

# ΠΛΗ31

## ΕΝΟΤΗΤΑ 3: ΝΕΥΡΩΝΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ

Μάθημα 3.4:  
Δίκτυα Εμπρόσθιας Τροφοδότησης - Εκπαίδευση

Δημήτρης Ψούνης



[www.psounis.gr](http://www.psounis.gr)



# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

## **A.Θεωρία**

### **1. Εκπαίδευση ΤΝΔ**

1. Εισαγωγή
2. Μάθηση με Επίβλεψη

### **2. Εκπαίδευση ενός νευρώνα**

1. Σκοπός του Αλγορίθμου
2. Διαίσθηση πίσω από τον αλγόριθμο
3. Ο αλγόριθμος οπισθοδιάδοσης του λάθους
4. Γνωστές Παραγώγοι
5. Παραδείγματα
6. Παρατηρήσεις για τον αλγόριθμο οπισθοδιάδοσης

## **B.Ασκήσεις**

### **1. Εφαρμογές**

# A. Θεωρία

## 1. Εκπαίδευση ΤΝΔ

### 1. Εισαγωγή

Η εκπαίδευση ενός ΤΝΔ είναι μία υπολογιστική διαδικασία στην οποία «εκπαιδεύουμε το ΤΝΔ προκειμένου να κάνει την επιθυμητή εργασία, δηλαδή:

- Να απαντά ΝΑΙ, για κάθε θετικό πρότυπο.
- Να απαντά ΌΧΙ για κάθε αρνητικό πρότυπο.

Σε ένα ΤΝΔ ενός νευρώνα, η εκπαίδευση συνίσταται στο να υπολογιστούν:

- Τα βάρη των εισόδων  $w_1, w_2, \dots$
- Η τιμή του κατωφλίου  $\theta$ .

Ήδη έχουμε μάθει μία διαδικασία εκπαίδευσης ενός ΤΝΔ:

- Η εύρεση των βαρών και του κατωφλίου με την διαδικασία του γραφικού διαχωρισμού των προτύπων σε θετικά και αρνητικά στιγμιότυπα.

Γενικά οι διαδικασίες εκπαίδευσης ενός ΤΝΔ χωρίζονται σε 3 κατηγορίες:

- Την μάθηση με επίβλεψη (ΕΝΤΟΣ ύλης)
- Την μάθηση χωρίς επίβλεψη (ΕΝΤΟΣ ύλης)
- Την μάθηση με ενίσχυση (εκτός ύλης)



# A. Θεωρία

## 1. Εκπαίδευση ΤΝΔ

### 2. Μάθηση με Επίβλεψη

Στην μάθηση με επίβλεψη:

- Υπάρχουν τα πρότυπα ως ζεύγη (είσοδος – επιθυμητή έξοδος)

Επαναλαμβάνεται μια αλγοριθμική διαδικασία στην οποία:

- Δίδονται εισόδοι στο ΤΝΔ
- Το ΤΝΔ δίνει την απάντησή του.
- Συγκρίνεται η απάντηση του ΤΝΔ με την επιθυμητή έξοδο
- Γίνεται προσαρμογή των παραμέτρων (κατώφλια – βάρη) από το ίδιο το σύστημα.

Το σύστημα προσπαθεί να ανακαλύψει τη συσχέτιση μεταξύ των δεδομένων εισόδου και της επιθυμητής εξόδου προσαρμόζοντας τις συναρτήσεις που προσομοιώνουν την διαδικασία της απόφασης.

Ο αλγόριθμος που ακολουθείται για την εκπαίδευση πολυεπίπεδων ΤΝΔ λέγεται αλγόριθμος οπισθοδιάδοσης του λάθους



# A. Θεωρία

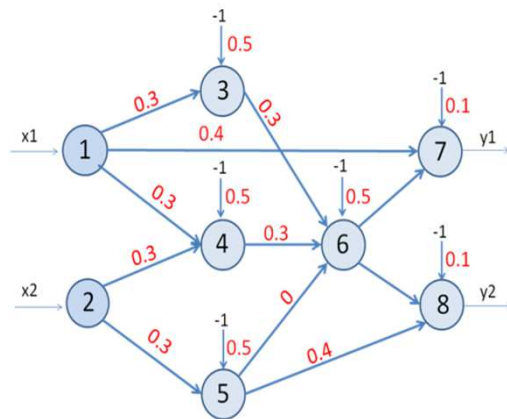
## 2. Εκπαίδευση ΤΝΔ με τον αλγόριθμο οπισθοδιάδοσης

### 1. Σκοπός του αλγορίθμου

Ο αλγόριθμος οπισθοδιάδοσης του λάθους είναι ένας αλγόριθμος που χρησιμοποιείται για την εκπαίδευση ενός δικτύου εμπρόσθιας τροφοδότησης.

- Μας παρέχονται τα πρότυπα εισόδου-εξόδου, τρέχουμε τον αλγόριθμο και έχουν παραχθεί τα βάρη των ακμών και του κατωφλίου.

### ΝΕΥΡΩΝΙΚΟ ΔΙΚΤΥΟ



Οπισθο-  
διάδοση  
Λάθους



ΔΙΟΡΘΩΜΕΝΑ ΒΑΡΗ  
ΑΚΜΩΝ ΏΣΤΕ ΤΟ ΔΙΚΤΥΟ  
ΝΑ ΠΑΡΑΓΕΙ ΤΙΣ  
ΕΠΙΘΥΜΗΤΕΣ ΕΞΟΔΟΥΣ

### ΠΡΟΤΥΠΑ ΕΙΣΟΔΟΥ-ΕΞΟΔΟΥ



# A. Θεωρία

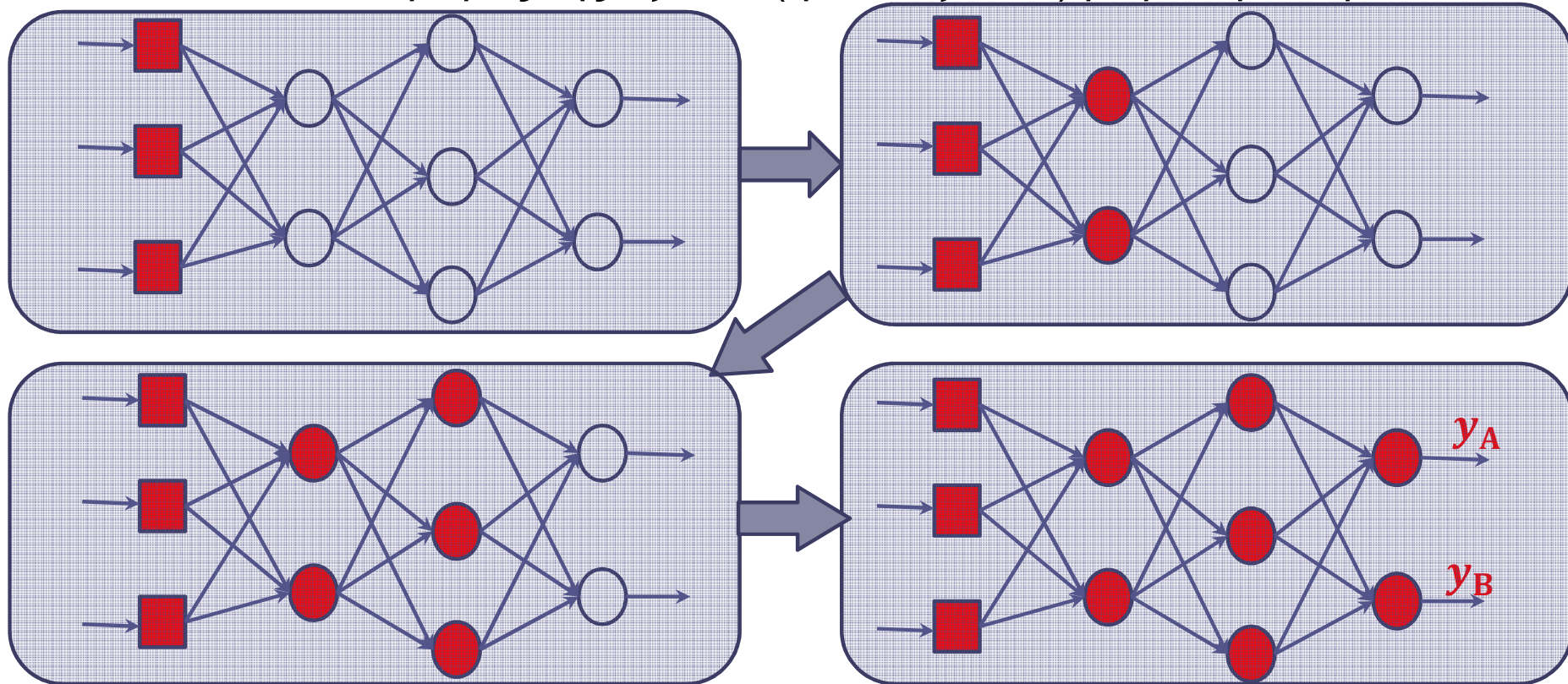
## 2. Εκπαίδευση ΤΝΔ με τον αλγόριθμο οπισθοδιάδοσης

### 2. Διαίσθηση πίσω από τον αλγόριθμο

Η οπισθοδιάδοση του λάθους συνίσταται στα εξής βήματα:

#### 1. Προς τα Εμπρός Πέρασμα

- Γίνεται υπολογισμός της εξόδου (ή των εξόδων) με βάση το πρότυπο



- Από εδώ υπολογίζεται το σφάλμα σε κάθε έξοδο.

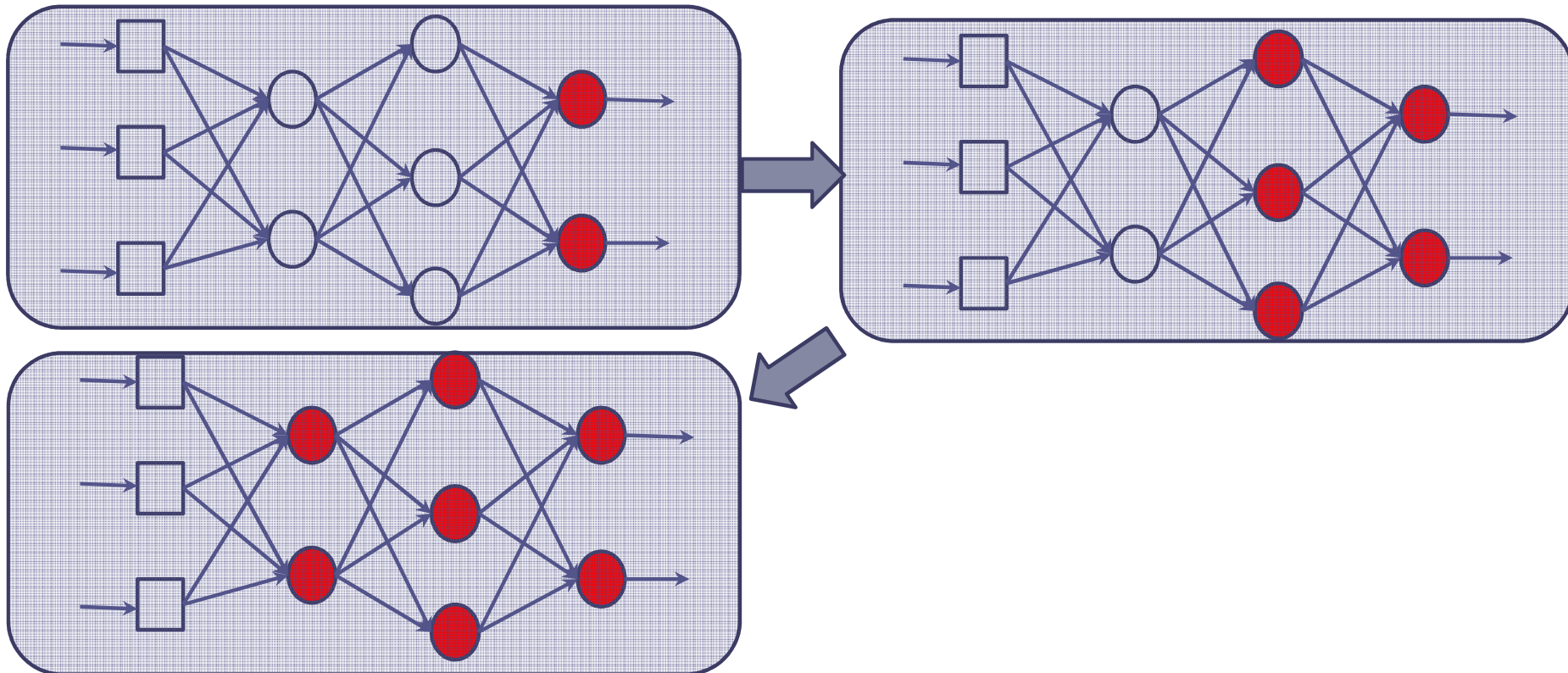
# A. Θεωρία

## 2. Εκπαίδευση ΤΝΔ με τον αλγόριθμο οπισθοδιάδοσης

### 2. Διαίσθηση πίσω από τον αλγόριθμο

#### 2. Προς τα Πίσω Πέρασμα (Οπισθοδιάδοση λάθους)

- Υπολογίζεται η συμβολή στο λάθος (λέγεται τοπική κλίση του νευρώνα) σε κάθε υπολογιστικό νευρώνα με μαθηματικό τύπο



- Με μαθηματικό τύπο από τις τοπικές κλίσεις εξάγονται τα νέα βάρη.



# Α. Θεωρία

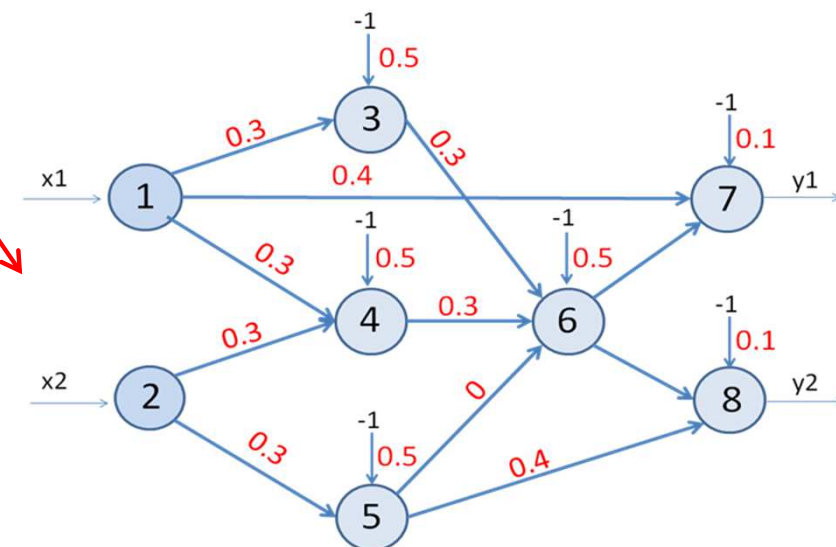
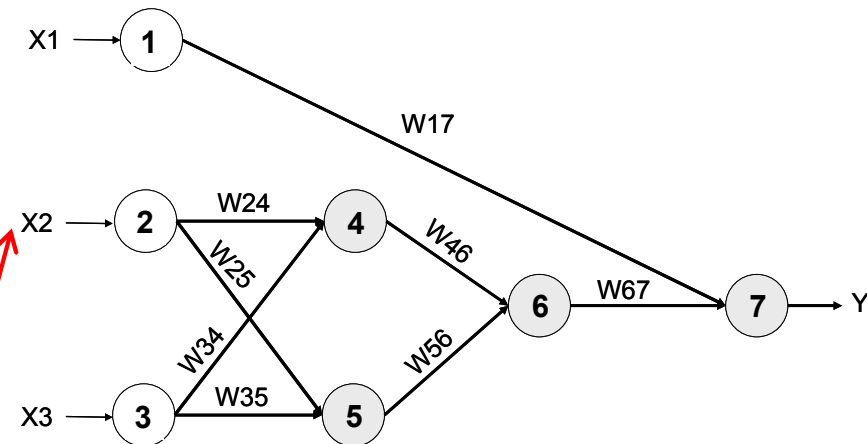
## 2. Εκπαίδευση ΤΝΔ με τον αλγόριθμο οπισθοδιάδοσης

### 3. Ο αλγόριθμος οπισθοδιάδοσης του λάθους

#### Αρχικοποίηση:

- Αρχικοποιούμε τα διανύσματα:
  - Για κάθε πρότυπο  $1, \dots, K$ :  
Κατασκευάζουμε το διάνυσμα:  $x_i = [x_{i0}, x_{i1}, \dots, x_{in}]$  και αρχικοποιούμε την επιθυμητή έξοδο:  $d_i$
- Δίνουμε αρίθμηση στους κόμβους (αν αυτή δεν υπάρχει ήδη)
  - Πρέπει να υπάρχει μία τοπολογική ταξινόμηση στους κόμβους (δηλαδή να μην υπάρχει ακμή από κόμβο σε προηγούμενό του κόμβο)
- Αρχικοποιούμε τις τιμές των βαρών σύμφωνα με την εκφώνηση.
- Εντοπίζουμε την συνάρτηση ενεργοποίησης για κάθε κόμβο καθώς και την παραγωγή της (θα είναι κάποια συνεχής συνάρτηση)
- Δίνουμε τιμή στην παράμετρο μάθησης  $\eta$ :  $0 < \eta < 1$  (από εκφώνηση)

Πραγματοποιούμε κύκλους εκπαίδευσης διαδοχικά για τα πρότυπα.





# Α. Θεωρία

## 2. Εκπαίδευση ΤΝΔ με τον αλγόριθμο οπισθοδιάδοσης

### 3. Ο αλγόριθμος οπισθοδιάδοσης του λάθους

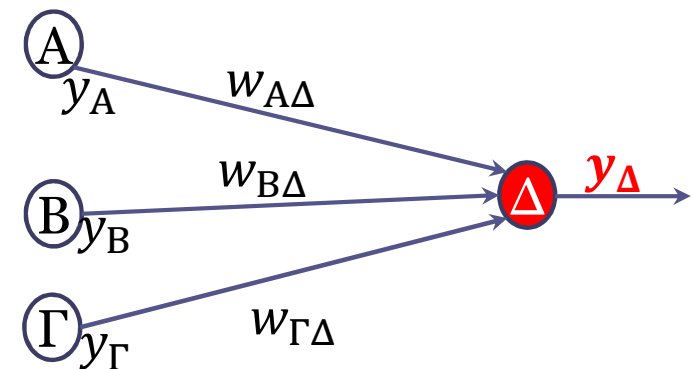
#### ΠΡΟΣ ΤΑ ΕΜΠΡΟΣ ΠΕΡΑΣΜΑ:

Οι νευρώνες εξετάζονται κατά την αύξουσα αρίθμηση:  
 $j=1 \dots N$

- Για κάθε νευρώνα εισόδου θέτουμε ως  $y_j$  την είσοδο που παράγει.
- Για κάθε υπολογιστικό νευρώνα  $j$  (κρυφό και εξόδο):
  - Υπολόγισε το δυναμικό ως:  $v_j = \sum_{i=0}^p w_{ij} y_i$
  - Υπολόγισε την έξοδο από την συνάρτηση ενεργοποίησης:  $y_j = \varphi(v_j)$
- Συμβολίζουμε με  $o_j$  την έξοδο μόνο των νευρώνων εξόδου
  - $o_j = y_j$
- Για κάθε νευρώνα εξόδου:
  - Υπολόγισε το σφάλμα:  $e_j = d_j - o_j$  (επιθυμητή μείον παραγματική)

$p$  είναι ο συνολικός αριθμός εισόδων του νευρώνα  $j$

- Υπολογίζεται το δυναμικό του νευρώνα ως άθροισμα των γινομένων βαρών-εισόδων
- Συμπεριλαμβάνεται η είσοδος κατωφλίου (αν υπάρχει)



$$v_Δ = w_{AΔ}y_A + w_{BΔ}y_B + w_{ΓΔ}y_Γ$$

$$y_Δ = \varphi(v_Δ)$$



# Α. Θεωρία

## 2. Εκπαίδευση ΤΝΔ με τον αλγόριθμο οπισθοδιάδοσης

### 1. Ο αλγόριθμος οπισθοδιάδοσης του λάθους

#### ΠΡΟΣ ΤΑ ΠΙΣΩ ΠΕΡΑΣΜΑ:

##### Α. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΠΙΚΩΝ ΚΛΙΣΕΩΝ

Οι νευρώνες εξετάζονται κατά την φθίνουσα αρίθμηση  $j=N, N-1, \dots, 1$

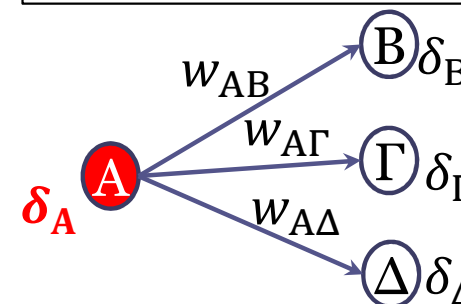
- Υπολογισμός της τοπικής κλίσης  $\delta$  για κάθε υπολογιστικό νευρώνα:
  - Για τους νευρώνες εξόδου
    - $\delta_j(n) = e_j \cdot \varphi'_j(v_j)$
  - Για τους νευρώνες κρυφού επιπέδου:
    - $\delta_j(n) = \varphi'_j(v_j) \cdot \sum_k [\delta_k(n) \cdot w_{jk}(n)]$
  - Για τους νευρώνες εισόδου:
    - Δεν γίνεται υπολογισμός τοπικής κλίσης

Το  $\delta$  για τους νευρώνες εξόδου υπολογίζεται ως το γινόμενο

- Του σφάλματος του νευρώνα
- Την παράγωγο της συνάρτησης ενεργοποίησης με όρισμα το δυναμικό του νευρώνα

Το  $\delta$  για τους κρυφούς νευρώνες υπολογίζεται ως το γινόμενο

- Την παράγωγο της συνάρτησης ενεργοποίησης με όρισμα το δυναμικό του νευρώνα
- Κάνουμε το άθροισμα ( $\delta \cdot \text{βάρος}$ ) για κάθε έξοδο του νευρώνα



$$\delta_A(n) = \varphi'_A(v_A) \cdot [\delta_B(n) \cdot w_{AB}(n) + \delta_\Gamma(n) \cdot w_{A\Gamma}(n) + \delta_\Delta(n) \cdot w_{A\Delta}(n)]$$



# A. Θεωρία

## 2. Εκπαίδευση ΤΝΔ με τον αλγόριθμο οπισθοδιάδοσης

### 3. Ο αλγόριθμος οπισθοδιάδοσης του λάθους

#### ΠΡΟΣ ΤΑ ΠΙΣΩ ΠΕΡΑΣΜΑ:

##### B. ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ ΣΤΑ ΒΑΡΗ ΤΩΝ ΑΚΜΩΝ

- Διορθώσεις σε όλα τα βάρη:
  - Υπολογισμός Διόρθωσης των Βαρών των ακμών:
    - $\Delta w_{ij}(n) = \eta \cdot \delta_j(n) \cdot y_i(n)$
  - Υπολογισμός των νέων βαρών:
    - $w_{ij}(n+1) = w_{ij}(n) + \Delta w_{ij}(n)$

ΧΡΗΣΗ ΟΡΜΗΣ (momentum)  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) η γραμμή τροποποιείται ως:

$$\Delta w_{ji}(n) = \eta \cdot \delta_j(n) \cdot y_i(n) + \alpha \cdot \Delta w_{ji}(n-1)$$



$$\Delta w_{AB}(n) = \eta \cdot \delta_B(n) \cdot y_A(n)$$

$$w_{AB}(n) = w_{AB}(n) + \Delta w_{AB}(n-1)$$



# A. Θεωρία

## 2. Εκπαίδευση Νευρώνα με τον κανόνα μάθησης Δέλτα

### 3. Ο αλγόριθμος οπισθοδιάδοσης του λάθους

#### **ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΕΡΜΑΤΙΣΜΟΥ:**

- Το δίκτυο παράγει τις επιθυμητές εξόδους ή έχουν ένα σφάλμα μικρότερο από κριτήριο που έχουμε θέσει.
- Το σφάλμα παρέμεινε ίδιο σε δύο διαδοχικούς κύκλους εκπαίδευσης
- Εκτελέσαμε τον αλγόριθμο για ένα συγκεκριμένο αριθμό βημάτων.

→ Επειδή απαιτείται ένας πολύ μεγάλος αριθμός πράξεων, στις εξετάσεις συνήθως μας βάζουν να τρέξουμε τον αλγόριθμο για 1 βήμα με 1 πρότυπο.



# A. Θεωρία

## 2. Εκπαίδευση ΤΝΔ με τον αλγόριθμο οπισθοδιάδοσης

### 4. Γνωστές Παράγωγοι

Όνομα	Συνάρτηση	Παράγωγος
Σιγμοειδής	$\varphi(x) = \frac{1}{1+e^{-ax}}$	$\varphi'(x) = a\varphi(x)(1 - \varphi(x))$
Γραμμική	$\varphi(x) = x$	$\varphi'(x) = 1$
Υπερβολική Εφαπτομένη	$\varphi(x) = \frac{1 - e^{-ax}}{1 + e^{-ax}}$	$\varphi'(x) = \frac{a}{2} [1 - \varphi^2(x)]$
Γραμμική με συντελεστή	$\varphi(x) = \alpha x$	$\varphi'(x) = \alpha$
Ημίτονο	$\varphi(x) = \sin(x)$	$\varphi'(x) = \cos(x)$
Συνημίτονο	$\varphi(x) = \cos(x)$	$\varphi'(x) = -\sin(x)$



# Α. Θεωρία

## 2. Εκπαίδευση ΤΝΔ με τον αλγόριθμο οπισθοδιάδοσης

### 5. Παράδειγματα (Παράδειγμα 1)

Δίνεται το παρακάτω ΤΝΔ για την επίλυση του προβλήματος XOR. Για την εκπαίδευσή του χρησιμοποιείται η μέθοδος οπισθοδιάδοσης του σφάλματος με ρυθμό εκπαίδευσης  $\eta=1$ , χωρίς χρήση ορμής (momentum). Η συνάρτηση ενεργοποίησης σε όλους τους νευρώνες είναι η γνωστή σιγμοειδής συνάρτηση  $S$ , όπου:

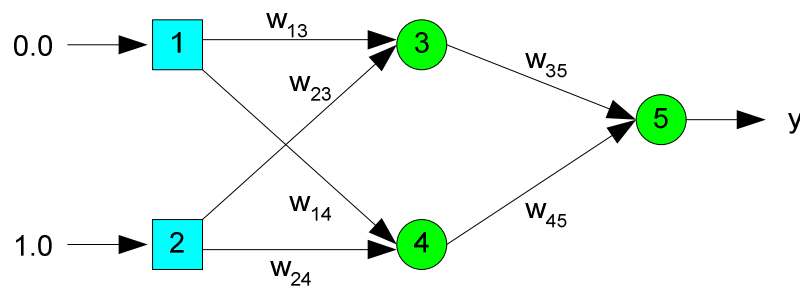
$$S(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

Σε κάποια στιγμή εκπαίδευσής του για την εκμάθηση του προτύπου  $[0.0, 1.0]$  τα βάρη των συνδέσεων μεταξύ των κόμβων έχουν πάρει τις παρακάτω τιμές:

$w_{13}=0.1$ ,  $w_{14}=0.2$ ,  $w_{23}=0.2$ ,  $w_{24}=0.1$ ,  $w_{35}=-0.1$  και  $w_{45}=-0.1$ .

Ζητούνται αναλυτικά:

Να βρεθούν οι νέες τιμές των βαρών  $w$  για το αμέσως επόμενο κύκλο εκπαίδευσης βάσει της μεθόδου οπισθοδιάδοσης του λάθους.



Νευρώνας Εισόδου



Υπολογιστικός Νευρώνας



# Α. Θεωρία

## 2. Εκπαίδευση ΤΝΔ με τον αλγόριθμο οπισθοδιάδοσης

### 5. Παράδειγματα (Παράδειγμα 1)

1ος Κύκλος Εκπαίδευσης:

ΠΡΟΣ ΤΑ ΕΜΠΡΟΣ ΠΕΡΑΣΜΑ

ΝΕΥΡΩΝΑΣ 1 (νευρώνας εισόδου)

Η είσοδος μεταφέρεται στην έξοδο, άρα  $y_1 = x_1 = 0.0$

ΝΕΥΡΩΝΑΣ 2 (νευρώνας εισόδου)

Η είσοδος μεταφέρεται στην έξοδο, άρα  $y_2 = x_2 = 1.0$

ΝΕΥΡΩΝΑΣ 3 (κρυφός νευρώνας)

**Δυναμικό:**  $v_3 = (w_{13} x_1) + (w_{23} x_2) = 0.1 \times 0.0 + 0.2 \times 1.0 = 0.2$

**Ενεργοποίηση:**  $y_3 = \phi(v_3) = \phi(0.2) = \frac{1}{1 + e^{-0.2}} = 0.550$

ΝΕΥΡΩΝΑΣ 4 (κρυφός νευρώνας)

**Δυναμικό:**  $v_4 = (w_{14} x_1) + (w_{24} x_2) = 0.2 \times 0.0 + 0.1 \times 1.0 = 0.1$

**Ενεργοποίηση:**  $y_4 = \phi(v_4) = \phi(0.1) = \frac{1}{1 + e^{-0.1}} = 0.525$

ΝΕΥΡΩΝΑΣ 5 (νευρώνας εξόδου)

**Δυναμικό:**  $v_5 = (w_{35} y_3) + (w_{45} y_4) = (-0.1) \times 0.550 + (-0.1) \times 0.525 = -0.108$

**Ενεργοποίηση:**  $y_5 = \phi(v_5) = \phi(-0.108) = \frac{1}{1 + e^{-(-0.108)}} = 0.473$

Επιθυμητή Εξοδος: 1

Σφάλμα νευρώνα 5: Επιθυμητή-Πραγματική:  $e_5 = d_5 - y_5 = 1 - 0.473 = 0.527$

$d_5$

1

$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$
0.0	1.0	0.550	0.525	0.473

$e_5$

0.527



# A. Θεωρία

## 2. Εκπαίδευση ΤΝΔ με τον αλγόριθμο οπισθοδιάδοσης

### 5. Παράδειγματα (Παράδειγμα 1)

1ος Κύκλος Εκπαίδευσης:

ΠΡΟΣ ΤΑ ΠΙΣΩ ΠΕΡΑΣΜΑ

**A. Υπολογισμός Τοπικών Κλίσεων**

ΝΕΥΡΩΝΑΣ 5

Είναι Νευρώνας Εξόδου άρα:

$$\delta_5(n) = e_5 \cdot \varphi'_5(v_5) = e_5 \cdot [\varphi_5(v_5)(1 - \varphi_5(v_5))] = 0.131$$

$\delta_3$	$\delta_4$	$\delta_5$
-0.003	-0.003	0.131

ΝΕΥΡΩΝΑΣ 4

Είναι Κρυφός Νευρώνας, άρα:

$$\delta_4(n) = \varphi'_4(v_4) \cdot [\delta_5(n) * w_{45}(n)] =$$

$$=[\varphi_4(v_4)(1 - \varphi_4(v_4))] [\delta_5(n) * w_{45}(n)] = [0.525(1 - 0.525)][0.131 * (-0.1)] = -0.003$$

ΝΕΥΡΩΝΑΣ 3

Είναι Κρυφός Νευρώνας, άρα:

$$\delta_3(n) = \varphi'_3(v_3) \cdot [\delta_5(n) * w_{35}(n)] =$$

$$=[\varphi_3(v_3)(1 - \varphi_3(v_3))] [\delta_5(n) * w_{35}(n)] = [0.550(1 - 0.550)][0.131 * (-0.1)] = -0.003$$





# A. Θεωρία

## 2. Εκπαίδευση ΤΝΔ με τον αλγόριθμο οπισθοδιάδοσης

### 5. Παράδειγματα (Παράδειγμα 1)

1<sup>ος</sup> Κύκλος Εκπαίδευσης:

ΠΡΟΣ ΤΑ ΠΙΣΩ ΠΕΡΑΣΜΑ

**B. Υπολογισμός Νέων Βαρών**

Διορθώσεις στα Βάρη:

$$\Delta w_{35}(n) = \eta \cdot \delta_5(n) \cdot y_3(n) = 1 \times 0.131 \times 0.550 = 0.072$$

$$\Delta w_{45}(n) = \eta \cdot \delta_5(n) \cdot y_4(n) = 1 \times 0.131 \times 0.525 = 0.069$$

$$\Delta w_{14}(n) = \eta \cdot \delta_4(n) \cdot y_1(n) = 1 \times (-0.003) \times 0.0 = 0.0$$

$$\Delta w_{24}(n) = \eta \cdot \delta_4(n) \cdot y_2(n) = 1 \times (-0.003) \times 1.0 = -0.003$$

$$\Delta w_{13}(n) = \eta \cdot \delta_3(n) \cdot y_1(n) = 1 \times (-0.003) \times 0.0 = 0.0$$

$$\Delta w_{23}(n) = \eta \cdot \delta_3(n) \cdot y_2(n) = 1 \times (-0.003) \times 1.0 = -0.003$$

Νέα Βάρη:

$$w_{35}(n+1) = w_{35}(n) + \Delta w_{35}(n) = -0.1 + 0.072 = -0.028$$

$$w_{45}(n+1) = w_{45}(n) + \Delta w_{45}(n) = -0.1 + 0.069 = -0.031$$

$$w_{14}(n+1) = w_{14}(n) + \Delta w_{14}(n) = 0.2 + 0.0 = 0.2$$

$$w_{24}(n+1) = w_{24}(n) + \Delta w_{24}(n) = 0.1 + (-0.003) = 0.097$$

$$w_{13}(n+1) = w_{13}(n) + \Delta w_{13}(n) = 0.1 + 0.0 = 0.1$$

$$w_{23}(n+1) = w_{23}(n) + \Delta w_{23}(n) = 0.2 + (-0.003) = 0.197$$

Η εφαρμογή του 1<sup>ου</sup> κύκλου τελείωσε. Υπολογίζεται ότι με τα νέα βάρη η έξοδος είναι 0.492, δηλαδή πιο κοντά στην επιθυμητή έξοδο. Απαιτούνται αρκετοί ακόμη κύκλοι για την εύρεση της σωστής τιμής



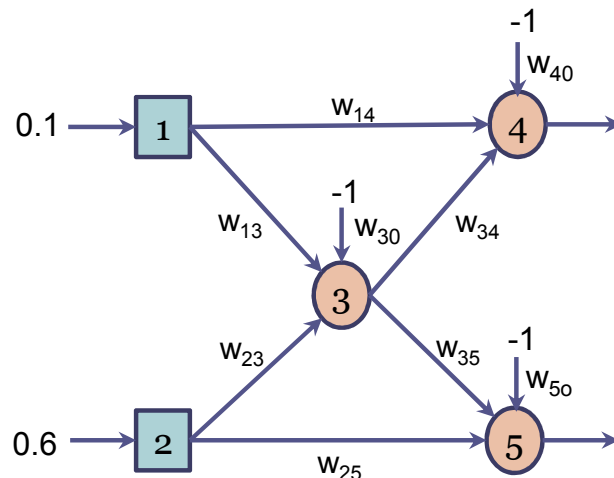
# Α. Θεωρία

## 2. Εκπαίδευση ΤΝΔ με τον αλγόριθμο οπισθοδιάδοσης

### 5. Παράδειγματα (Παράδειγμα 2)

Δίνεται ένα πολυεπίπεδο ΤΝΔ τοπολογίας 2-1-2 με τη συνδεσμολογία όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Για την εκπαίδευσή του χρησιμοποιείται η μέθοδος οπισθοδιάδοσης του σφάλματος με ρυθμό εκπαίδευσης  $\eta=1$ , χωρίς χρήση ορμής (momentum). Η συνάρτηση ενεργοποίησης σε όλους τους νευρώνες είναι η σιγμοειδής συνάρτηση  $S$ , όπου:

$$S(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$



Πίνακας 1

Βάρος	Τιμή	Βάρος	Τιμή
$w_{13} =$	0,5	$w_{30} = \theta_3$	0,4
$w_{14} =$	0,5	$w_{40} = \theta_4$	0,4
$w_{23} =$	0,4	$w_{50} = \theta_5$	0,4
$w_{25} =$	0,4		
$w_{34} =$	0,3		
$w_{35} =$	0,3		

Σε κάποια στιγμή εκπαίδευσής του για την εκμάθηση του προτύπου  $[0.1, 0.6]$  με επιθυμητή έξοδο  $[0.0, 1.0]$  τα βάρη των συνδέσεων και οι τιμές των κατωφλίων έχουν πάρει τις τιμές που δίνονται στον Πίνακα 1. Θεωρείστε ότι τα κατώφλια είναι συνάψεις με είσοδο  $-1$  και βάρος ίσο με την τιμή του κατωφλίου. Να κάνετε τις πράξεις με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων.

Να πραγματοποιήσετε έναν πλήρη κύκλο εκπαίδευσης (προς τα εμπρός και προς τα πίσω πέρασμα)



# A. Θεωρία

## 2. Εκπαίδευση ΤΝΔ με τον αλγόριθμο οπισθοδιάδοσης

### 5. Παράδειγματα (Παράδειγμα 2)

#### ΠΡΟΣ ΤΑ ΕΜΠΡΟΣ ΠΕΡΑΣΜΑ

$d_4$	$d_5$
0	1

ΝΕΥΡΩΝΑΣ 1 (νευρώνας εισόδου)

Η είσοδος μεταφέρεται στην έξοδο, άρα  $y_1 = x_1 = 0.1$

ΝΕΥΡΩΝΑΣ 2 (νευρώνας εισόδου)

Η είσοδος μεταφέρεται στην έξοδο, άρα  $y_2 = x_2 = 0.6$

ΝΕΥΡΩΝΑΣ 3 (Κρυφός Νευρώνας)

Δυναμικό:  $v_3 = (w_{13} \cdot y_1) + (w_{23} \cdot y_2) + (w_{30} \cdot (-1)) = (0,5 \cdot 0,1) + (0,4 \cdot 0,6) + (0,4 \cdot (-1)) = -0.11$

Ενεργοποίηση:  $y_3 = \varphi(v_3) = \frac{1}{1 + e^{-(-0.11)}} = 0.473$

ΝΕΥΡΩΝΑΣ 4 (Νευρώνας Εξόδου)

Δυναμικό:  $v_4 = (w_{14} \cdot y_1) + (w_{34} \cdot y_3) + (w_{40} \cdot (-1)) = (0,5 \cdot 0,1) + (0,3 \cdot 0,473) + (0,4 \cdot (-1)) = -0.208$

Ενεργοποίηση:  $y_4 = \varphi(v_4) = \frac{1}{1 + e^{-(-0.208)}} = 0.448$

ΝΕΥΡΩΝΑΣ 5 (Νευρώνας Εξόδου)

Δυναμικό:  $v_5 = (w_{35} \cdot y_3) + (w_{25} \cdot y_2) + (w_{50} \cdot (-1)) = (0,3 \cdot 0,473) + (0,4 \cdot 0,6) + (0,4 \cdot (-1)) = -0.018$

Ενεργοποίηση:  $y_5 = \varphi(v_5) = \frac{1}{1 + e^{-(-0.018)}} = 0.496$

Συνεπώς η έξοδος των νευρώνων είναι:

$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$
0.1	0.6	0.473	0.448	0.496

Υπολογισμός Σφάλματος για τους νευρώνες εξόδου:

Νευρώνας 4:  $e_4 = d_4 - y_4 = 0 - 0.448 = -0.448$

Νευρώνας 5:  $e_5 = d_5 - y_5 = 1 - 0.496 = 0.504$

Άρα τα σφάλματα στους νευρώνες εξόδου είναι:

$e_4$	$e_5$
-0.448	0.504



# A. Θεωρία

## 2. Εκπαίδευση ΤΝΔ με τον αλγόριθμο οπισθοδιάδοσης

### 5. Παράδειγματα (Παράδειγμα 2)

#### ΠΡΟΣ ΤΑ ΠΙΣΩ ΠΕΡΑΣΜΑ

$\delta_3$	$\delta_4$	$\delta_5$
0.126	0.111	0.126

#### ΝΕΥΡΩΝΑΣ 5 (νευρώνας εξόδου)

Υπολογισμός Τοπικής Κλίσης:

$$\delta_5 = e_5 \cdot \varphi'(v_5) = e_5 \cdot [y_5 (1 - y_5)] = 0.504 \cdot [0.496 (1 - 0.496)] = 0.126$$

Διορθώσεις στα Βάρη των Ακμών:

$$\Delta w_{35} = \eta \cdot y_3 \cdot \delta_5 = 1 \cdot 0.473 \cdot 0.126 = 0.060$$

$$\Delta w_{25} = \eta \cdot y_2 \cdot \delta_5 = 1 \cdot 0.6 \cdot 0.126 = 0.076$$

$$\Delta w_{50} = \eta \cdot (-1) \cdot \delta_5 = 1 \cdot (-1) \cdot 0.126 = -0.126$$

Υπολογισμός των νέων βαρών:

$$w_{35} = w_{35} + \Delta w_{35} = 0.3 + 0.060 = 0.360$$

$$w_{25} = w_{25} + \Delta w_{25} = 0.4 + 0.076 = 0.476$$

$$w_{50} = w_{50} + \Delta w_{50} = 0.4 - 0.126 = 0.274$$



# A. Θεωρία

## 2. Εκπαίδευση ΤΝΔ με τον αλγόριθμο οπισθοδιάδοσης

### 5. Παράδειγματα (Παράδειγμα 2)

#### ΝΕΥΡΩΝΑΣ 4 (νευρώνας εξόδου)

Υπολογισμός Τοπικής Κλίσης:

$$\delta_4 = e_4 \cdot \varphi'(v_4) = e_4 \cdot [y_4 (1 - y_4)] = (-0,448) \cdot [0,448 (1 - 0,448)] = -0,111$$

Διορθώσεις στα Βάρη των Ακμών:

$$\Delta w_{34} = \eta \cdot y_3 \cdot \delta_4 = 1 \cdot 0,473 \cdot (-0,111) = -0,053$$

$$\Delta w_{14} = \eta \cdot y_1 \cdot \delta_4 = 1 \cdot 0,1 \cdot (-0,111) = -0,011$$

$$\Delta w_{40} = \eta \cdot (-1) \cdot \delta_4 = 1 \cdot (-1) \cdot (-0,111) = 0,111$$

Υπολογισμός των νέων βαρών:

$$w_{34} = w_{34} + \Delta w_{34} = 0,3 - 0,053 = 0,247$$

$$w_{14} = w_{14} + \Delta w_{14} = 0,5 - 0,011 = 0,489$$

$$w_{40} = w_{40} + \Delta w_{40} = 0,4 + 0,111 = 0,511$$



# A. Θεωρία

## 2. Εκπαίδευση ΤΝΔ με τον αλγόριθμο οπισθοδιάδοσης

### 5. Παράδειγματα (Παράδειγμα 2)

#### ΝΕΥΡΩΝΑΣ 3 (κρυφός νευρώνας)

Υπολογισμός Τοπικής Κλίσης:

$$\begin{aligned}\delta_3 &= \varphi'(v_3) \cdot [w_{34} \cdot \delta_4 + w_{35} \cdot \delta_5] = y_3 (1 - y_3) \cdot [w_{34} \cdot \delta_4 + w_{35} \cdot \delta_5] \\ &= 0,473 (1 - 0,473) \cdot [0,3 \cdot (-0,111) + 0,3 \cdot 0,126] = 0,001\end{aligned}$$

Διορθώσεις στα Βάρη των Ακμών:

$$\Delta w_{23} = \eta \cdot y_2 \cdot \delta_3 = 1 \cdot 0,6 \cdot 0,001 = 0,001$$

$$\Delta w_{13} = \eta \cdot y_1 \cdot \delta_3 = 1 \cdot 0,1 \cdot 0,001 = 0$$

$$\Delta w_{30} = \eta \cdot (-1) \cdot \delta_3 = 1 \cdot (-1) \cdot 0,001 = -0,001$$

Υπολογισμός των νέων βαρών:

$$w_{23} = w_{23} + \Delta w_{23} = 0,4 + 0,001 = 0,401$$

$$w_{13} = w_{13} + \Delta w_{13} = 0,5 + 0 = 0,5$$

$$w_{30} = w_{30} + \Delta w_{30} = 0,4 - 0,001 = 0,399$$



# A. Θεωρία

## 2. Εκπαίδευση ΤΝΔ με τον αλγόριθμο οπισθοδιάδοσης

### 6. Παρατηρήσεις για τον Αλγόριθμο Οπισθοδιάδοσης

- Οι κύκλοι εκπαίδευσης αναφέρονται και ως εποχές εκπαίδευσης. Μία εποχή εκπαίδευσης συνίσταται σε έναν πλήρη κύκλο παρουσίασης όλων των προτύπων εισόδου – εξόδου.
  - Τα πρότυπα μπορούν να παρουσιαστούν με τυχαία σειρά σε μία εποχή εκπαίδευσης, θα πρέπει ωστόσο να παρουσιαστούν όλα και ακριβώς μία φορά το καθένα..
- Υπάρχουν δύο τρόποι όσον αφορά την εκπαίδευση του δικτύου:
  - Τρόπος προτύπων: Μετά από κάθε πρότυπο, αλλάζουν τα βάρη του δικτύου.
  - Σωρηδόν τρόπος (batch mode): Παρουσιάζονται όλα τα πρότυπα, γίνεται ο υπολογισμός της εξόδου και στην συνέχεια, υπολογίζεται το μέσο τετραγωνικό λάθος πάνω σε όλα τα δείγματα σύμφωνα με το μαθηματικό τύπο:

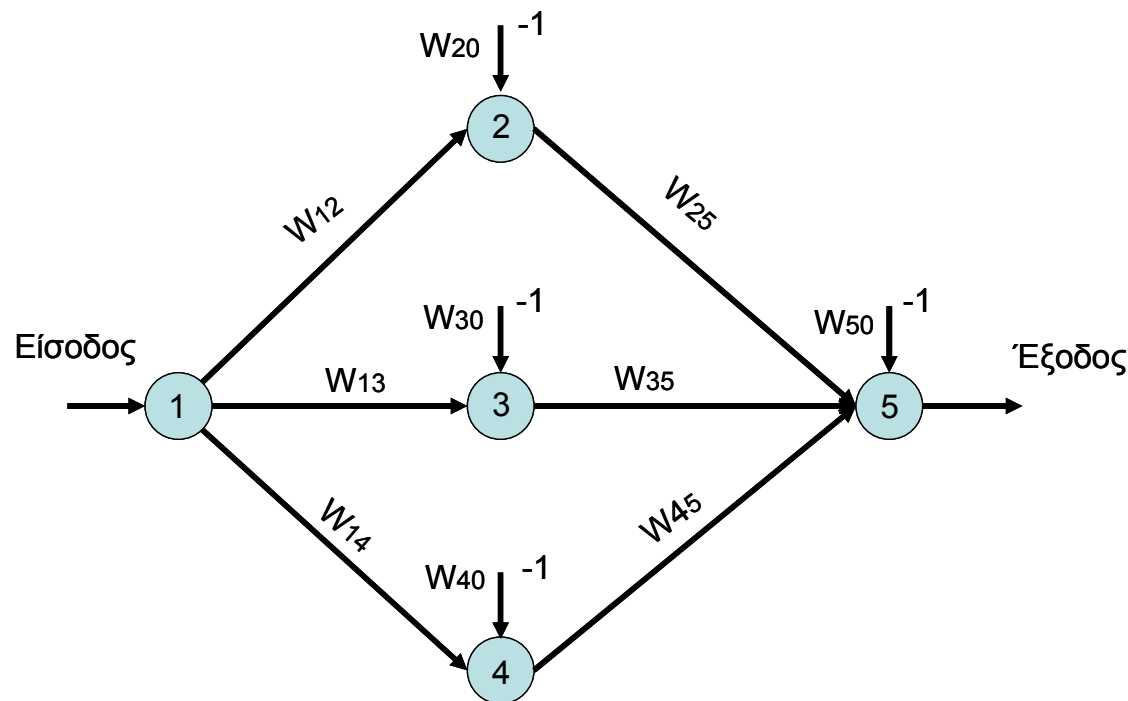
$$E_{average} = \frac{1}{2N} \sum_{n=1}^N \sum_j e_j^2(n)$$



# Β. Ασκήσεις

## Εφαρμογή 1

Θέλουμε να εκπαιδεύσουμε το ΤΝΔ που παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα, ώστε η έξοδός του να παράγει το τετράγωνο της εισόδου του. Οι νευρώνες του κρυφού επιπέδου έχουν συνάρτηση ενεργοποίησης τη σιγμοειδή συνάρτηση  $S(x) = 1/(1 + e^{-x})$ , ενώ ο νευρώνας εξόδου τη γραμμική συνάρτηση αντίστοιχα. Σε κάποια στιγμή της εκπαίδευσης τα βάρη έχουν πάρει τις τιμές όπως τις παρουσιάζει ο Πίνακας 1. Επίσης, υπενθυμίζεται ότι τα κατώφλια έχουν εισοδο την τιμή -1.



Πίνακας 1 Βάρη του ΤΝΔ

$W_{12}$	$W_{13}$	$W_{14}$	$W_{25}$	$W_{35}$	$W_{45}$	$W_{20}$	$W_{30}$	$W_{40}$	$W_{50}$
0.10	0.10	0.20	0.30	0.82	0.20	0.10	0.10	0.10	0.10

Για όλα τα παρακάτω ερωτήματα χρησιμοποιείτε ακρίβεια 2 δεκαδικών.





# Β. Ασκήσεις

## Εφαρμογή 1

(α) Ποιο είναι το σφάλμα στην έξοδο του δικτύου αν εισάγουμε την τιμή 0.5 ως είσοδο; Για ευκολία στις πράξεις δίνεται ο Πίνακας 1 για τις εξόδους της σιγμοειδούς συνάρτησης.

**Πίνακας 1** Έξοδοι σιγμοειδούς συνάρτησης

Είσοδος σιγμοειδούς	-0.20	-0.15	-0.1	-0.05	0	0.05	0.1	0.15	0.20
Έξοδος σιγμοειδούς	0.45	0.46	0.48	0.49	0.50	0.51	0.53	0.54	0.55

[illegible]

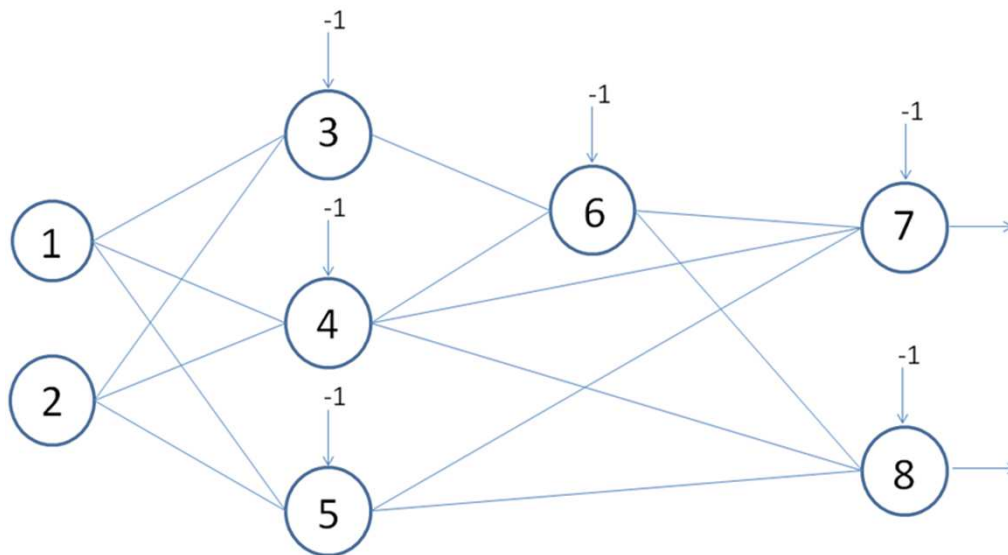


## Β. Ασκήσεις

### Εφαρμογή 2

Δίνεται το παρακάτω πολυεπίπεδο ΤΝΔ με τοπολογία 2-3-1-2 στο οποίο οι νευρώνες 1 και 2 είναι οι νευρώνες εισόδου. Στους υπόλοιπους υπολογιστικούς νευρώνες, η συνάρτηση ενεργοποίησης είναι: η συνάρτηση  $f(x)=x$  για τους νευρώνες 3,4 και 5, η σιγμοειδής συνάρτηση  $f(x)=1/(1+e^{-x})$  για το νευρώνα 6 και η συνάρτηση  $f(x)=2x$  για τους νευρώνες εξόδου. Το δίκτυο εκπαιδεύεται με τη μέθοδο της οπισθοδιάδοσης του σφάλματος (backpropagation) με ρυθμό εκπαίδευσης  $\eta=0.25$ .

Τα βάρη των συνδέσεων και των κατωφλίων (σημειώνονται με δείκτη 0) δίνονται στον παρακάτω πίνακα:



<b>W13</b>	0.5	<b>W57</b>	0.2
<b>W14</b>	0.5	<b>W58</b>	0.2
<b>W15</b>	0.5	<b>W67</b>	0.3
<b>W23</b>	0.3	<b>W68</b>	0.3
<b>W24</b>	0.3	<b>W30</b>	0
<b>W25</b>	0.3	<b>W40</b>	0
<b>W36</b>	0.7	<b>W50</b>	0
<b>W46</b>	0.7	<b>W60</b>	0
<b>W47</b>	0.5	<b>W70</b>	-1
<b>W48</b>	0.5	<b>W80</b>	1

Τα σφάλμα στην έξοδο είναι  $e_7=-0.53$  και  $e_8=0.27$ .



(1) Υπολογίστε την έξοδο όταν το διάνυσμα εισόδου είναι το  $(0,0)$ .

(2) Υπολογίστε τους παράγοντες κλίσης  $\delta_7$  και  $\delta_8$  στους νευρώνες εξόδου 7 και 8.



(3) Υπολογίστε τον παράγοντα κλίσης ( $\delta_6$ ) στον νευρώνα 6 και το ανανεωμένο βάρος κατωφλίου  $w_{60}$ .

(4) Υπολογίστε τον παράγοντα κλίσης ( $\delta_4$ ) στον νευρώνα 4 και το ανανεωμένο βάρος  $w_{24}$ .