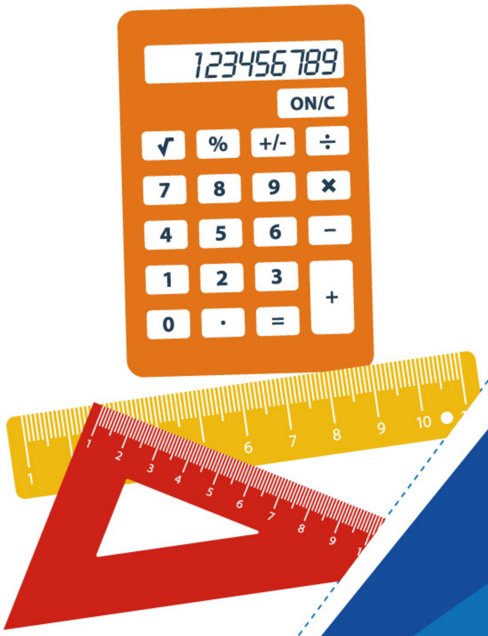


Módulo

Matemáticas

FORMARTE

CONTENIDO

I. Aritmética

II. Conjuntos

- Relaciones entre conjuntos
- Operaciones entre conjuntos

III. Conjuntos numéricos

IV. Estadistica

- Diagrama de barras
- Diagrama circular o de sectores
- Diagramas temporales

V. Técnicas de conteo

VI. Probabilidad

VII. Algebra

- Sistemas de ecuaciones
- Inecuaciones

VIII. Funciones

IX. Geometría

- Concepto de perímetro

X. Trigonometría

- Funciones trigonométricas

ARITMÉTICA

La aritmética es la más antigua y elemental rama de las matemáticas. Para el ser humano siempre ha representado una herramienta importante al momento de resolver situaciones problema, desde suplir la necesidad de contar hasta solucionar los más elevados cálculos científicos.

Se entiende por aritmética el estudio de las operaciones elementales con los números, como lo son la suma, la resta, la multiplicación, la división, la potenciación, la radicación y la logaritmación, y todas aquellas propiedades fundamentales que se derivan de ellas.

La palabra aritmética proviene del griego *Arithmos techne* que traduce: “habilidad con los números”, mas el origen de la aritmética como ciencia es quizás más antiguo que el mismo concepto de número. El primer registro aritmético del hombre data del año 20.000 a.C. y consiste en un hueso con 58 muescas marcadas, repartidas en 5 grupos de 11 muescas, y otras 3 muescas marcadas de manera independiente. Todo parece indicar que 22.000 años atrás, el hombre ya tenía el razonamiento suficiente para contar y representar gráficamente sus operaciones básicas, habilidades que fueron evolucionando para construir las bases de la aritmética actual, a la par con el desarrollo de las culturas.

Es claro que no se puede establecer con precisión el momento en el cual el hombre como comunidad comenzó a utilizar la aritmética en su diario vivir, pero sí es posible afirmar en términos generales que los sistemas de numeración fueron un factor determinante en el desarrollo de la civilización a lo largo de su historia.

El primer sistema de numeración aparece en la matemática de la prehistoria a partir de la necesidad de representar simbólicamente grandes cantidades, ya que sería demasiado tedioso representar una cantidad de dos millones (2.000.000) con 2 millones de muescas, y, aunque no podemos establecer con claridad dónde y cómo surgen los números como tales, sí podemos afirmar que la humanidad ha utilizado la aritmética durante miles de años.

Realmente fue bastante complicado y lento el proceso evolutivo que le permitió al hombre finalmente ingeniar un sistema que solo consta de diez símbolos, y al mismo tiempo permita representar infinitas cantidades, como lo es nuestro sistema numérico decimal.

Los primeros sistemas de numeración fueron en su gran mayoría sistemas con base 5 o con base 10 (es decir, cada 5 o 10 números cambian de símbolo para identificar la numeración, por ejemplo, los números romanos), y fueron inspirados por la capacidad de contar con los dedos. Mas no necesariamente todos los sistemas eran base 5 o 10; hubo algunas excepciones, como los mayas, que manejaban un sistema de numeración de base 20, ya que contaban con los dedos de las manos y los pies.

La dificultad en la mayoría de los sistemas de numeración previos al nuestro radicaba en que la aritmética se tornaba bastante complicada cada que debía hacerse una operación, de manera que los números terminaban convirtiéndose más en un registro que en una ciencia, ya que la aritmética residía en las manos de muy pocos. Fue entonces cuando se hicieron públicos los avances aritméticos de la India o el famoso método de los indios (en latín “Modus Indorum”) que se convirtió en la aritmética que hoy conocemos. El sistema numérico indio era más simple, y, además de poseer el cero, manejaba una notación con valor numérico posicional.

A diferencia de las demás civilizaciones, el sistema indio se basaba en diez símbolos, identificaban los primeros 9 números y el cero, de la siguiente manera:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9.

Estos son los números arábigos pertenecientes al sistema numérico indio, que utilizamos en la aritmética de la actualidad. Los números árabes fueron desarrollados por los grandes matemáticos indios Aryabhatta, Brahmagupta y Bhaskara I.

Aryabhatta ideó además la notación posicional, mediante la cual se asignaba un valor diferente a cada número dependiendo del lugar que ocupa. Así, para representar cualquier número mayor que 9, se utilizaban posiciones, donde la primera posición correspondía a las unidades, la segunda posición a las decenas, la tercera a las centenas, y así sucesivamente. De esta manera, para representar el número mil trescientos veintitrés, utilizamos 4 números y 4 posiciones, así:

1323 (1 unidad de mil, 3 centenas, 2 decenas y 3 unidades)

Aunque la notación posicional es una espléndida demostración de ingenio por parte de los hindúes, más aún lo fue la invención del cero. La nada es un concepto que ha existido en la mente de los hombres desde el origen de los tiempos y conserva un sentido filosófico profundo que fundamenta la misma matemática. Mas la idea de la nada nunca tomó la expresión de número ya que solo existía una representación gráfica de los números naturales o “contables”, por decirlo así, y la nada se representaba con un espacio en blanco. La invención del cero permitió desarrollar los problemas con mayor facilidad, y fomentar un desarrollo aritmético a través de la historia que permite construir la aritmética actual o aritmética de Peano.

A continuación se presentan los conceptos básicos de aritmética que serán de gran utilidad para desarrollar las temáticas de los capítulos siguientes. Para desarrollar los diferentes problemas matemáticos que se presentan en la vida diaria, es de vital importancia conocer las diferentes maneras como se puede expresar una cantidad; por ejemplo, qué clase de números debemos conocer si fuera necesario expresar matemáticamente el siguiente cálculo:

¿Cuántos kilogramos pesa una bolsa que contiene un cuarto de libra de sal más 50 gramos de sal?

Antes de exponer los contenidos de aritmética necesarios para afrontar el resto del curso, introducimos la tematica de teoría de conjuntos, pues esta corresponde al punto de partida de la mayoría de las ramas de la matemática.

CONJUNTOS

Hacia 1874, el matemático Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor publicó un trabajo revolucionario sobre la teoría de conjuntos. En este texto deja ver que los conceptos de la teoría de conjuntos son de gran utilidad en el estudio de semántica y que el concepto de conjunto es fundamental en las matemáticas, incluso más que la operación de contar, dado que la definición de conjunto se encuentra en nuestra vida cotidiana de manera explícita e implícita.

El concepto de conjunto, en su forma explícita, se utiliza para construir proposiciones matemáticas más claras y precisas y ha sido de gran ayuda para explicar conceptos tan abstractos como el de infinito. Este concepto puede encontrarse en cualquiera de las áreas de la matemática, entre ellas la estadística, gran beneficiada de esta teoría.

La estadística aprovecha los conjuntos para establecer o representar por medio de diagramas las relaciones que pueden existir entre diferentes grupos. En este campo son muy conocidos los diagramas de Venn, que permiten presentar en forma gráfica la relación matemática o lógica entre diferentes grupos de cosas, representando cada conjunto mediante un óvalo o círculo. La forma como estos círculos se combinan entre sí muestra todas las posibles relaciones lógicas entre los grupos que se están representando.

La palabra conjunto se usa para referirse a una colección de objetos, de los cuales se dice que cumplen una propiedad específica o que tienen una característica en común, mientras que llamaremos elementos a aquellos objetos pertenecientes al conjunto. Los conjuntos se representarán gráficamente con figuras geométricas cerradas, las cuales llamaremos diagramas de Venn.

Se usan letras mayúsculas para denotar los conjuntos y minúsculas para los elementos.

Ejemplo 1:

Los números naturales forman un conjunto que se denota con la letra $\mathbb{N}$.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4........\}$

Los puntos suspensivos indican que el conjunto tiene infinitos elementos.

Ejemplo 2:

Las letras del alfabeto también forman un conjunto que en este caso es finito.

$$A=\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z\}$$

Los conjuntos se pueden expresar o definir de dos formas:

Por comprensión: Un conjunto está definido por comprensión cuando mencionamos la propiedad que cumplen todos sus elementos, es decir, la característica que tienen en común.

Ejemplo 3:

A = {los números primos entre 2 y 10}
L= {las letras del alfabeto}
ℕ= {números naturales}

Por extensión: Un conjunto está definido por extensión cuando se menciona explícitamente cada uno de sus elementos.

Ejemplo 4:

A = {2, 3, 5,7}
L = {a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z}

Es claro que no podemos representar el conjunto ℕ de los números naturales, pues este es infinito, esta es la razón por la que existen estas dos formas de nombrar un conjunto.

Existen varios conjuntos especiales que es necesario definir.

Conjunto vacío: se dice que un conjunto es vacío si no tiene elementos. Este conjunto se denota simbólicamente con Φ.

Conjunto universal: se le llama al que posee todos los elementos en discusión, y se designa con la letra U.

RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

Para empezar con nuestro análisis de los conjuntos, debemos comprender las relaciones que se presentan entre estos y sus elementos.

Pertenencia (∈)

Cuando un elemento x cumple la propiedad que define a un conjunto A, decimos que x pertenece al conjunto A (x ∈ A), cuando no la cumple simplemente decimos que no pertenece al conjunto A (x∈A).

Ejemplo 1:

Si definimos el conjunto A= {números pares} podemos decir que 28∈A, pues 28 cumple con la propiedad de ser un número par, por el contrario tenemos que 7∉A, pues 7 no es par. Así mismo, tenemos que si n es un elemento que pertenece a A, entonces n es un número par y si r es un elemento que no pertenece a A, entonces r no puede ser par.

La relación de pertenencia se considera una relación elemento-conjunto, es decir que, un elemento pertenece a ese conjunto. No se puede afirmar que un conjunto pertenece a otro conjunto o que un conjunto pertenece a un elemento.

A continuación presentamos las relaciones que se dan entre dos o más conjuntos:

Contención

Cuando todos los elementos del conjunto B pertenecen a su vez a otro conjunto A, se dice que A contiene a B (B⊇A) o que B está contenido en A, esto se denota como B⊆A. Si existe al menos un elemento de B que no pertenece a A, entonces decimos que A no contiene a B o que B no está contenido en A. Esto último se denota como B ⊈A.

Ejemplo 2:

Sean A= {números pares}, B= {2,4,6,8,10} y C={1,2,4}.

Tenemos que cada elemento de B pertenece a A pues 2, 4, 6, 8, 10 son todos números pares. Por otro lado tenemos que C no está contenido en A pues 1∈C y 1∉A por ser un número impar.

Igualdad

Se dice que dos conjuntos A y B son iguales cuando estos tienen exactamente los mismos elementos. También se puede decir que A y B son iguales si se cumple que A está contenido en B y B está contenido en A, es decir, si todo elemento de A pertenece a B y viceversa.

A=B si y solo si B⊆A y A⊆B

Ejemplo 3:

Definimos los conjuntos A = {1,2,3} y B = {2,3,1}.

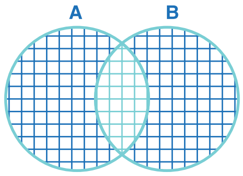
Como los elementos de A son los mismos de B y los elementos de B son los mismos de A, podemos decir que A = B.

Operaciones Entre Conjuntos

La unión:

La unión entre conjuntos da como resultado un nuevo conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a los conjuntos que se quieren unir, pero debe tenerse cuidado de no repetir elementos.

La unión de dos conjuntos se representa de la siguiente manera:



AUB

Ejemplo 4:

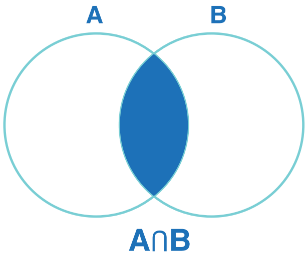
Si definimos los conjuntos I= {números impares} y P= {números pares}, es inmediato que P ∪ I = ℕ.

Ejemplo 5:

Sean A = {1,2,3,5,7} y B = {2,4,6,8,10}, tenemos que P ∪ I = {1,2,3,4,5,6,7,8,10}. notemos que el elemento repetido (2) solo se cuenta una vez cuando se realiza la unión.

La intersección

Es el conjunto formado por los elementos comunes entre los conjuntos que se tienen en consideración. Para el caso de dos conjuntos se representa de la siguiente manera:



Se puede decir que un elemento pertenece a A∩B si y solo si pertenece al conjunto A y al conjunto B al mismo tiempo.

Ejemplo 6:

Sean A = {1,2,3,5,7} y B = {2,4,6,8,10}, tenemos que A ∩ B = {2} ya que 2 es el único elemento en común que tienen ambos conjuntos.

Ejemplo 7:

Para los conjuntos I= {números impares} y P= {números pares}, tenemos que P ∩ I = *Φ,* ya que no existen elementos en común, entre los conjuntos P y I.

A los conjuntos cuya interseccion es vacía se les denomina disjuntos.

Cantidad de elementos en un conjunto

La cantidad de elementos pertenecientes a un conjunto A se denota como |A|, así que por ejemplo para A={1,2,3}, tenemos que|A|=3 y |*Φ*|=0.

Podría pensarse que|A ∪ B|= |A|+|B|, pero basta con un vistazo al ejemplo 8 para darnos cuenta que de que esto no se cumple en general ya cada elemento repetido se contaría dos veces, por lo tanto estos elementos deben descontarse una vez, es decir que la expresión correcta es

$$|A \cup B| = |A|+|B|-|A \cap B|$$

La cual aplicaremos solo a conjuntos finitos.

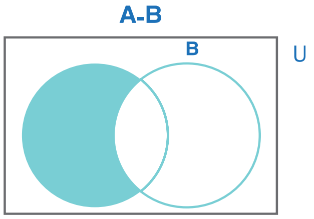
Ejemplo 8:

Si A y B se definen como en el ejemplo 8 entonces quenemos que

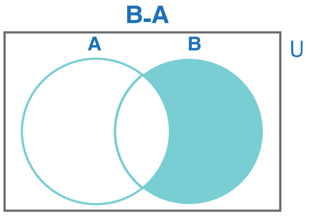
$$|A \cup B| = |A|+|B|-|A \cap B$$
$$|A \cup B| = 5 + 5 - 1$$
$$|A \cup B| = 9$$

La diferencia

La diferencia entre dos conjuntos da como resultado un nuevo conjunto formado por los elementos que tiene el primer conjunto y que no tiene el segundo.Se representa de la siguiente manera:



Son los elementos que tiene A y que no tiene B.



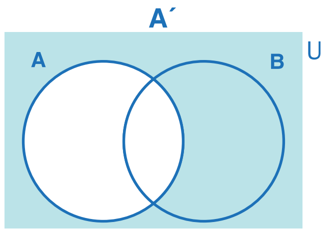
Son los elementos que tiene A y que no tiene B.

El complemento

El complemento de un conjunto A, se define como la diferencia entre este y el conjunto universal. Se representa con los símbolos A^c, A´.

$$A^c = U\text{-}A$$

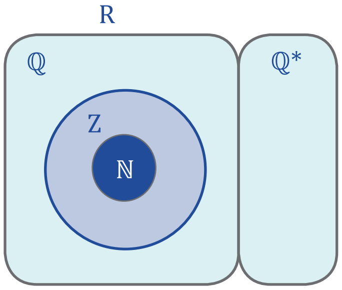
Intuitivamente, el complemento de A es el conjunto formado por todos los elementos que se deben añadir a A para que sea igual al conjunto universal.



CONJUNTOS NUMÉRICOS

Por conjuntos numéricos nos referimos a las representaciones simbólicas que surgen de la necesidad de representar cantidades que en ocasiones no podemos tan siquiera imaginar en forma. En la actualidad, suele trabajarse sobre el conjunto de los números reales representado en la siguiente gráfica por la totalidad del rectángulo. El conjunto de los números reales es de inmensa utilidad y se unifica en un solo sistema de numeración cuando se desarrolla un trabajo sobre los números decimales.

Sobre los números reales, aparecen las diferentes caracterizaciones numéricas que se fueron desarrollando a raíz de las necesidades del hombre y que hoy en día conservan su clasificación original:



ℕ = Números naturales.
ℤ = Números enteros.
ℚ= Números racionales.
ℚ*= Números irracionales.
ℝ= Números reales.

Los números naturales

Se entiende por número natural todo aquel que puede escribirse como la suma sucesiva de unos, es decir:

1 = 1
2= 1 + 1
3 = 1 + 1 + 1
4= 1 + 1 + 1 + 1

Y así sucesivamente.

Las primeras operaciones básicas conocidas efectuadas con los números naturales fueron la suma y la multiplicación, que se comportaban a la perfección en la aritmética natural y permitieron definir las siguientes propiedades para las mismas:

Podría decirse que el conjunto de los números naturales es infinito o, de una manera más formal, que no tiene tope máximo, ya que siempre se puede avanzar uno más.

Las primeras operaciones básicas conocidas efectuadas con los números naturales fueron la suma y la multiplicación, que se comportaban a la perfección en la aritmética natural y permitieron definir las siguientes propiedades para las mismas:

Propiedad	En la suma	En la multiplicación
Conmutativa	$a+b=b+a$	$a\times b=b\times a$
Asociativa	$(a+b)+c = a+(b+c)$	$(a\times b)\times c = a\times(b\times c)$
Modulativa	$a+0=a$	$a\times 1=a$
Distributiva	$a(b+c)= ab+ac$	

Donde a,b y c son números naturales cualesquiera. Sin embargo, aunque la resta y la división surgieron como operaciones inversas para la suma y la multiplicación, no conservan las propiedades mencionadas para números naturales.

Divisibilidad

Decimos que un número a es divisible entre otro número b (distinto de cero) si al realizar la división a/b es exacta, es decir, si el resultado es un número entero. Por ejemplo cualquier número es divisible entre 1, pues a/1=a y el cero es divisible entre cualquier número distinto de cero, pues 0/a=0.

Existen formas de determinar cuándo un número es divisible entre otro a estas las llamamos criterios de divisibilidad.

Número	Criterio
2	Un número es divisible entre 2 si y solo si el dígito de las unidades es 0, 2, 4, 6 o 8.
3	Un número es divisible entre 3 si y solo si la suma de sus dígitos es un numero divisible entre 3.
4	Un número es divisible entre 2 si y solo si el numero formado por los dos últimos dígitos es divisible entre 4.
5	Un número es divisible entre 2 si y solo si el dígito de las unidades es 0 o 5.
10	Un número es divisible entre 2 si y solo si el dígito de las unidades es 0.
11	Un número es divisible entre 11 si y solo si la suma alternada de sus dígitos es divisible entre 11

Por ejemplo, 2332 es divisible entre 11, pues 2-3+3-2=0 y 0 es divisible entre 11. Existen números que solo son divisibles entre el 1 y entre sí mismos, a estos los denominamos números primos. Por ejemplo los números 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 son primos.

Teorema de Fundamental de la aritmética

Todo número natural es primo o puede representarse como el producto de números primos, cabe destacar que esta representación es única salvo el orden. Descomposición por factores de algunos números naturales.

Este teorema muestra la importancia que tienen los primos dentro del sistema de los números naturales, pues estos constituyen los bloques básicos que componen cada número. A continuacion presentamos la descomposición en primos de los primeros 20 naturales.

1 = 1×1

2 = 2×1

3 = 3×1

4 = 2×2

5 = 5×1

6 = 3×2

11 = 11×1

12 = 6×2 = 3×2×2

13 = 13×1

14 = 7×2

15 = 3×5

16 = 8×2 = 4 × 2 ×2 = 2×2×2×2

7 = 7×1

8 = 4×2 =2×2×2

9 = 3 ×3

10 = 2× 5

17 = 17×1

18 = 9×2 = 3× 3×2

19 = 19×1

20 = 4×5 = 2×2×5

Los números racionales

Se define el conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$), como la agrupación de todos los números q, tales que se pueden escribir de la forma a/b, donde a y b son enteros, con $b \neq 0$.

Nota La división entre cero no existe, por tanto es importante aclarar que para toda expresión racional a/b, el número entero b debe ser diferente de cero.

Ejemplo 1:

- 2 es racional, ya que *2* puede escribirse como 2/1, con a=*2* y b=1.
- 0,5 es racional, ya que 0,5 = (1÷2) = 1/2
- 2/5, 11/4, 7/3 y 1109/*6* son números racionales.

La representación gráfica de una fracción está ligada a los dos números enteros que la componen, donde el denominador (b) indica en cuántas partes iguales se divide cada figura, y el numerador (a), cuántas partes iguales se toman de la misma, así:

a/b = numerador/denominador

La gran utilidad de las fracciones desde el principio de su estudio ha sido su capacidad para representar gráficamente el comportamiento de divisiones inexactas y repartir de forma precisa cualquier cantidad de objetos, como se ilustra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2:

Si Daniel necesita repartir 3 naranjas entre él y sus 3 amigos, entonces la porción de naranja que le corresponde a cada uno es

A. 4/3 B. 3/4 C. 3/5 D. 1

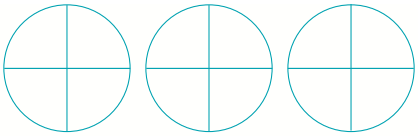
Solución

Si necesita repartir 3 naranjas entre 4, entonces la operación aritmética que debe realizar es una división que se representa en forma de fracción de la siguiente manera:

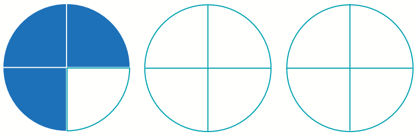
Cantidad correspondiente a cada niño $3 \div 4 = 3/4 = 0,75$

El número ubicado en la parte de abajo de la fracción se llama denominador e indica el número de particiones que debe contener cada figura involucrada en el problema. Para nuestro caso, cada figura debe ser partida en 4 pedazos iguales; y el número ubicado en la parte de arriba de la fracción se llama numerador, el cual indica cuántos trozos se deben tomar. En este caso, 3 trozos, así:

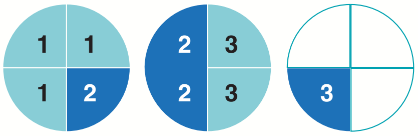
Primero partimos las figuras tal y como el denominador lo indica.



Luego tomamos tantos pedazos como nos indique el numerador, así:



Si sabemos que a cada niño le corresponde lo mismo y son 4 niños, (Daniel y otros 3), entonces la solución final del ejercicio se representa de la siguiente manera:



A cada niño le corresponden 3/4 de naranja o tres de cada 4 pedazos.

Fracciones propias e impropias

Toda fracción puede caracterizarse como fracción propia o impropia. Una fracción propia es aquélla donde el denominador es mayor que el numerador, es decir, la fracción es menor que la unidad y todas las particiones se hacen sobre una sola figura. Por ejemplo, todas las fracciones expresadas en el ejemplo anterior son fracciones propias. Observe que en todas ellas el denominador es mayor que el numerador.

Una fracción impropia es aquella en la que el denominador es menor que el numerador, es decir, la fracción es mayor que la unidad y será necesario utilizar más de una figura para representar la fracción.

Ejemplo 3:

3/5 es una fracción propia.

Parte la figura en 5 pedazos (denominador) y toma 3 (numerador).

Ejemplo 4:

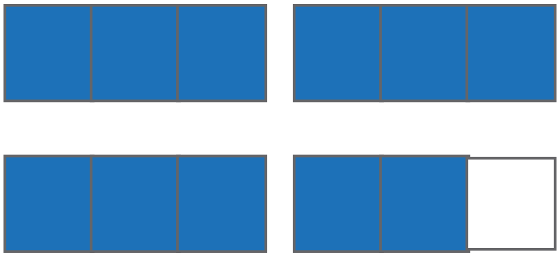
8/5 = $1\frac{3}{5}$ es una fracción impropia.

Recuerda que cada figura cerrada representa una unidad.

Notemos que en el ejemplo 3 solo necesitamos una figura cerrada ya que únicamente tomamos 3 pedazos de una partición de 5; en cambio, si necesitamos tomar 8 pedazos por medio de particiones de 5, entonces será necesario partir dos figuras en 5 pedazos para poder tomar los ocho quintos.

Así en el ejemplo 4 es posible representar el racional 8/5 o $1\frac{3}{5}$ (Una figura completa y 3/5 de la otra).

Esta última expresión para números racionales impropios es llamada número mixto. Tal expresión es la combinación de un número entero y una fracción; en donde el número entero representa cuántas figuras se tomaron completas y la fracción representa la porción que se toma de la última figura, es decir, la fracción 11/3 puede representarse como:



3 partes enteras y 2/3 de la última figura, esto indica que $3\frac{2}{3}$ = 11/3.

La representación de un número racional como un número mixto puede obtenerse de manera directa al graficar la fracción impropia, pero en algunas ocasiones graficar la fracción no es la mejor opción. Por ejemplo, si queremos encontrar la representación mixta de 1.121/5, es claro que graficar esta expresión sería realmente tedioso.

Para estos casos indicamos el siguiente procedimiento, que nos permite analizar la fracción racional impropia ayudándonos de la división y su residuo.

Cómo convertir una fracción en un número mixto:

Para convertir una fracción en número mixto, se hace la división indicada y se procede a formar el número mixto de la siguiente forma:

$$\text{Cociente}\ \frac{\text{Residuo}}{\text{Divisor}}$$

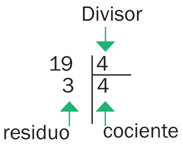
A continuación se desarrollan algunos ejemplos por medio de los cuales se explica el procedimiento aritmético para expresar un número racional impropio como un número mixto.

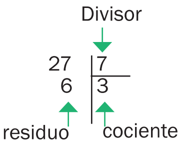
Ejemplo 5:

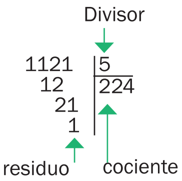
Expresar las fracciones 19/4, 27/7, 1121/5 como números mixtos.

Solución

Paso 1: Se efectúan las divisiones respectivas así:







Paso 2: Luego cada número racional se expresa de acuerdo a la regla, por medio de los resultados de cada división:

$$\frac{19}{4} = 4\,\frac{3}{4}$$

$$\frac{27}{7} = 3\,\frac{6}{7}$$

$$\frac{1121}{5} = 224\,\frac{1}{5}$$

Cómo convertir un número mixto en una fracción:

Para obtener la expresión de un número mixto como una fracción, utilizamos la siguiente expresión:

$$A\frac{b}{c} = \frac{(A\times c)+b}{c}$$

Por tanto, para reconvertir en racionales las tres expresiones mixtas en el ejemplo anterior utilizando la fórmula, tenemos que:

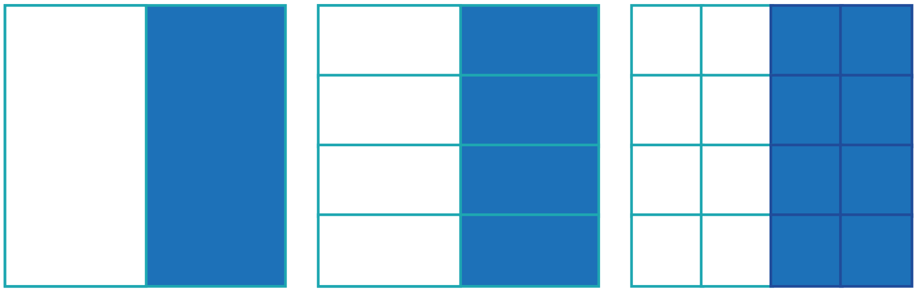
$$4\,\frac{3}{4} = \frac{(4\times 4)+3}{4} = \frac{16+3}{4} = \frac{19}{4}$$

$$224\,\frac{1}{5} = \frac{(224\times 5)+1}{5} = \frac{1120+1}{5} = \frac{1121}{5}$$

$$3\,\frac{6}{7} = \frac{(3\times 7)+6}{7} = \frac{21+6}{7} = \frac{27}{7}$$

Fracciones equivalentes

Se dice que dos fracciones son equivalentes si representan la misma cantidad, es decir, si representan la misma porción de la figura. Por ejemplo, en la siguiente gráfica podemos observar que las fracciones 1/2, 4/8, y 8/6 son equivalentes como se ve en la figura.



1/2 4/8 8/16

Notemos que a/b es equivalente a c/d, cuando a×d = c×b ; por ejemplo 2/3 = 6/9, ya que al realizar su producto cruzado tenemos que 2×9 = 6×3.

Por otro lado 3/5 no es equivalente a 7/8 ya que 3×8 ≠ 5×7..

Amplificación y simplificación de fracciones

La amplificación y simplificación de fracciones consiste en multiplicar o dividir el numerador y el denominador por la misma expresión para obtener una fracción equivalente, tal y como se muestra a continuación.

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}=\frac{6}{12}$$

Las anteriores son 5 formas de amplificar 1/2 al multiplicar el numerador y el denominador por 2, 3, 4, 5 y 6 respectivamente.

Ahora presentamos 3 formas de simplificar la fracción 12/24.

$$\frac{12}{24}=\frac{6}{12}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

Aunque ambas transformaciones consisten en aplicar una misma operación al denominador y al numerador, el proceso para simplificar una fracción es más restringido que el proceso de amplificarla.

Fracciones homogéneas y heterogéneas

Se dice que dos fracciones son homogéneas si poseen el mismo denominador.

Por ejemplo:

$$\frac{12}{7},\frac{6}{7},\frac{1}{7}$$

Son fracciones homogéneas:

Las fracciones heterogéneas, en cambio, poseen diferente denominador, lo que hace más complicada la operatividad al momento de trabajar con ellas. Sin embargo, cabe resaltar que en la práctica la gran mayoría de fracciones que se deben comparar, son heterogéneas.

Operaciones básicas sobre los números racionales

Sobre los números racionales también están definidas las operaciones elementales, como lo son la suma, la resta, la multiplicación y la división. A continuación presentaremos el procedimiento para efectuar cada una de las cuatro operaciones básicas en este conjunto numérico, además de algunas consideraciones adicionales.

Suma y resta de números racionales

Suma y resta de fracciones homogéneas:

La suma y resta de fracciones homogéneas está definida de la siguiente manera:

$$\frac{a}{\mathrm{x}}\pm\frac{b}{\mathrm{x}}\pm\frac{c}{\mathrm{x}}\pm\frac{d}{\mathrm{x}}\cdots\cdots\pm\frac{n}{d}=\frac{a\pm b\pm c\pm d\pm\cdots\pm n}{\mathrm{x}}$$

Es decir, que se suman todos los numeradores y se coloca el mismo denominador.

Ejemplos 7:

$$\frac{3}{4}+\frac{6}{4}-\frac{5}{4}=\frac{3+6-5}{4}=\frac{5}{4}=1$$

$$\frac{7}{12}+\frac{11}{12}=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}$$

Suma y resta de fracciones heterogéneas:

La suma y resta de dos fracciones heterogéneas está definida de la siguiente manera.

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bc}$$

Ejemplo 8:

$$\frac{3}{5}+\frac{5}{7}=\frac{(3\times7)+(5\times5)}{7\times5}=\frac{21+25}{35}=\frac{46}{35}$$

$$\frac{1}{4}-\frac{2}{3}=\frac{(1\times3)-(4\times2)}{3\times4}=\frac{3-8}{12}=\frac{-5}{12}$$

Multiplicación de números racionales

La multiplicación de números racionales está definida de la siguiente manera:

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}\times\ldots\times\frac{m}{n}=\frac{a\times c\times d\times\ldots\times m}{b\times d\times f\times\ldots\times n}$$

Es decir, se multiplican todos los numeradores y con los denominadores se hace lo mismo, tal y como se muestra en los siguientes ejemplos:

$$\frac{3}{5}\times\frac{5}{7}\times\frac{4}{9}=\frac{3\times5\times7}{5\times7\times9}=\frac{60}{126}=\frac{30}{63}=\frac{10}{21}$$

$$\frac{7}{-5}\times\frac{-1}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{7\times(-1)\times3}{(-5)\times2\times2}=\frac{-21}{-20}=\frac{21}{20}$$

Es importante recordar que se debe simplificar cada fraccion antes y despues de realizar cualquier multiplicación, pues esto permite trabajar siempre con cifras pequeñas.

División de números racionales

La división de números racionales está definida de la siguiente manera:

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a\times d}{b\times c}$$

Ejemplo 9:

$$\frac{1}{3}\div\frac{2}{5}=\frac{1\times5}{3\times2}=\frac{5}{6}$$

$$\frac{2}{9}\div\frac{3}{6}=\frac{2\times6}{9\times3}=\frac{12}{27}=\frac{4}{9}$$

Los números decimales

Por número decimal nos referimos a medir partes enteras y partes no enteras en un sistema de base decimal, donde la parte entera y la parte no entera están separadas por una coma, así:

1,25 La parte sombreada representa la porción no entera, es decir

$$1{,}25 = 1 + 0{,}25 = 1 + 1/4 = 1\ ¼$$

Para saber qué fracción representa un decimal basta multiplicar por 10 arriba y abajo teniendo en cuenta que en cada multiplicación por 10 corre la coma un espacio a la derecha.

Ejemplo 10:

$$0{,}3 = 0{,}3 \times \frac{10}{10} = \frac{0{,}3 \times 10}{10} = \frac{3}{10}$$

$$0{,}25 = 0{,}25 \times \frac{100}{100} = \frac{0{,}25 \times 100}{100} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

$$0{,}12 = 0{,}12 \times \frac{100}{100} = \frac{0{,}12 \times 100}{100} = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}$$

$$0{,}125 = 0{,}125 \times \frac{1000}{1000} = \frac{0{,}125 \times 1000}{1000} = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{3} \div \frac{2}{5} = \frac{1 \times 5}{3 \times 2} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{2}{9} \div \frac{3}{6} = \frac{2 \times 6}{9 \times 3} = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$$

Los números decimales

Por número decimal nos referimos a medir partes enteras y partes no enteras en un sistema de base decimal, donde la parte entera y la parte no entera están separadas por una coma, así:

1,25 La parte sombreada representa la porción no entera, es decir

$$1{,}25 = 1 + 0{,}25 = 1 + 1/4 = 1\ ¼$$

Para saber qué fracción representa un decimal basta multiplicar por 10 arriba y abajo teniendo en cuenta que en cada multiplicación por 10 corre la coma un espacio a la derecha.

Ejemplo 11:

$$0{,}3 = 0{,}3 \times \frac{10}{10} = \frac{0{,}3 \times 10}{10} = \frac{3}{10}$$

$$0{,}25 = 0{,}25 \times \frac{100}{100} = \frac{0{,}25 \times 100}{100} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

$$0{,}12 = 0{,}12 \times \frac{100}{100} = \frac{0{,}12 \times 100}{100} = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}$$

$$0{,}125 = 0{,}125 \times \frac{1000}{1000} = \frac{0{,}125 \times 1000}{1000} = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$$

Si en cambio, lo que se pretende es conocer el número decimal que representa una fracción, entonces se realiza la división respectiva, así:

$$3/4 = (3 \div 4) = 3 \begin{array}{|l} \underline{4} \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 30 & \underline{4} \\ & 0, \end{array}$$

El 4 en el 3 está cero veces, por lo tanto ponemos un cero en el cociente, otro en el dividendo y una coma en el cociente.

$$\begin{array}{r|l} 3\boxed{0} & \underline{4} \\ 2\boxed{0} & 0,7 \end{array}$$

El 4 en el 30 está 7 veces y sobran 2; como el 4 en el dos no está, le agregamos un cero al 2.

$$\begin{array}{r|l} 3\boxed{0} & \underline{4} \\ 2\boxed{0} & 0,75 \\ 0 & \end{array}$$

Por último, el 4 en el 20 está exactamente 5 veces; por tanto, 3/4 = 0,75

De igual manera tenemos que:

$$\frac{1}{2} = \begin{array}{r|l} 10 & \underline{2} \\ 0 & 0,5 \end{array}$$

$$\frac{3}{2} = \begin{array}{r|l} 30 & \underline{2} \\ 1\boxed{0} & 1,5 \\ 0 & \end{array}$$

$$\frac{2}{3} = \begin{array}{llll|l} 20 & & & & \underline{3} \\ & 2\boxed{0} & & & 0,66 \\ & & 2\boxed{0} & & \\ & & & 2\boxed{0} & \end{array}$$

$$\frac{1}{3} = \begin{array}{llll|l} 10 & & & & \underline{3} \\ & 1\boxed{0} & & & 0,33 \\ & & 1\boxed{0} & & \\ & & & 1\boxed{0} & \end{array}$$

Las expresiones decimales de números como 2/3 y 1/3 en los que el cociente se repite indefinidamente se denominan decimales infinitos periódicos.

Operaciones básicas sobre los números decimales

Suma y resta de decimales

Para sumar y restar decimales simplemente debemos disponer las expresiones en forma vertical, teniendo en cuenta que cada coma debe conservar la misma posición, y que los espacios en blanco a la derecha se llenan con ceros.

Por ejemplo, la operación 0,0068 + 4,21 – 3,71 – 0,25 se lleva a cabo de la siguiente forma:

$$\begin{array}{r} 0{,}0068 \\ \underline{4.21\boxed{00}+} \\ 4.2168 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3{,}71 \\ \underline{0{,}25\ +} \\ 3{,}96 \end{array}$$

Primero, sumamos las cantidades positivas y las negativas, y obtenemos 4,2168 – 3,96 = ?
Por último, efectuamos la resta bajo las mismas condiciones.

$$\begin{array}{r} {}^{1\,1} \\ 4{,}2168 \\ \underline{3{,}9600\ -} \\ 0{,}2568 \end{array}$$

Luego, 0,0068 + 4,21 – 3,71 – 0,25 = 0,2568.

Multiplicación de decimales

Para multiplicar decimales se ignoran las comas (,) y se realiza la operación como si se tratara de números enteros, el número de cifras decimales en el resultado corresponde al número de cifras decimales que hay en los números que se multiplicaron.

Observemos el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{r} 32{,}\boxed{51} \\ \underline{1{,}\boxed{3}\quad \times} \\ 9753\ + \\ \underline{3251} \\ 42{,}\boxed{263} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2{,}\boxed{321} \\ \underline{0{,}\boxed{2}\qquad \times} \\ 4642\ + \\ \underline{0000} \\ 0{,}4\boxed{642} \end{array}$$

tres cifras decimales en total.

tres cifras decimales en la repuesta.

cuatro cifras decimales en total.

cuatro cifras decimales en la repuesta.

División de números decimales

Para dividir un número decimal entre otro, podemos expresarlos en forma de fracción y efectuar la operación indicada, así:

$$(0{,}375 - 0{,}25) = \frac{0{,}375}{0{,}25} = \frac{0{,}375}{0{,}25} \times \frac{1000}{1000} = \frac{375}{25} = 1{,}5$$

$$\begin{array}{r|l} \overline{37}5 & \underline{25} \\ 125 & 15 \\ 00 & \end{array}$$

Como ya habíamos mencionado, para los números no enteros teníamos una parte decimal que bien puede ser finita o infinita. Además, habíamos mencionado únicamente las partes infinitas periódicas. Existen números que poseen infinitas cifras decimales y que no se pueden expresar como una fracción a/b, como lo son el número pi (π), o el número de Euler (e). Este tipo de números hacen parte de un conjunto llamado el conjunto de los números irracionales.

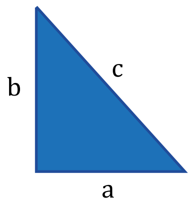
El número irracional

La primera noción de número irracional es filosófica. Nació como concepto en Grecia, bajo los estudios de la escuela pitagórica, que se constituía de conocimientos matemáticos y esotéricos. Los pitagóricos concebían la matemática como la purificación y perfección del alma, que enseñaba a conocer el mundo como una armonía donde el universo era un cosmos, es decir, un conjunto ordenado en el que los cuerpos celestes guardaban una disposición armónica que hacía que guardarán entre sí distancias en proporciones similares; correspondientes a los intervalos de la octava musical.

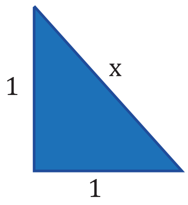
En un sentido sensible, la armonía era musical; pero su naturaleza inteligible era de tipo numérico, y si todo era armonía, el número resultaba ser la clave de todas las cosas. En esta cadena de pensamientos, el más importante teorema enunciado y demostrado por Pitágoras reveló la existencia de un número que representaba una cantidad visible, pero que no podía expresarse matemáticamente, un número inconmensurable que dio lugar a la concepción de la existencia del conjunto de números irracionales.

Recordemos que el teorema de Pitágoras establece que en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa (el lado de mayor longitud del triángulo rectángulo) es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los dos catetos (los dos lados menores del triángulo rectángulo: los que forman el ángulo recto), es decir, si un triángulo rectángulo tiene catetos de longitudes a y b, donde la medida de la hipotenusa es c, se establece que

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Observemos entonces que si tomamos un triángulo rectángulo de lado 1 tenemos lo siguiente:



$$1^2 + 1^2 = 1+1= x^2 \longrightarrow 2= x^2 \longrightarrow \sqrt{2} = x$$

Ahora, es natural preguntarse si el número $\sqrt{2}$ es racional.

La respuesta resulta ser negativa. Años más tarde en la misma Grecia, se enunció formalmente el hecho de que $\sqrt{2}$ no puede expresarse de la forma a/b, con a y b enteros, es decir, $\sqrt{2}$ no es un natural, no es un número entero ni racional, entonces, ¿qué es? Tras distinguir los números componentes de la recta real en tres categorías: naturales, enteros y racionales, podría parecer que ha terminado la clasificación de los números, pero aún quedan "huecos" por rellenar en la recta de los números reales. Los números irracionales son los elementos de dicha recta que cubren los vacíos dejados por los números racionales.

Los números irracionales son los elementos de la recta real que no pueden expresarse mediante el cociente de dos enteros y se caracterizan por poseer infinitas cifras decimales diferentes. De este modo, puede definirse el número irracional como un número decimal infinito no periódico, que por la misma razón no puede expresarse de la forma a/b.

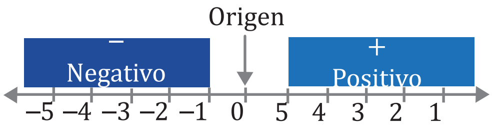
Todas las raíces no exactas, y algunos números como π = 3,14159...,e = 2,7812... y el número áureo φ= 1,6180... son irracionales.

La recta real

La unión del conjunto de números irracionales con el de números racionales da como resultado el conjunto de los números reales.

Los números reales en su totalidad se pueden ordenar en una recta denominada recta numérica o recta real, con ella, se puede determinar si un número es menor o mayor que otro, dependiendo de cuál esté más a la derecha, Podemos notar en la recta que el -1 se encuentra a la derecha tanto de -5 como de -3 y que -3 está a la derecha de -5, por lo tanto se puede afirmar que -1 es mayor que -3 y -3 es mayor que -1.

La recta numérica es una línea infinita en la que se ubica el cero como punto de partida, a la derecha de este se ubican los números positivos y a la izquierda los negativos y cada número real corresponde sólo un punto en la recta.



Valor absoluto

El valor absoluto $|a|$ de un número real a es su valor numérico sin tener en cuenta el signo. Se puede interpretar como la distancia que hay en la recta numérica entre a y cero.

La definición formal del valor absoluto es la siguiente:

$$|a| = a \quad \text{Si } a \geq 0$$
$$|a| = -a \text{ Si } a < 0$$

Una definición equivalente es $|a| = \sqrt{a^2}$.

Ejemplo:

$$|3|=3$$

$$|-3|=3$$

$$|0|=0$$

Propiedades del valor absoluto:

Supongamos que a,b y c son números reales. El valor absoluto tiene las siguientes propiedades:

$\|a\| \geq 0$	Para cualquier valor de a
$\|a\| = 0$	Solo cuando $a=0$
$\|a-b\|=\|b-a\|$	Para cualquier valor de a y b
$\|ab\|=\|a\|\,\|b\|$	Para cualquier valor de a y b
$\|a/b\|=\|a\|/\|b\|$	Siempre que $b \neq 0$

Desigualdades con valor absoluto:

Cuando un signo de valor absoluto aparece en una desigualdad debemos tener en cuenta lo siguiente

si $|a| \leq b$, entonces $-b \leq a \leq b$.

Esto quiere decir que si la distancia entre 0 y a es menor que una cantidad b, es porque los numeros b y $-b$ están más alejados de cero que el propio a.

si $|a| \geq b$, entonces $a \geq b$ o $a \leq -b$.

En este caso tenemos que si la distancia entre a y cero es mayor que una cantidad b, es porque a esta mas alejado de 0 que b o a esta mas alejado de 0 que $-b$

Cuando consideramos mas de dos cantidades en valor absoluto, tenemos las siguientes:

$$|a+b| \leq |a|+|b|$$
$$|a-b| \geq ||a|-|b||$$
$$|a-b| \leq |a-b|+|b-c|$$

La priemra de ellas es conocida como la desigualdad traingular, pues hace alusion a que en cualquier triángulo, la suma de las longitudes de dos de sus lados, es mayor que la longitud del lado restante.

Intervalos

Un intervalo es un subconjunto continuo de la recta real, el cual tiene infinitos elementos y extremos a y b para los cuales se cumple que cada elemento dentro del intervalo esta entre a y b según sea el caso.

Los intervalos se clasifican en abiertos y cerrados de acuerdo a si se incluyen o no sus extremos y en acotados o no dependiendo de si sus extremos son infinitos.

Intervalos acotados

Estos intervalos están limitados por un número real en ambos extremos.

Intervalo	Simbología	Interpretación	En la recta real
Abierto	(a,b)	No incluye los extremos. Se expresa: $a<x<b$.	← a(———)b →
Cerrado	[a,b]	Incluye ambos extremos.Se expresa $a\leq x\leq b$.	← a[———]b →
Abierto a la derecha	[a,b)	Incluye el extremo izquierdo. Se expresa $a\leq x<b$.	← a[———)b →
Abierto a la izquierda	(a,b]	Incluye el extremo derecho. Se expresa $a<x\leq b$.	← a(———]b →

Intervalos no acotados

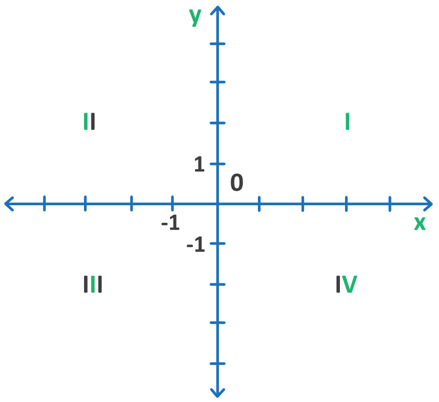
Estos intervalos están limitados por un número real en uno de sus extremos y el otro se puede extender hasta el infinito (+∞) o al menos infinito (-∞).

Simbología	Interpretación	En la recta real
$(-\infty,a)$	Está formado por los números reales x menores que a, excluido a. Se expresa: $x<a$	
$(-\infty,a]$	Está formado por los números reales x menores que a, incluido a. Se expresa: $x\leq a$	
$[a,+\infty)$	Está formado por los números reales x mayores que a, incluido a. Se expresa: $x\geq a$	
$(a,+\infty)$	Está formado por los números reales x mayores que a, excluido a. Se expresa: $x>a$	

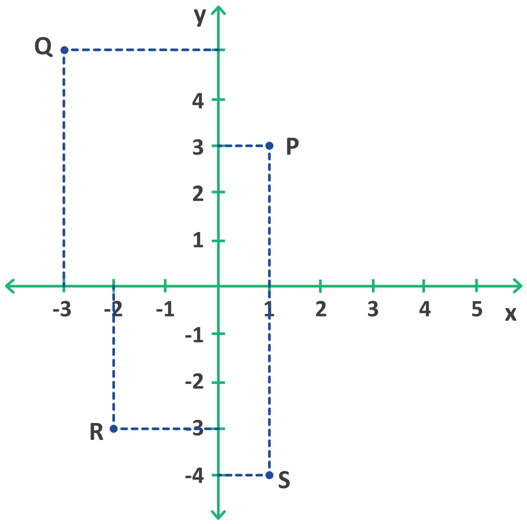
El Plano Cartesiano

Desde la antigüedad, la necesidad de orientarse indujo a los humanos a diseñar mapas y a relacionar los puntos de una superficie mediante números. Al querer fijar una figura en el espacio o en un plano se debe relacionar o comparar con un sistema de referencia que permita obtener conclusiones con respecto a esa ubicación y realizar cálculos que puedan ser beneficiosos. Un ejemplo simple es cuando nos preguntan acerca de la ubicación de la iglesia en nuestro vecindario y la guía dada al visitante es algo como “suba 3 cuadras por esta calle, luego gire a la derecha y recorre 5 cuadras más y ahí la encuentra”, donde el punto de referencia es la ubicación de las dos personas.

En matemáticas, el sistema de referencia se forma sobre un plano con dos rectas perpendiculares que se intersecan en un punto, que se denota con la letra O y es llamado origen, al igual que en la recta numérica. La recta horizontal es llamada eje x o abscisa y la recta vertical es llamada eje y u ordenada. El diseñador del plano elige una unidad de medida y una escala, con la que se marcan con signo positivo las distancias en las semirrectas desde el origen hacia arriba y hacia la derecha, y con signo negativo desde el origen hacia abajo y hacia la izquierda. En el plano se generan 4 cuadrantes que son numerados con I, II, III y IV en sentido contrario de las manecillas del reloj, como lo muestra la siguiente figura:



La forma de referenciar cualquier punto ubicado en el plano cartesiano se hace mediante un par ordenado, el cual consiste en una pareja de números dentro de un paréntesis y separados por una coma, donde el primero es el valor que corresponde al punto en el eje x, y el segundo es el valor que corresponde al eje y, como se ilustra en el siguiente ejemplo:



P corresponde al punto (1,3)

Q corresponde al punto (-3,5)

R corresponde al punto (-2,-3)

S corresponde al punto (1,-4)

Raíces, potencias y logaritmos

Potencias

El concepto de potencia surge de la necesidad de abreviar el lenguaje, de igual forma que la multiplicación fue pensada como una suma repetida, podemos interpretar la potenciación como una multiplicación repetida. Pero para analizar sus propiedades, primero debemos definir los términos que la componen, la base y el exponente:

La base representa el número que vamos a multiplicar y el exponente nos indica cuántas veces vamos a multiplicar la base por sí misma. Así, si tenemos:

$$\text{Base} \longrightarrow \overset{\nearrow\ \text{Exponente}}{\underbrace{a^{n}=a \times a{\times}a \times \ldots \times a}_{\text{“n” veces}}}$$

Ejemplo 1:

$$3^{8} = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$
$$8^{11}= 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8$$
$$10^{100}= 10 \times 10 \times 10 \times \ldots \times 10 \quad \text{(100 veces)}$$

Propiedades de la potenciación

Multiplicación de potencias de igual base:

$$a^{n} \times a^{m} = a^{(m+n)}$$

Ejemplo 2:

$$3^{2} \times 3^{3} = 3^{(2+3)} = 3^{5}$$

Observe que (3 × 3)×(3 × 3 × 3) = (3 × 3 × 3 × 3 × 3)

Ejemplo 3:

$$2^3\times3^2\times2^7\times3^4\times5^2\times7=2^{(3+7)}\times3^{(2+4)}\times5^2\times7=2^{10}\times3^6\times5^2\times7$$

Nota: Es importante aclarar que la propiedad enunciada se cumple únicamente cuando las bases son iguales.

División de potencias de igual base:

$$a^n \div a^m = a^{(n-m)}$$

Ejemplo 4:

$$3^5 \div 3^3 = 3^{(5-3)} = 3^2$$

Observe que $3^5/3^3 =(3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3)/(3 \times 3 \times 3)= 3^2$

Potencia de una potencia:

$$(a^m\times b^n)^p=a^{mp}\times b^{np}$$

Ejemplo 5:

$$(3^2\times5^3\times2^4)^3=3^{(2\times 3)}\times5^{(3\times3)}\times2^{(4\times 3)}=3^6\times5^9\times2^{12}$$

Nota: Tenga cuidado con aplicar la regla de la potencia de una potencia únicamente para la multiplicación y la división, ya que para la suma y la resta no se cumple en general.

$$(a\pm b)^n \neq a^n\pm b^n$$

Exponente negativo:

Cuando aparece un exponente negativo, este se refiere a una división repetida. Por ejemplo

$$\frac{1}{a^3}=\frac{1}{a\times a\times a}$$

Las anteriores propiedades nos permiten mostrar que para cualquier número real distinto de 0 se tiene que $a^0=1$.

$$a^0= a^{1-1}=\frac{a^1}{a^1}=\frac{a}{a}=1$$

Raíces

La operación de radicación es la inversa de la potenciación, así podemos decir que $\sqrt[n]{a} = b$ cuando $b^n = a$. En este caso a se llama radical, n es el índice y b se denomina raíz enésima de a.

Se tomará siempre a n como un número natural y cuando n=2 no se escribe el índice.

$$\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$$

Cuando n es par y a es un número positivo, la raíz tiene 2 resultados posibles que son a y -a.

Ejemplo 6:

$$\sqrt{4} = \pm 2 \quad \text{Pues se cumple que } 2^2=4 \text{ y } (-2)^2=(-2)(-2)= 4$$

Cuando n es par y a es un número negativo la raíz no existe dentro de los números reales, pues no existe un número real que elevado a una potencia par de como resultado un negativo.

El estudio de las raíces pares de números negativos motivó la definición de los números complejos de los cuales hablaremos más adelante.

Ejemplo 7:

$$\sqrt{144} = \pm 12 \quad \text{porque} \quad 12^2=144 \text{ y } (-12)^2=144$$

$$\sqrt{8} = 2 \text{ porque } 2^3=8$$

$$\sqrt{-8} = -2 \text{ porque } (-2)^3=8$$

$$\sqrt{32} = 2 \quad \text{porque } 2^5=32$$

Propiedades de la radicación:

Las siguientes propiedades se enunciarán para raíces cuadradas pero debe entenderse que se cumplen para cualquier valor del índice.

Como la potenciación y la radicación están relacionadas, cumplen propiedades muy similares.

Multiplicación y división de raíces:

La raíz del producto entre dos números, es el producto de sus raíces. lo mismo ocurre con la división siempre y cuando el denominador no sea igual a cero.

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \text{ para cualquier valor de } a \text{ y } b$$

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \text{ siempre que } b \neq 0$$

Se pueden usar las anteriores propiedades para calcular raices o simplificarlas, es decir, encontrar una expresión más simple para representarlas.

Ejemplo 8:

Calcular $\sqrt{196}$

En este caso tenemos que 196=49×4, por lo tanto $=\sqrt{4\times49}=\sqrt{2}\sqrt{7}=2\times7=14$

Ejemplo 9:

Simplificar $\sqrt{72}$

Se descompone el radicando en factores primos asi:

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

De esto se tiene que $72=2^2\times2\times3^2$, por tanto, $\sqrt{72}=\sqrt{3^2\times2^2\times2}$

Así, tenemos que $\sqrt{72}=\sqrt{3^2}\sqrt{2^2}\sqrt{2}=3\times2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

Raíz de una raíz:

Cuando se toma la raíz de una raíz, se multiplican los índices

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}$$

La mayoría de los números enteros no tienen raíces exactas (son números irracionales), si bien no se puede conocer su valor exacto, se pueden simplificar para un manejo más simple, además este método sirve para calcular raíces exactas.

Simplificación de Raíces:

Para calcular la raíz de un número o al menos simplificarla, es descomponerla en factores que tengan raíz exacta (al menos uno de ellos) y luego usar las propiedades de la radicación que se mencionaron antes.

Ejemplo 10:

Hallar una expresión simplificada para $\sqrt{48}$

$$48=3\times2\times2\times2\times2=3\times16$$

De esto tenemos que $\sqrt{48}=\sqrt{3\times16}=\sqrt{3}\times\sqrt{16}=\sqrt{3}\times4=4\sqrt{3}$

Así, una expresión simplificada de $\sqrt{48}$ es $4\sqrt{3}$

Ejemplo 11:

Hallar $\sqrt[3]{125000}$.

Es claro que $125000=125\times1000=5^3\times\llbracket 10\rrbracket^3$ así que $\sqrt[3]{125000}=\sqrt[3]{(5^3)}\times\sqrt[3]{(\llbracket 10\rrbracket^3)}=5\times10=50$.

De ahí obtenemos que $\sqrt[3]{125000}=50$.

Logaritmos

El concepto de logaritmo fue utilizado inicialmente en astronomía y navegación para simplificar cálculos que involucraban multiplicaciones, divisiones y raíces de números con muchas cifras. El logaritmo de un número real positivo a en una base b dada es igual al exponente n al que debe elevarse la base para obtener dicho número a, es decir

$$log_b a=n \text{ Significa que } b^n=a$$

Ejemplo 1:

$log_2 16=4$	Ya que	$2^4=16$
$log_3 27=3$	Ya que	$3^3=27$
$log_{10} 0.1=-1$	Ya que	$10^{-1}=1/10=0.1$

Nota: En el logaritmo, la base b y el número a son números positivos; mientras que el resultado del logaritmo n puede tomar cualquier valor en los números reales. Si en el logaritmo no se indica la base, su valor es 10.

Propiedades de los logaritmos

Logaritmo de uno en cualquier base es cero:

$$log_b 1=0$$

Esto se cumple para cualquier base distinta de cero, porque $b^0=1$ si $b\neq0$.

$$log_b b=1$$

Esta propiedad resulta ser trivial, pues el exponente que al que se debe elevar b para obtener nuevamente b, debe ser 1.

Logaritmo de un producto:

$$log_b(mn)=log_b m + log_b n$$

Esto se deriva de la propiedad $a^n\times a^m = a^{(m+n)}$ para las potencias.

Ejemplo 2:

Calcular $log_3 729$
A veces no es tan fácil ver cuál es el valor del exponente que buscamos, razón por la cual utilizamos las propiedades de logaritmos para calcularlos o simplificarlos, tal y como se hizo con las raíces.

En este caso tenemos que 729=81×9, así que

$$log_3 729= log_3 81 + log_3 9$$

Pero sabemos que $log_3 81=4$ pues $3^4 = 81$, de igual manera tenemos que $3^2 = 9$ por lo que $log_3 729 = 4+2=6$. Esto indica que $3^6=729$

Logaritmo de un cociente:

$$log_b(m/n)=log_b m – log_b n$$

Se deriva de la propiedad $a^n \div a^m = a^{(m-n)}$ para las potencias.

Ejemplo 3:

Calcular log_2 16/64

Es claro que en este ejemplo se puede simplificar primero la fracción y luego calcular el logaritmo, pero no lo haremos en de esa forma con el fin de ejemplificar la propiedad.

Tenemos entonces que $log_2 16/64 = log_2 16 – log_2 64= 4 – 6= –2$. Es decir que, $2^{-2}=16/64=1/4$

Logaritmo de una potencia:

$$log_b m^n=nlog_b m$$

De esta propiedad, resaltamos el siguiente caso particular

$$log_b b^n=n$$

El cual resulta trivial si nos preguntamos qué exponente debe llevar b para obtener b^n.

Ejemplo 4:

Calcular log 1000000

Recordemos que cuando no se escribe la base en un logaritmo, esta se toma igual a 10. Por otro lado 1000000 es igual a 10^6, por lo tanto

$$log\ 1000000= log\ 10^6$$

Por la propiedad que acabamos de enunciar tenemos $log\ 10^6= 6log\ 10=6$

Logaritmo de una raíz:

$$\log_b \sqrt[n]{m} = \frac{1}{n} \log_b m$$

Ejemplo 5:

Calcular $\log_5 \sqrt[4]{125}$

Usando la propiedad mencionada, tenemos que $\log_5\sqrt[4]{125}=\frac{1}{4}\log_5 125=\frac{3}{4}$. Esto indica que $5^{3/4}=125$

Cambio de base:

Cuando nos vemos en la necesidad de usar una calculadora para hallar el valor de un logaritmo, encontramos que esta tiene una tecla denominada log la cual calcula logaritmos solo en base 10, esto quiere decir que una calculadora común no puede calcular logaritmos en cualquier base lo cual nos obliga a preguntarnos cómo es posible calcular entonces cualquier logaritmop posible con el uso de la calculadora. La respuesta a esta pregunta la damos por medio de la fórmula del cambio de base

$$\log_b x=\frac{\log_c x}{\log_c b}$$

Ejemplo 6:

Calcular el valor de $\log_2 10$ con la ayuda de una calculadora. Como ya lo dijimos, la calculadora solo encuentra logaritmos base 10 por lo que nuestra tarea es representar $\log_2 10$ en base 10. usand ola fórmula del cambio de base, tenemos

$$\log_2 10=\frac{\log_{10}10}{\log_{10}2}$$

$\log_{10}10=1$, mientras que usando una calculadora tenemos que $\log_{10}2=0.301$ por lo que

$$\log_2 10=\frac{1}{0.301}=3.321$$

Ejemplo 7:

El valor de n en la expresión $F=P(1+r)^n$ puede obtenerse a partir de le expresión $\frac{\log(F/P)}{\log(1+r)}$. Observemos que

$$F=P(1+r)^n$$

si se toma el logaritmo a ambos lados se tiene

$$\log(F/P)=\log(1+r)^n$$

Luego, usando el logaritmo de una potencia

$$\log(F/P)=n\log(1+r)^n$$

De ahí despejamos n

$$n=\frac{\log(F/P)}{\log(1+r)}$$

Ejemplo 8:

Al escribir la expresión $3\log x+\frac{1}{2}\log(x-2)$ como un solo logaritmo se obtiene $\log x^3\sqrt{x-2}$
Observe que

Usando la propiedad del logaritmo de una potencia

$$3\log x+\frac{1}{2}\log(x-2)=\log x^3+\log\sqrt{x-2}$$

Ahora, con la propiedad del logaritmos de un producto

$$3\log x+\frac{1}{2}\log(x-2)=\log x^{3}\sqrt{x-2}$$

Ejemplo 9:

Un estudiante debe expresar la siguiente operación como un solo logaritmo.

$$\log(m+n)-4\log(mn)$$

Para ello realiza el siguiente procedimiento

$$\log(m+n)-4\log(mn)=\log(m+n)-\log(mn)^{4}$$

$$\log(m+n)-\log(mn)^{4}=\frac{\log(m+n)}{\log(mn)^{4}}$$

El profesor le indica que hubo un error en la última igualdad, porque

- A. el logaritmo de una suma es igual a la suma de logaritmos.
- B. una resta de logaritmos es igual al logaritmo del cociente entre los números.
- C. una resta de logaritmos es igual al cociente de los logaritmos.
- D. el logaritmo de un cociente es igual a la resta de logaritmos de los números.

Observe que, la propiedad del logaritmo de un cociente indica que

$$\log_{b}(m/n)=\log_{b}m-\log_{b}n$$

Por lo tanto, $\log(m+n)-\log(mn)^{4}=\log\frac{m+n}{(mn)^{4}}$

Lo cual si representa un error en el paso 2

Logaritmo natural

El logaritmo natural, también conocido como logaritmo neperiano, es un logaritmo que tiene como base el número irracional e, Es decir, el resultado de un logaritmo natural de un número es la potencia a la cual se debe elevar e para lograr conseguir dicho número. Se expresa como In.

Ejemplo 1:

$Ine=1$ porque $e^{1}=e$

$In1=0$ porque $e^{0}=1$

$In2\approx0.69$ porque $e^{0.69}\approx2$

Nota: El símbolo ≈ se representa aproximación, en el ejemplo anterior indica que el logaritmo natural de 2 es aproximadamente 0.69.

Resumen

Potencianción

$a^n=b$

$a^n\times a^m=a^{n+m}$

$a^n+a^m=a^{n-m}\ a\neq 0$

$(a^n)^m=a^{n\times m}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}\ b\neq 0$

$a^1=a$

$a^0=1 \quad a\neq 0$

Radicación

$\sqrt[n]{b}=a$

$\sqrt[n]{a\times b}=\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}$

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a\times b}}=\sqrt[n\times m]{a}$

$\sqrt[n]{a^{n\times p}}=a^p$

$\sqrt[n\times m]{a^{n\times p}}=\sqrt[m]{a^p}$

Logaritmación

$\log b=n$

$\log_a=(b\times c)=\log_a b+\log_a c$

$\log_a=\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c$

$\log_a=(b^n)=n\log_a b$

$\log_a\sqrt[n]{b}=\frac{\log_a b}{n}$

$\log_a 1=0$

Proporciones y porcentajes

Razón, fracción o relación

Realmente estos tres conceptos se refieren a lo mismo. Se llama así a la comparación de dos cantidades a y b mediante una división indicada, donde a es llamado numerador o antecedente y b denominador o consecuente; además, b≠0. La fracción a/b , se puede nombrar también como la razón entre a y b, la relación entre a y b.

Ejemplo 2:

En una bolsa se tienen 4 balotas amarillas, 6 verdes y 10 negras. La razón entre las balotas verdes y el total es

A. 3/10

B. 2/3

C. 3/5

D. 1/2

Cuando se pide la razón entre 2 valores, se debe hacer una fracción entre los dos valores que se mencionan, donde el primer valor es el numerador y el segundo el denominador. Recordar que debe simplificarse la fracción siempre que sea posible.

$$\frac{\text{verdes}}{\text{Total}}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$$

La razón entre las balotas verdes con respecto al total es 3/10, lo que corresponde a la opción A.

Proporción

Se tiene una proporción cuando se tiene la igualdad entre dos razones, por ejemplo $\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$ es una proporción.

Relaciones de proporcionalidad

Definimos una magnitud como una propiedad que es medible, por ejemplo el tiempo, la distancia, la masa de un objeto o el precio de un producto.

Se dice que dos magnitudes son directamente proporcionales cuando su razón es una constante, denominada constante de proporcionalidad. En este caso, cunando una magnitud aumenta, la otra también lo hace y viceversa.

Las magnitudes A y B son directamente proporcionales si $\frac{A}{B}=k$ o $A=kB$, donde k es una constante.

Se dice que dos magnitudes son inversamente proporcionales, cuando su producto es una constante que se denomina constante de proporcionalidad. En este caso, cuando una magnitud aumenta, la otra disminuye y viceversa.

Las magnitudes A y B son inversamente proporcionales si $A=\frac{k}{B}$ o $AB=k$, donde k es una constante.

Ejemplo 3:

La ley de la gravitación universal establece que la fuerza de atracción entre dos cuerpos es proporcional a sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa. Si se tienen dos cuerpos de igual masa separados una distancia r su fuerza de atracción es F. Si r se duplica, entonces la fuerza F

A. Se reduce a la mitad

B. Se duplica

C. Se reduce a la cuarta parte

D. Se cuadruplica

Según lo que se mencionó acerca de proporcionalidad directa e inversa tenemos que la expresión para la fuerza gravitacional es

$$F=\frac{m_1m_2}{r^2}$$

Supongamos valores iniciales para las masas y la distancia, por ejemplo: $m_1=1kg$, $m_2=1kg$ y $r=1m$ entonces tendremos que el valor de la fuerza es

$$F=\frac{1\times 1}{1^2}=1$$

Si ahora tomamos los mismos valores para las masas y duplicamos el valor de la distancia, es decir tomamos $r=1m$

$$F=\frac{1\times 1}{2^2}=\frac{1\times 1}{4}=\frac{1}{4}$$

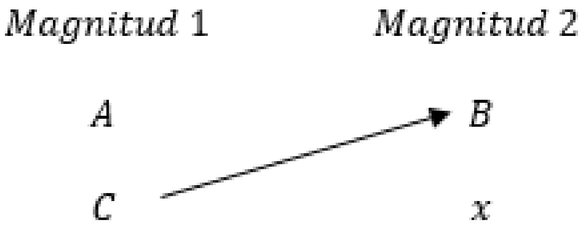
Ahora el valor de F es 1 cuarto, lo cual indica que la fuerza se reduce a la cuarta parte.

Reglas de tres simples

Cuando se conocen 3 de los cuatro valores en una proporción, se puede determinar el otro usando una técnica llamada regla de tres, la cual depende de si la proporción es directa o inversa.

Regla de tres simple directa

Cuando se identifica que las magnitudes involucradas son directamente proporcionales, se realiza el siguiente esquema:

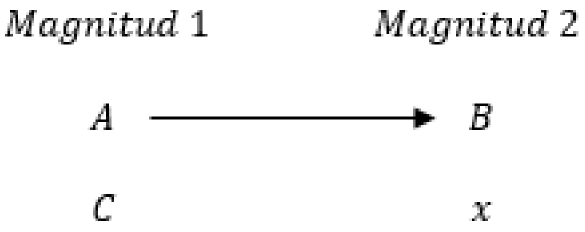


Donde x es el valor desconocido o incógnita y A,B,C son los valores conocidos.

La regla de tres directa establece que x=CB/A; es decir, que para hallar la incógnita, se multiplican los valores conectados por la flecha y se divide entre el valor restante.

Regla de tres simple inversa

Cuando se identifica que las magnitudes involucradas son inversamente proporcionales, se realiza el siguiente esquema:



La regla de tres inversa establece que x=AB/C; es decir, que para hallar la incógnita, se multiplican los valores conectados por la flecha y se divide entre el valor restante.

Ejemplo 4:

Sabiendo que 162 películas en DVD cuestan 324 euros, el valor de 285 películas en este mismo formato es:

Solución

Las dos magnitudes involucradas en el problema son: el número de películas y el precio de ellas. Si el número de películas aumenta, el precio de ellas también debe aumentar, lo que indica que el número de películas y el precio de ellas se comportan de manera directamente proporcional.

Utilizaremos los signos más (+) y menos (-) para diferenciar la variación de las magnitudes, como lo veremos a continuación. Recordemos que en el primer análisis que hicimos con las magnitudes que intervienen en el ejemplo, concluimos que si queremos comprar más DVD, tendremos que invertir más dinero.

Para empezar, marcamos en la columna de la incógnita, el dato supuesto con el signo más (+)

Nro. de DVD	COSTO (Euros)
162	324 (+)
285	?

Luego, en los datos de la incógnita se marca con el signo más (+) la cantidad conocida.

Nro. de DVD	COSTO (Euros)
162	324 (+)
285(+)	?

Finalmente marcamos con el signo menos (-) la cantidad que aún está sin marcar en los datos supuestos:

Nro. de DVD	COSTO (Euros)
162	324 (+)
285(+)	?

Ahora hallaremos el valor de la incógnita por medio de la siguiente igualdad:

$$x=\frac{\text{Producto de las cantidades marcadas con (+)}}{\text{Producto de las cantidades marcadas con (-)}}$$

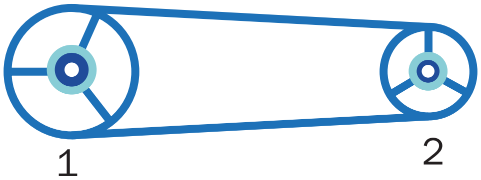
Por tanto, el resultado será:

$$x=\frac{324 \times 285}{162}=570$$

Esto nos indica que el precio de las 285 películas en DVD es 570 euros. Notemos que la respuesta siempre estará dada en la unidad que corresponde a la magnitud de la incógnita. En este caso, debe darse en euros , que es una unidad monetaria. Además, tenga en cuenta que los signos más (+) y menos (-), solo se utilizaron para identificar las cantidades; sin embargo no implica que las cantidades sean positivas o negativas.

Ejemplo 5:

Las poleas mostradas en la figura están unidas mediante una banda elástica, la cual hace que una gire si la otra lo hace. Cuando la polea 1 ha dado 4 vueltas, la 2 ha dado 6; si la 1 ha dado 20 vueltas, el número de vueltas que ha dado la polea 2 es:



En esta situación, tenemos dos variables para analizar, a las cuales llamaremos magnitudes: número de vueltas de la polea 1 y número de vueltas de la polea 2. Cabe anotar que si el número de vueltas dadas por la polea número 1 aumenta, el número de vueltas dadas por la polea número 2 también debe aumentar en forma proporcional; o también, si el número de vueltas dadas por una polea disminuye, también el número de vueltas de la otra lo hace de forma proporcional. Lo anterior dice que estas dos magnitudes se comportan de manera directamente proporcional.

Se organiza la información en la fila de magnitudes, las filas de datos supuestos, los datos de la incógnita y se añade el signo más (+) al dato supuesto en la magnitud de la incógnita.

Luego, en los datos de la incógnita se marca con el signo más (+) la cantidad conocida y con el signo menos (-) la cantidad que aún está sin marcar en los datos supuestos.

POLEA 1	POLEA 2	→	Magnitudes.
4(-)	6(+)	→	Datos supuestos.
20(+)	x	→	Datos de la incógnita.

Luego, se reemplazan los datos en la igualdad

$$x = \frac{\text{Producto de las cantidades marcadas con (+)}}{\text{Producto de las cantidades marcadas con (-)}}$$

$$x = \frac{20 \times 6}{4} = 30$$

Cuando la polea 1 ha dado 20 vueltas, la polea 2 ha dado 30. El resultado es consecuente con lo analizado inicialmente, ya que la polea 2 también aumentó el número de vueltas.

Ejemplo 6:

Las llantas de una volqueta tienen un diámetro de 3 metros; el conductor de esta decide remolcar un automóvil descompuesto, cuyas llantas tienen un diámetro de 50 centímetros. En la distancia recorrida por ambos autos, las llantas de la volqueta dieron un total de 200 vueltas. Calcular el número de vueltas que dieron las llantas del auto.

Solución

Las magnitudes que deben relacionarse son el diámetro o altura de las llantas y el número de vueltas dadas por ellas. Mientras más grandes sean las llantas, menos vueltas necesitarán para recorrer cierta distancia. De igual manera, mientras más pequeñas las llantas, más vueltas se necesitarán para recorrer la misma distancia. Esto nos indica que se comportan de manera inversamente proporcional.

con el signo más (+) el dato supuesto en la columna de la incógnita y como las magnitudes cantidad y tiempo son inversamente proporcionales, marcaremos con el signo menos (-) la cantidad conocida en los datos de la incógnita.

Tengamos en cuenta que el diámetro de la llanta de la volqueta está expresado en metros, por lo tanto se debe convertir a centímetros para que las unidades de ambas llantas sean las mismas.

$$\frac{3\ \cancel{\text{metros}} \times 100 \text{ centímetros}}{\cancel{1 \text{ metro}}} = 300 \text{ centímetros}$$

Diámetro	# de vueltas	→ Magnitudes.
300 (+)	200 (+)	→ Datos supuestos.
50 (-)	x	→ Datos de la Incógnita.

$$x = \frac{\text{Producto de las cantidades marcadas con (+)}}{\text{Producto de las cantidades marcadas con (-)}}$$

$$x = \frac{300 \times 200}{50} = 1200 \text{ vueltas}$$

El resultado nos indica que las llantas del auto debieron dar 1200 vueltas si las de la volqueta dieron 200.

Ejemplo 7:

Nueve hombres pueden hacer una obra en cinco días. Calcular el número adicional de hombres que harían falta para completar la obra en un día.

En este enunciado se puede notar que si se aumenta el número de trabajadores, se reduce el número de días en que se realizará la obra. Por lo tanto, el número de trabajadores y los días que tardan en terminar la obra, se comportan de manera inversamente proporcional.

Al igual que en el ejemplo anterior, marcaremos con el signo más (+) el dato supuesto en la columna de la incógnita y como las magnitudes cantidad y tiempo son inversamente proporcionales, marcaremos con el signo menos (-) la cantidad conocida en los datos de la incógnita.

# de hombres	tiempo	→ Magnitudes.
9 (+)	5	→ Datos supuestos.
x	1(-)	→ Datos de la incógnita.

Finalmente marcamos con el signo más (+) la cantidad que aún no está marcada en los datos supuestos.

# de hombres	tiempo
9 (+)	5(+)
x	1(-)

Al igual que en las reglas de tres directas, se multiplican los valores marcados con el signo más (+) y se divide por el valor marcado por el signo (-).

$$x = \frac{\text{Producto de las cantidades marcadas con (+)}}{\text{Producto de las cantidades marcadas con (-)}}$$

$$x = \frac{9 \times 5}{1}$$

$$= 45$$

El resultado nos indica que son necesarios 45 hombres trabajando para completar la obra en un día, pero se debe tener en cuenta que la pregunta es: ¿cuántos hombres más son necesarios?, por lo tanto, de los 45 ya se tienen 9:

45 - 9 = 36 Hombres más.

Regla de tres compuesta

La regla de tres compuesta es una generalización de la regla de tres simple, pues esta involucra más de dos variables, el procedimiento para hallar la incógnita requiere un poco más de cuidado.

Mostraremos el método con tres variables, pero este puede ser usado para cualquier número de variables.

Magnitud 1	**Magnitud 2**	**Magnitud 2**
A	B	C
D	X	E

Para resolver las reglas de tres compuestas se debe analizar por separado la relación existente entre la magnitud que tiene la incógnita, y cada una de las magnitudes restantes, para saber si se comportan de manera directa o inversamente proporcional.

Lo que se hace es que al valor que está encima de la incógnita se le pone un signo (+), luego se compara cada una de las otras magnitudes con la de la incógnita para determinar si son directa o inversamente proporcionales.

En caso de que sean directamente proporcionales, se pone (+) en el valor conocido de la fila de la incógnita y (-) en el resto de valores. Cuando una de las magnitudes se compara con la de la incógnita y resultan ser inversamente proporcionales, se pone un (-) en el valor conocido en la fila de la incógnita y (+) en el resto. Al final se pone en el numerador el producto todas las cantidades marcadas con (+) y en el denominador en producto de todas las cantidades marcadas con (-).

$$x=((+))/((-))$$

Nota: Los símbolos (+) y (-) utilizados en el análisis dela regla de tres compuesta no hacen alusión al signo de los números involucrados, tan solo se usan para definir cuales cantidades van en el numerador y cuáles en el denominador.

A continuación presentamos un ejemplo para aclarar la situación.

Ejemplo 8:

Tres motobombas, trabajando 4 horas diarias, llenan una pileta en 2 días. ¿Cuánto tardarán en llenarla 2 motobombas trabajando 12 horas diarias?

En este problema intervienen las magnitudes: cantidad, expresada en número de motobombas; intensidad, expresada en horas diarias, y tiempo, expresado en días. La magnitud de la incógnita es el tiempo, por tanto haremos el siguiente análisis:

Comparemos las magnitudes tiempo y cantidad; si en el llenado de la pileta se están invirtiendo muchos días, es porque se dispone de pocas motobombas para tal propósito, así a menor número de motobombas, mayor es el tiempo de llenado, por tanto, estas dos magnitudes son inversamente proporcionales.

Tiempo de llenado (días)	**# de motobombas**
2 (+)	3 (+)
x	2 (-)

Por ahora ignoramos la otra magnitud.

Ahora Comparemos las magnitudes tiempo e intensidad; si las motobombas trabajan pocas horas diarias, el llenado de la pileta se demorará más tiempo. Por tanto estas dos magnitudes son inversamente proporcionales.

Tiempo de llenado (días)	Intensidad (horas diarias)
2 (+)	4 (+)
x	12 (-)

El esquema con las tres magnitudes queda así:

Tiempo de llenado (días)	Intensidad (horas diarias)	# de motobombas
2 (+)	4 (+)	3 (+)
x	12 (-)	2 (-)

Esto indica que $x=(2\times4\times3)/(12\times2)=1$

Según el análisis realizado, se necesita tan solo 1 día para que las 2 motobombas llenen la pileta trabajando 12 horas diarias.

Porcentajes

Un porcentaje es una comparación de una cantidad respecto a otra, que representa el número de partes que interesa tomar con respecto a un total de 100.

Así, uno de los pasos para resolver un ejercicio de porcentajes es saber qué se compara y con respecto a qué, además de tener en cuenta que la cantidad con la cual se compara tiene asociado un porcentaje y que lo que se compara es también un porcentaje, si lo que se quiere hallar es una cantidad; o una cantidad, si lo que se busca es un porcentaje. En muchos casos, la cantidad con la que se compara es el 100% y se identifica de manera fácil porque aparece luego de palabras como tanto % de…, tanto % en relación con…, tanto % en comparación con…, tanto % con respecto a…, donde en los puntos suspensivos estará ubicada la cantidad a la cual se le asignará el 100%.

Ejemplo 9:

Si hoy se encuentran ausentes de clase el 30% de un total de 50 estudiantes, ¿cuántos han faltado? y ¿cuántos han asistido?

Es evidente que en el ejercicio planteado la cantidad con que se compara es 50, porque aparece luego de las palabras “30% de…”, lo que significa que 50 estudiantes son el 100%, y de la primera pregunta que busca conocer el número de estudiantes que han faltado se infiere que se desea comparar un porcentaje (30%), para buscar la cantidad asociada a este.

Luego de haber analizado la información que presenta el problema, es decir, saber explícitamente cuál es la cantidad con que se compara (50 estudiantes que son el 100%) y cuál es la cantidad comparada, se procede a plantear una regla de tres simple donde las variables son cantidad y porcentaje, para relacionar los datos obtenidos del problema y dar respuesta a la primera pregunta, lo cual se hace de la siguiente manera:

Cantidad (estudiantes)	Porcentajes (%)
50	100
x	30

Se puede resumir lo anterior de la siguiente manera: “Si 50 estudiantes son el 100%, ¿cuánto es el 30%?”
Todas las reglas de tres simples que involucran porcentajes resultan ser directas debido a que al aumentar la cantidad, debe también aumentar el porcentaje. Desde este punto de vista

$$x=(50\times30)/100=15$$

Lo cual significa que 15 es el 30% de 50 y por tanto 15 estudiantes se encuentran ausentes.

Para responder la segunda pregunta, debe tenerse en cuenta que los que se encuentran en clase son el 70% (¿por qué?) y planteando una regla de tres idéntica a la anterior, pero considerando que la cantidad que se busca es la asociada al 70% se obtendría como resultado que hay 35 estudiantes presentes; de manera más sencilla, se puede decir que la cantidad de estudiantes presentes en clase es el total menos los que se encuentran ausentes.

$$50 - 15 = 35$$

La segunda parte de la definición de porcentaje permite entender que el 30% que representa a los estudiantes faltantes equivale a tomar 30 partes de cada 100, o lo que es lo mismo 30/100. Esto significa que si hubiera 100 estudiantes en total habrían faltado 30 y 70 hubieran asistido.
Debe entenderse entonces que cada porcentaje tiene asociada una fracción y un decimal como se muestra en la siguiente tabla:

Porcentaje	Fracción	Decimal
100%	1	1
50%	1/2	0.5
25%	1/4	0.25
20%	1/5	0.2
10%	1/10	0.1
5%	1/20	0.01
1%	1/100	0.333
33.3%	1/3	0.666
66.6%	2/3	0.75
75%	3/4	

A continuación mostramos como puede ser utilizada la tabla anterior para calcular porcentajes sin necesidad de aplicar reglas de 3.

Consideración 1:

De acuerdo con la tabla, el 10% de una cantidad corresponde a su décima parte, por lo que a la hora de hallar este porcentaje lo único que tenemos que hacer es dividir el 100% entre 10 lo cual consiste en quitar un cero o correr la coma de un decimal hacia la izquierda según el caso.

Ejemplo 10:

Calcular el 10% de 540 y el 10% de 125.

En ambos casos usaremos el hecho de que el 10% corresponde a la décima parte y por tanto para calcularlo solo debemos dividir entre 10 al número que según el caso represente el 100%.

10% de 540 = 540/10 =54

Notemos que en este caso basta con quitar el cero de 540 y obtenemos que el 10% de 540 es 54. Para calcular el 10% de 125 tenemos que:

10% de 125= 125/10 =12.5

En este caso el resultado es un número decimal, pues 125 no termina en 0. Así encontramos que el 10% de 125 es 12.5

Una vez que sabemos calcular el 10% de cualquier cantidad, estamos en la capacidad de calcular el 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 % de cualquier número, solo basta calcular el 10% y multiplicar por el número correspondiente a las decenas en cada caso.

Ejemplo 11:

Calcular el 70% de 60. Primero calculamos el 10% de 60 y luego multiplicamos por 6.

10% de 60 = 60/10=6 por lo tanto 70% de 60= 6×7=42

Así tenemos que el 70% de 60 es 42.

Consideración 2:

Para calcular un porcentaje que no esté en la tabla, podemos hacer uso de la propiedad distributiva. Observa el siguiente ejemplo:

Calcular el 15% de 360. Podemos decir que 15% = 10% + 5%, así que para calcular el porcentaje basta con encontrar el 10 y el 5% de 360 y luego sumarlos.

El 10% de 360 es 36 y el 5% de 360 es 18 pues corresponde a la mitad del 10%.

Tenemos entonces que

10% + 5% = 15%
36 + 18 = 54
Por lo tanto 54 es el 15% de 360.

También podríamos decir que 15% = 25% -10% y obtendríamos el mismo resultado.

Ejemplo 12:

Un concesionario lanzó al mercado el nuevo Chevrolet Guyeg a un costo de 45.200 euros, con lo que ganan el 13% de lo que le costó. ¿Cuánto le cuesta un Chevrolet Guyeg al concesionario? Después de haber leído cuidadosamente el ejercicio se infiere que lo que le cuesta el auto al concesionario es la cantidad que se quiere conocer y representa el 100%, debido a que la palabra costo se encuentra después de la palabra de referencia “de”. Además, si el concesionario gana el 13% de este valor, significa que los 45.200 euros (precio de venta) representan el 113%, debido a que incluye el 100% del costo del auto y el 13% de ganancia. Esto se representa mediante una regla de tres simple, como sigue: Si 45.200 euros son el 113%; entonces, ¿cuántos euros son el 100%?

Cantidad (Euros)	**Porcentaje** (%)
(+) 45.200	113(-)
(-) x	100 (+)

$$x = \frac{45.200 \times 100}{113} = 40.000$$

Esto significa que el nuevo Chevrolet Guyeg le cuesta al concesionario 40.000 euros.

Ejemplo 13:

El libro Cálculo para ingenieros vale $184.000, y su costo es 8% menor que el libro Geometría euclidiana. El costo del libro Geometría euclidiana es:

Después de leer atentamente el ejercicio, se infiere que el costo del libro Geometría euclidiana es la cantidad buscada y representa el 100%, porque es la cantidad con la cual se está comparando, como se observa por el uso de la expresión “de”. Eso significa que si el libro Cálculo para ingenieros cuesta 8% menos, entonces $184.000 es el 92%. Luego, se puede representar la situación mediante una regla de tres como sigue:

¿Si $184.000 es el 92%, entonces ¿cuánto es el 100%?

Cantidad (Euros)	**Porcentaje** (%)
(+) 184.000	92(-)
(-) x	100 (+)

$$x = \frac{184.000 \times 100}{92} - 200$$

Luego, el libro Geometría euclidiana cuesta $200.000.

Ejemplo 5:

Laura tenía $200 dólares. Si perdió el 15% en apuestas en un casino y donó el 85% del resto a un convento, ¿cuánto le queda de su dinero? ¿Es correcto pensar que si perdió el 15% y donó el 85%, en total entregó un 100% de su dinero? Después de haber leído cuidadosamente el ejercicio, se infiere que Inicialmente pierde el 15% de $200, es decir,

$$15\% \text{ de } 200 \text{ — } \frac{15}{100} \text{ de } 200 \text{ — } \frac{15}{100}\, x\; 200 \text{ — } 30$$

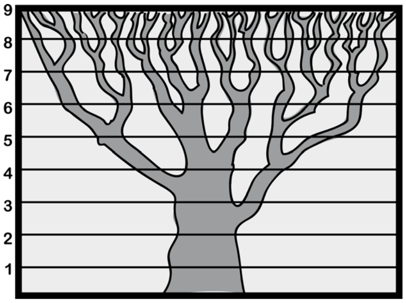
Entonces, si pierde $30 dólares le han de quedar $200 - $30 = $170.

Sucesiones y series finitas

El origen de las secuencias, al igual que el de muchas otras ramas de las matemáticas, es incierto. Sin embargo, se conocen algunos escritos que evidencian la presencia de sucesiones siglos atrás de nuestra era, motivo que lleva a la conclusión de que no existe un matemático en concreto al cual atribuirle su paternidad.

Se sabe que en los escritos babilónicos (2000 a.C. - 600 a.C.) ya aparecían problemas de secuencias, debido al conocido problema planteado en uno de sus papiros de calcular en cuánto tiempo se doblaría una cantidad de dinero a un determinado interés compuesto. También, en el libro IX de Los Elementos de Euclides, este propone una fórmula para la suma de "n" términos consecutivos de una progresión geométrica semejante a la actual de Gauss. Por su parte, Bhaskara, matemático hindú del siglo XII, propone en su más conocida obra, el Lilavati, variados problemas sobre diferentes tipos de secuencias.

Las secuencias sirven para describir muchos de los fenómenos que ocurren en nuestro alrededor, como lo ilustra Hans Magnus Enzensberger en su maravilloso libro El diablo de los números: "El que aún no crea que en la naturaleza las cosas ocurren como si supiera contar, que mire atentamente el árbol que viene a continuación [...] cuenta sus ramas empezando por abajo, en la raya #1, y luego en la raya # 2 y así sucesivamente hasta llegar a la raya # 9". ¿Cuántas ramas tiene en la raya # 9? Y para ver tu comprensión, si continuamos con las rayas, ¿cuántas ramas debe tener el árbol en la raya #12?



Hans Magnus Enzensberger, El diablo de los números, Madrid, Siruela, 1998.

Una secuencia o sucesión es un conjunto de datos ordenados mediante un patrón de formación, es decir, existe una regla mediante la cual se generan todos los elementos de la secuencia.

Estas secuencias de datos pueden ser numéricas, alfanuméricas, literales o gráficas.

Ejemplo 1:

El siguiente término en la secuencia mostrada a continuación es

1, 3, 5, 7,...

En esta secuencia se puede determinar que cada término se obtiene sumando 2 unidades al término anterior y este es el llamado patrón de formación.

Para calcular el término siguiente simplemente se debe seguir con el patrón de formación hallado, o sea, sumar 2 unidades a la cantidad anterior. Este 2 que se suma a cada término es constante en toda la secuencia y se lo llama diferencia.

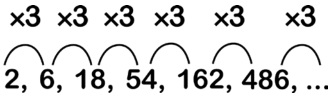
Podemos afirmar que el término siguiente en el ejemplo es 9. Las secuencias donde cada término después del primero se obtiene sumando o restando una cantidad constante (llamada diferencia) al término anterior, reciben el nombre de progresiones aritméticas.

Ejemplo 2:

El siguiente término en la secuencia mostrada a continuación es:

2, 6, 18, 54,...

En esta secuencia se puede determinar que el patrón de formación es multiplicar por 3 el valor de cada término para obtener el siguiente. Este 3 que se multiplica a cada término es constante en toda la secuencia y es llamado razón.



Podemos afirmar que el término siguiente en el ejercicio planteado es 162. Si se quiere encontrar otro término adicional, se multiplicaría 162 por 3 y se obtendría 468.

Las secuencias donde cada término después del primero se obtiene multiplicando o dividiendo el término anterior, por una cantidad constante llamada razón, son llamadas progresiones geométricas.

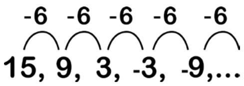
Ejercicio reto

En los siguientes ejercicios se debe hallar los dos siguientes términos de cada secuencia.

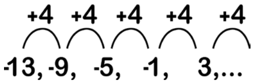
1. 15, 9, 3, ? , ?
2. -13, -9, -5, ? , ?
3. 3, 12, 48, ? , ?
4. 27, 9, 3, 1 , ? , ?

Solución

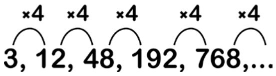
1. Es una progresión aritmética donde la diferencia es -6, es decir, a cada término se le debe restar 6 para encontrar el siguiente. Por lo tanto los dos términos siguientes son -3 y -9.



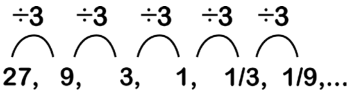
2. Es una progresión aritmética donde la diferencia es 4, es decir, a cada término se le debe sumar 4 para encontrar el siguiente. Por lo tanto, los dos términos siguientes son -1 y +3.



3. Es una progresión geométrica donde la razón es 4, es decir, a cada término se le debe multiplicar por 4 para encontrar el siguiente. Por lo tanto, los dos términos siguientes son 192 y 768.



4. Es una progresión geométrica donde la razón es 1/3, es decir, a cada término se le debe dividir por 3 (o multiplicar por 1/3) para encontrar el siguiente. Por lo tanto los dos términos siguientes son 1/3 y 1/9.



Las secuencias se pueden clasificar como crecientes o decrecientes. Son crecientes cuando en la secuencia se cumple que el valor de cada término es mayor que el anterior, como los ejemplos 2 y 3 descritos anteriormente. Son decrecientes cuando en la secuencia se cumple que el valor de cada término es menor que el anterior, como los ejemplos 1 y 4 descritos anteriormente.

Nota: es de gran importancia determinar si una secuencia es creciente o decreciente para deducir fácilmente su comportamiento

- Si la secuencia es creciente, el patrón de formación está constituido por medio de sumas o multiplicaciones. Si la secuencia es decreciente, el patrón está conformado por divisiones o restas.
- De igual manera, si la secuencia crece o decrece con diferencias pequeñas, se puede pensar en sumas y restas; si crece o decrece con diferencias muy grandes, la operación debe ser una multiplicación o una división.
- Si en una misma secuencia se nota que hay crecimiento y decrecimiento, se utilizan operaciones intercaladas (sumas o multiplicaciones con restas o divisiones).

A continuación se propone intentar dar solución a las siguientes secuencias donde se debe encontrar el valor del siguiente término.

Ejercicio reto

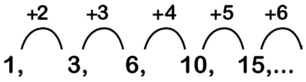
1) 1, 3, 6, 10, ?
2) 50, 48, 44, 38, ?
3) 6, 12, 36, 144, ?
4) 63, 21, 27, 9 ,15 , ?
5) 5, 9, 16, 29, 51, ?
6) 1 , 3 , 2 , 7 , 6 , 12 , 24 , 18 , ? , ?

Solución

Al intentar dar solución a las secuencias propuestas se nota que ninguna de ellas cumple la definición de progresión aritmética o geométrica; por lo tanto, existen diferentes tipos de secuencias donde el patrón de formación no es operando un valor constante, sino que dicho valor puede cambiar. También se puede combinar operaciones o tener dos patrones de formación en una misma secuencia. Todas estas reciben el nombre se secuencias mixtas.

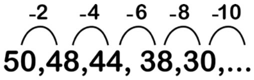
Lo importante es obtener un procedimiento que nos permita deducir con qué patrón de formación se está desarrollando una secuencia, para encontrar los términos que se pidan y así dar solución a cualquier tipo de interrogante referente a dicha sucesión.

1) 1, 3, 6, 10, ... (Es creciente con diferencias pequeñas) El patrón de formación de esta secuencia consiste en sumar una unidad más que la que se sumó al término anterior.



Por lo tanto, debemos sumar 5 unidades al 10 para encontrar el valor pedido, o sea 15. Si queremos encontrar el siguiente término, deberíamos sumar 6 unidades al 15, y así sucesivamente.

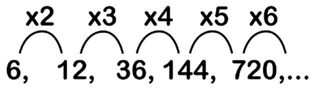
2) 50, 48, 44, 38, ... (Es decreciente con diferencias pequeñas) El patrón de formación de esta secuencia consiste en restar los números pares.



Por lo tanto, debemos restar 8 unidades al 38 para encontrar el valor pedido, o sea 30. Si queremos encontrar el siguiente término deberíamos restar 10 unidades al 30, y así sucesivamente.

3) 6, 12, 36, 144, ... (Es creciente con diferencias muy grandes)

El patrón de formación de esta secuencia consiste en multiplicar por una unidad más que la que se multiplicó al término anterior.

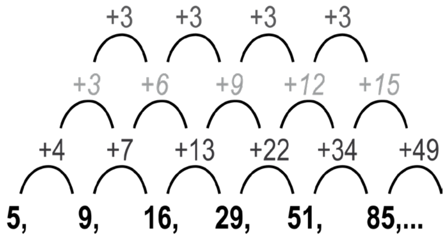


Por lo tanto, debemos multiplicar el 144 por 5 para encontrar el valor pedido, es decir, 720. Si queremos encontrar el siguiente término deberíamos multiplicar el 720 por 6, y así sucesivamente.

4) 63, 21, 27, 9 ,15, ... (Hay crecimiento y decrecimiento) El patrón de formación de esta secuencia consiste en intercalar dos operaciones, dividir entre 3 y sumar 6 unidades.

Por lo tanto, debemos dividir entre 3 al 15 para encontrar el valor pedido, o sea 5. Si queremos encontrar el siguiente término deberíamos sumar 6 unidades al 5, y así sucesivamente.
En este ejemplo, se nota que una secuencia puede tener una estructura de comportamiento creciente y decreciente, alternativamente.

5) 5, 9, 16, 29, 51,... (es creciente con diferencias pequeñas) El patrón de formación es un poco más complejo, donde se debe analizar "la secuencia de la secuencia", es decir, hay que determinar en qué grado va aumentando el valor que se suma a cada término.

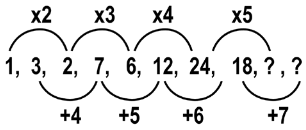


De 5 a 9 se suman 4.
De 9 a 16 se suman 7.
De 16 a 29 se suman 13.
De 29 a 51 se suman 22.

De 4 a 7 se suman 3.
De 7 a 13 se suman 6.
De 13 a 22 se suman 9.
Al 22 se le suman 12 para saber cuánto hay que agregar al 51.

Para obtener el 6° término se debe sumar 34 a 51, o sea 85. Si queremos encontrar el siguiente término deberíamos sumar 49 unidades al 85, y así sucesivamente.

6) 1 , 3 , 2 , 7 , 6 , 12 , 24 , 18 , ? , ?... (crece y decrece) Si intentamos deducir el patrón de formación en esta secuencia, no es posible determinar su comportamiento. Esta es una secuencia con dos patrones de formación que actúan de forma intercalada, donde una consiste en multiplicar por una unidad más y la otra en sumar una unidad más que la que se sumó al término anterior.



Por lo tanto, la primera incógnita resulta de multiplicar 24 por 5 y la segunda de sumar 7 unidades a 18, o sea 120 y 25, respectivamente.

A continuación se propone intentar dar solución a las siguientes secuencias, donde se debe encontrar el valor del siguiente término, usando el alfabeto de la lengua castellana.

Ejercicio reto

1. D , G , J , M , ...
2. A , C , F , J , ...
3. A12 , E18 , I24 , ...
4. 2Z4, 3X9, 4V16, ...

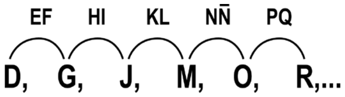
En este conjunto de ejercicios se muestra que entre los tipos de secuencias mixtas se encuentran las literales y alfanuméricas —una combinación de letras y valores numéricos—, y se debe deducir su patrón de formación de igual manera que las secuencias mixtas numéricas trabajadas anteriormente. En los ejercicios propuestos, el 1° y el 2° corresponden a secuencias literales, el 3° y 4° corresponden a secuencias alfanuméricas.

Solución

Recordemos que para estos 4 ejercicios se pide utilizar el alfabeto de la lengua castellana, ya que si se utiliza el inglés o cualquier otro, se difiere en la solución correcta.

1. D , G , J , M , ...

En esta secuencia vemos que el patrón de formación consiste en que para pasar de una letra a otra de debe saltar las dos letras siguientes en el alfabeto.



Según esto, la letra que debe seguir después de la M es la O y después de la O, la R, y así sucesivamente.

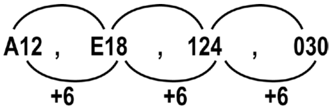
2. A , C , F , J , ...

En esta secuencia vemos que el patrón de formación consiste en que para pasar de una letra a otra se debe saltar una más que en la anterior.

Según esto, para deducir qué letra sigue después de la J se debe saltar las cuatro letras siguientes del alfabeto (KLMN), o sea que debe seguir la Ñ.

3. A12 , E18 , I24 , ...

En las secuencias alfanuméricas, se debe analizar de manera independiente cómo varía la parte literal de la parte numérica. La parte literal nos va mostrando las vocales en su orden: A, E, I, ...
La parte numérica es una progresión aritmética de diferencia 6: 12, 18, 24,...



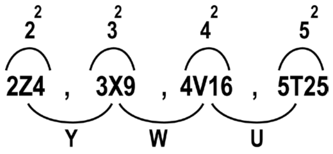
Por lo tanto, en la parte literal debe seguir la siguiente vocal que es la O y en la numérica debe seguir 24 + 6, o sea 30. Es decir, que el siguiente término es O30.

4. 2Z4, 3X9, 4V16, ...

El primer elemento de cada término se obtiene sumando una unidad a la anterior: 2, 3, 4,...

El segundo elemento de cada término es la parte literal y a partir de la Z se salta una letra pero tomando el alfabeto en sentido contrario: Z, X, V,..

El tercer elemento de cada término se obtiene elevando al cuadrado el primer elemento.

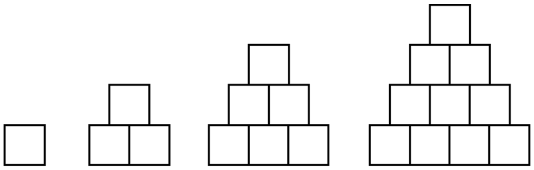


El primer elemento del término siguiente debe ser el número 5, el segundo debe ser la letra T y el tercero debe ser el cuadrado de 5 que es el primer término, o sea 5T25.

Ahora, proponemos resolver el siguiente ejercicio:

Ejercicio reto

Un niño de un jardín infantil, usando los cubos que tiene disponibles para jugar, arma las siguientes figuras en el mismo orden que se muestra a continuación:



Con la información suministrada, resolver los siguientes ejercicios:

1. El número de cubos que necesita el niño si quiere armar la figura 10 es:
   A. 45
   B. 55
   C. 66
   D. 52
2. Para armar las primeras 7 figuras, el niñ necesita
   A.28
   B. 36
   C. 84
   D. 120
3. La suma de las tres primeras filas de la figura 25 es:
   A. 72
   B. 25
   C. 49
   D. 56

4. La expresión que sirve para obtener el número de cubos necesarios para armar la figura enésima, donde n corresponde al número de la figura, es:

   A. 2n-1
   B. n(n+1)/2
   C. $3n^2-2$
   D. $2n^2-1$

Solución

En este ejercicio notamos que no se presentan datos numéricos ni alfanuméricos, sino una secuencia gráfica. Una secuencia gráfica es aquella donde cada uno de los términos es una figura cualquiera y la forma como cambia la figura de término a término también está dada por un patrón de formación.
La idea en este tipo de enunciados es deducir la manera como va creciendo la figura entre término y término. Para esto, se forma una secuencia numérica contando el número de cubos que tiene cada figura:

# de cubos	1	3	6	10
# de figura	1	2	3	4

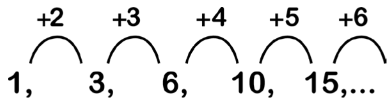
Con el número de cubos de cada figura formamos la secuencia.

1, 3, 6, 10, ...

Notemos que esta secuencia ya ha sido estudiada en uno de los ejercicios propuestos en el capítulo.

Nota: Toda secuencia gráfica puede ser relacionada con una secuencia numérica, contando los elementos que tiene cada término, y no será necesario dibujar las figuras hasta la posición pedida.

1. Se debe reproducir la secuencia hasta el décimo término.



Por lo tanto, el niño necesita 55 cubos para formar la décima figura.

2. No se está preguntando por el número de cubos que se necesitan para formar la 7° figura, sino por todos los que se necesitan para armar desde la primera hasta la séptima; debido a esto, se debe sumar los cubos de las siete primeras figuras:

1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 = 84 cubos.

3. En la gráfica es posible notar que el número de cubos en la primera fila de cada figura es igual al número de la figura; en la segunda se tiene un cubo menos que en la primera fila, y así sucesivamente; por lo tanto, en la figura 25 se cumple que:

Primera fila de la figura 25: 25 cubos.
Segunda fila de la figura 25: 24 cubos.
Tercera fila de la figura 25: 23 cubos.

La suma de las tres primeras filas de la figura 25 es

25 + 24 + 23 = 72 cubos.

4. En este ejercicio se pide realmente una expresión matemática que sirva para calcular el número de cubos que tiene una figura cualquiera, simplemente reemplazando en ella el número de la figura que se pide, por n en la fórmula. Se debe comprobar opción por opción y verificar cuál de ellas cumple con los datos obtenidos de la gráfica.

# de cubos	1	3	6	10
n: # de figura	n =1	n =2	n =3	n =4

En otras palabras, se debe buscar la expresión donde al reemplazar n por 1, el resultado debe ser 1 cubo; al reemplazar por 2, el resultado debe ser 3 cubos; al reemplazar por 3 cubos, el resultado debe ser 6 cubos, y así sucesivamente.

Comprobar opción A: 2n-1

Reemplazando n por 1: 2(1) – 1 = 1 cubo….cumple.
Reemplazando n por 2: 2(2) – 1 = 3 cubos….cumple.
Reemplazando n por 3: 2(3) – 1 = 5 cubos….NO cumple.

Esta opción se descarta, porque según ella el número de cubos en la figura 3 debe ser 5 en lugar de 6, como lo muestra la secuencia.

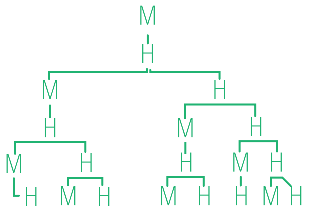
Esta opción se descarta, porque según ella el número de cubos en la figura 3 debe ser 5 en lugar de 6, como lo muestra la secuencia.

Comprobar opción B: n(n+1)/2

Reemplazando n por 1: 1(1+1)/2 = 1 cubo…cumple.
Reemplazando n por 2: 2(2+1)/2 = 3 cubos…cumple.
Reemplazando n por 3: 3(3+1)/2 = 6 cubos…cumple.

Esta expresión cumple con los datos de la secuencia, por lo tanto es la respuesta correcta. Se sugiere como ejercicio verificar que las opciones C y D no cumplen con la secuencia. Se propone resolver el siguiente ejercicio de secuencias gráficas, el cual es tomado de un examen de admisión de la Universidad de Antioquia.

Sabemos que una abeja macho (M) nace de huevos sin fecundar, es decir, que tiene madre pero no padre. Las abejas hembra (H) nacen de huevos fecundados, es decir, tienen madre y padre. Si una abeja macho es de la décima generación, su árbol genealógico se construirá así:



Generación	M	H	TOTAL
10	1	0	1
9	0	1	1
8	1	1	2
7	1	2	3
6	2	3	5
5	3	5	8

1. El número de antepasados de la primera generación que tiene esta abeja macho de la décima generación es:

   A. 20 B. 30 C. 34 D. 55

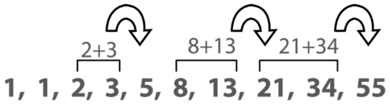
2. El número de antepasados machos de la primera generación es:

   A. 10 B. 13 C. 21 D. 28

3. El número de antepasados hembras de la primera generación es:

   A. 10 B. 17 C. 21 D. 34

Tanto el ejercicio propuesto de las abejas como todos los números mencionados en el párrafo anterior forman parte de la secuencia de Fibonacci, donde cada término es igual a la suma de los dos anteriores.



además, es claro notar que cada término de estas secuencias se obtiene sumando los dos anteriores.

Total de antepasados hasta la 1° generación:

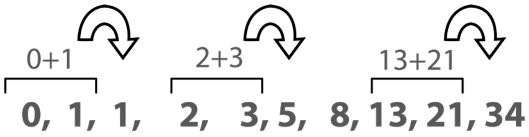
Son 55 antepasados.

Total de antepasados machos hasta la primera generación:

Son 21 antepasados machos.

Total de antepasados hembras hasta la primera generación:

Son 34 antepasados hembras.

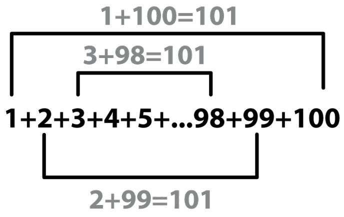


SERIES FINITAS

Una serie numérica cooresponde a la suma de los elementos de una sucesión, en nuestro caso solo sumaremos una cantidad finita de estos , aunque en situaciones mas avanzadas se estudia cual sería el resultado de sumar todos los términos lo cual resulta en una suma infinita, reiteramos que no se tratará ese caso aquí.

Una historia muy conocida acerca de la sumatoria de términos en secuencias es la de Carl Friedrich Gauss; su profesor de primaria pidió a sus alumnos hallar la suma de los 100 primeros números naturales y Gauss calculó el resultado muy rápidamente.

Gauss dedujo que sumando números por parejas, el resultado sería 101.



Con los números del 1 al 100 formamos 50 parejas, cada una de las cuales suma 101. El resultado de la suma propuesta se obtiene sumando el 101 en 50 veces, que es lo mismo que multiplicar:

$$101 \times 50 = 5050.$$

El resultado de la operación:

1-2+3-4+5-6+.........+47-48+49-50 es:

A. -25
B. 50
C. 0
D. -50

Lo que se debe hacer es agrupar elementos que operados arrojen el mismo resultado.

Agrupando elementos por parejas obtenemos 25 parejas de igual resultado.

$$1 - 2 = -1 \qquad 3 - 4 = -1 \qquad 5 - 6 = -1$$
$$47 - 48 = -1 \qquad 49 - 50 = -1$$

$$\overbrace{1-2}^{-1}+\underbrace{3-4}_{-1}+\overbrace{5-6}^{-1}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\underbrace{47-48}_{-1}+\overbrace{49-50}^{-1}$$

Con 50 elementos que piden sumar se forman 25 parejas, cada una de las cuales da como resultado -1, o sea, 25 veces - 1, es decir

$$(25) \times (-1) = -25.$$

ESTADÍSTICA

Las técnicas estadísticas se utilizan en la gran mayoría de aspectos de la vida. Ejemplos de ello son las encuestas que se diseñan para obtener información previa al día de las elecciones y así predecir cuál de los candidatos tiene mayor probabilidad de ganar; el seleccionar al azar consumidores para obtener información que indique la preferencia por ciertos productos; el ingeniero que toma muestras de las características de calidad de sus productos, junto con otras variables controlables de un determinado proceso de fabricación, para identificar las variables que más afectan la calidad; el economista que estudia los índices económicos durante cierto período para predecir la situación económica futura; los consumidores de los diferentes productos del mercado interpretan el comportamiento de la variación de precios y analizan en qué cantidad les es más favorable hacer sus compras; los investigadores necesitan comparar elementos y determinar cuál de ellos es más eficiente y conveniente para su trabajo.

Desde este punto de vista, es vital realizar y comprender las tareas de recolección, organización, presentación y análisis de datos, con el fin de que la información ayude en la toma de decisiones de una determinada sociedad. Por lo general, la presentación de esta información toma la forma de tablas, gráficos, cuadros e índices, a partir de los cuales es posible estimar promedios, medir dispersiones, establecer relaciones entre variables, etc.

El origen de todas estas aplicaciones de la organización e interpretación de datos mediante tablas y gráficas se remonta a la necesidad de recolectar datos numéricos en los estados que nacían en la sociedad medieval en la Europa Occidental, debido a que al transformarse la sociedad medieval en estado político, se necesitó información sobre los recursos de que disponía el país, entre ellos el número de ciudadanos, los impuestos, el servicio militar y el diezmo6.

Concepto y tipos de variable:

Una variable es una condición o característica que puede ser medida y que puede asumir diferentes valores, ya sean cuantitativos o cualitativos.

Variable cualitativa:

Son variables que representan cualidades, categorías, géneros o modalidades, mas no se pueden medir de manera numérica. En una encuesta que consiste en responder “sí” o “no”, en un evento que se pueda clasificar como grave, leve o moderado; al referirse al sexo de las personas se puede hablar de masculino o femenino; al interrogar un grupo de personas si se quiere saber qué tipo de detergente usan. Todos los anteriores son algunos de los tantos ejemplos de variables cualitativas.

Variable cuantitativa:

Son aquellas que pueden medirse y representarse numéricamente. El número de veces que alguien va a la biblioteca en cierto lapso de tiempo, la cantidad de familiares que tiene una persona o los valores a los que se cotiza el dólar cada día son ejemplos de variables cuantitativas. Si estas variables solo pueden tomar como valor números enteros, se denominan variables discretas; por ejemplo, el número de pensionados en una empresa, la cantidad de materias aprobadas por un estudiante. Si las variables pueden tomar como valor cualquier número real, se llaman variables continuas; por ejemplo, los resultados en un examen de matemáticas, el promedio de edad de los integrantes de los equipos de fútbol de cierto país, el peso de cierta cantidad de muestras de un reactivo en un laboratorio.

Análisis de tablas y gráficas

A la hora de recolectar datos para realizar un análisis estadístico, es conveniente escoger una forma de representarlos que permita leerlos de manera cómoda.

A continuación se muestran y describen algunos de los gráficos más usados para representar cierta cantidad de datos y se resuelven las preguntas más frecuentes relacionadas con los diagramas.

Tablas:

Las tablas más usadas son las llamadas de doble entrada, en las cuales se organiza una de las variables en forma vertical y la otra en forma horizontal, con el fin de relacionar los datos de una variable con la otra.

Ejemplo 1:

En la siguiente tabla se muestra la cantidad de horas trabajadas por semana para cada mes del año y el valor en pesos que se paga por cada una de ellas a cierta persona en los meses de enero a mayo.

	Horas trabajadas por semana	**Precio por hora**
Enero	50	$6000
Febrero	54	$6100
Marzo	60	$6500
Abril	66	$7000
Mayo	72	$7200
Total	302	

1. El porcentaje de horas trabajadas en febrero con respecto al total de horas trabajadas de enero hasta mayo es aproximadamente:

   A. 54% B. 18% C. 32% D. 15%

Como se dijo anteriormente, en cualquier ejercicio de porcentajes, lo principal es saber determinar qué valor es el 100%. Como se pide hacer los cálculos con respecto al total de horas trabajadas ellas son el 100%; se pregunta a qué porcentaje corresponden las horas trabajadas en febrero. En la tabla vemos que las horas trabajadas en total son 302 y las de febrero son 54:

Solución

Calculamos el porcentaje mediante una regla de tres en la que 302 representa el 100%, el objetivo es ver qué porcentaje representa 54

$$\begin{array}{lcl} 302 & \searrow\!\!\nearrow & 100\% \\ 54 & \nearrow\!\!\searrow & x \end{array}$$

$$x = (54 \times 100)/302$$

x = 17,9%, con lo cual podemos afirmar que la respuesta es la opción B.

2. El porcentaje de horas trabajadas en abril con respecto a las de marzo es aproximadamente:

   A. 66% B. 21% C. 110% D.11%

Como los cálculos se deben hacer con respecto a las horas trabajadas en Marzo, ellas serán el 100% y nos preguntamos a qué porcentaje equivalen las horas trabajadas en abril:

Solución

$$\begin{array}{ccc} 60 & \searrow\!\!\!\nearrow & 100\% \\ 66 & & x \end{array}$$

$$x = (66 \times 100)/60$$
$$x = 110\%$$

La respuesta correcta es la opción C.

3. El porcentaje que aumentó el precio de las horas en mayo con respecto al precio pagado en el mes de abril es aproximadamente:

   A. 103%
   B. 3%
   C. 72%
   D. 10%

Como se pide hacer el cálculo con respecto al precio de abril, el dinero pagado en este mes será el 100%. Un error común en este ejercicio es preguntar por el precio de mayo.

$$\begin{array}{cccl} 7000 & \searrow\!\!\!\nearrow & 100\% & \text{Planteamiento} \\ 7200 & & x & \text{Errado} \end{array}$$

Este planteamiento es incorrecto ya que se está preguntando por el precio de mayo y no por la cantidad que aumentó de abril a mayo. Al resolver esta regla de tres el resultado es aproximadamente de 103%, el cual está en las opciones y fácilmente se marca esta como repuesta. Aunque este resultado es errado, nos sirve para deducir la respuesta correcta. A este 103% se le resta el 100% para así obtener solo el aumento en el mes de mayo, de modo que el resultado es de 3%.

El planteamiento correcto sería.

Primero, debemos calcular el aumento de abril a mayo: 7200 – 7000 = 200 y después hacer el planteamiento de la regla de tres.

$$\begin{array}{ccc} 7000 & \searrow\!\!\!\nearrow & 100\% \\ 200 & & x \end{array}$$

$$x = (200 \times 100)/7000$$
$$x = 2{,}8\%$$

La respuesta correcta es la opción **B**.

4. De las siguientes afirmaciones, la única correcta es:

   A. El promedio de ingreso semanal por hora en los meses descritos es de 6720.
   B. El aumento del precio entre cada mes se hizo proporcional a las horas trabajadas.
   C. El promedio de ingreso semanal por hora en los meses descritos es de 6560.
   D. El porcentaje de horas trabajadas en marzo con respecto a enero es el 20%.

En este tipo de preguntas debemos revisar opción por opción hasta encontrar la afirmación correcta.

La opción A nos pide calcular el promedio de ingreso semanal por hora en los meses descritos en la tabla. Para calcular el promedio se debe sumar el precio de cada hora en cada uno de los meses y dividirse ese resultado entre el número de meses, que son 5.

(6000 + 6.100 +6500 + 7000 + 7200)/ 5 = 32.800/5 = 6560

Con este valor calculado podemos decir con certeza que la respuesta correcta es la opción C.

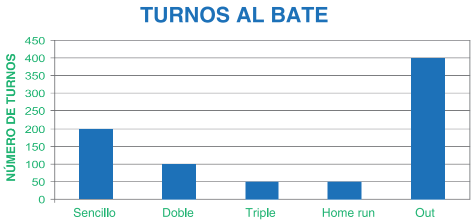
A continuación se muestra y describe algunos de los gráficos más usados para representar cierta cantidad de datos, como los trabajados en los ejemplos anteriores, y se resuelven las preguntas más frecuentes relacionadas con los diagramas.

DIAGRAMA DE BARRAS

Es un gráfico que se plasma sobre un plano cartesiano usando barras horizontales o verticales que toman alturas proporcionales a los valores que corresponden y se usan para comparar los dichos valores.

Ejemplo 2:

El siguiente diagrama de barras nos muestra el rendimiento de un beisbolista en su total de turnos al bate con su equipo de las grandes ligas.



Un hit es un batazo bueno donde el jugador llega a alguna de las bases y pueden ser sencillo, doble, triple o home run. Un hit es sencillo cuando el jugador llega solo hasta la primera base y se denomina extrabase cuando llega a segunda (un doble), tercera (un triple) o recorre las cuatro bases para lograr una anotación (home run). Un out es una jugada donde el jugador no logra ubicarse en una de las bases.

1. El total de turnos al bate que tuvo el deportista en la temporada fue:

   A. 750
   B. 800
   C. 400
   D. 600

En esta pregunta nos debemos basar solamente en la interpretación de la gráfica, es decir, se debe tener muy claro qué información se representa en cada uno de los ejes. Nos damos cuenta de que por cada hit convertido y por cada out se tiene un turno al bate, entonces para encontrar el total de turnos se suman los turnos convertidos en hits y en outs.

200 sencillos + 100 dobles + 50 triples + 50 home runs + 400 outs = 800

Por lo tanto la opción correcta es la **B**.

2. Con respecto al total de turnos al bate, la fracción de hits convertidos fue de:

A. 1/4 B. 1/8 C. 1/2 D. 2/3

Esta pregunta corresponde a los esquemas de proporcionalidad, donde nos piden encontrar la relación entre el total de hits y el total de turnos al bate. El numerador de la fracción corresponde al total de hits convertidos y el denominador corresponde al total de turnos al bate. Los hits convertidos son 400 de un total de 800 turnos.

400/800, simplificando equivale a ½. Por lo tanto la opción correcta es la C.

3. El porcentaje de extrabases convertidos con respecto al total de turnos fue de:

A. 25%
B. 12,5%
C. 40%
D. 60%

Se plantea una regla de tres donde el total de turnos al bate equivale al 100%, y se pregunta a qué porcentaje equivaldrían los extrabases (los dobles, triples y home runs), que son 200 de un total de 800 turnos, luego:

$$\begin{tikzcd} 800 \arrow[dr] & 100\% \\ 200 \arrow[ur] & x \end{tikzcd}$$

x = (200 × 100)/800 = 25% por lo tanto la opción correcta es la A.

4. El porcentaje de home runs convertidos con respecto al total de outs fue de:

A. 25%
B. 12,5%
C. 40%
D. 60%

Este ejercicio es similar al anterior. La diferencia radica en que se debe hacer el cálculo con respecto al total de outs y no al total de turnos. Según esto, en la regla de tres el 100% equivale a la cantidad de outs y se pregunta a qué porcentaje equivale el número de home runs. El total de home runs fue 50 y el total de outs fue 400.

$$\begin{tikzcd} 400 \arrow[dr] & 100\% \\ 50 \arrow[ur] & x \end{tikzcd}$$

x = (50 × 100)/400 = 12,5% por lo tanto la opción correcta es la B.

5. El porcentaje de hits donde se llegó a por lo menos la tercera base con respecto a los hits donde se llegó a lo sumo a la segunda base es:8

A. 20%
B. 35%
C. 40%
D. 33,3%

Cuando se usan las frases "por lo menos" o "como mínimo" se debe tomar el valor que se indica y los mayores que él. Cuando se pide tomar los hits en donde se llegó por lo menos a tercera base, se deben contar los llegados a tercera o más, o sea tercera, y home runs: 50 triples + 50 home runs = 100.

Cuando se usan las frases “a lo sumo” o “como máximo” se debe tomar el valor que se indica y los menores que él. Cuando se pide tomar los hits en donde se llegó a lo sumo a segunda base, se deben contar los llegados a segunda o menos, o sea segunda o primera base: 200 sencillos + 100 dobles = 300, y estos 300 son el 100%, porque se pide hacer los cálculos con respecto a él.

$$\begin{array}{ccc} 300 & & 100\% \\ 100 & & x \end{array}$$

$x = (100 \times 100)/300 = 33{,}3\%$

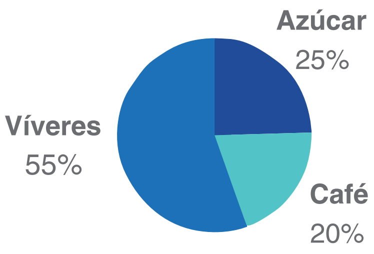
DIAGRAMA CIRCULAR O DE SECTORES

Es un diagrama en el que se usa un círculo que representará la totalidad de la muestra o población (100%); esta se divide en regiones o sectores proporcionales según el valor que tome cada una de las variables.

Ejemplo 3:

El siguiente gráfico representa la existencia de $120.000 en mercancías que tiene un almacén; el 25% es azúcar, el 20% es café y el resto víveres.

EXISTENCIAS ACTUALES EN EL ALMACÉN



1. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?
   A. En café hay una existencia de $20.000.
   B. En café hay una existencia de $80.000.
   C. En café hay una existencia de $24.000.
   D. En café hay una existencia de $25.000.

Como en todas las opciones se da una afirmación diferente con respecto a la existencia de café representada en pesos, lo único que debemos hacer es considerar que los $120.000 equivalen al 100% y preguntar la cantidad en pesos que representa el porcentaje de café (20%).

$$20\% \text{ de } 120.000 = \frac{120000}{5} = 24000$$

x = 24.000... que corresponde a la opción **C**.

2. ¿Qué cantidad de dinero hay que invertir en café y azúcar para igualar la existencia en víveres?
   A. 18.000
   B. 24.000
   C. 6000
   D. 12.000

Se suman los porcentajes correspondientes al café y al azúcar: 20% + 25% = 45%, lo cual muestra que para igualar la inversión en víveres falta un 10% del total, porque la inversión en víveres es del 55%. Tenemos que los $120.000 corresponden al 100% y preguntamos qué cantidad de dinero equivale al 10%, que es lo que falta para igualar la inversión.

$$10\% \text{ de } 120.000 = \frac{120.000}{10} = 12.000$$

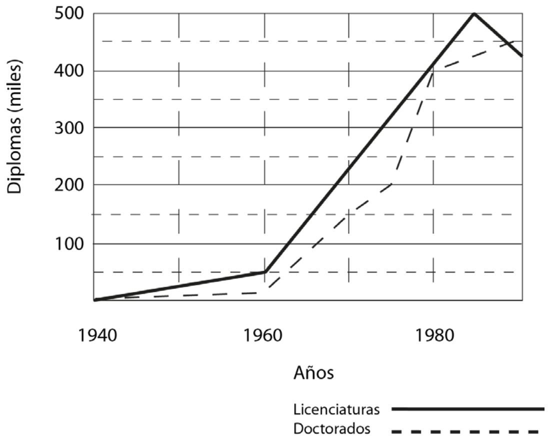
x = 12.000 ... que corresponde a la opción **D**.

DIAGRAMAS TEMPORALES

Gráfico en el cual se muestra el comportamiento de una variable cualquiera con respecto al tiempo en que ocurre.

Ejemplo 4:

La gráfica siguiente muestra el total de licenciaturas y doctorados en miles de diplomas, otorgados por una universidad durante un período de años.



Fuente: Tabla de https://goo.gl/7hY8cW

En este diagrama temporal se puede determinar la cantidad de diplomas de doctorados y licenciaturas otorgados entre 1940 y 1990. Además, se puede interpretar cómo ha sido la tendencia de este número de diplomas con el transcurrir del tiempo (si son aumentos proporcionales o no), comparar en un mismo año qué tipo de diplomas se otorgaron en mayor número y hacer diferentes tipos de cálculos con datos extraídos de la gráfica.

Según la gráfica mostrada, de las siguientes afirmaciones la única falsa es:

A. En 1960 hubo 25.000 licenciados y 50.000 doctorados.
B. En 1980 hubo 400.000 licenciados.
C. En 1990 hubo 450.000 doctorados y 400.000 licenciados.
D. En 1985 hubo 500.000 licenciados.

Al analizar las opciones, se puede verificar en la gráfica que la opción falsa es la A, puesto que en 1960 los licenciados fueron 50.000 y los doctorados 25.000.

Medidas de tendencia central

La construcción de tablas y gráficas en estadística permite organizar y representar la información para realizar interpretaciones o describir una población. El siguiente paso para el análisis de la información consiste en realizar diferentes cálculos de magnitudes características en la distribución de los datos. Se definen entonces las medidas de tendencia central como aquellas que resumen toda la información recogida a un pequeño número de valores que indicarán el valor promedio de los datos, o en torno a qué valores se distribuyen estos.

Media o promedio

En una muestra con N datos representados por x_1,x_(2,) x_3,x_4,…,x_N, la media aritmética o promedio se obtiene sumando todos los valores de x y dividiendo por el total de datos. Se representa con x ̅.

x ̅= (x_1+ x_(2)+ x_3+ x_4+⋯+x_N)/N=(∑_(i=1)^N▒x_i)/N

El símbolo ∑ representa la suma de todos los datos de un conjunto.

Nota: en el caso de que algunos valores de x aparezcan repetidos, para simplificar los cálculos se puede multiplicar dicho valor por la cantidad de veces que se repite. En una distribución porcentual, se multiplica cada valor por el porcentaje que le corresponde y el promedio se obtiene sumando todos los resultados de tal manera que la distribución complete el 100%.

Moda

En un conjunto de datos, la moda es el valor de la variable con mayor frecuencia, es decir, el dato que más se repite o al que le corresponde la mayor distribución porcentual.

Mediana

Es una medida de tendencia central importante porque indica el valor intermedio del conjunto de datos. Por lo tanto, conociendo el valor de la mediana se sabe que un 50% de los datos son valores inferiores y el otro 50% valores superiores; es decir, la mediana divide en dos partes iguales la distribución de los datos. Para calcular esta medida se tiene en cuenta lo siguiente:

1. Se deben ordenar los datos de menor a mayor.
2. Si la cantidad de datos es impar, la mediana es el valor que queda en la mitad. Para N datos, la posición de valor intermedio se puede calcular con (N+1)/2.
3. Si la cantidad de datos es par, la mediana será el promedio de los dos valores centrales.

En general, la media aritmética y la mediana son medidas complementarias, dado que la comparación de sus valores puede suministrar información muy útil sobre la manera como se distribuyen los datos. Sin embargo, en algunos casos, estos valores son muy distintos entre sí, por lo que se hace difícil encontrar un valor representativo de la muestra. Es decir, las medidas de tendencia central darán un valor más o menos representativo de la muestra dependiendo de qué tan dispersos estén los valores de la muestra con respecto a dichas medidas.

Medidas de dispersión

Las medidas de dispersión son utilizadas para analizar qué tan representativas son las medidas de tendencia central, lo que indica la variabilidad de los datos con respecto al promedio o qué tan distantes están del valor central.

Varianza y desviación estándar

La desviación estándar es el valor más utilizado para estimar la dispersión de los datos de una muestra. Para calcular este valor, se utiliza la varianza de la muestra, que se define como la diferencia al cuadrado entre cada valor de la muestra y la media aritmética, dividido entre el total de datos:

$$s^2=\frac{\Sigma_{i}^{N}=1(x_i-x)^2}{N-1}$$

La desviación estándar corresponde a la raíz cuadrada de la varianza

$$\sqrt{s^2}=s=\sqrt{\frac{\Sigma_{i}^{N}=1(x_i-x)^2}{N-1}}$$

Mientras más alto sea el resultado de la desviación estándar, más dispersión presentan los datos

Ejemplo 5:

Un grupo de 32 estudiantes se inscribe para realizar una competencia de ajedrez. Se dispone de la información en la tabla respecto a la edad y al sexo de los estudiantes inscritos.

Edad/ Sexo	Mujeres	Hombres
14	5	3
15	8	2
16	8	*
17	3	1

Al analizar la información inicial y los datos que aparecen en la tabla, es correcto afirmar que en el grupo de inscritos

A. el promedio de las edades de las mujeres es de 16 años, porque es el dato que más se repite.
B. el promedio de las edades de los hombres es de 14 años, porque es el resultado de la suma de las edades de los hombres dividido 6.
C. el promedio de las edades de los estudiantes es de 17 años, porque es el dato que menos se repite.
D. el promedio de las edades de las mujeres es de 15 años, porque es el resultado de la suma de las edades de las mujeres dividido 24.

Observe que, para calcular el promedio de las edades de los hombres se debe completar el dato en la tabla representado por un *. Dado que en total son 32 estudiantes, y los datos de la tabla corresponden a los de 30 estudiantes, se puede concluir que el dato faltante es de 2 hombres de 16 años.

Luego, el promedio de las edades de los hombres es de

$$\bar{x}=\frac{(14\times 3)+(15\times 2)+(16\times 2)+(17\times 1)}{8}=15.125$$

Es decir, aproximadamente 15 años. El promedio de las edades de las mujeres es de

$$\bar{x}=\frac{(14\times 5)+(15\times 8)+(16\times 8)+(17\times 3)}{24}=15.375$$

Es decir, aproximadamente 15 años. Por lo tanto, la respuesta es la **D**. En el ejemplo anterior, para calcular la moda y la mediana, se puede hacer uso de la siguiente tabla de frecuencias:

Edad	Cantidad de estudiantes	Frecuencia acumulada
14	8	8
15	10	18
16	10	28
17	4	32

Cabe observar, que la moda corresponde a los dos datos con mayor repetición, es decir 15 y 16 años. Mientras que la mediana corresponde al promedio de los valores centrales, dado que el total de datos es un número par.

Los valores centrales serían los que ocupan las posiciones 16 y 17, es decir, de acuerdo con la frecuencia acumulada, ambos valores corresponden a 15 años. Por lo tanto, la mediana es 15.

TÉCNICAS DE CONTEO

Por conteo nos referimos a la capacidad de asignar una representación numérica a cada cantidad, ya sea el 24 a la cantidad de horas en un día, el siete a los colores del arco iris o un número a las estrellas del cielo. Las matemáticas empiezan con el conteo. Sin embargo, no puede decirse que el conteo de la antigüedad constituyera la matemática. Estas habrían comenzado cuando se empezó a llevar un registro de ese conteo y, por ende, se tuvo alguna representación de los números

.

En Babilonia, las matemáticas se desarrollaron a partir del 2000 a.C. Antes de esto, durante un largo periodo había evolucionado un sistema numérico posicional con base 60, sistema que se atribuye a los sumerios y a los acadios. Esto permitió representar números arbitrariamente grandes y fracciones, que se convirtieron en los cimientos de un desarrollo matemático más fuerte y dinámico.

A medida que las civilizaciones fueron evolucionando, cada una desarrolló sus propios métodos para contar. Los hindúes contaban con un sistema de cuadrículas que les permitía realizar sumas y multiplicaciones de gran tamaño; de igual manera lo hacían los chinos con un sistema construido con varillas de bambú, o los egipcios en un sistema multiplicativo en base 2.

En el presente, contamos con un sistema de numeración posicional más desarrollado: manejamos unidades, decenas, centenas..., y el valor de cada número depende de su posición. En el sistema actual ya estamos entrenados para multiplicar y sumar, pero ¿estamos entrenados para contar? 15.

Tanto en la estadística como en otras ciencias, se presenta, frecuentemente, la necesidad de saber el número de formas o maneras diferentes en que pueden relacionarse varios elementos de un conjunto.

Si tenemos en cuenta que el número de posibles relaciones es pequeño, la tarea resulta relativamente sencilla de resolver, dado que fácilmente se podrá enlistar o contar todas las posibilidades. Sin embargo, dado que en muchos otros casos, el número de posibilidades es mucho mayor, resulta tedioso y demasiado largo hacer una lista completa de todas estas posibilidades; los métodos de conteo son un camino rápido y eficaz que nos permitirán “contar” el número de maneras o de formas como podemos ordenar o relacionar elementos de una determinada agrupación.

Contar cuántas posibilidades de juego diferentes resultan de una lotería como el Baloto electrónico, cuántos números telefónicos se pueden asignar si se utilizan solo 7 cifras, y qué pasa si decimos que estos números deben empezar por el dos, el tres o el cuatro o cuántas placas diferentes de tres letras seguidas y tres dígitos pueden asignarse en nuestro país para los automóviles, cuántas fichas resultan en el juego del bingo, cuántos caminos distintos se pueden tomar de un sitio a otro, etc. son tareas que pueden desarrollarse con facilidad a medida que se avanza en los conocimientos sobre los métodos de conteo.

Observemos el siguiente ejemplo:

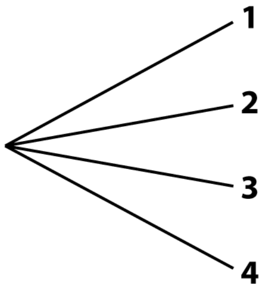
Ejemplo 1:

Debo viajar a Cali entre el primero y el cuatro de abril, bien podría ir en carro, en moto o en bus, y debo hacerlo escogiendo una de las 2 rutas, R1 o R2 de Medellín a Cali.

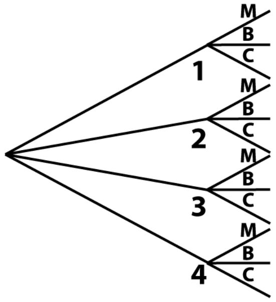
¿De cuántas maneras distintas puedo viajar a Cali?

Para dar solución a este problema, dibujemos inicialmente las diferentes opciones que tengo para ir a Cali, es decir, demos solución gráfica al ejercicio de la siguiente manera:

Primero, dibujemos las cuatro posibilidades para la fecha de partida (1, 2, 3 o 4 de abril).

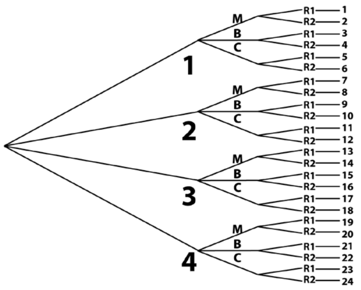


Luego, a cada fecha le anexamos los tres vehículos que podemos escoger.



Por último, le anexamos las dos rutas diferentes que puede escoger cada vehículo.

Analicemos la gráfica.



Si observamos por ejemplo la opción representada por el número 12, notamos que el viaje se realizó el 2 de abril, en carro por la ruta R2, es decir, cada uno de los 24 números indicados en la gráfica exponen de manera precisa las 24 formas distintas de viajar a Cali.

La figura anterior es llamada diagrama de árbol y puede utilizarse para solucionar problemas, donde existen cierto número de posibilidades diferentes. En esta ocasión, el análisis gráfico para la situación propuesta ha sido suficiente para solucionarlo. Pero, ¿qué sucedería si las posibilidades se extendieran a poder viajar cualquier día de abril, que existieran 20 vehículos diferentes para viajar y diez posibles rutas?

Trata de imaginar la solución gráfica del ejercicio.

¡Es inmensa!, y es por esto que se ve la necesidad de introducir a nuestras herramientas el principio fundamental de conteo, que es una técnica eficiente, breve y directa para solucionar este tipo de ejercicios.

Principio multiplicativo

El principio fundamental de conteo consiste en multiplicar el número de opciones que tenemos en cada elección para encontrar el número total de posibilidades.

Partiendo de lo anterior, demos entonces solución al primer ejercicio con esta nueva técnica:

- Elección 1 (Casilla 1): Fecha.
- Número de opciones: 4(1, 2, 3 o 4 de abril).
- Elección 2 (Casilla 2): Vehículo.
- Número de opciones: 3(moto, carro o bus).
- Elección 3 (Casilla 3): Ruta .
- Número de opciones: 2(R1 o R2).

Por tanto la solución para nuestro problema será

De manera análoga como solución para el segundo problema tenemos:

$$\frac{4}{\text{Fecha}}\times\frac{3}{\text{Vehículo}}\times\frac{2}{\text{Ruta}}=24$$

Podemos observar que el principio fundamental del conteo reduce un problema que inicialmente parece supremamente extenso a una simple multiplicación.

$$\frac{30}{\text{Fecha}}\times\frac{20}{\text{Vehículo}}\times\frac{10}{\text{Ruta}}=6000$$

En la mayoría de las ocasiones se requiere de una buena lectura para solucionar problemas de esta naturaleza, como lo ilustra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2[16]

A un hombre le falta un dedo en la mano izquierda y ha olvidado la combinación de la clave de su caja fuerte que consta de cuatro dígitos.

Hasta ahora con respecto a la combinación solo recuerda lo siguiente:

- El primer dígito es el número de dedos que tiene en su mano derecha.
- El segundo dígito es el número total de dedos en sus manos.
- La combinación es un número impar.

[16] *Ejercicio del examen de admisión de la Universidad de Antioquia*

Entonces, el número mínimo de claves diferentes que se deben introducir para tener la certeza de que la caja fuerte se abra es:

Solución:

Clave de 4 dígitos: $?_1?_2?_3?_4$ (4 elecciones)

Elección 1: Dígito de las unidades de mil.

Número de opciones: 1 (dedos de la mano derecha = 5, una opción: el cinco).

Elección 2: Dígito de las centenas.

Número de opciones: 1 (dedos de la mano derecha + dedos de la mano izquierda =5 + 4 = 9, una opción: el 9).

Elección 3: Dígito de las decenas.

Número de opciones: 10 (cualquiera de los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 o 9).

Elección 4: Dígito de las unidades.

Número de opciones: 5 (si la combinación es impar debe terminar en 1, 3, 5, 7 o 9).

Por tanto:

$$\frac{1}{\text{U.M}}\times\frac{1}{\text{C}}\times\frac{10}{\text{D}}\times\frac{5}{\text{U}}=50$$

U.M = Dígito de las unidades de mil.
C = Dígito de las centenas.
D = Dígito de las decenas.
U = Dígito de las unidades.

Nota: Observemos que en cada casilla debemos ubicar el número de opciones diferentes que se dan para cada elección; es por eso que para este ejercicio en la casilla de las centenas va un 1 y no un 9 (una sola posibilidad para escoger, el número 9).

Ejemplo 3:

¿Cuántos números de cuatro cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3 y 4?

$$?_1?_2?_3?_4=\underline{\quad\quad 4}\times\underline{\quad\quad 4}\times\underline{\quad\quad 4}\times\underline{\quad\quad 4}=256$$

Se pueden formar 256 números distintos.

Ejemplo 4:

¿Cuántos números de cuatro cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3 y 4 si los dígitos no se pueden repetir?

$$?_1?_2?_3?_4=\underline{\quad\quad 4}\times\underline{\quad\quad 3}\times\underline{\quad\quad 2}\times\underline{\quad\quad 1}=24$$

24 números distintos.

Observemos que es importante seguir al pie de la letra las condiciones del enunciado.

En el ejemplo 3 en cada casilla hay un 4 porque en cada posición puedo poner los dígitos 1, 2, 3 o 4; sin embargo, en el ejemplo 4 las opciones en cada casilla disminuyen, ya que, al no poderse repetir, por cada dígito ubicado debo descartar una opción quedando al final un solo dígito por escoger.

Ejemplo 5:

¿Cuántos números se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3 y 4 si los dígitos no se pueden repetir?

Solución

Notemos que en ningún momento nos especifican de cuántas cifras debe ser el número, por tanto debemos analizar cada uno de los casos.

Caso 1: ¿Cuántos números de una cifra podemos formar?

$$?_1 = \underline{\ \ 4\ \ } = 4$$

Caso 2: ¿Cuántos números de dos cifras podemos formar?

$$?_1?_2 = \underline{\ \ 4\ \ } \times \underline{\ \ 3\ \ } = 12$$

Caso 3: ¿Cuántos números de tres cifras podemos formar?

$$?_1?_2?_3 = \underline{\ \ 4\ \ } \times \underline{\ \ 3\ \ } \times \underline{\ \ 2\ \ } = 24$$

Caso 4: ¿Cuántos números de cuatro cifras podemos formar?

$$?_1?_2?_3?_4 = \underline{\ \ 4\ \ } \times \underline{\ \ 3\ \ } \times \underline{\ \ 2\ \ } \times \underline{\ \ 1\ \ } = 24$$

Observación

Notemos que en cada caso las opciones disminuyen ya que los dígitos no se pueden repetir tal y como se explicó en el ejemplo anterior.

Por último sumamos la cantidad de casos posibles.

Números de 1 cifra + números de 2 cifras + números de 3 cifras + números de 4 cifras = 4 + 12 + 24 + 24 = 64 números diferentes que se pueden formar.

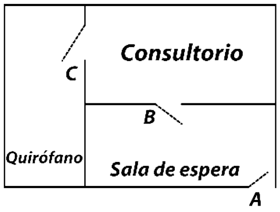
La capacidad de contar posibilidades de manera independiente y luego sumarlas es llamada el principio fundamental de la adición. En diferentes ejercicios es bastante útil tener la capacidad de aplicar correctamente este concepto, por tanto, es importante reconocer de manera clara los ejercicios que requieran el uso del mismo.

Debe quedar claro entonces que los problemas de conteo no solo consisten en contar las formas de construir números de tantas cifras o claves, sino que también se puede aplicar a todo tipo de situaciones que requieran un conteo de posibilidades.

Observemos a continuación la solución del siguiente ejercicio tomado de uno de los exámenes de admisión de la Universidad de Antioquia:

Ejemplo 6:

Preguntas 1 y 2



Llaves	**A**	**B**	**C**
Número de cerraduras	**3**	**3**	**2**

El diagrama muestra la distribución de un consultorio con sus tres puertas de acceso, además del número de cerraduras de cada puerta; cada cerradura tiene su propia llave y todas son idénticas en apariencia.

En cada puerta las llaves deben girarse al tiempo para obtener el acceso al cuarto.

A una auxiliar de enfermería le entregan 9 llaves entre las cuales se encuentran 8 correspondientes a las cerraduras del consultorio.

1. El número mínimo de ensayos que se requieren para garantizar su acceso al quirófano pasando por todas las puertas, siempre y cuando se vayan señalando las llaves una vez utilizadas, es:

   A. 524
   B. 558
   C. 600
   D. 630

2. A un médico que se encuentra en el interior del quirófano la secretaria al salir le entrega 9 llaves con el mismo sistema anterior y, por seguridad, cierra las tres puertas con sus respectivas cerraduras con otro juego de llaves. El número mínimo de ensayos que se requieren para garantizar la salida del médico pasando por todas las puertas, siempre y cuando se vayan señalando las llaves una vez utilizadas, es:

   A. 600
   B. 558
   C. 336
   D. 306

Solución

Analicemos la situación propuesta en la primera pregunta. Se debe llegar al quirófano y la única forma de hacerlo es atravesando las puertas A,B y C (en ese orden), preguntémonos entonces:

¿Cuál es el mínimo de intentos necesarios para tener la certeza de abrir la primera puerta?

Aplicando el método fundamental de conteo tenemos que:

$$\underline{\;9\;}\times\underline{\;8\;}\times\underline{\;7\;}= 504$$

Formas distintas de
introducir las llaves en
las cerraduras.

Puerta A:

Es decir, en el peor de los casos se requiere de 504 intentos para abrir la puerta A.

(Notemos que antes de introducir las llaves se tienen 9 opciones para la primera cerradura y estas disminuyen para las cerraduras siguientes al introducir cada llave.)

Estas 3 llaves utilizadas se marcan de manera que para tener la certeza de abrir la puerta B, ahora con tan solo 6 llaves disponibles, el caso es el siguiente:

$$\underline{\;6\;}\times\underline{\;5\;}\times\underline{\;4\;}= 120$$

Formas distintas de
introducir las llaves en
las cerraduras.

De igual manera se marcan las llaves utilizadas, dejando tan solo 3 llaves para las dos cerraduras de la puerta C y por tanto para la puerta C tenemos:

$$\underline{\;3\;}\times\underline{\;2\;}\times\underline{\;6\;}= 120$$

Formas distintas de
introducir las llaves en
las cerraduras.

Por último, sumando los intentos utilizados en el peor de los casos para las tres puertas tenemos:

Puerta A + Puerta B + Puerta C =504 + 120+ 6= 630 intentos.

La respuesta para el ejercicio 1 en este caso es la opción **D**.

(Es importante que notemos que para tener la certeza de llegar al quirófano se debe considerar el peor de los casos).

La pregunta 2 se dejará como ejercicio para practicar.

Permutaciones:

Para la temática que nos disponemos a tratar a continuación debemos introducir la notación de factorial.
El factorial es el producto de los números consecutivos decrecientes para cualquier entero n natural y se representa como:

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$$

Ejemplo 7:

$$7! = 7\times6\times5\times4\times3\times2\times1= 5040$$
$$4! = 4\times3\times2\times1= 24$$
$$9! = 9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1= 362880$$

En ciertos problemas podemos encontrar dos o más arreglos que sean exactamente iguales, por ejemplo: ¿de cuántas maneras se pueden organizar en fila tres monedas de 50 y 2 monedas de 100?

Para este tipo de problemas existen las técnicas de la permutación y la combinación.

A continuación expondremos como reconocer los problemas de este tipo, y como utilizar ambas técnicas para su solución.

Permutaciones con repetición o distinguibles

Una permutación es el número de cambios que se le pueden efectuar a un arreglo de manera que el cambio genere un arreglo diferente al existente.

Ejemplo 7:

Se tiene la siguiente clave:

12233ABA

¿Cuántas claves distintas se pueden construir cambiando los números y las letras de lugar?

Para desarrollar el ejercicio, observemos primero que sucede si efectuamos en la clave dos cambios:

Cambio 1: Cambiar el 1 por la B, de manera que

12233ABA→ B2233A1A (El cambio genera un arreglo diferente)

Cambio 2: Cambiar la primera A por la segunda A, de manera que

12233ABA→ 12233ABA (El cambio genera exactamente el mismo arreglo)

La pregunta para dar introducción a esta nueva técnica es la siguiente:

¿Cuántos cambios pueden hacerse sobre la clave de manera que genere claves diferentes a la inicial?

Para dar solución a la pregunta enunciemos entonces el teorema de la permutación.

Teorema de la permutación:

Si tenemos un conjunto de T elementos donde hay cierto número de subconjuntos con elementos repetidos A, B, C..., entonces la cantidad total de arreglos diferentes que podemos obtener de este conjunto será igual a

$$\frac{T}{A!\times B!\times C!}=X$$

Donde

X = Cantidad total de arreglos posibles.
T = Total de elementos.
A = Número veces que se repite el elemento A.
B = Número veces que se repite el elemento B.
...
P = Número veces que se repite el elemento P.

Para el ejemplo anterior tenemos:

T= 8 elementos en total (12233ABA)
U (unos que aparecen en la clave) = 1
D (dos que aparecen en la clave) =2
S (tres que aparecen en la clave) =2
A = 2
B = 1

Por tanto la solución del ejercicio anterior sería determinada por la siguiente expresión:

$$X = \frac{T!}{U!\times D!\times S!\times A!\times B!} = \frac{8!}{1!\times +2!\times 2!\times 2!\times 1!} = \frac{8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}{(1)\times(2\times 1)(2\times 1)(2\times 1)\times(1)} = 5040 \text{ claves distintas.}$$

Ejemplo 8:

Tomemos una extensión navideña con 9 espacios para los bombillos.

Supongamos que tenemos 4 bombillos rojos, 3 verdes y 2 amarillos para ubicar en la extensión. Ahora bien, si alguien preguntara cuántos arreglos distintos se pueden ubicar en la extensión con los bombillos, notemos que la solución del ejercicio por medio del método del conteo sería la siguiente:

$$\underline{\ 9\ }\times\underline{\ 8\ }\times\underline{\ 7\ }\times\underline{\ 6\ }\times\underline{\ 5\ }\times\underline{\ 4\ }\times\underline{\ 3\ }\times\underline{\ 2\ }\times\underline{\ 1\ } = 362680$$

Pero notemos también que si tenemos, por decir algo, el arreglo RRRRVVVAA, y cambiamos el tercer bombillo por el primero, obtendremos RRRRVVVAA (exactamente el mismo arreglo), es decir, como algunos elementos se repiten, también hay arreglos que se repiten, lo que nos lleva a pensar que entre las 362.680 formas que tenemos de ubicar los bombillos en la extensión, muchas de esas posibilidades se refieren al mismo arreglo; por tanto, debemos encontrar la manera de eliminar las opciones repetidas. La forma de hacer esto es usando la permutación.

Demos solución, entonces, a nuestro problema utilizando de manera correcta el teorema de la permutación.

Inicialmente, identifiquemos el conjunto total de elementos y el número de elementos que posee cada subconjunto, así:

T = Total de bombillos = 9
R = Bombillos rojos= 4
V = Bombillos verdes = 3
A = Bombillos amarillos = 2

Para dar solución al problema sustituimos cada valor en la fórmula, así:

$$X=\frac{T!}{R!\times V!\times A!}=\frac{9!}{4!\times 3!\times 2!}=\frac{9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}{(4\times 3\times 2\times 1)\times(3\times 2\times 1)\times(2\times 1)}$$

=1260 formas distintas.

Apliquemos ahora lo aprendido en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 9:

Una madre tiene 3 manzanas y 4 naranjas para darle a su hijo una fruta cada día de la semana, ¿de cuántas maneras distintas puede hacerlo?

Solución

T= Total de frutas = 7
M = Total de manzanas = 3
N = Total de naranjas = 4

Luego X = $\frac{7}{3!\times 4}=\frac{7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}{(3\times 2\times 1)\times(4\times 3\times 2\times 1)}=35$ formas distintas.

Recuerda siempre que si existen elementos repetidos, se debe utilizar la técnica de permutación.

Combinación

Para dar una idea inicial de la combinación, demos solución al siguiente problema:

¿De cuántas maneras diferentes se puede seleccionar una pareja entre: Alejandro, Felipe, Sandra y María?

Notemos que este problema no puede solucionarse por conteo, ya que escoger a Felipe y a Sandra es exactamente lo mismo que escoger a Sandra y Felipe, y ya hemos mencionado que la técnica del conteo cuenta el número total de arreglos sin importar si los arreglos se repiten o no.

Tampoco es una permutación, ya que cada persona es diferente de las otras, es decir, es claro que no hay elementos repetidos.

Para solucionar este problema, aprendamos entonces qué es una combinación y cómo se calcula.

Una combinación es la cantidad total de subconjuntos diferentes de k elementos que pueden formarse de un conjunto de n elementos (donde n es el número total de elementos del conjunto y k es un número fijo), y se denota n tomados de a k.

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

Se dice que un problema es una combinación estricta si cumple las siguientes dos hipótesis:

1. Se desea conocer cuántos subconjuntos diferentes con k elementos se pueden obtener de un conjunto mayor.
2. Al desordenar un arreglo se obtiene el mismo arreglo, es decir, no importa el orden.

De cumplir ambas hipótesis se dice que la cantidad de subconjuntos diferentes de k elementos que se pueden obtener de un conjunto de n elementos es igual a

X= Cantidad de formas distintas de tomar n elementos y escoger grupos de k elementos.

$$X=\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}=\frac{n!}{(n-k)!\times(k)!}$$

Donde:

X= Número de subconjuntos de k elementos diferentes que se pueden obtener de un conjunto de n elementos.
n =Número total de elementos del conjunto.
k = Cantidad deseada para los subconjuntos a formar.

Solución al problema inicial

Preguntémonos inicialmente: ¿cumple la primera hipótesis?

Respuesta: Sí. Se desea conocer cuántos conjuntos de dos personas podemos formar de un grupo de 4 personas.

¿Cumple la segunda hipótesis?

Respuesta: Sí, porque si tomamos como pareja a Sandra y a Felipe, es exactamente lo mismo que si tomamos como pareja a Felipe y a Sandra, es decir, FS = SF.

Por tanto, es una combinación, de manera que la solución para el problema sería la siguiente:

$$X=\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}=\frac{4!}{(4-2)!\times(2)!}=\frac{4\times3\times2\times1}{(2\times1)(2\times1)}=6$$

{AF,AS,AM,FS,FM,SM} = 6 diferentes parejas que se pueden formar.

Es importante anotar que para poder afirmar que nuestra situación problema es una combinación, deben de cumplirse ambas hipótesis, ya que existen casos en que no se cumple alguna de ellas, lo que cambia por completo el contexto del ejercicio.

Analicemos los siguientes dos ejercicios para aclarar la idea propuesta hasta el momento.

Ejercicio 1

¿Cuántos números de tres dígitos podemos formar con los números del 1 al 5, si los dígitos no se pueden repetir?

Ejercicio 2

¿De cuántas maneras diferentes se puede formar un grupo de tres personas si tenemos 5 candidatos para escoger?

Notemos que para el ejercicio 1 necesitamos formar ternas (números de tres dígitos), partiendo de un conjunto de 5 dígitos (los números del 1 al 5).De igual manera, en el problema 2 debemos formar ternas (3 candidatos) de un conjunto de 5 candidatos, es decir, ambos ejercicios cumplen la primera hipótesis, pero observemos qué sucede al analizar ambos problemas con la segunda hipótesis. Tomemos una terna cualquiera de ambos conjuntos C1 y C2.

C1 = (1, 2, 3, 4, 5) C2 = (A, B, C, D, E)

Por ejemplo:

123 ABC

Y cambiemos el orden de las ternas, así:

321 CBA

Notemos entonces que el número 123 es diferente del número 321, pero que escoger los candidatos A, B y C es lo mismo que escoger los candidatos C, B y A, ya que el orden de elección es indiferente.

Es decir, el problema 1 no cumple con la segunda hipótesis, lo que indica que el ejercicio 1 no es una combinación (al desordenar un arreglo obtenemos un arreglo diferente); en cambio, el problema 2 sí cumple con ambas hipótesis, es decir, es una combinación. Ese análisis nos lleva a las siguientes soluciones:

Solución 1

$$\frac{5}{\quad}\times\frac{4}{\quad}\times\frac{3}{\quad}=60$$

Solución 2

$$X=\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}=\frac{5!}{(5-3)!\times(3)!}=\frac{5\times4\times3\times2\times1}{(2\times1)(3\times2\times1)}=10$$

Hay 10 formas distintas de escoger grupos de tres candidatos.

Al igual que la permutación, la combinación se utiliza como filtro para eliminar arreglos repetidos, con la diferencia de que la permutación es distinguible por el hecho de que los elementos se repiten y en la combinación se pretende es observar el cumplimiento de las dos hipótesis para la combinación.

Para finalizar la temática de la combinación, vamos a ilustrar cómo reducir el cálculo de la misma al método de casillas.

Donde:

k =número de casillas.
n =número inicial superior.

Luego,

$$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}=\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{1}\times\ldots\times\frac{n-k}{k}=\frac{n!}{(n-k)!\times(k)!}$$

Así:

$$\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}=\frac{5}{1}\times\frac{4}{2}\times\frac{3}{3}=10$$

3 casillas, arranca desde 5 y decrece.

$$\begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix}=\frac{7}{1}\times\frac{6}{2}\times\frac{5}{3}\times\frac{4}{4}=35$$

4 casillas, arranca desde 7 y decrece.

$$\begin{bmatrix}9\\2\end{bmatrix}=\frac{9}{1}\times\frac{8}{2}=72$$

2 casillas, arranca desde 9 y decrece.

Ejemplo 10:

¿De cuántas maneras diferentes se pueden seleccionar parejas en un grupo de 20 personas?

$$\begin{bmatrix}20\\2\end{bmatrix}=\frac{20}{1}\times\frac{19}{2}=190$$

Ejemplo 11:

Si hay 7 personas y tan solo 4 desayunos servidos, entonces el número de maneras distintas como podemos escoger quiénes se sientan a la mesa es:

$$\begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix}=\frac{7}{1}\times\frac{6}{2}\times\frac{5}{3}\times\frac{4}{4}=35$$

Ejemplo 12:

¿De cuántas maneras distintas pueden escogerse dos hombres y dos mujeres en un grupo de 10 personas, si el 60% del grupo son hombres?

Solución

Si son 10 personas y el 60% del grupo son hombres, podemos afirmar que hay 6 hombres y 4 mujeres. Para escoger los hombres tenemos el siguiente número de posibilidades:

$$\begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix}=\frac{6}{1}\times\frac{5}{2}=15$$

Cantidad de parejas posibles para los hombres.

De igual manera, para las mujeres tenemos que:

$$\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}=\frac{4}{1}\times\frac{3}{2}=12$$

Cantidad de parejas posibles para las mujeres.

Por tanto, si hay 15 formas de escoger parejas de hombres y 6 formas de escoger parejas de mujeres, por conteo fundamental tenemos que

$$\frac{15}{}\times\frac{12}{}=90$$

Existen 90 formas de escoger los 4 integrantes bajo estas condiciones.

PROBABILIDAD

El azar forma parte del ser, de la misma forma en que el universo y el mundo se forman. Aunque se puedan establecer leyes deterministas y hasta universales como la gravedad, también existen campos de la ciencia que se conservan aleatorios, caóticos, donde la incertidumbre es ley y un patrón de comportamiento es nuestra única herramienta de predicción. La palabra probabilidad viene del latín *probabilitas, posibilitatis,* formada del verbo *probare* (comprobar, probar). El contexto mismo de la palabra surge de la necesidad de definir lo impredecible, lo indeterminable, todo aquello que hace parte del enigmático caos llamado azar.

Generalmente, la humanidad pretende construir ambientes seguros y evitar los riesgos, busca con afán la certeza y la objetividad frente al medio que lo rodea. La probabilidad es una teoría matemática que modela fenómenos aleatorios. Este tipo de fenómenos se contrapone a los que se llaman determinísticos. Mientras estos últimos son previsibles (como, cuando se eleva la temperatura del agua a 100 grados centígrados, a presión normal, puede preverse con toda certeza que se transformará en vapor), un fenómeno aleatorio es aquel que, a pesar de observarse bajo las mismas condiciones determinadas una y otra vez, tiene un conjunto de posibilidades como resultados posibles, como el lanzamiento de un dado o de una moneda.

A principios del siglo XVII comenzó un estudio en el campo de la probabilidad, una ciencia que ha sido construida por cientos de aportes matemáticos y estadísticos, que hoy en día continúan en progreso. Uno de ellos se dio en 1654, cuando Antoine Gombaud, conocido como el caballero de Méré, quien era jugador compulsivo, solicitó a Blaise Pascal, uno de los grandes matemáticos de la época, que le resolviese dos problemas: el primero era el reparto del dinero apostado cuando se suspendía la partida antes de terminar y el segundo consistía en mostrar matemáticamente por qué es más favorable apostar a la aparición de al menos un seis en cuatro lanzamientos de un dado, mientras que no es favorable apostar a la aparición de al menos un seis doble en 24 tiradas de dos dados simultáneamente. Poco tiempo después entre Pascal y su colega Pierre de Fermat resolvieron estos problemas y sentaron las bases de lo que hoy se conoce como teoría de la probabilidad.

La solución al primer problema consistió en darse cuenta de que el reparto del dinero debe hacerse en función de la posibilidad de ganar que tuviese cada jugador en el momento de interrumpirse el juego. El segundo problema, ¿cómo crees que pudo resolverse?

En 1933, el matemático soviético Andréi Kolmogorov propuso un sistema de axiomas para la teoría de la probabilidad, basado en las teorías de conjuntos y en la teoría de la medida, desarrollada pocos años antes por Lebesgue, Borel y Frechet, entre otros.

Actualmente, la teoría de la probabilidad encuentra aplicación en las más variadas ramas del conocimiento, como la física, donde corresponde mencionar el desarrollo de las difusiones y el movimiento browniano, o las finanzas, donde destaca el modelo de Black y Scholes para la valuación de acciones.

A continuación, abordaremos un trabajo sobre las aplicaciones de la teoría de la probabilidad con respecto a diferentes situaciones problema.

Es necesario dejar en claro que los sucesos aleatorios son impredecibles a nivel individual, mas no lo son a nivel global, ya que a este nivel se han desarrollado ideas matemáticas que permiten dar un golpe de certeza en el mundo del azar y transformar lo indeterminable en predecible o, matemáticamente hablando, en riesgos cuantificables.

La probabilidad tiene por objeto cuantificar la mayor o menor posibilidad de que uno o más eventos sucedan.

Para cuantificar las diferentes posibilidades en los eventos se utilizan números decimales desde el 0 hasta el 1. Así, si se tiene la certeza absoluta de que un evento sucederá se le asigna a este evento el valor de 1, pero si, por el contrario, se tiene la certeza de que tal evento jamás sucederá, se le asignará a tal evento el valor de 0. Los demás valores comprendidos entre el 0 y el 1 serán asignados a los eventos inconclusos o aleatorios, es decir, a aquellos eventos en los cuales no se puede afirmar con certeza la ocurrencia del mismo. Si el valor decimal asignado a tal evento está más cerca del 0 (por decir algo, tiene un valor de 0,13), entonces se dice que el evento es improbable; en este caso tan solo hay una probabilidad de 13% de que suceda, pero si, por el contrario, el valor asignado se acerca al 1 (por decir algo, el 0,95), se dice entonces que tal evento tiene mayor probabilidad de ocurrencia; para este valor en particular podría decirse que la probabilidad es del 95%.

Para asignar entonces los valores respectivos a la probabilidad de un evento utilizaremos la regla de Laplace, que define la probabilidad como la razón de casos que favorecen el evento con respecto a todos los casos posibles para el mismo.

$$\text{Probabilidad del evento} = \frac{(\text{Casos favorables})}{(\text{Casos posibles})}$$

Para utilizar esta expresión, debemos identificar con cuidado ambas variables en cualquier situación problema (casos favorables y casos posibles) y, para indicar los aspectos por considerar en el análisis, se solucionan algunos ejemplos que pretenden exponer con claridad la forma correcta de interpretar y utilizar la regla de Laplace para la probabilidad.

Ejemplo 1:

¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar una moneda se obtenga sello?

Casos posibles: (cara, sello) = 2 casos

Casos favorables: (sello) = 1 caso; luego, reemplazando los datos en la fórmula tenemos que:

$$P(\text{Sello}) = CF/CP = 1/2 = 0{,}5$$

Ejemplo 2:

¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar un dado, se obtenga un 3 o un 5?

Casos posibles: (1, 2, 3, 4, 5, 6) = 6 casos.

Casos favorables: (3,5) = 2 casos; luego, reemplazando los datos en la fórmula tenemos que:

$$P\ (\ 3 \text{ o } 5) = CF/CP = 2/6 = 1/3 = 0{,}333$$

Ejemplo 3:

Una bolsa contiene 8 balotas de color negro o blanco, si en la bolsa hay 3 balotas blancas, entonces la probabilidad de extraer una balota al azar y que esta sea negra es:

Casos posibles: (8 balotas) = 8 casos (3 balotas blancas y 5 negras).

Casos favorables: (5 balotas negras) = 5 casos; luego, reemplazando los datos en la fórmula tenemos que:

$$P\ (\text{negra}) = CF/CP = 5/8 = 0,\ 625$$

Para analizar el dato decimal asignado a cada evento presentado en los tres ejemplos, tenemos dos opciones:

1. Analizarlo como razón:

Al hacerlo, obtenemos una predicción de ocurrencias con respecto al número de eventos, es decir, para los ejemplos uno, dos y tres se predice lo siguiente:

Ejemplo 1:

Una de cada dos veces que se lanza una moneda, esta cae en sello.

P (Sello) = CF/CP = 1/2

Ejemplo 2:

Una de cada tres veces que se lanza un dado, se obtiene un 3 o un 5.

P (3 o 5) = CF/CP = 1/3

Ejemplo 3:

Por cada 8 extracciones de la bolsa, se obtienen 5 balotas negras.

P (negra) = CF/CP = 5/8

2. Analizarlo como porcentaje.

Nuestra segunda posibilidad de análisis para los datos entre 0 y 1 es analizar los mismos como un porcentaje asignado entre 0 y 100%, que representa la probabilidad proporcional en una muestra de estudio de 100 casos posibles. Para asignar un valor porcentual, basta con multiplicar la probabilidad del evento por 100. Es así como para los ejemplos 1, 2 y 3 tenemos que:

Ejemplo 1:

Se tiene un 50% de probabilidad de que la moneda caiga en sello.

P (sello) % = P (sello) × 100 = 0,5 × 100 = 50%

Ejemplo 2:

Se tiene un 33,33% de probabilidad de que al lanzar un dado se obtenga un 3 o un 5.

P (3 o 5) % = P (3 o 5) × 100 = 0,333 × 100 = 33,33%

Ejemplo 3:

Se tiene un 62,5% de probabilidad de extraer una balota blanca de la bolsa.

P (negra) % = P (negra) × 100 = 0,625 × 100 = 62,5%

De igual manera, si queremos medir una probabilidad porcentual como proporción, basta con dividir la misma por 100, es decir, si afirmamos que Colombia tiene un 30% de probabilidades de ir al mundial, entonces podemos afirmar que 3 de cada 10 veces Colombia va al mundial.

En ocasiones, cuando analizamos un ejercicio de probabilidad, nos enfrentamos con el problema de contar un extenso número de casos favorables o posibles; cuando esto suceda, no olvidemos que matemáticamente hablando disponemos de los diferentes métodos de conteo y que, a partir de los mismos, podemos abreviar un análisis extenso a una multiplicación simple, tal y como se evidencia en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4:

Si una lotería se realiza con boletas que constan de un número entre el 0 y el 99 y una vocal, entonces la probabilidad de ganar la lotería al comprar una sola boleta es:

Casos posibles: boletas diferentes.

$$\frac{10}{\text{Decenas}} \times \frac{10}{\text{Decenas}} \times \frac{5}{\text{Decenas}} = 500$$

Casos favorables: Un solo caso posible, ya que solo se tiene una boleta; por tanto, tenemos que:

P (ganar) = CF/CP = 1/500 = 0,002, es decir el 0,2%

Las preguntas de probabilidad pueden abordarse en diferentes contextos. Es posible que un enunciado que se refiera a varios conjuntos o a una gráfica sea utilizado para formular preguntas relativas a este tema.

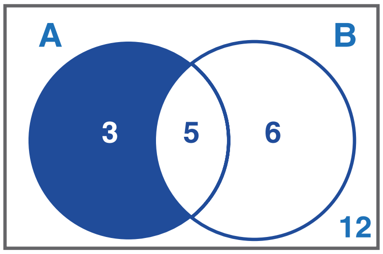
A continuación, se presenta un ejemplo resuelto de cada caso. Sin embargo, esto no quiere decir que un ejercicio de probabilidad no pueda ser abordado en un contexto de lógica proposicional o en una secuencia, etc.

Ejemplo 5:

Se le preguntó a 26 personas por su preferencia entre dos candidatos presidenciales A y B, y las respuestas fueron las siguientes:

12 de ellos desean que ninguno de los dos sea elegido presidente.
5 de ellos estarían satisfechos con cualquiera de los dos como presidente.
3 de ellos afirman que votarían por A, pero jamás por B.

Si se escoge uno de los encuestados al azar, la probabilidad de que este no vote por A es:
Solucionando el diagrama de conjuntos tenemos lo siguiente:



Observemos que si tenemos 26 casos posibles (total de encuestados) y 18 favorables (26 - 8 = 18), entonces la probabilidad de que una persona escogida al azar no vote por A es:

P (no A) = CF/CP = 18/26 = 9/13 = 0,6923, es decir, aproximadamente el 70%.

Ejemplo 6:

En un instituto educativo, al cual pertenecen 50 estudiantes, se ofrecen tres programas de estudio que se están dictando actualmente bajo la distribución que presenta la tabla:

	Hombres	Mujeres	Total
Ingeniería automotriz	5	12	17
Matemáticas	10	6	16
Administración	5	12	17
Total	**20**	**30**	**50**

- La probabilidad de escoger un estudiante al azar y que estudie ingeniería automotriz es:
  P (Ingeniería automotriz) = CF/CP = 17/50 = 0,34, es decir el 34%.
- La probabilidad de escoger un estudiante al azar y que sea una mujer es:
  P (mujer) = CF/CP = 30/50 = 3/5 = 0,6, es decir el 60%.
- Si se le pregunta a un hombre del instituto qué estudia, entonces la probabilidad de que responda administración es
  P (admin. / hombre) = CF/CP = 5/20 = 1/4 = 0,25, es decir el 25%.

En ocasiones, cuando los ejercicios no están diagramados puede ser algo complicado identificar cómo se comportan dos probabilidades que se conectan por disyunción. Para estos casos en particular, se enuncia una fórmula que puede ser de mucha ayuda a la hora de cuantificar la probabilidad de dos eventos disyuntivos.

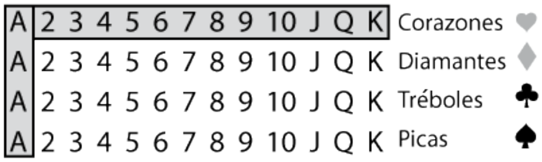
$$P\ (AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Observemos cómo se aplica la fórmula en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 7:

La probabilidad de extraer una carta de un naipe al azar y que esta sea un corazón o un as es:

En el siguiente diagrama, se muestran sombreados los casos favorables para todas las cartas.



A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	J	Q	K	Corazones	♥
A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	J	Q	K	Diamantes	♦
A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	J	Q	K	Tréboles	♣
A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	J	Q	K	Picas	♠

De acuerdo con el diagrama es claro afirmar que:

P (Corazón o as) = CF/CP = 16/52 = 4/13 = 0,3076, es decir el 30,7%.

Notemos que el análisis gráfico de la situación es importante para su solución, mas no es necesario si aplicamos la fórmula para la probabilidad disyuntiva de dos eventos.

$$P\ (AUB) = P\ (A) + P\ (B) - P\ (A \cap B)$$

P (corazón o as) = P (corazón) + P(as) - P (corazón y as)

P (corazón o as) = 13/52+ 4/52-1/52 = 16/52 = 4/13 = 0,3076, es decir, el 30,7%.

Al solucionar el ejemplo anterior, se tiene la intención de recordar que, cuando A o B pueden suceder, no basta con sumar las probabilidades de ambos eventos, sino que también se debe realizar una pausa para pensar si

ambos pueden suceder de manera simultánea, ya que esto puede reducir el número de casos favorables.
En el caso de que A y B no puedan suceder al mismo tiempo, entonces podemos afirmar que:

$$P(A \cap B) = 0$$

Tal y como se evidencia al aplicar la fórmula en el ejemplo 2.

Ejemplo 8:

¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar un dado, se obtenga un 3 o un 5?

$$P\ (AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P\ (3\text{ o }5) = P(3) + P(5) - P(3\text{ y }5)$$
$$P\ (3\text{ o }5) = 1/6 + 1/6 - 0 = 2/6\ = 1/3$$

Notemos que para el primer ejemplo existe una posibilidad de obtener un corazón y un as al mismo tiempo, mientras que en el ejemplo 2 se evidencia que es imposible obtener un 3 y un 5 en una sola tirada.

Eventos simultáneos y eventos en cadena:

Para finalizar nuestro recorrido en el mundo de la probabilidad, hablaremos un poco sobre cómo calcular la probabilidad de uno o más eventos que puedan ser simultáneos o encadenados entre sí. Se dice que dos eventos son simultáneos si se espera que sucedan al mismo tiempo, y dos eventos están encadenados si se espera que sucedan de manera sucesiva todos, uno tras otro.

Generalmente los eventos que se encuentran encadenados o son simultáneos entre sí, se identifican gramaticalmente con la conjunción (el conector lógico “y”); por tanto, sería bueno observar que es muy distinto preguntar ¿cuál es la probabilidad de que al irme a casa me asalten, o me accidente o me moje?, que preguntar ¿cuál es la probabilidad de que al irme a casa me asalten, me accidente y me moje?

Notemos que la conjunción reduce la probabilidad de los eventos, ya que no solo se espera que al menos uno de ellos suceda, sino que se espera que todos los eventos enunciados sucedan de manera encadenada o simultánea.

Para calcular este tipo de eventos utilizaremos el principio multiplicativo de la probabilidad, que nos permite afirmar que:

$$P\ (A\ y\ B\ y\ ....\ y\ N) = P\ (A) \times P\ (B) \times ..... \times P\ (N)$$

Desarrollemos ahora un par de ejemplos que nos permitan aplicar la fórmula para calcular la probabilidad de eventos encadenados o simultáneos.

Ejemplo 9:

La probabilidad de que una moneda caiga en sello tres veces seguidas es

A. 50%
B. 25%
C. 1/4
D. 1/8

Solución

Como los eventos deben suceder de manera sucesiva, tenemos que:

$$\begin{aligned} P\ (\text{sello y sello y sello}) &= P\ (\text{sello})\times P(\text{sello})\times P(\text{sello}) \\ &= 1/2 \times 1/2 \times 1/2 \\ &= 1/8 \end{aligned}$$

Por tanto, la respuesta es la **D**.

Ejemplo 10:

La probabilidad de que al lanzar una moneda y un dado, la moneda caiga en sello y el dado en un número impar es:

A. 1/2
B. 1/3
C. 25%
D. 66,66%

Solución

Como ambos eventos deben suceder y el conector lógico utilizado es la conjunción, tenemos que

$$\begin{aligned} P\ (\text{sello e impar}) &= P\ (\text{sello})\times P(\text{impar}) \\ &= 1/2 \times 3/6 \\ &= 1/4 \\ &= 0{,}25 \end{aligned}$$

es decir, el 25%.

Ejemplo 11:

Si se enumeran 10 balotas con los números del 1 al 10, y al extraer una balota de la bolsa, esta se deja por fuera, entonces la probabilidad de extraer tres balotas pares seguidas es:

A. 1/4
B. 1/8
C. 1/10
D. 1/12

Solución

Es importante que observemos que los casos favorables disminuyen a cada evento, ya que al extraerse cada número par, se saca de la bolsa; de igual manera, disminuyen los casos posibles; por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} &P\ (\text{par } 1^{\text{o}} \text{ par } 2^{\text{o}} \text{ y par } 3^{\text{o}}) \\ &= P\ (\text{par } 1^{\text{o}})\times P\ (\text{par } 2^{\text{o}})\times P\ (\text{par } 3^{\text{o}}) \\ &= 5/10 \times 4/9 \times 3/8 \\ &= 1/12 \end{aligned}$$

Notemos en este último ejemplo que los casos favorables, así como los casos posibles, pueden variar al encadenar eventos de manera sucesiva. Este hecho influye necesariamente en el resultado de la probabilidad que se va a calcular.

ALGEBRA

El álgebra es la rama de las matemáticas que se encarga de estudiar, las relaciones entre los elementos de un conjunto y las operaciones definidas en este, un ejemplo puede ser el conjunto de los números reales junto con las operaciones básicas de suma, resta multiplicación y división.

Transcurrió un período de 3400 años, por la época de 1700 a.C. hasta 1700 d.C., que se caracterizó por la aparición de símbolos y la resolución de lo que hoy llamamos ecuaciones. En esta época aparece también una parte del álgebra desarrollada por los griegos (300 a.C.), llamada álgebra geométrica, muy completa en métodos geométricos para resolver ecuaciones algebraicas. Sin duda alguna, todos hemos observado una ecuación de la forma ax + b = c, y hasta habremos dicho ¡qué sencilla de resolver!, sin percatarnos de que para llegar al actual proceso de resolución debieron pasar más de 3000 años.

Los egipcios nos dejaron en sus papiros, principalmente en los de Rhind (1650 a.C) y de Moscú (1850 a.C.), una gran cantidad de problemas matemáticos resueltos, en su gran mayoría de tipo aritmético, pero lo que más asombra es que dichos problemas correspondían a situaciones concretas de la vida diaria. Sin embargo, también se encuentran algunos que se pueden clasificar como algebraicos, pues no se refieren a algún objeto concreto. En estos, de una forma retórica, se obtiene la solución realizando operaciones con los datos de forma análoga a como hoy resolvemos dichas ecuaciones. Las ecuaciones más utilizadas por los egipcios eran de la forma:

x + ax = b *y* x + ax + bx = *0*, donde a y b eran números conocidos y x la incógnita que ellos denominaban aha o montón.

Hoy en día, la gran mayoría de las personas posee la habilidad suficiente para resolver problemas relacionados con ecuaciones como las que aparecen en el Papiro Rhind:

“Un montón y un séptimo del mismo es igual a 24”.

Si tratamos de utilizar, la notación moderna, esta situación se representaría de la siguiente manera:

$$x + x/7 = 24$$

La solución a este problema la obtenían por un método que hoy se conoce con el nombre de “método de la falsa posición” o “regula falsi” (tanteo). Consiste en tomar un valor concreto para la incógnita, probar con él y si se verifica la igualdad ya tenemos la solución; si no, mediante ciertos cálculos se puede encontrar directamente la solución exacta.

Por su parte, los babilonios — que también nos dejaron un gran número de documentos correspondientes al periodo 600 a.C.-300 d.C.— dejan ver que casi no prestaron atención a las ecuaciones lineales, quizás por considerarlas demasiado elementales, y por esto se concentraron en los sistemas de ecuaciones lineales y las ecuaciones de segundo grado.

En general, puede decirse que los matemáticos griegos no se ocuparon mucho de las ecuaciones lineales y, con excepción de Diophante (250 d.C.), también dejaron de lado el álgebra, para dedicarse a la geometría. De este matemático apareció en los siglos V o VI un epigrama algebraico que constituye una ecuación lineal que revela su edad. Dice así:

Transeúnte, esta es la tumba de Diophante: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su juventud ocupó su sexta parte, después durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer vello. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole durante cuatro años.

Entonces, ¿cuántos años vivió Diophante? Intenta dar solución a esta situación.

Más adelante, los babilonios se ocuparon de resolver sistemas de ecuaciones, llamando a las incógnitas con palabras tales como longitud, anchura, área o volumen sin que tuvieran relación con problemas de medida. Un ejemplo tomado de una tablilla babilónica plantea la resolución de un sistema de ecuaciones en los siguientes términos:

1/4 anchura + longitud = 7 manos
longitud + anchura = 10 manos

Tanto en la antigüedad como en la actualidad, las ecuaciones han servido para describir cualquier fenómeno de la naturaleza, desde el movimiento del aire o del agua hasta la resistencia de una estructura que va a soportar su propio peso más el peso de otras mil personas y tienen aplicación directa en cuestiones normales de nuestra vida cotidiana como hacer un avión más seguro, rápido y cómodo; explicar fenómenos financieros; incluso para modelar comportamientos sociales. Desde este punto de vista, esperamos que el lector asuma un verdadero compromiso con esta unidad, para que así pueda contar con una teoría más integral del mundo que le rodea y la incidencia que tiene la matemática sobre él.

La solución matemática de ecuaciones está basada en la teoría y los procedimientos algebraicos, por lo cual a continuación se describen los conceptos teóricos necesarios para desarrollar correctamente los ejercicios y situaciones problema relacionados con este capítulo de ecuaciones.

Expresiones algebraicas

Son la representación de una cantidad formada por letras (que representan cantidades variables o desconocidas), números (también llamados coeficientes), signos de agrupación y operaciones. Una expresión algebraica es llamada en general polinomio. El grado del polinomio es el mayor exponente que se tenga entre los términos que lo conforman. Además existen casos especiales para los que se asigna un nombre específico a un determinado polinomio.

Monomio:

Es una expresión algebraica formada por un solo término, por ejemplo $8x$, este monomio es de grado 1 porque es el exponente de la x.

Binomio:

Es un polinomio formado por dos términos, por ejemplo $5x^3- 7x$. Este binomio es de grado 3, porque es el mayor exponente de la parte literal. Se le llama polinomio cúbico.

Trinomio:

Es un polinomio formado por tres términos, por ejemplo $2y^2 \ -7y + 1$. Este trinomio es de grado 2 por el mayor exponente que aparece en él. A los polinomios de grado 2 se les llama polinomios cuadráticos.

A continuación se explican algunos conceptos que nos permitirán realizar operaciones con expresiones algebraicas.

Términos semejantes: son aquellos que tienen la misma parte literal, incluyendo el exponente, si bien sus coeficientes pueden ser diferentes. Por ejemplo, los términos $3x^3$,8^3,$-12x^3$ son semejantes, ya que su parte literal es idéntica.

Suma y resta entre términos semejantes: para sumar o restar dos o más términos semejantes, se debe realizar la operación respectiva entre sus coeficientes y el resultado estará acompañado de la misma parte literal y el mismo exponente. Si no todos los términos son semejantes, se agrupan los que son semejantes entre sí y se operan de forma independiente a los no semejantes.

Ejemplo 1:

$$3x^3,8x^3,-12x^3=-x^3$$

Porque se suman los términos 3,8 y -12 dando como resultado -1.

Cuando el coeficiente de la parte literal es 1 o -1 no se acostumbra poner el número completo, tan solo basta con poner el signo pues se entiende que si x es cualquier número, el producto $1x$ es igual a x.

Ejemplo 2:

Simplificar la expresión $-4z^3 + 25m + 5m - 12z^3 - 22m + 18k$.
Se agrupan los términos semejantes.

$$(-4z^3 - 12z^3) + (25m + 5m - 22m) + 18k$$

Luego se operan.

$$-16z^3 + 8m + 18k$$

Se debe tener especial cuidado de no sumar términos con exponentes distintos, por ejemplo x con x^2.

Multiplicación de expresiones algebraicas

La multiplicación de expresiones algebraicas no es tan restringida como la suma y la resta, pues se puede aplicar a cualquier par de expresiones llevando a cabo los siguientes pasos:

Multiplicación de signos: se multiplican de acuerdo a la regla de los signos.

$$(+)\times(+)=+$$
$$(-)\times(-)=+$$
$$(-)\times(+)=-$$
$$(+)\times(-)=-$$

Multiplicación de coeficientes: se multiplican de acuerdo a las leyes de la aritmética.

Multiplicación de la parte literal: se multiplican de acuerdo a las propiedades de la potenciación, es decir que en las potencias de igual base se suman los exponentes.

Ejemplo 3:

Multiplicar los monomios $-12x^3 z$ y $4x^3 z^2$.

Como una expresión es positiva y la otra negativa, el signo es (-). El producto de los coeficientes es 48. Finalmente, para la parte literal sumamos los exponentes de cada letra y el resultado es $x^6 z^3$.

Así tenemos que $(-12x^3 z)(4x^3 z^2)=-48x^6 z^3$.

Ejemplo 4:

Multiplicar $3a^2$ con $4a^5\text{-}ab$.
Para resolver el producto $3a^2$ $(4a^5\text{-}ab)$ hacemos uso de la propiedad distributiva.

$$3a^2 (4a^5-ab)=(3a^2)(4a^5)-(3a^2)(ab)=12a^7-3a^3b$$

Ejemplo 4:

Multiplicar los polinomios x^2+w y $2x^2\text{-}1$. En este caso se usa la propiedad distributiva 2 veces.

$$(x^2+w)(2x^2-1)=x^2 (2x^2-1)+w(2x^2-1)$$

$$=(x^2)(2x^2)-(x^2)(-1)+(w)(2x^2)-(w)(-1)$$

$$=4x4+x2+2x2w+w$$

División de expresiones algebraicas

Para dividir expresiones algebraicas, se tienen en cuenta prácticamente los mismos pasos que en la multiplicación. Se multiplican los signos de acuerdo a las leyes que se mencionaron antes. Se dividen los coeficientes de acuerdo a las leyes de la aritmética, se dividen las partes literales de acuerdo a las propiedades de la potenciación, es decir que se restan los exponentes en las potencias de igual base.

Ejemplo 1:

Dividir $48x^5$ entre $\text{-}6x^2$.
$(48x^5)/(-6x^2)=-8x^{(5-2)}=-8x^3$

Ejemplo 2:

Dividir $14a^6 b\text{-}21a^4 b^5$ entre $7ab$

En este caso se usa la propiedad distributiva

$$(14a^6b-21a^4b^5)/7ab=(14a^6b)/7ab-(21a^4b^5)/7ab=2a^5-3a^3b^4$$

En este momento solo mostraremos ejemplos en los que el denominador es un monomio, en otros casos, la situación es un poco más complicada y deben tenerse en cuenta otras consideraciones que presentaremos más adelante.

Valor numérico de expresiones algebraicas

Es aquel que se obtiene al reemplazar la parte literal de una expresión algebraica por un valor numérico dado, efectuando de antemano las operaciones numéricas indicadas.

Ejemplo 1:

Halle el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas, tomando los valores indicados para cada incógnita.

$$x=3, y=4, a=-7, b=8.$$

$$5x + 3y - 2a$$

Solución

Se mostrará la solución de este primer problema y se dejan los otros propuestos para que sean desarrollados por el lector.

$$5(3) + 3(4) - 2(-7) = 15 + 12 + 14 = 41$$
$$-2ab - 10xy$$
$$(40x - 10b + 15a)/9y$$
$$(2y/b) + a$$

Factorización

En la práctica, aparecen a veces expresiones algebraicas muy complicadas y extensas que pueden simplificarse usando las propiedades de las operaciones básicas, para ello se deben modificar dichas expresiones de modo que se puedan simplificar pero esto solo puede hacerse cuando las expresiones están dadas en factores.

Presentamos a continuación algunas de las técnicas más conocidas de factorización para expresiones algebraicas.

Factor común:

La técnica del factor común es la inversa de la propiedad distributiva, consiste en encontrar entre todos los términos de un polinomio, el máximo común divisor de todos ellos, luego dividir cada uno de los términos entre este factor y al final ponerlo afuera de un paréntesis que incluye a los términos restantes.

El factor común se determina de la siguiente forma:

Primero se determina el máximo común divisor de los coeficientes. Luego las letras que se repitan y el exponente que lleva cada letra es el mínimo que aparezca en todas expresiones.

Ejemplo 1:

Factorizar la expresión $3x^2-5x^3+6x^4+x$

El factor que se repite en todos los términos es x, por lo tanto, la expresión factorizada queda así:

$$x(3x-5x^2+6x^3+1)$$

Notemos que al aplicar la propiedad distributiva a $x(3x-5x^2+6x^3+1)$, obtenemos la expresión inicial

$$3x^2-5x^3+6x^4+x$$

Ejemplo 2:

Factorizar la expresión $4x^2 y^4-12x^3y-6x^4y^2$

El factor que se repite en todos los términos es $2x^2 y$ pues el máximo común divisor de 4, 6 y 12 es 2, se repiten las letras x y y y el menor exponente es 2 para x y 1 para y.

La expresión factorizada queda así:

$$2x^2 y(2y^3\text{-}2x\text{-}3x^2 y)$$

Factor común por agrupación de términos:

Existen expresiones algebraicas en las que el factor común no es tan solo un monomio como x o x^2, sino una expresión con más términos por ejemplo (x^2 -1) o (x3+3x2-5).

Consideremos la expresión 2y +2j +3xy+3xj, es claro que en esta expresión no existe un factor común que se repita en todos los términos, así que para factorizarla debemos formar dos grupos en los que exista un factor común

$$(2y +2j) +(3xy+3xj)$$

En el primer paréntesis el factor común es el 2, mientras que en el segundo, es 3x. Factorizamos cada uno de los paréntesis y obtenemos

$$2(y +\mathrm{j}) +3x(y+j)$$

Ahora, en esta expresión nos damos cuenta de que el termino (y +j) es un factor común por lo que la expresión queda factorizada como

$$(y +j)(2+3x)$$

Veamos otro ejemplo

Factorizar la expresión $x^2+xz+xy+yz$.

Nuevamente formamos dos grupos que tengan factor común.

$$(x^2+xz)+(xy+yz)$$

Ahora factorizamos cada uno de los paréntesis

$$x(x+z)+y(x+z)$$

Notamos que el término (x+z) es un factor común y factorizamos nuevamente y la expresión queda así

$$(x+z)(x+y)$$

Diferencia de cuadrados:

Consideremos la expresión (x-y)(x+y) al aplicar la propiedad distributiva, tenemos lo siguiente

$$(x\text{-}y)(x+y)=x^2+xy\text{-}xy\text{-}y^2=x^2\text{-}y^2$$

Esto quiere decir que una expresión de la forma x^2-y^2 se factoriza como (x-y)(x+y) y debe su nombre al hecho de que aparece un resta de dos expresiones elevadas al cuadrado.

Ejemplo 3:

Escribir la expresión 25z^2-36w^2 como el producto de dos expresiones lineales.

Usando las propiedades de la potenciación podemos darnos cuenta de que

$$25z^2=(5z)^2 \text{ y } \quad 36w^2=(6w)^2$$

por lo que nuestra expresión es equivalente a

$$(5z)^2-(6w)^2$$

Como se trata de una diferencia de cuadrados tenemos que

$$(5z)^2-(6w)^2=(5z+6w)(5z-6w)$$

Es decir $25z^2-36w^2=(5z+6w)(5z-6w)$ el cual es un producto de expresiones lineales, pues todas son de grado 1.

Ejemplo 4:

Factorizar la expresión x^2-2.

En este caso debemos recordar que $(\sqrt{2})^2=2$, por lo que tenemos que $x^2-(\sqrt{2})^2$, así se sigue la igualdad

$$x^2-2=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$$

Trinomio cuadrado perfecto:

Consideremos la expresión $(x+y)^2$, la cual equivale a $(x+y)(x+y)$. Si usamos la propiedad distributiva tenemos que

$$(x+y)(x+y)=x^2+xy+xy+y2=x^2+2xy+y^2$$

La última expresión es conocida como trinomio cuadrado prefecto debido a que según la igualdad que encontramos, se puede factorizar como el cuadrado de una suma de dos monomios.

$$x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$$

Ejemplo 5:

Factorizar la expresión $x^2+8x+16$

Notemos que $x^2+8x+16$ es un trinomio cuadrado perfecto, pues corresponde a la suma de dos términos elevadosal cuadrado más el doble de su producto, es decir $x^2+(2)(4)x+4^2$ por lo tanto se puede factorizar como

$$(x+4)^2$$

El término $2xy$ en un trinomio cuadrado perfecto no necesariamente es positivo, también puede ser negativo y en este caso corresponde al cuadrado de la resta entre 2 monomios.

$$x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$$

Ejemplo 6:

Factorizar la expresión $4x^2-12xz+9z^2$.

Tenemos que esta expresión es equivalente a $(2x)^2-2(2x)(3z)+(3z)^2$ por lo que

$$4x^2-12xz+9z^2=(2x-3z)^2$$

Trinomio de la forma x^2+bx+c

Consideremos la expresión $(x+3)(x+2)$ si usamos la propiedad distributiva, obtenemos que

$$(x+3)(x+2)=x^2+2x+3x+(3)(2)=x^2+5x+6$$

Esto nos indica que la expresión x^2+5x+6 se factoriza como $(x+3)(x+2)$

En general un trinomio de la forma x^2+bx+c, donde b y c son cualquier par de números reales se factoriza como el producto de dos términos $(x+\alpha)(x+\mu)$, donde $\alpha+\mu=b$ y $\alpha\mu=c$.

En algunas ocasiones es muy sencillo encontrar los valores α y μ pero en muchas otras es muy complicado y a veces, estos valores no pueden encontrarse en los números reales. Más adelante mostraremos una forma de saber se estos dos números son reales o no, y en caso de serlo, cómo determinarlos en cualquier situación.

Ejemplo 7:

Factorizar la expresión $x^2+11x+30$. Debemos encontrar dos números cuya suma sea 11 y cuyo producto sea 30. Una rápida inspección nos permite ver que estos son 6 y 5 por lo que

$$x^2+11x+30=(x+5)(x+6)$$

Ejemplo 8:

Factorizar la expresión x^2-5x-36. En este caso debemos hallar dos números que sumados den como resultado -5 y que su producto sea -36. El signo negativo en el término constante (-36), sugiere que uno de los dos números debe ser negativo. Nuevamente por inspección encontramos que los números son -9 y 4, así que

$$x^2-5x-36=(x-9)(x+4)$$

Trinomio de la forma ax^2+bx+c:

Este caso corresponde a una generalización del caso inmediatamente anterior, pues ahora el término x^2 está acompañado de un número real $a\neq0$. En este caso los valores α y μ que van dentro de los paréntesis se encuentran con la siguiente fórmula general:

$$a -=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\mu -=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Conocida como la fórmula de Bhaskara o fórmula del estudiante.

Ejemplo 9:

Factorizar la expresión $3x^2+4x+1$. En este caso tenemos que a=3,b=4 y c=1. Remplazando en las fórmulas tenemos que

$$a -=\frac{-4+\sqrt{4^2-4(3)(1)}}{2(3)}=\frac{-4+\sqrt{16-12}}{6}=\frac{-4+\sqrt{4}}{6}=\frac{-4+2}{6}=\frac{-2}{6}=\frac{1}{6}$$

$$\mu -=\frac{-4-\sqrt{4^2-4(3)(1)}}{2(3)}=\frac{-4-\sqrt{16-12}}{6}\ \frac{-4-\sqrt{4}}{6}=\frac{-4-2}{6}=\frac{-6}{6}=1$$

Por lo que $3x^2+4x+1=(x+1/3)(x+1)$

Simplificación de expresiones algebraicas:

Recordemos que introducimos las técnicas de factorización como herramientas de simplificación de expresiones que pueden resultar complicadas, veamos entonces como podemos lograr esta tarea usando dichas técnicas. junto con las propiedades de las raíces y las potencias que se mencionaron anteriormente

Ejemplo 10:

Simplificar la expresión

$$\frac{x^4+7\,x^3+12x^2}{\sqrt{x^6+6\,x^5+9x^4}}$$

Notemos que en el numerador x^2 es un factor común y en el denominador el factor común es x^4. De esto tenemos

$$\frac{x^4+7\,x^3+12x^2}{\sqrt{x^6+6\,x^5+9x^4}}=\frac{x^2(x^2+7x+12)}{\sqrt{x^4(x^2+6x+9)}}$$

Ahora notemos que el paréntesis del numerador se puede factorizar como $(x+3)(x+4)$ y el del denominador como $(x+3)^2$ así que tenemos

$$\frac{x^4+7\,x^3+12x^2}{\sqrt{x^6+6\,x^5+9x^4}}=\frac{x^2(x+3)(x+4)}{\sqrt{x^4(x+3)^2}}$$

Usando las propiedades de la raíz cuadrada tenemos que $\sqrt{x^4(x+3)^2}=x^2(x+3)$, por lo tanto

$$\frac{x^4+7\,x^3+12x^2}{\sqrt{x^6+6\,x^5+9x^4}}=\frac{x^2(x+3)(x+4)}{\sqrt{\quad x^2(x+3)}}$$

Ahora cancelamos los términos iguales en el numerador y el denominador para finalmente obtener

$$\frac{x^4+7\,x^3+12x^2}{\sqrt{x^6+6\,x^5+9x^4}}=x+4$$

Lenguaje algebraico

Con el lenguaje numérico realizamos operaciones en las que solo aparecen números. El lenguaje que utiliza letras y números unidos mediante los signos de las operaciones aritméticas, se denomina lenguaje algebraico. La principal función de lenguaje algebraico es estructurar un idioma que ayude a generalizar las diferentes operaciones que se desarrollan dentro de la aritmética. Por ejemplo: si queremos sumar dos números cualesquiera basta con la expresion a+b, donde a y b son cualquier par de números reales. También el lenguaje algebraico ayuda a plantear relaciones generales para el razonamiento de problemas a los que se puede enfrentar cualquier ser humano en la vida cotidiana.

El objetivo de estudiar el lenguaje algebraico es saber definir qué tipo de operaciones se deben utilizar al momento de afrontar el enunciado de una situación problema.

A continuación, se muestran los enunciados más comunes usados en problemas y su respectiva representación algebraica.

Un número cualquiera	x
Un número aumentado en n unidades	$x + n$
El doble de un número	$2x$
El triple de un número disminuido en k unidades	$3x - k$
El doble de un número aumentado en 5	$2x + 5$
La tercera parte de un número	$\frac{x}{3}$
La cuarta parte de un número aumentado en p	$\frac{x}{4} + p$
La quinta parte de la diferencia entre un número y 8	$\frac{x-8}{5}$
El doble de la suma entre un número y 7	$2(x+7)$
Un número multiplicado por sí mismo	x^2
La diferencia de dos números es 6	$x-y = 6$
La suma de 2 números es 15	$x+y = 15$
Un número excede en 10 unidades a otro	$x - 10= y$
Tres números consecutivos	$x, x +1, x +2$
El recíproco de un número	$\frac{1}{x}$
La razón entre dos números	x/y

Después de analizar el lenguaje algebraico, lo utilizaremos para plantear correctamente diferentes tipos de ecuaciones.

Conceptos básicos sobre ecuaciones lineales

Una ecuación es una igualdad de dos expresiones algebraicas donde existe al menos una incógnita. Resolver una ecuación es encontrar el valor o los valores de las incógnitas que satisfacen la ecuación o hacen verdadera la igualdad. En este capítulo se desarrollarán diferentes métodos para dar solución a ecuaciones de primer grado o lineales con una o dos incógnitas.

Una ecuación lineal con una incógnita es aquella en la que el exponente de la incógnita es uno y solo se tiene una variable o incógnita.

Ejemplo 11:

$$3m + 12 = 1000$$
$$4x - 5 = 25 + 2x$$

Una ecuación lineal con dos incógnitas es aquella en la que los exponentes de ambas incógnitas son uno.

Ejemplo 12:

$$10m + 12n = 0$$
$$3m - 5t = 4t + 150 - m$$

3. Una ecuación cuadrática con una incógnita es aquella cuyo mayor exponente para la incógnita es dos (2).

Ejemplo 13:

$$x^2 + 25 = 0$$
$$5y^2 + 3y = 12$$

Solución de ecuaciones lineales con una incógnita

Para resolver ecuaciones lineales con una incógnita debemos seguir los siguientes pasos:

1. Como en toda situación problema, lo primero que debe hacerse es leer, analizar e interpretar completamente todo el enunciado.
2. Se hace una transposición de términos, reuniendo a un lado de la igualdad los términos que contengan la incógnita y del otro lado todas las cantidades constantes.
3. Se reducen términos semejantes en cada lado de la igualdad.
4. Se despeja la incógnita dividiendo ambos términos de la ecuación por el coeficiente de esta.

Si sumamos o restamos la misma cantidad a ambos lados de la ecuación obtenemos otra ecuación equivalente a la inicial; lo mismo sucede si multiplicamos o dividimos la misma cantidad a ambos lados de la ecuación:

$$x + a = b \text{ es equivalente a } x = b - a$$
$$x - a = b \text{ es equivalente a } x = b + a$$
$$ax = b \text{ es equivalente a } x = b \div a$$
$$x \div a = b \text{ es equivalente a } x = b \times a$$

A manera de ejemplo, resolvamos paso a paso las siguientes ecuaciones:

Encontrar el valor de x que satisface la siguiente ecuación.

$$11x + 3 - x = 16 + 7x - 5 + x$$

Paso 1: Al analizar la expresión se nota que es una ecuación lineal con una incógnita, ya que el mayor exponente que tiene la letra x es 1.

Paso 2: transponer términos semejantes. Todos los términos que tienen incógnita se transponen a un mismo lado y los valores constantes al otro, teniendo en cuenta que al pasar cambia la operación según lo descrito en la nota de la página anterior.

$$11x - x - x - 7x = 16 - 5 - 3$$

Paso 3: efectuar operaciones entre términos semejantes.

$$2x = 8$$

Paso 4: despejar la incógnita.

$$x = 8/2$$
$$x = 4$$

Ejemplo 14:

Un tanque de almacenamiento tiene 1/5 de su capacidad ocupado con leche, al adicionarle 200 Lt quedó lleno hasta los 3/10. La capacidad del tanque es:

A. 1500 L

B. 2000 L

C. 2500 L

D. 3000 L

Ejemplo 15:

Un tanque de almacenamiento tiene 1/5 de su capacidad ocupado con leche, al adicionarle 200 Lt quedó lleno hasta los 3/10. La capacidad del tanque es:

A. 1500 L

B. 2000 L

C. 2500 L

D. 3000 L

Solución

Llamaremos c, a la capacidad total del tanque. Según el enunciado se puede inferir que al sumar la cantidad de leche que ocupa una quinta parte de la capacidad del tanque y 200 L adicionados, se debe obtener una cantidad de leche equivalente a los tres décimos del tanque:

$$\frac{1}{5}c + 200 = \frac{3}{10}c$$

Debemos transponer términos semejantes, los términos que poseen la incógnita c deben quedar en un lado de la ecuación y el 200 del otro, teniendo en cuenta que al transponer términos cambian las operaciones:

$$\frac{1}{5}c - \frac{3}{10}c = -200$$

Se resuelve la resta entre términos semejantes, mediante resta de fracciones heterogéneas y despejando la incógnita c:

$$\frac{2c - 3c}{10} = -200$$

$$\frac{-c}{10} = -200$$

$$-c = -200 \times 10$$

$$-c = -2000$$

$$c = 2000$$

Existen situaciones problema donde hay 2 incógnitas y por lo tanto 2 ecuaciones, a continuación se explica la manera de resolver este tipo de ejercicios.

SISTEMAS DE ECUACIONES

Un sistema de ecuaciones es aquel en el que intervienen dos o más ecuaciones y más de una incógnita.

Solución de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Para resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, estudiaremos tres métodos: sustitución, igualación y reducción.

Método de sustitución: para resolver un sistema de ecuaciones por el método de sustitución debemos seguir los siguientes pasos:

1. Despejar una de las dos incógnitas de cualquiera de las dos ecuaciones.
2. Sustituir la expresión hallada en la otra ecuación.
3. Resolver las operaciones indicadas para hallar el valor de la incógnita en la expresión resultante.
4. Reemplazar el valor hallado en cualquiera de las dos ecuaciones iniciales. Preferiblemente en la ecuación que ya está despejada.
5. Resolver las operaciones indicadas y hallar el valor de la incógnita faltante.

Ejemplo 1:

Hallar el valor de las incógnitas que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones.

$$2x + 5y = -24$$
$$8x - 3y = 19$$

1. Despejamos la variable x en cualquiera de las dos ecuaciones; en este caso, lo haremos en la primera.

$$x=\frac{-5y-24}{2}$$

2. Sustituimos en la segunda ecuación (tener cuidado de no reemplazar en la misma ecuación).

$$8\left(\frac{-5y-24}{2}\right)-3y = 19$$

Podemos transponer el término 3y a sumar al otro lado de la ecuación; después, pasar el 2 que divide a multiplicar, aplicar propiedad ditributiva y agrupar términos semejantes.

$$8\left(\frac{-5y-24}{2}\right)=19+3y$$
$$8(-5y - 24) = 2(19 + 3y)$$
$$-40y - 192 = 38 + 6y$$
$$-40y - 6y = 38 + 192$$
$$-46y = 230$$
$$y = -(230/46)$$
$$y =-5$$

3. Hallamos el valor de y en la anterior expresión, obteniendo que y = -5
4. Sustituimos el valor de y en la expresión encontrada en el numeral 1 y se encuentra el valor de x.

$$x=\frac{-5(-5)-24}{2}=\frac{1}{2}$$

Método de igualación: para resolver un sistema de ecuaciones mediante el método de igualación, debemos seguir los siguientes pasos:

1. Despejar en ambas ecuaciones la misma incógnita.
2. Igualar las dos expresiones encontradas.
3. Resolver la expresión resultante para hallar el valor de la incógnita involucrada.
4. Sustituir el valor de la incógnita encontrada en cualquiera de las ecuaciones iniciales.
5. Resolver la ecuación lineal resultante para hallar el valor de la incógnita faltante.

Ejemplo

Hallar el valor de las incógnitas que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones.

$$7x+4y=13$$
$$5x+2y=19$$

1. Despejamos la variable x en ambas ecuaciones.

$$x=\frac{13-4y}{7} \quad \text{ecuación número 1}$$

$$x=\frac{19+2y}{5} \quad \text{ecuación número 2}$$

2. Igualamos las expresiones resultantes en el numeral anterior.

$$\frac{13-4y}{7}=\frac{19+2y}{5}$$

3. Despejamos la variable y en este caso:

$$65-20y=133+14y$$
$$y=-2$$

4. Sustituimos el valor hallado en cualquiera de las expresiones obtenidas en el numeral 1.

$$x=\frac{13-4(-2)}{7}=\frac{13+8}{7}=\frac{21}{7}=3$$

Por tanto, lo valores de las incógnitas son: x= 3, y =- 2

Se propone al lector resolver el ejemplo de sustitución por igualación, el de igualación por sustitución y verificar que las soluciones sean correctas.

Método de reducción o eliminación: para resolver un sistema de ecuaciones mediante el método de reducción, primero debemos comparar los coeficientes, donde la idea es que los coeficientes de alguna de las dos incógnitas sean iguales para restar ambas ecuaciones y lograr obtener una ecuación lineal con solo una incógnita. Para lograr esto se deben seguir los pasos que se enuncian a continuación:

1. Escoger cuál de las dos incógnitas se quiere cancelar.
2. El coeficiente de la incógnita de una ecuación multiplica todos los términos de la otra ecuación y viceversa. Esto con el objetivo de que la incógnita por cancelar quede con el mismo coeficiente en ambas ecuaciones.
3. Luego restamos ambas ecuaciones (términos semejantes entre sí) para eliminar la incógnita seleccionada.
4. La ecuación resultante es lineal, y procedemos a calcular el valor de la incógnita en esta.
5. Sustituimos el valor de la incógnita encontrada en cualquiera de las ecuaciones iniciales y calculamos el valor de la otra incógnita.

Nota: si en el sistema de ecuaciones, en alguna de las dos incógnitas hay un coeficiente igual, se deben seguir los pasos a partir del numeral tercero.

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$5x + 6y = 20 \quad (1)$$
$$4x - 3y = -23$$

1. Escogemos la variable x para eliminarla.
2. En la ecuación 1, el coeficiente de x es 5 y este multiplicará a la ecuación 2.

   En la ecuación 2, el coeficiente de x es 4, que multiplicará a toda la ecuación 1.

En la ecuación 1. multiplicamos por 4.

$$4(5 + 6y) = 4 \times 20$$
$$20x + 24y = 80$$

En la ecuación 2. multiplicamos por 5.

$$5(4x - 3y) = 5 \times (-23)$$
$$20x - 15y = -115$$

Se logra el objetivo de dejar igual el coeficiente de la incógnita en ambas ecuaciones.

3. De la ecuación 1 restamos la ecuación 2, manteniendo presente el cambio de los signos.

$$20x - 20x = 0$$
$$24y - (-15y) = 39y$$
$$80 - (-115) = 195$$
$$20x + 24y = 80$$
$$20x - 15y = -115$$
$$0x + 39y = 195$$
$$y = \frac{195}{39}$$
$$y = 5$$

5.Sustituimos el valor de la variable obtenida, en este caso y, en la ecuación 2:

$$4x - 3 \times 5 = -23$$
$$4x = -23 + 15$$
$$4x = -8$$
$$x = -2$$

Así, los valores de las incógnitas son: $x = -2$, $y = 5$

Se propone al lector verificar que estos resultados sean los correctos.

Nota: es importante recordar que una ecuación es una igualdad entre dos términos, de manera que al plantear una de ellas a partir de una situación problema lo que se busca es utilizar operaciones matemáticas que permitan igualar ambas partes de la ecuación.

Se deja como consulta al estudiante qué interpretación gráfica se le puede dar a un sistema de ecuaciones lineales y qué significa la solución.

Aplicación de Ecuaciones

Después de conocer la forma de solucionar ecuaciones, nos enfrentamos a problemas algebraicos que requieren el uso de estas. Las ecuaciones necesarias para la solución de un problema se encuentran implícitas en el enunciado del mismo. Para su planteamiento y posterior solución se recomienda seguir los pasos propuestos a continuación:

1. Realizar una lectura profunda y reflexiva del enunciado para identificar la situación a la que nos enfrentamos.
2. Identificar y nombrar la o las variables que intervienen en el problema. Generalmente se utilizan las letras x, y, z, w.
3. Plantear las ecuaciones correspondientes a lo propuesto en el enunciado del problema.
4. Solucionar la ecuación o el sistema de ecuaciones resultante.
5. Verificar y analizar los valores encontrados.

Solución recursiva

En todo problema de ecuaciones donde el tipo de pregunta sea de selección múltiple, o sea, donde se presenten opciones para escoger la respuesta correcta, se puede aprovechar dichas opciones para resolver el problema sin necesidad de procedimientos algebraicos, lo que puede representar un gran ahorro de tiempo. Lo que se hace, es tomar opción por opción y reemplazar dicho dato en el planteamiento del problema. El dato que haga cumplir toda la información del enunciado corresponde a la respuesta correcta.

Se tienen entonces dos procedimientos para abordar los problemas con ecuaciones. La idea es ver con cuál de ellas se adquiere mayor habilidad para utilizarla en la solución de problemas.

A continuación se proponen algunas situaciones problema para ser resueltas y luego verificar la solución, ya sea mediante la teoría de ecuaciones o la solución recursiva.

Ejemplo 1:

Cierto niño va a una juguetería y después de revisar el precio de cada canica se da cuenta de lo siguiente: si quiere comprar 8 de ellas, le harían falta 40 pesos, pero si compra 3 le sobran 50 pesos.

1. La ecuación con la que podemos representar correctamente la situación planteada es:

   A. $8x + 3x = 40 + 50$
   B. $8x - 40 = 3x + 50$
   C. $8x + 40 = 3x - 50$
   D. $8x - 3x = 50 - 40$

2. El precio de cada canica en pesos es:

   A. 20
   B. 18
   C. 15
   D. 22

Solución algebraica:

Al leer cuidadosamente el problema, se deduce que es una ecuación lineal con una sola incógnita —que es el precio de cada canica—, la cual denominaremos con la letra x.

En una parte de la ecuación se nos habla de comprar 8 canicas y en la otra de comprar 3. La idea es utilizar los otros datos para igualar la cantidad de dinero en ambos lados de la ecuación.

Como 8x es mayor que 3x, a 8x se le debenr estar 40 pesos y a 3x se le deben sumar 50 pesos, para así igualar ambas expresiones. En otras palabras, a la parte mayor se le debe restar y a la menor sumar para equilibrar los dos valores.

Según lo anterior, la ecuación correcta que me permite solucionar el problema es:

$8x - 40 = 3x + 50$, opción **B**.

Teniendo la ecuación, simplemente resta seguir el procedimiento matemático para encontrar el valor de x.

$$8x - 3x = 50 + 40$$
$$5x = 90$$
$$x = 90/5$$
$$x = 18$$

El costo de cada canica es de 18 pesos, opción **B**.

Solución recursiva:

Del enunciado sabemos que al multiplicar el precio de cada canica por 8 y restarle 40, debe ser igual al resultado de multiplicarlo por 3 y sumarle 50.

Comprobar con opción A

En esta opción, el precio de cada canica es de 20 pesos, por lo tanto lo reemplazamos en la ecuación y verificamos si al final se cumple o no la igualdad:

$$8(20) - 40 = 3(20) + 50$$
$$160 - 40 = 60 + 50$$
$$120 = 110$$

Como la igualdad no se cumple, podemos descartar esta opción como respuesta correcta.

Comprobar con opción B

En esta opción, el precio de cada canica es de 18 pesos, por lo tanto lo reemplazamos en la ecuación y verificamos si al final se cumple o no la igualdad:

$$8(18) - 40 = 3(18) + 50$$
$$144 - 40 = 54 + 50$$
$$104 = 104$$

Como con este valor se cumple la igualdad, podemos asegurar que esta es la respuesta correcta. Además, es la única opción o el único valor en que al final se obtiene una igualdad.

Ejemplo 2[8]

Un colegio ha recibido dos propuestas de dos empresas A y B para el transporte de los alumnos del grado 11 a un sitio recreativo. Las propuestas se describen así:

La empresa A cobra un costo fijo de $148.000 y $15.000 por cada alumno trasportado.
La empresa B cobra un costo fijo de $400.000 y 11.000 por cada alumno transportado.

El número de alumnos que se requiere transportar para que el costo de las propuestas de ambas empresas sea igual es:

A. 60 B. 62 C. 63 D. 66

Necesitamos entonces que ambas expresiones sean iguales, luego:

$$148000 + 15000x = 400000 + 11000x$$

Se procede a resolver la ecuación:

$$15000x - 11000x = 400000 - 148000$$
$$4000x = 252000$$
$$x = 252000/4000$$
$$x = 63$$

Solución recursiva:

Al comprobar las opciones, la única que cumple que los dos valores son iguales es la opción C, o sea 63 alumnos.

Costo de A: 148.000 + 15.000(63) = 148.000 + 945.000 = $1.093.000
Costo de B: 4000.00 + 11.000(63) = 400.000 + 693.000 = $1.093000

Ejemplo 3:

La suma de tres números es 44. El primero es el triple del segundo y 12 más que el tercero. Los números son:

A. 21, 7 y 9

B. 24, 8 y 12

C. 21, 7 y 16

D. 15, 5 y 19

Cuando en las opciones se da el valor de todas las incógnitas es mucho más sencillo abordar el ejercicio por la solución recursiva.

---

[8] *Tomado de una prueba de admisión de la Universidad de Antioquia.*

Solución recursiva:

Lo primero es verificar en cuáles de las opciones la suma de los tres valores es 44. Como A y D no suman 44 son descartadas. Entre la B y C se debe verificar cuál cumple con el resto de la información del enunciado.

El primero debe ser el triple del segundo: tanto en la B como la C se cumple porque 24 es el triple de 8 y 21 es el triple de 7.

El primero debe ser 12 unidades mayor que el tercero; solo la B cumple ya que 24 es 12 unidades mayor que 12, y la C se descarta porque 21 es 5 unidades mayor que 16.

Vemos que los números son 24, 8 y 12 porque son los únicos que cumplen con todo el enunciado.

A continuación se muestra la solución a partir de la teoría de ecuaciones.

Solución algebraica:

Las incógnitas las representaremos de la siguiente forma:

x: primer número.
y: segundo número.
z: tercer número.
Como hay tres incógnitas, debemos obtener tres ecuaciones.
Según el enunciado las ecuaciones serían:

1. La suma de tres números es 44: $x + y + z = 44$
2. El primero es el triple del segundo: $x = 3y$
3. El primero es 12 unidades mayor que el tercero: $x = z + 12$

En la ecuación del numeral 2, se debe expresar y en términos de x y sustituirla en la ecuación del numeral 1. En la ecuación del numeral 2, se debe expresar z en términos de x y sustituirla también en la del numeral 1.

Del numeral 2: $x = 3y$ es equivalente a $y = x/3$
Del numeral 3: $x = z + 12$ es equivalente a $z = x - 12$

Procedemos a sustituir ambas equivalencias en la ecuación del numeral 1.

$$x + y + z = 44$$
$$x + x/3 + x - 12 = 44$$
$$x + x/3 + x = 44 + 12$$
$$7x/3 = 56$$

El 3 pasará a multiplicar y el 7 a dividir.

$$x = (56 \times 3)/7$$
$$x = 24$$

Sabiendo que x = 24, podemos encontrar los otros valores.
Como x es el triple de y, entonces y debe ser 8.
Como x es 12 unidades mayor que z, z debe ser 12.

Ejemplo 4[9]

Un moderno buque de turismo tiene camarotes dobles (de 2 camas) y simples (de 1 cama). Si se ofertan 65 camarotes que en total tienen 105 camas, el número de camarotes dobles y simples, respectivamente, es:

A. 48 y 17

B. 50 y 15

C. 45 y 15

D. 40 y 25

Solución recursiva:

Lo primero es verificar en todas las opciones que la suma de los tipos de camarotes sea 65. La opción C es descartada puesto que la suma es 60 camarotes.

De las tres opciones que nos quedan, hay que verificar en cuál de ellas se cumple que con el número de camarotes dobles y simples haya un total de 105 camas.

Para saber el número total de camas, se debe multiplicar el número de camarotes dobles por 2, el número de camarotes simples por 1 y sumarlos.

Comprobar opción A

Esta opción nos plantea que son 48 dobles y 17 simples.

$$(48\times2) + (17\times1) = 96 + 17 = 113 \text{ camas}$$

El número de camas es 113, por lo tanto se descarta. Como el número de camas superó los 105 podemos concluir que el total de camarotes dobles debe ser menor que 48 y solo nos queda una opción que cumple con esto, verifiquemos con ella.

Comprobar opción D

Esta opción nos plantea que son 40 dobles y 25 simples.

$$(40\times2) + (25\times1) = 80 + 25 = 105 \text{ camas}$$

La opción D es la respuesta correcta porque cumple que son 65 camarotes y 105 camas.

A continuación se muestra la solución usando la teoría de ecuaciones.

Solución algebraica:

Las incógnitas las nombraremos de la siguiente manera:

Camarotes dobles: D
Camarotes simples: S

Como se tienen dos incógnitas, se deben obtener dos ecuaciones del enunciado.

1. La suma de los camarotes dobles y simples es 65.

$$D + S = 65$$

2. El total de camas es 105; se debe multiplicar las dobles por 2, las simples por 1 y sumar.

$$2D + S = 105$$

Teniendo las dos ecuaciones, se elije cuál de los tres métodos se quiere utilizar para resolver el sistema de ecuaciones.

Se solucionará por el método de reducción.

Como en ambas ecuaciones la incógnita S tiene el mismo coeficiente, solo se deben restar ambas ecuaciones para cancelarla. Cuando se cumple la particularidad anterior, es ideal usar el método de reducción o eliminación de variables porque el procedimiento es muy corto y sencillo de resolver.

$$\begin{array}{c} 2D + S = 105 \\ \underline{-\ (D + S = 65)} \\ D + 0 = 40 \\ D = 40 \end{array}$$

Sabiendo que las dobles son 40, reemplazamos ese valor en la ecuación del numeral 1.

$D + S = 65$
$40 + S = 65$
$S = 65 – 40$
$S = 25$

Comprobamos mediante álgebra que la respuesta es la opción **D**

Ejemplo 5:

5 lápices y 8 cuadernos cuestan 115 pesos, mientras que 3 lápices y 5 cuadernos cuestan 70 pesos. El precio en pesos de cada lápiz y cada cuaderno respectivamente es:

A. 15 y 5
B. 10 y 10
C. 10 y 20
D. 5 y 25

Solución algebraica:

Las incógnitas serán nombradas de la siguiente manera:

- Precio de un cuaderno: C
- Precio de un lápiz: L

Como hay dos incógnitas, debemos obtener dos ecuaciones.

La cantidad de lápices multiplicada por el precio de cada lápiz es igual al valor de todos los lápices, y la cantidad de cuadernos multiplicada por el precio de cada cuaderno es igual al valor de todos los cuadernos. Por tanto:

$$1)\quad 5L + 8C = 115$$
$$2)\quad 3L + 5C = 70$$

Utilizando el método de reducción.

Se quiere cancelar la incógnita de los lápices; por lo tanto debemos buscar en ambas ecuaciones que la incógnita L tenga el mismo coeficiente. Para esto debemos multiplicar todos los términos de la ecuación uno por el coeficiente que tiene L en la ecuación 2, o sea por 3, y todos los términos de la ecuación 2 por el coeficiente que tiene L en la ecuación 1, o sea por 5.

$$1)\quad 3\,(5L + 8C = 115)$$
$$2)\quad 5\,(3L + 5C = 70)$$

Al realizar las multiplicaciones aplicando la propiedad distributiva, nos queda el coeficiente de L igual en ambas ecuaciones y procedemos a restar.

$$\begin{array}{c} 1)\; 15L + 24C = 345 \\ \underline{2)\; 15L + 25C = 350} \\ 0 - C = -5 \\ C = 5 \end{array}$$

Sabiendo que el costo de cada cuaderno es $5, reemplazamos en la ecuación 2 para obtener el costo de cada lápiz.

$$3L + 5C = 70$$
$$3L + 5(5) = 70$$
$$3L + 25 = 70$$
$$3L = 70 - 25$$
$$L = 45/3$$
$$L = 15$$

De lo anterior, podemos decir que cada cuaderno vale $5 y cada lápiz $15, o sea la opción **A**.

Solución recursiva:

Se debe verificar en cuál de las opciones se cumple que al multiplicar el número de lápices por su precio y el de los cuadernos por su precio dé como resultado $115 y $70, como lo dice el enunciado.

Comprobar la opción A:

En esta opción, cada lápiz cuesta $15 y cada cuaderno $5.

En la ecuación 1

$$5L + 8C = 115$$
$$5(15) + 8(5) = 115$$
$$75 + 40 = 115$$
$$115 = 115$$

Vemos que en la ecuación 1 se cumple la información del enunciado.

En la ecuación 2

$$3L + 5C = 70$$
$$3(15) + 5(5) = 70$$
$$45 + 25 = 70$$
$$70 = 70$$

Vemos que en la ecuación 2 se cumple la información del enunciado, por lo tanto podemos asegurar que la opción A es la respuesta correcta.

Ecuación Cuadrática

Una ecuación cuadrática o de segundo grado, es una expresión de la forma $ax^2+bx+c=0$ donde a,b y c son números reales (o complejos) con la condición de que a es distinto de cero.

Ejemplos:

$$3x^2-2x+1=0$$
$$x^2+x=0$$
$$x^2-1=0$$

Las anteriores son ecuaciones cuadráticas.

Solución de una ecuación cuadrática:

Las ecuaciones cuadráticas, por ser de grado 2, pueden tener hasta dos soluciones en el conjunto de los números reales, las cuales dependen de los valores de las constantes a,b y c.

La ecuación $x^2-1=0$ se puede resolver fácilmente despejando la x y tomando raíces cuadradas a ambos lados

$$x^2-1=0$$
$$x^2=1$$
$$x=\pm1$$

Los números 1 y -1 son las soluciones de la ecuación.

Las soluciones se pueden encontrar de dos formas, la primera es factorizando el polinomio ax^2+bx+c y encontrando los valores de x que lo anulen, es decir que lo hagan valer cero.

Ejemplo 6:

Hallar los valores de x que satisfacen la ecuación $x^2+5x+6=0$

El polinomio x^2+5x+6 se factoriza como $(x+3)(x+2)$, por lo tanto la ecuación del enunciado es equivalente a

$$(x+3)(x+2)=0$$

Esta expresión se hace igual a cero cuando alguno de los paréntesis se anula, es decir, cuando $x=-2$ o $x=-3$. Lo cual quiere decir que las soluciones de la ecuación son -2 y -3.

A veces no es sencillo factorizar el polinomio ax^2+bx+c por lo que se usa la otra forma que es más directa y consiste en utilizar la fórmula de Bhaskara.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b-4ac}}{2a}$$

Ejemplo 7:

Resolver la ecuación $x^2+12x+23/4=0$. En este caso se ve que $a=1$,$b=12$ y $c=23/4$. Remplazamos estos valores en la fórmula.

$$x=\frac{-12 \pm \sqrt{12^2-4(1)(23/4)}}{2(1)}$$

$$x=\frac{-12 \pm \sqrt{144-23}}{2}$$

$$x=\frac{-12 \pm \sqrt{121}}{2}$$

$$x=\frac{-12 \pm 11}{2}$$

Esto quiere decir que las soluciones son $x=-1/2$ y $x=-23/2$. A veces no es necesario encontrar las soluciones de una ecuación cuadrática, tan solo basta con conocer cuántas hay.

El discriminante y la naturaleza de las raíces:

Es posible que una ecuación cuadrática tenga dos soluciones (distintas) dentro del conjunto de los números reales, una sola solución (real) o ninguna solución real (en este caso las soluciones serían números complejos) Consideremos las siguientes ecuaciones cuadráticas:

$$x^2+2x+1=0$$
$$x^2-7x+12=0$$
$$x^2+x+1=0$$

Es claro que la primera solo tiene una solución, pues es equivalente a $(x+1)2=0$ cuya única solución es $x=1$. La segunda ecuación es equivalente a $(x-3)(x-4)=0$ cuyas soluciones son $x=3$ y $x=4$. Pero al examinar la tercera ecuación mediante la fórmula general, aparece un término negativo dentro de la raíz cuadrada el cual nos indica que dicha ecuación no posee solución dentro de los números reales.

Lo anterior nos permite establecer que la naturaleza de las raíces de una ecuación cuadrática está íntimamente ligada al término $D=b^2-4ac$ el cual llamaremos discriminante.

Tenemos entonces que para cualquier ecuación cuadrática se cumple lo siguiente:

- Si $D=0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales iguales, es decir, una única solución real.
- Si $D>0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales distintas
- Si $D<0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones complejas, es decir, no tiene solución en el conjunto de los

Números Reales

Ejemplo 8:

Para la ecuación $x^2+2x+1=0$ tenemos que $D=2^2-4(1)(1)=0$ por lo tanto tiene única solución real.
Para la ecuación $x^2-7x+12=0$ tenemos que $D=(-7)^2-4(1)(12)=49-48=1$ por lo tanto tiene dos soluciones reales.
Para la ecuación $x^2+x+1=0$ tenemos que $D=1^2-4(1)(1)=-3$ por lo que las soluciones son complejas.

Notemos que todo concuerda con lo que se dijo arriba.

Ejemplo 9:

Determinar el valor que debe tomar k para que la ecuación $4x^2-5x+k$ tenga una única solución.
La condición que se debe cumplir para que una ecuación cuadrática tenga única solución, es que su discriminante sea igual a 0, es decir que se cumpla la ecuación .

$$(-5)^2-4(4)k=0$$

Para hallar el valor de k que buscamos, despejamos la anterior ecuación y obtenemos k=25/16

INECUACIONES

El trabajo con inecuaciones (desigualdades), se asemeja al que se realiza en ecuaciones, aunque existe una gran diferencia entre sus resultados, pues mientras en una ecuación la solución corresponde a un número finito de valores que satisfacen la igualdad, en una inecuación buscamos un conjunto (casi siempre infinito) de números reales que satisfacen la desigualdad.

Inecuaciones lineales

La forma de resolver una inecuación lineal es más o menos la misma que se usa al resolver una ecuación lineal, pues se trata de despejar una incógnita pasando los términos de un lado al otro.

Por ejemplo para resolver la desigualdad $x+3>1$ pasamos el 3 a la derecha con signo negativo y obtenemos que $x>1-3$, es decir, $x>-2$ y por tanto la solución de esta desigualdad corresponde al intervalo $(-2,\infty)$, pues cualquier número que pertenezca a este conjunto, satisface la desigualdad.

Se debe tener cuidado cuando se cambian de lado términos que están multiplicando o dividiendo a la incógnita, pues cuando estos son negativos se cambia el sentido de la desigualdad. Veamos el siguiente ejemplo:

Determinar el conjunto de valores que satisfacen la ecuación $1-x < 5+x$.

Al pasar el termino x a la izquierda y el 1 a la derecha tenemos la desigualdad.

$$-2x<4$$

Ahora, si pasamos el termino -2 a dividir y escribimos $x<4/-2$. Obtenemos que $x<-2$ lo cual sugiere que $x=-3$ satisface la inecuación, pero esto no es cierto ya que la desigualdad $-2(-3)<4$

No es cierta porque 6 no es menor que 4.

Inecuaciones cuadráticas

Para resolver inecuaciones en las que aparecen términos cuadráticos o de grado superior usaremos un método conocido como el método de las cruces o el método del cementerio, el cual consiste en factorizar las expresiones que aparezcan y resolver la desigualdad para cada uno de sus factores.

Ejemplo 10 :

Determinar los valores de x que satisfacen la desigualdad $4x^2+2x-5<3x^2-8x-21$

Paso 1

Despejamos la desigualdad de modo que un lado quede igual a 0

$$4x^2+2x-5-3x^2+8x+21<0$$

Paso 2

Operamos todos los términos semejantes y obtenemos

$$x^2+10x+16<0$$

Paso 3

Factorizamos $x^2+10x+16$ buscando dos números cuyo producto sea 16 y cuya suma sea 10. Por inspección encontramos que dichos números son 8 y 2 por lo que

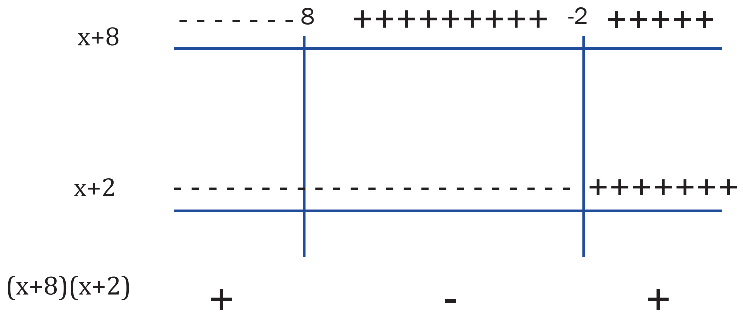
$$(x+8)(x+2)<0$$

Paso 4

Ahora analizamos por separado los términos $x+8$ y $x+2$. Tenemos entonces que

$x+8=0$ cuando $x=-8$
$x+8$ es positivo cuando $x>-8$, es decir que
$x+8$ es negativo cuando $x<-8$
$x+2=0$ cuando $x=-2$
$x+2$ es positivo cuando $x>-2$
$x+2$es negativo cuando $x<-2$

Registramos toda esta información en el siguiente esquema:



El cual muestra los lugares de la recta numérica en que $x+8$ y $x+2$ toman valores positivos o negativos y de acuerdo a la ley de los signos, el signo que toma el producto $(x+8)(x+2)$.

De acuerdo a esto tenemos que el producto $(x+8)(x+2)$ es negativo en el intervalo (-8,2), es decir que la desigualdad $4x^2+2x-5<3x^2-8x-21$ se cumple para cualquier $x\in$ (-8,2),

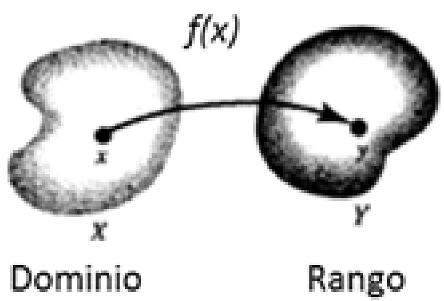
FUNCIONES

Con frecuencia, existen situaciones en las que el valor de una variable depende de otro. Por ejemplo, el tiempo que se necesita para recorrer una distancia depende de la velocidad; el salario de un trabajador depende de las horas que trabaje; el volumen que ocupe la masa de un objeto depende de la densidad del material; el precio de venta de un producto depende de la ganancia que se quiera obtener; la distancia que alcanza un objeto que es lanzado depende de la velocidad inicial; la resistencia de un cable eléctrico depende de su diámetro, entre muchas otras situaciones. La relación entre este tipo de variables se puede expresar matemáticamente mediante una función.

Una función se puede definir como una correspondencia entre dos conjuntos en los cuales se encuentran los valores que toman las variables que estan relacionadas mediante dicha correspondencia. Para representarla, se utiliza una expresión matemática en la que se realizan operaciones a partir de la variable independiente para obtener un resultado el cual se denomina variable dependiente. Por ejemplo al hblar del sueldo de un trabajador, la variable independiente corresponde a las horas trabajadas y la variable dependiente corresponde al sueldo.

El conjunto deonde se encuentran los valores que toma la variable independiente se llama dominio y el conjunto formado por todos los valores de la variable dependiente se denomina rango de la función.

Lo anterior se puede representar con la siguiente gráfica:



En términos matemáticos, una función es el conjunto de parejas ordenadas (x, y) tales que el valor de x pertenece al dominio de la función y y pertenece al rango. En una función se debe cumplir que cada valor "y" del rango es único para cada valor específico "x" del dominio.

Generalmente, para denotar una función se usan letras minúsculas (f,g,h, etc). Se debe estar siempre pendiente de que se conoce el dominio de una función pues este representa al conjunto en el cual estan definidas las operaciones que definen a la función.

Ejemplo 1:

La distancia que recorre un cuerpo que se mueve con velocidad constante depende del tiempo y está dada por la expresión d(t)=vt. En la que v representa la velocidad del movil.

El dominio de esta función corresponde a los valores que toma la variable independiente (t), es decir a valores que puedan representar fisicamente al tiempo. En este caso, los valores que toma la variable independiente deben ser mayores o iguales a cero, pues no existen tiempos negativos.

Por otro lado, el rango corresponde a todos los numeros que resulten de multilpicar el tiempo por la velocidad. si consideramos la velocidad del objeto como positiva, entonces el rango corresponde también al conjunto de los reales mayores o iguales que cero.

Ejemplo 2:

Se define la función $f(x)=\frac{1}{x}$, ¿cuáles son su dominio y su rango?

Para determinar el dominio de una función debemos preguntarnos para qué valores de x no se puede realizar la operación que define a la función, es decir $\frac{1}{x}$.

Es claro que el único valor para el cual no está definidad la función es $x=0$, pues la división entre cero no es posible, por tanto el dominio de f es el conjunto de los reales excepto el cero.

Para encontrar el rango nos preguntamos qué valores arroja como resultado la operación $\frac{1}{x}$. Como en el cao anterior, el único valor que no podemos obtener es el cero pues para ningún valor de x se tiene $\frac{1}{x}=0$. Así el rango es el conjunto de los números reales excepto el cero.

A veces hallar el rango es una tarea bastante difícil por lo que se debe recurir a metodos cada vez menos triviales e incluso hay casos en los que es imposible determinar el rango de manera algebraica.

Ejemplo 3:

Determinar el dominio de la función $f(x)=\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$

Debemos preguntarnos para que valores no está definida la función, como aparece una raíz cuadrada, la cual no está definida para números negativos y como la raíz está en el denominador, también debemos evitar que el cero aparezca en el denominador.

Para determinar el dominio debemos resolver la desigualdad $9-x^2\geq 0$. Usando el método de las cruces que presentamos en el capítulo inmediatamente anterior descubrimos que la solución a la desigualdad es el conjunto $(-3,3)$, por lo tanto este es el dominio de la función.

Gráfica de una función

La gráfica de una función es el conjunto de todos los puntos (x,y) del plano cartesiano de tal manera que (x,y) es un par ordenado perteneciente a la función, es decir, los pares que son de la forma $(x, f(x))$. De tal manera que la gráfica de $f(x)$ es la misma gráfica de la ecuación $y=f(x)$.

Para trazar la gráfica de una función se puede utilizar una tabla de valores, teniendo en cuenta que existe un solo valor de la variable dependiente para cada valor de la variable independiente del dominio de la función. Geométricamente, si se traza una recta vertical en cualquier parte del plano, se intersecta con la gráfica como máximo en un punto.

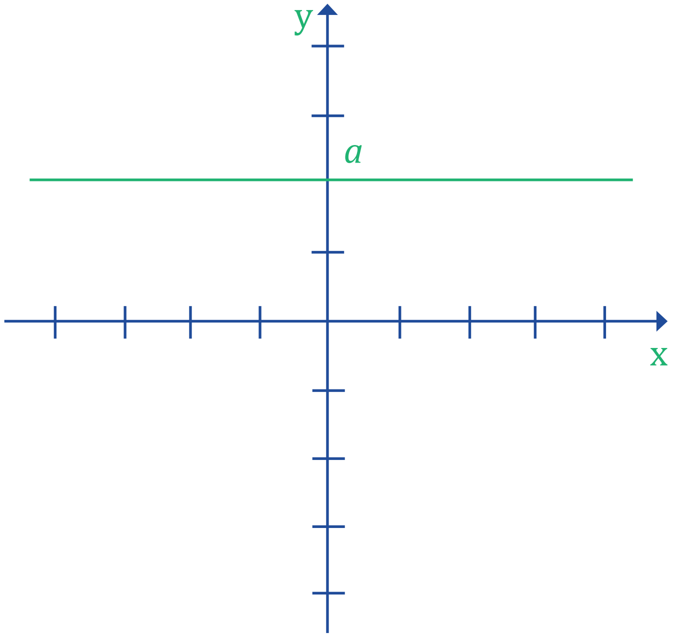
Funciones Algebraicas y Trascendentes en los Reales

Una función algebraica es aquella formada por un número finito de operaciones algebraicas expresada como cualquier tipo de polinomio. Estas operaciones algebraicas pueden incluir adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Función Constante

La función constante corresponde a la ecuación de una recta paralela al eje x, donde se cumple que para todo x perteneciente al dominio, f(x)=a. El dominio de la función es el conjunto de todos los reales y el rango es el valor de la constante.

La gráfica de la función se representa de la siguiente manera:



Función lineal

Corresponde a la ecuación de una línea recta, donde se establece una relación de proporcionalidad entre ambas variables. Se expresa como $f(x)=mx+b$, donde $m\neq0$ representa la pendiente de la recta, es deir, su inclinación y b el intercepto con el eje y. Toda función lineal tiene como dominio y rango el conjunto de los números reales, además son funciones biyectivas. Gráficamente se observa que si la pendiente es positiva la recta es creciente y si la pendiente es negativa la recta es decreciente.

La pendiente se interpreta como la razón entre la diferencia de las coordenadas del eje y con respecto a las coordenadas en el eje x para 2 puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) que pertenezacan a la gráfica

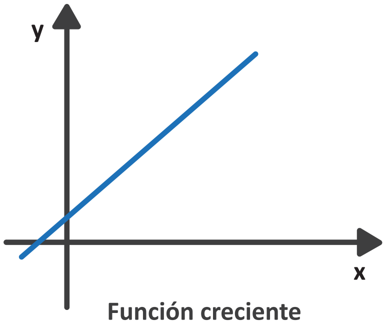
$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Es decir, el valor de la pendiente indica cuantas unidades aumenta o disminuye el valor de la función por cada unidad de x. Además la pendiente nos indica la dirección en que crece o decrece la recta de acuerdo con su signo.

Y = mx + b

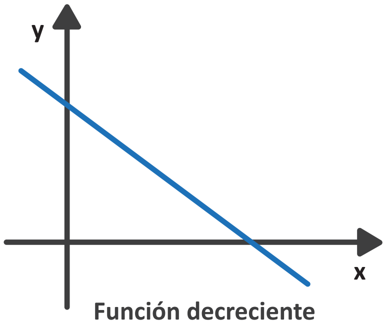
⇩

Para m>0



Función creciente

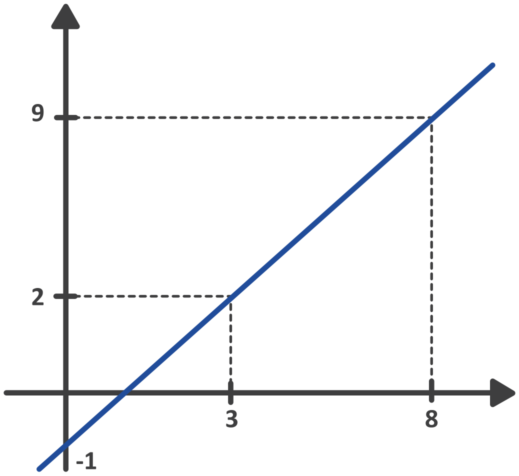
Para m<0



Función decreciente

Ejemplo 4:

Deducir la ecuación de la recta mostrada en la siguiente gráfica:



Solución:

En la gráfica se muestran dos puntos que pasan sobre la recta: (3,2) y (8,9), y al reemplazarlos en la fórmula se obtiene la pendiente; además se muestra también el intercepto, que es -1. Con estos datos tenemos todas las herramientas necesarias para deducir la ecuación de la recta.

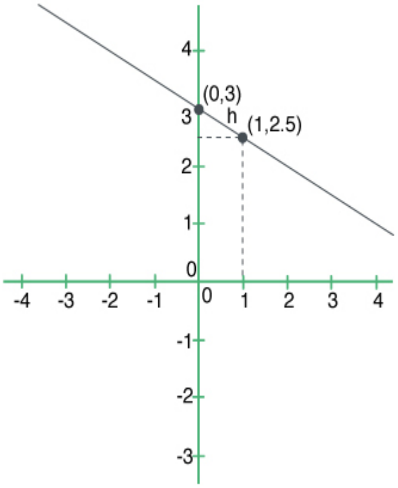
$$m = \frac{9-2}{8-3} \quad m = \frac{7}{5} \quad b = -1$$

Como la estructura de la ecuación es y = mx + b, reemplazamos el valor de la pendiente y el intercepto en ella $y = \frac{7}{5}x - 1$. Podemos notar que al ser una recta creciente, la pendiente debe ser positiva.

Ejemplo 5:

Graficar $f(x)= -\frac{1}{2}x+3$

Observe que, $m=-1/2$ y $b=3$; por lo tanto, se sabe que la recta corta el eje y en y=3 y disminuye -1/2 unidades por cada unidad que aumenta x.



De acuerdo con lo anterior, se sabe que los puntos (0,3) y (1,2.5) pertenecen a la recta . Con dos puntos es suficiente para trazar la gráfica de la función.

Función cuadrática

se denomina función cuadrática a toda expresión de la forma $f(x)=ax^2+bx+c$, donde $a\neq0$,b y c son números reales. Esta función siempre va a tener una parábola como gráfica cuyas características dependen de los valores de a,b y c.

El signo de a indica la concavidad de la parábola. Si a>0 la parábola es cóncava hacia arriba y si a<0 la parábola es cóncava hacia abajo. El valor de b modifica el vértice El valor de c indica el intercepto con el eje y.

Para graficar la función cuadrática y obtener la parábola que se encuentra relacionada con ella, se utiliza el vértice de la parábola y sus interceptos con los ejes.

Interceptos: son los valores donde la parábola corta al eje x y al eje y. Los interceptos con el eje x se conocen como las raíces de la función y se obtienen al reemplazar =0 y despejar x por métodos de factorización. A partir del determinante (b^2-4ac) de una ecuación cuadrática se puede determinar lo siguiente:

Si $b^2-4ac>0$, la función tiene dos interceptos con el eje x.

Si $b^2-4ac=0$, la función tiene un intercepto con el eje x, y la expresión algebraica que determina la función es un trinomio cuadrado perfecto.

$b^2-4ac<0$, la función no tiene interceptos con el eje x.

Nota: Dado que la función cuadrática se representa con una expresión de la forma ax^2+bx+c, se puede utilizar la ecuación general para hallar los valores de x para los cuales la función es igual a cero.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b-4ac}}{2a}$$

Vértice: es el punto donde la parábola cambia su crecimiento. Si la parábola es cóncava hacia arriba, el vértice es el valor mínimo de la función, y si es cóncava hacia abajo corresponde al valor máximo. Las coordenadas (x,y) del vértice se calculan con la fórmula

$$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

Ejemplo 6:

Graficar la función $f(x)=-2x^2+x+1$.
Observe que, la parábola es cóncava hacia abajo porque $-2x^2<0$
El intercepto con el eje y, es $y=1$, es decir (0,1)
Los interceptos con el eje x se encuentran al igualar la función a 0.

$$-2x^2+x+1=0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(-2)(1)}}{2(-2)}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{-4}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{-4}=\frac{-1\pm 3}{-4}$$

$$x_1=\frac{-1\pm 3}{-4}=\frac{2}{-4}-\frac{1}{2}$$

$$x_2=\frac{-1-3}{-4}=\frac{-4}{-4}-1$$

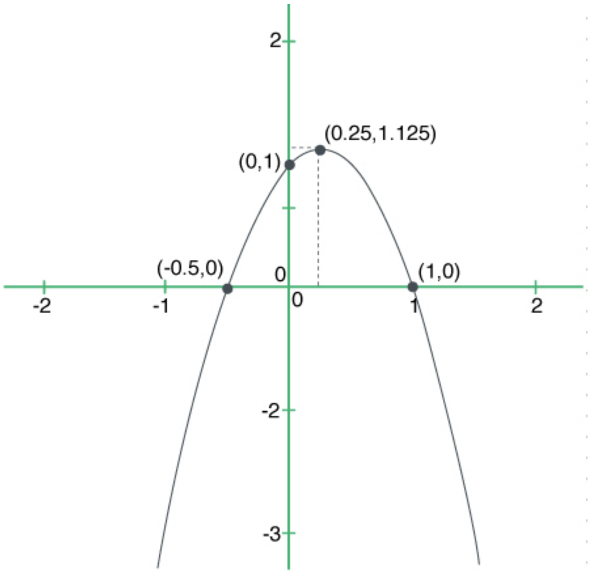
Los interceptos con el eje x son: (-1/2,0) y (1,0). Las coordenadas (x,y) del vértice serían

$$x=-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2(-2)}=-\frac{1}{-4}=\frac{1}{4}$$

$$y=f\left(\frac{1}{4}\right)=-2\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}+1=-2\left(\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{4}+1$$

$$y=-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+1=\frac{-1+2+8}{8}=\frac{9}{8}$$

V: (1/4,9/8)=(0.25,1.125) Por lo tanto, la gráfica es



El vértice de la función $f(x)$, cuyos interceptos con el eje x son (0,3) y (0,-2) es

A. (1, 6)

B. (-1/2,25/4)

C. (1, -6)

D. (1/2,-25/4)

A partir de los interceptos con el eje x, se sabe que x_1=3 y x_2= -2, por lo cual, el producto a partir del cual se conocen los valores de x es $(x-3)(x+2)$, al resolver esta operación por propiedad distributiva, se sabe que la función es $f(x)=x^2-x-6$. A partir de lo anterior se sabe que el valor de a es 1 y de b es -1.

Luego, la coordenada x del vértice es:

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-1}{2(1)} = \frac{1}{2}$$

Y la coordenada de y es

$$y = \mathrm{f}\left(-\frac{b}{2a}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 6 = \frac{1 - 2 - 24}{4} = -\frac{25}{4}$$

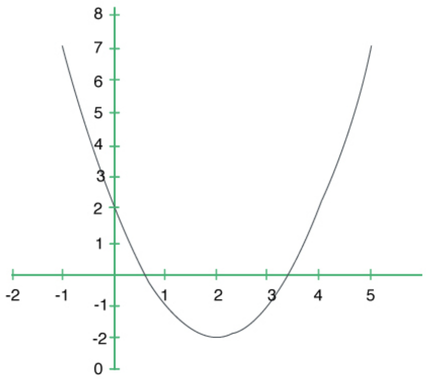
La gráfica representa una función $f(x)=ax^2+bx+c$. Es posible afirmar que

A. $-c/b < 0$

B. $-(a/c) > 0$

C. $b^2 < 4ac$

D. $-b/a > 0$



A partir de la gráfica se puede observar que el valor del intercepto con el eje y (c) es positivo. Por otra parte, al ser cóncava hacia arriba el valor de a es positivo. Por último, el vértice tiene coordenada x positiva, es decir que $-b/2a>0$, por lo cual $b/2a<0$. Dado que el valor de a es positivo, se concluye que $b<0$.

Por lo tanto, aplicando la ley de signos en cada opción de respuesta se tiene que:

$$-((+))/((-))=+$$
$$-(+/+)=-$$

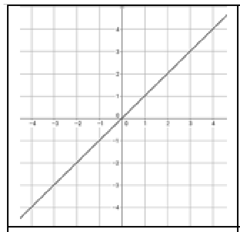
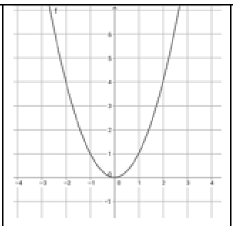
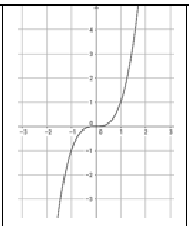
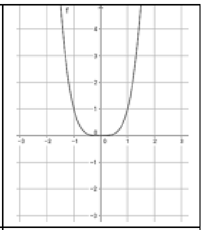
Si $b^2 < 4ac$, quiere decir que $b^2 - 4ac<0$; por lo cual, la función tendría raíces imaginarias y no se intercepta con el eje x.

--/+=+

Por lo tanto, la respuesta es la **D**.

Función polinómica general: una función de la forma $f(x)=a_n\ x^n+a_{(n-1)}\ x^{(n-1)}+a_{(n-2)}\ +x^{(n-2)}+....+a_1x + a_0$, donde $a_0,a_1,...,a_n$ son números reales ($a_n \neq 0$) y n es un número entero no negativo, recibe el nombre de función polinómica de grado n. Las funciones constante, lineal y cuadrática se pueden considerar funciones polinómicas de grado 0, 1 y 2 respectivamente.

Para identificar el grado n de una función polinómica a partir de su gráfica, se cumple que la cantidad de dobleces es igual a n-1. El dominio de las funciones polinómicas es el conjunto de los números reales, mientras que el rango es el conjunto de los números reales solo si el grado de la función es impar. Si el grado de la función es par, la gráfica presenta valores máximos y/o mínimos para el rango.

			
f(x)=x	f(x)=x²	f(x)=x³	f(x)=x⁴

Función racional: corresponden a una expresión de la forma $f(x)=g(x)/h(x)$, donde g(x) y h(x) son funciones polinómicas y h(x)≠0. Una función polinómica no siempre es continua en todo su dominio o su rango. Para esto se determina los valores para los cuales el denominador se hace 0 y estos valores se excluyen del dominio; mientras que para el rango se determinan los valores que nunca se obtendrán como resultado de la división de polinomios en la función. Los valores excluidos del dominio y el rango se representan gráficamente mediante asíntotas.

Asíntotas: una asíntota es una línea recta que sirve de apoyo para el trazado de una curva. A pesar de no ser parte de la gráfica, ella es fundamental porque cuando la variable toma ciertos valores, la curva se va paralela a la asíntota para dichos valores.

Asíntotas verticales: estas ocurren en las funciones racionales en los valores donde $h(x)$ se hace 0 y que no se simplifican al factorizar el polinomio.

Asíntotas horizontales: una función racional tiene asíntota horizontal si el grado del numerador es menor que el grado del denominador, en cuyo caso la asíntota horizontal es el eje x igual al grado del denominador, en cuyo caso la asíntota horizontal es la recta $y=a_n/b_n$, siendo a_n y b_n los coeficientes de la variable con mayor exponente en las funciones $g(x)$ y $h(x)$ respectivamente.

Ejemplo 7:

Graficar la función $f(x)=(x^2-4)/(x2-3x-10)$ Para determinar el dominio de la función se factorizan ambos polinomios

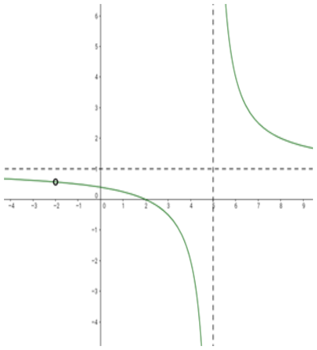
$$f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-3x-10}=\frac{(x-2)\cancel{(x+2)}}{(x-5)\cancel{(x+2)}}$$

El dominio de la función es el conjunto de los números reales para los cuales $x^2-3x-10 \neq 0$, es decir que el dominio de f(x) es $\{x \in R\ /\ x \neq 5$ y $x \neq -2$. En la gráfica de la función se marcaría una discontinuidad puntual en $x = -2$, mientras que en $x = 5$ hay una asíntota vertical. Por otra parte, la función tiene asíntota horizontal porque ambos polinomios son de grado 2, por lo cual, la asíntota es la recta y=1/1=1. Para saber hacia dónde tiende la función, se asignan dos valores cercanos a $x = 5$

$$\text{Six} = 4f(x) = \frac{4^2-4}{4^2-3(4)-10} = \frac{12}{-6} = -2$$

$$\text{Six} = 6f(x) = \frac{6^2-4}{6^2-3(6)-10} = \frac{32}{8} = 4$$

Por lo tanto, a la izquierda de la asíntota $x = 5$ la gráfica está por debajo de y = 1 y tiende a -∞. Mientras que a la derecha de la asíntota $x = 5$ la gráfica está por encima de y = 1 y tiende a ∞. Por lo tanto, la gráfica de la función quedaría:



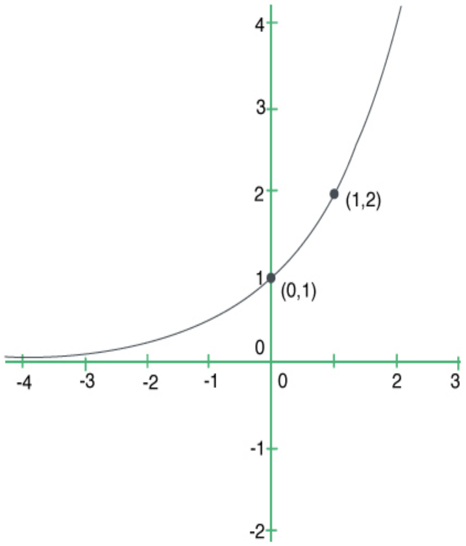
Función exponencial:

Corresponde a toda expresión que contenga la variable como exponente. En su forma simple se expresa como $f(x)=a^x$, donde $a>0$, $a \neq 1$ y x es cualquier número perteneciente a los reales. Cuando $a=e$, se conoce como la constante Neperiana (e=2,718) y la función $f(x)=e^x$, se conoce como función exponencial natural.

El dominio de la función es el conjunto de los números reales y el rango de la función es el conjunto de los reales positivos. La gráfica siempre corta en (0, 1) y pasa por el punto (1, a). Para valores negativos de x la función se acerca a 0 y para valores positivos la función se hace cada vez mayor, tendiendo a infitino.

Ejemplo 8:

La gráfica de la función $f(x)=2^x$ se representa de la siguiente manera:



Función logarítmica

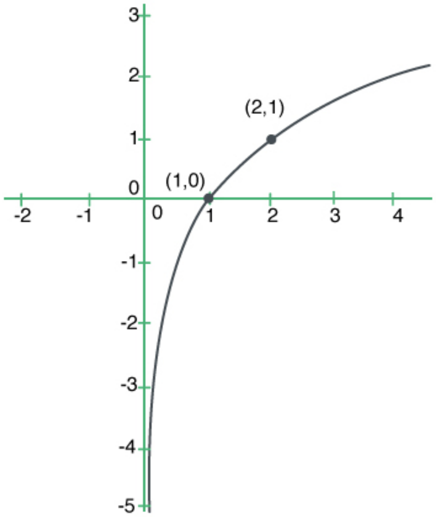
Toda función que involucre el uso de logaritmos se denomina función logarítmica. Las funciones logarítmicas más simples son expresiones de la forma $y=f(x)=\log_a x$, donde $a > 0$, $a \neq 1$, en tal caso el dominio de la función es el conjunto de los números reales positivos, el rango es el conjunto de los números reales y la función es biyectiva.

La gráfica de la función logarítmica $f(x)=\log_a x$ es simétrica con la gráfica de la función $f(x)=a^x$, con respecto a la recta $y = x$.

Nota: recuerde que por definición $\log_a x = y \leftrightarrow a^y = x$

Ejemplo 9:

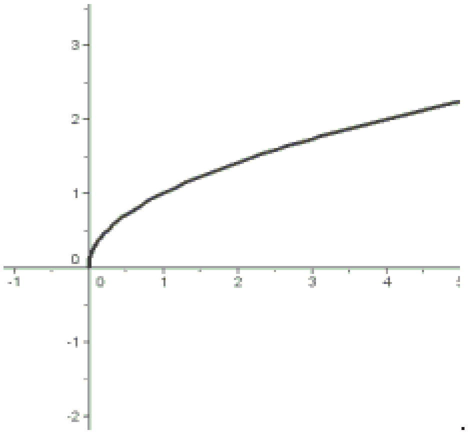
La gráfica de la función $f(x)=\log_2 x$



Función radical

Es aquella en la que la variable hace parte del radicando de una raíz. En caso de que la expresión algebraica tenga radicales con índice par, se debe tener en cuenta que estas raíces solo están definidas para números positivos, incluyendo el 0. Por lo cual, en el dominio se excluyen aquellos valores para los cuales la expresión algebraica da como resultado un número negativo.

A continuación se presenta la gráfica de $f(x)=\sqrt{x}$

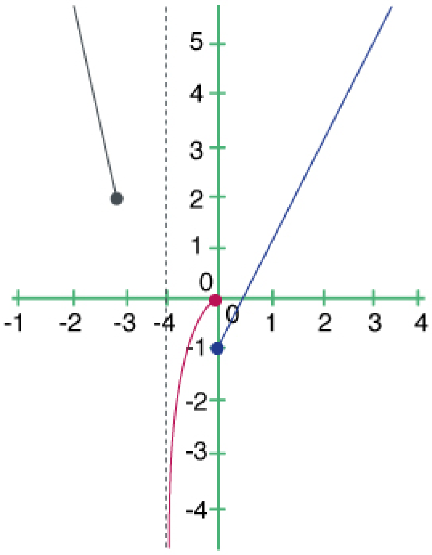


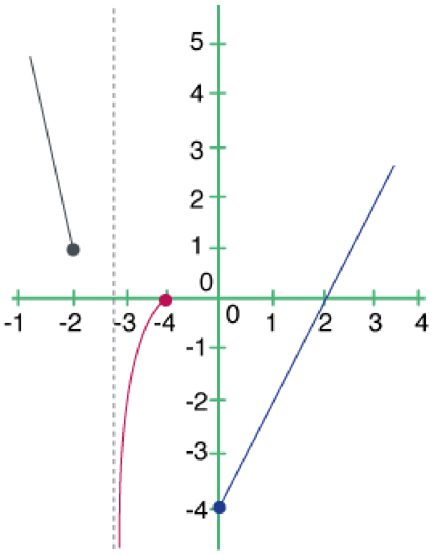
Función por tramos

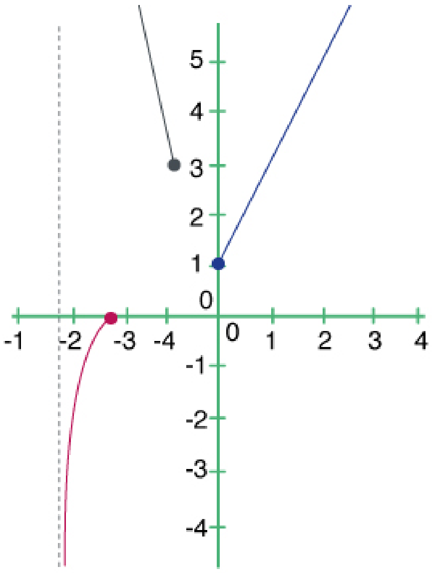
Esta función es una combinación de todas las anteriores, donde cada rama o tramo se grafica por separado y al final del gráfico se obtienen datos como el dominio, el rango y los interceptos. En cada rama se indica el intervalo del dominio para el cual se define una función determinada donde los símbolos >, < se representan con un punto abierto en los valores límites del intervalo, mientras que los símbolos ≥, ≤ se representan con un punto cerrado.

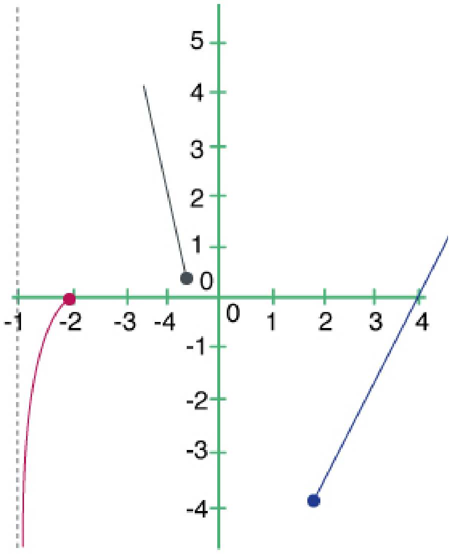
Ejemplo 10:

La función $f(x) = \begin{cases} 2x-1;\ \text{si } x \leq -2 \\ \text{In}(x+1);\text{si} -2 \leq x < 0 \\ x^2-2;\ \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ está representada por:









De acuerdo con la función, el primer tramo corresponde a una función lineal creciente. El segundo tramo es una función logarítmica con asíntonta en $x = -1$, dado que $x + 1$ debe ser diferente de 0. El último tramo es una función cuadrática cóncava hacia arríba con intercepto en y = -2. Por lo cual, la gráfica que se ajusta a estas condiciones corresponde a la opción A.

Operaciones entre funciones

A partir de operaciones como adición, sustracción, multiplicación y división entre diferentes funciones se obtiene como resultado una nueva función.

Dadas las funciones $f(x)$ y $g(x)$, se tienen las siguientes operaciones entre ambas:

Suma: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

Resta: $(f\text{-}g)(x)=\mathrm{f(x)\text{-}g(x)}$

Multiplicación: $(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$

División: $(f/g)(x)=f(x)/g(x)\ \text{siempre que}\ g(x)\neq 0$

En cada caso, el dominio de la función resultante son los valores comunes a los dominios de (x) y $g(x)$, teniendo en cuenta que en el caso de la división, se restringe el dominio a aquellos valores para los cuales $g(x)\neq 0$.

Función compuesta

La composición de funciones es una operación de tal manera que dadas las funciones $f(x)$ y $g(x)$, la función compuesta se define como

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))$$

Donde el dominio de la función resultante es el conjunto de todos los valores pertenecientes al dominio de $g(x)$ que está en el dominio de $f(x)$.

Ejemplo 11:

Dadas $f(x)=x^3+2x\text{-}1$ y $g(x)=x\text{-}1$, el resultado de $(f\circ g)(x)$ es

A. $x^3+2x\text{-}2$
B. $(x\text{-}1)^3+2x\text{-}3$
C. x^3+2x
D. $(x\text{-}1)^3+2x\text{-}1$

De acuerdo con la definición de la función compuesta

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=(x\text{-}1)^3+2(x\text{-}1)\text{-}1$$

$$f(g(x))=(x\text{-}1)^3+2x\text{-}2\text{-}1=(x\text{-}1)^3+2x\text{-}3$$

Por lo tanto, la respuesta correcta es la **B**.

Función inversa

Dos funciones $f(x)$ y $\mathrm{g}(x)$ son inversas la una de la otra si y solo si

$$(\mathrm{f}\text{-}\circ \mathrm{g})(\mathrm{x})=(\mathrm{g}\circ \mathrm{f}\text{-})(\mathrm{x})=\mathrm{x}$$

La función inversa de $f(x)$ se representa como $f^{-1}(x)$.

Para encontrar la inversa de una función se identifica si es inyectiva y luego se despeja x en función de y, luego se intercambian las variables y la nueva función que aparece es la inversa de la primera.

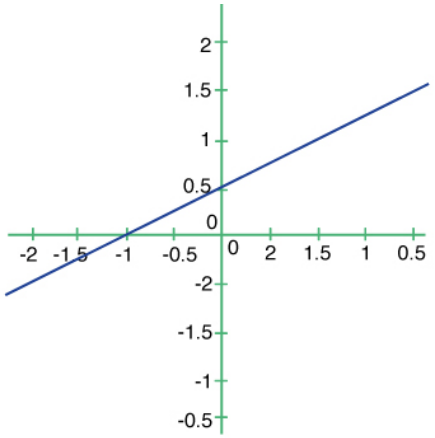
Gráficamente, dos funciones inversas son simétricas con respecto a la recta $y = x$.

Ejemplo 12:

Representar la gráfica de la función inversa de $f(x) = 2x - 1$. En primer lugar, para hallar la función inversa de $f(x)$ se tiene que despejar x en la ecuación $y = f(x)$

$$y = 2x - 1$$
$$2x = y + 1$$
$$x = (y+1)/2$$

Se intercambian las letras y y x se obtiene que $f^{-1}(x) = x/2+1/2$, es decir, que la función tiene pendiente $m=1/2$ e intercepto con el eje y en (0, 1/2). Por lo tanto, la gráfica quedaría:



Transformaciones de Funciones

hasta ahora hemos tenido como ejemplo a un número reducido de funciones, lo cual nos lleva a preguntarnos cómo obtener más ejemplos de estas. La respuesta a la anterior cuestión la podemos resolver tomando los ejemplos que tenemos y haciendo pequeñas modificaciones sobre estas, dichas modificaciones se denominan transformaciones de funciones y todas siguen el principio que enunciaresmos a continuación.

Cada cambio que se haga en la ecuación que define a una función, genera un cambio en su gráfica.

Entre los cambios que puede sufrir una función tenemos desplazamientos (horizontales o verticales),reflexiones (respecto a los ejes) y cambios de escala (estiramientos contracciones). Ahora presentamos cada uno de ellos.

Desplazamiento de la gráfica:

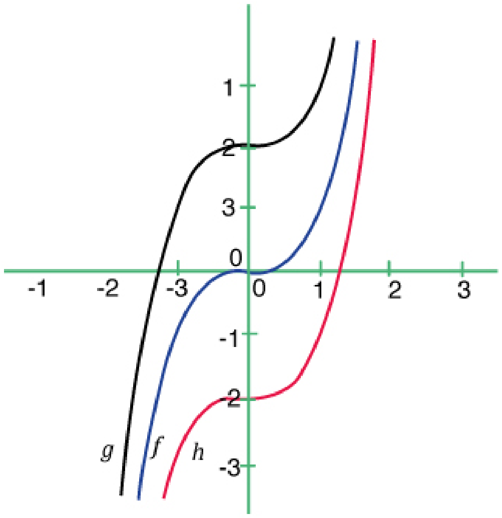
Se refiere a la posibilidad de desplazar vertical u horizontalmente una curva sin cambiar su forma.

Desplazamiento vertical: ocurre cuando a una función f(x) se le suma una constante c, la función se desplaza c unidades hacia arriba si es c positivo o c unidades hacia abajo si es negativa.

Ejemplo 1:

En la siguiente gráfica, observe que *f*, *g* y *h*, corresponden respectivamente a:

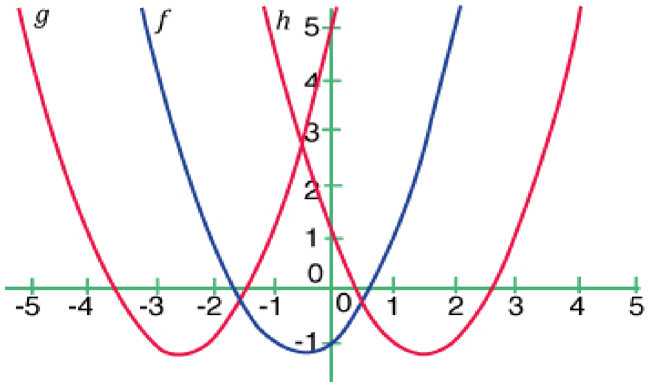
$$f(x) = x^3;\ g(x) = x^3 + 2;\ h(x) = x^3 - 2$$



Desplazamientos horizontales:

Ocurre cuando se suma una constante c dentro del argumento de la función, la gráfica de *f*(*x*) se desplaza *c* unidades a la derecha si *c* es negativo y *c* unidades a la izquierda si *c* es positivo.
Ejemplo: En la siguiente gráfica, observe que *f*, *g* y *h*, corresponden respectivamente a:

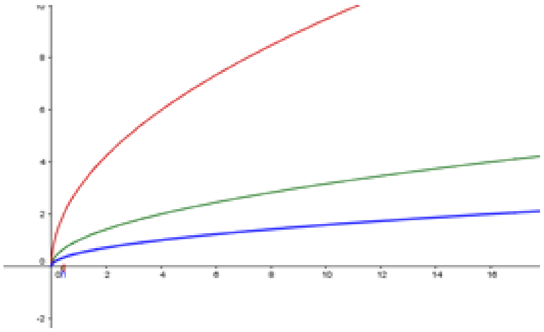
$$f(x) = x^2 + x - 1;$$
$$g(x) = f(x + 2) = (x + 2)^2 + (x + 2) - 1,$$
$$h(x) = f(x - 2) = (x - 2)^2 + (x - 2) - 1$$



Cambio de escala

La gráfica de la función se puede alargar o comprimir con un cambio de escala, así: vertical.

Si la función $f(x)$ se multiplica por un número real $c > 1$, entonces la función se alarga verticalmente en un factor c unidades. Si el argumento de la función $f(x)$ se multiplica por un número real c, de tal manera que $0 < c < 1$, la gráfica de la función se comprime verticalmente c unidades.

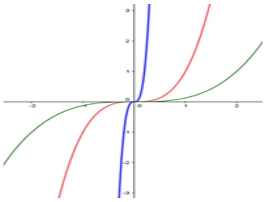


Por ejemplo en la figura podemos ver la gráfica de $f(x)=\sqrt{x}$ en color verde y las gráficas de las funciones $g(x)=3\sqrt{x}$ en rojo y $h(x)=0.5\sqrt{x}$ en azul.

Si se multiplica el argumento de una función por un número real $c > 1$, la gráfica sufre una contracción horizontal y si se multiplica a este por un número real c, de tal manera que $0 < c < 1$, la gráfica se estira horizontalmente c unidades.

Ejemplo 2:

A continuación vemos las gráficas de las funciones $f(x)=x^3$ (rojo), $g(x)=(5x)^3$ en azul y $h(x)= (0.5x)^3$ en verde.



Reflexiones

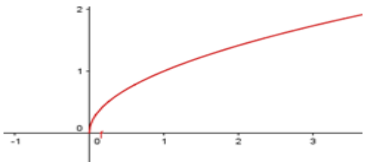
Tal y como sucedió con funciones cuadráticas, un signo negativo produce una reflexión en la gráfica de una función. Dicha reflexión se puede dar respecto a cualquiera de los ejes de coordenadas.

Reflexión vertical:

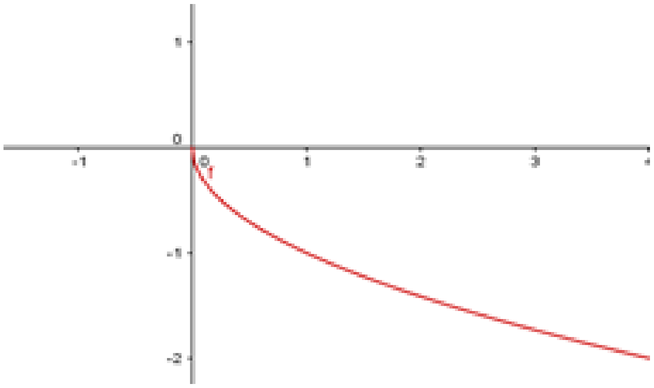
Cuando se multiplica una función por -1, esta sufre una reflexión respecto al eje x.

Ejemplo 3:

Recordemos que la gráfica de $f(x)=\sqrt{x}$ es

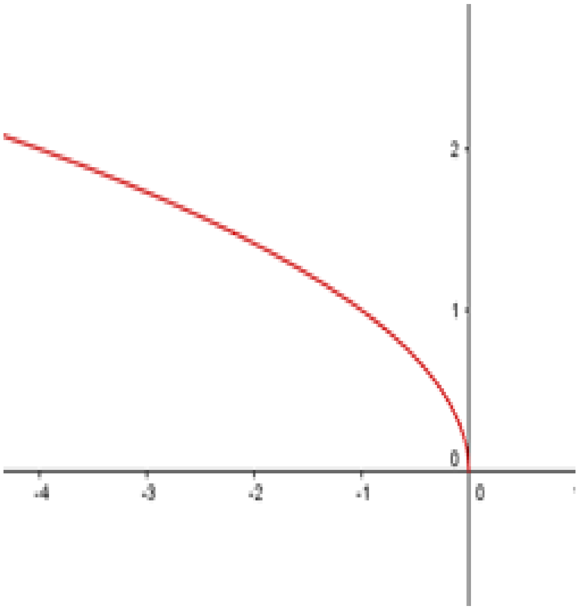


Por tanto la gráfica de la función $f(x)=-\sqrt{x}$ es



Reflexión horizontal:

Cuando se multiplica el argumento de una función por −1, esta sufre una reflexión respecto al eje *y*.



La anterior es la gráfica de la función $f(x)=\sqrt{-x}$

GEOMETRÍA

Se sabe que los sabios egipcios fueron grandes cultores de la geometría, llegando a aplicar su conocimiento en las áreas de la construcción y la astronomía; las pirámides son un testimonio de ello. Ellos desarrollaron un procedimiento geométrico para medir los terrenos que inundaba el río Nilo durante sus crecidas, pues estos eran los más aptos para el cultivo. Este procedimiento consistía en subdividir las superficies en figuras geométricas conocidas por ellos, a las cuales se les calculaba el área. Mediante este sistema, obtenían una aproximación muy exacta de la superficie del terreno que necesitaban mesurar y podían resolver situaciones conflictivas como las reparticiones de tierra o la asignación de esclavos para el trabajo de un campo. Este concepto también fue de vital importancia para la construcción de las pirámides.

Pero estos problemas de los egipcios traen como consecuencia el comienzo de una de las que ahora se considera una rama de las matemáticas: la geometría. La palabra tiene dos raíces griegas: geo = tierra y metrón = medida; es decir, “medida de la tierra”. Esta concepción geométrica se aceptaba sin demostración, era producto de la práctica.

Estos conocimientos pasaron a los griegos y fue Thales de Mileto quien unos seis siglos antes de Cristo inició la geometría demostrativa. Las propiedades se demuestran por medio de razonamientos y no porque resulten en la práctica. Las demostraciones pasan a ser fundamentales y son la base de la lógica, como leyes del razonamiento.

Euclides fue otro gran matemático griego, del siglo III antes de Cristo, quien en su famosa obra titulada *Los elementos*, recopila, ordena y sistematiza todos los conocimientos de geometría hasta su época y, salvo algunas pequeñas variaciones, son los mismos conocimientos que se siguen enseñando en nuestros días.

Euclides, usando un razonamiento deductivo, parte de conceptos básicos primarios no demostrables, tales como punto, recta, plano y espacio, que son el punto de partida de sus definiciones, axiomas y postulados. Demuestra teoremas que, a su vez, servirán para demostrar otros teoremas. Crea nuevos conocimientos a partir de otros existentes por medio de cadenas deductivas de razonamiento lógico. Esta geometría, llamada geometría euclidiana, se basa en lo que históricamente se conoce como los cinco postulados de Euclides:

1. Dos puntos cualesquiera determinan un segmento de recta.
2. Un segmento de recta se puede extender indefinidamente en una línea recta.
3. Se puede trazar una circunferencia dados un centro y un radio cualquiera.
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
5. Por un punto situado fuera de una recta se puede trazar una y solo una paralela a ella.

Existen otras geometrías que no aceptan este último postulado euclidiano, sino que aceptan otros principios que dan origen a las llamadas “geometrías no euclidianas”, como la creada en el siglo XIX por el ruso Lobatschevsky[10].

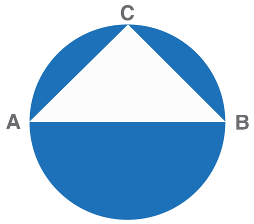
Presentaremos de manera amena y práctica, un desarrollo de la geometría básica que se requiere para el desarrollo de pruebas estandarizadas.

---

[10] *Construcción hecha a partir de la bibliografía consultada en el texto. Cf. Aurelio Baldor, Geometría de Baldor, Cultural Centroamericana, Guatemala, 1974.Citado 12 febrero 2016*

Para comenzar, se propone el siguiente ejercicio reto que debes estar en capacidad de resolver sin dificultad, después de estudiar cuidadosamente este capítulo.

¿Cuál es el área del triángulo ABC si se sabe que el diámetro AB del círculo mide 5 unidades y que el segmento AC mide 4 unidades.?



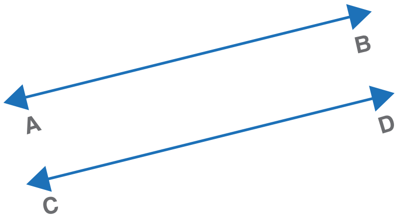
RECTAS

Una recta en geometría se toma como una línea infinita compuesta por puntos, que se representa como muestra la siguiente gráfica:

Su notación es. $\overleftrightarrow{AB}$

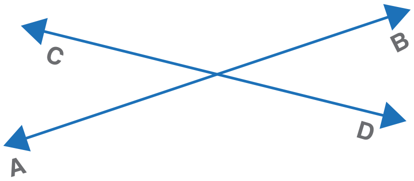
Dos rectas pueden ser paralelas o secantes.

Paralelas: Cuando no se cortan en un punto, es decir, tienen la misma pendiente o inclinación. Como lo indica la figura:



Esto se denota como $\overleftrightarrow{AB}$ II $\overleftrightarrow{CD}$.

Secantes: cuando se cortan en un punto, es decir, no tienen la misma pendiente o inclinación. Como lo muestra la figura.



Un rayo o semirrecta: es una parte de la recta que tiene un punto de origen y se extiende indefinidamente en solo uno de los dos sentidos que tiene la recta. Como indica la siguiente figura:

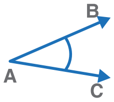
Su notación es: $\overrightarrow{AB}$

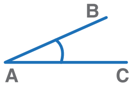
Por su parte un segmento de recta es una pequeña porción de recta a la que se le puede medir su longitud y que está limitada por dos puntos como indica la figura:

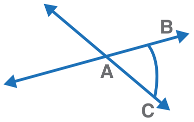
Su notación es: $\overline{AB}$

Ángulos

Un ángulo es una abertura formada por dos semirrectas o dos segmentos de recta con un punto en común, o por dos rectas secantes. Como indica la figura:







Para los tres casos se denota el ángulo como $\widehat{BAC}$ o $\widehat{CAB}$.

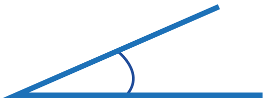
Medida de ángulos

La medida de un ángulo indica cuál es el tamaño de la abertura entre las dos semirectas que lo forman.

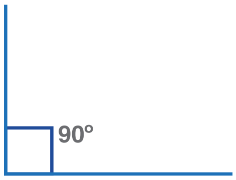
Existen varias formas de medir ángulos, la más conocida es por medio de grados, la cual establece que una vuelta completa mide 360 grados (360º), media vuelta 180 grados (180º), etc.

Los ángulos se pueden clasificar según su medida y según su forma.

Ángulos agudos: son aquellos cuya medida está entre 0° y 90°.



Ángulos rectos: son aquellos cuya medida es de 90°. Cuando 2 rectas forman un ángulo de 90º, se dice que son perpendiculares.

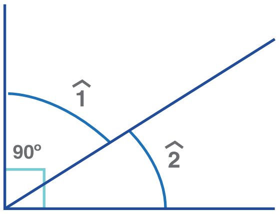


Ángulos obtusos: son aquellos ángulos cuya medida está entre 90° y 180°.

Ángulo llano: son aquellos cuya medida es de 180°.

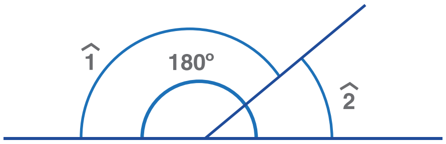
Por la suma de sus medidas los ángulos se pueden clasificar en complementarios y suplementarios.

Complementarios: se dice que dos ángulos son complemetarios cuando la suma de sus medidas es 90°.



Por ejemplo en la figura, los ángulos $\widehat{1}$ y $\widehat{2}$ son complementarios.

Suplementarios: se dice que dos ángulos son suplementarios cuando la suma de sus medidas es 180°.

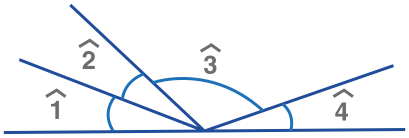


En la antrerior figura, los ángulos $\widehat{1}$ y $\widehat{2}$ son suplementarios.

Con los conceptos elaborados hasta ahora debemos estar en capacidad de enfrentar el siguiente ejercicio:

Ejemplo 1:

En la gráfica, los ángulos $\widehat{1}$ y $\widehat{4}$ son complementarios; además, la medida del ángulo $\widehat{3}$ es cinco veces la medida del ángulo $\widehat{2}$. ¿Cuáles son las medidas de $\widehat{2}$ y $\widehat{3}$?



Después de leer atentamente el planteamiento del ejercicio, se tiene que $\widehat{1}$ y $\widehat{4}$ son complementarios, lo cual debe entenderse como que $\widehat{1}$ y $\widehat{4}$ =90º se infiere que también $\widehat{2}+\widehat{3}$ = 90º (¿Por qué?). Como $\widehat{3}$=5 ($\widehat{2}$), tenemos que $\widehat{2}+\widehat{3}$ = $\widehat{2}$ +5($\widehat{2}$) = 6($\widehat{2}$) = 90º

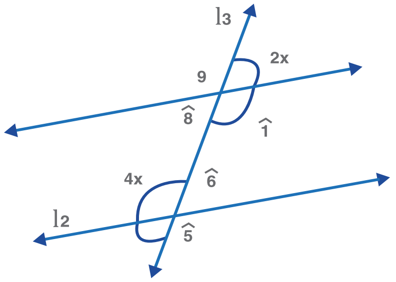
De lo anterior se deduce que $\widehat{2}$= 15º y $\widehat{3}$=75º.

¿Se pueden conocer las medidas exactas de los ángulos $\widehat{1}$ y $\widehat{4}$?

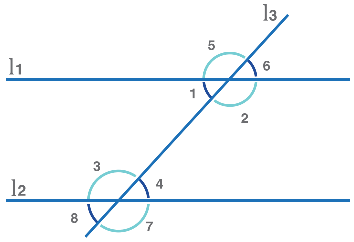
Si observamos detenidamente la gráfica se pensaría que $\widehat{1}$ y $\widehat{4}$ no son complementarios; es más, que $\widehat{2}$ y $\widehat{4}$ no suman 90°. Pero dicha suposición estaría en contradicción con la información brindada, lo que lleva a concluir que las gráficas que se presentan en geometría pueden servir en ocasiones como distractores, es decir, gráficos de los cuales se deduce información que es contradictoria con la que presenta el enunciado. Por ello se recomienda dar prioridad a la infomación presente en los enunciados y tomar las gráficas como un apoyo visual. En los casos en que la información de las gráficas no contradiga el enunciado, se puede asumir que esta es verdadera.

Ejemplo 2:

En la gráfica las rectas l_1 y l_2 son paralelas, además l_3 es secante a l_1 y l_2. Encontrar la medida de los ángulos $\widehat{1}$ y $\widehat{4}$, sabiendo que el suplemento del ángulo $\widehat{1}$ mide 2x y que el suplemento del ángulo $\widehat{4}$ mide 4x.



Para resolver este ejercicio, debemos aprender cuáles son las características de los ángulos formados por dos rectas paralelas y una secante. Si las rectas l_1 y l_2 son paralelas y la recta l_3 es secante, entonces se tienen los siguientes 8 ángulos:



Cuando se tienen dos o más rectas paralelas cortadas por una secante, se pueden observar varias igualdades entre los ángulos que resultan, estos son clasificados según el lugar en que aparecen en la gráfica.

Ángulos opuestos por el vértice:

Los ángulos opuestos por el vértice son iguales. Se les llama así por estar a lados opuestos del punto en común entre las rectas. Son opuestos por el vértice: $\widehat{1}$ y $\widehat{6}$; $\widehat{5}$ y $\widehat{2}$; $\widehat{3}$ y $\widehat{7}$; $\widehat{8}$ y $\widehat{4}$

Ángulos correspondientes entre paralelas:

Los ángulos correspondientes entre paralelas son los que aparecen ubicados exactamente en el mismo lugar pero en cada una de las rectas paralelas, por ejemplo los ángulos $\widehat{4}$ y $\widehat{6}$; $\widehat{3}$ y $\widehat{5}$; $\widehat{1}$ y $\widehat{8}$; $\widehat{2}$ y $\widehat{7}$ son correspondientes entre paralelas y por lo tanto son iguales entre sí.

Ángulos alternos internos:

Son ángulos que están en la región encerrada por las paralelas, pero están en lados diferentes de la secante, por ejemplo los ángulos $\widehat{1}$ y $\widehat{4}$ son alternos internos, por lo tanto tienen la misma medida.

Ángulos alternos externos:

Los ángulos alternos externos, están por fuera de la región encerrada por las paralelas y están a lado y lado de la secante, por ejemplo los ángulos $\widehat{5}$ y $\widehat{7}$ son alternos externos y por lo tanto iguales entre sí.

Notemos que al ser los ángulos $\widehat{1}$ y $\widehat{6}$ iguales, por ser opuestos por el vértice, y los ángulos $\widehat{1}$ y $\widehat{8}$, por ser correspondientes entre paralelas, entonces se infiere que los ángulos $\widehat{6}$ y $\widehat{8}$ son iguales. ¿Qué otros ángulos de los mencionados también son iguales? Argumenta del mismo modo.

Ahora debemos estar en condición de resolver el ejemplo 2.

Después de haberlo vuelto a leer cuidadosamente, notemos que:

Conclusion	Razón
1. $\widehat{7} = 4x$	Por ser correspondientes entre paralelas.
2. $\widehat{7} + 2x = 180^\circ$	Por ser ángulos suplementarios.
3. $4x + 2x = 180^\circ$	Sustitución de 1 en 2.
4. $x = 30^\circ$	Propiedades de las igualdades en 3.
5. $2x = 60^\circ$	Propiedades de las igualdades en 4.
6. $\widehat{1} + 2x = 180^\circ$	Por ser el suplemento del ángulo 2x.
7. $\widehat{1} + 60^\circ = 180^\circ$	Sustitución de 5 en 6.
8. $\widehat{1} = 120^\circ$	Propiedad de las igualdades en 7.
9. $\widehat{4} = 2x = 60^\circ$	¿Por qué?

EL CONCEPTO DE PERÍMETRO

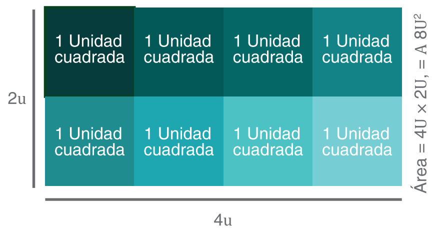
Es la medida del contorno o borde de una figura geométrica.

Como el perímetro es la longitud del borde de una figura, es común que en la estrategia para calcularlo se recurra a sumar las medidas de los bordes o lados que componen dicha figura. Como el perímetro es una longitud, sus dimensiones pueden ser centímetros, metros, kilómetros, pies, pulgadas o cualquier otra unidad de medida que haga referencia a una longitud.

El concepto de área

Es la extensión o superficie comprendida dentro de una figura. Se mide en unidades denominadas cuadrados.

Cuando se mide el área de una superficie, lo que se dice en realidad es cuántos cuadrados de un determinado tamaño (cm^2, m^2, etc.) caben en dicha superficie. Por ejemplo:



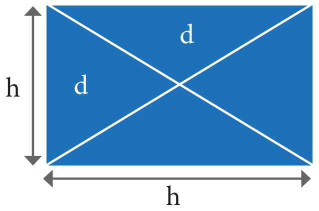
$A = b \times h$ Donde $A =$ área, $b =$ base, $h =$ altura

Es por ello que en muchos de los problemas de cálculos de áreas que se enfrentarán, literalmente se contarán cuadrados.

Caracterización de las figuras básicas

El rectángulo:

Es un cuadrilátero (figura de solamente 4 lados) con todos sus ángulos rectos.



Sabemos además que sus lados opuestos son paralelos e iguales. Al lado más largo suele llamársele base (b), al más corto altura (h), o sencillamente largo y ancho. El segmento que forman dos vértices no consecutivos recibe el nombre de diagonal (d). Además, las dos diagonales de un rectángulo son iguales y su punto de intersección es el centro de la figura.

El área de un rectángulo se puede calcular multiplicando la base por la altura.

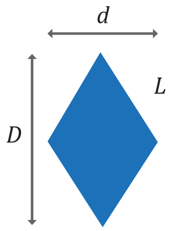
$$A = b \times h.$$

Su perímetro se calcula sumando la longitud de sus lados.

$$P = 2b + 2h.$$

El rombo:

Es un cuadrilátero con cuatro lados iguales, sus ángulos opuestos son iguales y sus lados opuestos son paralelos.

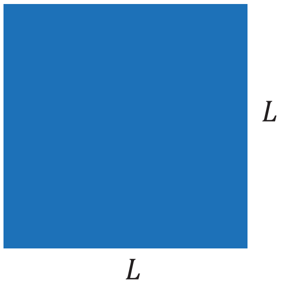


El área de un rombo es igual a la mitad del producto entre sus diagonales $A= \frac{D \times d}{2}$

El perímetro de un rombo es P=4L pues, corresponde a la suma de sus 4 lados que miden L cada uno.

El cuadrado:

Es un cuadrilátero con sus ángulos rectos y sus cuatro lados iguales.



Sabemos que el cuadrado es también un rectángulo y un rombo (¿Por qué?). Por tanto sus diagonales también son iguales. Su área se calcula como la de un rectángulo.

$$A= L \times L = L^2$$

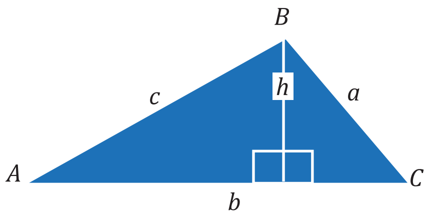
Su perímetro se calcula sumando la longitud de sus lados: P = 4L.

Nota: el área del cuadrado también se puede calcular como la de un rombo.

El triángulo:

Es una figura que tiene solo 3 ángulos y, por ende, 3 lados.

Al segmento horizontal “b” suele llamársele base y al segmento “h”, que cae perpendicular a la base, es decir, formando un ángulo de 90° con la base desde el vértice opuesto, se le conoce comúnmente como altura. Aunque el segmento “a” también puede ser tomado como base, en cuyo caso la altura debe trazarse en forma perpendicular a este desde el vértice opuesto “A”. De manera similar, si se toma el segmento “c” como base, la altura debe ser trazada de modo que sea perpendicular a él desde el vértice opuesto “C”.



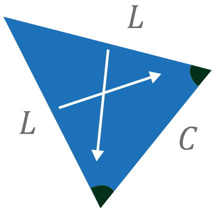
La suma de la medida de los tres ángulos internos de cualquier triángulo es 180°. ¿Por qué? Veamos ahora cómo los triángulos se pueden clasificar por la medida de sus lados o por la medida de sus ángulos. Por la medida de sus lados, se tienen los siguientes tipos de triángulos:

Triángulo escaleno:

Aquel que tiene los tres lados con diferentes medidas.

Triángulo isósceles:

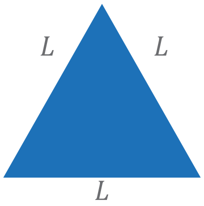
Aquel que tiene dos de sus lados con igual medida.



Se sabe además que los ángulos opuestos a lados iguales son iguales, por tanto un triángulo isósceles tiene también dos ángulos iguales.

Triángulo equilátero:

Aquel que tiene los tres lados con igual medida. Sus tres ángulos internos tambien tienen la misma medida. ¿Puedes determinar cuál es la medida de dichos ángulos?



Por la medida de los ángulos, se tienen los siguientes tipos de triángulos:

Triángulo acutángulo:

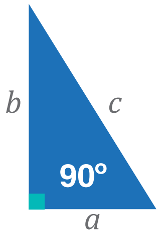
Es aquel cuyos ángulos internos son todos agudos, es decir que cada uno de sus ángulos internos mide entre 0° y 90°.

Triángulo obtusángulo:

Es aquel donde la medida de uno de los ángulos internos está entre 90° y 180°.

Triángulo rectángulo:

Es aquel donde la medida de uno de los ángulos internos es de 90°.



Los lados que forman el ángulo de 90° (a y b) se llaman catetos, y el lado “c”, que es el que se opone al ángulo de 90°, se llama hipotenusa y es siempre el más largo en cualquier triángulo rectángulo.

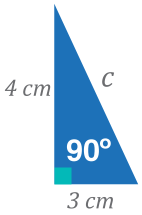
De los triángulos rectángulos se conoce un teorema muy importante, llamado el *teorema de Pitágoras*. Este teorema plantea que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma del cuadrado de los catetos, es decir.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Lo que quiere decir que la hipotenusa de un triángulo rectángulo se puede calcular conociendo la medida de los dos catetos o, en su defecto, si se conoce la hipotenusa y un cateto se puede hallar el otro.

Ejemplo 3:

En un triángulo rectángulo, cuyos catetos miden 3cm y 4cm, la medida de su hipotenusa es:

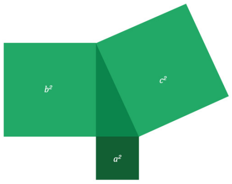


Con base en el *teorema de Pitágoras*, sabemos que la hipotenusa “c” se puede calcular de la siguiente manera:

$$c^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$
$$c = \sqrt{25} = 5$$

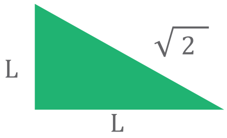
Lo que significa que la hipotenusa del triángulo rectángulo, que siempre es el lado más largo, mide 5 cm. Curiosamente, los lados del triángulo están en secuencia, los catetos miden 3 cm y 4 cm y la hipotenusa (que es el lado más largo de un triángulo rectángulo) mide 5 cm. ¿También se cumplirá con 30 cm, 40 cm y 50 cm? y ¿será qué se cumple con 60 cm, 70 cm y 80 cm?

Lo que en realidad plantea el teorema de Pitágoras se evidencia mediante la siguiente gráfica:



El área del cuadrado formado con la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados formados con los catetos. Lo más increíble es que se cumple también si las figuras que se forman en los lados del triángulo son polígonos regulares, como: triángulos equiláteros, semicírculos, hexágonos, etc.

Si los dos catetos de un triángulo rectangulo son iguales a L, entonces la hipotenusa mide $\sqrt{2}\,L$



¿Puedes demostrar por qué es cierta la anterior afirmación? De manera general se dice que el área de un triángulo se puede calcular como:

$$A=\frac{b\times h}{2}$$

Se debe tener en cuenta que cualquiera de los lados del triángulo puede ser su base, y que la altura, “h”, siempre debe medirse desde el vértice opuesto y ser perpendicular a la base tomada.

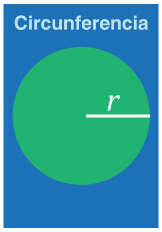
Para calcular “h” cuando no se tiene su medida, se utiliza el teorema de Pitágoras.

Cuando el triángulo es equilátero, se recurre directamente a la siguiente expresión para no tener que calcular la altura. $A_{\Delta\text{equilátero}}=\frac{\sqrt{3}}{4}L^2$, siendo L el lado del triángulo equilátero.

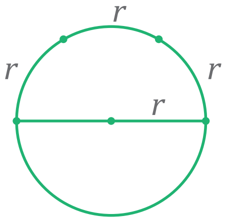
Cuando el triángulo es rectángulo, se toma uno de los catetos como base y el otro como altura; por tanto, el área se puede calcular como $A_{\Delta\text{rectángulo}}=\frac{\text{Cateto}_1\times\text{Cateto}_2}{2}$ Por su parte, el perímetro se calcula sumando la longitud de los lados del triángulo.

La circunferencia

Es una figura donde todos los puntos del borde están a una misma distancia del centro. Esta distancia se llama radio.



Se sabe además que el área que queda encerrada se llama círculo, y que el diámetro es un segmento igual a 2 veces el radio. Para medir el perímetro de la circunferencia se emplea la siguiente estrategia: tomaremos una cuerda y la pondremos alrededor del borde la circunferencia para ver cuántas veces cabe; así, es de suponer que la medida del borde, es decir, el perímetro será las veces que cabe la cuerda en todo el borde multiplicado por la medida de esta.



Si la cuerda que tomamos tiene la longitud del radio, al superponerla alrededor del borde, debe pasar lo que se observa en la gráfica: en media circunferencia, el radio cabe 3 veces exactamente más un pedacito. De esto es que nace el número *pi*. Este número representa la relación que hay entre media circunferencia y el radio de la misma, es decir, el número de veces que cabe el radio en media circunferencia.

$$\pi$$

Pi ≈ 3,14

Se deduce que el radio cabe en toda la circunferencia 2π veces, e igualmente, como en la estrategia anterior, se puede decir que el perímetro se calcula multiplicando las veces que cabe el radio en todo el borde la circunferencia con la medida de la cuerda que es el radio, esto es, $P= 2\pi r=\pi d$.

Para calcular el área del círculo limitado por la circunferencia podemos pensar de la siguiente manera:

Si se cubre el área del círculo con cuerdas del mismo espesor, y se cortan luego hasta el centro del círculo, tal y como lo ilustra la figura de la izquierda, al separarlas se puede formar el triángulo de la derecha, con una base cuya longitud es el perímetro de la circunferencia $2\pi r$ y cuya altura es el radio. Como las cuerdas de la izquierda son las mismas de la derecha se asume que cubren la misma superficie, por tanto el área del círculo es igual al área del triángulo.

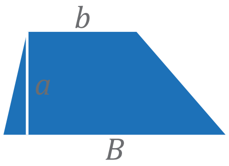
Así: $\pi r^2= \pi d^2/4$

$$A_{\text{círculo}} = A_{\text{triángulo}} = \frac{b.h}{2} = \frac{(2\pi r)\ (r)}{2} = \pi r^2$$

Se concluye entonces que el área de un círculo puede ser calculada como: $A=\pi r^2= \frac{\pi d^2}{4}$ siendo “r” el radio y “d” el diámetro de la circunferencia.

El trapecio

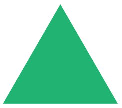
Es un polígono de cuatro lados con sus bases paralelas.



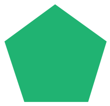
¿Cómo se podrá calcular el área de un trapecio a partir de las figuras ya expuestas? El perímetro se puede calcular sumando la medida de sus lados.

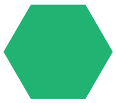
Los polígonos regulares

Son figuras conformadas por tres o más lados, donde cada uno de los lados y ángulos internos mide lo mismo. Entre ellos están el triángulo equilatero, el cuadrado, el pentágono, el hexágono, etc...

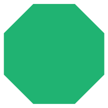

TRIÁNGULO REGULAR
(EQUILATERO)

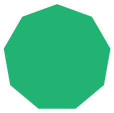

CUADRILÁTERO
REGULAR

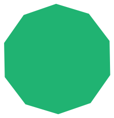

PENTÁGONO
REGULAR


HEXÁGONO
REGULAR


HEPTÁGONO
REGULAR


OCTÁGONO
REGULAR


NONÁGONO
REGULAR


DECÁGONO
REGULAR

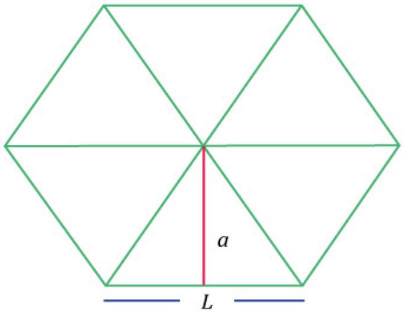
El perimetro de un poligono regular se calcula con la expresión.

$$P=nL$$

Donde n es el número de lados del polígono y L es la medida de su lado.

Para calcular el area de un polígono regular lo dividimos en triangulos y calculamos el área de cada uno y al final los sumamos.

A continuación desarrollaremos el método para calcular el area de un hexágono, pero debe entenderse que este se puede aplicar a cualquier polígono.



El área de cada triángulo se calcula con la fórmula $A=\frac{b\times h}{2}$ donde la base corresponde a la longitud del lado, es decir L y la altura del triángulo es a.

Al valor a de la altura de los triángulos que resultan, se le conoce como el apotema del polígono y corresponde a una perpendicular que va desde el centro del polígono hasta el punto medio de cada uno de los lados.

Como todos los triángulos son iguales el área total, del hexágono es 6 veces el área del triángulo, es decir

$$A= 6\frac{L\times a}{2}$$

Pero como el perimetro del hexagono es $P=6L$, tenemos que el área está dada por la expesión.

$$A= \frac{P\times a}{2}$$

La cual se cumple para cualquier polígono regular.

Ejemplo 4:

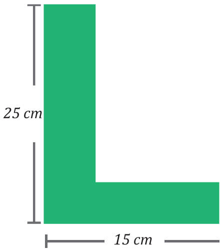
El perímetro de la siguiente figura es:

A. 50 cm

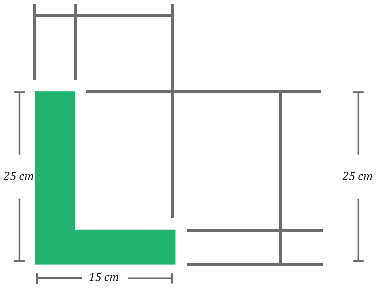
B. 80 cm

C. 100 cm

D. No es posible determinarlo.



Hay un lado que mide 15 cm y otros dos que suman lo mismo, un lado que mide 25 cm y otros dos que juntos miden también 25 cm. Así:

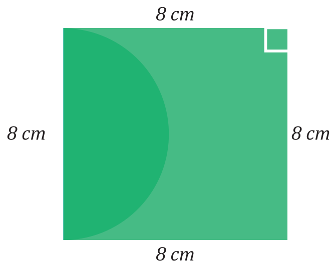


Entonces, $P = 25 \text{ cm} + 25 \text{ cm} + 15 \text{ cm} + 15 \text{ cm} = 80 \text{ cm}$

Se puede decir entonces que el perímetro es de 80 cm, por tanto la opción correcta es la “**B**”.

Ejemplo 5:

¿Cuál es el perímetro de la región sombreada?



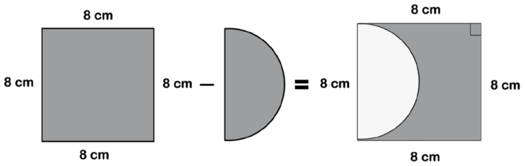
Por lo que observamos, el perímetro está conformado por tres segmentos rectos y media circunferencia de 4 cm de radio. Ahora, en la gráfica observemos que cada lado recto mide 8 cm y el perímetro de media circunferencia corresponde a 4π cm por lo que el perímetro de la region sombreada es

$$P = 8\text{ cm} + 8\text{ cm} + 8\text{ cm} + 4\text{ cm} = (24 + 4\pi)\text{ cm}$$

Ejemplo 6:

Calcular el área sombreda de la gráfica del ejemplo anterior.

Para calcular áreas sombreadas, la estrategia consiste en dividir la figura en superficies conocidas, triángulos, cuadrados, circunferencias, etc... para expresarla en términos de sumas o restas de las mismas, como se muestra a continuación.



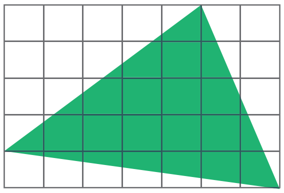
En términos generales, puede decirse que el área sombreada es igual al área total menos el área blanca (no sombreada).

En este caso, el área sombreada corresponde a la diferencia entre un cuadrado y media circunferencia. Ya sabemos que el área de un cuadrado se calcula mediante la expresión $A=L^2$ y la de la circunferencia se calcula con $A=\pi r^2$. Así el área sombreada se puede calcular de la siguiente manera:

$$A=L^2 - \frac{\pi r^2}{2} = 64\ cm^2 - \frac{16\pi cm^2}{2} = 64\ cm^2 - 8\pi cm^2 = 8(8-\pi)cm^2$$

Ejemplo 7:

En la siguiente figura, los cuadrados unitarios son de 1 cm × 1 cm. Los cm^2 que cubren la región sombreada son:

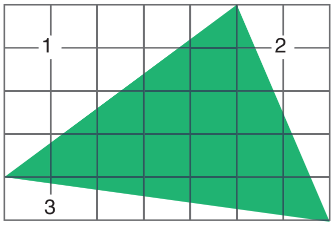


Se observa que la región sombreada es un triángulo; si se pudiera contar directamente sobre la figura cuántos cuadrados unitarios tiene, ésta sería el área. Pero, para este caso, es un poco complejo. Se invita de nuevo a pensar en qué figuras conocidas se puede dividir la figura principal, o si es preferible calcular toda el área y restar la superficie no sombreada.

Llegamos entonces a la siguiente conclusión:

Es más fácil calcular el área del rectángulo y restar el área blanca de esta, ya que el área no sombreada es la suma de las áreas de tres triángulos rectángulos a los cuales les podemos calcular el área fácilmente.

Se tiene entonces que el área sombreada es igual al área total menos el área de tres triángulos rectángulos, así:



El triángulo 1 tiene un área de $3cm \times 4cm/2 = 6cm^2$.
El triángulo 2 tiene un área de: $(2 \text{ cm} \times 4 \text{ cm})/2 = 4 \text{ cm}^2$.
El triángulo 3 tiene un área de: $(1 \text{ cm} \text{ x } 6 \text{ cm})/2 = 3 \text{ cm}^2$.

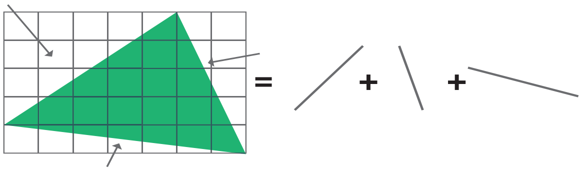
Así:

$A_{sombreada} = 24 \text{ cm}^2 - 6 \text{ cm}^2 - 4 \text{ cm}^2 - 3 \text{ cm}^2 = 11 \text{ cm}^2$

Ejemplo 8:

Calcular el perímetro de la región sombreada del problema anterior.

Notemos que al descomponer la figura en los lados que la conforman se obtiene lo siguiente:



Cada uno de estos lados es la hipotenusa de uno de los triángulos rectángulos blancos descritos en el problema anterior. Así, para poder calcular su medida se debe recurrir al teorema de Pitágoras. Entonces, se procede de la siguiente manera:

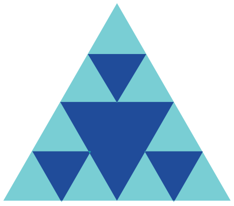
En el triángulo 1 se tiene que $3^2 + 4^2 = x^2$
En el triángulo 2 se tiene que $2^2 + 4^2 = y^2$
En el triángulo 3 se tiene que: $1^2 + 6^2 = z^2$

Se infiere que el perímetro es:

$$5\text{cm} + 2\sqrt{5}\ \text{cm} + \sqrt{37}\ \text{cm}$$

Ejemplo 9:

La fracción de área sombreada respecto al total de la figura es:



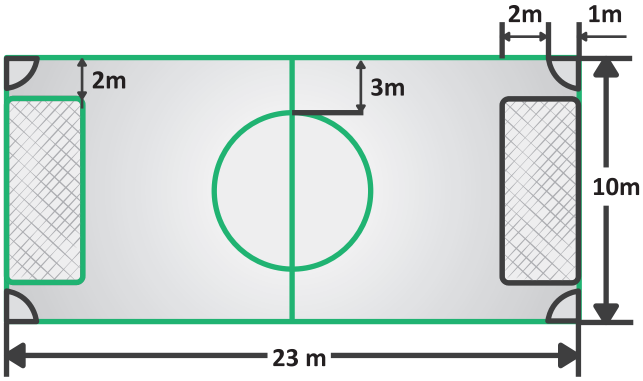
Cuando nos hablan de una fracción, necesariamente debemos pensar en una razón, es decir, un numerador y un denominador, donde el denominador es el número de partes "iguales" en que se ha dividido el total, y el denominador, el número de partes que se ha tomado. Así, lo que debemos hacer es dividir toda la figura en partes iguales y luego contar cuántas de ellas están sombreadas para escribir luego la fracción.

Si como unidad de división tomamos el triángulo sombreado más pequeño, observamos que en total caben 16 triángulos. Al contar cuántos de este mismo tamaño están sombreados, se encuentra que son 7.

Así, la fracción pedida es 7/16

Ejemplo 10:

La gráfica muestra las medidas de un campo de futbol infantil que se estrena en Julio para los juegos internos de la institución.

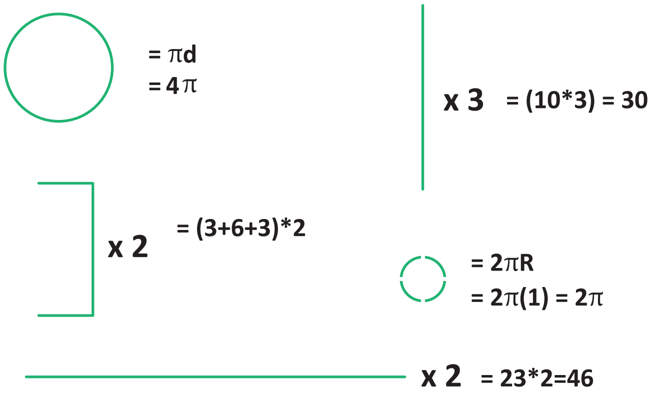


El rector de la institución desea resaltar las medidas del campo de juego con cal para el día de la inauguración. Para esto pide un informe de cuanta cal será necesaria si por cada metro de línea son necesarios 20 gramos de cal. El empleado encargado de oficios varios le informa que basta con 2 kilos de cal para resaltar todas las líneas del campo.

1. El informe presentado por el empleado de la institución es:
   A. Incorrecto porque con un kilo y medio de cal basta para resaltar todo el campo.
   B. Incorrecto porque únicamente alcanzaría para las líneas rectas del campo.
   C. Correcto debido a que las líneas del campo suman una distancia neta de 100 metros.
   D. Correcto debido a que únicamente sobran 16 gramos de cal.

2. Si el terreno que corresponde al círculo central del campo se encuentra en mal estado, podemos afirmar que la cantidad de terreno que es necesario sustituir es:
   A. 12 π B. 10 π C. 9 π D. 4 π

Para conocer con exactitud cuántos metros de cal debemos resaltar tan solo basta con conocer los perímetros de las figuras presentadas en la gráfica, así:



Y sumando los resultados calculados se obtiene que:

$$(\text{Lineas})+(\text{Círculos})$$
$$=(24+30+46)+(4\pi+2\pi)$$
$$= 100 + 6\pi$$

Observe que cuando sumamos las líneas rectas del campo se obtienen 100 metros de longitud y por ambos círculos se obtienen 8π metros de longitud.

Si queremos calcular los gramos de cal, podemos multiplicar cada cantidad por 20 (Recuerde que son veinte gramos por metro), luego:

$$(\text{gr.para lineas})+(\text{gr.para Círculos})$$
$$(100\times 20\ \text{gr.})+(6\pi\times 20\ \text{gr.})= 2000\ \text{gr.}\ +120\pi\ \text{gr.}$$

Es decir, solo por las líneas rectas son necesarios 2 kilos de cal y podemos concluir que la respuesta correcta es la B. Si quisiera saberse con exactitud cuanta cal es necesaria para resaltar los círculos, podríamos hablar de 120π gramos o reemplazar pi por 3,1416 y calcular:

$$120\pi\ \text{gr.}=120\times 3{,}1416\ \text{gr.}=376{,}992\ \text{gr.}$$

Es decir, una cantidad inferior a una libra de cal.

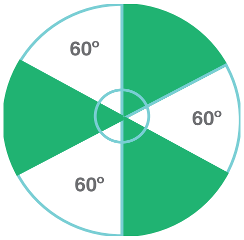
Para dar solución a la segunda pregunta, basta con identificar la distancia del centro del campo al extremo del círculo central (radio del círculo). Finalmente reemplazar el radio en la fórmula propuesta para calcular el área de un círculo:

$$\pi R^2= \pi\times 3^2=9\pi$$

Es decir, es necesario sustituir 9π metros cuadrados de terreno.

Ejemplo 10:

Calcular el área de la región sombreada sabiendo que la circunferencia tiene un radio de 5 cm.



Al descomponer la figura, se encuentra que hay tres representaciones iguales de lo que se llama un sector circular. Así, el área sombreada es la de tres sectores circulares cada uno con un ángulo de 60° (¿por qué?), que sumados darían media circunferencia.

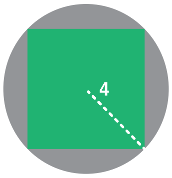
$$A_{somb}=\frac{\pi r^2}{2}=\frac{\pi(5cm)^2}{2}=\frac{25\pi}{2}\ cm^2$$

En la mayoría de los ejercicios estas respuestas aparecen factorizadas, para lo cual se recomienda evaluar cada una de las opciones con el resultado obtenido.

Ejemplo 11:

El área sombreada de la figura es:

A. $8(\pi-2)m^2$
B. $16(\pi-2)m^2$
C. $16(\pi+2)m^2$
D. $8(8\pi-3)m^2$



Al descomponer la figura se encuentra que es un círculo con 4 metros de radio y un cuadrado del cual se deduce que tiene una diagonal de 8 metros. Así, el área sombreada equivale al área del círculo menos la del cuadrado, y se puede analizar de la siguiente manera.

$$A_s = L^2 - \pi r^2$$

Como la operación requerida es una resta, queda descartada la opción C; luego, al calcular se tiene en cuenta solo el área del círculo, de la siguiente manera:

$$A_{círculo}=\pi r^2 = \pi(4m)^2 =16\pi m^2$$

De ello se deduce que la respuesta correcta para el valor del área del círculo puede ser tanto la opción B como la C, pero la opción C ya había sido descartada, porque debe restarse al valor del área del círculo, el área del cuadrado; por tanto, nos quedamos con la opción **B**.

Matemáticamente se plantearía de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} A_{sombreada} &=\pi r^2 - \frac{D_1 \times d_2}{2} \\ &=\pi(4m)^2 - \frac{(8m)(8m)}{2} \\ &=16\pi m^2 - 32m = 16(\pi-2)m^2 \end{aligned}$$

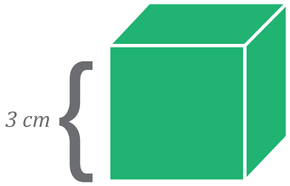
El concepto de volumen:

El volumen es una magnitud definida como el espacio ocupado por un cuerpo, y se mide en unidades cúbicas. De hecho, muchos de los problemas se limitan a contar cuántos cubos hay en un determinado espacio.

A continuación se muestran las expresiones básicas para el cálculo de volúmenes.

El cubo:

Es un cuerpo geométrico formado por seis caras cuadradas.



El volumen de un cubo se puede calcular como $V= a{\times}a{\times}a = a^3$, pero también se puede definir como el producto del área de la base “a×a” por la altura a, es decir, $V = a^2 \cdot a = a^3$

$$V= a^3$$

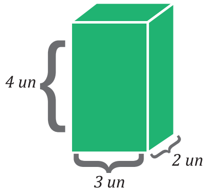
Luego, el volumen del cubo mostrado en la figura es $(3\text{ cm})^3 = 27\text{ cm}^3$.

El área superficial es el área que compone todas sus caras; por tanto, el área superficial de un cubo corresponde al área de sus seis caras cuadradas.

$A_{\text{superficial}}= 6L^2$, siendo L el lado del cubo.

El paralelepípedo:

Un paralelepípedo es un cuerpo de seis caras rectangulares. Si las caras laterales son perpendiculares a la altura del cuerpo, entonces se le denomina paralelepípedo recto, si no, es un paralelepípedo oblicuo.



Por lo tanto, si las tres aristas concurrentes a un vértice miden a, b y c, entonces su volumen se puede también definir como el producto del área de la base a × b por la altura c, es decir,

$$V = (a \times b) \times c = a \times b \times c.$$

En conclusión, se calcula mediante la fórmula:

$$V= abc$$

El cilindro:

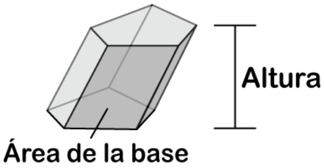
Un cilindro recto es un cuerpo geométrico formado por dos caras circulares paralelas, como base, y por una superficie que las rodea por su borde, como lo muestra la figura.

El volumen de un cilindro recto, de base circular, radio r y altura h, lo obtenemos multiplicando el área de la base, que es una circunferencia, por la respectiva altura h.

$$V= (\pi \times r2)h$$

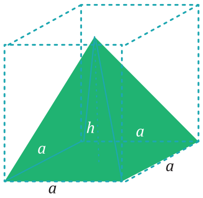
A los tres cuerpos descritos se les puede llamar prisma. ¿Puedes definir qué es un prisma? El volumen de este tipo de figuras, donde parece que la base se hubiese estirado una altura h se puede calcular así:

$$V = \text{área base} \times \text{altura}$$



Pirámides:

Pirámide recta de base cuadrada. Es aquella cuya base es un cuadrado de lado a y en la que la altura es el segmento bajado desde el vértice opuesto a la base de forma perpendicular al plano de su base.

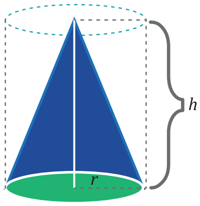


El volumen se puede calcular por medio de la siguiente fórmula:

$$V_{\text{pirámide}} = \frac{a^2 h}{3}$$

Volumen de conos rectos:

La figura siguiente muestra un cono recto, donde el radio de la base es r y la altura h. La base del cono es un círculo, cuya área es: $\pi r2$



El volumen del cono recto corresponde a la tercera parte del producto entre el área de su base y su altura, es decir:

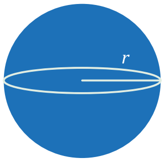
$$V=\frac{\pi \times r^2 \times h}{3}$$

El volumen de este tipo de cuerpos, que tienen como base una figura plana y terminan en punta, es

$$V= 1/3 \text{ Área de la base} \times \text{Altura}$$

La esfera:

El volumen de una esfera de radio r se obtiene a partir de la siguiente expresión:



$$V = \frac{4}{3} \times\pi\times \pi r^3$$

¿Cómo se podría calcular el área superficial de todos los cuerpos descritos?

Ejemplo 12[12]

El volumen del paralelepípedo de dimensiones $4 \text{ cm} \times 3 \text{ cm x } 2 \text{ cm}$, será dividido en tres cubos de igual volumen. ¿Cuánto mide el lado de cada cubo?

Solución

$$V_{\text{paralelepípedo}} = (2\text{cm}\times3\text{cm}\times4\text{cm}) = 24\text{cm}^3$$

Si dividimos este volumen en 3 se tiene que 24 cm^3/3= 8 cm^3. Siendo así que a cada cubo le corresponde un volumen de 8 unidades cúbicas. La única manera de que un cubo tenga este volumen es que cada lado sea de 2 cm.

Ejemplo 13[13]

Si se hace un postre en un molde cilíndrico de radio 9 cm, ¿en qué factor deben aumentarse los ingredientes con relación a los utilizados para un molde cilíndrico de radio 3 cm, sabiendo que ambos moldes tienen la misma altura?

---

[12] *Tomado del examen de admisión de la Universidad de Antioquia, semestre 2010-1.*

[13] *ibid*

Es común encontrar problemas como este en pruebas estandarizadas. Un ejemplo de ello es el examen de admisión de la Universidad de Antioquia, donde lo que hay que hacer es comparar volúmenes. Dado que sabemos por el capítulo de proporciones que comparar es dividir; por tanto deben calcularse los volúmenes de los cilindros y luego dividirlos.

Así, el volumen del cilindro de radio 9 cm es

$$V= \text{Área de la base} \times \text{altura}$$
$$V= \pi r^2 h = 9^2 h= 81\pi h$$

Por su parte, el volumen del cilindro de radio 3 cm es:

$$V= \pi r^2 h = 3^2\pi h = 9\pi h$$

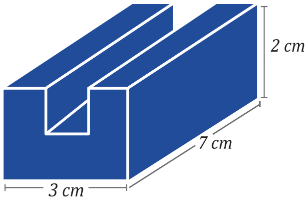
Al dividir estos dos volúmenes se tiene que:

$$\frac{81\pi h}{9\pi h}=9$$

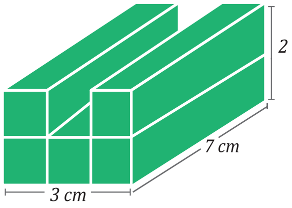
Esto quiere decir que el molde que se desea usar es 9 veces más grande; por tanto, los ingredientes deben amplificarse en un factor de 9.

Ejemplo 14:

Calcular el volumen de la figura, teniendo en cuenta que las unidades están dadas en cm.



La recomendación para este tipo de problemas es la misma que para el cálculo de áreas; se debe buscar dividirlo en cuerpos conocidos para calcular sus volúmenes y luego sumarlos o restarlos, según sea el caso. Así



Observe que la figura ha sido dividida en 5 paralelepípedos iguales de 1 cm×1 cm×7 cm, cuyo volumen es de 7 cm3. Como la figura se dividió en 5 figuras iguales se tiene que el volumen total sería:

$$7 \text{ cm}^3 \times 5 = 35 \text{ cm}^3.$$

Calcula el área superficial del cuerpo del ejemplo anterior.

Existen dos conceptos más que son de gran importancia en el tema de razonamiento geométrico, estos son congruencia y semejanza de triángulos.

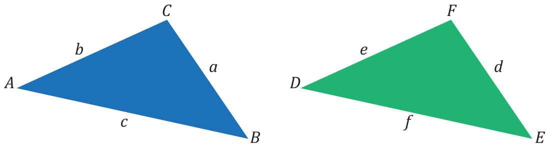
Congruencia de triángulos:

Si dos triángulos son iguales en todos los sentidos, es decir, sus lados tienen la misma medida al igual que sus ángulos, se dice que son congruentes(≅). Para decidir si dos triángulos son iguales o congruentes, se puede utilizar cualquiera de los siguientes tres criterios:

Lado-Lado-Lado (L-L-L):

Cuando dos triángulos tienen sus lados correspondientes iguales, se dice que los triángulos son iguales o congruentes.

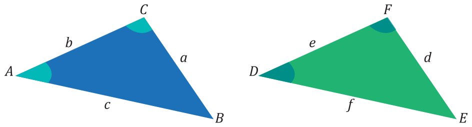
Si $a=d$, $b=e$ y $c=f$ se puede decir que: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$



Ángulo-Lado-Ángulo (A-L-A):

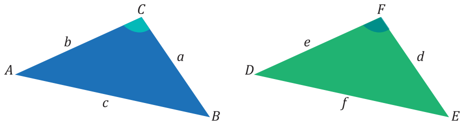
Cuando dos triángulos tienen dos ángulos correspondientes iguales y el lado común entre ellos también es igual, se dice que los triángulos son iguales o congruentes.

Si $\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{C} = \hat{F}$ y $b = e$ se puede decir que $\Delta ABC \cong \Delta DEF$



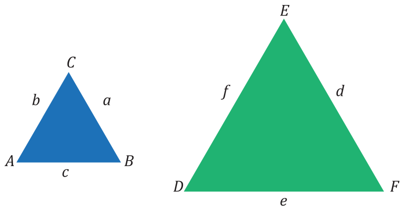
Lado-Ángulo-Lado (L-A-L):

Cuando dos triángulos tienen dos lados correspondientes iguales y el ángulo formado entre ellos también es igual, se dice que los triángulos son iguales o congruentes. De tal modo, si $b = e$, $a = d$ y $\hat{C} = \hat{F}$, se puede decir que $\Delta ABC \cong \Delta DEF$



Semejanza de triángulos:

Si dos triángulos guardan proporción entre sus lados o sus ángulos correspondientes son iguales, se puede decir que los triángulos son semejantes, como los que se muestra en las siguientes figuras:

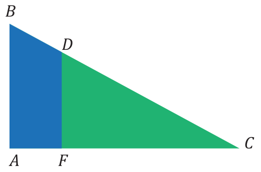


Si $\hat{A}=\hat{D}$, $\hat{C}=\hat{E}$ y $\hat{B}=\hat{F}$ se puede decir que los triángulos son semejantes y se escribe $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ además sus lados son proporcionales, y en su defecto se pueden plantear que: $\frac{b}{f}=\frac{c}{e}=\frac{a}{d}$

También se aplica para el caso en que los triángulos estén superpuestos, como se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 15:

Probar que los triángulos ΔABC y ΔFDC son semejantes.



$\hat{C}=\hat{C}$ y $\hat{A}=\hat{F}$; por tanto, $\hat{B}=\hat{D}$ ¿por qué? Luego, se puede decir que los triángulos son semejantes y se escribe $\Delta ABC \sim \Delta FDC$ donde sus lados correspondientes son proporcionales, de manera que se puede plantear que:

$$\frac{AC}{FC}=\frac{AB}{FD}=\frac{BC}{DC}$$

Ejemplo 16:

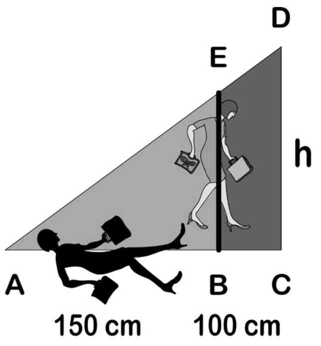
Carolina acostumbra jugar cada noche con la sombra que proyecta su cuerpo sobre el césped, gracias a la farola que hay en medio de su jardín; una noche decidió calcular la altura que tenía su farola, pero no tenía una escalera suficientemente alta para alcanzar la parte superior de la farola donde se encontraba el foco. Sin embargo, recordó que usando una simple proporción podría calcular dicha altura. El procedimiento fue el siguiente: se paró a un metro de la base de la farola y midió la sombra que proyectaba, la cual era de unos 150 cm. Si carolina tiene 162 cm de altura, entonces la altura de la farola de su jardín es

A. 190 cm

B. 270 cm

C. 92,7 cm

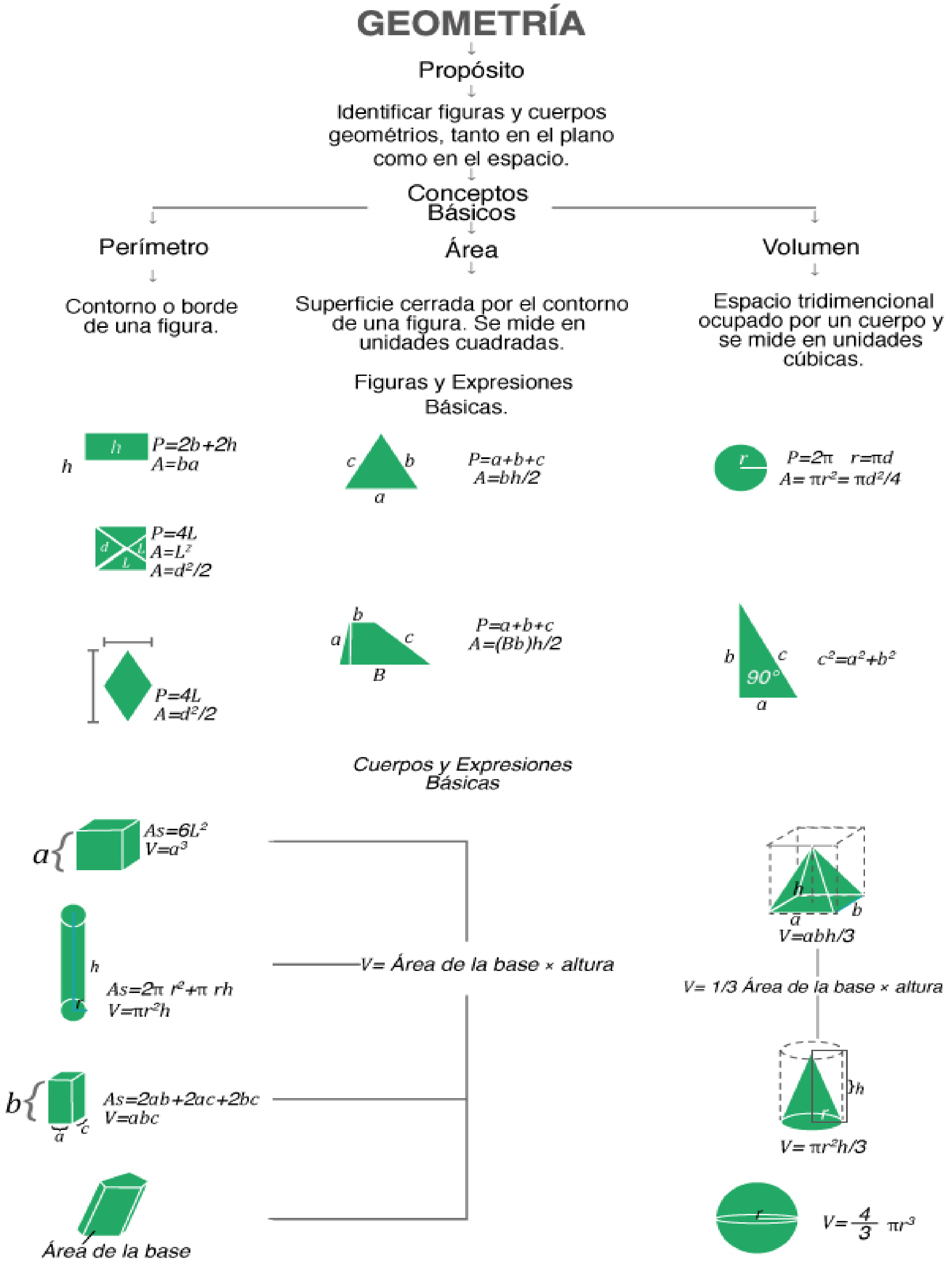
D. 231,4 cm



Para tener mayor claridad sobre la situación, hay que realizar un dibujo acerca de esta. Los triángulos que se forman en esta situación son el ΔABE y ΔACD y, tal como se mostró en el ejemplo anterior, son semejantes. Por tanto, sus lados correspondientes son proporcionales; luego, se puede plantear la proporción sencilla de la que hablaba Carolina, a saber:

$$\frac{h}{162\text{cm}} = \frac{250\text{ cm}}{150\text{ cm}} \quad h = \Longrightarrow \frac{(162\text{ cm})\,(250\text{ cm})}{150\text{ cm}} = 270\text{ cm}$$

Podemos entonces concluir que la altura de la lámpara es 270 cm y que la opción de respuesta correcta es la **B.**



GEOMETRÍA

Propósito

Identificar figuras y cuerpos geométrios, tanto en el plano como en el espacio.

Conceptos Básicos

Perímetro

Contorno o borde de una figura.

Área

Superficie cerrada por el contorno de una figura. Se mide en unidades cuadradas.

Volumen

Espacio tridimencional ocupado por un cuerpo y se mide en unidades cúbicas.

Figuras y Expresiones Básicas.

Cuerpos y Expresiones Básicas

TRIGONOMETRÍA

La trigonometría es la rama de la geometría que se encarga del estudio de los triángulos, es decir que su objeto de estudio son las relaciones que pueden establecerse entre los lados y ángulos en un triángulo. Los resultados de la trigonometría pueden ser aplicados para resolver una gran cantidad de problemas prácticos que van de la navegación hasta la astronomía.

La trigonometría era conocida por los egipcios quienes la usaban en problemas de construcción por ejemplo en el papiro de Ahmes, uno de los escritos matemáticos más importantes de la antigüedad, aparecen problemas en los que se pregunta por la relación entre la mitad el lado de la base de una pirámide y su altura, lo cual corresponde a la relación cotangente como veremos más adelante.

Los babilonios también usaron la trigonometría pero principalmente en el campo de la astronomía, pues realizaron gran cantidad de registros detallados del movimiento de los planetas y la posición de las estrellas lo cual requiere el manejo de distancias angulares en la esfera que representa la tierra. Otra aplicación interesante de la trigonometría realizada en la antigüedad, fue aportada por el griego Eratóstenes, el cual ideo un método trigonométrico y junto con este uso las nociones de latitud y longitud para calcular el radio de la tierra con una precisión realmente asombrosa para la época.

Medidas angulares

En el capítulo de geometría definimos al ángulo como la medida de la abertura entre dos semirrectas con el mismo origen y al grado como su unidad de medida. Para los objetivos de dicho capitulo, esta definición es suficiente, pero al introducir las funciones trigonométricas necesitamos definirlas sobre el conjunto de los números reales y como los grados no representan números reales, necesitamos definir una nueva unidad de medida que si pueda ser representada por dichos números. A esta unidad de medida la llamamos radianes y no nos adentraremos mucho en su definición sino que presentaremos la escala de conversión entre grados y radianes y especificaremos cuando un ángulo se mide en grados o en radianes.

Conversión de grados a radianes:

La mayoría de las veces los ángulos medidos en radianes se expresan en términos del número π el cual corresponde al perímetro de una semicircunferencia de radio 1 (el perímetro de una circunferencia unitaria es 2 π) de esto diremos entonces que π radianes corresponde a 180° y para determinar la medida en radianes de un ángulo dado en grados, haremos uso de las técnicas de proporcionalidad directa y a estudiadas. A continuación mostramos la medida en radianes de algunos de los ángulos más usados en la práctica.

Grados	Radianes
180°	π rad
360°	2π rad
90°	π/2 rad
60°	π/3 rad
30°	π/6 rad
45°	π/4 rad

Para los demás ángulos se usa una regla de tres simple como se ve a continuación.

Ejemplo 1:

Hallar la medida en radianes de un ángulo de 100 grados. Establecemos la relación

Grados	Radianes
180°	π
100	x

De esto tenemos que $x=100°π$ rad/180°. Lo cual da como resultado $x=5π/9$ rad=1.74 rad

Ejemplo 2:

Convertir 90 radianes a grados. Planteamos nuevamente una regla de 3 directa.

Grados	Radianes
180°	π
x	90

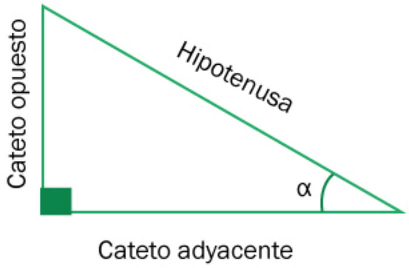
Esta vez la solución es $x=180°×90$rad/$π$ rad lo cual da como resultado 5156.62°.

Nota: se debe tener especial cuidado de hacer las operaciones con los ángulos siempre en la misma unidad de medida, pues como acabamos de ver 90° no es lo mismo que 90rad.

Relaciones trigonométricas

El punto de partida de la trigonometría es el de las relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo. Recordemos que se definió el teorema de Pitágoras como una herramienta que permite hallar la medida de uno de los lados de un triángulo rectángulo cuando se conocen los otros dos. Pero, ¿qué hacer cuando no se conocen dos lados de un triángulo? es claro que no se puede usar el teorema de Pitágoras para hallar la medida de sus lados. En ese punto aparecen las relaciones trigonométricas como alternativa para llevar a cabo esta tarea, así que el objetivo de este capítulo será encontrar las condiciones o los datos que deben conocerse en un triángulo (en principio rectángulo) y las técnicas que permiten resolverlo, es decir conocer todos sus lados y ángulos.

Dado un triángulo rectángulo, para uno de sus ángulos $α$ se definen las relaciones trigonométricas como las razones entre los lados de dicho triangulo, a los cuales nombraremos según la relación que guarden con el ángulo $α$.



Las relaciones trigonométricas seno, coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente se definen para el ángulo α de la siguiente forma:

$$\text{sen}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \text{sen}\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$$

De esto podemos ver que se cumplen las siguientes igualdades

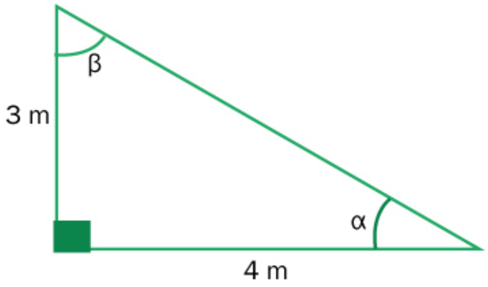
$$\tan\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\csc\alpha = \frac{1}{\text{sen}\alpha}$$

Consideremos el siguiente triángulo rectángulo:



Del teorema de Pitágoras tenemos que la hipotenusa mide 5m ahora hallemos el valor para cada una de las funciones trigonométricas para los ángulos α y β teniendo en cuenta que para β el cateto opuesto es aquel que mide 4m y el adyacente es aquel que mide 3m.

senα= 3/5=0.6	senβ= 4/5=0.8
cosα= 4/5=0.8	cosβ= 3/5=0.6
tanα= 3/4=0.75	tanβ= 4/3=1.33...
cscα=5/3=1.66...	cscβ=5/4=1.25
secα= 5/4=1.25	secβ= 5/3=1.66...
cotα= 4/3= 1.33...	cotβ= 3/4= 0.75

Notemos que senα=cosβ y cosα=senβ. Como el triángulo es rectángulo se debe cumplir que $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ por lo que obtenemos las siguientes igualdades para cualquier ángulo α en un triángulo rectángulo:

$$\text{sen}\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

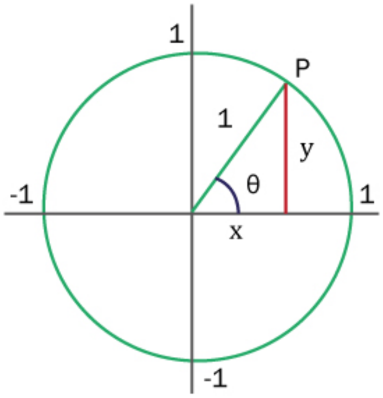
$$\cos\alpha = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

Así pues quedan definidas las relaciones trigonométricas para cualquier ángulo α en un triángulo rectángulo aunque cabe mencionar que no es tan sencillo conocer dichos valores para cualquier ángulo y que la mayoría de las veces los triángulos rectángulos tienen medidas que corresponden a números racionales. Es por esto que presentamos la siguiente tabla con los valores de seno y coseno para los ángulos más notables que aparecen en la práctica.

Ángulo (rad)	0	30	45	60	90	180	270	360
Ángulo (°)	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Seno	0	1/2	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
Coseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1/2	0	-1	0	1

El círculo unitario

Ahora es natural preguntarse cómo se puede conocer el valor de las relaciones trigonométricas para otros ángulos a partir de las que ya conocemos. Para ello consideremos una circunferencia de radio 1 centrada en el origen del plano cartesiano.



Notemos que en este caso, para el punto P, la coordenada en x corresponde precisamente a cosθ y la coordenada en y corresponde a senθ, pues la hipotenusa del triángulo rectángulo mide exactamente 1.

Si usamos el teorema de Pitágoras en este triángulo establecemos la siguiente igualdad que se cumple para cualquier ángulo.

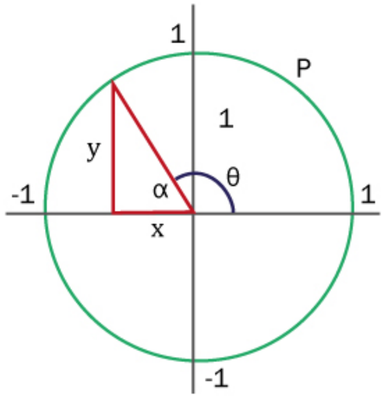
$$\text{sen}^2\,\theta+\cos^2\theta=1$$

La cual se denomina identidad pitagórica.

Valor de las relaciones trigonométricas para ángulos no agudos

Ya hemos mencionado que las relaciones trigonométricas para cualquier ángulo entre 0 y 90° se calculan dividiendo los lados de un triángulo rectángulo, pero esta técnica no funciona cuando tenemos un ángulo obtuso que no es agudo (que mide más de 90°) ya que este no puede ser uno de los ángulos internos de un triángulo rectángulo así que el método para calcular los valores de las relaciones trigonométricas para cualquier ángulo es el siguiente:

.Se dibuja el ángulo θ en el círculo unitario y se forma un triángulo rectángulo en el que el ángulo suplementario de θ tiene como lado opuesto al lado vertical (altura) del triángulo.



Así por ejemplo si θ=120° entonces α=60°

Los valores de las relaciones trigonométricas para θ son los mismos que para α salvo el signo que depende del cuadrante en que se dibuje el triángulo rectángulo, pues ya que dependiendo de este, los lados del triángulo toman valores positivos o negativos.

El siguiente diagrama dos muestra cuales de las relaciones trigonométricas son positivas dependiendo del cuadrante en que se encuentren.

II **sen**	**I** **sen** **cos** **tan**
tan **III**	**cos** **VI**

En el primer cuadrante tanto seno como coseno son positivas porque las coordenadas de x y y son positivas. En el segundo cuadrante seno es positivo porque y toma valores positivos, pero coseno es negativo porque x toma valores negativos y tangente es negativa porque corresponde al cociente entre seno y coseno. De igual manera se realiza el análisis de los signos en los demás cuadrantes.

Nota: Presentamos solo las relaciones seno, coseno y tangente porque sus respectivas reciprocas, cosecante, secante y cotangente tienen el mismo signo que ellas.

Así se tiene que por ejemplo cos 150° es negativo mientras que tan 150° es positivo.

Ejemplo 3:

Si se sabe que sen$\theta=\frac{2}{3}$, donde $\pi<\theta<,\frac{3\pi}{2}$ entonces el valor de cosθ es

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

B. $\frac{-\sqrt{5}}{3}$

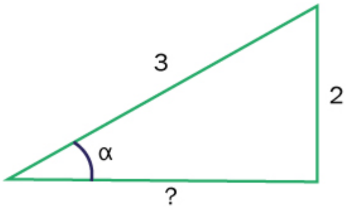
C. $\frac{-\sqrt{5}}{2}$

D. $\frac{-\sqrt{5}}{3}$

Solución

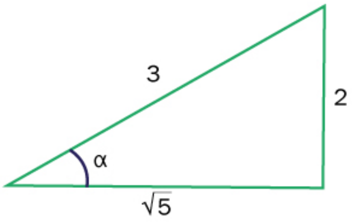
Como $\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$, tenemos que θ se encuentra en el tercer cuadrante por lo que cosθ es negativo, lo cual indica que debemos descartar las opciones A y D.

Por otro lado los valores de las relaciones trigonométricas para θ son los mismos (salvo el signo) que los que toman estas para el ángulo α del siguiente triangulo rectángulo:



Como debemos hallar el valor de cos α entonces usamos el teorema de Pitágoras para hallar la medida del cateto adyacente.

$$Ca=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{9-4}- \quad 5$$

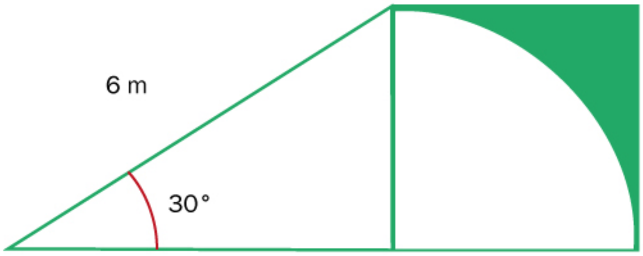


Tenemos que cos $\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$ por lo que cos $\theta=\frac{-\sqrt{5}}{2}$, así la respuesta correcta es la opción B.

Presentamos ahora algunos problemas geométricos que pueden ser resueltos usando lo aprendido hasta ahora. Recordemos que utilizamos las relaciones trigonométricas para calcular la medida de los lados de un triángulo rectángulo cuando se conoce uno de los lados y al menos uno de sus ángulos agudos.

Ejemplo 4:

De la siguiente figura calcular el área sombreada:



Según lo aprendido en el capítulo de geometría, el área sombreada de la figura corresponde a la resta entre el área de un cuadrado y el área de un cuarto de círculo.

$$A=L^2-\frac{\pi R^2}{4}$$

De la figura notamos que el lado del cuadrado y el radio del círculo coinciden con el lado opuesto del triángulo rectángulo.

$$L=R=lado\ opuesto$$

Como conocemos la hipotenusa y buscamos el lado opuesto al ángulo de 30°, usamos la relación seno

$$\text{Sen}30°=\frac{L}{6}$$

$$6\text{sen}30°=L$$

$$6\,\frac{1}{2}=L$$

$$3=L$$

Tenemos entonces que el lado del cuadrado mide 3 metros por lo que

$$A=3^2-\frac{\pi 3^2}{4}$$

$$A=9-\frac{9\pi}{4}$$

$$A=9\left(1-\frac{9\pi}{4}\right)$$

Ejemplo 5:

un cuadro de masa m = 6 kg, tiene un ancho a = 1,2 m y un alto b = 1,0 m. Los alambres que lo sostienen de las 2 esquinas superiores forman un ángulo de 10° con la horizontal La longitud L de cada uno de los alambres es

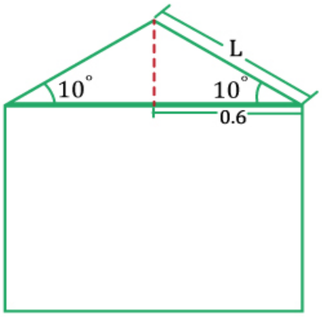
A. $\frac{0.6}{\cos 10}$

B. 0.6cos10

C. 1.2sen10

D. $\frac{0.6}{\text{sen}10}$

Solución



En este caso consideramos el triángulo rectángulo que se forma con la longitud de uno de los alambres como hipotenusa y tal que el lado adyacente al ángulo de 10° es la mitad del ancho total del cuadro, es decir 0.6m. como tenemos el lado adyacente a un ángulo dado y nuestra incognita es la hipotenusa, utilizamos el coseno y obtenemos $\cos 10° = \frac{0.6}{L}$ Despejando L se tiene que la longitud de cada alambre es

$$L = \frac{0.6}{\cos 10°}$$

Lo cual indica que la respuesta correcta es la opción **A**.

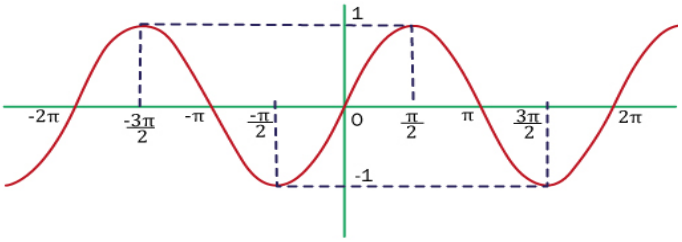
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

La principal razón por la que introducimos la medida de los ángulos en radianes es la de definir las funciones trigonométricas con dominio en el conjunto de los números reales (o un subconjunto de este). Estas funciones tienen su principal aplicación el análisis de fenómenos ondulatorios como el sonido y la luz.

Presentaremos cada una de las funciones trigonométricas junto con su gráfica y sus principales propiedades.

$$f(x)=\operatorname{sen}x$$

La función f(x)=senx tiene como dominio al conjunto de todos los numeros reales (ángulos medidos en radianes) y asigna a cada uno su valor del seno. Como el valor de seno siempre está entre -1 y 1, podemos afirmar que el rango de esta función es el intervalo [-1,1]. A continuación mostramos la gráfica de la función f(x)=senx.



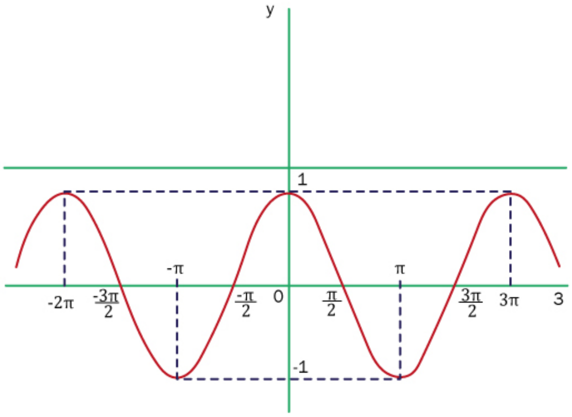
De la gráfica podemos ver que la función f(x)=senx es periodica, es decir, se repite cada 2π, esto indica que

$$\operatorname{sen}x = \operatorname{sen}(x+2\pi)$$

Al valor 2π se le denomina periodo de la función. Veremos que cada una de las funciones trigonométricas es periódica de ahí su utilidad en el estudio de los fenomenos ondulatorios. Además de la periodicidad, podemos ver que senx es impar pues su gráfica es simétrica respecto al origen por lo que sen(-x)=-sen(x).

$$f(x)=\cos x$$

Teniendo en cuenta que la igualdad cosx=sen$\left(\frac{\pi}{2}\text{-x}\right)$ se cumple para cualquier valor de x y al recordar los conceptos sobre transformaciones de funciones, tenemos que la gráfica de cosx corresponde a una traslacion de la grafica de senx un factor de $\frac{\pi}{2}$. Ademas podemos concluir que su dominio es el conjunto de todos los reales y su rango es el intervalo [-1,1].



De la gráfica también podemos concluir que la función cosx es periódica y su periodo es 2π de ahí se cumple que

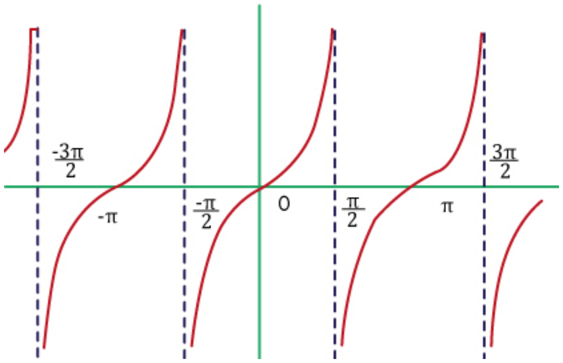
$$\text{senx}= \text{sen}(x+2\pi)$$

Por otro lado, como la gráfica es simétrica respecto al eje y, tenemos que se trata de uan función par por lo que cos(-x)=cos(x).

$$f(x)=\tan x$$

Recordando que la funcion tanx se puede definir como el cociente de senx y cosx, el dominio de esta corresponde al conjunto de todos los reales excepto aquellos que anulen el denominador , es decir, aquellos valores para los cuales cosx=0 lo cual ocurre en x=$\frac{\pi}{2}$ y en todos sus multiplos impares.

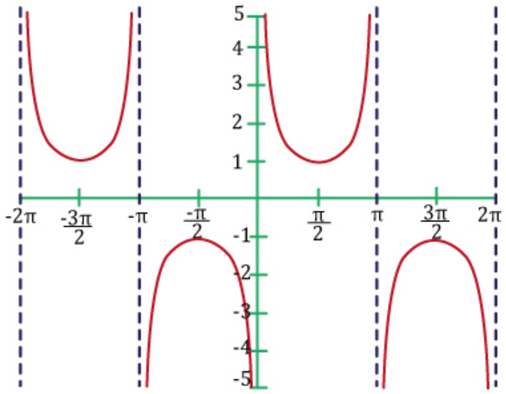
En cuanto al rango de tanx, este coreresponde a todos los números reales.



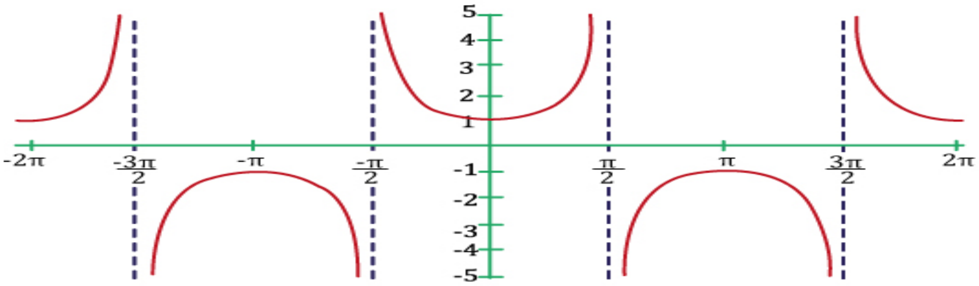
Notemos que los valores que corresponden a múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$ representan asíntotas de la función, pues esta no está definida en aquellos valores. La funcion tanx tambien es periodica y su periodo corresponde a π.

Ahora presentamos las gráficas de las funciones secx, cscx y cotx. intenta decucir cuales son su dominio y rango así como su periodo.

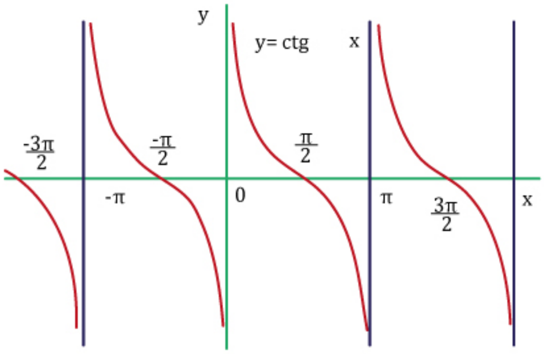
f(x)=cscx



f(x)=secx



f(x)=cotx



A continuación presentamos ejemplos de algunas de las preguntas referentes a las gráficas de las funciones trigonométricas que parecen en la prueba de admisión de la universidad nacional

Ejemplo[1]

La gráfica de la función $y=\cos(x+\frac{\pi}{2})$ se obtiene trasladando la gráfica de $y=\cos x$, $\frac{\pi}{2}$ unidades hacia

A. arriba

B. abajo

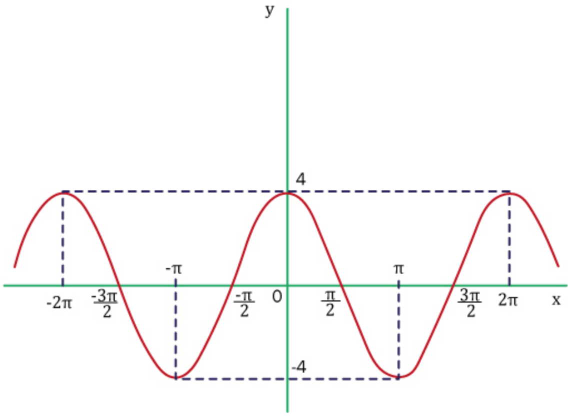
C. la derecha

D. la izquierda

Recordando los conceptos aprendidos sobre transformaciones de gráficas, tenemos que cuando se suma una cantidadad c dentro del argumento (dentro de el parentesis) de la función, esta se traslada 2 unidades hacia la izquierda si la cantidad es positiva y a la derecha si la cantidad es negativa. Como en este caso la cantidad que se suma es $\frac{\pi}{2}$ (positiva) tenemos que la gráfica se traslada hacia la izquierda, por tanto la respuesta es la opción **D.**

Ejemplo[2]

la ecuación que describe la curva de la figura es



A. $y=4\operatorname{sen}(x-\pi)$

B. $y=4\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

C. $y=4\operatorname{sen}(x+\pi)$

D. $y=4\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

Solución

Recordemos que sen(0)=0, esto indica que la gráfica debe cortar el eje x en un valor que haga que el argumento de la función valga cero. De la figura podemos ver que la grafica se hace cero cuando $x=\frac{\pi}{2}$ y para que esto se cumpla, el argumento de la función debe ser $x+\frac{\pi}{2}$, lo cual deja como unica respuesta posible a la opción **D.**

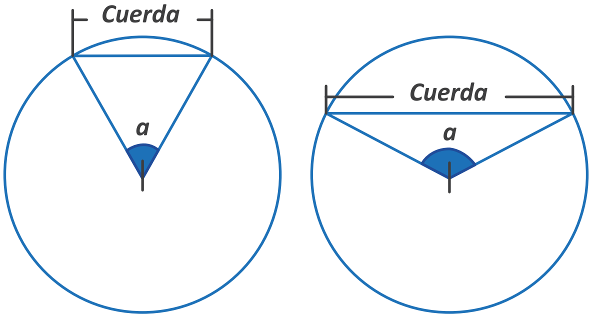
---

[1] *Tomado del examen de admisión de la Universidad de Nacional 2009-1*
[2] *Tomado del examen de admisión de la Universidad de Nacional 2009-1*

Leyes del seno y el coseno

Euclides escribe durante el siglo III a.C., quizás el libro más importante en la historia de la geometría. La obra “Elementos” es un tratado matemático constituido por 13 tomos. En estos, Euclides recopila gran parte del saber matemático de su época y enuncia algunos resultados adicionales que dan lugar a lo que hoy se conoce como geometría Euclidiana.

En el tercer tomo, analiza el cambio de la longitud de una cuerda a medida que cambia el ángulo que la genera, tal y como lo muestra la figura:

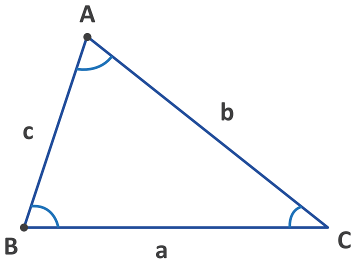


La distancia que une los dos puntos en cada círculo es llamada cuerda, podemos observar que la longitud de la cuerda aumenta a medida que el ángulo aumenta y viceversa.

Basados en este concepto, diferentes matemáticos del siglo XIII, redefinieron los resultados de Euclides para reforzar el estudio de los triángulos no rectángulos y unieron sus esfuerzos para postular la siguiente ley:

Ley del Seno

Sobre un triángulo cualquiera con ángulos A, B, C y distancias a, b y c respectivamente opuestas a sus ángulos:



Podemos afirmar que:

$$\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } C}{c}$$

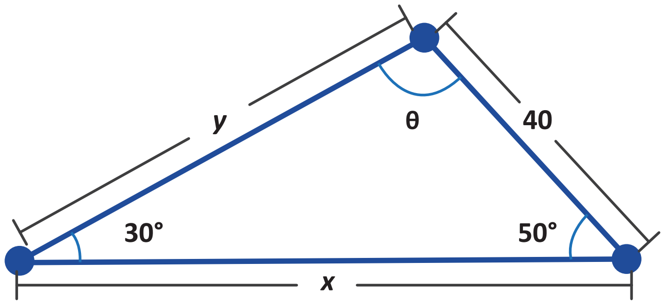
Por tanto las siguientes tres igualdades son validas sobre todo tipo de triángulo:

1. $\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } B}{b}$
2. $\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } C}{c}$
3. $\frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } C}{c}$

Con ayuda de esta ley podemos calcular ángulos y distancias sin necesidad que el triángulo sea rectángulo, ya que la misma se define para cualquier tipo de triángulo. A continuación se presenta como podemos aplicar la ley del seno para el cálculo de distancias desconocidas.

Ejemplo 1:

Para el triángulo presentado en la gráfica:



El valor de x puede calcularse por medio de la expresión:

A. $x = (\text{sen } 100°)(40)(0{,}5)$

B. $x = (\text{sen } 40°)(200)$

C. $x = \dfrac{(\text{sen } 100°)(40)}{\text{sen } 30°}$

D. $x = \dfrac{(\text{sen } 30°)(\text{sen}100°)}{40}$

Solución

Se tiene que $\theta=100°$ ya que la suma de los tres ángulos debe ser igual a 180°. Luego, reemplazando los valores del triángulo en las equivalencias propuestas por la ley del seno, tenemos que:

1. $\dfrac{\text{sen } 30}{40} = \dfrac{\text{sen } 50}{\boxed{y}}$
2. $\dfrac{\text{sen } 30}{40} = \dfrac{\text{sen } 100}{\boxed{x}}$
3. $\dfrac{\text{sen } 50}{\boxed{y}} = \dfrac{\text{sen } 100}{\boxed{x}}$

Para escoger con que ecuación trabajar basta con notar que en la ecuación 3 desconocemos dos variables lo que la hace inútil hasta el momento y la ecuación 1 permite calcular la variable y, no la variable x, por lo tanto trabajando con la ecuación 2, tenemos:

$$\frac{\text{sen } 30°}{40} = \frac{\text{sen } 100°}{x}$$

Se concluye que la respuesta es la opción **C**.

Cabe recordar que durante las pruebas no es posible utilizar calculadora, es decir, conocemos únicamente el valor de las funciones para ángulos notables (0°, 30°, 45°, 60° y 90°), en los demás casos debe dejarse expresado, por ejemplo en el ejercicio anterior, el siguiente resultado también es válido:

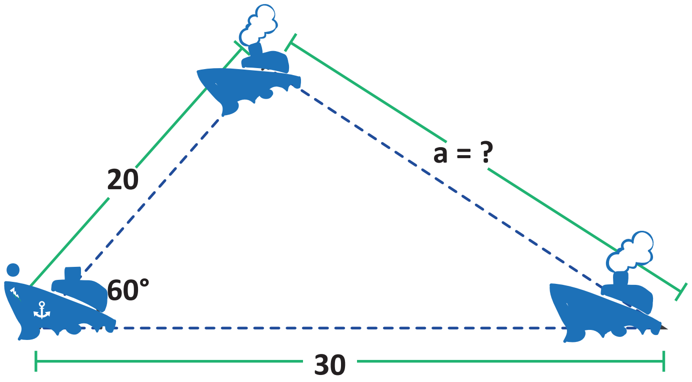
$$x= \frac{(\text{sen } 100°)(40)}{\text{sen } 30°} = \frac{(\text{sen } 100°)(40)}{(1/2)}$$

$$= (2)(40) \text{ sen } 100° = 80 \text{ sen } 100°$$

En ocasiones, también nos encontramos con ejercicios que únicamente presentan un valor conocido en cada una de las ecuaciones de la ley del seno, tal y como se muestra en el siguiente problema.

Ejemplo 2:

Una cámara policial aérea visualiza un fugitivo que huye en barco hacia otro país. El fugitivo es perseguido por dos barcos de seguridad que se encuentran a 20 y 30 metros de su objetivo tal y como lo muestra la imagen aérea:



Con la información suministrada, ¿será posible calcular la distancia que guardan entre si los barcos de seguridad? Para calcular el valor del lado faltante reemplacemos los valores conocidos sobre las ecuaciones presentadas por la ley del seno y obtenemos:

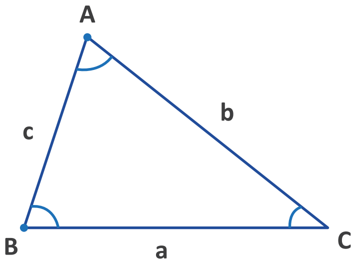
1. $\frac{\text{sen } 60}{\boxed{a}} = \frac{\boxed{\text{sen } B}}{20}$

2. $\frac{\text{sen } 60}{\boxed{a}} = \frac{\boxed{\text{sen } C}}{30}$

3. $\frac{\boxed{\text{sen } B}}{20} \quad \frac{\boxed{\text{sen } C}}{30}$

Observemos que no es posible empezar a trabajar con alguna de estas ecuaciones ya que en todas ellas se desconocen dos variables y para poder desarrollar una ecuación es necesario desconocer al menos una variable. Para este tipo de casos podemos hacer uso de la siguiente ley.

Ley del coseno



Sobre un triángulo cualquiera con ángulos A, B, C y lados con medidas a, b y c respectivamente opuestas a sus ángulos, podemos afirmar que:

1. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc * \cos A$
2. $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac * \cos B$
3. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab * \cos C$

Ahora podemos resolver el problema anterior usando la ley del coseno

1. $a^2 = 20^2 + 30^2 - 2(20)(30) * \cos 60°$
2. $20^2 = a^2 + 30^2 - 2a(30) * \cos B$
3. $30^2 = a^2 + 20^2 - 2a(20) * \cos C$

Es decir, podemos utilizar la ecuación 1) para calcular el lado restante:

$$a^2 = 20^2 + 30^2 - 2\,(20)(30) * 60°$$

$$a^2 = 400^2 + 900^2 - 1200 * \frac{1}{2}$$

$$a^2 = 1300 - 600$$

$$a^2 = \sqrt{700}$$

$$a^2 = \sqrt{7 * 100} = \sqrt{7} * 10$$

$$a^2 = 10\sqrt{7}$$

Finalmente, podemos afirmar que la distancia entre ambos barcos es $10\sqrt{7}$ metros.

Puede observarse entonces, que las leyes del seno y el coseno generalizan la solución de problemas trigonométricos lo que le da un inmenso valor matemático a los dos teoremas presentados. Sin embargo, se sugiere por facilidad en el procedimiento utilizar la ley del seno siempre que sea posible.

Identidades trigonométricas

Una identidad trigonométrica es una igualdad entre funciones trigonométricas que se cumple para cualquier ángulo, por ejemplo:

$$\text{Tan } a = \frac{\text{Sen } a}{\text{Cos } a}$$

La igualdad para la tangente es cierta sin importar el valor que tome el ángulo α. Recordemos la identidad pitagórica que presentamos antes

$$\text{Sen}^2\, a + \text{Cos}^2\, a = 1$$

A partir las dos identidades que acabamos de presentar, se pueden deducir otras. Veamos el siguiente ejemplo. La expresión $\text{Tan}^2\,(\alpha)+1$ es equivalente a

A. $\text{Sen}^2\, a + 1$
B. $\text{Sec}^2\, a$
C. $\text{Cot}^2\, a + 1$
D. $\text{Cos}^2\, a + 1$

Solución

El primer paso sugerido es expresar las funciones presentes en términos de senos y cosenos, por tanto de acuerdo a la identidad pitagórica se tiene que

$$\text{Tan}^2\, a + 1 = \left[\frac{\text{Sen}\ a}{\text{Cos}\ a}\right]^2 + 1$$

Luego realizamos todas las operaciones aritméticas posibles

$$\frac{\text{Sen}^2 a}{\text{Cos}^2 a} + 1 = \frac{\text{Sen}^2 a}{\text{Cos}^2 a} + \frac{1}{1} = \frac{\text{Sen}^2 a + \text{Cos}^2 a}{\cos^2 a}$$

El numerador de la experesion de la derecha es igual a 1 por lo que

$$\frac{\text{Sen}^2 a + \text{Cos}^2 a}{\cos a^2} = \frac{1}{\cos a^2} = \left[\frac{1}{\cos a}\right] = \text{Sec}^2\, a$$

Luego **$\text{Tan}^2\ \alpha+1= \text{Sec}^2\ \alpha$**, por tanto se concluye que la respuesta correcta es la C.

Ejemplo 2:

De las siguientes expresiones trigonométricas:

I. $\text{Sen}^2\, \text{a} - \text{Cos}^2\, \text{a}$

II. $\text{Sen}^2\, \text{a} + \text{Cos}^2\, \text{a}$

III. $\dfrac{1 - \text{Sen}^2\, \text{a}}{\text{Cos}^2\, \text{a}}$

Son equivalentes a la expresión **$\text{Sec}^2\ \alpha - \text{Tan}^2\ \alpha$**

A. I

B. II y III

C. I y III

D. III

Solución

Expresando las funciones secante y tangente en términos de seno y coseno tenemos que:

$$\text{Sec}^2\, a - \text{Tan}^2\, a = \left[\frac{1}{\text{Cos}\ a}\right]^2 - \left[\frac{\text{Sen}\ a}{\text{Cos}\ a}\right]^2$$

$$= \frac{1}{\text{Cos}^2 a} - \frac{\text{Sen}^2 a}{\text{Cos}^2 a}$$

$$= \frac{1 - \text{Sen}^2 a}{\text{Cos}^2 a} = \frac{\text{Cos}^2 a}{\text{Cos}^2 a} = 1$$

Finalmente, si se observa el procedimiento realizado y teniendo en cuenta las identidades conocidas podemos afirmar que:

$$\mathrm{Sec}^2 a - \mathrm{Tan}^2 a = \frac{1 - \mathrm{Sen}^2 a}{\mathrm{Cos}^2 a} = 1\ \mathrm{Sen}^2 a + \mathrm{Cos}^2 a$$

Se concluye que la respuesta es la **B**.

Funciones seno y coseno para la suma y resta de ángulos:

Para concluir este capítulo se presentan algunas identidades para la suma y resta de ángulos:

- **Sen (a + b) = Sen *a* Cos *b* + Cos *a* Sen *b***
- **Sen (a - b) = Sen *a* Cos *b* - Cos *a* Sen *b***
- **Cos (a + b) = Cos *a* Cos *b* - Sen *a* Sen *b***
- **Cos (a - b) = Cos *a* Cos *b* - Sen *a* Sen *b***

Estas pueden ser bastante útiles para calcular funciones de ángulos no notables tal y como se presenta en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3:

El valor de la expresión $\mathrm{Cos}\,(120°) + \frac{1}{2}$ es:

A. **Igual a 0 debido a que *Cos* (120°) = $-\frac{1}{2}$**

B. **Igual a 1 debido a que *Cos* (120°) = $\frac{1}{2}$**

C. **Igual a $\frac{1}{2}$ debido a que *Cos* (120°) = $\frac{1}{2}$**

D. **Igual a $\sqrt{3}$ debido a que *Cos* (120°) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$**

Solución

Reemplazando en la ecuación designada para el coseno de la suma de ángulos y expresando 120° como suma de ángulos notables tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathrm{Cos}\,(120°) &= \mathrm{Cos}\,(90°+30°) \\ &= \mathrm{Cos}\,90°\ \mathrm{Cos}\,30° - \mathrm{Sen}\,90°\ \mathrm{Sen}\,30° \\ &= (0)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - (1)\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$