Παύλος Σπανουδάκης (sdi1800184)
Εργασία 1 στο μάθημα Τεχνητή Νοημοσύνη ΙΙ

Πρόβλημα 1

Να αποδείξετε ότι $\nabla_{\boldsymbol{w}} MSE(\boldsymbol{w}) = \frac{2}{m}(\boldsymbol{X}^T(\boldsymbol{X}\boldsymbol{w} - \boldsymbol{y}))$:

Λύση

Αρχικά θα βρούμε τον τύπο της μερικής παραγώγου για κάθε βάρος w_j:

Έχουμε

$$MSE(\boldsymbol{w}) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^{(i)} - y^{(i)})^2$$

Άρα

$$\frac{\partial}{\partial w_j} MSE(\boldsymbol{w}) = \frac{2}{m}\sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^{(i)} - y^{(i)})\frac{\partial}{\partial w_j}(\boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^{(i)} - y^{(i)}) \tag{1}$$

Για την νέα μερική παράγωγο που προέκυψε το $y^{(i)}$ είναι μια απλή σταθερά, επομένως:

$$\frac{\partial}{\partial w_j}(\boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^{(i)} - y^{(i)}) = \frac{\partial}{\partial w_j}(\boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^{(i)})$$

Ισχύει $\boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^{(i)} = w_1 x_1^{(i)} + w_2 x_2^{(i)} + ... + w_j x_j^{(i)} + ... + w_n x_n^{(i)}$, συνεπώς:

$$\frac{\partial}{\partial w_j}(\boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^{(i)}) = \frac{\partial}{\partial w_j}(w_j x_j^{(i)}) = x_j^{(i)} \tag{2}$$

Από (1),(2) προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial}{\partial w_j} MSE(\boldsymbol{w}) = \frac{2}{m}\sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^{(i)} - y^{(i)})x_j^{(i)} \tag{3}$$

Θα ξεκινήσουμε από το δεύτερο μέρος της ισότητας που θέλουμε να δείξουμε, και θα καταλήξουμε στο πρώτο.

Αρχικά θα υπολογίσουμε το $\boldsymbol{X}\boldsymbol{w}$, και στην συνέχεια το το $\boldsymbol{X}\boldsymbol{w}-\boldsymbol{y}$. Έχουμε:

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} x_0^{(1)} & x_1^{(1)} & ... & x_n^{(1)} \\ x_0^{(2)} & x_1^{(2)} & ... & x_n^{(2)} \\ & ... & & \\ x_0^{(m)} & x_1^{(m)} & ... & x_n^{(m)} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{w}=\begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ ... \\ w_n \end{bmatrix} \text{ και } \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} y^{(1)} \\ y^{(2)} \\ ... \\ y^{(m)} \end{bmatrix}$$

Οπότε:

$$\boldsymbol{X}\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^{(1)} \\ \boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^{(2)} \\ ... \\ \boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^{(m)} \end{bmatrix} \text{ επομένως } \boldsymbol{X}\boldsymbol{w}-\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^{(1)}-y^{(1)} \\ \boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^{(2)}-y^{(2)} \\ ... \\ \boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^{(m)}-y^{(m)} \end{bmatrix}$$

Μένει να υπολογίσουμε το $\boldsymbol{X}^T(\boldsymbol{X}\boldsymbol{w}-\boldsymbol{y})$:

$$\boldsymbol{X}^T=\begin{bmatrix} x_0^{(1)} & x_0^{(2)} & ... & x_0^{(m)} \\ x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & ... & x_1^{(m)} \\ & ... & & \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & ... & x_n^{(m)} \end{bmatrix} \text{ άρα } \boldsymbol{X}^T(\boldsymbol{X}\boldsymbol{w}-\boldsymbol{y})=\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m x_0^{(i)}(\boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^{(i)}-y^{(i)}) \\ \sum_{i=1}^m x_1^{(i)}(\boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^{(i)}-y^{(i)}) \\ ... \\ \sum_{i=1}^m x_n^{(i)}(\boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^{(i)}-y^{(i)}) \end{bmatrix}$$

Αφού πολλαπλασιάσουμε και με $\frac{2}{m}$ τον πίνακα που προέκυψε, παρατηρούμε ότι το j-οστό στοιχείο προκύπτει από τον τύπο

$$\frac{2}{m}\sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^{(i)}-y^{(i)})x_j^{(i)}$$

Δηλαδή τον τύπο (3). Συνεπώς, έπεται ότι

$$\frac{2}{m}\boldsymbol{X}^T(\boldsymbol{X}\boldsymbol{w}-\boldsymbol{y})=\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial w_0}MSE(\boldsymbol{w}) \\ \frac{\partial}{\partial w_1}MSE(\boldsymbol{w}) \\ ... \\ \frac{\partial}{\partial w_m}MSE(\boldsymbol{w}) \end{bmatrix}=\nabla_{\boldsymbol{w}}MSE(\boldsymbol{w})$$