1 Wstęp

Znając dokładne odległości od każdego z trzech punktów możemy analitycznie wyprowadzić referencyjne rozwiązanie, rozwiązując układ trzech równań okręgu:

$$\begin{cases} (x - x_A)^2 + y^2 &= d_A^2 \\ x^2 + y^2 &= d_C^2 \\ x^2 + (y - y_B)^2 &= d_B^2 \end{cases}$$

Korzystając z pierwszych dwóch równań mamy

$$x = \frac{x_A^2 + d_C^2 - d_A^2}{2x_A}$$

$$y = \pm\sqrt{d_C^2 - x^2}$$

Dla rozwiązywanego problemu mamy

$$x_A = 50$$

$$y_B = 100$$

$$d_A = 318.8636072053379\,\mathrm{km}$$

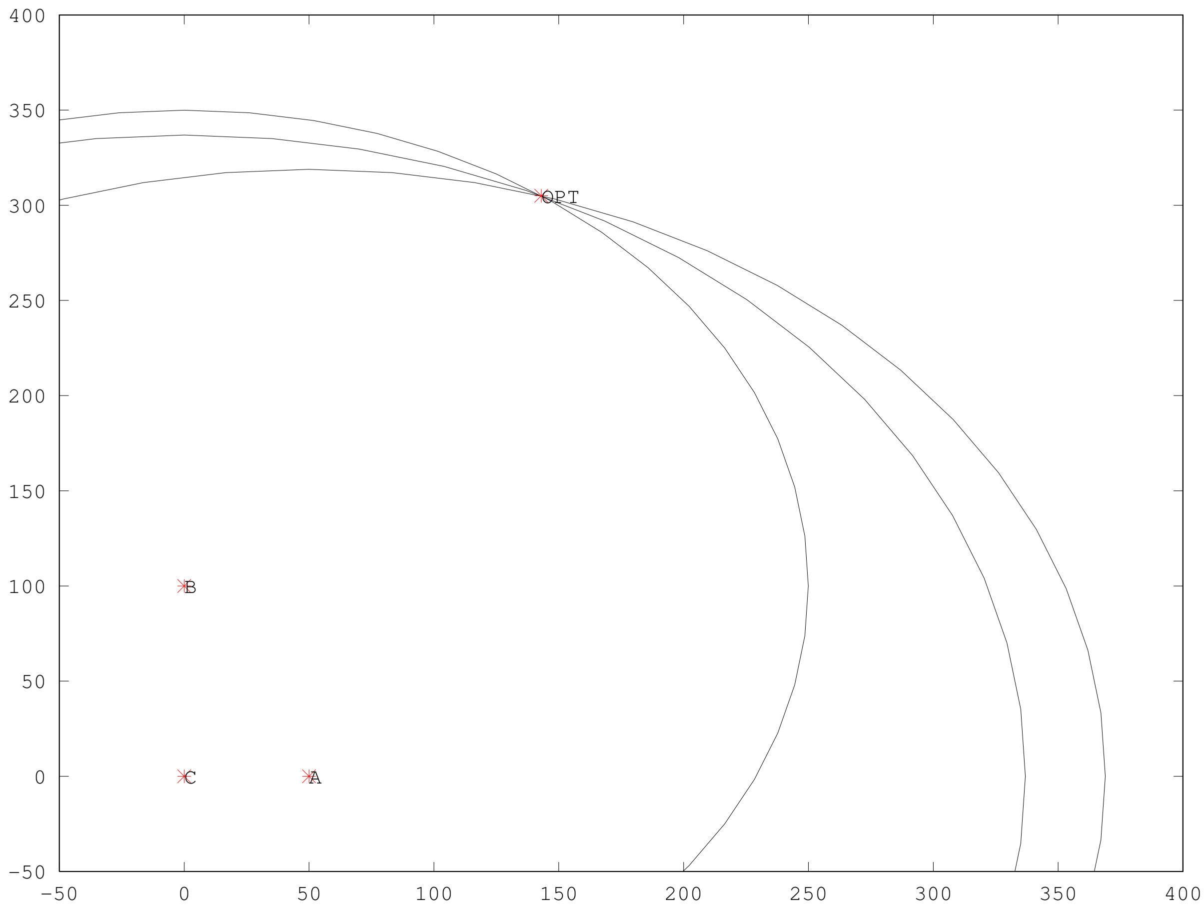
$$d_B = 249.9479945908749\,\mathrm{km}$$

$$d_C = 336.8590209568388\,\mathrm{km}$$

a więc, używając trzeciego równania do wyeliminowania jednego z rozwiązań, mamy

$$x = 143$$

$$y = 305$$



System nawigacji hiperbolicznej taki jak LORAN pozwala rozwiązać tego rodzaju problem zakładając znajomość jedynie różnicy odległości pomiędzy stacjami nadawczymi. Takie założenie czynię również przy dalszych rozważaniach.

2 Wyznaczenie hiperbol

2.1 Punkty A i C

Rozważmy kanoniczną postać równania hiperboli

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

W przypadku rozważanego problemu $x_0 = \frac{x_A}{2}$ i $y_0 = 0$.

Niech c - odległość pomiędzy środkiem (x_0, y_0) hiperboli i każdym z ognisk A i C. Wtedy musi zachodzić

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Dla naszego problemu mamy

$$c = \frac{x_A}{2}$$

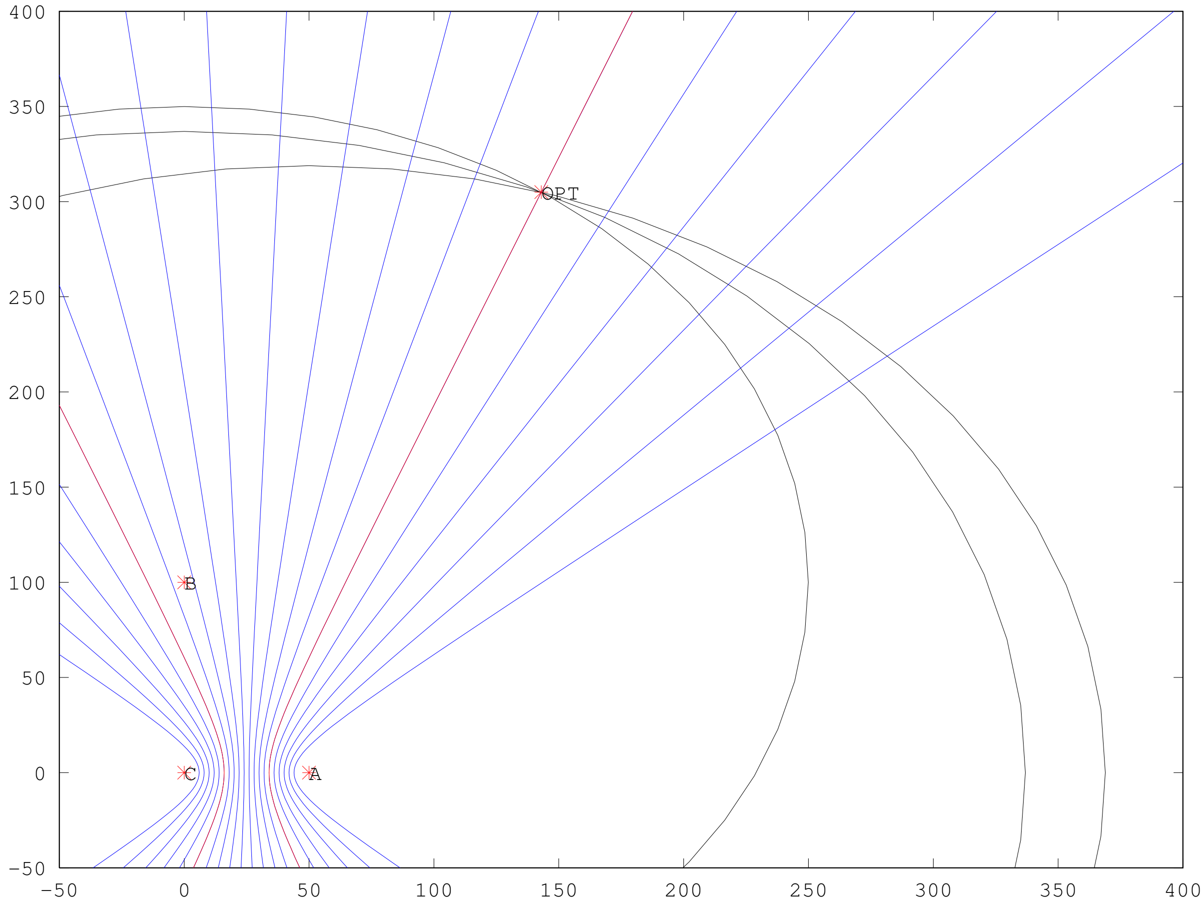
Równania te wyznaczają rodzinę hiperbol dla ognisk A i C. Znając dodatkowo różnicę odległości szukanego punktu do każdego z ognisk możemy wyznaczyć równanie hiperboli zawierającej ten punkt korzystając z faktu, że

$$2a = |d_A - d_C|$$

Mamy więc ostatecznie

$$a = \frac{|d_A - d_C|}{2}$$

$$b = \sqrt{\left(\frac{1}{2}x_A\right)^2 - a^2}$$



2.2 Punkty B i C

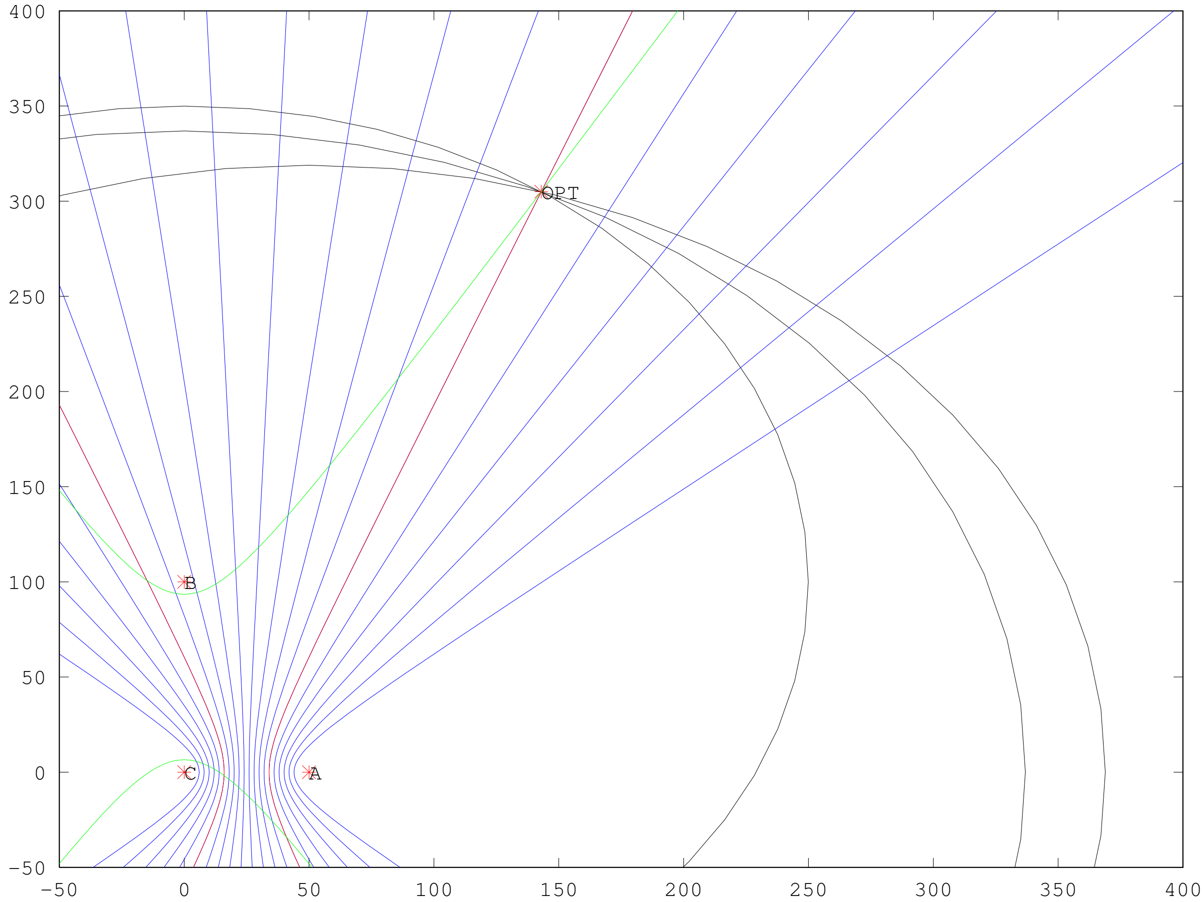
Dla punktów B i C wykorzystamy odwróconą hiperbolę:

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$

Biorąc $x_0 = 0$, $y_0 = \frac{y_B}{2}$ i przeprowadzając rozważanie analogiczne jak powyżej otrzymujemy

$$a = \frac{|d_B - d_C|}{2}$$

$$b = \sqrt{\left(\frac{1}{2}y_B\right)^2 - a^2}$$



3 Rozwiązanie numeryczne

3.1 Doprecyzowanie rozwiązania

Wyznaczone hiperbole przecinają się w czterech punktach. Aby wybrać własciwe rozwiązanie, posłużymy się jednym ze zdefiniowanych wcześniej równań okręgów.

3.2 Rozwiązanie przy pomocy fminunc z podaniem gradientu

```
xopt_num =

   143.0000
   305.0000


fval_num =
```

```
    1.3422e-16


output_num =

          iterations: 31
           funcCount: 32
        cgiterations: 28
       firstorderopt: 3.8168e-07
           algorithm: 'large-scale: trust-region Newton'
             message: [1x496 char]
      constrviolation: []
```

3.3 Rozwiązanie przy pomocy funkcji fsolve

Wynik uzyskany przez wywołanie funkcji fsolve z domyślnymi parametrami:

```
fsolve_opt =

    143.00
    305.00

fval =

   -7.5350e-09
    1.6751e-09
    3.0349e-06

output =

  scalar structure containing the fields:

    iterations =  8
    successful =  6
    funcCount =  20
```

4 Kod rozwiązania

```
% definicja problemu
xa = 50;
yb = 100;
dist_a = 3.188636072053379e+02;
dist_b = 2.499479945908749e+02;
dist_c = 3.368590209568388e+02;
```

```
opt = [143; 305];


% wykresy
circle = @(centerX, centerY, radius)...
    rectangle('Position', [
        centerX - radius, centerY - radius, radius*2, radius*2],...
    'Curvature',[1,1]);
R = -4:0.1:4;
hyperbola_ew = @(x0, y0, a, b, style) plot(...
    -a*cosh(R) + x0, b*sinh(R) + y0, style,...
    a*cosh(R) + x0, b*sinh(R) + y0, style);
hyperbola_ns = @(x0, y0, a, b, style) plot(...
    b*sinh(R) + x0, a*cosh(R) + y0, style,...
    b*sinh(R) + x0, -a*cosh(R) + y0, style);

plot(xa, 0, 'r*')
hold on
text(xa, 0, 'A')
plot(0, yb, 'r*')
text(0, yb, 'B')
plot(0, 0, 'r*')
text(0, 0, 'C')

circle(xa, 0, dist_a)
circle(0, yb, dist_b)
circle(0, 0, dist_c)

plot(opt(1), opt(2), 'r*')
text(opt(1), opt(2), 'OPT')
axis([-50 400 -50 400]);
print -depsc circles.eps

for a = 1:2:20
    b = sqrt((xa/2).^2 - a.^2);
    hyperbola_ew(xa/2, 0, a, b, 'b');
end
a_ew = abs(dist_a - dist_c) / 2
b_ew = sqrt((xa/2).^2 - a_ew.^2)
hyperbola_ew(xa/2, 0, a_ew, b_ew, 'r');
print -depsc hyperbolas_ew.eps

a_ns = abs(dist_b - dist_c) / 2
b_ns = sqrt((yb/2).^2 - a_ns.^2)
hyperbola_ns(0, yb/2, a_ns, b_ns, 'g');
```

```
print -depsc hyperbolas_ns.eps


% obliczenia
diary fvalopt.log
circ_a = @(x,y) (x-xa).^2 + y.^2 - dist_a.^2;
minfun = @(X) [
    (X(1)-xa/2).^2 ./ a_ew.^2 - X(2).^2 ./ b_ew.^2 - 1;
    (X(2)-yb/2).^2 ./ a_ns.^2 - X(1).^2 ./ b_ns.^2 - 1;
    circ_a(X(1), X(2))
];
[fsolve_opt, fval, ~, output, ~] = fsolve(minfun, [200; 200])
diary off

diary fminopt.log
dminfun = @(x,y) [
2*(2*x - 2*xa)*((x - xa)^2 - dist_a^2 + y^2) + (4*x*(x^2/b_ns^2 - (y - yb/2)^2/a
4*y*((x - xa)^2 - dist_a^2 + y^2) + (4*y*(y^2/b_ew^2 - (x - xa/2)^2/a_ew^2 + 1))
];

OPTIONS=optimset('gradobj','on');
[xopt_num,fval_num,~,output_num] = fminunc({ (@(X) minfun(X)' * minfun(X)), (@(X
diary off

hold off
```