Mathematik
Einführungsphase

2 . Übungsblatt
Kurvendiskussion

Aufgabe 1 (Ableitung)

Bilden Sie jeweils die erste und zweite Ableitung.

$f(x) = 3x^4 - 7x^3 + x^2 + 5x - 9$ $\quad g(x) = 2x - \sqrt{x}$ $\quad h(x) = sin(x) - 3x$

$i(x) = 2x^{\frac{3}{5}} - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + 3$ $\quad j(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad k(x) = nx^{3n}$

$l(x) = 3x^{-2} + 4x^{-1} + x$ $\quad m(x) = \frac{3}{4}x + \frac{7}{8}x - \frac{3}{2}x^3 + \frac{5}{6}x^3$ $\quad n(x) = 4x + x^2 - 2x^4$

Aufgabe 2 (Kurvendiskussion und Extremalproblem)

a) Gegeben ist die ganzrationale Funktion f mit $f(x) = 0,5x^4 - 3x^2 + 4 \quad x \in \mathbb{R}$
   1. Untersuchen Sie die Funktion f auf Symmetrie und Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.
   2. Ermitteln Sie Extrem- und Wendepunkte des Graphen der Funktion f.
   3. Stellen Sie den Graphen von f im Intervall $-2,5 \leq x \leq 2,5$ dar.
   4. Zwischen dem Graphen von f und der x-Achse soll ein Rechteck mit maximalem Flächeninhalt einbeschrieben werden. Ermitteln Sie die Länge der Rechteckseiten und die Größe des maximalen Flächeninhalt.

b) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2 + 2 * cos(x)$.
   1. Untersuchen Sie den Graphen auf Symmetrie.
   2. Bestimmen Sie die Nullstellen von f im Intervall $[0; 2\pi]$ und den Schnittpunkt des Graphen mit der y-Achse.
   3. Ermitteln Sie Extrem- und Wendepunkte des Graphen im Intervall $[0; 2\pi]$
   4. Skizzieren Sie den Verlauf von f im Intervall $[0; 2\pi]$ in ein geeignetes Koordinatensystem.
   5. Zwischen 0 und π wird in die Fläche zwischen der Kurve und der x-Achse ein Rechteck so einbeschrieben, dass die Koordinatenachsen eine Begrenzung und die Koordinaten eines Punktes $P(r|s)$ auf f die andere Begrenzung bilden. Bestimmen Sie die Lage von P so, dass der Umfang des Rechtecks extremal wird. Geben Sie den Umfang jeweils an.

c) Eine Zündholzschachtel soll 5cm lang sein und das Volumen 45cm^3 haben. Bei welcher Breite und Höhe braucht man zur Herstellung am wenigsten Material?

Aufgabe 3 (Modellierung von ganzrationalen Funktionen)

Eine kleine Firma stellt Mountainbikes her. Bei einer Monatsproduktion von x Mountainbikes entstehen Fixkosten in Höhe von 5000 Euro und variable Kosten V(x) (in Euro), die durch folgende Tabelle modellhaft gegeben sind:

x	0	2	6	10
V(x)	0	306	954	1650

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der ganzrationalen Funktion 2. Grades $V(x)$ sowie der monatlichen Herstellungskosten H in Abhängigkeit von x.
Skizzieren Sie den Graph von H für $0 \leqslant x \leqslant 200$ in ein geeignetes Koordinatensystem.
Bei welcher Produktionszahl sind die variablen Kosten fünfmal so hoch wie die Fixkosten?

b) Alle monatlich produzierten Mountainbikes werden zu einem Preis von 450 Euro pro Stück an einen Händler verkauft.
Geben Sie den monatlichen Gewinn G in Abhängigkeit von x an und skizzieren Sie den Graphen der Gewinnfunktion in das vorhandene Koordinatensystem.
Bei welchen Produktionszahlen macht die Firma Gewinn?
Wie hoch ist der maximale Gewinn pro Monat?

c) Durch große Konkurrenz auf dem Markt muss die Firma den Preis pro Mountainbike senken.
Um wie viel Prozent vom ursprünglich erzielten Preis ist dies höchstens möglich, wenn pro Monat 90 Mountainbikes produziert werden und der Gewinn mindestens 2000Euro betragen soll?

Aufgabe 4 (Anwendungsbeispiel)

Für Skisprungschanzen, auf denen offizielle Wettkämpfe stattfinden, hat der internationale Skiverband (FIS) Normen erstellt. In einer älteren Norm steht:
"Die Anlaufbahn besteht aus einem möglichst geradlinig gestalteten Teil mit der Neigung γ, einem anschließenden kreisförmigen Übergangsbogen mit dem Radius r und dem geradlinig verlaufenden Schanzentisch mit der Neigung α und der Länge t."

Die Mühlenkopfschanze in Willingen wurde nach ihrem Umbau 2001 von der FIS als offizielle Wettkampfstätte anerkannt. Von der Schanze sind folgende Angaben bekannt:
In einem Koordinatensystem (alle Angaben in Meter) beginnt der Anlauf im Punkt $P_A(0;50,64)$. Der obere geradlinige Teil hat die Länge $56,3m$ und die Neigung $\gamma = 35°$ gegenüber der Horizontalen. Der kreisförmige Übergangsbogen hat den Mittelpunkt $M(106,36;104,35)$, der Schanzentisch beginnt im Punkt $P_S(86,32;1,28)$, hat die Länge $6,7m$ und die Neigung $\alpha = 11°$ gegenüber der Horizontalen. Der gesamte Anlauf, also auch der Schanzentisch, ist nach unten geneigt.

a) Skizzieren Sie den Verlauf des Anlaufs in einem Koordinatensystem.

b) Bestimmen Sie die Geradengleichung für den geradlinigen Anlauf und die Koordinaten des Punktes $P_E(x_E;y_E)$, an dem dieser endet. [*zur Kontrolle:* $P_E(46,12;18,35)$(auf 2 Nachkommastellen gerundet)]

c) Berechnen Sie m_1 und m_2 gemäß der Definition im untenstehenden Kasten und anschließend das Produkt $m_1 \cdot m_2$.
Bonus: Erklären Sie die Bedeutung des letzten Ergebnisses im Sachzusammenhang.

(1)	m_1= Steigung des oberen geradlinigen Anlaufteils
(2)	m_2= Steigung der Geraden durch M und P_E

d) In einer neueren FIS-Norm steht, dass die gekrümmte Übergangskurve eine kubische Parabel, d. h. eine Parabel dritter Ordnung, sein darf.
Geben Sie vier Bedingungen an, damit sich die kubische Parabel p_3 mit

$$p_3(x) = -0,000028053x^3 + 0,011864312x^2 - 1,61556349x + 70,3757036$$

in guter Näherung in den Punkten P_E und P_S ohne Knick und ohne Sprung an die geradlinigen Teile des Anlaufs und des Schanzentisches anschmiegt. Prüfen Sie, ob die Bedingungen für den Punkt P_E erfüllt sind.

Hinweis: Alle vier Bedingungen sind bereits im Text enthalten und müssen nur noch als Gleichungen aufgeschrieben werden.