ΔΙΚΤΥΑ HOPFIELD

Δομή: Ένα ΤΝΔ της δομής Hopfield δομείται ως εξής:

- N υπολογιστικούς νευρώνες και κάθε νευρώνας στέλνει την έξοδο του σε κάθε άλλο νευρώνα. Άρα έχουμε N(N-1) συνάψεις (ακμές).
- Δεν υπάρχουν αισθητήρες εισόδου ή εξόδου.

Πίνακας Βαρών: Θέλοντας να αποθηκεύσουμε τα N-διάστατα διανύσματα $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_K$ **(βασικές μνήμες)** θα χρειαστούμε ένα δίκτυο Hopfield N αισθητήρων και η αποθήκευση θα γίνει στα βάρη των ακμών με τον τύπο (I ο NxN μοναδιαίος πίνακας):

$$W = X_1 {X_1}^T + X_2 {X_2}^T + \cdots + X_K {X_K}^T - K \cdot I$$

Παρατηρήσεις για τον πίνακα βαρών:

- Συμμετρικός ως προς την κύρια διαγώνιο
- Η κύρια διαγώνιος είναι 0.

Έλεγχος ορθής αποθήκευσης των βασικών μνημών:

Κάθε ένα από τα K διανύσματα θα πρέπει να εξάγεται από τον πίνακα βαρών με την πράξη:

$sign(W \cdot X_i - \theta)$ που θα πρέπει να είναι ίσο με το X_i

Ισχύουν οι ακόλουθοι τύποι :

- Ο μέγιστος αριθμός βασικών μνημών που αποθηκεύονται χωρίς να έχουμε σφάλμα στην ανάκτηση: $M_{max} = \frac{N}{4 \cdot lnN}$
- Αντίστοιχα ώστε περισσότερες από τις μισές βασικές μνήμες να ανακαλούνται χωρίς σφάλμα: $M_{max} = \frac{N}{2 \cdot lnN}$

Πίνακας Βαρών: Θεωρείστε ότι θέλουμε να αποθηκεύσουμε τα ακόλουθα 2 διανύσματα σε ένα ΤΝΔ τύπου Hopfield 3 νευρώνων [-1,1,1], [-1,1,-1].
Το δίκτυο που αποθηκεύει τα διανύσματα πρέπει να έχει 3 αισθητήρες (αφού τα διανύσματα έχουν διάσταση 3).
Υπολογίζουμε τον πίνακα βαρών:

$$W = X_1 {X_1}^T + X_2 {X_2}^T - 2I$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Έλεγχος Ορθής Αποθήκευσης: Δίνεται ο πίνακας βαρών: $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ και τα διανύσματα X1 = $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ και X2 = $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Να εξετασεί αν τα διανύσματα έχουν αποθηκευτεί σωστά στον πίνακα βαρών θεωρώντας ότι στην ανάκτηση των διανυσμάτων γίνεται χρήση του επόμενου κανόνα: «Αν η έξοδος ενός νευρώνα είναι 0, τότε θέσε την έξοδο ίση με την αντίστοιχη είσοδο»με μηδενικά κατώφλια.

Λύση:

Για το X_1:

$$sign(W \cdot X_1 - \theta) = sign\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = sign\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$$

$= sign\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = X_1$. Αποθηκεύτηκε σωστά.

Για το X_2:

$$sign(W \cdot X_2 - \theta) = sign\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) =$$

$sign\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = sign\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = X_2$. Αποθηκεύτηκε σωστά.

ΔΙΚΤΥΑ HOPFIELD (ΣΥΓΧΡΟΝΗ – ΑΣΥΓΧΡΟΝΗ ΕΝΗΜΕΡΩΣΗ)

Εισαγωγή Φθαρμένου Διανύσματος:

Εισάγεται διάνυσμα X (είτε βασική μνήμη, είτε άλλο (φθαρμένο) διάνυσμα.

Σύγχρονη Ενημέρωση Βαρών:

Γίνεται η πράξη: $sign(W \cdot X - \theta) = X'$ και

Αν το αποτέλεσμα X' = X:

- «Ισορροπεί στην X»

Αν το αποτέλεσμα X' δεν είναι ίσο με X:

- Τότε γίνεται η ίδια πράξη με είσοδο X' (οπότε ή θα έχουμε σύγκλιση ή θα έχουμε παλινδρόμηση (αποτυχία)
  - Σύγκλιση θα έχουμε όταν η είσοδος γίνει ίδια με την έξοδο. (π.χ. X=>X'=>X': ισορροπεί στην X')
  - Παλινδρόμηση θα έχουμε αν ξαναβγεί ένα διάνυσμα που είχαμε εισάγει και σε προηγούμενα (π.χ. X=>X'=>X'' και έπειτα το αποτέλεσμα X'''=X'

Ασύγχρονη Ενημέρωση Βαρών

Όπως παραπάνω, αλλά διορθώνεται μόνο μία είσοδος σε κάθε βήμα.

- Σε έναν κύκλο εκπαίδευσης θα πρέπει να διορθωθούν με τυχαία σειρά όλες οι είσοδοι.
- Μόλις ολοκληρωθεί ο κύκλος ισχύουν τα ίδια κριτήρια τερματισμού με τη σύγχρονη ενημέρωση.

Σύγχρονη Ενημέρωση Βαρών: π.χ. $W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, θ= $\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$

Π.χ.1: Με είσοδο το φθαρμένο διάνυσμα $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$:

$$X(1) = sign(W \times X(0) - \theta) = sign\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} \right)$$

$$= sign\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} \right) = sign\left(\begin{bmatrix} -0,5 \\ -2,5 \\ -0,5 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Κατάσταση ισορροπίας: $[-1\ -1\ -1]^T$

Π.χ.2: Με είσοδο το φθαρμένο διάνυσμα $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$:

$$X(1) = sign(W \times X(0) - \theta) = sign\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$X(2) = sign(W \times X(1) - \theta) = sign\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X(3) = sign(W \times X(2) - \theta) = sign\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Παλινδρομεί μεταξύ των X(1) και X(2)

Ασύγχρονη Ενημέρωση Βαρών: (στο ίδιο δίκτυο με είσοδο $[1,1,1]^T$)

1ος κύκλος εκπαίδευσης:

Ο νευρώνας 1 ενημερώνεται: $sign(w_{11}x_1 + w_{12}x_2 + w_{13}x_3 - \theta_1) = sign(0 \times 1 + 1 \times 1 + (-1) \times 1 - 0,5) = sign(-0,5) = -1$ Συνεπώς: $X(1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Ο νευρώνας 2 ενημερώνεται: $sign(w_{21}x_1 + w_{22}x_2 + w_{23}x_3 - \theta_2) = sign(1 \times (-1) + 0 \times 1 + 1 \times 1 - 0,5) = sign(-0,5) = -1$. Συνεπώς: $X(2) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Ο νευρώνας 3 ενημερώνεται: $sign(w_{31}x_1 + w_{32}x_2 + w_{33}x_3 - \theta_3) = sign((-1) \times (-1) + 1 \times (-1) + 0 \times 1 - 0,5) = sign(-0,5) = -1$. Συνεπώς: $X(3) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

2ος κύκλος εκπαίδευσης

...