Mathematik
Qualifikationsphase 1

1 . Übungsblatt
Einführung in die Integralrechnung

Aufgabe 1 (Fläche unter Funktionen)

Ermitteln Sie die Flächen unter den Funktionen in Abb. 1 sowie Abb. 2.

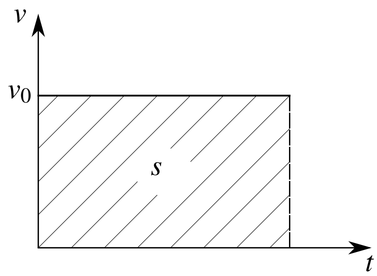

Abbildung 1: gleichförmige Bewegung

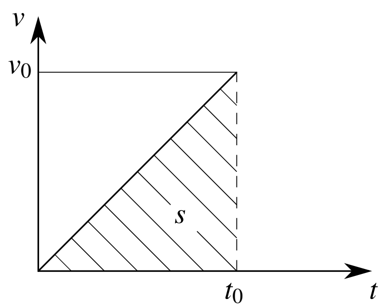

Abbildung 2: gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Aufgabe 2 (Ober- und Untersumme/ Streifenmethode)

a) Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^2$. Zerlegen Sie das Intervall $0 \leq x \leq 3$
   1. in 3 Streifen
   2. in 6 Streifen.

   Geben Sie jeweils die Ober- und Untersummen an.

b) Sei wie in Aufgabenteil a) $f(x) = x^2$ und $I = [0,3]$.
   1. Leiten Sie ausgehend von der Funktion $f(x)$ folgende Gleichung für die Obersumme her.

$$O_n = \left(\frac{x}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} n\,(n+1)\,(2n+1)$$

2. Bestimmen Sie allgemein die Obersumme O_n bis zur Stelle $x = 3$ in Abhängigkeit von der Streifenbreite n.
3. Bestimmen Sie nun die Obersumme O_n bis zur Stelle x in Abhängigkeit von x und n.
4. Bilden Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}$.
5. Bilden Sie die erste Ableitung des Grenzwertes aus Aufgabenteil 4. Was fällt Ihnen auf?

Aufgabe 3 (Stammfunktion)

a) Verbinden Sie jede Funktion f mit möglichen Stammfunktionen F.

	$F(x) = \frac{1}{3}x^8$
$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{1}{3}x^3$
	$F(x) = \frac{1}{24}x^8$
$f(x) = \frac{1}{3}x^7$	$F(x) = x$
	$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 5$
$f(x) = 11$	$F(x) = \frac{1}{24}x^8 + 8$
	$F(x) = e^x$
$f(x) = e^x$	$F(x) = 2e^x + \frac{3}{4}$
	$F(x) = \frac{7}{3}x^6$

b) Geben Sie zu den in Teilaufgabe a) noch nicht zugeordneten Stammfunktionen F einen Funktionsterm für f an, sodass F eine Stammfunktion von f ist.

Aufgabe 4 (Erste Integrationsregeln)

a) Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale mit Hilfe der Faktorregel.

$$\int 3x^2\,\mathrm{d}x \qquad \int 4x^3\,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\int 3e^x\,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{1}{3}\sin(x)\,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{4}{y^2}\,\mathrm{d}y$$

b) Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale mit Hilfe der Summenregel.

$$\int x^2 + 3x^3\,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{1}{82}x^{16} + x^7\,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{1}{x} + \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int 5x^2 + x - 8\,\mathrm{d}x \qquad \int \sin(x) + \cos(x)\,\mathrm{d}x \qquad \int y + 8y^2 + 7y^4\,\mathrm{d}y$$

Aufgabe 5 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

a) Berechnen Sie mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung folgende bestimmte Integrale.

$$\boxed{\int_a^b f = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$$

$$\int_1^6 \left(\frac{1}{2}x^3 + 2x\right) \mathrm{d}x \qquad \int_{-1}^1 (x^6 + 3x^5 - 2x^4) \,\mathrm{d}x \qquad \int_{-2}^3 x \,\mathrm{d}x$$

$$\int_3^5 (3x+1) \,\mathrm{d}x \qquad \int_{-3}^{-1} -2(x+2)^2 \,\mathrm{d}x \qquad \int_2^5 \xi^2 \mathrm{d}\xi$$

$$\int_0^\pi \sin(x) \,\mathrm{d}x \qquad \int_{-\pi}^\pi \cos(x) \,\mathrm{d}x \qquad \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Aufgabe 6 (Weiterführende Aufgaben)

a) Die Funktion f ist abschnittsweise definiert. Berechnen Sie das angegebene Integral.

$$\int_0^{10} f \,\mathrm{d}x \quad \text{mit} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ 2 & \text{für } 2 \leq x \leq 4 \\ \frac{1}{2} & \text{für } 4 \leq x \end{cases}$$

$$\int_0^5 f \,\mathrm{d}x \quad \text{mit} \quad f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ x + 3 & \text{für } 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

$$\int_1^6 f \,\mathrm{d}x \quad \text{mit} \quad f(X) = \begin{cases} x - 1 & \text{für } 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{für } 2 \leq x \leq 4 \\ 2x - 7 & \text{für } 4 \leq x \end{cases}$$

b) Sei $g : [-3, 1] \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \begin{cases} x^3 + 6x^2 + 12x + 8 & \text{für } -3 \leq x \leq -1 \\ x^2 - \frac{1}{3} & \text{für } -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

abschnittsweise definiert. Berechnen Sie $\int_{-3}^1 g(x)dx$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

Anwendungsbeispiel aus der Physik/ Mechanik

Aufgabe 7 (Anwendungsbeispiele des Integrals)

a) In der Physik spielt der magnetische Fluss Φ, der durch eine Leiterschlaufe führt, eine große Rolle.

$$\Phi = \int B \cdot \cos(\varphi) \cdot \mathrm{dA}$$

b) In der technischen Mechanik werden Belastungen, die auf Bauteile mit bestimmten Stoffeigenschaften und Geometrien wirken, vor der Konstruktion berechnet. Gegeben sei ein einseitig eingespannter Balken der Länge $3l$ mit der Torsionssteifigkeit GI_T, die in diesem Beispiel als konstant angenommen werden kann. Auf den Balken wirkt der Torsionsmomentenverlauf $M_{T1} = m_0 x + 2m_0 l$ bei $0 \leq x \leq 2l$ sowie $M_{T2} = 4m_0 l$ bei $2l \leq x \leq 3l$. Ferner gilt für den Verdrehwinkel ϑ:

$$\vartheta' = \frac{M_T}{GI_T}$$