Módulo

Matemáticas

FORMARTE

Numérico - Variacional

Esta componente alude al significado del número y sus diferentes usos; a la estructura del sistema de numeración; al significado y utilización de las operaciones, así como a la comprensión de sus propiedades y las relaciones sí; al reconocimiento de regularidades y patrones; a la identificación de variables; a la descripción de fenómenos de cambio y dependencia; a la variación en contextos aritméticos y geométricos; y al concepto de función. (Tomado de www.icfes.gov.co)

La presente sección tiene la intención de abordar los conocimientos evaluados por las pruebas SABER 11° en la componente referida al pensamiento numérico-variacional. Se presenta a continuación la distribución de temáticas por medio de tres capítulos:

Capítulo 1

- Conjuntos numéricos y operaciones aritméticas
- Equivalencias numéricas
- Potenciación, radicación y logaritmación
- Secuencias
- Interpretación de la recta real
- Interpretación de coordenadas

Capítulo 2

- Interpretación de intervalos y desigualdades
- Inecuaciones
- Solución e interpretación de ecuaciones lineales
- Construcción de ecuaciones y equivalencias algebraicas a partir de un enunciado

Capítulo 3

- Interpretación algebraica y de dependencia de la función lineal
- Interpretación gráfica de la función lineal
- Interpretación de ecuaciones y funciones cuadráticas

CAPÍTULO 1.

Conjuntos númericos y operaciones aritméticas

Los conjuntos numéricos son agrupaciones de números que guardan una serie de propiedades comunes y que van surgiendo de la necesidad de representar cantidades que en ocasiones no podemos ni imaginar. A continuación se describe cada uno de los conjuntos numéricos:

Número naturales (N):

Este conjunto numérico surgió en el proceso de aprendizaje que tuvo el hombre cuando descubrió la forma de contar elementos, es decir, son los números que utilizamos para contar, N= {1,2,3,4,5,6,7,8, ... }.

Números enteros (Z):

Es común escuchar frases como: “2 grados bajo cero”, “20 metros bajo el nivel del mar”, “la deuda asciende a 5.000 dólares”. Estas frases se refieren a cantidades menores que cero y de la necesidad de representar estas cantidades surgen los enteros negativos, que los podemos conocer como los negativos de los números naturales. Los números enteros están formados por los enteros positivos (los números naturales), el cero, y los enteros negativos (negativos de los números naturales).
Z= {...,-4,-3,-2,-1, 0,1, 2, 3, 4,...}

Números racionales (Q):

Es común escuchar frases como: “8 Km y medio”, “son las 3 y cuarto de la tarde”, “se usan 2 tomates y un tercio de otro para la receta”. Surge entonces la necesidad del hombre de tomar algunas partes más pequeñas que la unidad. Los números racionales son aquello números que se pueden expresar mediante una fracción (a/b), donde a y b son números enteros, como por ejemplo: 7/12,-2/3,26/5. Se consideran también números racionales a algunos decimales:

1. Los decimales finitos: aquellos en que sus cifras decimales son finitas, como por ejemplo: 0,38; 2,1; - 0,125.
2. Los decimales infinitos periódicos: Aquellos que tienen un número infinito de cifras decimales que se repiten indefinidamente, como por ejemplo: 0,666...; 0,282828...;5,9999...; - 1,444... 0,7555...; 0,512222....; - 0,71656565...

Números irracionales (Q'):

En libros de matemáticas o física se acostumbra a observar valores como: π=3,141592..., $\sqrt{2}$=1,4142135..., =2,718281..., Los números irracionales son los decimales infinitos no periódicos (que ninguna cifra decimal se repite indefinidamente) y todas las raíces inexactas reales (como las raíces cuadradas de números primos), o sea valores que no pueden ser representados mediante una fracción de dos números enteros.

Números reales (R):

Surgen de la unión entre los números racionales e irracionales. R={Q U Q'}.
Estos números cumplen con las siguientes propiedades:

Propiedad conmutativa:

a+b=b+a (en la suma)
a.b=b.a (en la multiplicación)

Ejemplos: 8 + 9 = 9 + 8
2 x 4 = 4 x 2

Propiedad Asociativa:

a+(b+c)=(a+b)+c (en la suma)
a.(b.c)=(a.b).c (en la multiplicación)

Ejemplos: 5 + (6 + 7) = (5 + 6) + 7
(9 x 6) = (12 x 9) x 6

Propiedad modulativa o neutra:

a+0=a (El módulo de la suma es el 0)

Ejemplos: 18 + 0 = 18
-43 + 0 = -43

a.1=a (El módulo de la multiplicación es el 1)

Ejemplos: 9 x 1 = 9
-3 x 1 = -3

Propiedad del Inverso Aditivo (simétrica):

a+(-a)=0

Ejemplos: 6 + (-6) = 0
(-32) + 32 = 0

Propiedad del Inverso Multiplicativo (simétrica):

$$a\times\left(\frac{1}{a}\right)=1$$

Ejemplos: $5\times\frac{1}{5}=1$

Propiedad Distributiva:

a.(b+c)=a.b+a.c (del producto con respecto a la suma o Resta).

Ejemplos: 5 x (30 + 14) = 5 x 30 + 5 x 14
5 x (30 - 14) = 5 x 30 - 5 x 14

Números imaginarios (i):

Nótese que:

$\sqrt{16} = \pm 4$ porque 4 x 4=16 o (-4) x (-4) = 16

$\sqrt{-16}$ no tiene solución en los números reales porque no hay un número que multiplicado por si mismo nos de -16.

Este conjunto numérico surge por la necesidad de poder representar las raíces de índice par de cantidades negativas.

La unidad de los números imaginarios es la raíz cuadrada de – 1 y se denota por i. o sea que $\sqrt{-1} = i$, por lo tanto:

$\sqrt{-16} = \sqrt{16} \times \sqrt{-1} = 4i$

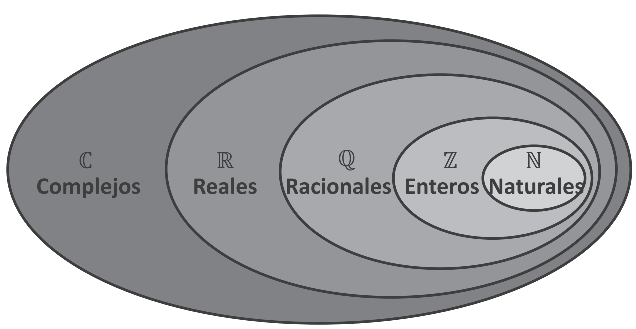
Estos números tienen aplicaciones en el campo del álgebra.

Números complejos (C):

Describen la suma entre un número real y un imaginario.

Según las definiciones dadas podemos concluir que los números naturales están incluidos en los enteros, los enteros en los racionales, los racionales en los reales y los reales en los complejos.

El siguiente diagrama nos facilitará comprender de manera clara la distribución de los conjuntos numéricos, unos con respecto a otros:



Actividad Propuesta

1. Escribir:
   A. 5 números racionales entre 0.45 y 3
   B. 5 números irracionales entre 0.45 y 3

2. Completar con si o no la siguiente tabla, según la pertenencia o no a cada conjunto numérico

Número	8	$\sqrt{20}$	-5,02	4,282882	$\sqrt{144}$	$\sqrt{-25}$	$\frac{-5}{9}$	-49,213123
Natural								
Entero								
Racional								
Irracional								
Real								
Imaginario								

3. NOTA: Se sugiere hacer un repaso completo a la forma de resolver las operaciones básicas con los números reales: suma, resta, multiplicación y división de números enteros, fraccionarios y decimales, ya que vital para poder cumplir con todos los logros en el área de matemáticas, la mayoría de física y química, y algunos de las otras áreas. A modo de repaso se propone resolver:

   A. 25.004×12
   B. 25.498 ÷ 6
   C. 958.430 ÷ 57
   D. 631 × 427
   E. 7/8 + 21/8 – 3/8
   F. 5/6 + 7/4
   G. 1 – 9/13
   H. 3/8 + 5/12 – 6/9
   I. 7/12 × 1/3 × 8/5
   J. 2/5 de 7500
   K. 1/6 de 2/11
   L. 1/3 de 9300
   M. 12/9 ÷ 1/9
   N. 5/4 × (3/5 ÷ 2/7)
   O. 1.4+0.72+15.34
   P. 0,3587+41,235
   Q. 45,2-6,28
   R. 0,9587-32,002
   S. 0.02 x×0.25
   T. 18 ×23,46
   U. 364 × (-8,26)
   V. 240 ÷ 2,5
   W. 586,243 ÷ 4
   X. 65,6985 ÷ 9,2
   Y. 8,26 ÷ 12,8254

TRANSFORMACIONES EQUIVALENTES ENTRE NÚMEROS FRACCIONARIOS, MIXTOS Y DECIMALES.

Estas transformaciones son sencillas de hacer y son muy útiles al momento de interpretar la ubicación de valores de números reales en la recta numérica, además son necesarias para poder enfrentar ejercicios que cuenten con este tipo de estructuras en su enunciado o en las opciones de respuesta.

Transformación de un número mixto a fracción:

Un número mixto es aquel que consta de una parte entera y una fraccionaria, por ejemplo:

$$6\frac{2}{3},\ 1\frac{1}{4}$$

Para hacer esta transformación se multiplica la parte entera por el denominador de la fracción, se le suma el numerador y este resultado queda sobre el mismo denominador de la fracción.

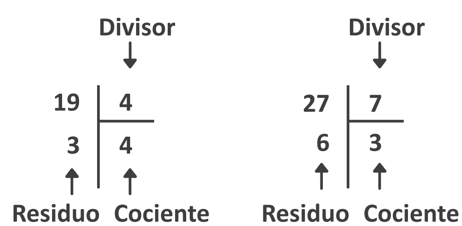
$$6\frac{2}{3} = \frac{6x3+2}{3} = \frac{20}{3} \qquad 1\frac{1}{4} = \frac{1x4+1}{4} = \frac{5}{4}$$

Transformación de una fracción a un número mixto:

Con dos ejercicios se ejemplifica la manera de hacer esta transformación.

Expresar como números mixtos las siguientes fracciones: 19 / 4,27 / 7

- Se efectúan las divisiones respectivas sin:



- El cociente de la división será la parte entera del mixto, el residuo el numerador de la fracción y el divisor el denominador:

$$\text{Cociente}\ \frac{\textit{Residuo}}{\textit{Divisor}}$$

Por lo tanto, las fraccione se expresan como mixto de la siguiente manera:

$$^{19}/_{4} = 4\frac{3}{4} \qquad ^{27}/_{7} = 3\frac{6}{7}$$

Transformación de fracción a decimal:

Una fracción es una división indicada, por lo tanto simplemente se debe realizar dicha operación y se pueden obtener tres tipos diferentes de decimales:

- Decimal finito: $\frac{1}{2} = 0{,}5$ $\frac{1}{8} = 0{,}125$ $\frac{48}{20} = 2{,}4$

- Decimal periódico: $\frac{2}{3} = 0{,}666...$ (El periodo es 6) $\frac{7}{9} = 0{,}777...$(El periodo es 7)

Transformación de decimal a fracción:

Decimal finito a fracción: En el numerador se ubica el número completo sin la coma del decimal y en el denominador se ubica el uno con tantos ceros como cifras decimales tenga el número inicial:

$$1{,}274= \frac{1274}{1000} \qquad 0{,}85= \frac{85}{100}$$

Potenciación, Radicación y Logaritmación

Mediante un ejemplo podemos recordar claramente la relación estructural que existe entre estas tres operaciones:

Estructura de la potenciación:

Se da la base (en nuestro ejemplo es el 10), el exponente (es el 3) y se obtiene la potencia o resultado (es el 1000). Se lee "10 elevado a la 3 es 1000", donde el exponente 3 indica el número de veces que se debe multiplicar la base 10 por sí misma:

$$10^3=10\times10\times10=1.000$$

Estructura de la radicación:

Se da el radicando (es el 1000), el índice (es el 3) y la raíz o resultado (es el 10). Se lee "raíz cúbica de 1000 es 10". En la radicación, comparada con la potenciación, se busca el número que multiplicado por si mismo (la base) 3 veces dé como resultado 1000.

$$\sqrt[3]{1.000} =10$$

Estructura de la logaritmación:

Se da la base (es el 10), la potencia (es el 1000) y el logaritmo o resultado (es el 3); recordar que cuando el logaritmo es en base 10 tiende a no colocarse y suponer que es en base 10, para cualquier otra base es necesario colocar su valor numérico. En la logaritmación, comparada con la potenciación, se busca el número de veces (el exponente) que se debe multiplicar la base para obtener la potencia 1000.

$$\log_{10} 1.000=3 \rightarrow \log 1.000=3$$

Propiedades:

En la siguiente tabla se resume las principales propiedades de cada una de las operaciones, las cuales son muy útiles al momento de resolver o simplificar ejercicios.

Potenciación

$$a^n - a^m = a^{n+m}$$

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$a^0=1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Radicación

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$$

$$\sqrt{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

Logaritmación

$$\log_a a^n=n$$

$$\log_a a=1$$

$$\log_a 1=0$$

$$\log_a a=1$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x+\log_a y$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^n = n\log_a x$$

$$\log_a \sqrt{x} = \frac{1}{n}\log_a x$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$a^{\log_a x}=x$$

Series y Sucesiones

Una secuencia es una serie de datos que se obtienen mediante un patrón de formación, o sea que dependiendo de los valores anteriores se pueden definir los siguientes. La secuencias pueden resultar muy útiles en muchas situaciones donde se desea predecir un dato; por ejemplo, calcular en cuánto tiempo se doblaría una cantidad de dinero prestada a un determinado interés compuesto, el número de habitantes en cierto país dentro de 20 años teniendo en cuenta la forma gradual en que va aumentando, el número de conejos que se tendrán en un criadero en cierto tiempo o el número de veces que un semáforo ha estado en color verde en 3 horas de funcionamiento.

La idea es determinar entre dato y dato que tipo de operación se realizó para obtener dicho valor y mediante ese análisis poder predecir los siguientes valores en la secuencia. Es de gran importancia determinar si una secuencia es creciente o decreciente para deducir fácilmente su comportamiento:

- Si la secuencia es creciente, el patrón de formación está constituido por medio de sumas o multiplicaciones. Si la secuencia es decreciente, el patrón está conformado por divisiones o restas.
- Si la secuencia crece o decrece con diferencias pequeñas, se puede pensar en sumas y restas; si crece o decrece a con diferencias muy grandes, la operación debe ser una multiplicación o una división.

A continuación se propone deducir cuál es el dato siguiente en cada una de las secuencias dadas y luego se muestra la solución:

A. **1, 5, 9, 13, ...** (Note que es creciente)

En esta secuencia se puede determinar que cada término se obtiene sumando 4 unidades al término anterior y este es el llamado patrón de formación.

$$1 \overset{+4}{,} 5 \overset{+4}{,} 9 \overset{+4}{,} 13 \overset{+4}{,} 17 \overset{+4}{,} 21 \overset{+4}{\ldots}$$

Por lo tanto el dato siguiente es el 17 y para encontrar los siguientes se sigue sumando 4 unidades.

B. **30, 29, 26, 21, ...** (Es decreciente con diferencias pequeñas)

El patrón de formación de esta secuencia consiste en restar los números impares:

$$30 \overset{-1}{,} 29 \overset{-3}{,} 26 \overset{-5}{,} 21 \overset{-7}{\quad} 14 \ldots$$

Se debe restar 7 unidades al 21 para encontrar el valor pedido, o sea 14.

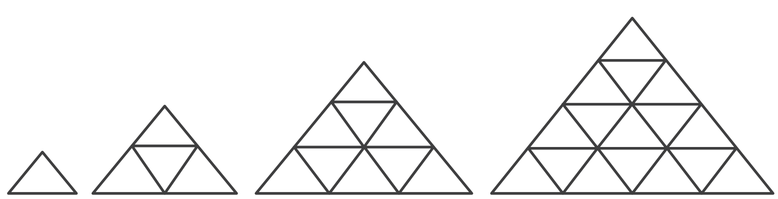
C. **7, 21, 19, 57, 55,...** (Note que hay crecimiento y decrecimiento)

El patrón de formación de esta secuencia consiste en intercalar dos operaciones, multiplicar por 3 y restar 2 unidades:

$$7 \overset{X3}{,} 21 \overset{-2}{,} 19 \overset{X3}{,} 57 \overset{-2}{,} 55 \overset{X3}{,} 165 \ldots$$

Se debe multiplicar por 3 al 55 para encontrar el siguiente término, o sea 165.

D. Un niño de un jardín infantil, usando los triángulos que tiene disponibles para jugar, arma las siguientes 4 figuras en el mismo orden que se muestra a continuación:



(1) (2) (3) (4)

¿El número de triángulos como el de la figura 1 que necesita el niño si quiere armar la figura 10, siguiendo el mismo patrón es?

La idea en este tipo de secuencias gráficas es deducir la manera como va creciendo la figura entre término y término. Para esto, se forma una secuencia numérica contando el número de triángulos que tiene cada una de las 4 figuras mostradas:

En la figura uno hay 1 triángulo, en la dos hay 4 triángulos, en la 3 hay 9 triángulos y en la figura cuatro hay 16 triángulos:

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \ldots$$

En esta secuencia podemos notar que el número de triángulos resulta de elevar al cuadrado el número de la posición que le corresponde a dicha figura en la secuencia:

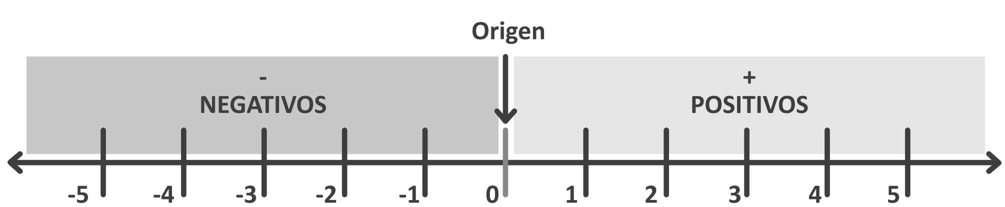
$$\begin{array}{cccccc} 1, & 4, & 9, & 16, & \ldots, & 100 \\ \Uparrow & \Uparrow & \Uparrow & \Uparrow & & \Uparrow \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & & 10^2 \end{array}$$

Para saber cuántos triángulos se necesitan para armar la figura 10, basta con elevar el 10 al cuadrado, o sea 100, sin necesidad de dibujar la figura, la cual vemos que debido al número de triángulos resultaría muy tediosa.

La Recta Numérica

Los números reales en su totalidad se pueden ordenar en una recta numérica. Con ella, se puede determinar si un número es menor o mayor que otro, se pueden representar intervalos y compararlos con otros, entre otras utilidades que tiene el uso de la recta.

La recta numérica es una línea infinita que tiene su origen en el cero, a la derecha se ubican los números positivos y a la izquierda los negativos, donde normalmente se escriben los números enteros y estos se toman como referencia para ubicar cualquier otro valor. A cada número real le corresponde sólo un punto en la recta



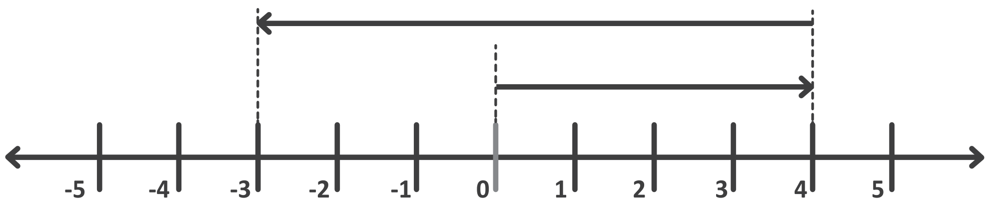
Nota: En la recta numérica, cualquier número que se encuentre ubicado a la derecha de otro es mayor que él, sin importar si es negativo o positivo.

¿Es mayor -5, -3 o -1?
Podemos notar en la recta que el -1 se encuentra a la derecha tanto de -5 como de -3 y que -3 está a la derecha de -5, por lo tanto se puede afirmar que -1 es mayor que -3 y -3 es mayor que -1.

Desplazamientos positivos y negativos:

Los desplazamientos que se hagan hacia la derecha en la recta son cantidades positivas y hacia la izquierda son negativas.

Ejemplo:
Un camión recorre 4 Km hacia la derecha y después 7 en sentido contrario ¿a cuántos Km se encuentra de la posición inicial?

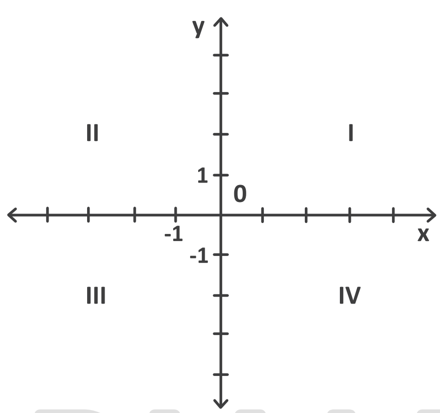


$$4 + -7 = -3$$

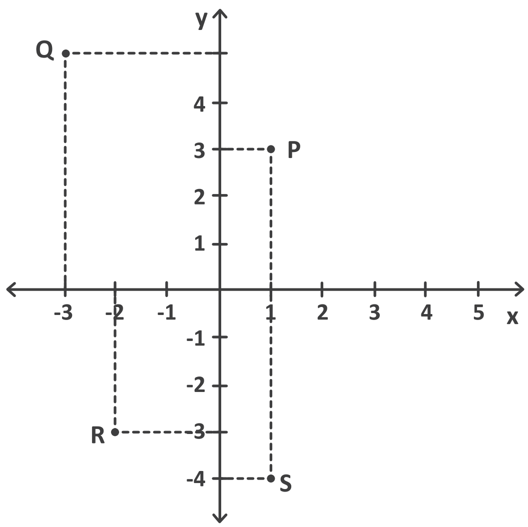
El Plano Cartesiano

Desde la antigüedad, la necesidad de orientarse indujo a los humanos a diseñar mapas y a relacionar los puntos de una superficie mediante números. Al querer fijar una figura en el espacio o en un plano se debe relacionar o comparar con un sistema de referencia que permita obtener conclusiones con respecto a esa ubicación y realizar cálculos que puedan ser beneficiosos. Un ejemplo simple es cuando nos preguntar acerca de la ubicación de la iglesia en nuestro vecindario y la guía dada al visitante es algo como “suba 3 cuadras por esta calle, luego gire a la derecha y recorre 5 cuadras más y ahí la encuentra”, donde el punto de referencia es la ubicación de las dos personas.

En matemáticas, el sistema de referencia se forma sobre un plano con dos rectas perpendiculares que se intersecan en un punto, que se denota con la letra O y es llamado origen, al igual que en la recta numérica. La recta horizontal es llamada eje x o abscisa y la recta vertical es llamada eje y u ordenada. El diseñador del plano elige una unidad de medida y una escala, con la que se marcan con signo positivo las distancias en las semirrectas desde el origen hacia arriba y hacia la derecha, y con signo negativo desde el origen hacia abajo y hacia la izquierda. En el plano se generan 4 cuadrantes que son numerados con I, II, III y IV en sentido contrario de las manecillas del reloj, como lo muestra la siguiente figura.



La forma de referenciar cualquier punto ubicado en el plano cartesiano se hace mediante un par ordenado, el cual consiste en una pareja de números dentro de un paréntesis y separados por una coma, donde el primero es el valor que corresponde al punto en el eje x o abscisa, y el segundo es el valor que corresponde al eje y, como se ilustra en el siguiente ejemplo.



P corresponde al punto (1,3)

Q corresponde al punto (-3,5)

R corresponde al punto (-2,-3)

S corresponde al punto (1,-4)

CAPÍTULO 2.

Intervalos y Desigualdades

A diario podemos escuchar, leer o interpretar datos como: la temperatura en Medellín hoy estará entre los 15°C a 25°C, las medidas de una cancha de fútbol para juegos internacionales deben oscilan desde los 100m de largo x 64m de ancho hasta 110m de largo x 75m de ancho, la cantidad de cianuro que soporta el cuerpo humano está entre 20 y 40 partes por millón. Estos conjuntos de números que oscilan entre ciertos rangos son llamados intervalos y se pueden representar de forma escrita o en la recta numérica.

Es importante recordar los siguientes símbolos que serán usados para representar desigualdades:

"$>$" (mayor que), "$<$" (menor que), "$\geq$" (mayor o igual que) y "$\leq$" (menor o igual que)
A continuación se muestra los diferentes tipos de intervalos, su simbología y su representación en la recta real.

Intervalos acotados: Estos intervalos están limitados por un número real en ambos extremos.

Intervalo	Simbología	Interpretación	En la recta real
Abierto.	(a,b)	No incluye los extremos. Se expresa: a<x<b.	a( )b
Cerrado	[a,b]	Incluye ambos extremos. Se expresa a≤x≤b.	a[ ]b
Abierto a la derecha	[a,b)	Incluye el extremo izquierdo. Se expresa a≤x<b.	a[ )b
Abierto a la izquierda	(a,b]	Incluye el extremo derecho. Se expresa a<x≤b	a( ]b

Intervalos no acotados: Estos intervalos están limitados por un número real en uno de sus extremos y el otro se puede extender hasta el infinito (+∞ o al menos infinito -∞)

Simbología	Interpretación	En la recta real
(-∞,a)	Está formado por los números reales x menores que a, excluido a. Se expresa: x<a	-∞)a
(-∞,a]	Está formado por los números reales x menores que a, incluido a. Se expresa: x≤a	-∞]a
[a,+ ∞)	Está formado por los números reales x mayores que a, incluido a. Se expresa: x≥a	a[∞
(a,+ ∞)	Está formado por los números reales x mayores que a, excluido a. Se expresa: x>a	a(∞

ACTIVIDAD

Representar en forma simbólica y en la recta los siguientes intervalos

Intervalo	Simbología	En la recta real
Los números reales x mayores de 25		
Los números reales x mayores que -8 y menores que 3		
Los números reales x mayores o iguales que 0 y menores que 12		
Los números reales x mayores o iguales que 126		

Los números reales x mayores o iguales que -20 y menores o iguales que -9		
Los números reales x menores que 45		
Los números reales x mayores que 30 y menores o iguales que 36		
Los números reales x menores o iguales que 1		

Inecuaciones

La solución matemática tanto de inecuaciones como de ecuaciones está basada en la teoría y los procedimientos algebraicos, por lo que mostraremos algunas guías teóricas para desarrollar correctamente los pasos necesarios para desarrollar las inecuaciones y las ecuaciones.

Expresiones algebraicas:

Son la representación de una cantidad formada por uno o más términos, los cuales están formados por letras, números, signos de agrupación y operaciones. Una expresión algebraica es llamada en general *polinomio*. El grado del polinomio es el mayor exponente que se tenga entre los términos que lo conforman. Además existen casos especiales para los que se asigna un nombre específico a un determinado *polinomio:*

Monomio: es una expresión algebraica formada por un solo término: 50x, este monomio es de grado 1 porque es el exponente de la x.

Binomio: es un polinomio formado por dos términos: 28m3 – 7m. Este binomio es de grado 3, porque es el mayor exponente de la parte literal. Se le llama polinomio cúbico.

Trinomio: es un polinomio formado por tres términos: 22y2 -3y + 37. Este trinomio es de grado 2 por el mayor exponente que aparece en él. Se les llama polinomios cuadráticos.

Términos semejantes:

Son aquellos términos que tienen la parte literal idéntica, incluyendo el exponente, si bien sus coeficientes pueden ser diferentes. Por ejemplo, los términos 42x2, 2x2, -24x2 son semejantes, ya que su parte literal es idéntica.

Suma y resta entre términos semejantes:

Para sumar o restar dos o más términos semejantes, se debe realizar la operación respectiva entre sus coeficientes y el resultado estará acompañado de la misma parte literal. Si no todos los términos son semejantes, se agrupan los que son semejantes entre sí y se operan de forma independiente a los no semejantes.

Ejemplo 1 : $10xn^3 + 3xn^3 - 7xn^3 = 6xn^3$

Ejemplo 2: $-4z^3 + 25m + 5m - 12z^3 - 22m + 8k$

Agrupar los términos semejantes: $(-4z^3 - 12z^3) + (25m + 5m - 22m) + 8k$

Operar los términos semejantes: $-16z^3 + 8m + 8k$

Nótese que el término 8k no tiene alguno semejante, por lo tanto no puede operarse y debe quedar igual hasta el final del ejercicio.

Cada letra en una expresión algebraica representa un número cualquiera, cuyo valor, al conocerse, puede ser reemplazado en dicha expresión:

Definición de inecuación:

Una inecuación es una desigualdad entre dos expresiones algebraicas, o sea que tienen por lo menos una incógnita. Recordar que al ser una desigualdad, en ella aparece uno de los signos: < (menor que), ≤(menor o igual que), >(mayor que) o ≥(mayor o igual que). Para una desigualdad pueden existir varias soluciones o hasta infinitas, como también puede que no tenga solución.

Por ejemplo, $25x + 3y \leq 12x + 125$

Para dar solución a una inecuación se debe encontrar los valores de la incógnita para los cuales se cumple dicha desigualdad. Por lo general, la solución de una inecuación es un intervalo o una unión de intervalos de números reales, por esta razón se puede ilustrar la solución con una gráfica, utilizando la recta numérica y marcando el intervalo entre los números que dan solución a la desigualdad..

Las reglas para la resolución de una inecuación son prácticamente las mismas que se emplean para la resolución de ecuaciones, pero teniendo en cuenta ciertas situaciones que las diferencian de una ecuación. Estas diferencias se plasman a continuación:

Propiedades de las inecuaciones:

Al sumar o al restar una misma cantidad en ambos miembros de la inecuación el signo de la desigualdad no cambia.

$180x + 40 < 15$ Restamos 40 en ambos lados:

$$180x + 40 - 40 < 15 - 40$$

$$180x < -25$$

Vemos que el "menor que" no cambió.

- Al multiplicar o dividir por un número positivo en ambos miembros de la inecuación el signo de la desigualdad no cambia

$34m < -60$ Dividimos por 2:

$34m \div 2 < 60 \div 2$

$34m < 30$

Vemos que el "menor que" no cambió.

NOTA: "Si el signo es menor que, cambia a mayor que y viceversa, si el signo es menor o igual que, cambia a mayor o igual que y viceversa"

$-x < 15$ Multiplicamos por (-1):

$(-x) \bullet (-1) > 15 \bullet (-1)$

$x > -15$

Vemos que el "menor que" cambió por "mayor que"

Solución de inecuaciones lineales (de primer grado) con una incógnita:

Se muestran algunos ejemplos donde se aplican las propiedades:

1. Resolver la inecuación: $5x - 10 > 35$

Recordar que al igual que en las ecuaciones, en las inecuaciones se debe despejar la incógnita, o sea transferir todos los términos diferentes a la incógnita al otro lado de la desigualdad para lograr dejar la incógnita sola y con signo positivo.

Debemos ubicar todos los términos que tengan a la incógnita a un lado y los números al otro lado de la desigualdad.

Entonces sumamos 10 en ambos lados de la desigualdad y así desaparece el -10 del lado de la incógnita, porque la operación inversa de la resta es la suma.

Tendremos: $5x - 10 + 10 > 35 + 10$

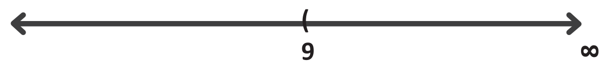
$5x > 45$

Ahora tenemos el número 5 que está multiplicando a la incógnita x, entonces dividimos en ambos lados entre 5 y así desaparece del lado de la incógnita y logramos dejarla sola, porque la operación inversa de la multiplicación es la división.

Tendremos ahora: $5x \div 5 > 45 \div 5$

$x > 9$,es decirel intervalo: $(9,\infty)$

Entonces el valor de la incógnita "x" serán todos los números mayores que 9.
Gráficamente, esta solución la representamos así:



Esto significa que en la recta numérica, desde el número 9 (sin incluirlo) hacia la derecha todos los valores (hasta el infinito + ∞) resuelven la inecuación.

2. Resolver la inecuación $-10x - 15x + 1 \leq -65x + 36$

Llevamos los términos semejantes a un lado de la desigualdad y los términos independientes al otro lado de la desigualdad (aplicado operaciones inversas para transferir los términos). El -65x que está restando pasa a sumar y el +1 pasa a restar:

$$-10x - 15x + 65x \leq 36 - 1$$

Se resuelven las operaciones indicadas y obtenemos:

$$40x \leq 35$$

El 40 que está multiplicando a la incógnita pasa a dividir, y simplificamos.

$$x \leq \frac{35}{40}$$

$x \leq 7/8$,o sea el intervalo $(-\infty, 7/8]$

Entonces el valor de la incógnita "x" serán todos los números menores o iguales que 7/8.

Gráficamente, esta solución la representamos así:

Esto significa que en la recta numérica, desde el número 7/8 (incluido) hacia la izquierda todos los valores (hasta el infinito - ∞) resuelven la inecuación.

3. Resolver la inecuación: $-2x - 6 > 6x - 9$

Llevamos los términos semejantes a un lado de la desigualdad y los términos independientes al otro lado de la desigualdad (aplicado operaciones inversas para transferir los términos). El 6x que está positivo pasa a restar y el -1 pasa a sumar:

$$-2x - 6x > -9 + 6$$

Se resuelven las operaciones indicadas y obtenemos:

$$-8x > -3$$

El -8 que está multiplicando a la incógnita pasa a dividir y al pasar a dividir un número negativo, se invierte el signo de la desigualdad, pasa de ser mayor que a menor que:

$$x<(-3)/(-8\ )$$

$$\text{Por ley de signos,}x< \frac{3}{8}\text{, o sea el intervalo }\left(\frac{3}{8},\infty\right)$$

Entonces el valor de la incógnita "x" serán todos los números menores que 3/8.

Gráficamente, esta solución la representamos así:

Ecuaciones

A diferencia de las inecuaciones, en las ecuaciones siempre se presenta necesariamente una igualdad donde existe al menos una incógnita. La forma de solucionarlas es similar a la de las inecuaciones pero la igualdad siempre se va a mantener la igualdad al aplicar las operaciones inversas al momento de querer despejar la incógnita.

En las situaciones problema encontradas en todo tipo de pruebas, es normal que no se propongan las preguntas referentes a ecuaciones dando las expresiones algebraicas, sino que se redacta dicha situación y el lector debe estar en capacidad de plantear dichas expresiones a partir del enunciado. Por esto, a continuación se da una guía para interpretar correctamente estas situaciones:

Lenguaje algebraico

Con el lenguaje numérico realizamos operaciones en las que sólo aparecen números. El lenguaje que utiliza letras y números unidos mediante los signos de las operaciones aritméticas, se denomina lenguaje algebraico. La principal función de lenguaje algebraico es estructurar un idioma que ayude a generalizar las diferentes operaciones que se desarrollan dentro de la aritmética. Por ejemplo: si queremos sumar dos números cualesquiera basta con decir: a + b. También el lenguaje algebraico ayuda a plantear relaciones generales para el razonamiento de problemas a los que se puede enfrentar cualquier ser humano en la vida cotidiana.

El objetivo de estudiar el lenguaje algebraico es saber definir qué tipo de operaciones se deben utilizar al momento de afrontar el enunciado de una situación problema.

A continuación, se muestra los enunciados más comunes usados en problemas y su respectiva representación algebraica:

Un número cualquiera	X
Un número aumentado en 10 unidades	$X + 10$
Un número disminuido en 10 unidades	$X - 10$
El doble de un número	$2X$
El triple de un número disminuido en 10 unidades	$3X - 10$
La séptima parte de un número	$X/7$
La cuarta parte de un número aumentado en p	$\frac{x}{4} + P$
La quinta parte de diferencia entre un número y 8	$\frac{x - 8}{5}$
El doble de la suma entre un número y 10	$2(X + 10)$
Un número multiplicado por sí mismo	x^2
El doble del cuadrado de un número	$2x^2$
El cuadrado del doble de un número	$(2x)^3$
El cubo de un número	x^3
El recíproco de un número	$\frac{1}{x}$
La suma de tres números consecutivos	$x + (x + 1) + (x + 2)$
La razón, fracción o relación entre dos números	$\frac{X}{Y}$
Un número excede a otro en 10 unidades	$X = Y + 10$
A es el doble de B	$a = 2b$
La semisuma de los lados de un triángulo	$\frac{X+Y+Z}{2}$
Un número par	$2X$
Un número impar	$2X - 1$
La diferencia de un número y su cuadrado	$x - x2$
El triple de un número aumentado en15	$3X + 15$
El triple de, un número aumentado en15	$3(X + 15)$
Mi edad hace 12 años	$X - 12$
Mi edad dentro de 12 años	$X + 12$
El cuádruplo de la edad que tendré dentro de 8 años	$4(X + 8)$
La quinta parte de la edad que tenía hace 4 años	$\frac{X - 4}{5}$

Solución de ecuaciones lineales con una incógnita

Para resolver ecuaciones lineales con una incógnita debemos seguir los siguientes pasos:

1. Como en toda situación problema, lo primero que debe hacerse es leer, analizar e interpretar completamente todo el enunciado.
2. Según la lectura, crear la ecuación correspondiente.
3. Se hace una transposición de términos, reuniendo a un lado de la igualdad los términos que contengan la incógnita y del otro lado todas las cantidades constantes.
4. Se reducen términos semejantes en cada lado de la igualdad.
5. Se despeja la incógnita dividiendo ambos términos de la ecuación por el coeficiente de esta

EJEMPLOS:

4. El cuádruplo de la edad que tenía hace 4 años equivale al doble de mi edad actual más 10 años. Mi edad actual es:
   A. 10 años
   B. 11 años
   C. 12 años
   D. 13 años

Después de una buena lectura e interpretación, procedemos a deducir las expresiones algebraicas que corresponden a cada lado de la ecuación e igualarlas, donde tomaremos la variable X como la edad actual:

El cuádruplo de la edad que tenía hace 4 años = $4(x - 4)$
El doble de mi edad más 10 años = $2x + 10$

$$4(x - 4)= 2x + 10$$

Aplicamos propiedad distributiva al paréntesis, multiplicándolo por 4:

$$4x - 16 = 2x + 10$$

Transponemos términos semejantes y se operan:

$$4x - 2x= 10 + 16$$

$$2x = 26$$

$$x= 26/2$$

$$x = 13$$

Mi edad actual es de 13 años.

5. Una jarra usada en la cocina para almacenar líquidos tiene 1/5 de su capacidad ocupada con chocolate, al adicionarle 200 ml más de chocolate queda llena hasta los 3/10. La capacidad de la jarra es:
   A. 1.500 ml
   B. 2.000 ml
   C. 2.500 ml
   D. 3.000 ml

Solución:

Llamaremos C, a la capacidad total de la jarra. Según el enunciado se puede inferir que al sumar la cantidad de chocolate que ocupa una quinta parte de la capacidad de la jarra y 200 ml adicionados, se debe obtener una cantidad de chocolate equivalente a los tres décimos del tanque:

$$\frac{1}{5}C+200=\frac{3}{10}C$$

Debemos transponer términos semejantes, los términos que poseen la incógnita C deben quedar en un lado de la ecuación y el 200 del otro, teniendo en cuenta que al transponer términos cambian las operaciones:

$$\frac{1}{5}C-\frac{3}{10}C=-200$$

Se resuelve la resta entre términos semejantes, mediante resta de fracciones heterogéneas y despejando la incógnita C:

$$\frac{2C-3C}{10}=-200$$

$$-\frac{C}{10}=-200$$

$$-C=-200\times 10$$

$$-C=-2.000$$

$$C=2.000$$

La capacidad del tanque es de 2.000 mililitros.

Solución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Un sistema de ecuaciones es aquel en el que intervienen dos o más ecuaciones y más de una incógnita. A continuación estudiaremos los sistemas llamados de 2x2, que constan de 2 ecuaciones y 2 incógnitas, para los cuales se usan normalmente algunos de los siguientes tres métodos: sustitución, igualación y reducción.

Método de sustitución:

Para resolver un sistema de ecuaciones por el método de sustitución debemos seguir los siguientes pasos:

1. Despejar una de las dos incógnitas de cualquiera de las dos ecuaciones.
2. Sustituir la expresión hallada en la otra ecuación.
3. Resolver las operaciones indicadas para hallar el valor de la incógnita en la expresión resultante.
4. Reemplazar el valor hallado en cualquiera de las dos ecuaciones iniciales. Preferiblemente en la ecuación que ya está despejada.
5. Resolver las operaciones indicadas y hallar el valor de la incógnita faltante.

Ejemplo: hallar el valor de las incógnitas que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones.

$$2x+5y=-24$$

$$8x-3y=19$$

1. Despejamos la variable x en cualquiera de las dos ecuaciones; en este caso, lo haremos en la primera:

$$x=\frac{-5y-24}{2}$$

2. Sustituimos en la segunda ecuación (tener cuidado de no reemplazar en la misma ecuación):

$$8\left(\frac{-5y-24}{2}\right)-3y=19$$

Podemos transponer el término 3Y a sumar al otro lado de la ecuación; después, pasar el 2 que divide a multiplicar, aplicar propiedad ditributiva y agrupar términos semejantes:

$$8\left(\frac{-5y-24}{2}\right)=19+3y$$

$$8(-5y+24)=2(19+3y)$$

$$-40y-192=38+6y$$

$$-40y-6y=38+192$$

$$-46y=230$$

$$y=-230/46$$

$$y=-5$$

3. Hallamos el valor de y en la anterior expresión, obteniendo que y = -5

4. Sustituimos el valor de y en la expresión encontrada en el numeral 1 y se encuentra el valor de x:

$$x=\left(\frac{-5(-5)-24}{2}\right)=19+3y$$

$$x=\frac{1}{2}$$

Método de igualación: para resolver un sistema de ecuaciones mediante el método de igualación, debemos seguir los siguientes pasos:

1. Despejar en ambas ecuaciones la misma incógnita.
2. Igualar las dos expresiones encontradas.
3. Resolver la expresión resultante para hallar el valor de la incógnita involucrada.
4. Sustituir el valor de la incógnita encontrada en cualquiera de las ecuaciones iniciales.
5. Resolver la ecuación lineal resultante para hallar el valor de la incógnita faltante.

Ejemplo: hallar el valor de las incógnitas que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones.

$$7x + 4y = 13 \quad (1)$$
$$5x - 2y = 19 \quad (2)$$

1. Despejamos la variable x en ambas ecuaciones:

$$x= \frac{13 - 4y}{7} \text{ en la ecuación número 1}$$

$$x= \frac{19 + 2y}{5} \text{ en la ecuación número 2}$$

2. Igualamos las expresiones resultantes en el numeral anterior:

$$\frac{13 - 4y}{7} = \frac{19 + 2y}{5}$$

3. Multiplicamos cruzado y despejamos la variable y:

$$65 - 20y = 133 + 14y$$

$$y= -2$$

4. Sustituimos el valor hallado en cualquiera de las expresiones obtenidas en el numeral 1:

$$x= \frac{13 - 4\,(-2)}{7} = \frac{13 + 8}{7} = \frac{21}{7} = 3$$

Por tanto, lo valores de las incógnitas son: $x= 3, y=- 2$

Método de reducción o eliminación:

Para resolver un sistema de ecuaciones mediante el método de reducción, primero debemos comparar los coeficientes, donde la idea es que los coeficientes de alguna de las dos incógnitas sean iguales para restar ambas ecuaciones y lograr obtener una ecuación lineal con sólo una incógnita. Para lograr esto se deben seguir los pasos que se enuncian a continuación:

1. Escoger cuál de las dos incógnitas se quiere cancelar.
2. El coeficiente de la incógnita de una ecuación multiplica todos los términos de la otra ecuación y viceversa. Esto con el objetivo de que la incógnita por cancelar quede con el mismo coeficiente en ambas ecuaciones.
3. Luego restamos ambas ecuaciones (términos semejantes entre sí) para eliminar la incógnita seleccionada.
4. La ecuación resultante es lineal, y procedemos a calcular el valor de la incógnita.
5. Sustituimos el valor de la incógnita encontrada en cualquiera de las ecuaciones iniciales y calculamos el valor de la otra incógnita.

Nota: si en el sistema de ecuaciones, en alguna de las dos incógnitas hay un coeficiente igual, se deben seguir los pasos a partir del numeral tercero.

Ejemplo: resolver el siguiente sistema de ecuaciones.

$$5x + 6y = 20 \quad (1)$$
$$4x - 3y = -23 \quad (2)$$

Solución:

1. Escogemos la variable x para eliminarla.
2. En la ecuación 1, el coeficiente de x es 5 y éste multiplicará a la ecuación 2.

En la ecuación 2, el coeficiente de x es 4, que multiplicará a toda la ecuación 1.

En la ecuación 1 multiplicamos por 4	En la ecuación 2 multiplicamos por 5
$4(5x + 6y) = 4*20$ $20x + 24y = 80$	$5(4x - 3y) = 5*(-23)$ $20x - 15y = -115$

Se logra el objetivo de dejar igual el coeficiente de la incógnita en ambas ecuaciones.

3. De la ecuación 1 restamos la ecuación 2, manteniendo presente el cambio de los signos:

$$\begin{array}{c} 20x + 24y = 80 \\ \underline{20x - 15y = -115} \\ 0x + 39y = 195 \end{array}$$

4. Al dividir 195 entre 39, obtenemos:

$$y = 5$$

6. Sustituimos el valor de la variable obtenida, en este caso **y**, en la ecuación 2:

$$4x - 3*5 = -23$$
$$4x - 15 = -23$$
$$4x = -23 + 15$$
$$4x = -8$$
$$x = -2$$

Así, los valores de las variables son: $x = -2$, $y = 5$

CAPÍTULO 3.

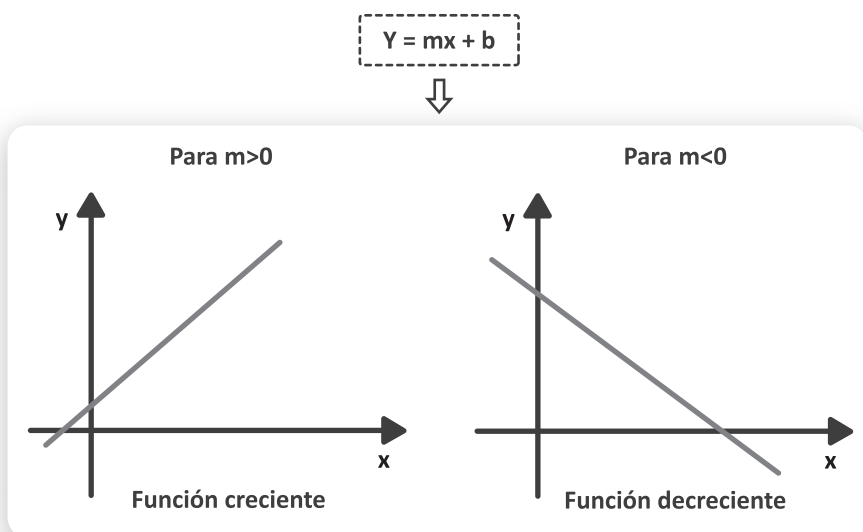
Función lineal y Función cuadrática

Una función lineal es aquella que su gráfica siempre es una línea recta y cumple la siguiente estructura:

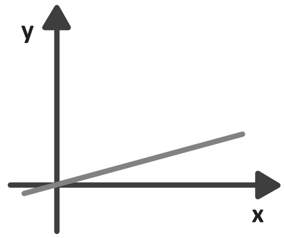
$$y = mx + b$$

Donde (Y) es llamada variable dependiente, (x) es la variable independiente, (m) corresponde a la pendiente de la recta, (b) corresponde al intercepto con respecto al eje y, tanto (m) como (b) son números reales y además (m) debe ser diferente de cero.

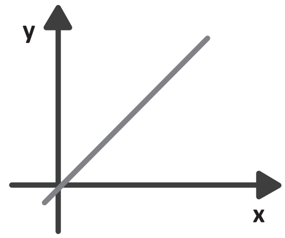
La pendiente (m) nos indica la inclinación que tiene la recta con respecto al eje X y nos proporciona información suficiente para definir si la función lineal es creciente o decreciente dependiendo de su signo; si la pendiente es positiva la gráfica será una recta creciente y si es negativa será una recta decreciente como se muestra a continuación:



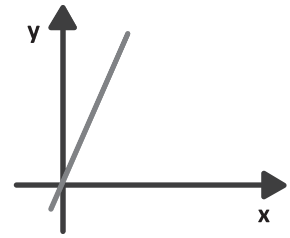
Además, dependiendo del valor que tome la pendiente, podemos saber en qué rango de valores está el ángulo que forma la recta con la horizontal:



Pendiente positiva menor que 1 forma un ángulo menor que 45°



Pendiente positiva menor que 1 forma un ángulo de 45°

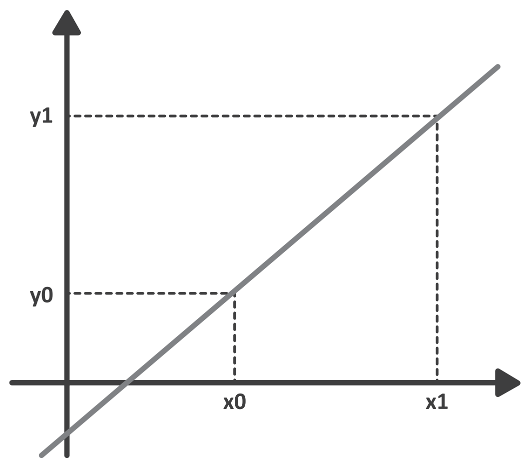


Pendiente positiva mayor que 1 forma un ángulo mayor que 45°

Para calcular la pendiente de una recta se utiliza la siguiente expresión:

$$m=\frac{Y_1 - Y_0}{X_1 - X_0}$$

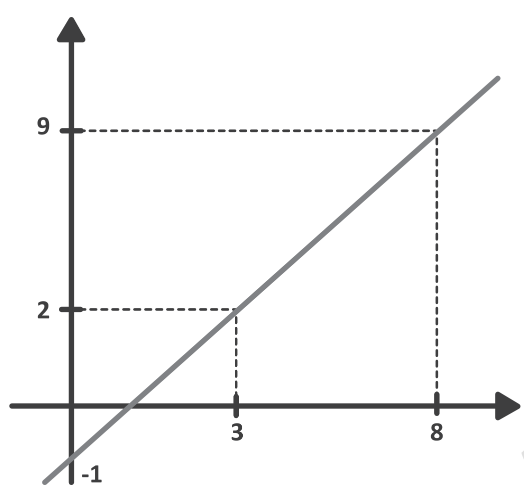
Donde (x_0,y_0) y (x_1,y_1) son dos puntos cualesquiera de la recta:



El intercepto (b) es el punto donde la recta corta al eje Y

A partir de una gráfica donde se muestren dos puntos de la recta y el intercepto o punto donde la recta corta al eje Y, se puede deducir la ecuación de dicha recta.

Ejemplo: Deducir la ecuación de la recta mostrada en la siguiente gráfica:



Solución:
En la gráfica se muestran dos puntos que pasan sobre la recta: (3,2) y (8,9), y al reemplazarlos en la fórmula se obtiene la pendiente; además se muestra también el intercepto, que es -1. Con estos datos tenemos todas las herramientas necesarias para deducir la ecuación de la recta.

$$m = \frac{9 - 2}{8 - 3} \quad m = \frac{7}{5} \quad b = -1$$

Como la estructura de la ecuación es $y = mx + b$, reemplazamos el valor de la pendiente y el intercepto en ella $y = \frac{7}{5}x - 1$. Podemos notar que al ser una recta creciente, la pendiente debe ser positiva.

Ecuaciónes Cuadráticas

Una ecuación cuadrática es aquella en la que el mayor exponente de la variable independiente es el 2 y se puede describir de la forma:

$$ax^2+bx+c=0$$

Donde (a),(b) y (c) son números reales y además (a) debe ser diferente de cero.
El término ax^2 es llamado término cuadrático, bx es el término lineal y c es el término independiente. En la ecuación cuadrática, puede faltar cualquier término menos el cuadrático que es necesario que esté en su estructura.

Ejemplo: $x^2 = 0$, $3x^2 + 9 = 0$, $-x^2 + 12x - 2 = 0$.

La ecuación cuadrática, al tener como máximo exponente el 2, siempre tiene 2 soluciones que cumplen la igualdad.

De los varios métodos existentes para resolver una ecuación cuadrática, mostraremos 2 de ellos:

7. Solución de ecuación cuadrática por factorización:

   Este método busca mediante la factorización, transformar la ecuación en el producto de dos binomios; para después despejar x en cada binomio y encontrar las 2 soluciones posibles a la ecuación. Este procedimiento se ilustra mediante el siguiente ejemplo:

Ejemplo: Encontrar los valores x que cumplen la ecuación $x^2 - 14x + 45 = 0$
Se distribuye la x en cada uno de los paréntesis.
Hay que encontrar dos números que al multiplicarlos entre sí de como resultado 45 y que al sumarlos de -14. Ellos son -9 y -5.
Estos números se reparten en cada uno de los paréntesis.

$$x^2 - 14x + 45 = 0$$

$$(x-9)(x-5)=0$$

Luego, cada binomio se iguala a cero y se despeja x.

$$x-9=0 \quad y \quad x-5=0$$

$$x=9 \qquad x=5$$

Por lo tanto, los 2 valores que cumplen la ecuación dada son 9 y 5.

8. Solución de ecuación cuadrática por la fórmula general:

Recordemos que la forma general de la ecuación es $ax^2+bx+c=0$.

La fórmula que permite resolver las ecuaciones cuadráticas o de segundo grado es la siguiente:

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Este método simplemente consiste en reemplazar los valores de a,b y c en ésta fórmula y resolverla matemáticamente.

Ejemplo: Empleando la fórmula para la solución de ecuaciones cuadráticas, encontrar los Valores x que cumplen la ecuación

$$x^2 - 14x + 45 = 0$$

Donde a=1, b=-14, c=45

$$x = \frac{-(-14)\pm\sqrt{(-14)^2-4(1)(45)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{14\pm\sqrt{16}}{2}$$

Al llegar a este punto, los 2 valores resultan de resolver esta operación con la suma y después con la resta

$$x = \frac{14 + 4}{2} \quad y \quad x = \frac{14 - 4}{2}$$

$$x=9 \quad y \quad x=5$$

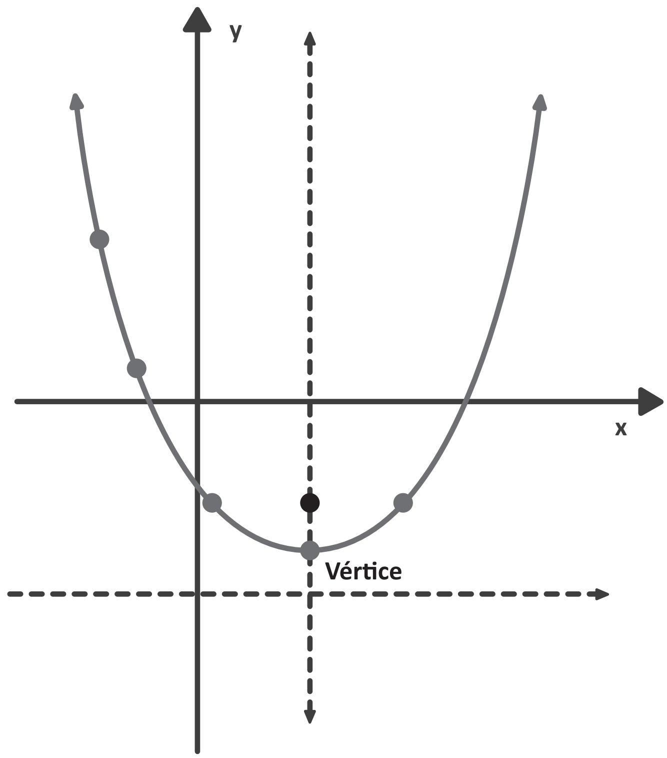
Notamos que este método nos da como resultado los mismos que el anterior.

Función Cuadrática

Al igual que en las ecuaciones cuadráticas, una función cuadrática es aquella que se puede expresar de la forma:

$$y=ax^2+bx+c$$

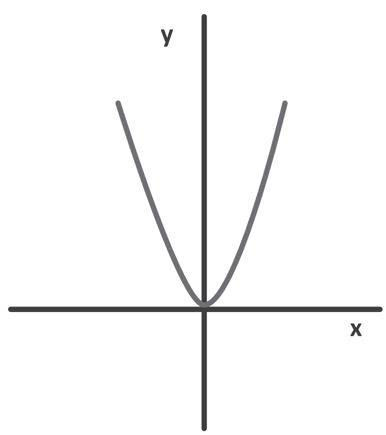
La gráfica que se genera en una función cuadrática siempre es una parábola.



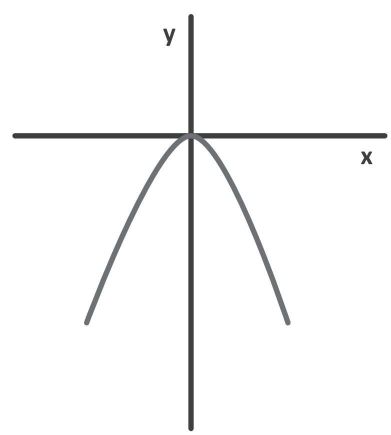
La parábola es el conjunto de puntos en un plano que están a la misma distancia de un punto llamado foco y de una línea llamada directriz. El vértice es el punto desde donde abre la parábola.

La forma de la parábola depende del valor del coeficiente a de x2 en la ecuación. Si a es positiva, la parábola abre hacia arriba y si a es negativa, hacia abajo. Cuanto más grande sea el valor absoluto de a, más cerrada es la parábola. El coeficiente b traslada la parábola a la izquierda o la derecha. EL coeficiente c la traslada hacia arriba o abajo.

En las siguientes gráficas notamos que cuando el coeficiente de x2 es positivo, la parábola abre hacia arriba y cuando es negativo abre hacia abajo. Además, como en la ecuación b y c son cero, o sea que sólo existe la parte cuadrática, el vértice de la parábola está en el origen.



$f(x) = 5x^2$



$f(x) = -5x^2$

Si queremos ubicar el vértice de una parábola cualquiera, usamos la siguiente expresión para saber en qué valor de X va ubicado, y al obtenerlo lo reemplazamos en la ecuación de la función para obtener el valor en Y y así tenemos la coordenada (x,y) donde va ubicado el vértice:

$$x = \frac{b}{2a}$$

Los interceptos en los ejes de una parábola se determinan de la siguiente manera:

EJE Y: El corte de la parábola en el eje y se halla reemplazando en la función a x=0, por lo tanto se obtiene y=c

EJE X. Los interceptos de la parábola corresponden a las soluciones reales de la ecuación cuadrática, es decir cuando el valor de y=0. Estos se obtienen resolviendo $ax^2+bx+c=0$

Ejemplo: Hallar la concavidad, vértice e interceptos de la función

$$f(x)=x^2 - 2x - 3$$

Concavidad: Puesto que a=1 es decir $a > 0$, entonces la parábola abre hacia arriba

Vértice: $x = \frac{-2}{2(1)}$, =1

$y=(1)^2 - 2(1) - 3$, $y= - 4$

Las coordenadas del vértice son (1,-4)

Interceptos: En el eje y, la parábola corta en el punto (0,-3)

Los interceptos en el eje x se determinan cuando f(x)=0

$$x^2-2x-3=0$$

Factorizando se obtiene $(x-3)(x+1)=0$

$$x=3 \quad y \quad x=-1$$

En el eje x, la parábola corta en los puntos (3,0) y (-1,0)

Funciones Polinómicas:

Las siguientes expresiones corresponden a ejemplos de funciones polinómicas:

1. $y=3x^4 + 5x + 3x^3 - 3x$
2. $y=\frac{2}{3}x^5 - \frac{1}{5}x^3 + 7x^2 - 4$
3. $y=4x^8 - \frac{4}{7}x^3 + 7x^2 - 5$
4. $y=x^7 + 3x^6 + 5x^3 - 3x + 4$

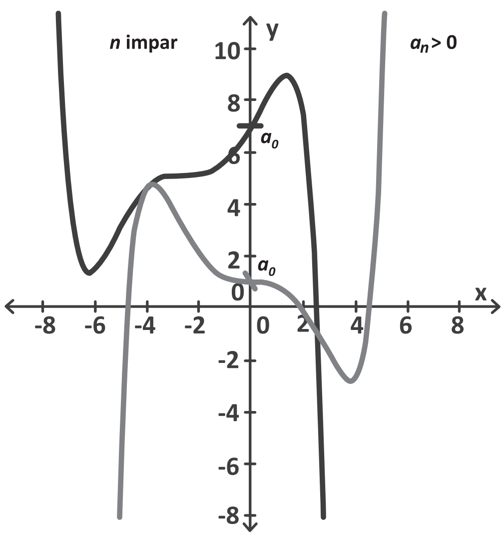
Como se puede ver, éstos contienen potencias de x multiplicadas por algún coeficiente (puede ser cero) y sumadas entre sí. Se denomina grado del polinomio a la potencia de x con mayor valor. Los ejemplos 1,2, 3 y 4 son polinomios de grado 4, 5, 8 y 7 respectivamente. Cualquier función polinómica se puede escribir de la forma

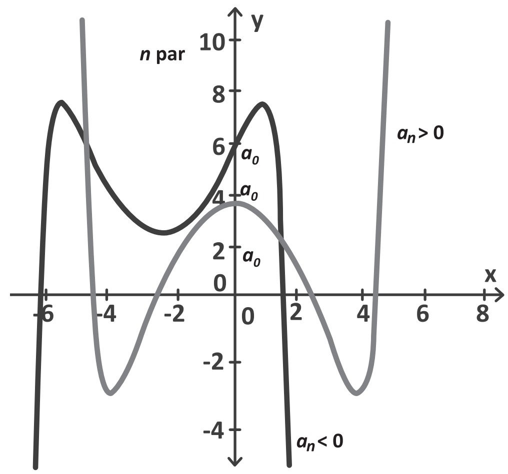
Como se puede ver, éstos contienen potencias de x multiplicadas por algún coeficiente (puede ser cero) y sumadas entre sí. Se denomina grado del polinomio a la potencia de x con mayor valor. Los ejemplos 1,2, 3 y 4 son polinomios de grado 4, 5, 8 y 7 respectivamente. Cualquier función polinómica se puede escribir de la forma

$$y=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_0$$

Donde n indica el grado del polinomio, a_i es cada coeficiente y a_0 se denomina término independiente el cual, como se verá a continuación, corresponde con el punto de corte con el eje y. Los parámetros a_0,a_n y n determinan características generales de la gráfica de la función en el plano cartesiano. La tabla que se muestra a continuación resume estos resultados:

Características generales de las funciones polinómicas





Funciones a Trozos:

En muchas aplicaciones se hace necesario crear modelos matemáticos que vinculan dos variables en donde esta relación no siempre tiene el mismo comportamiento en todo el dominio de la función. Para comprender mejor este tipo de situaciones observemos el siguiente ejemplo:

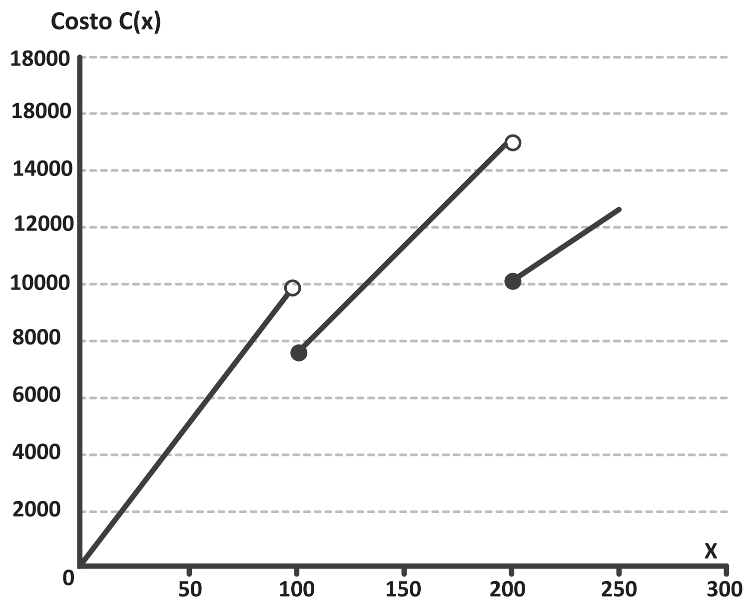
La tabla muestra el costo para el servicio de fotocopiadora en una miscelánea.

NÚMERO DE FOTOCOPIAS	VALOR POR UNIDAD
Máximo 100	\$100
Más de 100 y máximo 200	\$75
Más de 200	\$50

Al expresar la información de la tabla como función, se determina que el costo de la impresión de x fotocopias para un número inferior o igual 100 está dado por $C(x)=100x$, la cual es una función lineal, pero si el número de fotocopias está por encima de 100 y es inferior o igual a 200, tenemos que el costo debe ser $C(x)=75x$ y, para un número de fotocopias mayor que 200 tenemos que el costo está dado por $C(x)=50x$. En esta situación vemos que la función costo tiene tres comportamientos distintos dependiendo del intervalo al que x pertenezca, es decir la función tiene tres expresiones distintas y la manera de escribirlo es como se muestra a continuación:

$$C(x)=\begin{cases} 100x & \text{si} \quad 0< x \leq 100 \\ 75x & \text{si} \quad 100 < x \leq 200 \\ 50x & \text{si} \quad x > 200 \end{cases}$$

La gráfica que se muestra a continuación detalla el comportamiento del costo en función del número de copias x:



A partir del gráfico podemos observar que efectivamente se trata de funciones a trozos como lo señala el título. La función se define por intervalos generando “trozos” de funciones distintas.

Métrico - Geométrico

> *¡Dios es el gran geómetra y el universo es geométrico!"*

Así afirmaron alguna vez los pitagóricos cientos de años atrás y hoy en día todavía nos cuestionamos si se encontraban muy cerca de la verdad, de la locura o de ambas.

Locos o no, se encuentran en un limbo de certezas, donde se hace imposible negar que una parte de nuestra naturaleza es comparativa. Es así como todos los días la mente ejercita y razona cosas como: "el metro está muy lleno o muy vacío, Ignacia es más alta o más bajita que yo o ¡Cómo queda de lejos ese lugar!"; es decir, todo el tiempo estamos comparando y para comparar primero necesitamos **medir**.

Medir es un arte y las matemáticas serán el pincel. Para medir son indispensables los números, un lenguaje maravilloso que une las ideas con lo real, lenguaje que lleva miles de años desarrollándose y que crea ciencia a medida que pasa el tiempo. En su camino se ha creado y reinventado a si mismo cuando de medir se trata, todo esto compilado en un conjunto de ideas llamada geometría.

Geometría, llamaron los griegos a la ciencia utilizada para medir (**geo:** tierra - **metría:** medida), y quien imaginaría (la verdad casi todo el mundo) que la misma ciencia sería utilizada para modelar el majestuoso manto universal, suficiente información para concluir que la geometría más que un invento, es un descubrimiento. Más que una ciencia es una esencia natural y más que una rama de las matemáticas es una herramienta poli funcional.

Y sin más preámbulo, estudiemos como utilizar esta caja de herramientas llamada geometría. La presente sección tiene la intención de abordar los conocimientos evaluados por las pruebas SABER 11º en la componente referida al pensamiento métrico – geométrico. Se presenta a continuación la distribución de temáticas por medio de tres capítulos:

Capítulo 1

- Transformaciones lineales de medida
- Barridos y transformaciones angulares
- Conceptos básicos de geometría
- Teorema de Pitágoras
- Perímetros, áreas y volúmenes
- Razonamiento espacial

Capítulo 2

- Semejanza de triángulos
- Relaciones trigonométricas y valores de ángulos notables

Capítulo 3

- Ley del seno y el coseno
- Identidades trigonométricas

CAPÍTULO 1.

Transformaciones lineales de medida

La geometría tal y como lo mencionamos anteriormente tiene como único fin la medida del espacio. Por tanto para utilizar de manera adecuada la geometría debemos establecer unos parámetros específicos para medir; es decir, unificar lenguajes de medida en único concepto.

(Metro)

pico - nano - micro - mili - centi - deci - ESTANDAR - Deca - Hecto - Kilo - Mega - Giga - Tera

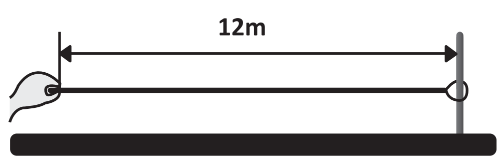
seis veces	*cinco veces*	*cuatro veces*	*tres veces*	*dos veces*	*una veces*		*una veces*	*dos veces*	*tres veces*	*cuatro veces*	*cinco veces*	*seis veces*

Multiplicar por diez — **Dividir por diez**

Para medir utilizaremos el sistema de medida MKS, y nuestro punto de referencia será el metro, así, si queremos medir cualquier tipo de línea podemos medirla en metros o en un sistema diferente. Cada una de sus transformaciones esta en base diez, es decir cualquier reducción en el sistema de referencia requiere multiplicar por diez tantas veces como transformaciones se hagan presentes, de igual manera, si se quiere ampliar el sistema de referencia, debemos aplicar la división, todo lo anterior, con base en la siguiente nomenclatura:

Por ejemplo, leamos de diferentes formas una medida establecida como la siguiente cuerda:

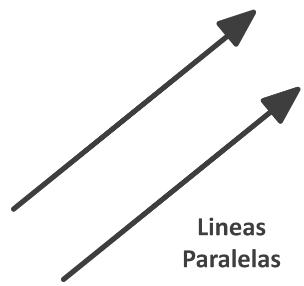
Según la figura, la cuerda mide 12 metros o medimos desde otro sistema de referencia:



- **En milímetros:** (12 metros) x 10 x 10 x 10 = 12000 milímetros = 12 x 10^3 mm.
- **En centímetros:** (12 metros) x 10 x 10 = 1200 centímetros = 12 x 10^2 cm.
- **En Decámetros:** (12 metros) ÷ 10 = 12 Decámetros = 1,2 Dm.
- **En Kilómetros:** (12 metros) ÷10 ÷ 10 ÷ 10 = 0,012 Kilómetros = 12 x 10^{-3}Km.

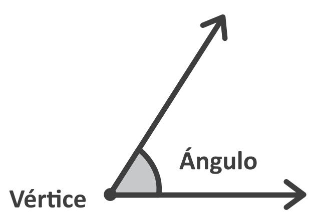
Cuando estudiamos líneas, estas pueden tener medida finita o infinita, por ejemplo la cuerda presentada en la gráfica anterior es una línea de medida finita igual a 12 metros. En caso de no ser finita se le llama rayo y se representa uno de sus extremos con una flecha lo que indica que se comporta de manera continua indefinidamente.

Cuando más de una línea o rayo se hacen presentes en nuestro escenario geométrico, podemos referirnos a ellas desde un punto de vista comparativo. Lo primero que debemos comparar es si ambas líneas se cruzan o no, en caso de que dos rayos nunca se encuentren afirmamos que ambos son paralelos entre sí.

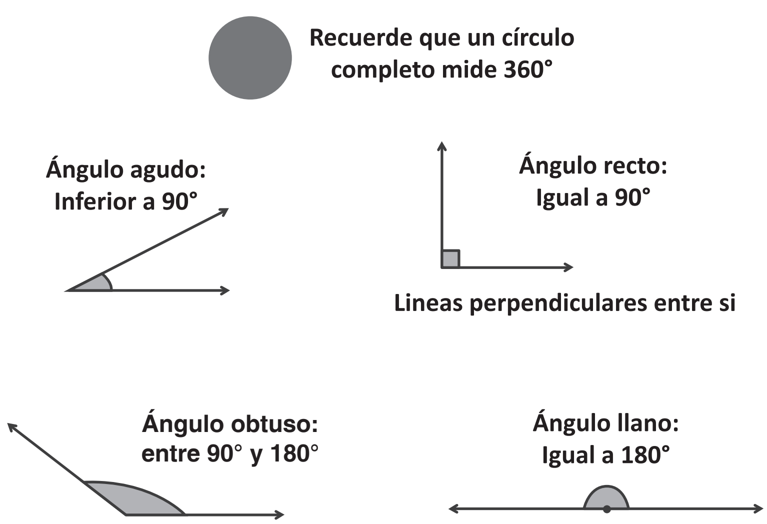


Barridos y transformaciones angulares

Suponiendo que ambas líneas se cruzan, podemos definir entonces lo que es un vértice y un ángulo. Llamamos vértice al punto en donde dos líneas se encuentran y ángulo a la abertura generada por el cruce de líneas.



Los ángulos se miden en grados y pueden ser de 0º a 360º dependiendo del tamaño de la abertura generada por ambas líneas. A continuación se muestran algunos tipos de ángulo que nos interesa conocer.



Los ángulos se miden en grados y pueden ser de 0º a 360º dependiendo del tamaño de la abertura generada por ambas líneas. A continuación se muestran algunos tipos de ángulo que nos interesa conocer.

$$\pi=180^{\circ}$$

Para expresar medidas angulares a términos de π y viceversa siempre podemos hacer uso de la regla de tres, tal y como se ilustra en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1: *Expresar 120º en términos de π*

Como sabemos que π=180º, podemos entonces simplemente plantear la regla de tres y solucionar:

$$\div \quad \begin{array}{lcl} 180^{\circ} & \longrightarrow & \pi \\ 120^{\circ} & \longrightarrow & x \end{array} \qquad *$$

$$x = \frac{120^{\circ} * \pi}{180^{\circ}} = \frac{12 * \pi}{18}$$

$$= \frac{6 * \pi}{9} = \frac{2 * \pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$$

Los ángulos se miden en grados y pueden ser de 0º a 360º dependiendo del tamaño de la abertura generada por ambas líneas. A continuación se muestran algunos tipos de ángulo que nos interesa conocer.

$$\pi=180^{\circ}$$

Para expresar medidas angulares a términos de π y viceversa siempre podemos hacer uso de la regla de tres, tal y como se ilustra en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 2: *Expresar* $\frac{3}{4}$ *en grados:*

Como sabemos que π=180º, podemos entonces simplemente plantear la regla de tres y solucionar:

$$\div \quad \begin{array}{lcl} \pi & \longrightarrow & 180^{\circ} \\ \frac{3}{4}\pi & \longrightarrow & x \end{array} \qquad *$$

$$x = \frac{\frac{3\pi}{1} * \frac{180^{\circ}}{1}}{\frac{\pi}{1}} = \frac{\frac{3\pi * 180^{\circ}}{4}}{\frac{\pi}{1}}$$

$$= \frac{3\pi * 180^{\circ}}{4\pi} = \frac{3 * 180^{\circ}}{4}$$

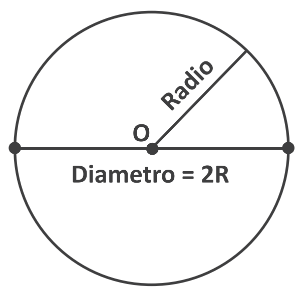
$$= \frac{540^{\circ}}{4} \quad \frac{270^{\circ}}{2} = 135^{\circ}$$

Conceptos básicos de geometría

Para medir con éxito, es indispensable reconocer las figuras geométricas de acuerdo a sus propiedades, de manera que sólo enunciar su nombre sea suficiente para conocer los parámetros geométricos que la constituyen A continuación se presentan algunas figuras geométricas que fundamentan la base teórica para todo tipo de cálculo geométrico.

El círculo:

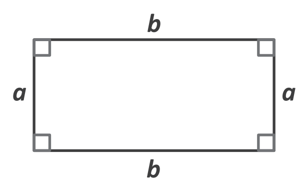
Todos los puntos del círculo se encuentran a igual distancia de un punto de referencia llamado centro (marcado con una O). La distancia desde el centro del círculo a cualquier punto del círculo es llamada radio (R). Si la distancia es medida de un extremo a otro del círculo pasando por el centro del mismo es llamada diámetro y evidentemente mide igual a dos radios (d= 2R)



El rectángulo:

Todos los puntos del círculo se encuentran a igual distancia de un punto de referencia llamado centro (marcado con una O). La distancia desde el centro del círculo a cualquier punto del círculo es llamada radio (R). Si la distancia es medida de un extremo a otro del círculo pasando por el centro del mismo es llamada diámetro y evidentemente mide igual a dos radios (d= 2R)

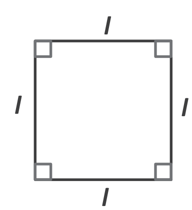
Rectángulo



El cuadrado

El cuadrado es un rectángulo que posee la particularidad de tener todos sus lados iguales.

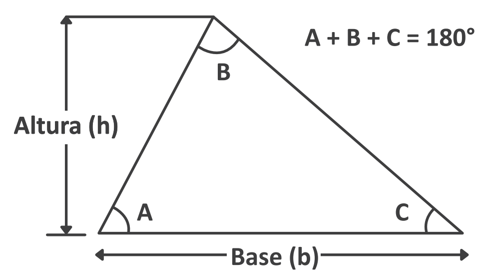
Cuadrado



El triángulo

Tal y como su nombre lo indica, el triángulo se encuentra constituido por tres lados, tres vértices y un ángulo en cada uno de sus vértices.

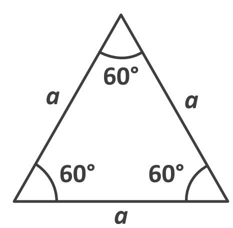
Sin importar el tipo de triángulo, se tiene que la suma de los ángulos internos es igual a 180º. Además cada triángulo posee una base (lado que se apoya contra el suelo) y una altura (distancia del suelo al vértice más alto) los cuales es indispensable identificar para realizar cálculos geométricos respecto al mismo.



Los triángulos pueden clasificarse de acuerdo a sus ángulos de la siguiente manera:

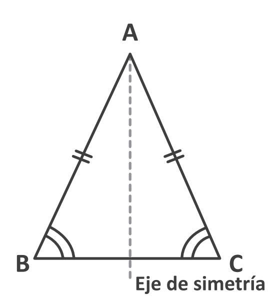
Triángulo equilátero

Todos sus lados y ángulos tienen igual medida, y como los ángulos internos deben sumar 180º, es claro que cada uno de sus ángulos tiene un valor de 60º



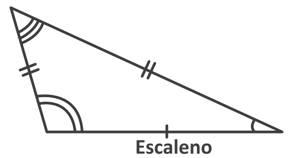
Triángulo Isósceles

Cumple simetría con respecto a un eje de referencia. Por tanto contiene dos lados iguales, así como los ángulos opuestos a los dos lados mencionados.



Triángulo escaleno

Utilizamos esta definición cada que no se presenta coincidencia alguna entre sus lados o ángulos.



Triángulo rectángulo

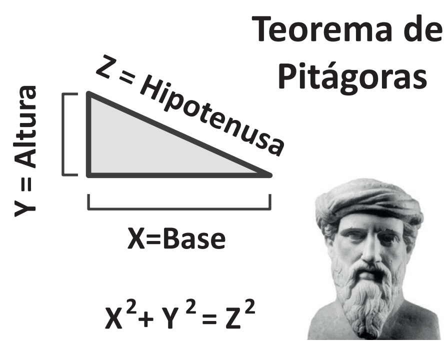
Recibe su nombre ya que es el resultado de cortar un rectángulo por su diagonal, lo que implica que posee un ángulo recto que lo caracteriza. Sus lados son comúnmente conocidos como hipotenusa (opuesta al ángulo recto) y catetos.

Teorema de Pitágoras

Cientos de años atrás, Pitágoras, prodigioso matemático griego presenta un resultado bastante útil con respecto a los lados de un triángulo rectángulo que menciona lo siguiente: En todo triáng ulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Pitágoras de Samos

Como herramienta, el teorema de Pitágoras nos permite calcular distancias desconocidas a partir de distancias conocidas. Para utilizarlo es necesario relacionar tres lados (horizontal, vertical y diagonal) y conocer el valor de medida para dos de ellos. Partiendo de estas condiciones podemos reemplazar los valores en la formula y despejar el lado que falta.



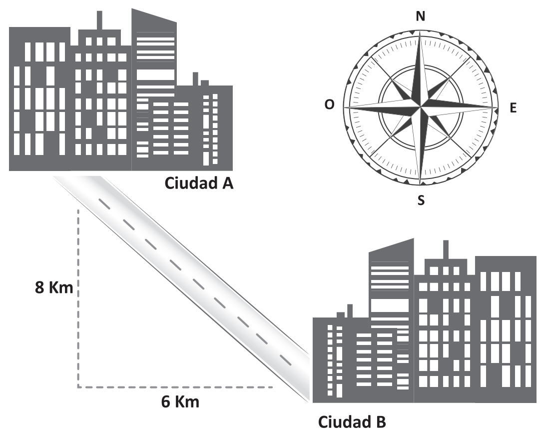
Por ejemplo:

Una ciudad A se encuentra 8 km al norte y 6 km al oeste respecto a una ciudad B. Si se desea construir una autopista que conecte las dos ciudades entonces la distancia mínima que podría tener dicha carretera es:

A. 14 Km
B. 12 Km
C. 10 Km
D. 9 Km

Solución:

Si dibujamos lo que nos presenta el texto podemos visualizar una situación semejante a la presentada en la gráfica.



Si observamos con atención,la ciudad A se encuentra a 8 Km al norte y 6 Km al oeste de B y al trazar estas distancias se hace presente un triángulo rectángulo de catetos 8 y 6, donde la hipotenusa del triángulo representa la carretera que conecta las ciudades A y B.

Por tanto para calcular la longitud de la carretera que conecta ambas ciudades podemos utilizar el teorema de Pitágoras:

$$x^2 + y^2 = z^2 \xrightarrow[\text{Luego}]{} 8^2 + 6^2 = z^2 \xrightarrow[\text{Donde}]{} 64 + 36 = z^2$$

$$100 = z^2 \xrightarrow[\text{Y calculando su raíz cuadrada}]{} 10 = z$$

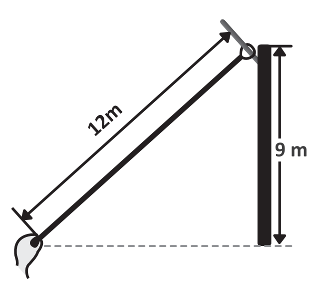
Como las distancias presentadas se encontraban en Km. la respuesta también debe estarlo de lo que se infiere que la respuesta correcta es la C.

En ocasiones será necesario calcular uno de los catetos en vez de la hipotenusa. Para este tipo de casos podemos pasar a restar uno de los catetos y despejar el otro, así:

$$x^2 + y^2 = z^2 \xrightarrow[\text{Pasando a restar uno de los catetos}]{} x^2 = z^2 - y^2$$

Veamos su aplicación en el siguiente ejemplo:

Supongamos que subimos el punto de apoyo de la cuerda medida en el ejemplo inicial una distancia de nueve metros de altura, y alguien pregunta:



La distancia x que separa el extremo de la cuerda de la tablilla presentada en la gráfica es:

A. Un número irracional y puede calcularse sumando los cuadrados de los catetos y hallando la raíz cuadrada del resultado
B. Un número irracional y puede calcularse hallando la raíz cuadrada de la diferencia entre el cuadrado de la hipotenusa y el cuadrado de uno de los catetos.
C. Un número entero y puede calcularse hallando la raíz cuadrada de la diferencia entre el cuadrado de la hipotenusa y el cuadrado de uno de los catetos.
D. Un número entero y puede calcularse sumando los cuadrados de los catetos y hallando la raíz cuadrada del resultado

Solución

Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$x^2 + 9^2 = 12^2 \xRightarrow[\text{uno de los catetos}]{\text{Pasando a restar}} x^2 = 12^2 - 9^2 = 144-81$$

$$x^2 = 63 \xRightarrow[\text{Hallando raíz}]{} x = \sqrt{63} = \sqrt{9*7} = \sqrt{3^2*7} = 3\sqrt{7}$$

Por tanto el valor de x es un número irracional y puede calcularse con el procedimiento planteado en B.

Conceptos básicos de medida

Perímetro, área y volúmenes

En Geometría, además del concepto de distancia también contamos con otros conceptos que nos permiten medir todo tipo de espacio como lo son las superficies planas o el espacio ocupado por un sólido. Con ayuda de ellos podemos aplicar la Geometría para solucionar situaciones problema presentadas en la vida real, pero antes de presentar ejemplos o situaciones problema, presentemos primero los conceptos de perímetro, área y volumen que nos permitirán unificar ideas en un único lenguaje.

Perímetro y área

Estos dos conceptos se encuentran íntimamente ligados entre sí y son de vital importancia para ejecutar cálculos geométricos. Para tener la oportunidad de aclarar la interpretación de ambos conceptos utilicemos una ayuda gráfica que facilite la exposición de ideas.

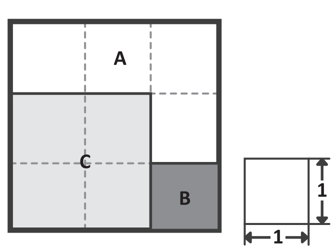


Figura	Áreas	Perímetro
Círculo	πR^2	$2\pi R$ ó πd
Rectángulo	a * b	2a+2b
Cuadrado	l^2	4l
Triángulo	$\frac{b*h}{2}$	a+b+c

En la figura se presentan tres terrenos ocupados por Ana, Beatriz y Carlos.

Suponga que los terrenos están totalmente cercados por un alambrado y llamemos a cada cuadro de terreno,unidad cuadrada.

Cuando nos referimos al perímetro de una figura, nos referimos a la extensión de su frontera, es decir a cuanto mide su borde o contorno, para nuestro caso, cual es la longitud del alambrado que cerca el terreno, por tanto, podríamos afirmar que los perímetros correspondientes a los terrenos de Ana, Beatriz y Carlos equivalen a 10, 4 y 8 unidades de longitud. (Verifica)
En la mayoría de los casos el perímetro no es más que la suma de los lados de la figura, pero para el caso particular del círculo el perímetro es llamado circunferencia y se refiere a la distancia recorrida al realizar una vuelta completa alrededor de su centro.

En el caso del círculo podemos calcular la circunferencia por medio de la expresión:

Perimetro= $\pi * d = 2\pi R$

Donde *d= diámetro = dos radios = 2R*

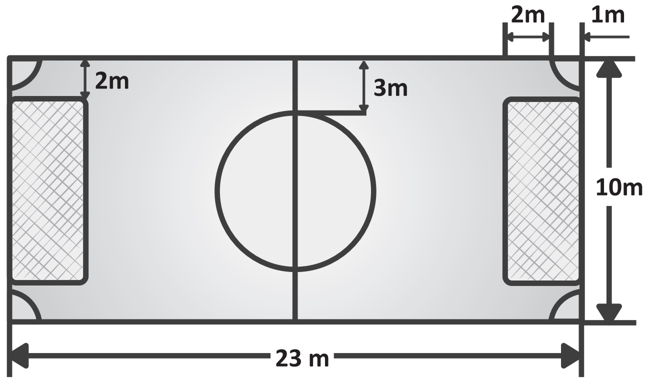
Cuando nos referimos al área de una figura, nos referimos a la extensión de superficie contenida dentro de un perímetro, en nuestro caso la cantidad de terreno que le corresponde a cada uno, luego podemos afirmar que el área correspondiente al terreno de Beatriz es una unidad cuadrada, sin embargo para Ana y Carlos contamos con una extensión de cuatro unidades cuadradas cada uno.

Para el cálculo de áreas, contamos con unas formulas establecidas para cada figura que se presentan como herramienta geométrica en el siguiente cuadro:
Es importante tener en cuenta que para cálculos directos podemos tomar el valor numérico de pi.

$$\pi=3,1416$$

Ejemplo:

La gráfica muestra las medidas de un campo de futbol infantil que se estrena en Julio para los juegos internos de la institución.



El rector de la institución desea resaltar las medidas del campo de juego con cal para el día de la inauguración. Para esto pide un informe de cuanta cal será necesaria si por cada metro de línea son necesarios 20 gramos de cal. El empleado encargado de oficios varios le informa que basta con 2 kilos de cal para resaltar todas las líneas del campo.

1. El informe presentado por el empleado de la institución es:

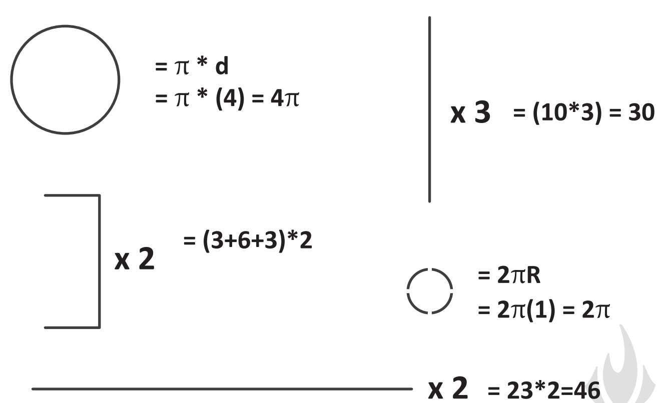
   A. Incorrecto porque con un kilo y medio de cal basta para resaltar todo el campo
   B. Incorrecto porque únicamente alcanzaría para las líneas rectas del campo
   C. Correcto debido a que las líneas del campo suman una distancia neta de 100 metros
   D. Correcto debido a que únicamente sobran 16 gramos de cal

2. Si el terreno que corresponde al círculo central del campo se encuentra en mal estado, podemos afirmar que la cantidad de terreno que es necesario sustituir es:

   A. 12 π
   B. 10 π
   C. 9 π
   D. 4 π

Solución:

Para conocer con exactitud cuántos metros de cal debemos resaltar tan solo basta con conocer los perímetros de las figuras presentadas en la gráfica, así:



Y sumando los resultados calculados se obtiene que:

$$(\text{Lineas})+(\text{Círculos})$$
$$=(24+30+46)+(4\pi+2\pi)$$
$$= 100 \quad + \quad 6\pi$$

Observe que cuando sumamos las líneas rectas del campo se obtienen 100 metros de longitud y por ambos círculos se obtienen 8π metros de longitud.

Si queremos calcular los gramos de cal, podemos multiplicar cada cantidad por 20 (Recuerde que son veinte gramos por metro), luego:

(gr.para lineas)+(gr.para Círculos)

$$(100*20\ \text{gr.})+(6\pi*20\ \text{gr.})= 2000\ \text{gr.} +120\pi\ \text{gr.}$$

Es decir, sólo por las líneas rectas son necesarios 2 kilos de cal y podemos concluir que la respuesta correcta es la B.
Si quisiera saberse con exactitud cuanta cal es necesaria para resaltar los círculos, podríamos hablar de 120π gramos o reemplazar pi por 3,1416 y calcular:

$$120\pi\ \text{gr.}=120*3{,}1416\ \text{gr.}=376{,}992\ \text{gr.}$$

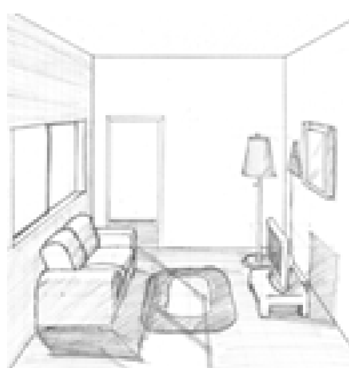
Es decir, una cantidad inferior a una libra de cal.

Para dar solución a la segunda pregunta, basta con identificar la distancia del centro del campo al extremo del círculo central (radio del círculo). Finalmente reemplazar el radio en la fórmula propuesta para calcular el área de un círculo:

$$\pi R^2= \pi*3^2=9\pi$$

Es decir, es necesario sustituir 9π metros cuadrados de terreno.

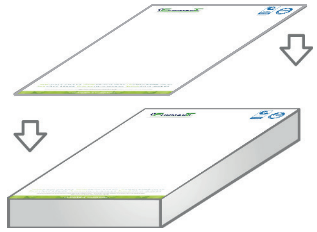
Espacios tridimensionales



Con las herramientas geométricas utilizadas hasta el momento podemos calcular distancias y superficies con cierto grado de libertad. Pero, ¿Qué sucede cuando nos preguntamos por medidas tridimensionales, como el espacio ocupado por un libro, una nevera o tal vez un sillón?

El volumen como concepto geométrico se refiere al espacio tridimensional limitado por un cuerpo, por tanto, cada que nos hacemos este tipo de preguntas, nos referimos en términos matemáticos, al concepto de volumen.
Existen dos formas de generar cuerpos tridimensionales.

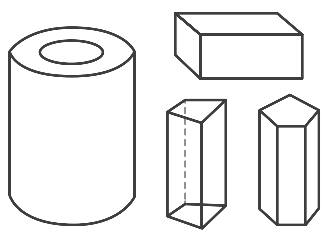
Prismas



Para generar un prisma podemos tomar varias veces una misma figura plana y ubicarla una sobre otra hasta formar el sólido. Podemos visualizar la idea, imaginando cómo se forma un libro al colocar una hoja sobre otra.

Para calcular el espacio que ocupa un prisma podemos siempre calcular el área de la superficie que lo genera y multiplicarlo por la distancia que cubre.

Volumen del prisma
(Área de la cara)*(Profundidad)

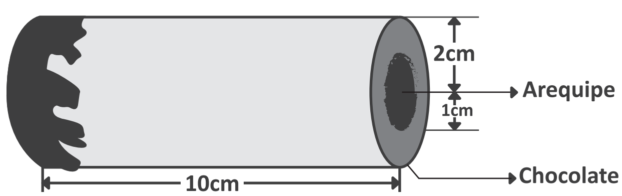


En la gráfica de la izquierda se presentan algunos prismas. Trate de identificar la cara que genera el sólido en cada uno de ellos.

Para seguir practicando este concepto, se presenta el siguiente ejemplo que expone como aplicar lo visto para calcular espacios o volúmenes.

Ejemplo:

En la figura se muestra el diseño presentado por chocolates “la negrita” para el lanzamiento de una nueva línea de barquillos.



Las especificaciones para el diseño del producto se refieren a un cilindro hueco de chocolate con interior de arequipe y las medidas especificadas en la gráfica.

Si cada cm^3 de chocolate y arequipe cuestan respectivamente X y Y pesos entonces la ecuación que representa el precio P por barquillo producido es:

Las especificaciones para el diseño del producto se refieren a un cilindro hueco de chocolate con interior de arequipe y las medidas especificadas en la gráfica.

Si cada cm^3 de chocolate y arequipe cuestan respectivamente X y Y pesos entonces la ecuación que representa el precio P por barquillo producido es:

A. P = 10 π(X+Y)
B. P = 10 π(3X+Y)
C. P = 10 π(X+3Y)
D. P = 40 π(X+Y)

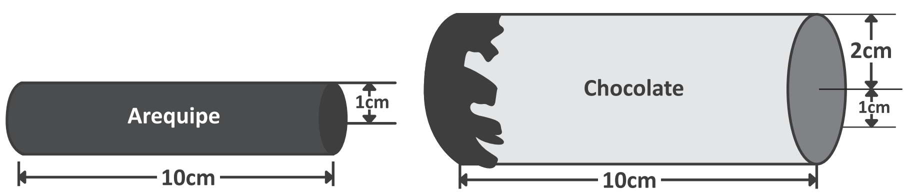
Solución:

Para poder calcular de manera correcta el precio de cada barquillo debemos:

1. Calcular la cantidad de arequipe y chocolate utilizada en cada barquillo (volúmenes)
2. Multiplicar el volumen del chocolate y el arequipe por X y Y respectivamente
3. Sumar el precio del chocolate y el arequipe

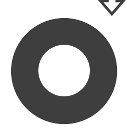
Procedamos:

1. Primero calculemos el volumen de cada sección:



Volumen del prisma = (Área de la cara) . (Profundidad)

 **. (10cm.)**

 **. (10cm.)**

$\pi R^2 . (10cm)$
$= \pi (1)^2 . (10\ cm)$
$= (1\pi\ cm^2) . (10\ cm)$
$= (10\pi\ cm^3$

$(\pi R^2 - \pi r^2) . (10cm)$
$= [\pi (2\ cm)^2 - \pi (1\ cm)^2] . (10\ cm)$
$= (4\pi\ cm^2 - 10cm^2) . (10\ cm)$
$= (3\pi\ cm^2) . (10\ cm) = 30\pi\ cm^3$

2. Como el precio de cada cm^3de chocolate es X, se tiene que el precio del chocolate (parte derecha) necesario por barquillo es 30πX. De igual manera el precio del arequipe por cm^3 es Y y el costo del arequipe por barquillo es igual a 10πY.

3. Finalmente el precio P por barquillo será igual a:

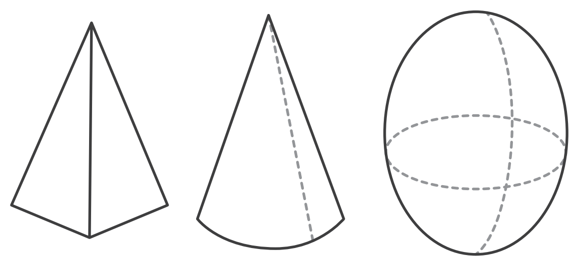
$$P = Chocolate + Arequipe = 30\pi X + 10\pi Y = 10\pi(3X+Y)$$

De acuerdo a lo calculado podemos concluir que la respuesta es la opción B.

Sin embargo no todas las figuras tridimensionales son prismas, por tanto no pueden construirse a partir de la proyección de una figura plana, lo que impide el cálculo de su volumen por la formula anterior.

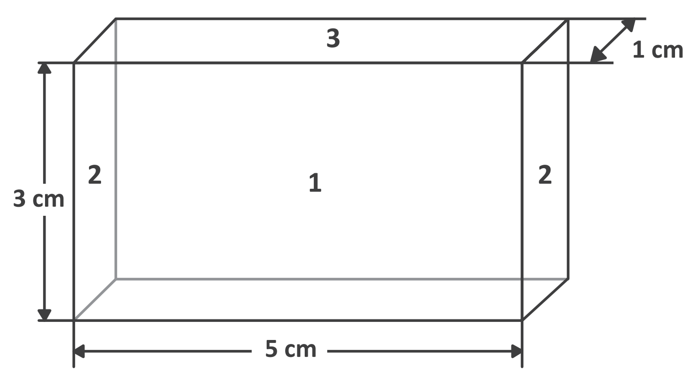
Ejemplos de ello lo son el cono, la pirámide o la esfera.

Más adelante se presentaran las fórmulas necesarias para calcular el volumen de aquellas figuras que no son prismas.



Área superficial y perspectiva espacial:

En el lenguaje de la geometría tridimensional es importante identificar en ocasiones cada una de las caras presentes en una figura y tener la capacidad de calcular su superficie.



Como ejemplo se presenta la siguiente figura que representa una caja pintada de azul en sus caras laterales, de rojo en su cara frontal y de verde en la cara superior y las demás superficies presentes.

¿Qué cantidad de superficie se encuentra pintada de rojo, de verde y de azul?

En América, las vistas frontal, lateral y superior se consideran de forma estándar, aquellas marcadas con los números 1, 2 y 3 respectivamente. De esta manera podemos asumir lo siguiente respecto a los colores presentados por las superficies del sólido:

Color Rojo: $1\ cara\ frontal = 3\ cm * 5\ cm = 15\ cm^2\ de\ rojo$

Color Azul: $2\ caras\ laterales = 2 * (3\ cm * 2\ cm) = 12\ cm^2\ de\ azul$

Color Verde: $1\ cara\ posterior\ + 1\ cara\ superior\ + 1\ cara\ inferior$

$$= 1\ cara\ frontal\ + 2\ caras\ superiores$$

$$= (3\ cm * 5\ cm)\ + 2 * (2\ cm * 5\ cm)$$

$$= 15\ cm^2 + 20\ cm^2 = 35\ cm^2\ de\ verde$$

Si por alguna razón nos referimos al área superficial de la caja, podemos sumar el total de las caras y calcular, en este caso podemos afirmar que la caja posee un área superficial igual a 62 cm^2

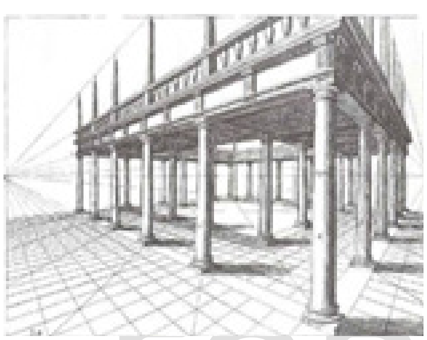
A continuación y a modo de cierre se presenta una tabla que puede ser útil para calcular el volumen y las áreas superficiales de diferentes figuras:

Figura	Área superficial	Volumen
Cubo	$6l^2$	l^2
Paralelepípedo	2ab+2ac+2bc	a*b*c
Cilindro	$2\pi R^2+2\pi Rh$	$\pi R^2\ h$
Cono		$\pi R^2\ h\ /3$
Esfera	$4\pi R^2$	$4\pi R^3/3$
Pirámide	l^2+4A_T	$l^2\ h\ /3$

CAPÍTULO 2.

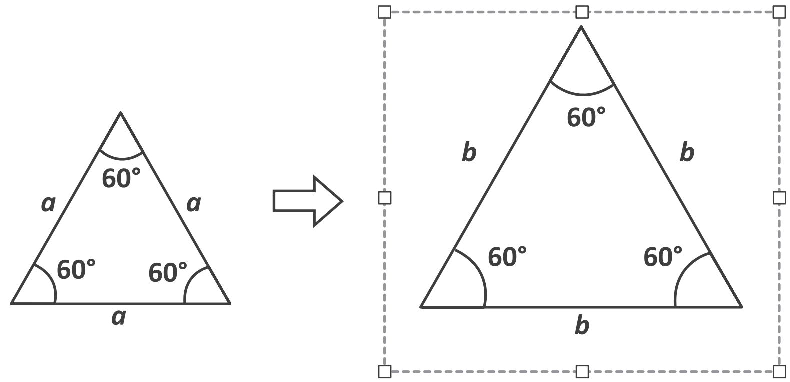
Proporcionalidad geométrica

¿Alguna vez han observado una maqueta o el plano de alguna construcción antes de llevarse a cabo?



Estas construcciones son llamadas proyecciones a escala y es un término utilizado cuando se comparan dos diseños que poseen diferente tamaño pero igual forma.

La proporcionalidad geométrica se refiere precisamente a esta idea, es decir, pretende exponer el hecho de que un par de figuras pueden tener exactamente la misma forma (conservar la misma proporción) sin ser idénticos en tamaño.



Cuando un par de figuras poseen la misma forma pero no el mismo tamaño, es imposible afirmar que ambas figuras son idénticas ya que sus lados no son iguales. Cuando esto sucede se dice que ambas figuras son geométricamente proporcionales o de manera equivalente podemos afirmar que ambas figuras son semejantes entre sí.

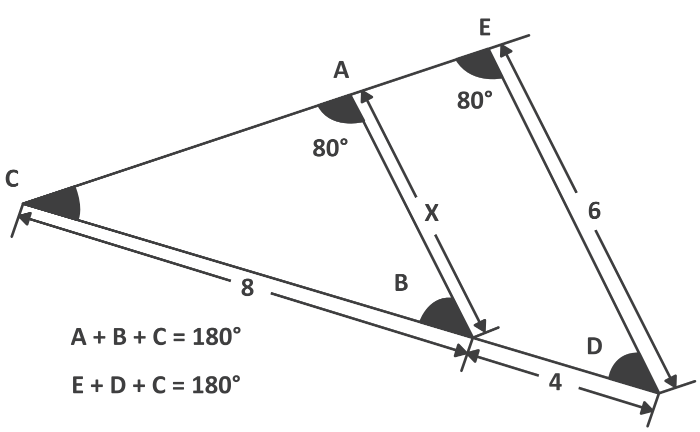
Proporcionalidad geométrica

Como afirmamos en la idea anterior, podemos concluir que dos figuras son semejantes si y solo poseen la misma forma. Para cualquier par de triángulos es relativamente sencillo identificar si son semejantes o no, ya que la construcción de un triángulo depende de cada uno de los tres ángulos que lo constituyen, por lo que puede concluirse que un par de triángulos son semejantes únicamente cuando sus tres ángulos son idénticos entre sí.

Cuando dos triángulos son semejantes entre sí, existe una proporcionalidad directa entre ellos, por tanto al comparar dos triángulos semejantes, podemos calcular cantidades desconocidas por medio de la regla de tres.

Ejemplo:

Analicemos los triángulos ABC y CED mostrados en la figura y tratemos de hallar el valor de X. Tenga en cuenta que para cualquier triángulo la suma de sus ángulos debe ser igual a 180º, luego para los triángulos ABC y CED tenemos:



A + B + C = 180°

E + D + C = 180°

Sin embargo, E = A y el ángulo C lo comparten ambos triángulos, por tanto, como ambas sumas deben ser iguales, observe que B = D.

Es decir ambos triángulos poseen los mismos ángulos y por tanto la misma forma, se infiere de esta idea que ambos triángulos son semejantes y por tanto proporcionales entre sí, de lo que podemos concluir que:

CB es a CD como AB es ED

Y utilizando la regla de tres tenemos que:

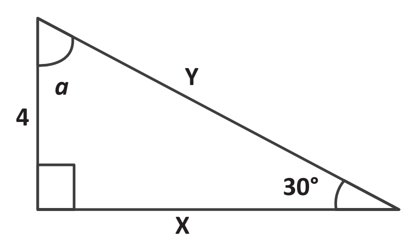
$$\begin{array}{ccc} CB & \longrightarrow & CD \\ AB & \longrightarrow & ED \end{array} = \begin{array}{ccc} 8 & \longrightarrow & 12 \\ X & \longrightarrow & 6 \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{Donde } X = \frac{6 * 8}{12} = 4$$

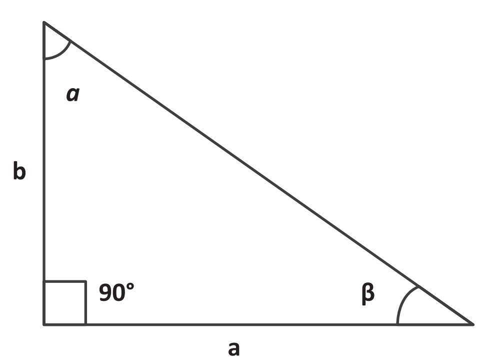
Que presenta como utilizar la proporcionalidad para calcular distancias en triángulos semejantes.

Funciones trigonométricas

En el capítulo anterior estudiamos entre los triángulos, el triángulo rectángulo. En su estudio abordamos el teorema de Pitágoras; una importante herramienta geométrica que posee la facultad de calcular la medida de un lado desconocido si se conocen los otros dos.



¿Pero será posible calcular todos los lados del triángulo cuando únicamente contamos con uno de ellos? y más importante aún ¿dependerá el valor de los lados del valor de los ángulos? La respuesta para ambas preguntas es si y requiere del uso de las funciones trigonométricas, es decir de los cocientes entre los lados del triángulo de acuerdo al ángulo que forman y que han sido llamadas de forma estándar las funciones seno, coseno y tangente.



Una función trigonométrica depende de tres variables a saber: dos lados y un ángulo. Los lados relacionados son usualmente llamados cateto opuesto, cateto adyacente e hipotenusa. Cada uno de los catetos se escoge de acuerdo al ángulo por medio del siguiente análisis:

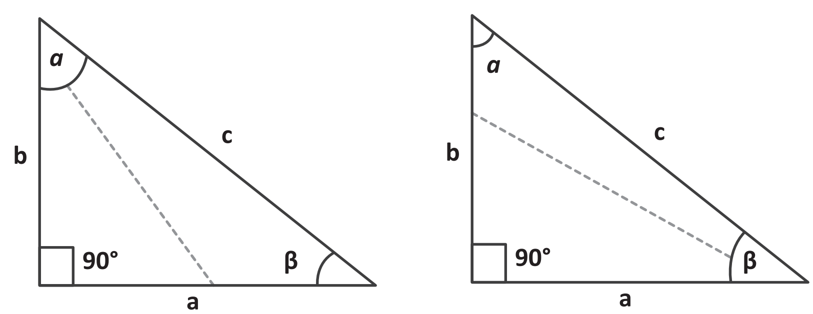
1. Escoger un ángulo

Se debe escoger un ángulo entre los dos ángulos agudos, y tener cuidado de no escoger el ángulo recto. En este caso podemos escoger el ángulo α o el ángulo β.

2. Definir los lados de acuerdo al ángulo.

Para referenciar los lados se deben tener en cuenta los siguientes aspectos.

a. La hipotenusa siempre se encuentra al frente del ángulo recto, para el triángulo de la figura nos referimos al ladoc .
b. El cateto opuesto depende del ángulo escogido, en este caso, a es el cateto opuesto a α, y b es el cateto opuesto a β.



c. Finalmente el lado que no ha sido nombrado, por descarte, es el cateto adyacente.

3. Definir las funciones trigonométricas

De forma general, las funciones trigonométricas con respecto a un ángulo (θ) se definen de la siguiente manera:

$$\text{Sen } \theta = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}} \qquad \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\text{Tan } \theta = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Cateto Adyacente}}$$

Finalmente para los ángulos α y β las funciones trigonométricas propuestas tomarían la siguiente forma:

$$\text{Sen } a = \frac{a}{c} \qquad \text{Sen } \beta = \frac{b}{c}$$

$$\text{Cos } a = \frac{b}{c} \qquad \text{Cos } \beta = \frac{a}{c}$$

$$\text{Tan } a = \frac{a}{b} \qquad \text{Tan } \beta = \frac{b}{a}$$

El valor para las funciones seno, coseno y tangente depende del ángulo y pueden obtenerse por medio de una calculadora. Es entonces donde nos encontramos con uno de los retos en las pruebas SABER y es que no permiten el uso de la misma. Esto explica que utilicen de manera frecuente ángulos notables en el diseño de sus puntos, ya que en el caso de los ángulos notables, podemos conocer los valores de las funciones trigonométricas sin necesidad de la calculadora. Los mismos se encuentran presentes en la siguiente tabla de valores:

Seno	0°	30°	45°	60°	90°	
	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	
	90°	60°	45°	30°	0°	Coseno

La tabla presentada se lee de izquierda a derecha para la función seno y derecha a izquierda para la función coseno. En el caso de la función tangente únicamente basta con recordar que para cualquier ángulo la tangente es equivalente al cociente de las otras dos funciones, es decir:

$$\textbf{Tan a}= \frac{\textbf{Sen a}}{\textbf{Cos a}}$$

Por ejemplo, si es necesario conocer el valor para la tangente de 60°, podemos apoyarnos en un procedimiento análogo al siguiente:
Observe en la tabla que:

$$\text{Sen } \mathbf{60°} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{y Cos } \mathbf{60°} = \frac{1}{2}$$

Luego se tiene que:

$$\text{Tan } \mathbf{60°} = \frac{\text{Sen } \mathbf{60°}}{\text{Cos } \mathbf{60°}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3} * 2}{2 * 1} = \sqrt{3}$$

3. Definir las funciones trigonométricas

Quizás una de las principales dificultades en el momento de enfrentar un ejercicio de trigonometría se basa en no conocer o recordar las formulas cuando se necesitan. A continuación se presentan un par de ayudas entre las miles que se han desarrollado por los estudiosos para tener a la mano las funciones y valores necesarios para desarrollar un ejercicio de trigonometría.

La primera se refiere a las funciones trigonométricas y es una forma sencilla de recordar la distribución proporcional de los lados para cada una de ellas, es decir:

$$\textbf{Sen } \theta = \frac{\textit{\textbf{Cateto Opuesto}}}{\textit{\textbf{Hipotenusa}}} \qquad \textbf{Cos } \theta = \frac{\textbf{Cateto Adyacente}}{\textbf{Hipotenusa}}$$

$$\textbf{Tan } \theta = \frac{\textit{\textbf{Cateto Opuesto}}}{\textit{\textbf{Cateto Adyacente}}}$$

Una forma de recordar la distribución precisa de los lados es relacionarlos en la mente con la palabra HOLA.

Luego si en el momento de la prueba, olvidamos a que son equivalentes las funciones seno, coseno y tangente, podemos proceder de la siguiente manera:

1. Inicialmente imaginamos en blanco las funciones trigonométricas:

$$\textbf{Sen } \theta = \frac{\square}{\square} \qquad \textbf{Cos } \theta = \frac{\square}{\square} \qquad \textbf{Tan } \theta = \frac{\square}{\square}$$

2. Después asignamos las vocales de la palabra HOLA en su orden de aparición para seno y coseno, y en la tangente ubicamos una sobre la otra, así:

$$\textbf{Sen } \theta = \frac{O}{\square} \qquad \textbf{Cos } \theta = \frac{A}{\square} \qquad \textbf{Tan } \theta = \frac{O}{A}$$

3. Finalmente ubicamos la H en los espacios en blanco:

$$\textbf{Sen } \theta = \frac{O}{H} \qquad \textbf{Cos } \theta = \frac{A}{H} \qquad \textbf{Tan } \theta = \frac{O}{A}$$

Donde la letra O se refiere al cateto opuesto, la letra A al cateto adyacente y la H a la hipotenusa. La segunda técnica que puede ser útil, es efectuar únicamente un par de operaciones para completar los valores del cuadro de funciones trigonométricas asignadas para los ángulos notables.

Luego si en el momento de la prueba olvidamos los valores de seno, coseno o tangente para algún ángulo notable, podemos proceder de la siguiente manera:

1. Dibujamos el cuadro en blanco

Seno	0°	30°	45°	60°	90°	
	90°	60°	45°	30°	0°	Coseno

2. A un lado, se escriben los números del cero al cuatro, así:

0 1 2 3 4

3. Finalmente efectuamos las siguientes dos operaciones:

0 1 2 3 4

⇩ **Calcular raíz cuadrada**

$$\mathbf{0 \quad 1 \quad \sqrt{2} \quad \sqrt{3} \quad 2}$$

⇩ **Dividir por 2**

$$\mathbf{0 \quad 1/2 \quad \sqrt{2}/2 \quad \sqrt{3}/2 \quad 1}$$

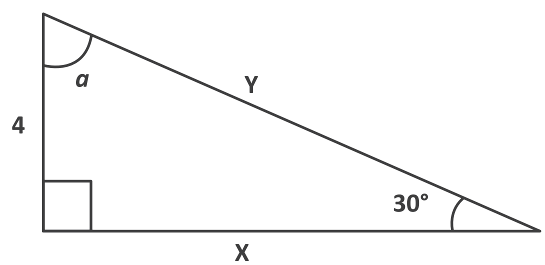
Y se completa el cuadro con los resultados obtenidos:

Seno	0°	30°	45°	60°	90°	
	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	
	90°	60°	45°	30°	0°	Coseno

Para finalizar las ideas propuestas en este capítulo y dejar una idea clara de su aplicación, desarrollaremos el siguiente ejercicio a modo de ejemplo.

Ejemplo:

La siguiente figura muestra un triángulo rectángulo con catetos x y 4, cuyos ángulos internos son 30° y α.



Con base en la figura es incorrecto afirmar que:

A. El valor de X es igual a $4\sqrt{3}$
B. El valor de α es igual a 60°
C. El valor de la hipotenusa es 8
D. El cociente entre 4 y X es igual a $\sqrt{3}$

Solución

Como las opciones de respuesta se refieren al valor de variables no conocidas, procedamos a calcular el valor de las mismas.

Primero, para conocer el valor de α, podemos recurrir a la suma de sus ángulos que debe ser igual a **180°**, por tanto como el triángulo es rectángulo tenemos:

$$\alpha+\mathbf{30°}+\mathbf{90°}=\mathbf{180°}$$

De lo que se concluye que $\alpha=$ **60°**

Calculemos ahora los lados por medio de las funciones trigonométricas (observe que no es posible utilizar el teorema de Pitágoras en este caso debido a que únicamente conocemos uno de los lados).

Primero debemos escoger un ángulo de referencia. Para este caso escojamos (sin razón de preferencia) el ángulo calculado, es decir el ángulo $\alpha = \mathbf{60°}$.

Expresando las funciones trigonométricas para 60° en el triángulo de la figura se tiene que:

$$\text{Sen } 60° = \frac{X}{Y} \qquad \text{Cos } 60° = \frac{4}{Y} \qquad \text{Tan } 60° = \frac{X}{4}$$

Observe que la función seno no es bastante útil en este caso, debido a que no conocemos ni a X, ni a Y, en cambio la función coseno permite calcular Y (única variable desconocida) y de manera análoga la tangente permite calcular X.

Para lograrlo se procede de la siguiente manera:

Primero reemplazamos los valores de las funciones trigonométricas para Cos**60°** y Tan**60°**:

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{Y} \qquad \sqrt{3} = \frac{X}{4}$$

Y finalmente se despejan la X y la Y de ambas ecuaciones para obtener:

$$Y = 8 \qquad y \qquad X = 4\sqrt{3}$$

De los resultados obtenidos podemos observar que las opciones A, B y C son correctas, sin embargo para el cociente entre 4 y X se tiene que:

$$\frac{4}{X} = \frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \neq \sqrt{3}$$

Luego la opción correcta es la D.

CAPÍTULO 3.

Trigonometría

Como ciencia, la trigonometría es la encargada de estudiar las propiedades geométricas de los triángulos, por ejemplo, propiedades como el teorema de Pitágoras o las funciones seno, coseno y tangente son propiedades geométricas del triángulo rectángulo y por tanto hacen parte de la trigonometría.

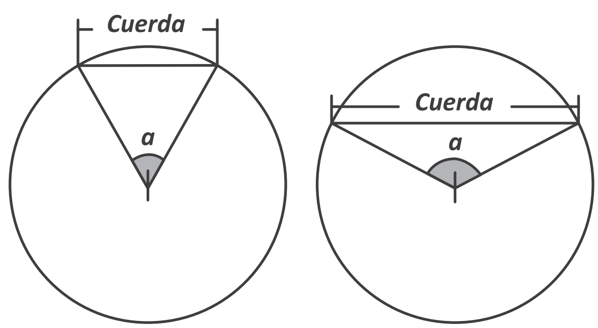
Sin embargo, esta ciencia es mucho más extensa que las propiedades ya mencionadas. Esto se debe a que no todos los triángulos son rectángulos, es decir, no siempre podemos aplicar las propiedades ya vistas.

Para poder abordar cualquier tipo de triángulo, será necesario enunciar un par de teoremas fundamentales para el estudio de los triángulos no rectángulos.

Leyes del seno y el coseno

Euclides escribe durante el siglo III a.C., quizás el libro más importante en la historia de la geometría. La obra "Elementos" es un tratado matemático constituido por 13 tomos. En estos, Euclides recopila gran parte del saber matemático de su época y enuncia algunos resultados adicionales que dan lugar a lo que hoy se conoce como geometría Euclidiana.

En el tercer tomo, analiza el cambio de la longitud de una cuerda a medida que cambia el ángulo que la genera, tal y como lo muestra la figura:

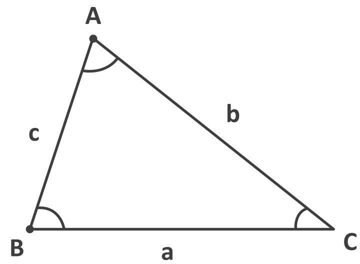


La distancia que une los dos puntos en cada círculo es llamada cuerda, podemos observar que la longitud de la cuerda aumenta a medida que el ángulo aumenta y viceversa.

Basados en este concepto, diferentes matemáticos del siglo XIII, redefinieron los resultados de Euclides para reforzar el estudio de los triángulos no rectángulos y unieron sus esfuerzos para postular la siguiente ley:

Ley del Seno

Sobre un triángulo cualquiera con ángulos A, B, C y distancias a, b y c respectivamente opuestas a sus ángulos:



Podemos afirmar que:

$$\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } C}{c}$$

Por tanto las siguientes tres igualdades son validas sobre todo tipo de triángulo:

1. $\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } B}{b}$

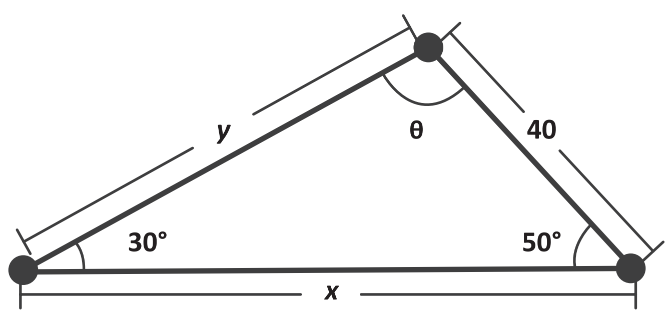
2. $\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } C}{c}$

3. $\frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } C}{c}$

Con ayuda de esta ley podemos calcular ángulos y distancias sin necesidad que el triángulo sea rectángulo, ya que la misma se define para cualquier tipo de triángulo. A continuación se presenta como podemos aplicar la ley del seno para el cálculo de distancias desconocidas.

Ejemplo 1:

Para el triángulo presentado en la gráfica:



El valor de x puede calcularse por medio de la expresión:

A. $x = (\text{sen } 100°)(40)(0,5)$

B. $x = (\text{sen } 40°)(200)$

C. $x = \frac{(\text{sen } 100°)(40)}{\text{sen } 30°}$

D. $x = \frac{(\text{sen } 30°)(\text{sen}100°)}{40}$

Solución

Se tiene que $\theta=100°$ ya que la suma de los tres ángulos debe ser igual a 180°. Luego, reemplazando los valores del triángulo en las equivalencias propuestas por la ley del seno, tenemos que:

1. $\frac{\text{sen } 30}{40} = \frac{\text{sen } 50}{\boxed{y}}$

2. $\frac{\text{sen } 30}{40} = \frac{\text{sen } 100}{\boxed{x}}$

3. $\frac{\text{sen } 50}{\boxed{y}} = \frac{\text{sen } 100}{\boxed{x}}$

Para escoger con que ecuación trabajar basta con notar que en la ecuación 3 desconocemos dos variables lo que la hace inútil hasta el momento y la ecuación 1 permite calcular la variable y, no la variable x, por lo tanto trabajando con la ecuación 2, tenemos:

$$\frac{\text{sen } 30°}{40} = \frac{\text{sen } 100°}{x}$$

Pasando ambos términos a multiplicar:

$$x * \text{sen } 30° = \text{sen } 100° * 40$$

Finalmente, al pasar a dividir el seno tenemos:

$$x = \frac{(\text{sen } 100°)(40)}{\text{sen } 30°}$$

Se concluye que la respuesta es la opción C.

Cabe recordar que durante las pruebas no es posible utilizar calculadora, es decir, conocemos únicamente el valor de las funciones para ángulos notables (0°, 30°, 45°, 60° y 90°), en los demás casos debe dejarse expresado, por ejemplo en el ejercicio anterior, el siguiente resultado también es válido:

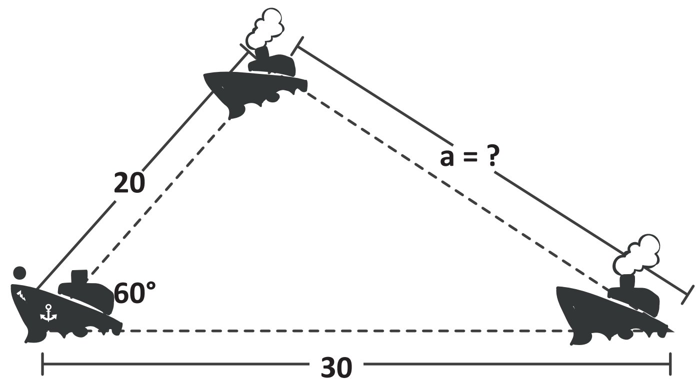
$$x = \frac{(\text{sen } 100°)(40)}{\text{sen } 30°} = \frac{(\text{sen } 100°)(40)}{(1/2)}$$

$$= (2)(40) \text{ sen } 100° = 80 \text{ sen } 100°$$

En ocasiones, también nos encontramos con ejercicios que únicamente presentan un valor conocido en cada una de las ecuaciones de la ley del seno, tal y como se muestra en el siguiente problema.

Ejemplo 2:

Una cámara policial aérea visualiza un fugitivo que huye en barco hacia otro país. El fugitivo es perseguido por dos barcos de seguridad que se encuentran a 20 y 30 metros de su objetivo tal y como lo muestra la imagen aérea:



Con la información suministrada, ¿será posible calcular la distancia que guardan entre si los barcos de seguridad?

Para calcular el valor del lado faltante reemplacemos los valores conocidos sobre las ecuaciones presentadas por la ley del seno y obtenemos:

1. $\dfrac{\text{sen } 60}{\boxed{a}} = \dfrac{\boxed{\text{sen } B}}{20}$

2. $\dfrac{\text{sen } 60}{\boxed{a}} = \dfrac{\boxed{\text{sen } C}}{30}$

3. $\dfrac{\boxed{\text{sen } B}}{20} \quad \dfrac{\boxed{\text{sen } C}}{30}$

Observe que no es posible empezar a trabajar con alguna de estas ecuaciones ya que en todas ellas se desconocen dos variables y para poder desarrollar una ecuación es necesario desconocer únicamente una variable.

Para este tipo de casos podemos hacer uso de la siguiente ley.

Ley del coseno

Sobre un triángulo cualquiera con ángulos A, B, C y distancias a, b y c respectivamente opuestas a sus ángulos, podemos afirmar que:

1. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc * \cos A$
2. $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac * \cos B$
3. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab * \cos C$

Sobre un triángulo cualquiera con ángulos A, B, C y distancias a, b y c respectivamente opuestas a sus ángulos, podemos afirmar que:

1. $a^2 = 20^2 + 30^2 - 2(20)(30) * \cos 60°$
2. $20^2 = a^2 + 30^2 - 2a(30) * \cos B$
3. $30^2 = a^2 + 20^2 - 2a(20) * \cos C$

Es decir, podemos utilizar la ecuación 1) para calcular el lado restante:

$$a^2 = 20^2 + 30^2 - 2\,(20)(30) * 60°$$

$$a^2 = 400^2 + 900^2 - 1200 * \frac{1}{2}$$

$$a^2 = 1300 - 600$$

$$a^2 = \sqrt{700}$$

$$a^2 = \sqrt{7 * 100} = \sqrt{7 * 10}$$

$$a^2 = 10\sqrt{7}$$

Finalmente, podemos afirmar que la distancia entre ambos barcos es $10\sqrt{7}$ metros.

Puede observarse entonces, que las leyes del seno y el coseno generalizan la solución de problemas trigonométricos lo que le da un inmenso valor matemático a los dos teoremas presentados. Sin embargo, se sugiere por facilidad en el procedimiento utilizar la ley del seno siempre que sea posible.

Identidades trigonométricas

Una identidad trigonométrica es una igualdad entre funciones trigonométricas que se cumple para cualquier ángulo, por ejemplo:

La igualdad para la tangente es cierta sin importar el valor que tome el ángulo α.

$$\text{Tan}\ a = \frac{\text{Sen}\ a}{\text{Cos}\ a}$$

Existen además de la igualdad que acabamos de presentar, varias identidades trigonométricas. En su libro "elementos", Euclides expone las que podrían considerarse identidades trigonométricas fundamentales:

1. $\text{Tan}\ a = \frac{\text{Sen}\ a}{\text{Cos}\ a}$
2. $\text{Cot}\ a = \frac{\text{Cos}\ a}{\text{Sen}\ a}$
3. $\text{Csc}\ a = \frac{1}{\text{Sen}\ a}$
4. $\text{Sec}\ a = \frac{1}{\text{Cos}\ a}$
5. $\text{Sen}^2\ a + \text{Cos}^2\ a = 1$

A partir de estas cinco identidades, pueden demostrarse muchas otras, de ello se infiere que el objetivo fundamental de las identidades trigonométricas sea demostrar que una expresión es igual a otra.

Por ejemplo a partir de la identidad 5) puede demostrarse que si:

$$\text{Sen}^2\ a + \text{Cos}^2\ a = 1$$

Entonces pasando a restar alguno de los términos se obtiene que:

$$6.\ \mathrm{Sen}^2\,a = 1 - \mathrm{Cos}^2\,a$$

$$7.\ \mathrm{Cos}^2\,a = 1 - \mathrm{Sen}^2\,a$$

Es decir se obtienen dos nuevas identidades (6 y 7) a partir de la identidad 5).
Para demostrar que una expresión trigonométrica es igual a otra se sugiere seguir los siguientes pasos:

1. Expresar las expresiones presentes en términos de seno y coseno
2. Realizar las operaciones aritméticas que sean posibles (sumas, restas, productos, potencias, raíces o cancelación de términos)
3. Utilizar las identidades conocidas siempre que sea posible y pertinente.

Ejemplo 1

La expresión **$\mathrm{Tan}^2\,\alpha+1$** es equivalente a la expresión:

A. $\mathrm{Sen}^2\,a + 1$
B. $\mathrm{Sec}^2\,a$
C. $\mathrm{Cot}^2\,a + 1$
D. $\mathrm{Cos}^2\,a + 1$

Solución:

El primer paso sugerido es expresar las funciones presentes en términos de senos y cosenos, por tanto de acuerdo a la identidad 1) se tiene que:

$$\mathrm{Tan}^2\,a + 1 = \left[\frac{\mathrm{Sen}\,a}{\mathrm{Cos}\,a}\right]^2 + 1$$

Luego realizar todas las operaciones aritméticas posibles:

$$\frac{\mathrm{Sen}^2\,a}{\mathrm{Cos}^2\,a} + 1 = \frac{\mathrm{Sen}^2\,a}{\mathrm{Cos}^2\,a} + \frac{1}{1} = \frac{\mathrm{Sen}^2\,a + \mathrm{Cos}^2\,a}{\mathrm{cos}^2\,a}$$

Finalmente si seguimos la tercera indicación que es utilizar las identidades conocidas (5 y 4) se tiene que:

$$\frac{\mathrm{Sen}^2\,a + \mathrm{Cos}^2\,a}{\mathrm{cos}\,a^2} = \frac{1}{\mathrm{cos}\,a^2} = \left[\frac{1}{\mathrm{cos}\,a}\right] = \mathrm{Sec}^2\,a$$

Luego **$\mathrm{Tan}^2\,\alpha+1= \mathrm{Sec2}\,\alpha$**, por tanto se concluye que la respuesta correcta es la C.

Ejemplo 2
De las siguientes expresiones trigonométricas:

I. $\mathrm{Sen}^2\,a - \mathrm{Cos}^2\,a$
II. $\mathrm{Sen}^2\,a + \mathrm{Cos}^2\,a$
III. $\dfrac{1 - \mathrm{Sen}^2\,a}{\mathrm{Cos}^2\,a}$

Son equivalentes a la expresión **Sec² α - Tan² α:**

A. I
B. II y III
C. I y III
D. III

Solución:

Reemplazando las funciones secante y tangente en funciones de seno y coseno tenemos que:

$$\mathbf{Sec^2}\,\alpha - \mathbf{Tan^2}\,\alpha = \left[\frac{1}{\cos\alpha}\right]^2 - \left[\frac{\operatorname{Sen}\alpha}{\cos\alpha}\right]^2$$

$$= \frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{\operatorname{Sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{1-\operatorname{Sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 1$$

Finalmente, si se observa el procedimiento realizado y teniendo en cuenta las identidades conocidas podemos afirmar que:

$$\operatorname{Sec}^2\alpha - \operatorname{Tan}^2\alpha = \frac{1-\operatorname{Sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 1\ \operatorname{Sen}^2\alpha + \cos^2\alpha$$

Se concluye que la respuesta es la B.

Funciones seno y coseno para la suma y resta de ángulos.

Para concluir este capítulo se presentan algunas identidades para la suma y resta de ángulos:

- **Sen (a + b) = Sen *a* Cos *b* + Cos *a* Sen *b***
- **Sen (a - b) = Sen *a* Cos *b* - Cos *a* Sen *b***
- **Cos (a + b) = Cos *a* Cos *b* - Sen *a* Sen *b***
- **Cos (a - b) = Cos *a* Cos *b* - Sen *a* Sen *b***

Estas pueden ser bastante útiles para calcular funciones de ángulos no notables tal y como se presenta en el siguiente problema.

Ejemplo

El valor de la expresión $\cos(120°) + \frac{1}{2}$ es:

A. Igual a 0 debido a que *Cos* (120°) = $-\frac{1}{2}$
B. Igual a 1 debido a que *Cos* (120°) = $\frac{1}{2}$
C. Igual a $\frac{1}{2}$ **debido a que *Cos* (120°) =** $\frac{1}{2}$
D. Igual a $\sqrt{3}$ **debido a que *Cos* (120°) =** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Solución:

Reemplazando en la ecuación designada para el coseno de la suma de ángulos y expresando 120° como suma de ángulos notables tenemos que:

$$\begin{aligned} \text{Cos}\,(120°) &= \text{Cos}\,(90°+30°) \\ &= \text{Cos}\,90°\ \text{Cos}\,30° - \text{Sen}\,90°\ \text{Sen}\,30° \\ &= (0)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - (1)\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Por tanto; $\text{Cos}(120°)+\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 0$ y la respuesta es la opción A.

Estadistica

Es la ciencia que se encarga de recolectar, organizar, analizar e interpretar información, mediante el uso de tablas, diagramas o gráficas en las cuales se pueden estudiar las conclusiones dadas al estudio de dicha información. Actualmente, la estadística es una ciencia independiente de la matemática y surgió gracias a la necesidad que tuvo el hombre de interpretar diferentes tipos eventos y así poder hacer una estimación de cuál es la tendencia en el comportamiento de dichos eventos. El objeto de estudio de la estadística son las variables estadísticas.

Variable estadística

Es el tipo de variables que pueden medir y tomar distintos valores. Estas se clasifican en dos grupos:

Variables cualitativas

Son aquellas en las cuales los resultados que se observan no se pueden expresar numéricamente. Por ejemplo, al realizar una encuesta se pregunta al público por el candidato que prefiere en algún tipo de elecciones.

Variables cuantivas

Son aquellas en las cuales los resultados que se observan se pueden expresar numéricamente. Las variables cuantitativas se subdividen en dos grupos:

Variables discretas:

Son aquellas que sólo toman valores enteros o que sólo pueden tomar una cantidad finita de valores. Por ejemplo, en una encuesta realizada a un grupo de estudiantes por la edad en la cual ingresaron a la universidad, las respuestas serán necesariamente valores enteros.

Variables continuas:

Son aquellas que pueden tomar un rango de valores que no son necesariamente enteros. Por ejemplo, preguntar a los mismos estudiantes la nota promedio obtenida e los semestres cursados, para un grupo de personas puede tomar valores que no son enteros.

Medidas de tendencia central:

Son aquellos valores que se obtienen a partir de la información recolectada y nos permiten caracterizar la variable estadística. Las más usadas son la moda, mediana y media.

Moda:

En una serie de datos, se llama moda al valor que más veces se repite, o sea al de mayor frecuencia. La moda se puede determinar tanto para variables cuantitativas como cualitativas. En algunos casos puede existir más de una moda o simplemente puede no existir.

Mediana:

La mediana de una serie de datos corresponde al dato que ocupa la posición intermedia, ordenándolos de menor a mayor, en caso de que el número de datos sea impar o el promedio de los dos datos intermedios, en caso de que la cantidad de datos sea par.

Media:

En una serie de datos numéricos, se denomina media al promedio de éstos. Recordar que un promedio se calcula haciendo la sumatoria de todos los datos y se divide entre la cantidad de datos.

EJEMPLO: En un almacén se contabilizaron el total de camisetas vendidas en los últimos 8 días y los resultados fueron los siguientes: 12, 15, 7, 10, 12, 8, 12 y 8.

Cálculo de la moda:

Simplemente es buscar el dato que más se repite, en este caso es el 12.

Cálculo de la mediana:

Primero se ordenan de menor a mayor y como el número de datos es par, se seleccionan los dos datos centrales y se busca su promedio.

7, 8, 8 $\boxed{\textbf{10, 12,}}$ 12, 12 y 15

Datos centrales

⇩

(10 + 12) / 2 =

La mediana de los ocho datos presentados es 11.

Cálculo de la media:

Consiste en calcular el promedio de todos los datos, o sea que se deben sumar el total de camisas y dividir entre el total de datos que son 8.

$$\frac{7 + 8 + 8 + 10 + 12 + 12 + 12 + 15}{8} = 84/8 = 10{,}5$$

La mediana de los ocho datos presentados es 10,5.

Tipos de Frecuencia:

Al momento de realizar un estudio estadístico, una de las primeras labores a realizar es tabular la información, o sea, tomar la información e indicar en una tabla ciertos valores con respecto al número de veces que se repite dicha variable. Estos datos son llamados frecuencias y a continuación describimos la forma de calcular cada una de ellas:

Frecuencia absoluta:

Se refiere al número de veces que se repite el valor de la variable en la muestra total. En las tablas, normalmente se simboliza como $\mathbf{n_i}$.

Frecuencia relativa:

Se obtiene dividiendo el valor de la frecuencia absoluta con el tamaño de la muestra. La frecuencia relativa la denotaremos por $\mathbf{f_i}$ y el tamaño de la muestra por **N**.

$$f_i = \frac{n_i}{N}$$

Frecuencia Absoluta Acumulada:

Se refiere al número de veces que ha aparecido en la muestra un valor menor o igual que el de la variable. La denotaremos por $\mathbf{N_i}$.

Frecuencia Relativa Acumulada:

Se obtiene dividiendo la frecuencia absoluta acumulada entre el tamaño de la muestra. La denotaremos como

Al igual que en el caso anterior la frecuencia relativa acumulada es la frecuencia absoluta acumulada dividido por el tamaño de la muestra. La denotaremos por $\mathbf{F_i}$

$$F_i = \frac{N_i}{N}$$

Ejemplo: Para un estudio climático en la ciudad de Medellín, se midió la temperatura promedio en 50 días consecutivos los resultados de las mediciones fueron: 16 días hubo una temperatura promedio de 21°C, 20 días de 23°C, 9 días de 24°C y 5 días de 25°C. Con los datos suministrados, realizar la tabla de frecuencias

Temperatura (°C)	Número de días			
X_i	n_i	F_i	N_i	F_i
21	16	16/50	16	16/50
23	20	20/50	36	36/50
24	9	9/50	45	45/50
25	5	5/50	50	50/50
Total	50			

Análisis de datos:

En la estadística es usual representar la información recolectada por medio de tablas, diagramas de barra o diagramas circulares. A continuación mostraremos las formas de utilizar cada uno de ellos.

En cualquier tipo de prueba escrita es común que se utilicen gráficas o tablas para presentar los datos del problema y a partir de ellas se proponen cierto tipo de preguntas comunes. A continuación hacemos algunas sugerencias a tener en cuenta para abordar de manera correcta esos interrogantes:

- Se pregunta acerca de “fracción, proporción, relación o razón”, los cuatro conceptos se refieren a lo mismo y simplemente los que se debe hacer es armar un fraccionario con los datos relacionados en el problema.

- Preguntas de porcentajes: Un aspecto fundamental para desarrollar correctamente un ejercicio de porcentajes mediante una regla de tres simple es saber definir a qué valor le corresponde el 100%, según la redacción del problema, y recordar que siempre se comportan de manera directamente proporcional. Frases como “con respecto a” o “con relación a” nos están indicando que esa cantidad mencionada después de esas frases se deben tomar como el 100% para plantear la regla de tres.

- Cuando se usan las frases “por lo menos” o “como mínimo” se debe sumar el valor que se indica después de la frase y los mayores que él.

- Cuando se usan las frases “a lo sumo” o “como máximo” se debe tomar el valor que se indica y los menores que él.

En el taller correspondiente a este capítulo, se resolverá un ejemplo que clarifica la manera de interpretar y aplicar estos conceptos.

Tablas

Las tablas más usadas son las llamadas de doble entrada, en las cuales se organiza una de las variables en forma vertical y la otra en forma horizontal, con el fin de relacionar los datos de una variable con la otra. A continuación mostramos un ejemplo de una tabla de doble entrada:

Se seleccionaron aleatoriamente 800 estudiantes pertenecientes a la Universidad A, a la Universidad B, a la universidad C y a la universidad D y se les preguntó hasta qué nivel educativo pretenden estudiar. Los resultados fueron los siguientes:

Tablas

Las tablas más usadas son las llamadas de doble entrada, en las cuales se organiza una de las variables en forma vertical y la otra en forma horizontal, con el fin de relacionar los datos de una variable con la otra. A continuación mostramos un ejemplo de una tabla de doble entrada:

Se seleccionaron aleatoriamente 800 estudiantes pertenecientes a la Universidad A, a la Universidad B, a la universidad C y a la universidad D y se les preguntó hasta qué nivel educativo pretenden estudiar. Los resultados fueron los siguientes:

	Universitario	Especialización	Maestría	Postgrado	TOTAL
A	25	75	100	50	250
B	60	80	40	20	200
C	100	30	70	15	215
D	45	35	20	35	135
TOTAL	230	220	230	120	800

Notamos que en la tabla se puede leer en un sentido el total de estudiantes de cada universidad y en el otro el total de estudiantes en cada nivel educativo.

Diagrama de barras

Es un gráfico que se plasma sobre un plano cartesiano usando barras horizontales o verticales que toman alturas proporcionales a los valores que corresponden y se usan para comparar los dichos valores.

Ejemplo: Se realiza una encuesta donde se pregunta acerca de con qué tipo de monedas o billetes llenan la alcancía de ahorros.

200 personas respondieron con monedas de \$50, 100 con monedas de \$100, 50 con monedas de \$200, otras 50 con monedas de \$500 y 400 con billetes de \$1000. A continuación mostramos el diagrama de barras respectivo:

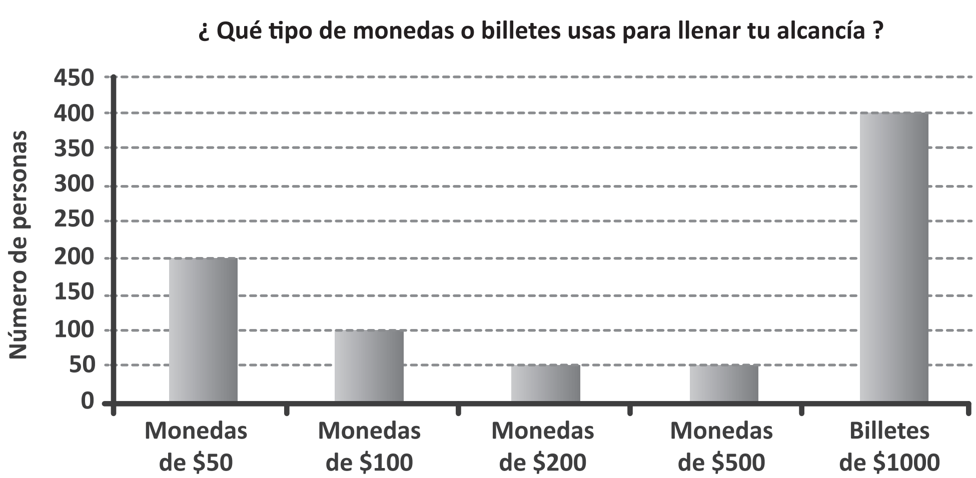


Diagrama circular, de torta o de sectores

Es un diagrama en el que se usa un círculo que representará la totalidad de la muestra o población (100%); ésta se divide en regiones o sectores proporcionales según el valor que tome cada una de las variables.

Ejemplo: Con los datos proporcionados, realizar el diagrama circular respectivo. En una encuesta realizada a 400 personas en el centro de la ciudad se obtuvieron los siguientes resultados:

- 208 de ellas viven en Medellín.
- 112 de ellas viven en Bello.
- 72 de ellas viven en Envigado.
- 8 de ellas viven en Sabaneta.

Teniendo el total de personas y sabiendo que cantidad de ellos viven en cada municipio, se puede calcular el porcentaje correspondiente

Para los que viven en Medellín: 208/400= 0,52= **52**%.
Para los que viven en Bello: 112/400= 0,28= **28**%.
los que viven en Envigado: 72/400= 0,18= **18**%.
Para los que viven en Sabaneta: 8/400= 0,02= **2**%.

Al tener los porcentajes respectivos, nos podemos ayudar de la regla de tres simple para saber qué ángulo corresponde a cada porcentaje calculado.

Recordemos que la circunferencia tiene 360º y este ángulo lo tomaremos como el 100%. A continuación se muestra como hacer el cálculo para las personas que viven en Medellín y de manera similar se calculan los ángulos respectivos para los habitantes de los otros municipios:

Si, 360°..........100%

X 52%

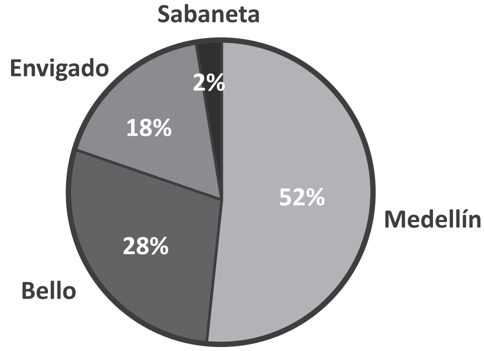
X = (52% * 360°) / 100%

$$\boxed{X = 187{,}2\ °}$$

Al realizar los otros cálculos de manera similar a esta, se deben obtener los siguientes resultados:

Para los de Medellín se tiene que la porción equivale a **187,2 º.**
Para los de Bello se tiene que la porción equivale a **100,8 º.**
Para los de Envigado se tiene que la porción equivale a **64,8 º.**
Para los de Sabaneta se tiene que la porción equivale a **7,2 º.**

DIAGRAMA CIRCULAR



Probabilidad

Probabilidad simple:

En un juego de cartas necesitas obtener de la pila un As de diamantes para poder ganar la partida, al momento de tomar la carta no es posible saber con certeza cual has tomado ya que se tiene una diversidad de opciones, a un experimento de este tipo se le llama aleatorio y es la base del estudio de la probabilidad.

El objetivo de la probabilidad es poder cuantificar que tan factible es que un evento aleatorio pueda o no ocurrir y mediante esta cuantificación atreverse a tomar decisiones con mayor seguridad con respecto a ese evento.

La probabilidad se mide entre cero y uno (0 Y 1), donde una probabilidad de cero indica que con seguridad el evento no ocurrirá. Cuando toma el valor de uno podemos afirmar con certeza que ese evento si ocurrirá. Cuando toma un valor entre cero y uno ya no es posible afirmar si ocurre o no, sólo podemos hablar de tendencias, mientras el valor de la probabilidad se acerque más al cero hay una tendencia a que ese evento no ocurra y mientras más cerca del uno está ese valor hay una tendencia a que ese evento si ocurra, mas no se puede saber si lo hará o no.

La probabilidad también se acostumbra a medir en porcentaje y se obtiene multiplicando su valor por 100.

Probabilidad	En %	Ocurrencia
0	0%	No ocurre
0.15	15%	Tiende a no ocurrir
0.92	92%	Tiende a ocurrir
1	100%	Ocurre

Para cuantificar la probabilidad de que un evento ocurra o no se utiliza la regla de Laplace y podemos notar que es una expresión simple:

$$\textbf{PROBABILIDAD} = \frac{\textbf{CASOS FAVORABLES}}{\textbf{CASOS POSIBLES}}$$

A continuación daremos algunos ejemplos de situaciones muy comunes en los que se utiliza esta expresión para obtener probabilidades:

1. Hallar la probabilidad de que al lanzar un dado se obtenga un 6 en el resultado.

Este experimento, que consiste en lanzar un dado, tiene 6 casos posibles: {1,2,3,4,5,6}. Un vistazo rápido nos permite darnos cuenta que solo hay un caso favorable: obtener un 6 denotado así {6}. Como en este caso solo hay un resultado de 6 posibles, la probabilidad resulta ser

$$p = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{1}{6}$$

2. Hallar la probabilidad de que al lanzar dos monedas salga por lo menos una cara. Cada moneda aporta dos posibles resultados, por lo tanto el experimento completo arroja 2x2 = 4 resultados o casos posibles.

   Supongamos que la primera moneda que se lanza arroja como resultado cara y la segunda sello, una manera de escribir este resultado podría ser (c,s); con esta notación, podemos escribir todos los casos posibles como: Ω={(c,s);(s,c);(c,c);(s,s)}. Los casos favorables, son aquellos que incluyan por lo menos una cara, estos son

   casos favorables={(c,s);(s,c);(c,c)}

   Tenemos tres casos favorables de seis posibles, así el cálculo de la probabilidad es:

$$p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

3. Juan compra 5 boletas para una rifa. Cada boleta juega con un número de dos cifras. ¿Cuál es la probabilidad de que Juan se gane el premio? La cantidad de resultados posibles es igual al número de boletas impresas cada una con un único número de dos cifras desde el 00 hasta el 99, es decir, 100 casos posibles. Los cantidad de casos favorables es la cantidad de boletas que Juan compró, es decir, 5 boletas. La probabilidad de que Juan gane es

$$p = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

   En porcentaje sería $p= \frac{1}{20} = 5\%$