχουσα μορφή του πληθυσμού έχει ως εξής:

$v_1 = (10011010000000111111101001101111)$	$v'_{11} = (111011101 101101001111000001110010)$
$v'_2 = (100011000 101110000100011111011110)$	$v_{12} = (110100010111101101000101010000000)$
$v_3 = (000010000011001000001010111011101)$	$v'_{13} = (00010100001001010100 0000001000110)$
$v_4 = (100011000101101001111000001110010)$	$v_{14} = (010010011000001010100111100101001)$
$v_5 = (00011101100101001101011111000101)$	$v_{15} = (111011101101110000100011111011110)$
$v_6 = (00010100001001010100101011111011)$	$v_{16} = (110011110000011111100001101001011)$
$v_7 = (00100010000011010111101101111011)$	$v_{17} = (01101011111100111101000110111101)$
$v_8 = (100001100001110100010110101100111)$	$v'_{18} = (1110111110100010001 1010111111011)$
$v_9 = (010000000101100010110000001111100)$	$v_{19} = (000101010011111111110000110001100)$
$v_{10} = (000001111000110000011010000111011)$	$v_{20} = (101110010110011110011000101111110)$

A. Θεωρία

3. Παραλλαγή του Γενετικού Αλγορίθμου

6. Μετάλλαξη

Η Μετάλλαξη γίνεται με τον ίδιο τρόπο. Για κάθε bit επιλέγεται τυχαίος αριθμός. Στο παράδειγμα εκτελείται (υπολογιστικά) μετάλλαξη με πιθανότητα $p_m = 0.01$

$v_1 = (1001101000000001111111010011011111)$	$v'_{11} = (11101110110110101001 11000001110010)$
$v'_2 = (100011000101110000100011111011110)$	$v_{12} = (110100010111101101000101010000000)$
$v_3 = (000010000011001000001010111011101)$	$v'_{13} = (000101000010010101000 00001000111)$
$v'_4 = (01100111111100 0101100001101111000)$	$v_{14} = (010010011000001010100111100101001)$
$v_5 = (00011101100101001101011111000101)$	$v_{15} = (111011101101110000100011111011110)$
$v_6 = (000101000010010101001010111111011)$	$v_{16} = (110011110000011111100001101001011)$
$v_7 = (001000100000110101111011011111011)$	$v_{17} = (011010111111001111010001101111101)$
$v_8 = (100001100001110100010110101100111)$	$v'_{18} = (1110111110100010001111010111111011)$
$v_9 = (010000000101100010110000001111100)$	$v'_{19} = (11101110 101110000100011111011110)$
$v_{10} = (000001111000110000011010000111011)$	$v_{20} = (101110010110011110011000101111110)$

Β. Ασκήσεις

ΕΔΥ/ ΑΑ-1

Δίνεται ο εξής πληθυσμός στη γενιά 0:

A=11011, B=01011, Γ=11001, Δ=10111

και η εξής αντικειμενική συνάρτηση για την αξιολόγηση των μελών του πληθυσμού:

$$fitness = \sum_{i=0}^4 \frac{1 - (-1)^{b^i+i}}{2}$$

όπου το b_i είναι το i -οστό δυαδικό ψηφίο (το πρώτο δυαδικό ψηφίο έχει δείκτη $i=0$).

Επίσης, δίνεται και η παρακάτω λίστα τυχαίων αριθμών που έχει παραχθεί με χρήση μιας γεννήτριας τυχαίων αριθμών:

0.25, 0.73, 0.15, 0.52, 0.81, 0.65

Θεωρήστε ότι:

1. Ο Γ.Α. χρησιμοποιεί τελεστή επιλογής roulette wheel selection.

2. Η πιθανότητα μετάλλαξης είναι ίση με 0.

3. Η πιθανότητα διασταύρωσης είναι 1.0.

4. Η επιλογή των ατόμων που θα συμμετέχουν στη διασταύρωση γίνεται με βάση τον τελεστή επιλογής και τους τυχαίους αριθμούς που προέκυψαν από τη γεννήτρια τυχαίων αριθμών. Ο τελεστής διασταύρωσης είναι μονού σημείου με το σημείο διασταύρωσης να επιλέγεται τυχαία ανάμεσα στα τέσσερα πιθανά σημεία διασταύρωσης κάθε χρωμοσώματος. Με βάση κάποιο τυχαίο αριθμό τα σημεία διασταύρωσης θα επιλέγονται από τα αριστερά προς τα δεξιά με ίδια πιθανότητα και για τα τέσσερα πιθανά σημεία (0.25 για κάθε πιθανή θέση). Δηλαδή εάν ο τυχαίος αριθμός είναι ο 0.45 το σημείο διασταύρωσης θα είναι ανάμεσα στο δυαδικό ψηφίο 1 και το δυαδικό ψηφίο 2 (το πιο αριστερό ψηφίο κάθε συμβολοσειράς έχει αριθμό 0).

5. Και τα δύο παιδιά που προκύπτουν από μία διασταύρωση αντικαθιστούν τους γονείς τους στον πληθυσμό της επόμενης γενιάς.

Με βάση τις παραπάνω υποθέσεις να υπολογίσετε τα ακόλουθα:

Β. Ασκήσεις

ΕΔΥ/ ΑΑ-1

α) Την απόδοση κάθε μέλους του πληθυσμού στη γενιά 0.

Η απόδοση κάθε ατόμου του πληθυσμού στη γενιά 0 είναι:

$f(11011) = 2$

$f(01011) = 1$

$f(11001) = 3$

$f(10111) = 4$

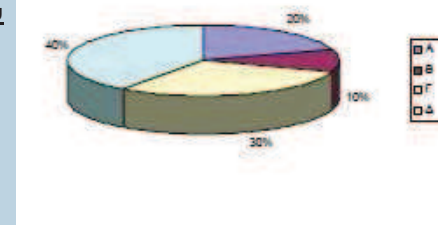
β) Την μέση απόδοση του πληθυσμού στη γενιά 0.

Η μέση απόδοση του πληθυσμού στη γενιά 0 είναι:

Η συνολική απόδοση για τη γενιά 0 είναι: $2+1+3+4 = 10$, οπότε η μέση απόδοση της γενιάς 0 με πληθυσμό 4 άτομα είναι $10/4=2.5$.

γ) Τη ρουλέτα που χρησιμοποιείτε για την επιλογή των ατόμων από τη γενιά 0. Να φαίνεται καθαρά το ποσοστό που αντιστοιχεί σε κάθε άτομο του αρχικού πληθυσμού.

Η ρουλέτα που δημιουργείται με βάση την απόδοση των ατόμων δίνεται από το ακόλουθο σχήμα, όπου το πρώτο άτομο (Α) καταλαμβάνει το 20%, το δεύτερο άτομο (Β) το 10%, το τρίτο άτομο (Γ) το 30% και το τέταρτο άτομο (Δ) 40%.



Β. Ασκήσεις

ΕΔΥ/ ΑΑ-1

δ) Τον πληθυσμό των ατόμων στη γενιά 1.

Ο πληθυσμός των ατόμων στη γενιά 1 υπολογίζεται ως εξής:

Επιλογή: Οι πιθανότητες επιλογής για κάθε μέλος του πληθυσμού είναι:

$p_A = 0.2$, $p_B = 0.1$, $p_\Gamma = 0.3$, $p_\Delta = 0.4$

Υπολογίζουμε τις αθροιστικές πιθανότητες. Αυτές είναι:

$q_A = 0.2$, $q_B = 0.3$, $q_\Gamma = 0.6$, $q_\Delta = 1.0$,

Επιλέγουμε τα άτομα που θα περάσουν στον επόμενο (προσωρινό) πληθυσμό. Αυτό γίνεται με τη χρήση των τεσσάρων πρώτων τυχαίων αριθμών που μας έχουν δοθεί.

Έτσι έχουμε $0.2 < 0.25 < 0.30$ οπότε επιλέγεται το άτομο Β, $0.6 < 0.73 < 1.0$ οπότε επιλέγεται το άτομο Δ, $0.15 < 0.2$ οπότε επιλέγεται το άτομο Α και $0.3 < 0.52 < 0.6$

οπότε επιλέγεται το άτομο Γ. Άρα ο προσωρινός πληθυσμός είναι ο:

01011 (Β), 10111 (Δ), 11011 (Α), 11001 (Γ)

Διασταύρωση: Τα δυο ζευγάρια που προέκυψαν για διασταύρωση είναι τα:

01011 (Β) 10111 (Δ)

και

11011 (Α) 11001 (Γ)

Επειδή η πιθανότητα διασταύρωσης είναι 1.0 (100%) τα δυο ζευγάρια θα διασταυρωθούν χωρίς να γίνει έλεγχος με κάποιο τυχαίο αριθμό. Μένει μόνο να προσδιοριστούν τα σημεία διασταύρωσης (ένα για κάθε ζευγάρι). Έτσι για το πρώτοζευγάρι το σημείο διασταύρωσης προκύπτει με χρήση του πέμπτου τυχαίου αριθμού

που είναι ο 0.81 και δίνει ως σημείο διασταύρωσης αυτό ανάμεσα στο τρίτο και το τέταρτο δυαδικό ψηφίο, οπότε μπορούμε να γράψουμε για το πρώτο ζευγάρι ότι:

Β. Ασκήσεις

ΕΔΥ/ ΑΑ-1

Έτσι για το πρώτοζευγάρι το σημείο διασταύρωσης προκύπτει με χρήση του πέμπτου τυχαίου αριθμού που είναι ο 0.81 και δίνει ως σημείο διασταύρωσης αυτό ανάμεσα στο τρίτο και το τέταρτο δυαδικό ψηφίο, οπότε μπορούμε να γράψουμε για το πρώτο ζευγάρι . ότι:

0101|1

1011|1

όπου η κάθετη γραμμή (|) δηλώνει το σημείο διασταύρωσης. Οι απόγονοι που προκύπτουν είναι οι:

01011

10111

Για το δεύτερο ζευγάρι, το σημείο διασταύρωσης βρίσκεται με χρήση του τελευταίου τυχαίου αριθμού (0.65) και προκύπτει ότι είναι το σημείο μεταξύ δεύτερου και τρίτου δυαδικού ψηφίου. Άρα το δεύτερο ζευγάρι μπορεί να γραφεί σαν:

110|11

110|01

Οι απόγονοι που προκύπτουν είναι οι:

11001

11011

Μετάλλαξη: Επειδή η πιθανότητα μετάλλαξης είναι 0 δεν θα γίνει καμία μετάλλαξη. Οπότε ο ζητούμενος πληθυσμός της γενιάς 1 είναι όπως προέκυψε από τις δυο διασταυρώσεις:

A=01011, B=10111, Γ=11001, Δ=11011



Β. Ασκήσεις

ΕΔΥ/ ΑΑ-1

ε) Την απόδοση κάθε μέλους του πληθυσμού στη γενιά 1.

Η απόδοση κάθε ατόμου του πληθυσμού στη γενιά 1 είναι:

$$f(01011) = 1$$

$$f(10111) = 4$$

$$f(11001) = 3$$

$$f(11011) = 2$$

φ) Την μέση απόδοση του πληθυσμού στη γενιά 1.

Η μέση απόδοση του πληθυσμού στη γενιά 1 είναι

Η συνολική απόδοση για τη γενιά 1 είναι $1+4+3+2 = 10$, οπότε η μέση απόδοση της γενιάς 1 είναι $10/4=2.5$.



Β. Ασκήσεις

ΕΔΥ/ ΑΑ-3

Με χρήση ενός Γενετικού Αλγορίθμου σταθερού πληθυσμού να επιλυθεί το πρόβλημα της εύρεσης του byte που περιέχει τις περισσότερες μονάδες. Έστω ότι ο αρχικός πληθυσμός του Γ.Α. (γενιά 0) αποτελείται από τα εξής 4 άτομα:

$$A=01101100$$

$$B=10100010$$

$$Γ=00110001$$

$$Δ=00111101$$

Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε την συνάρτηση αξιολόγησης που είναι το άθροισμα των δυαδικών ψηφίων κάθε ατόμου:

$$f = \sum_{i=1}^8 b_i$$

όπου b_i είναι το i -στο δυαδικό ψηφίο του ατόμου και το i παίρνει τιμές από 1 έως 8.

Έστω ότι ο Γ.Α. Διαθέτει τελεστή απλής αναλογικής επιλογής (roulette wheel selection),

τελεστή διασταύρωσης ενός σημείου με πιθανότητα διασταύρωσης 0.8 και τελεστή μετάλλαξης με πιθανότητα μετάλλαξης 0.2.

Έστω, επίσης, ότι δίνεται η παρακάτω ακολουθία ψευδο-τυχαίων αριθμών:

$$0.9501 \quad 0.2311 \quad 0.6068 \quad 0.7860 \quad 0.8913 \quad 0.7621 \quad 0.4565 \quad 0.0185 \quad 0.8214$$

$$0.4447 \quad 0.6154 \quad 0.7919 \quad 0.9218 \quad 0.7382 \quad 0.1763 \quad 0.4057 \quad 0.9355 \quad 0.9169$$

$$0.4103 \quad 0.8936 \quad 0.0579 \quad 0.3529 \quad 0.8132 \quad 0.0099 \quad 0.1389 \quad 0.2028 \quad 0.1987$$

$$0.6030 \quad 0.8381 \quad 0.0196 \quad 0.6813 \quad 0.3795 \quad 0.83180 \quad 0.5028 \quad 0.7095 \quad 0.4966$$

$$0.8998 \quad 0.8216 \quad 0.6449 \quad 0.2897$$



Β. Ασκήσεις

ΕΔΥ/ ΑΑ-3

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

(ερώτημα α) Με βάση τη συνάρτηση αξιολόγησης που επιλέξατε στο υποερώτημα (α) να βρείτε την τιμή αξιολόγησης κάθε ατόμου της γενιάς 0, τη συνολική απόδοση της γενιάς 0 και τη μέση απόδοση της γενιάς 0.

Λύση: Η απόδοση των μελών του πληθυσμού είναι:

$$f(A) = 4$$

$$f(B) = 3$$

$$f(Γ) = 3$$

$$f(Δ) = 5$$

Η συνολική απόδοση της γενιάς 0 είναι $4+3+3+5 = 15$ και η μέση απόδοση είναι $15/4=3.75$.

Ερώτημα β) Με χρήση των δοσμένων ψευδο-τυχαίων αριθμών (μπορεί να μην χρειαστούν όλοι, ή να χρειαστούν περισσότεροι, οπότε τους χρησιμοποιείτε ξανά με την ίδια σειρά από την αρχή) και εφαρμογή των γενετικών τελεστών

- επιλογής,
- διασταύρωσης και
- μετάλλαξης

να βρείτε τα άτομα του πληθυσμού της επόμενης γενιάς (γενιά 1). Θεωρείστε ότι αφού ολοκληρωθεί η διαδικασία της επιλογής για όλο τον πληθυσμό, τα άτομα διασταυρώνονται ανά δυο με τη σειρά που προέκυψε από την διαδικασία της επιλογής. Επίσης θεωρείστε ότι ο τελεστής μετάλλαξης εφαρμόζεται μετά την ολοκλήρωση της διαδικασία της διασταύρωσης για όλο τον πληθυσμό.



Β. Ασκήσεις

ΕΔΥ/ ΑΑ-3

Επιλογή: Για να εφαρμόσουμε τον τελεστή απλής αναλογικής επιλογής πρέπει να υπολογίσουμε τις συσσωρευμένες πιθανότητες των ατόμων του πληθυσμού και να κατασκευάσουμε τη ρουλέτα.

Οι πιθανότητες επιλογής για τα 4 άτομα του πληθυσμού είναι:

$$p_A = 4/15 = 0.26667, \quad p_B = 3/15 = 0.2, \quad p_Γ = 3/15 = 0.2, \quad p_Δ = 5/15 = 0.33333$$

Οι αντίστοιχες συσσωρευμένες πιθανότητες είναι:

$$q(A) = 0.26667, \quad q(B) = 0.46667, \quad q(Γ) = 0.66667, \quad q(Δ) = 1.0$$

Έχοντας υπολογίσει τις συσσωρευμένες πιθανότητες μπορούμε να κάνουμε χρήση του τελεστή της απλής αναλογικής επιλογής και με βάση τη δοσμένη ακολουθία ψευδοτυχαίων αριθμών μπορούμε να βρούμε τα άτομα του αρχικού πληθυσμού που θα «περάσουν» στον προσωρινό πληθυσμό.

- Με χρήση του πρώτου ψευδοτυχαίου αριθμού 0.9591 ο οποίος βρίσκεται στο διάστημα (0.6667, 1], επιλέγεται το άτομο Δ.
- Με χρήση του δεύτερου ψευδοτυχαίου αριθμού 0.2311 ο οποίος βρίσκεται στο διάστημα (0, 0.26667), επιλέγεται το άτομο Α.
- Με χρήση του τρίτου ψευδοτυχαίου αριθμού 0.6068 ο οποίος βρίσκεται στο διάστημα (0.4667, 0.66667), επιλέγεται το άτομο Γ.
- Με χρήση του τέταρτου ψευδοτυχαίου αριθμού 0.7860 ο οποίος βρίσκεται στο διάστημα (0.66667, 1.0), επιλέγεται το άτομο Δ.

Ο προσωρινός πληθυσμός που προκύπτει είναι ο:

$$00111101 (Δ), \quad 01101100 (Α), \quad 00110001 (Γ), \quad 00111101 (Δ)$$

Β. Ασκήσεις

ΕΔΥ/ ΑΑ-3

Διασταύρωση:

Έχοντας ολοκληρώσει τη διαδικασία επιλογής, μπορούμε να προχωρήσουμε στη διαδικασία της διασταύρωσης. Σύμφωνα με την εκφώνηση του προβλήματος τα άτομα διασταυρώνονται ανά δυο με τη σειρά που προέκυψαν από τη διαδικασία της επιλογής.

- Έτσι το πρώτο ζευγάρι για διασταύρωση αποτελείται από τα άτομα Δ και Α της γενεάς 0. Εξετάζουμε αν αυτό το ζευγάρι όντως θα διασταυρωθεί συγκρίνοντας τον επόμενο (πέμπτο) ψευδοτυχαίο αριθμό 0.8913 με την πιθανότητα διασταύρωσης που είναι 0.8. Επειδή ο ψευδοτυχαίος αριθμός είναι μεγαλύτερος της πιθανότητας διασταύρωσης δεν έχουμε διασταύρωση, οπότε τα δύο πρώτα άτομα του προσωρινού πληθυσμού μένουν ως έχουν.
- Το δεύτερο ζευγάρι, τώρα, αποτελείται από τα άτομα Γ και Δ. Εξετάζουμε αν τα δυο αυτά άτομα διασταυρώνονται συγκρίνοντας τον επόμενο (έκτο) ψευδοτυχαίο αριθμό ίσο με 0.7621 με την πιθανότητα διασταύρωσης που είναι 0.8. Επειδή ο ψευδοτυχαίος αριθμός είναι μικρότερος θα πραγματοποιηθεί διασταύρωση, οπότε πρέπει να επιλεγεί σημείο διασταύρωσης. Αυτό επιλέγεται με βάση το επόμενο (έβδομο) ψευδοτυχαίο αριθμό που είναι ίσος με 0.4565 γεγονός που οδηγεί στην εκλογή του σημείου διασταύρωσης μεταξύ 4ου και 5ου δυαδικού ψηφίου των ατόμων. Σχηματικά αυτό μπορεί να αναπαρασταθεί σαν:

0011|0001

0011|1101

Το παραπάνω σχήμα θα δώσει απογόνους τα άτομα 00111101 και 00110001.

Β. Ασκήσεις

ΕΔΥ/ ΑΑ-3

Με την ολοκλήρωση της διαδικασίας διασταύρωσης ο πληθυσμός που έχει προκύψει έχει ως εξής:

00111101 01101100 00111101 00110001

Μετάλλαξη:

Μένει να εφαρμοστεί ο τελεστής μετάλλαξης. Για να γίνει αυτό χρειαζόμαστε $4 \times 8 = 32$ ψευδοτυχαίους αριθμούς αρχίζοντας από τον 8ο της δοσμένης ακολουθίας. Συνεπώς οι ψευδοτυχαίοι αριθμοί που θα χρησιμοποιήσουμε είναι οι:

0.0185 0.8214 0.4447 0.6154 0.7919 0.9218 0.7382 0.1763

0.4057 0.9355 0.9169 0.4103 0.8936 0.0579 0.3529 0.8132

0.0099 0.1389 0.2028 0.1987 0.6030 0.8381 0.0196 0.6813

0.3795 0.8318 0.5028 0.7095 0.4966 0.8998 0.8216 0.6449

Υπογραμμισμένοι είναι οι αριθμοί που είναι μικρότεροι του 0.2 που αντιστοιχούν στα bits:

00111101 01101100 00111101 00110001

Τα οποία και αντιστρέφονται:

10111100 01101000 11101101 00110001

Β. Ασκήσεις

ΕΔΥ/ ΑΑ-3

Ερώτημα c) Με βάση τη συνάρτηση αξιολόγησης να βρείτε την απόδοση των ατόμων της γενιάς 1, τη συνολική απόδοση της γενιάς 1 και τη μέση απόδοση της γενεάς 1. Να κάνετε σύγκριση με τα αντίστοιχα αποτελέσματα της γενεάς 0

Η απόδοση των μελών του πληθυσμού της γενιάς 1 είναι :

$f(A') = 5$

$f(B') = 3$

$f(\Gamma') = 7$

$f(\Delta') = 3$

Οπότε η συνολική απόδοση της γενιάς 1 είναι $5+3+7+3 = 18$ και η μέση απόδοση του πληθυσμού είναι $18/4 = 4.5$.

Παρατηρούμε, λοιπόν, μια σαφή βελτίωση τόσο στη συνολική, όσο και στη μέση απόδοση του πληθυσμού της γενιάς 1 σε σχέση με τον πληθυσμό της γενιάς 0.

Β. Ασκήσεις

Εφαρμογή 1

Έστω ότι ο πληθυσμός που δίνεται στον παρακάτω πίνακα είναι ο αρχικός πληθυσμός ενός Γενετικού Αλγορίθμου που χρησιμοποιείται για τη μεγιστοποίηση της συνάρτησης: $f(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1^2$ όπου τα x_1 και x_2 είναι ακέραιοι αριθμοί στο διάστημα $[0, 7]$. Για την αναπαράσταση κάθε ανεξάρτητης μεταβλητής χρησιμοποιούνται 3 bits ($2^3 = 8$), οπότε για την αναπαράσταση κάθε χρωμοσώματος του πληθυσμού χρησιμοποιούνται 6 bits με τα 3 αριστερά να αναπαριστούν την μεταβλητή x_1 και τα 3 δεξιά τη μεταβλητή x_2 . Απαντήστε στα ζητήματα που ακολουθούν και συμπληρώστε τον πίνακα (κάντε τις πράξεις με ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων).

	ΑΤΟΜΟ - ΧΡΩΜΟΣΩΜΑ	ΑΠΟΔΟΣΗ - ΙΚΑΝΟΤΗΤΑ (FITNESS)	ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΕΠΙΛΟΓΗΣ	ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΟ ΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ ΑΝΤΙΓΡΑΦΩΝ	ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΓΕΝΕΤΙΚΩΝ ΠΕΛΑΓΙΩΝ
A	101011				
B	111000				
Γ	111011				
Δ	101000				
E	111001				



(α) Να υπολογίσετε την απόδοση (Fitness) κάθε μέλους του πληθυσμού (Να γράψετε την απάντησή σας στον παραπάνω πίνακα). Επειδή η καταλληλότητα (ικανότητα) περιέχει αρνητικές τιμές, δεν μπορούν να υπολογιστούν οι πιθανότητες επιλογής.

Πώς μπορεί να αντιμετωπιστεί αυτό το πρόβλημα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να συμπληρώσετε την κενή στήλη του παρακάτω πίνακα, με τη νέα ικανότητα. Ποιο πρόβλημα υπάρχει με τον υπολογισμό της πιθανότητας επιλογής του 2^{ου} ατόμου; Πως μπορεί να αντιμετωπιστεί;

(β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα επιλογής κάθε ατόμου, χρησιμοποιώντας επιλογή εξαναγκασμένης ρουλέτας (Να γράψετε την απάντησή σας στον παραπάνω πίνακα).



(γ) Να υπολογίσετε τον αναμενόμενο αριθμό αντιγράφων κάθε ατόμου στην επόμενη γενιά (Να γράψετε την απάντησή σας στον παραπάνω πίνακα).

(δ) Έστω ότι η 1^η γενιά που προκύπτει μετά την εφαρμογή των γενετικών τελεστών της επιλογής, διασταύρωσης και μετάλλαξης είναι αυτή που απεικονίζεται στον πίνακα.

	ΑΤΟΜΟ – ΧΡΩΜΟΣΩΜΑ	
A	111	100
B	110	110
Γ	111	000
Δ	110	011
E	111	011

Έχει βελτιωθεί η μέση απόδοση του πληθυσμού στη γενιά 1 σε σχέση με τη γενιά 0; Πόσο έχει μεταβληθεί η απόδοση του καλύτερου μέλους του πληθυσμού στη γενιά 1 σε σχέση με τη γενιά 0;